Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Х. Прилуцкий, Оптимальное управление двухстадийными стохастическими производственными системами, *Автомат. и телемех.*, 2018, выпуск 5, 69–82

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.218.123.194
10 января 2025 г., 09:45:34

Автоматика и телемеханика, № 5, 2018

Управление в технических системах

© 2018 г. **М.Х. ПРИЛУЦКИЙ, д-р техн. наук (pril@iani.unn.ru)**
(Нижегородский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВУХСТАДИЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

Рассматривается проблема оптимального управления некоторым классом производственных систем, функционирующих в условиях неопределенности. Строится математическая модель, даются постановки оптимизационных задач управления, предлагаются эффективные алгоритмы их решения. Приводятся примеры прикладных задач, формализуемых в рамках построенной математической модели.

Ключевые слова: стохастические производственные системы, двухстадийные системы, оптимальное управление, рекуррентные соотношения динамического программирования, оптимальная стратегия.

1. Введение

Статья посвящена широко обсуждаемой проблеме управления производственными системами [1–3]. Традиционно в этой области в публикациях рассматриваются вопросы ресурсного планирования проектов [4], планирования с нечеткими ограничениями [5], анализа потоковых схем производства с использованием модели функции очистки (clearing function) [6], планирования с использованием систем дискретно-событийной симуляции (discrete event simulation systems) [7] и др. В данной статье рассматривается проблема оптимального управления некоторым классом производственных систем, функционирующих в условиях неопределенности в предположении, что планы производства известны. Функционирование систем условно разбивается на две стадии. Первая стадия заключается в выборе технологического режима, в результате которого изготавливаются полуфабрикаты, преобразующиеся на второй стадии в продукты производства. Выбор технологического режима определяет вероятности получения того или иного полуфабриката, т.е. первая стадия рассматриваемых производственных систем носит стохастический характер. На второй стадии изготавливается конкретный продукт производства из тех продуктов, которые можно изготовить из полученного полуфабриката. Эта стадия носит детерминированный характер. Предполагаются известными как затраты на использование технологических режимов, так и доходы от выпуска продуктов. Задачи, рассматриваемые для подобных систем, будем называть двухстадийными, принимая за первую стадию процесс изготовления полуфабрикатов, а за вторую – переработку полуфабрикатов в продукты производства. Для систем с двухстадийным характером производства возникают задачи как оптимального планирования, так и оптимального управления.

Статья является продолжением публикации автора [8], в которой решаются задачи оптимального планирования. Найденные оптимальные планы являются исходными данными для задач оптимального управления. В [8] приводятся примеры двухстадийных производственных систем, для которых применимы полученные результаты. Это задачи оптимального планирования и управления процессом переработки газового конденсата, процессом изготовления интегральных схем и процессом производства стали в мартеновских печах [9–13]. Для решения задач оптимального управления в статье строится математическая модель, в рамках которой исследуется рассматриваемая задача. При выполнении естественных для таких систем свойств предлагаются эффективные алгоритмы решения задачи оптимального управления. Первое свойство L выполняется, например, когда предприятие имеет право отправить потребителю продукцию более высокого качества, чем требуемая продукция. Выполнение свойства M предполагает, что отличия затрат на применения технологических режимов являются незначительными и ими можно пренебречь. Кроме того, для любой пары технологических режимов, один из режимов позволяет получать с большей вероятностью полуфабрикаты, из которых можно изготовить продукцию более высокого качества.

2. Постановка задачи поиска оптимального управления двухстадийными стохастическими системами

Задачи оптимального управления решаются тогда, когда план производства продукции (результат решения задачи оптимального планирования) на планируемый период известен. Будем рассматривать двухстадийные стохастические системы, когда под воздействием технологических режимов с заданными вероятностями изготавливаются полуфабрикаты, из которых изготавливаются продукты производства.

Пусть I – множество технологических режимов, J – множество полуфабрикатов, K – множество выпускаемых продуктов, $T = \{0, 1, \ldots, T_0\}$ – множество тактов функционирования системы. Через $P = \|p_{ij}\|$ обозначим матрицу вероятностей, где p_{ij} – вероятность того, что, применив технологический режим i, будет получен полуфабрикат j, $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J$. Пусть $K(j)$ – множество продуктов, любой из которых (но только один) может быть изготовлен из полуфабриката j, $K(j) \subseteq K$, $j \in J$. Обозначим через $\vec{\pi}$ $|K|$-мерный вектор с целочисленными неотрицательными компонентами – план производства продуктов в планируемом периоде, k-я компонента которого π_k определяет количество k-х продуктов, которые должны быть выпущены в планируемом периоде, $k \in K$. Пусть c_i – затраты производственной системы, связанные с использованием i-го технологического режима, $i \in I$ и g_k – доход, который получит система от производства одного запланированного k-го продукта, $k \in K$.

В качестве системы, моделирующей процесс производства продуктов, рассмотрим управляемую однородную марковскую цепь с конечным числом состояний и доходами. В дальнейшем такую систему будем обозначать через Ω. Множество Z состояний системы разобьем на два подмножества – основные и вспомогательные состояния. Основные состояния образуют множество $S = \left\{\vec{s}\,\middle|\, s_k \geq 0 \text{ – целые, } s_k \leq T_0,\ k \in K\right\}$, где s_k определяет количество продуктов k, которые произведены в системе. Вспомогательными состояниями являются всевозможные пары $(\vec{s}, j)$, где $\vec{s} \in S$, j – параметр вспомогательного состояния, $j \in J$. Если система находится во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$, то это означает, что появилась дополнительная информация о произведенном полуфабрикате. Управлениями в основных состояниях являются элементы множества I – выбора технологического режима. Допустимыми управлениями во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$ являются элементы множества $K(j)$ – изготовления из полуфабриката продукта производства. Функционирование системы рассматривается на конечном числе тактов. При этом под одним тактом понимается переход системы из основного состояния в основное – от выбора технологического режима до выпуска продукта производства.

Система Ω функционирует следующим образом.

В основном состоянии $\vec{s}$, $\vec{s} \in S$, к системе применяется управление i, $i \in I$ (выбор технологического режима). Система с вероятностью p_{ij} переходит во вспомогательное состояние $(\vec{s}, j)$ (определяется полученный полуфабрикат), при этом цепь несет потери $c_i \geq 0$ (затраты на использование технологического режима). Во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$ к системе применяется управление k, $k \in K(j)$ (изготовление из полуфабриката продукта производства). Под воздействием этого управления система переходит в новое основное состояние, которое будем обозначать $\vec{s} \oplus \delta_k$, отличающееся от состояния $\vec{s}$ лишь тем, что k-я компонента увеличивается на единицу (продукта k стало на единицу больше). При этом переходе система приобретает доход, определяемый функцией

$$q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) = \begin{cases} g_k, & \text{если} \quad s_k < \pi_k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $g_k \geq 0$ – доход, который получит система от выпуска запланированного продукта k, $k \in K(j)$. В новом основном состоянии $\vec{s} \oplus \delta_k$ к системе применяется управление i', под воздействием которого система с вероятностью $p_{i'l}$ переходит во вспомогательное состояние $(\vec{s} \oplus \delta_k, l)$, приобретая соответствующий доход, и т.д.

Нетрудно заметить, что множество состояний системы $Z = S \bigcup (S \times J)$ таково, что если начальное состояние системы принадлежит Z, то и любое состояние, в котором система может оказаться, тоже принадлежит Z.

Система Ω функционирует конечное число тактов T_0, где под тактом понимается переход из одного основного состояния в очередное основное состояние. Относительно рассматриваемой системы ставится задача оптимального управления: при заданных состоянии системы и числе тактов ее функционирования найти оптимальное управление системой в некотором классе управлений.

3. Нахождение оптимальных управлений системой Ω с использованием рекуррентных соотношений динамического программирования

Множество всех управлений обозначим через $U = V \times W$. Управление $u \in U$ есть пара функций $v(\vec{s}, t)$ и $w(\vec{s}, j, t)$, определенных соответственно на множествах $S \times T$ и $S \times J \times T$ с значениями из множеств соответственно I и $K(j)$. Содержательно функция $v(\vec{s}, t)$ определяет, какие технологические режимы нужно принимать в основных состояниях системы, а функция $w(\vec{s}, j, t)$ определяет, какие продукты нужно выпускать во вспомогательных состояниях. Обозначим через $\mu'(\vec{s}, t, v)$ математическое ожидание дохода, который получит система Ω в основном состоянии $\vec{s}$, если к ней будет применено управление v, а через $\mu''(\vec{s}, j, t, w)$ – математическое ожидание дохода, который получит система Ω во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$, если к ней будет применено управление w, $\vec{s} \in S$, $j \in J$, $t \in T$, $v \in V$, $w \in W$. Тогда математические ожидания дохода можно вычислять, используя рекуррентные соотношения:

$$\mu'(\vec{s}, t, v(\vec{s}, t)) = -c_{v(\vec{s},t)} + \sum_{j \in J} p_{v(\vec{s},t)j} \mu''(\vec{s}, j, t, w(\vec{s}, j, t)), \tag{1}$$

$$\mu''(\vec{s}, j, t, w(\vec{s}, j, t)) = q(\vec{s}, w(\vec{s}, j, t), \vec{\pi}) + \mu'(\vec{s} \oplus \delta_{w(\vec{s},j,t)}, t-1), \tag{2}$$

$$\mu''(\vec{s}, j, 0, w(\vec{s}, j, t)) = 0. \tag{3}$$

Оптимальным управлением системой Ω назовем такое управление (v_0, w_0), что $\max_{v \in V} \mu'(\vec{s}, t, v) = \mu'(\vec{s}, t, v_0)$, $\max_{w \in W} \mu''(\vec{s}, j, t, w) = \mu''(\vec{s}, j, t, w_0)$ для любых $\vec{s} \in S$, $j \in J$, $t \in T$.

Используя принцип оптимальности динамического программирования [14], можно показать, что оптимальное управление рассматриваемой системы Ω всегда существует.

Обозначим через $\eta'(\vec{s}, t)$ математическое ожидание дохода, который получит система Ω в основном состоянии $\vec{s}$ при оптимальном выборе управлений, а через $\eta''(\vec{s}, j, t)$ – математическое ожидание дохода, который получит система Ω во вспомогательном состоянии $(\vec{s}, j)$ при оптимальном выборе управлений. Очевидно, что $\eta'(\vec{s}, t) = \mu'(\vec{s}, t, v_0)$, а $\eta''(\vec{s}, j, t) = \mu''(\vec{s}, t, w_0)$.

Используя введенные обозначения и применив к системе Ω принцип оптимальности динамического программирования, получим:

$$\eta'(\vec{s}, t) = \max_{i \in I} \left(-c_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \eta''(\vec{s}, j, t) \right),$$

$$\eta''(\vec{s}, j, t) = \max_{k \in K(j)} (q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) + \eta'(\vec{s} \oplus \delta_k, t-1)),$$

$$\eta'(\vec{s}, 0) = 0.$$

Полученные рекуррентные соотношения позволяют находить оптимальное управление системой Ω. Однако для реальных производственных систем, для которых число состояний велико, применение предложенного подхода затруднительно. Целью дальнейших исследований является уменьшение числа состояний для рассматриваемого класса управляемых марковских цепей.

Замечание 1. Используя построенные рекуррентные соотношения динамического программирования можно показать, что в силу конечности множества управлений оптимальное управление рассматриваемой системы Ω достаточно искать в классе нерандомизированных функций. Этим определяется постановка задачи поиска оптимального управления системой Ω.

4. Свойства системы Ω

4.1. Свойство L

Будем говорить, что система Ω обладает свойством L, если:

- для любых $j,\ j' \in J$, либо $K(j) \subseteq K(j')$, либо $K(j') \subseteq K(j)$. Не уменьшая общности в дальнейшем, будем считать, что $K(j) \subseteq K(j+1)$, $j,\ j+1 \in J$;
- $\min_{k \in K \setminus K(j)} g_k \geq \max_{k \in K(j)} g_k, \quad j \in J,\ j \neq |J|$.

Свойство L выполняется, например, когда предприятие имеет право отправить потребителю продукцию более высокого качества, чем требуемая продукция.

На основании свойства L на множестве K введем бинарное отношение предшествия $\succ$: для любых $k, k' \in K$ $k \succ k'$ тогда и только тогда, если для любого $j \in J$, из того что $k \in K(j)$, следует, что $k' \in K(j)$. С помощью введенного отношения $\succ$ разобьем множество K на классы эквивалентности: k и k' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, если из того, что $k \succ k'$ следует, что $k' \succ k$ (симметричность введенного отношения, а рефлексивность и транзитивность для отношения $\succ$ выполняются автоматически).

Для удобства в этом разделе будем придерживаться следующих обозначений:

$$\eta(\vec{s}, t) = \eta'(\vec{s}, t), \quad \mu(\vec{s}, t) = \mu'(\vec{s}, t), \quad \vec{s} \in S, \quad t \in T.$$

Лемма 1. Для любого $\vec{s} \in S$ и $t \in T$, из того что $k \succ r$, $k, r \in K$, и $q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) \geq q(\vec{s}, r, \vec{\pi})$, следует, что

$$\eta\left(\vec{s} \oplus \delta_k, t\right) + q\left(\vec{s}, k, \vec{\pi}\right) \geq \mu\left(\vec{s} \oplus \delta_r, t\right) + q\left(\vec{s}, r, \vec{\pi}\right).$$

При доказательстве леммы 1 используются свойства функции $q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$:

- $q(\vec{s} \oplus \delta_l, k, \vec{\pi}) \leq q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$ для любых $\vec{s} \in S$, $k,\ l \in K$, причем неравенство становится строгим тогда и только тогда, когда $k = l$ и $s_k < \pi_k$. При этом $q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_k, k, \vec{\pi}) = g_k$. Содержательно это свойство означает, что доход от выпуска любого продукта зависит лишь от соответствующих этому продукту значений основного состояния системы и плана;
- $\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_r = \vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_k$ для любых $k,\ r \in K$.

Доказательство леммы 1. Будем доказывать лемму 1 индукцией по t. При $t = 0$ утверждение леммы 1 очевидно выполняется.

Пусть лемма 1 верна для всех $\vec{s} \in S$ и $t \le t_0$. Тогда из соотношений (4) имеем

$$\eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t_0+1) = \max_{i \in I} \left\{ -c_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \max_{l \in K(j)} \Big[q(\vec{s} \oplus \delta_k, l, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_l, t_0) \Big] \right\},$$

$$\eta(\vec{s} \oplus \delta_r, t_0+1) = \left\{ -c_{i_0} + \sum_{j \in J} p_{i_0 j} \Big[q(\vec{s} \oplus \delta_r, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_{k_j}, t_0) \Big] \right\},$$

где i_0 – оптимальное управление в точке $(\vec{s} \oplus \delta_r, t_0+1)$, $i_0 \in I$, а k_j – оптимальные управления в точках $(\vec{s} \oplus \delta_r, j, t_0+1)$, $k_j \in K(j)$, $j \in J$. Так как $i_0 \in I$, то, положив в выражении для $\eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t_0+1)$ $i = i_0$, получим:

$$\eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t_0+1) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_r, t_0+1) \ge$$

$$\ge \sum_{j \in J} p_{i_0 j} \Big[q(\vec{s} \oplus \delta_k, l_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_l, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k_j, \vec{\pi}) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_{k_j}, t_0) \Big].$$

Рассмотрим для произвольных j величины

$$\Delta(k_j, l_j) = q(\vec{s} \oplus \delta_k, l_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_{l_j}, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k_j, \vec{\pi}) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_{k_j}, t_0).$$

Пусть $k_j = k$, тогда

$$\Delta(k, l_j) = q(\vec{s} \oplus \delta_k, l_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_{l_j}, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}) - \mu(\vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_k, t_0).$$

Так как $k \succ r$, то если $k \in K(j)$, то и $r \in K(j)$. Положим $l_j = r$, тогда

$$\Delta(k, r) = q(\vec{s} \oplus \delta_k, r, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_r, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_k, t_0) =$$
$$= q(\vec{s} \oplus \delta_k, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}) = q(\vec{s}, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k, \vec{\pi}).$$

Пусть $k_j \ne k$, тогда, положив $l_j = k_j$, получим $\Delta(k_j, k_j) = q(\vec{s} \oplus \delta_k, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_{k_j}, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k_j, \vec{\pi}) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_r \oplus \delta_{k_j}, t_0)$. Из свойств функции $q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$ следует, что $q(\vec{s} + \delta_{k_j}, k, \vec{\pi}) = q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$, а так как $q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) \ge q(\vec{s}, r, \vec{\pi}) \ge$ $\ge q(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, r, \vec{\pi})$, то условия индукции выполняются и

$$\Delta(k_j, k_j) \ge q(\vec{s} \oplus \delta_k, k_j, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k_j, \vec{\pi}) + q\left(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, r, \vec{\pi}\right) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}).$$

Если $k_j = r$, то, учитывая свойства функции $q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$, получим

$$\Delta(r, r) \ge q(\vec{s} \oplus \delta_k, r, \vec{\pi}) + q(\vec{s} \oplus \delta_r, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}) =$$
$$= q(\vec{s} \oplus \delta_k, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}) = q(\vec{s}, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k, \vec{\pi}).$$

Если $k_j \neq r$, то

$$\Delta(k_j, k_j) \geq q(\vec{s} \oplus \delta_k, k_j, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k_j, \vec{\pi}) + q(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s} \oplus \delta_r, k, \vec{\pi}) \geq$$
$$\geq q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) + q(\vec{s}, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) = q(\vec{s}, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k, \vec{\pi}).$$

Показано, что для любого $j \in J$ существует такое $k_j \in K(j)$, что $\Delta(l_j, k_j) \geq \geq q(\vec{s}, r, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$, тем самым лемма 1 для $t_0 + 1$ доказана.

Содержательно лемма 1 означает, что если продукт k не дешевле продукта r, то, изготовив продукт k в некотором состоянии, система приобретет суммарный доход не меньше, чем при изготовлении в том же самом состоянии и при том же самом плане продукта r.

Лемма 2. Для любых $\vec{s} \in S$, $t \in T$ и $k \in K$

$$\eta(\vec{s}, t) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t) \leq q(\vec{s}, k, \vec{\pi}).$$

Доказательство леммы 2. Будем доказывать лемму 2 индукцией по t. При $t = 0$ утверждение леммы 2 очевидно выполняется.

Пусть лемма 2 верна для всех $\vec{s} \in S$ и $t \leq t_0$. Тогда

$$\eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t_0 + 1) = \max_{i \in I} \left\{ -c_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \max_{l \in K(j)} \Big[q(\vec{s} \oplus \delta_k, l, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_l, t_0) \Big] \right\},$$

$$\eta(\vec{s}, t_0 + 1) = \left\{ -c_{i_0} + \sum_{j \in J} p_{i_0 j} \Big[q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, t_0) \Big] \right\},$$

где i_0 – оптимальное управление в точке $(\vec{s}, t_0 + 1)$, $i_0 \in I$, а k_j – оптимальные управления в точках $(\vec{s}, j, t_0 + 1)$, $k_j \in K(j)$, $j \in J$. Так как $i_0 \in I$, то, положив в выражении для $\eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t_0 + 1)$ $i = i_0$, получим:

$$\eta(\vec{s}, t_0 + 1) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t_0 + 1) \leq$$
$$\leq \sum_{j \in J} p_{i_0 j} \left\{ \Big[q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, t_0) \Big] - \max_{l \in K(j)} \Big[q(\vec{s} \oplus \delta_k, l, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_l, t_0) \Big] \right\} \leq$$
$$\leq \sum_{j \in J} p_{i_0 j} \Big[q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_k, k_j, \vec{\pi}) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_k + \delta_{k_j}, t_0) \Big].$$

Рассмотрим для произвольных j, $j \in J$, величины

$$\Delta(k_j, k_j) = q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, t_0) - q(\vec{s} \oplus \delta_k, k_j, \vec{\pi}) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_k + \delta_{k_j}, t_0).$$

Учитывая свойства функции $q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$, получим

$$\Delta(k_j, k_j) \leq q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k_j, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, t_0) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_{k_j}, t_0) =$$
$$= \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, t_0) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_k \oplus \delta_{k_j}, t_0).$$

Воспользовавшись положением индукции для $t = t_0$, получим

$$\Delta\left(k_j, k_j\right) \leq q\left(\vec{s} \oplus \delta_{k_j}, k, \vec{\pi}\right) \leq q\left(\vec{s}, k, \vec{\pi}\right).$$

Таким образом, для $t = t_0 + 1$ утверждение леммы 2 выполняется.

Содержательно лемма 2 означает, что разность значений величин оптимального дохода в некотором основном состоянии и величины оптимального дохода в состоянии, отличающемся лишь в одной компоненте, соответствующей некоторому продукту, не больше величины дохода от выпуска этого продукта.

Для каждых $\vec{s} \in S$ и $j \in J$ определим множество $K(\vec{s}, j) \subseteq K(j)$ такое, что $k \in K(\vec{s}, j)$ тогда и только тогда, когда $q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) = \max_{l \in K(j)} q(\vec{s}, l, \vec{\pi})$.

При выполнении свойства L функции $w(\vec{s}, j, t)$ будем называть *простыми* (и в дальнейшем будем помечать их *), если:

- $w(\vec{s}, j, t)$ не зависит от t;
- $w^*(\vec{s}, j) \in K(\vec{s}, j)$;
- имеет место $w^*(\vec{s}, j) \succ k$ для всех $k \in K(\vec{s}, j)$.

Лемма 3. При выполнении свойства L если $k^* = w^*(\vec{s}, j)$ и $k^0 \succ k^*$ для всех $k^0 \in K(j)$, то $s_{k^*} \geq \pi_{k^*}$.

Доказательство леммы 3. Из определения простой функции для всех $k \in K(j)$ $q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) \geq q(\vec{s}, k, \vec{\pi})$. Так как $k^0 \in K(j)$ и $k^0 \neq k^*$, то $q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) \geq q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi})$. Из свойства L следует, что если $k^0 \succ k^*$, то $q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) \geq q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi})$. Отсюда $q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) = q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi})$. Так как $q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) = \max\limits_{l \in K(j)} q(\vec{s}, l, \vec{\pi})$, а $g_{k^*} \neq g_{k^0}$, то это возможно лишь если $s_{k^*} \geq \pi_{k^*}$.

Содержательно лемма 3 означает, что если продукт k^0 находится в отношении порядка $\succ$ с продуктом k^*, который определяется с помощью простой функции, то это возможно лишь тогда, когда план по продукту k^* уже выполнен.

Замечание 2. Пусть u_1 и u_2 – два управления системой Ω, отличающиеся значениями только в одной точке $(\vec{z}_0, t_0)$, тогда если $\mu(\vec{z}_0, t_0, u_1) = \mu(\vec{z}_0, t_0, u_2)$, то из рекуррентных соотношений (1)–(3) следует, что для любого $\vec{z} \in Z$ и $t \in T$ $\mu(\vec{z}, t, u_1) = \mu(\vec{z}, t, u_2)$.

Теорема 1. При выполнении свойства L пусть $v_0(\vec{s}, t)$ и $w_0(\vec{s}, j, t)$ — функции, определяющие оптимальное управление системой, и $w^*(\vec{s}, j, t)$ — простая функция, тогда для любых $\vec{s} \in S$, $j \in J$ и $t \in T$

$$\max_{w(\vec{s},j,t) \in W(\vec{s},j,t)} \mu(\vec{s}, j, t, w(\vec{s}, j, t)) = \mu(\vec{s}, j, t, w^*(\vec{s}, j, t)).$$

Доказательство теоремы 1. Если $w^*(\vec{s}, j, t) = w_0(\vec{s}, j, t)$, то теорема 1 верна.

а. Пусть в точке $(\vec{s}, j, t_0)$

$$k^0 = w_0(\vec{s}, j, t_0) \neq w^*(\vec{s}, j, t_0) = k^*.$$

Рассмотрим разность

$$\Delta(k^*, k^0) = \mu(\vec{s}, j, t_0, (v_0, w^*)) - \mu(\vec{s}, j, t_0, (v_0, w_0)) =$$
$$= q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^*}, t_0 - 1) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^0}, t_0 - 1).$$

Пусть $k^* \succ k^0$, тогда выполняются условия леммы 1 и

$$\Delta(k^*, k^0) = q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) + q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) = 0.$$

б. Пусть $k^0 \succ k^*$, тогда по лемме 3 $s_{k^*} \geq \pi_{k^*}$ и $q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) = 0$.

Применив лемму 2, получим

$$\Delta(k^*, k^0) = q(\vec{s}, k^*, \vec{\pi}) - q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^*}, t_0 - 1) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^0}, t_0 - 1) =$$
$$= -q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^*}, t_0 - 1) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^0}, t_0 - 1) =$$
$$= -q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s}, t_0 - 1) - \eta(\vec{s} \oplus \delta_{k^0}, t_0 - 1) \geq$$
$$\geq -q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) + q(\vec{s}, k^0, \vec{\pi}) = 0.$$

Учитывая замечание 2, теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении свойства L во вспомогательных состояниях оптимальные управления находятся с использованием простых функций, что значительно сокращает число состояний, в которых необходимо искать оптимальные управления.

Замечание 3. Несмотря на то что при доказательстве теоремы 1 использовано свойство L, неравенства лемм 1 и 2 справедливы и для общей системы Ω.

4.2. Свойство M

Будем говорить, что система обладает свойством M, если:

- она обладает свойством L;
- для любых i, $i' \in I$, либо $\sum\limits_{j=j'}^{|J|} p_{ij} \geq \sum\limits_{j=j'}^{|J|} p_{i'j}$, либо $\sum\limits_{j=j'}^{|J|} p_{i'j} \geq \sum\limits_{j=j'}^{|J|} p_{ij}$, $j' \in J$;
- $c_i = \text{const}, \ i \in I$.

Содержательно свойство M означает, что отличия в затратах на применение технологических режимов являются незначительными и ими можно пренебречь, однако вероятностные характеристики реализации полуфабрикатов с использованием технологических режимов обладают следующим свойством – для любой пары технологических режимов один из режимов позволяет получать с большей вероятностью "лучшие" полуфабрикаты с точки зрения свойства L.

На основании свойства M на множестве I введем отношение $\succ$: $i \succ k$ тогда и только тогда, если $\sum_{j=1}^{|J|} p_{ij} \geq \sum_{j=j'}^{|J|} p_{kj}$ для всех $j' \in J$.

Введенное бинарное отношение обладает очевидными свойствами рефлексивности и транзитивности, а антисимметричность следует из того, что не могут быть два разных технологических режима с одинаковыми вероятностными характеристиками. Отсюда введенное отношение является отношение нестрогого порядка, а множество I, на котором это отношение определено, является множеством, линейно упорядоченным этим отношением.

В дальнейшем через $v^*(\vec{s}, t)$ будем обозначать функцию, являющуюся на множестве $S \times T$ константой, равной i^*, где i^* – такой элемент множества I, что $i^* \succ i$ для всех $i \in I$.

Лемма 4. Если $\sum\limits_{i=s}^{n} \alpha_i \geq \sum\limits_{i=s}^{n} \beta_i$ для всех $s = 1, 2, \ldots, n$, и $c_i \geq c_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, то $\sum\limits_{i=s}^{n} c_i\alpha_i \geq \sum\limits_{i=s}^{n} c_i\beta_i$ для всех $s = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство леммы 4.

$$\sum_{i=s}^{n} c_i\alpha_i = \sum_{k=1}^{n-s}(c_{s+k} - c_{s+k-1}) \sum_{i=s+k}^{n} \alpha_i + c_s \sum_{i=s}^{n} \alpha_i \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-s}(c_{s+k} - c_{s+k-1}) \sum_{i=s+k}^{n} \beta_i + c_s \sum_{i=s}^{n} \beta_i = \sum_{i=s}^{n} c_i\beta_i.$$

Лемма 4 доказана.

Для удобства будем придерживаться обозначений:

$$\eta(\vec{s}, j, t) = \eta'(\vec{s}, j, t), \quad \mu(\vec{s}, j, t) = \mu'(\vec{s}, j, t), \quad \vec{s} \in S, \quad j \in J, \quad t \in T.$$

Лемма 5. Если система Ω обладает свойством L, то при оптимальных управлениях для всех $\vec{s} \in S$, $j \in J$ и $t \in T$ имеет место соотношение:

$$\eta(\vec{s}, j+1, t) \geq \eta(\vec{s}, j, t).$$

Доказательство леммы 5. Из рекуррентных соотношений (4) следует, что

$$\eta\left(\vec{s}, j, t\right) = \max_{k \in K(j)} \Big(q\left(\vec{s}, k, \vec{\pi}\right) + \eta\big(\vec{s}^{\,k}, t-1\big)\Big),$$

а

$$\eta\left(\vec{s}, j+1, t\right) = \max_{k \in K(j+1)} \Big(q\left(\vec{s}, k, \vec{\pi}\right) + \eta\big(\vec{s}^{\,k}, t-1\big)\Big).$$

Отсюда, учитывая, что по свойству L, $K(j) \subseteq K(j+1)$, максимум по множеству $K(j+1)$ не может быть меньше максимума по множеству $K(j)$. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. Если система Ω обладает свойством M, то пара функций $v^*(\vec{s}, t)$ и $w^*(\vec{s}, j, t)$ определяет оптимальное управление системой.

Доказательство теоремы 2. Пусть $v_0(\vec{s},t)$ и $w_0(\vec{s},j,t)$ — оптимальное управление системой Ω. По теореме 1 пара функций $v_0(\vec{s},t)$ и $w^*(\vec{s},j,t)$ также определяет оптимальное управление системой. Если $v_0(\vec{s},t)=v^*(\vec{s},t)$, то теорема 2 доказана. Пусть в некотором состоянии $(\vec{s},t_0)$ $i^*=v^*(\vec{s},t)\neq v_0(\vec{s},t)=i^0$. Рассмотрим разность $\Delta(i^*,i^0)=\sum_{j\in J}p_{i^*j}\eta(\vec{s},j,t_0)-$ $-\sum_{j\in J}p_{i^0j}\eta(\vec{s},j,t_0)$. Так как $\sum_{j=s}^{|J|}p_{ij}\geq\sum_{j=s}^{|J|}p_{i^0j}$ для всех $s\in J$, а $\eta(\vec{s},j,t_0)$ равны, то из леммы 4 следует, что $\Delta(i^*,i^0)\geq 0$. Учитывая, что $v_0(\vec{s},t)$ и $w^*(\vec{s},j,t)$ определяют оптимальное управление системой, то $\Delta(i^*,i^0)=0$. Так как число точек, в которых $v_0(\vec{s},t)\neq v^*(\vec{s},t)$ конечно, то получаем доказательство теоремы 2.

Из теоремы 2 следует, что при выполнении свойства M существуют простые эффективные процедуры нахождения оптимального управления рассматриваемой системой. Для нахождения оптимального управления системой, обладающей свойством M, необходимо:

1. Найти значение оптимального управления в основных состояниях $k^*=$ $=v^*(\vec{s},t)$ из множества I, которое определит, какой технологический режим необходимо применять в любом основном состоянии при любом числе тактов, оставшихся у системы до конца функционирования.
2. Найти значения оптимальных управлений во вспомогательных состояниях $w^*(\vec{s},j,t)$ из множеств $K(\vec{s},j)$, которые определят, какие продукты необходимо выпускать во вспомогательных состояниях независимо от числа тактов, оставшихся у системы до конца функционирования.

5. Пример

Пусть в процессе производства используются три технологических режима (множество $I=\{1,2,3\}$), могут быть получены три различных полуфабриката (множество $J=\{1,2,3\}$) и выпускаются четыре продукта (множество $K=\{1,2,3,4\}$). По технологии из первого полуфабриката можно изготовить первый или второй продукт (множество $K(1)=\{1,2\}$), из второго полуфабриката можно изготовить первый, второй или третий продукты (множество $K(2)=\{1,2,3\}$), из третьего полуфабриката можно изготовить любой из четырех продуктов (множество $K(3)=\{1,2,3,4\}$). Пусть план выпуска продуктов задается вектором $\vec{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$, компоненты которого определяют, сколько каких продуктов необходимо выпустить в планируемом периоде, включающем $T_0=\sum_{k=1}^{4}\pi_k$ тактов. Пусть определена матрица переходных вероятностей $P=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6\end{pmatrix}$. Требуется так управлять процессом производства (определять какие технологические режимы будут применяться и какие продукты будут выпускаться из полученных полуфабрикатов), чтобы полный суммарный доход, который получит система в планируемом периоде, был максимальным.

Для рассматриваемого примера выполняется свойство M. На основании теоремы 2 находится оптимальное управление рассматриваемой производственной системой.

Решение:

1. $k^* = v^*(\vec{s}, t) = 3;$

2. $$w^*(\vec{s}, 1, t) = \begin{cases} 2, \text{ если } s_2 < \pi_2, \\ 1, \text{ если } s_2 \geq \pi_2, \ s_1 < \pi_1, \\ 1 \text{ или } 2 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

3. $$w^*(\vec{s}, 2, t) = \begin{cases} 3, \text{ если } s_3 < \pi_3, \\ 2, \text{ если } s_3 \geq \pi_3, \ s_2 < \pi_2, \\ 1, \text{ если} s_3 \geq \pi_3, \ s_2 \geq \pi_2, \ s_1 < \pi_1, \\ 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

4. $$w^*(\vec{s}, 3, t) = \begin{cases} 4, \text{ если } s_4 < \pi_4, \\ 3, \text{ если } s_4 \geq \pi_4, \ s_3 < \pi_3, \\ 2, \text{ если } s_4 \geq \pi_4, \ s_3 \geq \pi_3, \ s_2 < \pi_2, \\ 1, \text{ если } s_4 \geq \pi_4, \ s_3 \geq \pi_3, \ s_2 \geq \pi_2, \ s_1 < \pi_1, \\ 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3, \text{ или } 4 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Условие 1 определяет, какой технологический режим необходимо применять, а условия 2, 3 и определяют, какие продукты необходимо выпускать из соответствующих полуфабрикатов.

Согласно теореме 2 найденное решение определяет оптимальное управление для рассматриваемого примера. С помощью рекуррентных соотношений (1)–(3) можно определить полный суммарный доход, который система получит при найденном оптимальном управлении.

6. Заключение

В статье рассматриваются задачи оптимального управления двухстадийными производственными системами, первая, стохастическая, стадия которых заключается в изготовлении полуфабриката, а вторая, детерминированная, – в изготовлении из полуфабриката готовой продукции. Существует широкий класс производственных систем, которые функционируют по предложенной схеме. Это задача переработки газового конденсата в нефтепродукты, где первая стадия заключается в переработке газового конденсата в полуфабрикаты (фракции легких углеводородов, стабилизированный конденсат, пентангексановая фракция и др.), а вторая – в производстве из полуфабрикатов готовой продукции (бензин, дизельное топливо, газ пропан, газ бутан и др.). Это задача изготовления интегральных схем, для которой первая стадия начинается с запуска в производство пластин, из которых изготавливаются интегральные схемы, а заканчивается перед операцией резки (получение полуфабриката с определенными характеристиками). Вторая стадия заключается в резке, лазерной подгонке номиналов, комплектовании, операционном контроле и в других операциях, заканчивающихся приемочным контролем. Это задача производства стали в мартеновских печах, где первая стадия включат завалку мартеновской печи шихтой (материала, из которого варят сталь) и длится до полного расплавления шихты, когда можно определить химический состав расплавленного металла. Вторая стадия заключается в доведении химического состава расплавленной шихты до состава, соответствующего конкретной марки стали.

При выполнении естественных для таких систем свойств (свойство L, свойство M) предлагаются эффективные алгоритмы решения поставленной задачи. Полученные результаты положены в основу программных систем, внедренных в постоянную эксплуатацию при планировании и оперативном управлении процессом производства изделий микроэлектроники ФГУП "ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е. Седакова" [11] и апробированы при решении задач оптимального планирования и управления для Сургутского завода стабилизации конденсата ООО Сургутгазпром [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kempf K., Keskinocak P., Uzsoy R.* (ed.) Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise // Int. Ser. Oper. Res. & Management Sci. V. 152. N.Y.: Springer, 2010.
2. *Pinedo M.L.* Planning and Scheduling in Manufacturing and Services. N.Y.: Springer-Verlag, 2005.
3. *Weglarz J.* (ed.) Project Scheduling: Recent Models, Algorithms and Applications. N.Y.: Springer, 1999.
4. *Sprecher A.* Resource-constrained project scheduling: Exact methods for the multi-mode Case // Ser. Lect. Notes Econom. Math. Syst. V. 409. Berlin, Germany: 1994.
5. *Hapke M., Jaszkiewicz A., Słowiński R.* Fuzzy Multi-Mode Resource-Constrained Project Scheduling with multiple Objectives // Węglarz J. (ed.) Project Scheduling. Int. Ser. Oper. Res. & Management Sci. V. 14. Boston: Springer.
6. *Armbruster D., Fonteijn J., Wienke M.* Modeling Production Planning and Transient Clearing Functions // Logistics Res. 2012. V. 5. No. 3–4. P. 133–139.
7. *Bügler M., Borrmann A.* Using Swap-Based Search Trees to obtain Solutions for Resource Constrained Project Scheduling Problems // Proc. 85th Annual Meeting of the Int. Association of Applied Math. and Mechanics (GAMM). 2014. V. 14. No. 1. P. 809–810.
8. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное планирование двухстадийных стохастических производственных систем // АиТ. 2014. № 8. С 37–47.

   Prilutskii M.Kh. Optimal Planning for Two-Stage Stochastic Industrial Systems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 8. P. 1384–1392.
9. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Оптимизационные задачи добычи газа и переработки газового конденсата // Автоматизация в промышленности. 2008. № 6. С. 20–23.

   Prilutskii M.Kh., Kostyukov V.E. Optimization Models of Gas and Gas Condensate Processing // Autom. Remote Control. 2012. V. 72. No. 8. P. 345–349.
10. *Прилуцкий М.Х., Костюков В.Е.* Потоковые модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции // Информационные технологии. 2007. № 10. С. 47–52.
11. *Прилуцкий М.Х., Власов В.С.* Оптимизационные задачи распределения ресурсов при планировании производства микроэлектронных изделий // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 1. С. 38–43.

12. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объёмно-календарного планирования // Изв. Акад. наук. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 78–82.

13. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное планирование для моделей двухстадийных стохастических производственных систем // Тр. 7 Моск. междунар. конф. по исследованию операций (ORM 2013). Москва, 15–19 октября 2013. Т. 2. М.: 2013. С. 48–49.

14. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ. 1960.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 09.02.2017