

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Рыбак, Е. В. Гапоненко, А. В. Чичварин, Синтез много-  
связного цифрового регулятора роботизированной вибро-  
защитной платформой на основе  $H_\infty$ -оптимизации, *Ав-  
томат. и телемех.*, 2018, выпуск 7, 99–116

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-  
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.118.254.83

4 ноября 2024 г., 22:28:33



# Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2018 г. Л.А. РЫБАК, д-р техн. наук (rl\_bgту@intbel.ru),  
Е.В. ГАПОНЕНКО, канд. техн. наук (gaponenkobel@gmail.com)  
(Белгородский государственный технологический  
университет им. В.Г. Шухова),  
А.В. ЧИЧВАРИН, канд. техн. наук (ch\_alex79@rambler.ru)  
(Старооскольский технологический институт (филиал) МИСиС)

## СИНТЕЗ МНОГОСВЯЗНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА РОБОТИЗИРОВАННОЙ ВИБРОЗАЩИТНОЙ ПЛАТФОРМОЙ НА ОСНОВЕ $H_\infty$ -ОПТИМИЗАЦИИ<sup>1</sup>

Рассмотрена задача построения многосвязного управления роботизированной платформой, предназначенной для защиты технологических объектов и человека-оператора от низкочастотных воздействий со стороны подвижного основания. Платформа включает шесть приводных механизмов с шаговыми электродвигателями. Задача решается методами современной теории робастной стабилизации и оптимального управления на основе  $H_\infty$ -оптимизации в пространстве состояний. Построена математическая модель многомерной системы с учетом характеристик электро-механических приводов, в качестве переменных состояния использованы сигналы датчиков обратных связей. Дан пример синтеза многомерного оптимального стабилизирующего регулятора в форме обратной связи по состоянию системы с возмущениями, ограниченными по  $L_2$ -норме. Определена структура управления по обратным связям и получена матрица коэффициентов обратных связей. Представлены результаты математического моделирования.

*Ключевые слова:* роботизированная платформа, многосвязный регулятор, стабилизация, робастное управление, уравнение Риккати, оптимизация.

### 1. Введение

В настоящее время все большее распространение в технике и производстве приобретают робототехнические системы параллельной структуры. Отличительной особенностью таких механизмов является способность воспринимать и передавать нагрузки подобно пространственным фермам и обеспечивать шесть степеней свободы выходному звену (платформе) в сочетании с его высокоточным позиционированием относительно основания. Платформа и основание связаны между собой замкнутой кинематической цепью, каждое из соединительных звеньев которой содержит линейный приводной механизм и

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (соглашение № 16-19-00148).

две сферические кинематические пары с ограничением от вращения звена относительно его продольной оси.

Широким распространением гексаподы обязаны наличию целого ряда преимуществ. Так, в отличие от традиционных многокоординатных последовательных систем, в которых погрешности по каждой из осей суммируются, погрешности в механизмах параллельной структуры могут взаимно компенсироваться, так что точность может достигать долей микрона. Кроме того, их существенным преимуществом является высокая точность измерения относительных перемещений платформы и основания, что позволяет применять их в особо точных станках, робототехнических системах и в медицине, а также подавление низкочастотных колебаний и ударов от основания к платформе и наоборот, что позволяет применять их в системах активной виброизоляции. В качестве датчиков обратных связей используем акселерометры, установленные на объекте и основании, и датчик относительного перемещения.

Для линейных непрерывных объектов задачи синтеза оптимальных законов управления в виде обратных связей по состоянию рассматривались в [1, 2]. В [3] рассмотрен синтез оптимального регулятора активной виброзащитной системы на основе квадратичного функционала качества, для которой считалось доступным точное математическое описание. В реальных же задачах управления неизбежно присутствует неопределенность, а используемое управление должно быть работоспособно при наличии неопределенности. Подход, использующий понятие сверхустойчивости, предложенный в [4, 5] и в дальнейшем развитый в понятие обобщенной сверхустойчивости [6], был применен для синтеза сверхустойчивого регулятора роботизированной виброзащитной системы [7]. В статье показано, что добиться сверхустойчивости труднее, чем устойчивости, и нельзя гарантировать этого свойства для системы со скалярным управлением. Кроме того, оценки показателей качества, полученные таким путем, являются их верхними границами, поэтому синтезированные законы управления будут лишь субоптимальными. Использование методов  $H_\infty$ -оптимизации для подавления возмущений, ограниченных в  $L_2$  норме, позволяет минимизировать амплитуду выходного сигнала на объекте в некоторой полосе частот, мерой чего служит  $H_\infty$ -норма передаточной функции рассматриваемой системы, на основе синтезированного стабилизирующего регулятора.  $H_\infty$ -управление имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами синтеза робастных регуляторов: а) данный метод в явном виде учитывает устойчивость и чувствительность системы; б) алгоритм построения регулятора относительно прост, особенно в сравнении с другими видами робастного управления; в) данный метод позволяет точно формировать выходную частотную характеристику, что особенно важно в решаемой задаче.

Задача робастной квадратичной стабилизации впервые рассматривалась А.М. Мейлахсом [1]; более подробно техника, основанная на линейных матричных неравенствах, описана в [2]. Робастная стабилизация при неопределенностях, заданных  $H_\infty$ -нормой, сводится к стандартной задаче  $H_\infty$ -оптимизации. Это было осуществлено еще в публикациях, посвященных  $H_\infty$ -теории [8–10]. В разных исследованиях [11] показано, что и другие виды неопре-

деленностей могут учитываться с помощью техники  $H_\infty$ . Задача об оптимальном подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления. Однако ею занимались преимущественно в стохастической постановке, где решением является LQG (Linear Quadratic Gaussian – линейно-квадратично-гауссовский) регулятор. Другая модель внешних возмущений – гармонические с неизвестной частотой; в этом случае их подавление возможно с помощью  $H_\infty$ -оптимизации. Использование  $H_\infty$ -нормы в оптимальном управлении обычно связывают с публикацией [10], однако в частных случаях подобные равномерно-частотные критерии использовались и ранее. В настоящее время  $H_\infty$ -оптимизация составляет ядро теории управления. Первоначально задача была решена в частотной области с использованием таких средств теории функций комплексного переменного [8, 9], а затем в [12] было дано полное решение в пространстве состояний. Этот метод в основном и используется сейчас для численного решения проблемы  $H_\infty$ -оптимизации в пакетах Control System Toolbox и Robust Control Toolbox системы MATLAB.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим использование роботизированной системы на базе платформы Стюарта в качестве активной виброзащитной системы кинематического принципа действия, предназначенной для защиты технологических объектов и человека-оператора от низкочастотных воздействий со стороны подвижного основания. При этом поставим обратную робототехническую задачу: при любых случайных воздействиях со стороны подвижного основания построить такой закон управления приводными механизмами, при котором объект (платформа) является неподвижным в инерциальной системе координат.

В качестве каждого из приводных механизмов виброзащитной системы будем использовать электромеханический исполнительный механизм, который является наиболее простым по своему конструктивному исполнению и эксплуатационным характеристикам. Кроме того, он обеспечивает большие относительные перемещения и возможность эксплуатации в неблагоприятных средах. Частотный диапазон работы определяется, главным образом, частотным диапазоном используемого электродвигателя. Как правило, можно построить систему таким образом, чтобы частотный диапазон покрывал всю рассматриваемую частотную область в нижней части спектра.

Рассмотрим роботизированную платформу на базе гексапода с шестью степенями свободы (рис. 1). Основание и рабочая платформа (объект) соединены посредством шести опор, присоединенных к основанию и рабочей платформе с помощью сдвоенных сферических шарниров. Опоры приводятся в движение посредством призматических шарниров. В качестве приводного механизма используем электромеханический исполнительный механизм, включающий шаговый двигатель и передачу винт-гайка, который является наиболее простым по своему конструктивному исполнению и эксплуатационным характеристикам. В качестве датчиков обратных связей используем акселерометры, установленные на объекте и основании, и энкодеры, подсчитывающие число шагов, совершенных двигателями, т.е. угол поворота их осей.

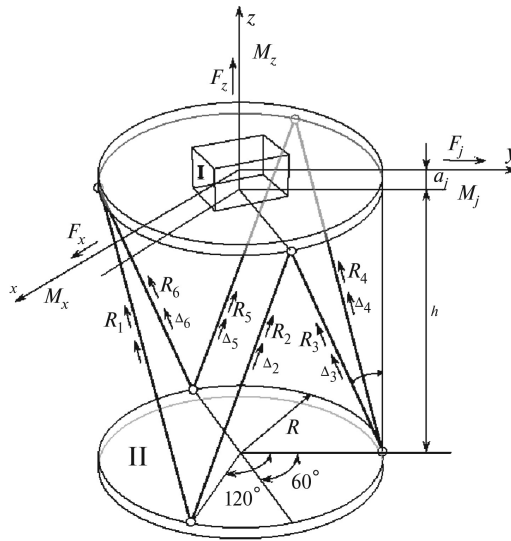


Рис. 1. Схема роботизированной платформы на базе гексапода.

На рис. 1 с выходным звеном связана базовая система координат  $x, y, z$ . Координаты  $x, y, z$  задают положение рабочей платформы в базовой системе, а  $\varphi, \psi, \theta$  – углы поворотов системы вокруг осей  $x, y$  и  $z$ , которые определяют угловую ориентацию объекта относительно основания.

Для управления роботизированной платформой (рис. 1) при действии возмущений со стороны подвижного основания задача  $H_\infty$ -оптимизации заключается в построении стабилизирующего регулятора в форме обратной связи по состоянию системы с возмущениями, ограниченными в  $L_2$ -норме, а показателем качества является  $H_\infty$ -норма передаточной функции замкнутой системы. При описании системы в пространстве состояний будем искать управление, которое минимизирует критерий  $H_\infty$ -нормы передаточной функции системы от возмущений к выходу, а фактически – амплитуду возмущений на основании. Так как  $H_\infty$ -норма передаточной функции есть энергия выхода системы при подаче на вход сигнала с единичной энергией, то осуществляется минимизация энергии ошибки для наихудшего случая входного возмущения, т.е. достигается оптимальное гашение вибрации. Это решение связано с существованием положительно определенного решения уравнения Риккати [13]. Наилучшую оценку получим, последовательно перебирая весовые коэффициенты этого уравнения и решая соответствующее уравнение Риккати.

### 3. Построение математических моделей

Рассмотрим схему одной опоры платформы, которая представлена на рис. 2. Электрические сигналы с датчиков 4 и 5 поступают в регулятор 6, сигнал из которого подается на вход электрической следящей системы, управляющей поворотом ротора двигателя 1. Двигатель вращает винт, и гайка 2 перемещается в направляющем элементе, изменяя положение объекта 3 относительно основания.

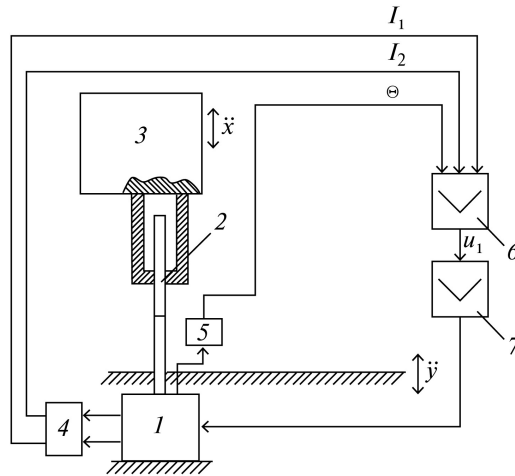


Рис. 2. Схема опоры роботизированной платформы: 1 — электродвигатель; 2 — гайка шариковой винтовой передачи; 3 — объект; 4 — датчик тока; 5 — датчик положения; 6 — регулятор; 7 — усилитель мощности;  $I_1, I_2$  — токи двигателя;  $\Theta$  — угол поворота ротора двигателя;  $\ddot{x}$  — абсолютное ускорение объекта,  $\ddot{y}$  — абсолютное ускорение основания.

В качестве двигателя будем использовать двухфазный шаговый электродвигатель с активным неявнополюсным ротором [14]. Примем за начало отсчета угла  $\theta$  положение, при котором ось полюса ротора совпадает с осью первой фазы.

Исходные уравнения движения ротора и напряжения в обмотках статора являются нелинейными и имеют вид [14]:

$$\begin{cases} J\ddot{\Theta} + D\dot{\Theta} + I_1 p \psi \sin p\Theta + I_2 p \psi \sin p(\Theta - \lambda) + M = 0, \\ rI_1 + LI_1 + M_{12}I_2 - \frac{d}{dt}(\psi \cos p\Theta) = u, \\ rI_2 + LI_2 + M_{12}I_1 - \frac{d}{dt}(\psi \cos p\Theta - \lambda) = u, \end{cases}$$

где  $J$  — момент инерции ротора двигателя,  $I_1, r_1$  — ток и сопротивление 1-й фазы статора,  $I_2, r_2$  — ток и сопротивление 2-й фазы статора,  $u$  — напряжение источника питания,  $\Theta$  — угол между осью полюсов и вектором полностью намагничивающей силы,  $p$  — число пар полюсов,  $\psi$  — максимальное потокоцепление возбужденного ротора с одной фазой статора,  $L$  — собственная индуктивность,  $D$  — коэффициент вязкого трения,  $I_0$  — установившееся значение тока в обмотках,  $\lambda$  — интервалы между обмотками,  $M_{12}$  — взаимная индуктивность.

В [15] с использованием методов линеаризации авторами получена математическая модель одномерной системы, построенная в пространстве состояний. В [15] система уравнений, описывающих движение одной опоры при вве-

дении переменных состояния  $x_1 = \dot{v}$ ,  $x_2 = v$ ,  $x_3 = I_1$  и  $x_4 = I_2$ , имеет вид

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{JR_1 + R_2m} \left( D + \frac{2\Psi_1}{L - M_{12}} \right) x_1 - \frac{R_1\Psi_2}{JR_1 + R_2m} x_2 + \\ \quad + \frac{r\Psi_1}{(JR_1 + R_2m)(L - M_{12})} (x_3 - x_4) - R_2m\ddot{y}, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = \frac{R_1\Psi_1}{L - M_{12}} x_1 - \frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} x_3 + \frac{M_{12}r}{L^2 - M_{12}^2} x_4 + \frac{1}{L - M_{12}} u, \\ \dot{x}_4 = -\frac{R_1\Psi_1}{L - M_{12}} x_1 + \frac{Mr}{L^2 - M_{12}^2} x_3 - \frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} x_4 + \frac{1}{L - M_{12}} u, \end{array} \right.$$

где  $v = (x - y)$  — относительное перемещение объекта относительно основания, или в векторно-матричной форме

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{Y}, \\ \dot{v} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \end{cases}$$

где  $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  — вектор переменных состояния,  $\mathbf{Y} = [\ddot{y} \ 0 \ 0 \ 0]^T$  — вектор возмущающего воздействия,  $\mathbf{u} = [u \ u \ 0 \ 0]^T$  — вектор входных сигналов,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$  — матрицы коэффициентов системы.

Работа шагового двигателя осуществляется в результате подачи на вход импульсов напряжения. Переведем уравнения системы (4) в дискретную форму [16]. В результате получим:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}[i + 1] &= \mathbf{A}_\Delta \mathbf{X}[i] + \mathbf{B}_\Delta \mathbf{u}[i] + \mathbf{G}_\Delta \mathbf{Y}[i], \\ v[i + 1] &= \mathbf{C}_\Delta \mathbf{X}[i], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\Delta &= \exp(\mathbf{A}T) = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A})^i T^i}{i!}, \\ \mathbf{B}_\Delta &= \left( \int_0^T \exp(\mathbf{A}(T-t)) dt \right) \cdot \mathbf{B} = \left( \mathbf{I}T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A})^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right) \cdot \mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_\Delta &= \mathbf{C} \cdot \left( \int_0^T \exp(\mathbf{A}(T-t)) dt \right) = \mathbf{C} \cdot \left( \mathbf{I}T + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A})^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right). \end{aligned}$$

В матричном уравнении (3)  $\mathbf{A}_\Delta$ ,  $\mathbf{B}_\Delta$ ,  $\mathbf{C}_\Delta$  и  $\mathbf{G}_\Delta$  — матрицы коэффициентов дискретной системы,  $T$  — период дискретности. Из-за большой сложности математических выкладок матрицы коэффициентов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{G}$  представлены в общем виде. Конкретные значения этих матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{G}$  удобно

рассчитывать в числовом виде для каждой конкретной четверки матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $G$ .

Перейдем к рассмотрению многомерной системы с шестью приводными механизмами (рис. 1).

Для этой системы выражения для реакций стержней тела массой  $m$  и радиусами инерции  $\rho_x$ ,  $\rho_y$ ,  $\rho_z$  по аналогии с выражением  $m\ddot{x} = R_1$  можно записать

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m\rho_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\rho_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\rho_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = A_{\Gamma}^T \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}$$

Из полученного выражения следует, что

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} & \ddot{\varphi} & \ddot{\theta} & \ddot{\psi} \end{bmatrix}^T = M^{-1} A_{\Gamma}^T \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \end{bmatrix},$$

где  $R_1, \dots, R_6$  — силы реакции стержней,  $M$  — матрица моментов инерции.

Перемещение твердого тела (объекта) в пространстве связано с перемещениями вдоль шести стержней платформы Гауфа–Стюарта матрицей плюккеровых координат  $A_{\Gamma}$ , которая имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y & -\frac{1}{2} \sin y & \cos y & -\frac{a_z}{2} \sin y & -\frac{\sqrt{3}}{2} a_z \sin y & -\frac{\sqrt{3}}{2} R \sin y \\ -\sin y & 0 & \cos y & \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos y & a_z \sin y + \frac{R}{2} \cos y & \frac{\sqrt{3}}{2} R \sin y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y & \frac{1}{2} \sin y & \cos y & -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos y + \frac{a_z}{2} \sin y & -\frac{\sqrt{3}}{2} a_z \sin y + \frac{R}{2} \cos y & -\frac{\sqrt{3}}{2} R \sin y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y & -\frac{1}{2} \sin y & \cos y & -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos y + \frac{a_z}{2} \sin y & -\frac{\sqrt{3}}{2} a_z \sin y + \frac{R}{2} \cos y & \frac{\sqrt{3}}{2} R \sin y \\ -\sin y & 0 & \cos y & \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos y & a_z \sin y + \frac{R}{2} \cos y & -\frac{\sqrt{3}}{2} R \sin y \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin y & \frac{1}{2} \sin y & \cos y & \frac{a_z}{2} \sin y & -\frac{\sqrt{3}}{2} a_z \sin y & \frac{\sqrt{3}}{2} R \sin y \end{bmatrix}.$$

Примем новые обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; \\ \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; \\ \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; \\ \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; \\ \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; \\ \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1; & \dot{x} &= x_1. \end{aligned}$$



Тогда система уравнений (1) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{24} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{JR_2 + R_2m} \left( D + \frac{2\psi_1}{L - M_{12}} \right) A_\Gamma & E_6 & \frac{R_1\psi_1}{L - M_{12}} E_6 & -\frac{R_1\psi_1}{L - M_{12}} E_6 \\
 & -\frac{R_1\psi_2}{JR_1 + R_2m} A_\Gamma & 0_6 & 0_6 & 0_6 \\
 & \frac{r\psi_1}{(JR_1 + R_2m)(L - M_{12})} A_\Gamma & 0_6 & -\frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} E_6 & \frac{Mr}{L^2 - M_{12}^2} E_6 \\
 & -\frac{r\psi_1}{(JR_1 + R_2m)(L - M_{12})} & 0_6 & \frac{Mr}{L^2 - M_{12}^2} E_6 & -\frac{Lr}{L^2 - M_{12}^2} E_6 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{6x1} \\ 0_{6x1} \\ \frac{1}{L - M_{12}} E_{6x1} \\ \frac{1}{L - M_{12}} E_{6x1} \end{bmatrix} \cdot [u_1 \ \dots \ u_6]^T + \begin{bmatrix} -R_2m \\ 0_{6x1} \\ 0_{6x1} \\ 0_{6x1} \end{bmatrix} \cdot [y_1 \ \dots \ y_6]^T,
 \end{aligned}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \mathbf{X}[i+1] &= A'_\Delta \mathbf{X}[i] + B'_\Delta \mathbf{u}[i] + G'_\Delta [i], \\
 v[i+1] &= C'_\Delta \mathbf{X}[i].
 \end{aligned}$$

Здесь члены матриц, содержащие массу объекта, домножаются на матрицу п्लоккерových координат  $A_\Gamma$ . Нули в исходной системе (1) заменяются нулевыми матрицами размеров  $6 \times 6$ , обозначенными  $0_6$ , а скалярные величины (кроме содержащих массу) домножаются на единичную матрицу  $E_6$ , т.е. матрицу, содержащую на главной диагонали единицы, а остальные элементы равны нулю.

#### 4. Синтез регулятора

Далее рассмотрим алгоритм построения стабилизирующего регулятора, подробно описанный в [17].

При подаче на вход устойчивой системы гармонического сигнала  $w(t) = ae^{j\omega t}$  установившийся сигнал на выходе равен

$$\bar{y}(t) = H(j\omega) w(t), \quad H(s) = C(sI - A)^{-1} B,$$

где  $H(s)$  — передаточная функция замкнутой системы от возмущения  $w(t)$  к выходу  $y(t)$ ,  $I$  — единичная матрица.

Для решения задачи стабилизации при действии возмущений со стороны основания необходимо, чтобы амплитуда выходного сигнала была достаточно

малой для всех частот  $\omega$ . Мерой этого может служить величина

$$\sup_{\omega} |H(j\omega)| = \|H(s)\|_{\infty},$$

т.е.  $H_{\infty}$ -норма передаточной функции.

Если в системе присутствует управление, то задача  $H_{\infty}$ -оптимизации заключается в выборе регулятора в форме обратной связи по состоянию  $\mathbf{u} = K \cdot \mathbf{X}$ , который минимизирует  $H_{\infty}$ -норму передаточной функции  $H(s)$  замкнутой системы, т.е.

$$\min_K \|H(s)\|_{\infty}, \quad H(s) = C(sI - (A + BK))^{-1}G,$$

в предположении, что  $K$  — стабилизирующий регулятор.

Показателем качества процесса стабилизации может служить величина

$$J \doteq \|H(s)\|_{\infty}^2 = \sup_{\omega} \|y\|_2^2.$$

Введем во второе уравнение системы (4) управление  $\mathbf{u}$ . Сделано это для ограничения величины используемого управления, так как в противном случае можно добиться сколь угодно маленького значения  $J$  с помощью достаточно больших  $\mathbf{u}$ . В случае же введения управления подынтегральное выражение квадратичного критерия качества представляет собой сумму двух слагаемых, зависящих соответственно от  $x$  и от  $\mathbf{u}$ . Тогда если за счет больших управлений добьемся быстрого убывания члена, зависящего от  $x$ , то будет увеличиваться зависящий от  $u$  член и общее значение критерия качества также возрастет. Система (4) примет вид:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{X}[i+1] = A'_{\Delta} \mathbf{X}[i] + B'_{\Delta} \mathbf{u}[i] + G'_{\Delta} \mathbf{Y}[i]; \\ V[i+1] = C'_{\Delta} \mathbf{X}[i] + B'_{\Delta} \mathbf{u}[i]. \end{cases}$$

Как известно,

$$J = \|H(s)\|_{\infty}^2,$$

где  $H(s) = (C'_{\Delta} + B'_{1\Delta}K)(sz - A'_{\Delta} + B'K)^{-1}G'$  — передаточная функция замкнутой системы от возмущения к выходу  $y$ , т.е. минимизация  $J$  эквивалентна задаче  $H_{\infty}$ -оптимизации.

Преобразуем предварительно  $\|y\|_2^2$ :

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \int_0^{\infty} (C'_{\Delta} \cdot x + B'_{1\Delta} \cdot \mathbf{u})^T (C'_{\Delta} \cdot x + B'_{1\Delta} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left( x^T \cdot C'_{\Delta}{}^T \cdot C'_{\Delta} \cdot x + 2 \cdot \mathbf{u}^T \cdot B'_{1\Delta}{}^T C'_{\Delta} x + \mathbf{u}^T \cdot B'_{1\Delta}{}^T \cdot B'_{1\Delta} \cdot \mathbf{u} \right) dt, \end{aligned}$$

где  $^T$  — индекс транспонирования матрицы.

Предположим для простоты выкладок, что  $B'_{1\Delta} \cdot C'_{\Delta} = 0$ , тогда смешанное произведение отсутствует  $\|y\|_2^2 = \int_0^{\infty} (x^T \cdot C'_{\Delta}{}^T \cdot C'_{\Delta} \cdot x + \mathbf{u}^T \cdot S \cdot \mathbf{u}) dt$ , где введено обозначение  $S \equiv B'_{1\Delta}{}^T B'_{1\Delta}$ . Таким образом, задача записывается в виде:

$$\dot{x} = A_C x + G'_{\Delta} y, \quad \|w\|_2^2 \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad A_C = A'_{\Delta} + B'_{\Delta} R,$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T R x dt, \quad \text{где} \quad R = C'_{\Delta}{}^T C'_{\Delta} + K^T S K.$$

В современной теории управления доказывается теорема из [17], согласно которой если неравенство

$$(6) \quad A_C^T P + P A_C + \frac{1}{\gamma^2} P G'_{\Delta} G'_{\Delta}{}^T P + P \leq 0$$

имеет положительное решение  $P > 0$ , то  $J \leq \gamma^2$ .

Умножим неравенство (6) слева и справа на  $Q = P^{-1}$ :

$$Q(A'_{\Delta} + B'_{\Delta} K)^T + (A'_{\Delta} + B'_{\Delta} K)Q + \frac{1}{\gamma^2} G'_{\Delta} G'_{\Delta}{}^T + Q C'_{\Delta}{}^T C'_{\Delta} Q + Q K^T S K Q \leq 0$$

и сделаем замену  $\mathbf{Y} = K \cdot Q$ :

$$(7) \quad Q A'_{\Delta}{}^T + A'_{\Delta} Q + Q C'_{\Delta}{}^T C'_{\Delta} Q + \mathbf{Y}^T B'_{\Delta}{}^T + B'_{\Delta} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T S \mathbf{Y} + \frac{1}{\gamma^2} G'_{\Delta} G'_{\Delta}{}^T \leq 0.$$

Преобразуем члены, зависящие от  $\mathbf{Y}$  (дополнением до полного квадрата):

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}^T B'_{\Delta}{}^T + B'_{\Delta} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T S \mathbf{Y} = \\ & = \left( S^{1/2} \mathbf{Y} + S^{-1/2} B'_{\Delta}{}^T \right)^T \left( S^{1/2} \mathbf{Y} + S^{-1/2} B'_{\Delta}{}^T \right) - B'_{\Delta} S^{-1} B'_{\Delta}{}^T \geq -B'_{\Delta} S^{-1} B'_{\Delta}{}^T, \end{aligned}$$

причем равенство достигается при  $\mathbf{Y} = -S^{-1} B'_{\Delta}{}^T$ . Так как необходимо обеспечить выполнение неравенства, то, не допуская его ослабления, можно заменить  $\mathbf{Y}^T B'_{\Delta}{}^T + B'_{\Delta} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T S \mathbf{Y}$  на  $-B'_{\Delta} S^{-1} B'_{\Delta}{}^T$ .

Неравенство (7) выполняется при некоторых положительных  $Q$  и, некоторых  $\mathbf{Y}$  тогда и только тогда, когда выполняется неравенство относительно  $Q > 0$ :

$$Q A'_{\Delta}{}^T + A'_{\Delta} Q + Q C'_{\Delta}{}^T C'_{\Delta} Q - B'_{\Delta} S^{-1} B'_{\Delta}{}^T + \frac{1}{\gamma^2} G'_{\Delta} G'_{\Delta}{}^T \leq 0.$$

В свою очередь это неравенство имеет положительно определенное решение  $Q > 0$ , если такое решение имеет уравнение Рикатти размером  $24 \times 24$ , полученное заменой неравенства на равенство. По этому решению восстанавливаем соответствующий стабилизирующий регулятор  $K = \mathbf{Y} Q^{-1} = -S^{-1} B'_{\Delta}{}^T Q^{-1}$ .

Полученное уравнение не может быть решено аналитическими методами, поэтому применим для его решения численный метод Лауба, изложенный в [17, 18].

Метод Лауба состоит в следующем. Для матричного уравнения вида  $\mathbf{XG}\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{F} = 0$  строится так называемая сопровождающая матрица  $M = \begin{pmatrix} A & G \\ F & -A^T \end{pmatrix}$ .

*Шаг 1.* Приведение матрицы  $M$  к форме Хессенберга (“почти” треугольной матрице, у которой все элементы, лежащие ниже первой поддиагонали равны нулю), т.е. вычисление матрицы  $H$  и  $Q_1$  порядка  $2n$  таких, что  $Q_1^T M Q_1 = H$ , где  $Q_1$  — ортогональная, а  $H$  — верхняя хессенбергская матрицы.

*Шаг 2* (вычисление вещественной формы Шура матрицы  $H$ ). Найти матрицы  $T$  и  $Q_2$  порядка  $2n$  такие, что  $Q_2^T H Q_2 = T$ , где  $Q_2$  — ортогональная, а  $T$  — верхняя блочная треугольная с диагональными блоками  $1 \times 1$  и  $2 \times 2$ . Блоки порядка 1 соответствуют вещественным собственным значениям матрицы  $T$ , а порядка 2 — комплексным собственным сопряженным парам. Матрицу  $T$  такой структуры называют вещественной формой Шура матрицы  $H$ .

*Шаг 3* (переупорядочение вещественной формы Шура). Вычислить ортогональную матрицу  $Q_3$ , такую что  $Q_3^T T Q_3 = \hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$ .

*Шаг 4.* Получение решения  $\mathbf{X}$  из матричного уравнения  $\mathbf{X}U_{11} = U_{21}$ , где  $U_{11}$  и  $U_{21}$  являются  $n$ -мерными блоками ортогональной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = Q_1 Q_2 Q_3.$$

Данный метод реализован в виде  $M$ -функции в среде MATLAB.

В результате вычислений получено неустойчивое решение. Его неустойчивость связана с наличием в системе избыточных связей. Для исключения избыточных связей используем алгоритм понижения порядка системы, реализованный в пакете прикладных программ  $\mu$ -Tools среды MATLAB.

В соответствии с алгоритмом, изложенным в [18–20], первоначально приведем уравнения к нормальной форме Жордана, т.е. к блочно-диагональному виду. Для случая комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы уравнение Риккати становится трудноразрешимым. В рассматриваемом в статье случае имеется четыре пары комплексных корней и четыре корня, равных единице, следовательно, для обеспечения устойчивости системы необходимо понизить ее порядок до 12. Для этого разбиваем систему уравнений состояния, записанную относительно  $x$  на две подсистемы относительно  $x_1$  (сохраняемая часть вектора состояний  $x$ ) и относительно  $x_2$  (часть вектора состояний  $x$ , подлежащая удалению)

$$(8) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

и относительно уравнений выхода

$$(9) \quad v = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D\mathbf{u}.$$

Примем на основании результатов [16, 17], что переменные состояния  $x_2$  постоянны. Приравняем во втором уравнении системы (8)  $\dot{x}_2$  к нулю и решим (8) относительно  $x_2$ . Полученный результат подставляем в первое уравнение состояния (8) и в уравнения выхода (9). В результате имеем редуцированную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{11}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)\mathbf{u}, \\ y &= (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Для этой системы аналогично рассмотренному в разделе алгоритму строим уравнение Риккати, порядок которого при этом понижается до 12.

В результате получаем решение уравнения Риккати и определяем матрицу коэффициентов  $K$ . Получены следующие значения коэффициентов обратной связи по состоянию

$$K = \begin{bmatrix} -3,53 \cdot 10^{-4}; & 0,999; & 2,87 \cdot 10^{-2}; & 3,75 \cdot 10^{-4}; & 1,41 \cdot 10^{-2}; \\ -1,18 \cdot 10^{-5}; & 1,23 \cdot 10^{-3}; & 0,999; & -1,31 \cdot 10^{-8}; & -4,92 \cdot 10^{-8}; & 4,10 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что синтез стабилизирующего регулятора не вызывает принципиальных трудностей, если все переменные состояния системы известны. Однако в реальных условиях измерению с помощью физических приборов (датчиков) доступны лишь некоторые переменные состояния системы. Это обстоятельство показывает необходимость использования способов определения недоступных для измерения переменных состояния на основе измерения лишь измеряемой части переменных состояния с помощью наблюдателя [21–23]. Наблюдатель координат состояния может быть использован для получения величины абсолютной скорости объекта. Данный вариант имеет некоторые преимущества перед непосредственным интегрированием ускорения на объекте, главное из которых – более высокая помехоустойчивость. Действительно, если в канале измерения ускорения на объекте в какой-то временной такт подействовала кратковременная помеха большой величины, то алгоритм непосредственного интегрирования будет давать неверные результаты. Другими словами, такой алгоритм работает по разомкнутому циклу. В наблюдателе же существует обратная связь, следовательно, возможна достоверность показаний.

## 5. Результаты моделирования

Модель полученной системы построена в среде MATLAB (рис. 3). Далее для простоты приведем результаты только для одной приводной опоры системы, подразумевая, что для остальных опор они аналогичны.

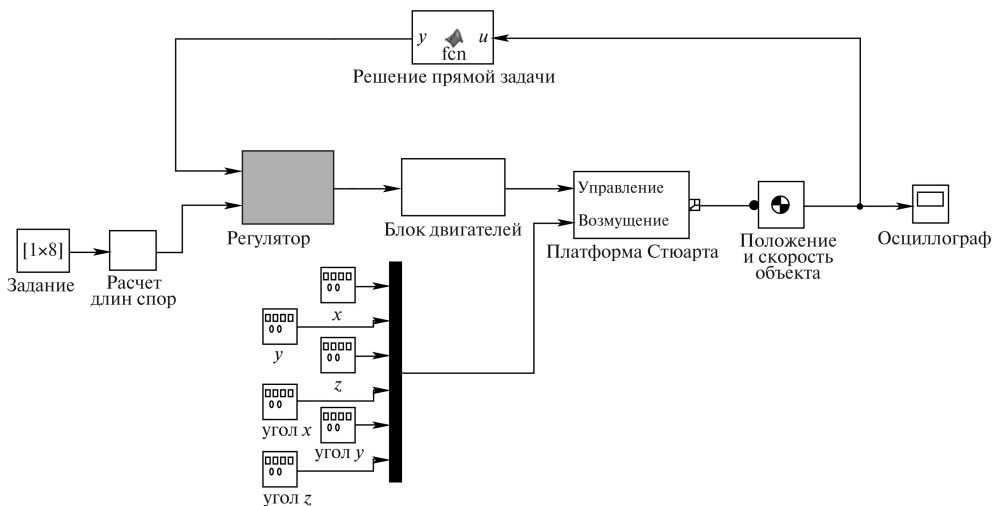


Рис. 3. Модель роботизированной платформы в MATLAB.

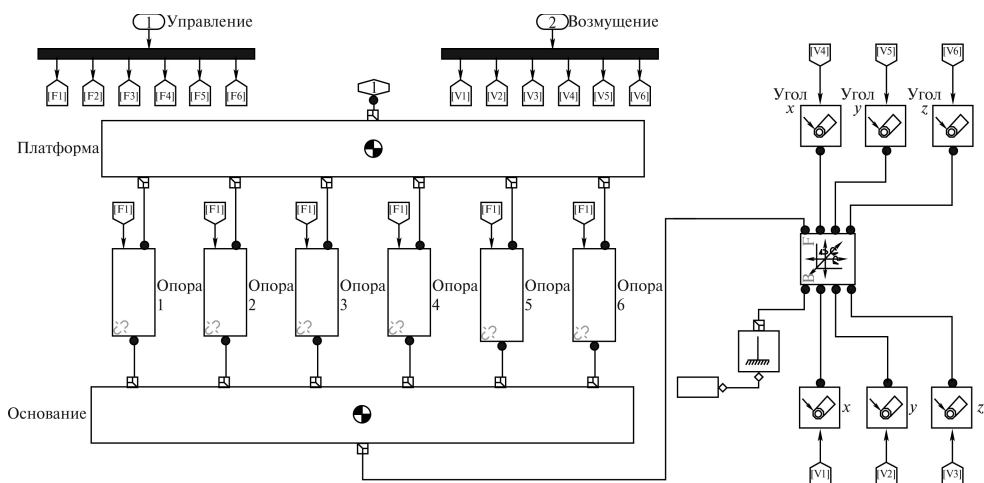


Рис. 4. Модель механической части роботизированной платформы в MATLAB.

Для определения адекватности модели физической платформе ее механическая часть (рис. 4) была смоделирована средствами пакета SimMechanic. Аналитическая модель платформы заведомо не может учитывать все нелинейности, присущие реальной механической системе, и именно эта модель учитывает большее число нелинейностей. Роботизированная платформа состоит из основания и рабочей платформы, соединенных шестью опорами. Основание соединено с землей посредством идеального универсального шарнира с шестью степенями свободы, предназначенного для моделирования вибрационных возмущений.

Опора состоит из двух твердых тел (Lower Leg и Upper Leg), соединенных цилиндрическим шарниром (Leg cylindrical), предназначенным для моделирования передачи винт-гайка, на который передается усилие с приводного

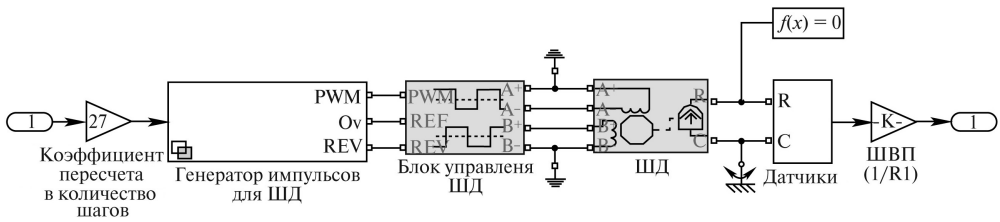


Рис. 5. Модель шагового двигателя в MATLAB: ШД – шаговый двигатель; ШВП – шарико-винтовая пара.

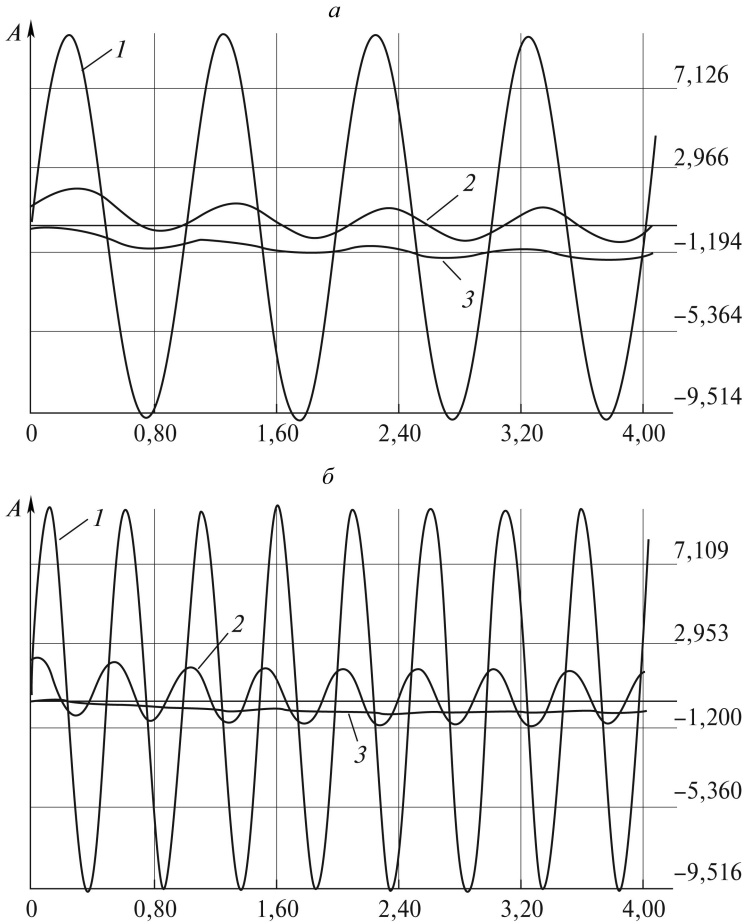


Рис. 6. Моделирование работы системы: а) при частоте возмущающего воздействия  $f = 1$  Гц, б) при частоте возмущающего воздействия  $f = 2$  Гц: 1 – ускорение на основании; 2 – ускорение на объекте; 3 – перемещение объекта относительно основания.

шагового двигателя. Опора соединена с основанием, сферическим шарниром (Lower Leg Universal) и с подвижной платформой – также сферическим шарниром (Upper Leg Universal). Оба эти шарниры пассивны.

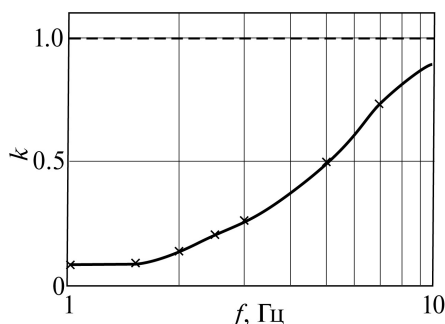


Рис. 7. Зависимость коэффициента подавления возмущения от частоты возмущающего воздействия.

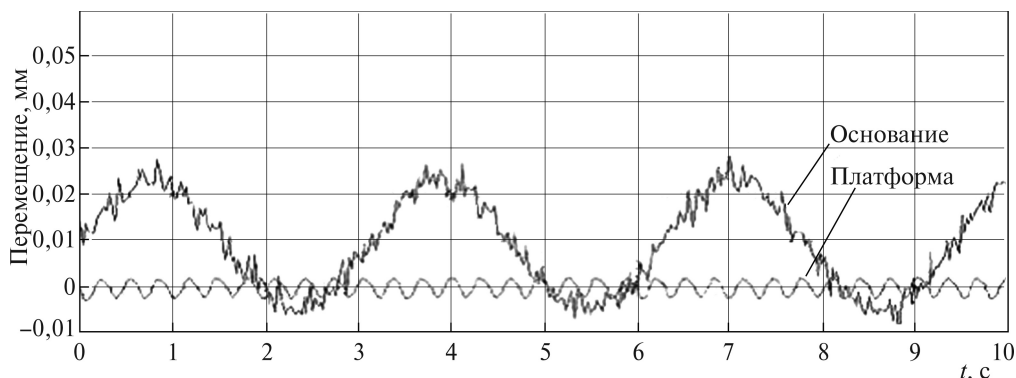


Рис. 8. Реакция многомерной роботизированной платформы на сочетание гармонического воздействия и белого шума.

Платформа приводится в движение блоком шаговых двигателей, состоящим из шести идентичных шаговых двигателей с блоками управления. На вход шагового двигателя (ШД) подается требуемое положение, на выходе получено усилие, подаваемое на передачу винт–гайка соответствующей опоры платформы. Модель шагового двигателя приведена на рис. 5.

Графики ускорения на объекте и перемещения объекта относительно основания для частоты возмущающего воздействия  $f = 1$  Гц приведены на рис. 6,а. Амплитуда возмущающего воздействия принята равной ускорению свободного падения  $gA_y = g$ . В данном случае коэффициент подавления возмущающего вибрационного воздействия по амплитуде равен  $\frac{A_x}{A_y} = 0,08$ . Графики изменения параметров системы для частоты возмущающего воздействия  $f = 2$  Гц приведены на рис. 6,б. В этом случае коэффициент подавления возмущающего вибрационного воздействия  $k$  равен по амплитуде был равен  $k = \frac{A_x}{A_y} = 0,14$ .

Зависимость коэффициента подавления возмущения  $k$  от частоты возмущающего воздействия  $f$  в диапазоне 1–10 Гц представлена на рис. 7. Видно, что действие активной системы практически прекращается в области частот выше 10 Гц.



На рис. 8 показана реакция системы на сочетание гармонического воздействия и белого шума. Здесь возмущающее воздействие показано только для оси  $x$ . Так, в рассматриваемом случае система предназначена для подавления исключительно низкочастотных вибраций и имеет небольшую полосу пропускания, а подаваемый в данном случае на ее вход белый шум может считаться широкополосным для такой системы сигналом, поэтому отпадает необходимость учета его “цветности” [24]. Для остальных осей действие возмущения аналогично. Как видно из графика на рис. 8, система обеспечивает коэффициент подавления высокочастотной вибрации

$$k = \frac{A_x}{A_y} = \frac{0,006}{0,03} = 0,2,$$

где  $A_y$ ,  $A_x$  — амплитуды вибрационных воздействий на основании и на платформе соответственно, что является достаточно хорошим результатом. С другой стороны, переходный процесс в такой системе отличается достаточно большим перерегулированием, однако даже при максимальном значении величины перемещения объекта оно составляет лишь 30 % от величины вибрационного воздействия.

Сравнивая результаты работы системы управления, полученные математическим моделированием, с другими вариантами алгоритмов управления, полученными, например, в [10, 14], можно отметить, что использование оптимального регулятора [10] позволяет получить хорошее качество подавления возмущений и в то же время ограничить относительное перемещение объекта, удерживая его на приемлемом уровне. Однако частотный диапазон эффективной работы системы с оптимальным регулятором несколько уже и ограничивается частотой 8 Гц. В то же время система является весьма эффективной в подавлении возмущений сложного типа и обладает высокой помехоустойчивостью. Регулятор, построенный на основе свойства сверхустойчивости [14], обладает широким частотным диапазоном и высокой помехоустойчивостью. Кроме того, полученная система обладает устойчивостью к малым изменениям параметров, однако полученные законы управления являются лишь субоптимальными, но достаточно близкими к оптимальным по квадратичному критерию.

## 6. Заключение

Отметим, что синтезированный цифровой алгоритм управления приводными механизмами роботизированной виброзащитной платформы на основе решения дискретного уравнения Риккати и методов  $H_\infty$ -оптимизации позволили синтезировать многосвязный стабилизирующий регулятор по состоянию системы с возмущениями, ограниченными в  $L_2$ -норме. Такой алгоритм обеспечивает нечувствительность системы к малым изменениям параметров, а следовательно, более широкий диапазон частот и позволяет получать требуемое качество подавления возмущений и ограничивать относительные перемещения объекта и удерживать его на приемлемом уровне, что подтверждается результатами моделирования. Подобная система будет эффективна для подавления возмущений сложного вида и будет обладать высокой помехоустойчивостью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meilakh A.M.* О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности // *АиТ.* 1975. № 2. С. 182–184.  
*Meilakhs A.M.* Stabilization of Linear Controlled Systems under Uncertainty Conditions // *Autom. Remote Control.* 1975. V. 36. No. 2. P. 349–351.
2. *Boyd S.L., el Chaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
3. *Рыбак Л.А., Чичварин А.В., Шатохин Ю.А.* Синтез оптимального цифрового регулятора пространственной системы виброизоляции параллельной структурой с электромеханическим приводом // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2006. № 3. С. 81–86.
4. *Поляк Б.Т.* Обобщенная сверхустойчивость в теории управления // *АиТ.* 2004. № 4. С. 70–80.  
*Polyak B.T.* Extended Superstability in Control Theory // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 4. P. 567–576.
5. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // *АиТ.* 2002. № 8. С. 37–53.  
*Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Superstable Linear Control Systems. I. Analysis // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 8. P. 1239–1254.
6. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // *АиТ.* 2002. № 11. С. 56–75.  
*Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Superstable Linear Control Systems. II. Design // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 11. P. 1745–1763.
7. *Погонин А.А., Рыбак Л.А., Чичварин А.В., Шатохин Ю.А.* Мехатронные технологические системы с управлением на основе сверхустойчивости // *Теория и системы управления.* 2008. № 4. С. 146–158.
8. *Francis B.A.* A course in  $H_\infty$  control theory. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
9. *McFarlane D.C., Glover K.* Robust controller design using normalized coprime factor plant description. N.Y.: Springer-Verlag, 1990.
10. *Zames G.* Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1981. V. 26. P. 301–320.
11. *Хорн Р., Дженос Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
12. *Doyle J.C., Glover R, Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space Solutions to Standart  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
13. *Petersen I.R., Hollot C.V.* A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems // *Automatica.* 1986. V. 22. No. 4. P. 397–411.
14. *Кенио Т.* Шаговые двигатели и их микропроцессорные системы управления / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1987.
15. *Рыбак Л.А., Черкашин Н.Н., Гунькин А.А., Чичварин А.В.* Моделирование электромеханического привода с гибридным шаговым двигателем роботизированной платформы [Электронный ресурс] // *Современные проблемы науки и образования.* 2014. № 6. <http://www.science-education.ru/120-17012>
16. *Магергут В.З., Игнатенко В.А., Бажанов А.Г., Шаптала В.Г.* Подходы к построению дискретных моделей непрерывных технологических процессов для синтеза управляющих автоматов // *Вестн. Белгородского гос. технологич. ун-та им. В.Г. Шухова.* 2013. № 2. С. 100–102.

17. *Поляк Б.Т., Шербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
18. *Ji P., Wu H.* A Closed-Form Forward Kinematics Solution for the 6–6p Stewart Platform // IEEE Trans. Robot Automat. 2001. V. 17. No. 4. P. 522–526.
19. *Merlet J.-P.* Solving the Forward Kinematics of a Gough-Type Parallel Manipulator with Interval Analysis // Int. J. Robot Res. 2004. V. 23. No. 3. P. 221–235.
20. *Parikh P.J., Lam S.S.Y.* A Hybrid Strategy to Solve the Forward Kinematics Problem in Parallel Manipulators // IEEE Trans. Robot. 2005. V. 21. No. 1. P. 18–25.
21. *Мита Ц., Хара С., Кондо Р.* Введение в цифровое управление / Пер. с японск. М.: Мир, 1994.
22. *Mahmoud N.A., Khalil H.K.* Robust Control for a Nonlinear Servomechanism Problem // Int. J. Control. 1997. V. 66. No. 6. P. 779–802.
23. *Khalil H.K.* Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Represented by Input-Output Models // IEEE Trans. Autom. Control. 1996. V. 41. No. 2. P. 177–188.
24. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения. Теория и практика численного решения. 4-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2010.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.*

Поступила в редакцию 31.03.2016