

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Гераськин, Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России, *Автомат. и телемех.*, 2018, выпуск 5, 83–106

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.144.116.253

19 ноября 2024 г., 15:40:56



# Управление в социально-экономических системах

© 2018 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)  
(Самарский национальный исследовательский университет  
им. акад. С.П. Королева)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФЛЕКСИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТРЕХАГЕНТНОЙ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА ДЛЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО РЫНКА РОССИИ

Рассматривается проблема определения равновесий в играх трех агентов на рынке олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. При стратегической рефлексии агентов о наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу первого и второго уровней получены выражения информационных равновесий. Моделирование для реальных функций издержек агентов и функции спроса телекоммуникационного рынка России позволило сформировать набор информационных равновесий, сопоставление которых с параметрами реального рынка показало наличие рефлексии первого и второго рангов.

*Ключевые слова:* олигополия, лидер по Штакельбергу, рефлексивная игра, равновесие по Нэшу.

### 1. Введение

Национальные рынки телекоммуникаций многих стран мира являются олигополистическими, причем зачастую количество компаний мобильной связи на этих рынках равно трем. Анализ телекоммуникационных рынков Индонезии [1], Испании [2], Польши [3], США [4], Чехии [5], Южной Кореи [6], Японии [7], а также усредненные данные [8] по 177 операторам мобильной связи из 45 стран мира подтверждают этот факт. Телекоммуникационные рынки играют значительную роль в современной экономике: объемы продаж 100 крупнейших мировых телекоммуникационных компаний достигли [9, 10] 1,6 трлн. долл. США в 2011 г., что составляло 2% мирового ВВП.

Олигополия есть рынок [11], на котором идентичный товар предлагается несколькими продавцами, причем доля каждого из них достаточно велика для того, чтобы оказывать существенное влияние на равновесную рыночную цену. Вследствие этого прибыль каждого олигополиста является функцией не только его *действия* (объема выпуска), но и действий остальных продавцов (далее агентов), называемых *окружением*. Равновесие на рынке олигополии устанавливается в результате *наилучших ответов* (*best response*) агентов на выбранные действия контрагентов, формальная запись которых в виде явных (неявных) функций действия агента от действий окружения называется *уравнениями реакций*. Следовательно, процесс установления равновесий олигополии является игрой в трактовке теории игр [12], а устойчивое состояние рынка

как решение соответствующей игры формализовано равновесием Нэша [13]. Поскольку намерения окружения априори неизвестны каждому агенту, то задача выбора оптимального действия агента рынка олигополии усложняется по сравнению, например, с выбором оптимума фирмы на совершенно конкурентном или монопольном рынках. Впервые задача оптимизации действий олигополиста была исследована А. Курно [14] на основе гипотезы об *игнорировании* влияния выпуска окружения на выбор данного агента, т.е. симметрии информированности агентов, которая не вполне достоверно отражала состояния реальных рынков. В дальнейшем в оптимизационных моделях олигополии проблема несовершенства информированности агента решалась с помощью задания предположительных вариаций (*conjectural variation*) [15], характеризующих предполагаемое агентом ответное изменение объема выпуска контрагента, оптимизирующее критерий последнего при выбранном действии первого. Олигополия, в которой один из агентов (лидер) информирован о том, что окружение игнорирует его действия в соответствии с гипотезой Курно, исследована Г. Штакельбергом [16]; соответствующее равновесие, при котором лидер *априори полагает* предположительные вариации окружения как *ведомых* агентов, получило название лидерства по Штакельбергу. В дальнейшем классические модели олигополии Курно – Штакельберга отнесем к *игре действий*, поскольку знание предположительных вариаций при этом является априорным и совпадает с реальностью, т.е. фактические действия агентов совпадают с предположениями об этих действиях.

Современные исследователи, как правило, рассматривают линейную модель олигополии, т.е. вводят гипотезу о линейных функциях рыночного спроса и издержек агентов. Сформировался обширный корпус исследований игры действий в случае симметричной информированности агентов для *линейной* модели олигополии [17–21], а также для *нелинейной* модели олигополии, см. [22–25], в том числе обзоры [26, 27]. Исследования рынка олигополии с лидерством по Штакельбергу [28, 29], как правило, базируются на априори заданных позициях лидера и ведомого. Кроме того, постановка проблемы сравнительного анализа позиций лидера и ведомого [30, 31] определила направление исследований состояний рынка олигополии в случае неединственности лидеров [32–34].

Однако не уделено должного внимания анализу *рефлексивного поведения* агентов, при котором проблема несовершенства информированности решается на основе представлений о стратегиях агентов, выдвигаемых каждым из агентов. Под рефлексией понимается процесс самооценки рыночного положения агента, называемый рефлексией первого рода, или процесс выдвижения гипотез о возможных действиях окружения, т.е. рефлексия второго рода. В последнем случае рефлексия классифицируется на стратегическую, при которой агент предполагает действия окружения, и информационную, когда агент предполагает информированность окружения. Рефлексивное поведение агентов существенно влияет на равновесие рынка олигополии, поскольку при этом агенты выбирают наилучшие ответы исходя не из реальных действий окружения, а из собственных *представлений* о намерениях окружения. Это приводит к рефлексивным играм [35–37], в которых выражается асимметрия человеческого восприятия. Исследования в рамках рефлексивной моде-

ли Лефевра проводились для случаев рефлексии о себе [38] с позиции влияния на стимулы поведения человека [39]. Важнейшее направление исследований посвящено стратегической рефлексии и оценке оптимальной глубины рефлексии [40–43]. Следует отметить, что предметом рефлексивных моделей является именно асимметрия человеческого восприятия, а не проблема игры с неполной информированностью игроков [44, 45] как игры с асимметричной информированностью. Одна из разновидностей рефлексивного поведения была исследована [46] в дуополии Штакельберга как «борьба за лидерство», при которой оба дуополиста предполагают, что их контрагенты действуют как ведомые; поскольку эти предположения одновременно не могут быть реальностью, то они являются представлениями агентов, а соответствующая игра, приводящая к неравновесию Штакельберга, является рефлексивной.

В дальнейшем, во-первых, абстрагируемся от рефлексии первого рода, полагая, что состояние агента и его представление о себе тождественны; во-вторых, будем рассматривать представления агента о наилучшем действии (стратегии) окружения, или так называемую стратегическую рефлексию. Представления агента о наилучшем действии окружения выстраиваются в бесконечную последовательность следующего вида: 1) представление агента о стратегиях окружения; 2) представление агента о представлениях окружения о стратегии агента; 3) представление агента о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. *Ранг рефлексии* определяется как порядковый номер представления в последовательности представлений агента; в приведенной выше последовательности рангами будут соответственно числа 1, 2, 3. В этих терминах проблема оценки оптимальной глубины рефлексии сводится к определению оптимального ранга рефлексии.

Рефлексивные игры агентов рынка олигополии исследованы в модели Курно – Штакельберга для первых двух рангов стратегической рефлексии [47–49], анализировались информационные равновесия при информационной рефлексии [50]. Проводился [51] сравнительный анализ эффективности равновесий по Курно и Штакельбергу; рассматривались [52] динамические рефлексивные игры в модели Штакельберга и анализировалось временное влияние информационного преимущества на эффективность агентов; исследовалось [53] взаимодействие нескольких лидеров по Штакельбергу. Однако актуальной проблемой, требующей дальнейшего исследования, представляется анализ равновесий на рынке олигополии при более высоких рангах рефлексивных представлений.

Следует уточнить взаимосвязь исследуемого вопроса с проблемой информированности агентов. Информированность агентов рынка олигополии, как было отмечено выше, является априори неполной. В связи с этим теоретико-игровой анализ является необходимым этапом решения проблемы выбора оптимального действия агента, поскольку позволяет агенту спрогнозировать реакции окружения на его действия. Модель рефлексивной игры в этом случае является инструментом описания информированности агентов и алгоритмов принятия ими решений в условиях общей кривой спроса рынка олигополии. В данной статье множество представлений агентов о стратегиях окружения трансформируется в множество состояний рынка, для каждого из которых отдельно решается задача выбора оптимального действия агента при пол-

ной информированности. Другими словами, информированность агентов в рефлексивной игре задается экзогенно в виде множества представлений о стратегиях окружения или о представлениях окружения в зависимости от моделируемого ранга рефлексии. Поэтому рассматривается стратегическая рефлексия агента на множестве состояний рынка, в каждом из которых определяется решение игры агента с представляемыми или *фантомными* агентами окружения. Агент по отношению к окружению может быть симметричен, если представляет фантома как агента с тем же уровнем информированности, что и он. Агент по отношению к окружению может быть асимметричен, если представляет фантома как более (менее) информированного агента. Поэтому решением рефлексивной игры является не реальное, а *информационное равновесие* — вектор действий реальных и фантомных (существующих во мнении реальных) агентов, при котором агент максимизирует целевую функцию исходя из своей информированности об окружении, т.е. *если бы* окружение выбирало те действия, которые представляет этот агент.

Таким образом, тема исследования заключается в том, чтобы получить решения всех возможных игр агента с фантомами в системе трех агентов рынка олигополии. Это позволяет сформировать набор теоретических решений для последующего сравнения с параметрами реального телекоммуникационного рынка России с целью оценки ранга рефлексии реальных агентов.

## 2. Методология

Рассмотрим следующую нелинейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$(1) \quad \Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \dots, n\}$$

при линейной функции цены спроса на товар от суммарного объема предложения всех агентов рынка

$$(2) \quad P(Q) = a + bQ, \quad a > 0, \quad b < 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

и нелинейных (степенных) функциях издержек агентов

$$(3) \quad C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} > 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0, 2), \quad i \in N,$$

где  $Q_i, \Pi_i$  — выпуск и прибыль  $i$ -го агента;  $N$  — множество агентов рынка;  $n$  — количество агентов;  $P, Q$  — равновесная цена и суммарный объем рынка;  $C_{Fi}, B_i, \beta_i$  — коэффициенты функций издержек агентов,  $C_{Fi}$  интерпретируется как постоянные издержки;  $a, b$  — коэффициенты обратной функции спроса.

Модели выбора оптимальных (символ «\*») действий агентов с учетом условий (1)–(3) запишем в виде

$$(4) \quad Q_i^* = \arg \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a + bQ)Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\}, \quad i \in N.$$

Равновесие Нэша в системе (4) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при заданном векторе предположительных вариаций):

$$(5) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, x_{ik})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, k \in N,$$

где  $x_{ik} = Q'_{kQ_i}$  – предположительная вариация в уравнении реакции  $i$ -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска  $k$ -го агента в ответ на единичный прирост выпуска  $i$ -го агента. Поскольку согласно модели (4) оптимумы агентов зависят не только от собственного действия  $i$ -го агента  $Q_i$ , но и от действий окружения через  $Q$ , то последняя зависимость представлена в системе (5) как функция полезности  $\Pi_i(Q_i, x_{ik})$  от вектора предположительных вариаций, характеризующих влияние действий окружения на изменение  $Q$ .

Анализ (5) показывает, что решение задачи поиска равновесия невозможно без введения вектора предположительных вариаций, который зависит от представлений агентов в их рефлексивном процессе. Сформулируем гипотезы, принимаемые в дальнейшем при анализе рефлексивного поведения агентов.

1. Гипотеза синхронности действий агентов на рынке: агенты выбирают действия одновременно, однократно и независимо.

2. Гипотеза рационального поведения агентов: агент выбирает действия, максимизирующие его функцию полезности исходя из доступной ему информации о действиях окружения.

3. Гипотеза информированности агентов: в момент выбора действий агенты располагают информацией о функциях полезности всех агентов (функциях рыночного спроса и издержек агентов), о количестве агентов, а также о том, что окружение имеет равный с ними уровень информированности.

4. Гипотеза рациональности рефлексии: рассматриваются представления агентов о наилучших стратегиях окружения (стратегическая рефлексия), не рассматриваются представления агентов о самих себе (рефлексия второго рода).

Последовательность представлений  $i$ -го агента имеет вид следующего множества

$$(6) \quad G_i = \left\{ G_{ik}^r, k \in N \setminus i, r \in Z \right\}, \quad i \in N,$$

где в нижнем индексе первым символом обозначен рефлекслирующий агент, вторым символом – номер агента окружения;  $r$  – ранг рефлексии. На различных рангах рефлексии представления агентов описываются следующим образом:  $G_{ik}^1$  – представление  $i$ -го агента о стратегиях окружения;  $G_{ik}^2$  – представление  $i$ -го агента о представлениях окружения о стратегиях  $i$ -го агента;  $G_i^3$  – представление  $i$ -го агента о представлениях окружения о представлении  $i$ -го агента о стратегиях окружения и т.д.

*Определение 1.* *F-стратегия (стратегия ведомого агента) – это выбор действия  $i$ -м агентом,  $i \in N$ , по модели (4) из системы (5) при условии*

$x_{ik} = 0, k \in N \setminus i$ ; *L-стратегия* (стратегия лидера по Штакельбергу) – это выбор действий  $i$ -м агентом,  $i \in N$ , по модели (4) из системы (5) при условии  $x_{ki} = 0, k \in N \setminus i$ .

Другими словами, выбирая *F-стратегию*,  $i$ -й агент предполагает, что окружение в своих моделях выбора (4) не учитывает его действия согласно классической гипотезе Курно [14]; выбирая *L-стратегию*, этот агент предполагает, что окружение в своих моделях выбора (4) считает, что он выбрал *F-стратегию* согласно классической постановке Штакельберга [16].

*Утверждение 1. Представление агента о стратегиях окружения при гипотезах 1–4 может быть двух типов: L-стратегия или F-стратегия.*

Введем понятие *уровней лидерства* агентов в представляемой игре с учетом рефлексии агентов. Для этого запишем возможную представляемую иерархию агентов в виде множества

$$(7) \quad G = (M_0, M_1, \dots, M_l),$$

где  $l$  – количество уровней лидерства агентов;  $M_m$  ( $m = 0, \dots, l$ ) – множества агентов;  $M_0$  – множество ведомых агентов;  $M_m$  ( $m = 1, \dots, l$ ) – множество лидеров  $m$ -го уровня. Множество (7) есть разбиение множества агентов  $N$ , удовлетворяющее ограничениям

$$M_m \cap M_j = \emptyset, \quad m \neq j, \quad M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_l = N = \{1, \dots, n\}.$$

Например, возможны следующие уровни лидерства агентов: ведомый агент, выбирающий стратегию независимо от стратегий окружения; лидер по Штакельбергу первого уровня, выбирающий стратегию исходя из предположения о том, что окружение реагирует как ведомый агент; лидер по Штакельбергу второго уровня, выбирающий стратегию исходя из предположения о том, что окружение реагирует как лидер по Штакельбергу первого уровня, и т.д.

Множество уровней лидерства (7) позволяет формально записать представления (6). Например, в дуополии ( $n = 2$ ) при  $M_0 = (1), M_1 = (2)$  представления агента в зависимости от ранга рефлексии могут иметь вид: представление на 1-м ранге рефлексии первого агента, считающего второго агента лидером по Штакельбергу, есть  $G_{12}^1 = (M_0, M_1)$ ; представление на 2-м ранге рефлексии первого агента, считающего, что второй агент считает первого агента ведомым, есть  $G_{12}^2 = (M_0, M_1)$ , и т.д.

Согласно утверждению 1 представление о том, что окружение выбирает *F-стратегию*, записывается в виде (7) как  $G_{i(-i)}^1 = (M_0)$  и означает, что вектор предположительных вариаций в уравнении  $i$ -го агента системы (5) есть  $x_{ik} = 0, i, k \in N$ ; представление о том, что окружение выбирает *L-стратегию*, записывается в виде (7) как  $G_{i(-i)}^1 = (M_m), m > 0$  и означает, что  $x_{ik} \neq 0, i, k \in N$ . Поэтому существует следующая зависимость:

$$x_{ik} \left( G_{i(-i)}^1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } G_{i(-i)}^1 = (M_0), \quad i, k \in N, \\ x_{ik}(m), & \text{если } G_{i(-i)}^1 = (M_m), \quad m > 0, \end{cases}$$

где вид функции  $x_{ik}(m)$  рассмотрен ниже для  $m = 1, 2$ . Поэтому функция полезности  $i$ -го агента  $\Pi_i(Q_i, x_{ik})$  в системе (5) есть сложная функция от представления  $G_{i(-i)}^1$ .

*Определение 2.* Уровень  $i$ -го агента есть его наилучший ответ (обозначим как  $BR_i \in M_m$ ,  $m = 0, \dots, l$ ) на представление первого ранга о стратегиях окружения, т.е. функция принадлежности к такому подмножеству множества  $G$ , которое максимизирует на множестве уровней  $M_l$  его функцию полезности при данном представлении  $G_{i(-i)}^1$ , равна

$$(8) \quad BR_i \left( G_{i(-i)}^1 \right) = \arg \max_{i \in M_m \subset M_l} \Pi_i \left[ Q_i, x_{ik} \left( G_{i(-i)}^1 \right) \right], \quad i \in N,$$

где символом « $-i$ » обозначено окружение.

Если окружение включает в себя более одного агента, то наилучшие ответы  $i$ -го агента (8) по отношению к разным агентам могут быть различны, и уровень  $i$ -го агента определяется как наибольший из них.

Множество возможных рефлексивных представлений агентов (6) путем анализа наилучших ответов (8), как будет показано ниже, может быть приведено к набору множеств уровней лидерства (7). Тем самым рефлексивная игра сводится к множеству игр с полной информированностью, в которых агент максимизирует целевую функцию (4) исходя из информации о том, что окружение выбирает такие действия, которые представляет этот агент. Следовательно, рефлексивная игра  $\Gamma$  есть кортеж множества агентов, множества стратегий агентов, множества функций полезности (прибыли) агентов и множества уровней:

$$(9) \quad \Gamma = \left\langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G \right\rangle,$$

где агенты выбирают стратегии по наилучшему ответу (8).

Решения игры (9) для модели выбора действий (4) были получены [54] в виде системы (5) уравнений равновесия Нэша:

$$(10) \quad a + bQ^* + bQ_i^* \left( 1 + \sum_{k \in N \setminus i} x_{ik} \right) - B_i \beta_i Q_i^{*\beta_i - 1} = 0, \quad Q_i > 0, \quad i \in N$$

при  $2b - B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{*\beta_i - 1} < 0$ .

Вектор предположительных вариаций  $x_{ik}$ ,  $k \in N \setminus i$  в системе (10) определяется для конкретных видов множества  $G$  следующим образом:

$$(11) \quad G = (M_0), \quad M_0 = (N) : x_{ik} = 0 \quad \forall k, i \in M_0, \quad i \neq k,$$

$$(12) \quad G = (M_0, M_1) : x_{ik} = - \frac{\prod_{j=1 \setminus i}^f (u_j - 1)}{\varphi_f + \psi_f + \sum_{\gamma=2}^{f-2} \prod_{j=1 \setminus \gamma}^f (u_j - 1)}, \quad k \in M_0, \quad i \in M_1,$$



$$G = (M_0, M_1, M_2) :$$

$$(13) \quad \begin{cases} u_k x_{ik} + \sum_{l=1 \setminus i}^{f+L_1} x_{il} = -1, & k = 1, \dots, f, \\ u_k x_{ik} + \sum_{l=1}^f \left( 1 + Q_k \sum_{j \in N \setminus M_1} y_{jk} \right) x_{il} + \sum_{l=f+1 \setminus i}^{L_1} x_{il} = - \left( 1 + Q_k \sum_{j \in N \setminus M_1} y_{jk} \right), \\ & k = f+1, \dots, L_1, \end{cases}$$

где  $u_j = \frac{U_j}{b}$ ,  $U_j = 2b - B_j \beta_j (\beta_j - 1) Q_j^{\beta_j - 2}$ ,  $\varphi_f = (u_{f-1} u_f - 1) \prod_{j=1}^{f-2} (u_j - 1)$ ,

$\psi_f = \prod_{j=2}^f (u_j - 1)$ ,  $y_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial Q_k}$ ,  $j \in M_0$ ,  $f$  — количество ведомых агентов,

$L_1$  — количество лидеров первого уровня. В случае (13) вектор  $x_{ik}$  определяется из решения соответствующей системы уравнений.

Найдем все возможные решения рефлексивной игры (9) в модели выбора действий (4) для трех агентов на произвольном ранге рефлексии, одинаковом для всех агентов  $r_i = r_{-i}$ ,  $i \in N$ ,  $r \in Z$ . Далее применим решения этой игры, полученные в виде (10)–(13), для анализа информационных равновесий рынка олигополии в случае рефлексии первого и второго рангов.

### 3. Результаты

Вначале сформулируем свойства уровней лидерства следующим образом.

*Утверждение 2. Повышение уровня лидерства агента не уменьшает его максимальной полезности:*

$$(14) \quad \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i |_{i \in M_{m+1}} \geq \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i |_{i \in M_m}, \quad m = 0, \dots, l, \quad i \in N,$$

наилучшим ответом  $i$ -го агента на представление первого ранга об уровне  $M_m$  агентов окружения является уровень  $M_{m+1}$ :

$$(15) \quad \begin{aligned} BR_i \left( G_{i(-i)}^1 \right) &\in M_{m+1}, \quad m = 0, \dots, l, \\ i \in N \forall G_{i(-i)}^1 &= (M_m), \quad M_m = (-i). \end{aligned}$$

Например, если в представлении  $i$ -го агента окружение имеет уровень ведомых агентов, то  $BR_i (M_0 = (-i)) \in M_1$ , т.е.  $i$ -й агент реагирует как лидер первого уровня [55]; аналогично, если в представлении  $i$ -го агента окружение имеет реакции лидеров, то  $BR_i (M_1 = (-i)) \in M_2$ , следовательно, наилучший ответ  $i$ -го агента имеет вид реакции лидера второго уровня, и т.д.

Свойство уровней лидерства (15) позволяет путем анализа наилучших ответов (8) свести множество возможных рефлексивных представлений агентов (6) к набору множеств уровней лидерства (7).

Рассмотрим игру трех агентов ( $n = 3$ ), для которой запишем систему представлений (6), возможных с учетом утверждения 1, на произвольном ранге рефлексии

$$(16) \quad \begin{aligned} (a) \quad & G_{i(-i)}^r = \{F, F\}, \\ (b) \quad & G_{i(-i)}^r = \{F, L\}, \quad r \in Z. \\ (c) \quad & G_{i(-i)}^r = \{L, L\}, \end{aligned}$$

Запишем систему представлений агентов (16) в виде (7) по свойству (15):

$$(17a) \quad G_{i(-i)}^r = (M_0, M_1), \quad M_0 = (N \setminus i), \quad M_1 = (i),$$

$$(17b) \quad G_{i(-i)}^r = (M_0, M_1, M_2), \quad M_0 = (j), \quad M_1 = (k), \quad M_2 = (i), \\ j \neq k \neq i \in N,$$

$$(17c) \quad G_{i(-i)}^r = (M_1, M_2), \quad M_1 = (N \setminus i), \quad M_2 = (i).$$

Было показано [56], что представление агента на  $r$ -м ранге рефлексии сводится к представлению агента на первом ранге рефлексии по следующей формуле:

$$(18) \quad G_{ij}^1 = (M_{m+r-1}) \forall G_{ij}^r = (M_m), \quad j \in N \setminus i, \quad r \in Z, \quad i \in N.$$

С учетом (18) и (15), структуры множества уровней лидерства (7) в случаях (17) на произвольном ранге рефлексии имеют вид:

$$(19a) \quad G(r) = (M_{r-1}, M_r), \quad M_{r-1} = (N \setminus i), \quad M_r = (i),$$

$$(19b) \quad G(r) = (M_{r-1}, M_r, M_{r+1}), \quad M_{r-1} = (j), \quad M_r = (k), \quad M_{r+1} = (i), \\ j \neq k \neq i \in N,$$

$$(19c) \quad G(r) = (M_r, M_{r+1}), \quad M_r = (N \setminus i), \quad M_{r+1} = (i),$$

где  $G(r)$  – множество  $G$  на  $r$ -м ранге рефлексии. В дальнейшем рассмотрим структуры множества уровней лидерства (7) на первом и втором рангах рефлексии.

В случае трех агентов получим расчетные формулы предположительных вариаций для вычисления информационных равновесий в играх (19), основываясь на решениях (10)–(13), найденных для игры (9).

*Утверждение 3.* В игре трех агентов типа  $G = (M_0, M_1)$  при  $L_1 = 1$  предположительные вариации ведомых агентов вычисляются по формулам

$$(20) \quad G = (M_0, M_1) : x_{ik} = \frac{1 - u_k}{\prod_{j=1 \setminus k} u_j - 1}, \quad k \in M_0, \quad i \in M_1;$$

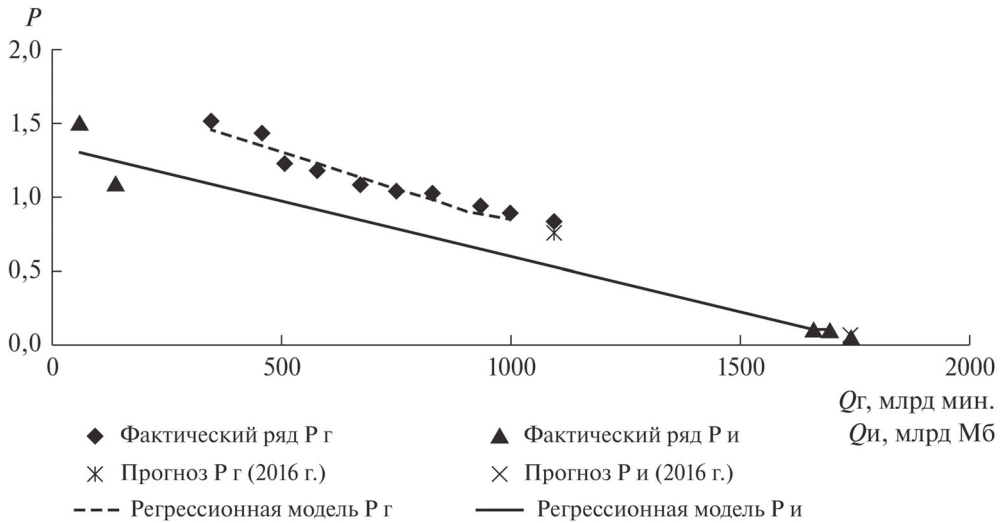


Рис. 1. Фактические зависимости цен на голосовой трафик за 2007–2015 гг., интернет-трафик за 2012–2015 гг. от объемов соответствующих услуг, и регрессионные модели и прогнозы на 2016 г. (руб.).

в игре трех агентов типа  $G = (M_0, M_1, M_2)$  при  $L_2 = 1$  – по формулам

$$(21) \quad G = (M_0, M_1, M_2) : x_{li} = \frac{g_{il}u_k - g_{ik}}{g_{ik} - u_i u_k}, \quad x_{lk} = \frac{u_i - g_{il}}{g_{ik} - u_i u_k},$$

$$k \in M_0, \quad i \in M_1, \quad l \in M_2;$$

в игре трех агентов типа  $G = (M_1, M_2)$  при  $L_2 > 1$  – по формулам

$$(22) \quad G = (M_1, M_2) : x_{li} = \frac{g_{il}u_k - g_{ik}g_{ki}}{g_{ik}g_{ki} - u_i u_k}, \quad x_{lk} = \frac{g_{kl}u_i - g_{il}g_{ki}}{g_{ik}g_{ki} - u_i u_k},$$

$$k, i \in M_1, \quad l \in M_2,$$

где введены обозначения

$$g_{ik} = 1 + Q_i \sum_{j \in N \setminus M_1} y_{jk}, \quad g_{il} = 1 + Q_i \sum_{j \in N \setminus M_1} y_{jl},$$

$L_2$  – количество лидеров второго уровня.

Таким образом, информационные равновесия в играх (19) вычисляются из решения системы (10), в которой предположительные вариации рассчитываются по формулам (20)–(22) соответственно для случаев а) ведомых агентов и лидера (лидеров) первого уровня  $G = (M_0, M_1)$ ; б) ведомых агентов, лидера (лидеров) первого уровня и одного лидера второго уровня  $G = (M_0, M_1, M_2)$ ,  $L_2 = 1$ ; в) лидера (лидеров) первого уровня и нескольких лидеров второго уровня  $G = (M_1, M_2)$ ,  $L_2 > 1$ .

Рассмотрим телекоммуникационный рынок России, являющийся олигополией, поскольку в 2016 г. три оператора («МТС» [57], «Мегафон» [58], «ВымпелКом» [59]) оказывают услуги связи более 90% абонентов. Сформируем

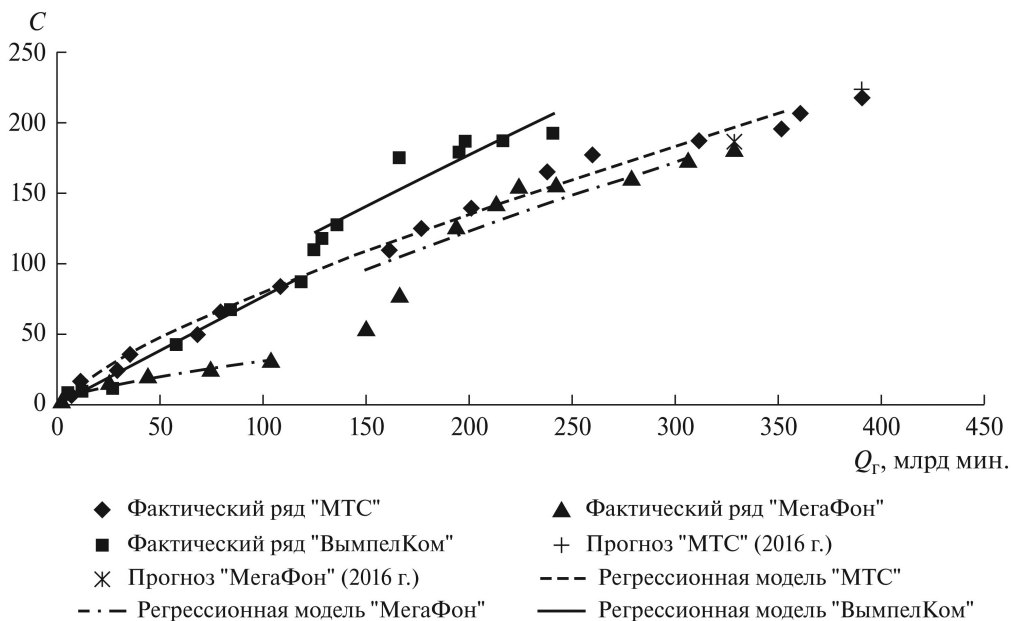


Рис. 2. Зависимости фактических издержек (млрд руб.) на голосовые услуги от объема трафика, регрессионные модели агентов рынка в 2002–2015 гг. и прогноз на 2016 г.

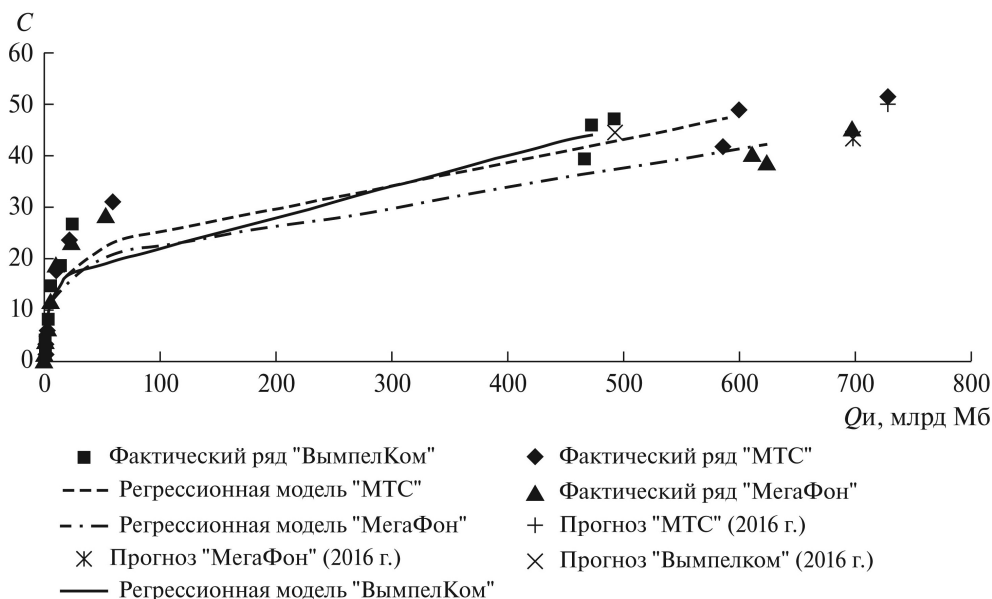


Рис. 3. Зависимости фактических издержек (млрд руб.) на интернет-передачу данных от объемов передачи, регрессионные модели агентов рынка в 2002–2015 гг. и прогноз на 2016 г.

**Таблица 1.** Коэффициенты регрессионных моделей (23), (24),  $C_{Fi}^{\Gamma} = C_{Fi}^{\text{И}} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$

Регрессионная модель	$a^{\Gamma}, a^{\text{И}}$	$b^{\Gamma}, b^{\text{И}}$	$B_i^{\Gamma}, B_i^{\text{И}}, i = 1, 2, 3$	$\beta_i^{\Gamma}, \beta_i^{\text{И}}, i = 1, 2, 3$
$P^{\Gamma}(Q^{\Gamma})$	1,77	-0,0009		
$P^{\text{И}}(Q^{\text{И}})$	1,34	-0,0007		
$C_1^{\Gamma}(Q)$			2,41	0,76
$C_2^{\Gamma}(Q) \quad \forall Q_2^{\Gamma} > 104$			1,36	0,85
$C_3^{\Gamma}(Q) \quad \forall Q_3^{\Gamma} > 119$			2,46	0,81
$C_1^{\text{И}}(Q)$			6,70	0,31
$C_2^{\text{И}}(Q)$			6,48	0,29
$C_3^{\text{И}}(Q)$			6,18	0,32

регрессионные модели функций спроса и издержек агентов рынка. Анализ динамических рядов средневзвешенных цен голосового трафика (обозначен индексом «Г») и интернет-трафика (обозначен индексом «И») в зависимости от суммарного объема этих услуг показал (рис. 1) наличие линейного и нелинейного трендов. Поскольку линейные тренды соответствуют более современному периоду, сформируем регрессии цен в виде

$$(23) \quad P^{\Gamma}(Q^{\Gamma}) = a^{\Gamma} + b^{\Gamma}Q^{\Gamma}, \quad P^{\text{И}}(Q^{\text{И}}) = a^{\text{И}} + b^{\text{И}}Q^{\text{И}},$$

где  $a^{\Gamma}, b^{\Gamma}, a^{\text{И}}, b^{\text{И}}$  – коэффициенты регрессионных функций аппроксимации цен;  $Q^{\Gamma}$  и  $Q^{\text{И}}$  – объемы голосовых услуг и интернет-трафика рынка за соответствующий период (млрд мин, млрд Мб).

Тренды динамических рядов издержек агентов на голосовой трафик (рис. 2) и интернет трафик (рис. 3) имеют степенной характер, поэтому сформируем регрессии издержек в следующем виде:

$$(24) \quad C_i^{\Gamma}(Q_i^{\Gamma}) = C_{Fi}^{\Gamma} + B_i^{\Gamma}(Q_i^{\Gamma})^{\beta_i^{\Gamma}}, \quad C_i^{\text{И}}(Q_i^{\text{И}}) = C_{Fi}^{\text{И}} + B_i^{\text{И}}(Q_i^{\text{И}})^{\beta_i^{\text{И}}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $C_{Fi}^{\Gamma}, C_{Fi}^{\text{И}}$  – постоянные издержки  $i$ -го агента на голосовые услуги и интернет-передачу;  $Q_i^{\Gamma}$  и  $Q_i^{\text{И}}$  – объемы голосовых услуг и интернет-трафика  $i$ -го агента за соответствующий период;  $B_i^{\Gamma}, B_i^{\text{И}}, \beta_i^{\Gamma}, \beta_i^{\text{И}}$  – коэффициенты регрессий. Введем следующую индексацию агентов рынка: 1 – ПАО «МТС», 2 – ПАО «МегаФон», 3 – ПАО «ВымпелКом».

Результаты оценки коэффициентов регрессий (23), (24) методом наименьших квадратов в табличном процессоре Excel приведены в табл. 1, статистические характеристики регрессий показаны в табл. 6. Высокие значения коэффициента детерминации и критерия Фишера, рассчитанного при уровне значимости 0,05, говорят о высоких объясняющих характеристиках регрессионных моделей (23), (24), их адекватности и статистической значимости. Результаты теста Гельдфельда – Квандта [60–62] для моделей (23), (24) показывают гомоскедастичность регрессионных остатков, поскольку отношение

**Таблица 2.** Структура информационных равновесий на рынке голосовых услуг,  $Q_i^V$ , млрд мин

Агент	Факт 2015 г.	Курно $M_0=(N)$	Один лидер $L_1$			Два лидера $L_1$	
			$M_1=(1),$ $M_0=(2,3)$	$M_1=(2),$ $M_0=(1,3)$	$M_1=(3),$ $M_0=(1,2)$	$M_1=(1,2),$ $M_0=(3)$	$M_1=(1,3),$ $M_0=(2)$
МТС	360,6	458,3	331,9	628,2	278,6	344,9	168,2
МегаФон	306,3	403,5	493,3	1083,8	240,5	492,8	54,2
ВымпелКом	241,1	111,3	102,5	56,3	621,4	102,0	955,5
Всего	908,0	973,0	927,7	1768,3	1140,5	939,8	1177,8

Агент	Один лидер $L_2$				Два лидера $L_2$	
	$M_2=(1),$ $M_1=(2),$ $M_0=(3)$	$M_2=(2),$ $M_1=(1),$ $M_0=(3)$	$M_2=(3),$ $M_1=(1),$ $M_0=(2)$	$M_2=(3),$ $M_1=(2),$ $M_0=(1)$	$M_2=(2,3),$ $M_1=(1)$	$M_2=(1,2),$ $M_1=(3)$
МТС	106,9	672,9	703,1	145,6	126,3	415,1
МегаФон	550,9	103,2	90,3	414,9	216,4	326,2
ВымпелКом	254,6	145,9	292,5	172,7	474,9	225,7
Всего	912,4	922,1	1085,9	733,2	817,6	966,9

**Таблица 3.** Структура информационных равновесий на рынке интернет-трафика,  $Q_i^I$ , млрд МБ

Агент	Факт 2015 г.	Курно $M_0=(N)$	Один лидер $L_1$			Два лидера $L_1$	
			$M_1=(1),$ $M_0=(2,3)$	$M_1=(2),$ $M_0=(1,3)$	$M_1=(3),$ $M_0=(1,2)$	$M_1=(1,2),$ $M_0=(3)$	$M_1=(1,3),$ $M_0=(2)$
МТС	598,5	440,5	973,9	558,8	256,7	695,2	706,2
МегаФон	623,9	447,6	266,2	1794,4	267,4	708,8	169,1
ВымпелКом	473,2	439,3	253,7	557,3	970,6	18,1	698,4
Всего	1695,6	1327,4	1493,9	2910,6	1494,6	1422,2	1573,7

Агент	Один лидер $L_2$				Два лидера $L_2$	
	$M_2=(1),$ $M_1=(2),$ $M_0=(3)$	$M_2=(2),$ $M_1=(1),$ $M_0=(3)$	$M_2=(3),$ $M_1=(1),$ $M_0=(2)$	$M_2=(3),$ $M_1=(2),$ $M_0=(1)$	$M_2=(2,3),$ $M_1=(1)$	$M_2=(1,2),$ $M_1=(3)$
МТС	106,9	672,9	696,9	371,5	126,3	415,1
МегаФон	550,9	103,2	311,1	624,2	216,4	326,2
ВымпелКом	254,6	145,9	73,2	75,7	474,9	225,7
Всего	912,4	922,1	1081,3	1071,4	817,6	966,9

наибольшей и наименьшей суммы квадратов остаточных отклонений соответствует распределению Фишера.

Решения рефлексивной игры (9), полученные путем численного решения системы уравнений (10) методом сопряженных градиентов, приведены в

табл. 2, 3. Точность численного решения задавалась как модуль отклонения уравнений (10) от нуля; погрешность решения определялась как доля точности от последнего слагаемого (предельных издержек) в уравнениях (10) и не превышала 2%.

Также были рассчитаны объемы рынка в случае картельного сговора как решения уравнения  $a + 2bQ^* - B\beta Q^{*\beta-1} = 0$ , аналогичного уравнению (10) при средних значениях коэффициентов функций издержек агентов. При картельном сговоре равновесный объем рынка голосовых услуг составил 706,8 млрд мин, равновесный объем рынка интернет-трафика составил 892,6 млрд МБ.

#### 4. Обсуждение

Сформированные по ретроспективным данным до 2015 г. регрессионные модели цен (23) и издержек агентов (24) имеют удовлетворительную предсказательную силу, поскольку прогнозы цен и издержек, рассчитанные на 2016 г., отличаются от фактических значений цен и издержек в 2016 г. не более чем на 10%.

Анализ регрессий (24) приводит (табл. 1) к следующим выводам:

1) издержки на интернет-передачу данных рассматриваемых агентов описываются степенными функциями, значения коэффициентов которых  $B_i^I \approx 6$ ,  $\beta_i^I \approx 0,3 \forall i = 1, 2, 3$  выражают схожесть процессов, протекающие в этом секторе рынка;

2) издержки на голосовые услуги агента ПАО «МТС» описываются степенной функцией при всех  $Q_1^\Gamma > 0$ , а агентов ПАО «МегаФон» и ПАО «Вымпелком» – степенными функциями при объемах услуг  $Q_i^\Gamma > \tilde{Q}_i^\Gamma > 0$ ,  $i = 2, 3$ , характерных для последних восьми лет ретроспективного периода, причем их коэффициенты также близки по величине  $\beta_i^\Gamma \in [0,83; 0,85] \forall i = 1, 2, 3$ ;

3) степенные функции издержек (24) описывают состояние агентов в долгосрочном периоде, поскольку  $C_{Fi} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

4) функции издержек на интернет-передачу данных и на голосовые услуги характеризуются положительным эффектом от расширения масштаба  $\beta_i^I, \beta_i^\Gamma < 1 \forall i = 1, 2, 3$ , однако  $\beta_i^I < \beta_i^\Gamma \forall i = 1, 2, 3$ , что выражает экономию от масштаба на интернет-передачу данных за счет накопленных мощностей оказания голосовых услуг. Таким образом, поскольку параметры функций издержек агентов на передачу данных в отличие от издержек агентов на голосовые услуги отклоняются незначительно, то распределение интернет-рынка будет более существенно определяться влиянием информационной асимметрии.

Анализ информационных равновесий (табл. 2, 3) приводит к следующим выводам. Реальный суммарный объем рынка голосовых услуг и интернет-трафика существенно превышает расчетный объем соответствующего рынка в случае картельного сговора, что подтверждает наличие конкуренции на телекоммуникационном рынке РФ в целом.

Модель Курно на рынке голосовых услуг (табл. 1) показывает, что при отсутствии рефлексии (случай  $M_0 = (N)$ ) агенты 1 (МТС) и 2 (МегаФон), имеющие преимущество по функции издержек ( $\beta_3^\Gamma < \beta_1^\Gamma < \beta_2^\Gamma$ , но

$B_2^\Gamma < B_1^\Gamma < B_3^\Gamma$ ), могут рассчитывать на значительно большие доли рынка (соответственно 458,3 и 403,5 млрд мин), чем в реальности (360,6 и 306,3 млрд мин). Агент 3 (ВымпелКом), имеющий худшие параметры функции издержек, может в этом случае рассчитывать на меньшую долю рынка (111,3 млрд мин), чем в реальности (241,1 млрд мин). Следовательно, при установлении равновесия на реальном рынке голосовых услуг играет роль не учтенный в моделях издержек информационный фактор. Суммарный объем рынка голосовых услуг по Курно (973 млрд мин) больше реального (908 млрд мин), а равновесная цена ниже фактической (рис. 1), что говорит о менее выраженной конкуренции на реальном рынке.

Модель Курно (случай  $M_0 = (N)$ ) на интернет-рынке (табл. 3) показывает, что все агенты как имеющие близкие по величине коэффициенты функции издержек могут рассчитывать на значительно меньшие доли рынка, чем в реальности (440,5 млрд МБ против 598,5 млрд МБ для агента 1, 447,6 млрд МБ против 623,9 млрд МБ для агента 2, 439,3 млрд МБ против 473,2 млрд МБ для агента 3). Следовательно, на равновесие реального интернет-рынка также влияет не учтенный в моделях издержек агентов информационный фактор. Суммарный объем интернет-рынка по Курно (1327,4 млрд МБ) меньше реального (1695,6 млрд МБ), а равновесная цена выше фактической (рис. 1), что говорит о более высокой степени конкуренции на реальном рынке. Действительно, интернет-рынок в РФ является растущим, значит высококонкурентным, а рынок голосовых услуг стабилизировался, поэтому интенсивность конкурентной борьбы агентов за рыночные ниши снизилась.

Модели игры с одним лидером первого уровня по Штакельбергу (колонки «Один лидер  $L_1$ » в табл. 2, 3) типа (19а)  $G = (M_0, M_1)$ ,  $M_0 = (N \setminus i)$ ,  $M_1 = (i)$ ,  $i \in N$  приводят к информационным равновесиям на рынке голосовых услуг и на интернет-рынке, в которых *лидер имеет преобладающую рыночную долю*. Исключением является случай  $M_1 = (1)$ ,  $M_0 = (2, 3)$  на рынке голосовых услуг, в котором лидер агент 1 не имеет преобладающей рыночной доли (331,9 млрд мин против 493,3 млрд мин у агента 2), поскольку доля агента 3 с более высокими предельными издержками перераспределяется не в его пользу, а в пользу агента 2, у которого минимальные предельные издержки ( $B_2^\Gamma < B_1^\Gamma < B_3^\Gamma$ ).

Модели игры с двумя лидерами первого уровня по Штакельбергу (колонки «Два лидера  $L_1$ » в табл. 2, 3) типа (19а)  $G = (M_0, M_1)$ ,  $M_0 = (N \setminus i, j)$ ,  $M_1 = (i, j)$ ,  $i, j \in N$  приводят к информационным равновесиям на рынке голосовых услуг и на интернет-рынке, в которых лидеры имеют преобладающую рыночную долю. На рынке голосовых услуг в модели  $M_1 = (1, 2)$  равновесие характерно тем, что равновесная доля (102 млрд мин) ведомого агента 3 с наиболее высокими предельными издержками существенно меньше реальной (241,1 млрд мин), а доля агента-лидера 2 (492,8 млрд мин), у которого минимальные предельные издержки, существенно больше реальной (306,3 млрд мин); в модели  $M_1 = (1, 3)$  доля агента-лидера 1 (168,2 млрд мин) с наивысшими предельными издержками значимо меньше реальной (360,6 млрд мин). На интернет-рынке в модели  $M_1 = (1, 2)$  равновесие характерно тем, что доля ведомого агента 3 (18,1 млрд МБ) с наибольшими предельными издержками меньше реальной (473,2 млрд МБ), а доля



агента-лидера 2 (708,8 млрд МБ) с наименьшими предельными издержками существенно больше реальной (623,9 млрд МБ). В модели интернет-рынка  $M_1 = (1, 3)$  доля ведомого агента 2 (169,1 млрд МБ) значимо меньше реальной (623,9 млрд МБ), а доли лидеров агента 1 (706,2 млрд МБ) и агента 3 (698,4 млрд МБ) больше реальных (598,5 млрд МБ и 473,2 млрд МБ соответственно). Следовательно, *модели игры с двумя лидерами первого уровня по Штакельбергу не соответствуют рефлексии агентов на реальных рынках.*

Модели игры с одним лидером первого уровня и одним лидером второго уровня по Штакельбергу (колонки «Один лидер  $L_2$ » в табл. 2, 3) типа (19b)  $G = (M_0, M_1, M_2)$ ,  $M_0 = (N \setminus i, j)$ ,  $M_1 = (i)$ ,  $M_2 = (k)$ ,  $i, k \in N$  приводят к информационным равновесиям на рынке голосовых услуг и на интернет-рынке, в которых лидер второго уровня не имеет преобладающей рыночной доли; во всех равновесиях наибольшую долю рынка имеет лидер первого уровня. Следовательно, подтверждается известное [61] положение о неэффективности углубления рефлексии. Отметим, что в линейной модели трехагентной олигополии имел место [54] противоположный результат – рыночная доля лидера второго уровня превышала долю лидера первого уровня; это объясняется тем, что при линейных функциях издержек агентов решение системы (13) идентично выражению (12), т.е. предположительные вариации уравнений (10) для всех лидеров выше первого уровня такие же, как для лидеров первого уровня. Поскольку распределение рынка при равновесиях типа (19b) отличается от реального, то *модели игры с единичными лидерами первого и второго уровня по Штакельбергу не соответствуют рефлексии агентов на реальных рынках.*

Модели игры с одним лидером первого уровня и двумя лидерами второго уровня по Штакельбергу (колонки «Два лидера  $L_2$ » в табл. 2, 3) типа (19c)  $G = (M_1, M_2)$ ,  $M_1 = (N \setminus k)$ ,  $M_2 = (k)$ ,  $i, k \in N$  формируют информационные равновесия на рынке голосовых услуг и на интернет-рынке, в которых лидеры второго уровня имеют преобладающие рыночные доли за счет лидера первого уровня. Следовательно, в рассматриваемом случае нелинейных функций издержек трех агентов выявлено новое свойство рефлексии: *несовпадение рангов рефлексии, при котором один агент имеет первый ранг рефлексии, а окружение – второй ранг, обеспечивает эффективность рефлексии для агентов с более высоким рангом.* Значит известный вывод [61] о снижении эффективности рефлексивного поведения с увеличением ранга рефлексии имеет исключение для модели игры с линейным спросом и нелинейными издержками агентов.

Одна из моделей  $G = (M_1, M_2)$ ,  $M_1 = (N \setminus k)$ ,  $M_2 = (k)$ ,  $i, k \in N$ , а именно модель игры  $G = (M_1, M_2)$ ,  $M_1 = (3)$ ,  $M_2 = (1, 2)$ , *достаточно точно описывает реальное равновесие на телекоммуникационном рынке РФ* (табл. 4, 5). Отметим, что на рынке голосовых услуг модель  $M_1 = (3)$ ,  $M_2 = (1, 2)$  более точно соответствуют реальному распределению рынка в 2016 г. (погрешность по отдельным агентам не превышает 7%, по суммарному рынку – не более 1%); на интернет-рынке модель  $M_1 = (3)$ ,  $M_2 = (1, 2)$  более точно описывает реальное распределение рынка в 2015 г. (погрешность по отдельным агентам не превышает 12%, по суммарному рынку – не более 5%). Получен-

**Таблица 4.** Анализ отклонений информационного равновесия  $M_2 = (1, 2)$ ,  $M_1 = (3)$  от реального равновесия на рынке голосовых услуг

Агент	Факт $Q_i^I$ , млрд мин, 2015 г.	Прогноз $Q_i^I$ , млрд мин, 2016 г.	$M_2=(1, 2)$ , $M_1=(3)$	$\Delta Q_i$ от 2015 г., %	$\Delta Q_i$ от 2016 г., %
МТС	360,6	390,2	415,1	15%	6%
МегаФон	306,3	328,3	326,2	6%	-1%
ВымпелКом	241,1	243,0	225,7	-6%	-7%
Всего	908,0	961,5	966,9	6%	1%

**Таблица 5.** Анализ отклонений информационного равновесия  $M_2 = (1, 2)$ ,  $M_1 = (3)$  от реального равновесия на интернет-рынке

Агент	Факт $Q_i^I$ , млрд МБ, 2015 г.	Прогноз $Q_i^I$ , млрд МБ, 2016 г.	$M_2=(1, 2)$ , $M_1=(3)$	$\Delta Q_i$ от 2015 г., %	$\Delta Q_i$ от 2016 г., %
МТС	598,5	727,4	533,0	-11%	-27%
МегаФон	623,9	697,2	551,0	-12%	-21%
ВымпелКом	473,2	492,2	519,0	10%	5%
Всего	1695,6	1916,8	1603,1	-5%	-16%

ный результат объясняется тем, что рынок голосовых услуг в РФ стабилизировался, а интернет-рынок является динамично развивающимся, следовательно, формализация рефлексии на интернет-рынке должна основываться на трендах с менее глубоким ретроспективным периодом.

Таким образом, эмпирически обоснованным является следующее суждение о рефлексивных представлениях агентов телекоммуникационного рынка РФ в 2015–2016 гг.: *агенты 1 и 2 являются лидерами второго уровня*, т.е. представляют всех агентов окружения, в том числе других лидеров второго уровня, лидерами первого уровня; *агент 3 является лидером первого уровня*, т.е. представляет всех агентов окружения ведомыми агентами. Это значит, что агентам 1 и 2 свойственна рефлексия 2-го ранга, т.е. они считают, что все агенты окружения думают о них как о ведомых; агенту 3 присуща рефлексия 1-го ранга, т.е. он рассматривает окружение как ведомых агентов. Установленная закономерность рефлексивных представлений агентов практически значима для агента 3, который может улучшить свою стратегию, максимизируя функцию полезности с учетом информации о реакциях агентов 1, 2 как лидеров второго уровня, в результате чего он станет лидером третьего уровня. Практически это реализуемо путем расчета агентом 3 информационного равновесия в игре  $G = (M_2, M_3)$ ,  $M_3 = (3)$ ,  $M_2 = (1, 2)$ , вычисления цены соответствующего равновесия и назначения этой цены на свои услуги.

В целом, полученные информационные равновесия представляют собой набор теоретических решений возможных игр агентов рынка олигополии, применимых для сравнения с параметрами реальных рынков с целью оценки ранга рефлексии реальных агентов.

## 5. Заключение

Исследована проблема поиска равновесий на рынке олигополии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения агентов рынка. Сформированы модели рефлексивных игр для рынка трех агентов в случаях совпадения представлений агентов друг о друге как о ведомых агентах  $\{F, F\}$ , совпадения представлений агентов друг о друге как о лидерах по Штакельбергу  $\{L, L\}$ , противоположности представлений агентов  $\{F, L\}$ , один из которых представляет контрагента ведомым, а другой – лидером. Получены выражения для нахождения информационных равновесий в этих играх для первого и второго рангов рефлексии, в частности, для случаев одного или нескольких лидеров по Штакельбергу первого и второго уровней. Аналитические формулы информационных равновесий являются основой эффективного моделирования рефлексивного поведения агентов, что позволяет решать прикладные задачи анализа глубины рефлексии агентов на реальных рынках. Анализ случая с несколькими лидерами по Штакельбергу второго уровня, не исследованный в [54], для реальной игры на рынке мобильной телефонии России позволил получить неизвестные ранее закономерности рефлексивного поведения.

Статистический анализ динамики телекоммуникационного рынка России как олигополии показал наличие линейных ценовых трендов на голосовые услуги и интернет, а также нелинейных степенных трендов издержек агентов. Моделирование рефлексивных игр на примере этого рынка показало, во-первых, влияние на реальные рыночные равновесия информационного фактора, не учтенного в моделях издержек агентов; во-вторых, преобладание на рынке лидера (лидеров) первого уровня по Штакельбергу; в-третьих, преобладание на рынке лидера первого уровня при наличии лидера второго уровня, специфичное исключительно для модели олигополии с нелинейными издержками агентов; в-четвертых, преобладание на рынке лидеров второго уровня, если их несколько, над лидером первого уровня. Последнее свойство также специфично для олигополии с нелинейными издержками агентов: несовпадение рангов рефлексии, при котором один агент имеет первый ранг рефлексии, а окружение – второй ранг, обеспечивает эффективность рефлексии для агентов с более высоким рангом.

Сравнение найденных информационных равновесий с параметрами реального рынка позволило определить ранги рефлексии реальных агентов: агентам 1 (МТС) и 2 (МегаФон) свойственна рефлексия 2-го ранга, т.е. они считают, что все агенты окружения думают о них как о ведомых; агенту 3 (ВымпелКом) присуща рефлексия 1-го ранга, т.е. он рассматривает окружение как ведомых агентов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Из гипотезы 2 следует, что агент выбирает действие, либо игнорируя возможные действия окружения, т.е. является ведомым агентом, либо считая действия окружения заданными, т.е. является лидером по Штакельбергу. Предположим, что может быть некое третье представление о стратегиях окружения, например, агент пред-

ставляет стратегию окружения как лидера  $\eta$ -го уровня, т.е. считает, что он по отношению к окружению является лидером ( $\eta-1$ )-го уровня – это противоречит гипотезе 4 об отсутствии самооценки. В силу гипотезы 3 все агенты одинаково информированы, поэтому все они могут представлять стратегии окружения только типов  $L$ ,  $F$ .

*Доказательство утверждения 2.* Покажем вначале, что в задаче (4) максимальная полезность лидера по Штакельбергу не меньше максимальной полезности ведомого агента

$$\max_{Q_L \geq 0, Q_F = f_F(Q_L)} \Pi_L(Q, Q_L) \geq \max_{Q_F \geq 0} \Pi_F(Q, Q_F),$$

где  $f_F(Q_L)$  – известная лидеру функция реакции ведомого агента (решение уравнения (5)), записанная в явном виде; лидер из соответствующего ему уравнения (5) определяет свою функцию реакции  $f_L(Q_F)$ , точка пересечения которых согласно (5) есть равновесие Нэша. В равновесии равенство прибылей агентов достигается по (1) в случае равенства их выпусков  $Q_L^* = Q_F^*$ , которое соответствует равенству угловых коэффициентов реакций  $|f_{FQ_L}| = |f_{LQ_L}|$  в точке их пересечения. Но поскольку

$$Q_L^* = \arg \max_{Q_L \geq 0, Q_F = f_F(Q_L)} \Pi_L(Q, Q_L),$$

то реакция лидера по (4), (5) определена из условия

$$\left( [a - b(Q_L + f_F(Q_L))] Q_L - C_{FL} - B_L Q_L^{\beta_L} \right)'_{Q_L} = 0$$

и имеет больший угловой коэффициент, чем реакция ведомого, определенная из условия

$$\left( [a - b(Q_L + Q_F)] Q_F - C_{FF} - B_F Q_F^{\beta_F} \right)'_{Q_F} = 0,$$

на величину  $f'_{FQ_L} Q_L$ . Следовательно, в равновесии Нэша  $|f'_{FQ_L}| \geq |f'_{LQ_L}|$ , поэтому  $Q_L^* \geq Q_F^*$ , откуда следует

$$\max_{Q_L \geq 0, Q_F = f_F(Q_L)} \Pi_L(Q, Q_L) \geq \max_{Q_F \geq 0} \Pi_F(Q, Q_F).$$

Далее, из определения (8) следует, что если окружение в представлении  $i$ -го агента имеет уровень  $M_m$ , то  $BR_i(G_{i(-i)}^1 = M_m) \in M_\eta$ ,  $\eta > m$ , т.е. соотношение  $i$ -го агента и окружения равносильно соотношению  $L$  и  $F$ , следовательно, получим (14).

Покажем (15): если  $G_{i(-i)}^1 = (M_m)$ ,  $M_m = (-i)$ , то предположим, что (15) не выполняется  $BR_i(G_{i(-i)}^1) \notin M_{m+1}$ . Тогда случай  $BR_i(G_{i(-i)}^1) \in M_\eta$ ,  $\eta > m + 1$ , например,  $BR_i(G_{i(-i)}^1) \in M_{m+2}$ , противоречит гипотезе 4, поскольку агент выбирает стратегию не как лидер по отношению к окружению

как к ведомым. Другой случай  $BR_i \left( G_{i(-i)}^1 \right) \in M_\eta$ ,  $\eta < m + 1$  с учетом (14) не является максимумом прибыли агента.

*Доказательство утверждения 3.* В игре  $G = (M_0, M_1)$  в случае  $L_1 = 1$  имеем  $f = 2$ ,  $\varphi_f = u_{f-1}u_f - 1$ ,  $\psi_f = 0$ ,  $\sum_{\gamma=2}^{f-2} \prod_{j=1 \setminus \gamma}^f (u_j - 1) = 0$ , поэтому из (12) непосредственно следует (20). В игре типа  $G = (M_0, M_1, M_2)$  при  $L_2 = 1$  система уравнений (13) имеет вид

$$(П.1) \quad \begin{cases} x_{li} + u_k x_{lk} = -1, & k \in M_0, \\ u_i x_{li} + g_{ik} x_{lk} = -g_{il}, & l \in M_2. \end{cases}$$

Например, если первый агент является лидером второго уровня, второй агент – лидером первого уровня, а третий агент – ведомым, т.е.  $M_2 = (1)$ ,  $M_1 = (2)$ ,  $M_0 = (3)$ , то  $k = 3$ ,  $l = 1$ ,  $i = 2$ , и эта система для вариаций агента 1 имеет вид

$$\begin{aligned} x_{12} + u_3 x_{13} &= -1, & u_2 x_{12} + g_{23} x_{13} &= -g_{21}, \\ g_{23} &= 1 + Q_2(y_{13} + y_{33}), & g_{21} &= 1 + Q_2(y_{11} + y_{31}). \end{aligned}$$

Решение системы (П.1) дает (21).

Если количество лидеров второго уровня более одного, то с учетом (18) будем считать, что эти лидеры представляют всех агентов окружения, в том числе других лидеров второго уровня, как лидеров первого уровня. Тогда система уравнений (13) нахождения предположительных вариаций для реакции  $l$ -го агента примет вид

$$(П.2) \quad \begin{cases} u_i x_{lk} + g_{ik} x_{li} = -g_{il}, & i, k \in M_1, \\ g_{ki} x_{lk} + u_k x_{li} = -g_{kl}, & l \in M_2, \quad i \neq k. \end{cases}$$

Например, если первый агент является лидером первого уровня, второй и третий агенты – лидерами второго уровня, т.е.  $M_2 = (2, 3)$ ,  $M_1 = (1)$ , то  $k, i = 1$ ,  $l = 2, 3$ , система нахождения предположительных вариаций для третьего агента (одного из двух высших лидеров) имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 x_{31} + g_{12} x_{32} &= -g_{13}, & g_{21} x_{31} + u_2 x_{32} &= -g_{23}, \\ g_{21} &= 1 + Q_2(y_{11} + y_{31}), & g_{12} &= 1 + Q_1(y_{22} + y_{32}), \\ g_{13} &= 1 + Q_1(y_{23} + y_{33}), & g_{23} &= 1 + Q_2(y_{13} + y_{33}). \end{aligned}$$

Для второго агента, также высшего лидера, эта система следующая:

$$\begin{aligned} u_1 x_{21} + g_{13} x_{23} &= -g_{12}, & g_{31} x_{21} + u_3 x_{23} &= -g_{32}, \\ g_{31} &= 1 + Q_3(y_{11} + y_{21}), & g_{13} &= 1 + Q_1(y_{23} + y_{33}), \\ g_{12} &= 1 + Q_1(y_{22} + y_{32}), & g_{32} &= 1 + Q_3(y_{12} + y_{22}). \end{aligned}$$

Решение системы (П.2) дает (22).

**Таблица 6.** Статистические характеристики регрессионных моделей (23), (24)

Регрессионная модель	$R^2$	Число наблюдений $n$	Число факторов модели $m$	$F_{\text{факт}}$	$F_{\text{табл}}$	Тест Гельдфельда – Квандта <sup>1</sup>		
						$\frac{\max S_{n_1}}{\min S_{n_1}}$	$n_1$	$F_{\text{табл}}(n_1 - m - 1, n_1 - m - 1)$
$P^{\Gamma} (Q^{\Gamma})$	0,92	14	2	65,0	3,59	4,5	5	9,28
$P^{II} (Q^{II})$	0,97	12	2	145,5	3,86	8,2	5	9,28
$C_1^{\Gamma}(Q)$	0,99	15	3	363,0	3,36	1,5	6	19
$C_2^{\Gamma}(Q)$	0,97	14	3	107,8	3,48	9,0	6	19
$C_3^{\Gamma}(Q)$	0,98	14	3	163,3	3,48	4,8	6	19
$C_1^{II}(Q)$	0,93	13	3	39,8	3,63	9,2	6	19
$C_2^{II}(Q)$	0,89	13	3	24,3	3,63	13,8	6	19
$C_3^{II}(Q)$	0,92	13	3	34,5	3,63	14,3	6	19

<sup>1</sup>  $\max S_n$ ,  $\min S_n$  – наибольшая и наименьшая суммы квадратов остаточных отклонений,  $n_1$  – число наблюдений в подвыборке.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wulansari N.E., Rismayani R., Pramudiana Y.* Study on Structure and Performance of Telecommunication Services Industry in Indonesia // CTTE (Conf. Telecomm., Media Internet Techno-Econom.), Proc. 2015. No. 7347229.
2. *Hurkens S., López Á.L.* The Welfare Effects of Mobile Termination Rate Regulation in Asymmetric Oligopolies: The Case of Spain // *Telecomm. Policy.* 2012. No. 36(5). P. 369–381.
3. *Sznajd-Weron K., Weron R., Włoszczowska M.* Outflow Dynamics in Modeling Oligopoly Markets: The Case of the Mobile Telecommunications Market in Poland // *J. Statist. Mechan.: Theory Experiment.* 2008. No. 11. P. 11018.
4. *Hausman J.A., Taylor W.E.* Telecommunication in the US: From Regulation to Competition (Almost) // *Rev. Indust. Organizat.* 2013. No. 42(2). P. 203–230.
5. *Grünwald O.* Model of Customer Buying Behavior in the CZ Mobile Telecommunication Market // *Acta Polytechnica.* 2012. No. 52(5). P. 42–50.
6. *Chu-Hwan P.* Analysis of Competitive Situations among Korean Mobile Carriers Using Elasticity Estimation // *Far East J. Electron. Commun.* 2016. No. 16(3). P. 703–728.
7. *Ida T.* Beyond Mobile Number Portability: Measuring Consumer Preferences for Service Portability in Japan’s Mobile Phone Market // *Appl. Econom.* 2012. No. 44(26). P. 3357–3369.
8. *Andini C., Cabral R.* How Do Mobile-voice Operators Compete? IVQR Estimates // *Appl. Econom. Lett.* 2013. No. 20(1). P. 18–22.
9. OECD Communications Outlook 2013.  
<http://www.oecd.org/sti/broadband/oecd-communications-outlook-19991460.htm>
10. Наука за рубежом / ИПРАН РАН. Декабрь, 2013 (№ 27) – Перспективы развития телекоммуникационной индустрии. [http://www.issras.ru/global\\_science\\_review](http://www.issras.ru/global_science_review)
11. *Mas-Collel A., Whinston M., Green J.* Microeconom. Theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
12. *Shapiro C.* Theories of Oligopoly Behavior // Discussion paper 126. Woodrow Wilson School. Princeton Univers. Press, 1987.

13. *Nash J.* Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
14. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
15. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univer. Press, 1924.
16. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934.)
17. *Karmarkar U.S., Rajaram K.* Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // Eur. J. Oper. Res. 2012. No. 223(3). P. 680–689.
18. *Ledvina A., Sigar R.* Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // Math. Financ. Econom. 2012. No. 6(4). P. 261–293.
19. *Currarini S., Marini M.A.* Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // Appl. Math. Sci. 2013. No. 7(1–4). P. 197–200.
20. *Vasin A.* Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // Procedia Comput. Sci. 2014. No. 31. P. 124–132.
21. *Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J.* Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // 2016 IEEE Int. Conf. Communicat., ICC 2016. No. 7511340.
22. *Naimzada A.K., Sbragia L.* Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes // Chaos, Solit. Fractal. 2006. No. 29(3). P. 707–722.
23. *Askar S., Alnowibet K.* Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // Chaos, Solit. Fractal. 2016. No. 84. P. 15–22.
24. *Naimzada A., Tramontana F.* Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // J. Difference Equat. Appl. 2015. No. 21(7). P. 553–563.
25. *Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F.* Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Heterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. No. 23(1–3). P. 245–262.
26. *Colacicco R.* Ten Years of General Oligopolistic Equilibrium: A Survey // J. Econom. Surveys. 2015. No. 29(5). P. 965–992.
27. *Jørgensen S., Zaccour G.* A Survey of Game-theoretic Models of Cooperative Advertising // Eur. J. Oper. Res. 2014. No. 237(1). P. 1–14.
28. *Ino H., Matsumura T.* Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model // B.E. J. Theoret. Econom. 2016. No. 16(1). P. 243–265.
29. *Peng Y., Lu Q., Xiao Y.* A Dynamic Stackelberg Duopoly Model with Different Strategies // Chaos, Solit. Fractal. 2016. No. 85. P. 128–134.
30. *Sherali H.D.* Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis // Oper. Res. 1984. No. 32(2). P. 390–404.
31. *Boyer M., Moreaux M.* Being a Leader or a Follower. Reflections on the Distribution of Roles in Duopoly // Int. J. Industr. Organiz. 1987. No. (2). P. 175–192.
32. *DeMiguel V., Xu H.* A Stochastic Multiple-leader Stackelberg Model: Analysis, Computation, and Application // Oper. Res. 2009. No. 57(5). P. 1220–1235.
33. *Julien L.A.* On Noncooperative Oligopoly Equilibrium in the Multiple Leader – follower Game // Eur. J. Oper. Res. 2017. No. 256(2). P. 650–662.

34. *Solis C.U., Clempner J.B., Poznyak A.S.* Modeling Multileader – Follower Noncooperative Stackelberg Games // *Cybernet. Syst.* 2017. No. 47(8). P. 650–673.
35. *Лефевр В.А.* О самоорганизующихся и саморефлективных системах и их исследовании // *Проблемы исследования систем и структур. Матер. конф. М.: Изд-во АН СССР, 1965. С. 61–68.*
36. *Lefebvre V.* Reflexive Analysis of Groups (Book Chapter) / *Comput. Methods Counterterr.* 2009. P. 173–210.
37. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010.
38. *Adams-Webber J.* Some Functional Relationships Informing the Structure of Personal Constructs // *J. Constructiv. Psychol.* 2013. No. 26(3). P. 202–209.
39. *Anderson J., Ramirez D., Stephenson D.* Asymmetry in Human Cognition: Further Replication and Extension // *Percept. Motor Skills.* 2012. No. 114(1). P. 185–188.
40. *Alaoui L., Penta A.* Endogenous Depth of Reasoning // *Rev. Econom. Studies.* 2016. No. 83(4). P. 1297–1333.
41. *Kneeland T.* Coordination under Limited Depth of Reasoning // *Games Econom. Behavior.* 2016. No. 96. P. 49–64.
42. *Brocas L., Carrillo J.D., Wang W., Camerer C.F.* Imperfect Choice or Imperfect Attention? Understanding Strategic Thinking in Private Information Games // *Rev. Econom. Studies.* 2014. No. 81(3). P. 944–970.
43. *Crawford V.P., Costa-Gomes M.A., Iriberrri N.* Structural Models of Nonequilibrium Strategic Thinking: Theory, Evidence, and Applications // *J. Econom. Literat.* 2013. No. 51(1). P. 5–62.
44. *Rgo L., Halpern J.* Generalized Solution Concepts in Games with Possibly Unaware Players // *Int. J. Game Theory.* 2012. No. 41. P. 131–155.
45. *Heifetz A., Meier M., Schipper B.C.* Unawareness, Beliefs, and Speculative Trade // *Games Econom. Behavior.* 2013. No. 77(1). P. 100–121.
46. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.
47. *Корепанов В.О., Новиков Д.А.* Метод рефлексивных разбиений в моделях группового поведения и управления // *Пробл. управл.* 2011. № 1. С. 21–32.  
*Korepanov V.O., Novikov D.A.* The Reflexive Partitions Method in Models of Collective Behavior and Control // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 8. P. 1424–1441.
48. *Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры: трансформация структур информированности // *Пробл. управл.* 2010. № 5. С. 43–48.  
*Chkhartishvili A.G.* Reflexive Games: Transformation of Awareness Structure // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 6. P. 1208–1216.
49. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: A Survey // *Advances Syst. Scie. Appl.* 2014. No. 3. P. 254–277.
50. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // *IFAC-PapersOnLine.* 2016. No. 49(32). P. 19–23.
51. *Liu Y., Gao L., Guan J.* Marketing Strategy of Price Competition and Product Differentiation in Duopoly Enterprises with Asymmetric Information // *Int. Conf. Services Systems Services Management, Proc. of ICSSSM'05.* 2005. No. 1. (1499557). P. 665–668.
52. *Gilpatric S.M., Li Y.* Information Value under Demand Uncertainty and Endogenous Market Leadership // *Econom. Inquiry.* 2015. No. 53(1). P. 589–603.



53. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Моделирование структур рынка олигополии при нелинейных функциях спроса и издержек агентов // Пробл. управл. 2015. № 6. С. 10–22.  
*Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G.* Structural Modeling of Oligopoly Market under the Nonlinear Functions of Demand and Agents' Costs // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 332–348.
54. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Теоретико-игровые модели рынка олигополии с нелинейными функциями издержек агентов // АиТ. 2017. № 9. С. 106–130.  
*Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G.* Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1631–1650.
55. *Базенков Н.И.* Динамика двойных наилучших ответов в игре формирования топологии беспроводной ad hoc сети // УБС. 2013. № 43. С. 217–239.  
*Bazenkov N.I.* Double Best Response Dynamics in Topology Formation Game for Ad Hoc Networks // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 2. P. 323–335.
56. *Geraskin M.I.* Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // *Kybernetes*. 2017. No. 46(6). P. 1052–1067.
57. Раскрытие информации: Годовая отчетность [Электронный ресурс],  
URL: [http://www.company.mts.ru/comp/ir/control/data/annual\\_reports/](http://www.company.mts.ru/comp/ir/control/data/annual_reports/) (дата обращения 25.05.2016).
58. Результаты и отчетность: Годовые отчеты [Электронный ресурс],  
URL: [http://corp.megafon.ru/investoram/shareholder/year\\_report/](http://corp.megafon.ru/investoram/shareholder/year_report/)  
(дата обращения 25.05.2016).
59. Раскрытие информации: Годовые отчеты [Электронный ресурс],  
URL: <http://moskva.beeline.ru/about/about-beeline/disclosure/annual-reports/>  
(дата обращения 25.05.2016).
60. *Kennedy P.* A Guide to Econometrics. Blackwell, 2008.
61. *Lyubimov V.V., Lashin V.S.* External Stability of a Resonance during the Descent of a Spacecraft with a Small Variable Asymmetry in the Martian atmosphere // *Advanc. Space Res.* 2017. No. 59(6). P. 1607–1613.
62. *Lyubimov V.V.* Numerical Simulation of the Resonance Effect at Re-entry of a Rigid Body with Low Inertial and Aerodynamic Asymmetries into the Atmosphere // *CEUR Workshop Proc.* 2015. No. 1490. P. 198–210.
63. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.*

Поступила в редакцию 05.09.2017