

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Проскурников, С. Э. Парсегов, Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка, *Автомат. и телемех.*, 2016, выпуск 7, 152–165

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.219.109.150

13 ноября 2024 г., 02:38:37



Навигация и управление движущимися системами

© 2016 г. А.В. ПРОСКУРНИКОВ, канд. физ.-мат. наук (avp1982@gmail.com)
(Санкт-Петербургский государственный университет,
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики),
С.Э. ПАРСЕГОВ, канд. физ.-мат. наук (s.e.parsegov@gmail.com)
(Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Москва)

ЗАДАЧА РАВНОМЕРНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ ДЛЯ АГЕНТОВ С МОДЕЛЬЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Рассматривается специальная задача управления формацией мобильных агентов – задача равномерного размещения нескольких идентичных агентов на отрезке прямой. Для случая агентов, описываемых динамической моделью первого порядка, данная задача была, по-видимому, впервые сформулирована в 1997 г. И.А. Вагнером и А.М. Брукштайном под названием “выравнивание в ряд” (row straightening). В настоящей статье приводится обобщение алгоритма “выравнивания” на более интересный случай, когда динамика агентов описывается дифференциальными уравнениями второго порядка, иными словами, управлением является ускорение агента (или приложенная к нему сила).

1. Введение

Многие сложные системы, рассматриваемые в естественных, общественных и технических науках, могут быть представлены в виде объединения простых подсистем, или *агентов*, каждый из которых взаимодействует (путем обмена информацией либо физических воздействий) с несколькими “соседними” агентами. Граф, описывающий возможные направления таких взаимодействий, может иметь сложную и переменную структуру. Примерами таких систем, называемых *мультиагентными* (multi-agent systems) и известных также под названиями *сложные сети* (complex networks), *клеточные сети* (cellular network), *взаимосвязанные системы* (interconnected systems) и др., являются сети осцилляторов, малые энергетические сети, сети роботов и сенсоров, модели экономического и социального взаимодействия и биологические популяции. Примеры соответствующих систем могут быть найдены в недавно вышедших монографиях и обзорах [1–6].

¹ Статья частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 14-08-01015), Санкт-Петербургским государственным университетом (проект № 6.38.230.2015) и Российским научным фондом (проекты № 16-11-00063 и № 14-29-00142).

Основополагающими принципами синтеза мультиагентных систем являются *автономность* агентов, *локальные взаимодействия* между ними без использования глобальной информации о системе в целом и *децентрализация*, т.е. отсутствие центрального регулятора или модуля, вырабатывающего общие для всех агентов решения. Гибкость и дешевизна децентрализованных решений в сравнении с классическим централизованным подходом привели к широкому применению мультиагентных систем в технике и промышленности, а также к быстрому развитию соответствующей математической теории.

Одной из наиболее важных областей применения мультиагентных систем является *управление формациями* (formation control), ставящая целью формирование группой агентов желаемых неподвижных или подвижных геометрических образов правильной формы. Задачи *динамического* управления формациями [5–9] главным образом связаны с управлением мобильными агентами, такими как колесные роботы, беспилотные летательные, подводные и космические аппараты. Часто мотивацией развития систем такого рода служит желание скопировать поведение биологических формаций [10], таких как стая птиц или рой насекомых. Распределенные алгоритмы для формирования *статических* формаций применяются в ряде задач теории сенсорных сетей, таких как *равномерное размещение* агентов в некоторой области или на многообразии (deployment problem) [11–15], *оптимальное покрытие* (coverage problem) [16] и *разделение области на зоны* (area partition problem) [17].

Один из наиболее простых алгоритмов управления формациями, обеспечивающий размещение агентов на статическом отрезке прямой, был предложен в [18] под названием “выравнивание в ряд” (row straightening). Идеей, лежащей в основе алгоритма управления, является *усреднение*: каждый агент движется по направлению к середине отрезка, соединяющего двух его соседей, измеряя лишь относительные расстояния до них. Похожие по смыслу алгоритмы были предложены для мультиагентного размещения дискретных “муравьеобразных” агентов на кольце [14, 15]. Другой итерационной процедурой, приводящей к равномерному размещению агентов на эллипсе, стала так называемая “схема Ван Лоуна” [19, 20]. Помимо задачи управления формациями, усредняющая модель была использована в [18] для описания прохождения сигнала (напряжения) по каскадно соединенным RC-цепочкам. В [21, 22] этот алгоритм был распространен на случай возмущенных агентов. Нелинейный закон управления, предложенный в [21, 22], обеспечивает равномерное размещение за *конечное* время, независимое от начальных условий. Протокол для равномерного размещения агентов на отрезке напоминает по структуре алгоритма *консенсуса* (согласования, синхронизации) в мультиагентной системе [1, 2, 4, 5, 23–28], однако в отличие от указанных алгоритмов, приводит к замкнутой системе с единственным глобально устойчивым положением равновесия.

Серьезным недостатком алгоритмов, рассмотренных в [15, 18, 20–22], является предположение о том, что агент имеет простейшую динамику одиночного интегратора, т.е. его скорость доступна для прямого управления. В настоящей статье представлено обобщение усредняющего алгоритма на случай более реалистичных моделей агентов, описываемых уравнениями второго порядка. Показано, что при наличии в модели агента демпфирующей обрат-

ной связи по скорости можно применять непосредственно закон управления из [18]. Если трение в модели агента пренебрежимо мало, можно ввести в закон управления обратную связь по скорости, предложенную в [29]. Этот подход, однако, подразумевает, что каждый агент способен измерять свою абсолютную скорость, что является весьма ограничительным предположением. Основными результатами данной статьи являются алгоритмы для равномерного размещения, основанные только на *относительных измерениях*. Каждый агент измеряет как свою позицию, так и свою скорость не в абсолютной системе координат, а относительно двух соседних агентов. Идея такого решения является довольно общей для задач мультиагентного управления агентами второго порядка [1, 5, 30]. Более того, показано, что за счет некоторого ухудшения характеристик переходного процесса можно отказаться от измерения относительной скорости, заменив ее выходом дифференцирующего фильтра нижних частот, на вход которого подается относительное положение агента (похожая идея использована, например, в [31]). Таким образом, получено решение задачи равномерного размещения агентов с моделью двойного интегратора, не использующее каких-либо измерений скорости, а лишь измерения относительного положения.

2. Предварительная информация и постановка задачи

Всюду в данной статье будем иметь дело с группой из $N \geq 1$ *подвижных* агентов, пронумерованных от 1 до N , и двумя *статичными* агентами с индексами 0 и $N + 1$. Положение j -го агента в момент времени обозначим $x_j(t) \in \mathbb{R}^d$ (где $j = 0, 1, \dots, N + 1$). Необходимо найти алгоритм управления (называемый также *протоколом*), который обеспечивает равномерное размещение подвижных агентов на отрезке, соединяющем неподвижные точки x_0 и x_{N+1} .

Представленную задачу можно формально свести к классической задаче достижимости (или терминального управления), если агентам требуется попасть в желаемые точки за конечное время, или задаче стабилизации, если нужно обеспечить лишь асимптотическую сходимость. Для обоих случаев необходимо вычислять желаемые положения на отрезке. В том случае, если агенты выстраиваются на отрезке в порядке возрастания своих индексов, целевая точка j -го агента имеет вид $x_j^0 := x_0 + x_{N+1}(j - 1)/N$. После этой предварительной процедуры каждый агент будет двигаться к соответствующей целевой точке независимо от остальных агентов. Полагая, что агент имеет модель первого порядка

$$(1) \quad \dot{x}_j(t) = u_j(t) \in \mathbb{R}^d, \quad j = 1, \dots, N,$$

простейший алгоритм управления может задаваться П-регулятором

$$(2) \quad \dot{x}_j(t) = \eta(x_j^0 - x_j), \quad x_j^0 := x_0 + x_{N+1}(j - 1)/N.$$

Несмотря на кажущуюся простоту, алгоритм (2) опирается на важное ограничительное предположение, которое, по сути, исключает применение регулятора (2) для больших формаций агентов, а именно: для каждого агента

предполагается возможным измерять положение относительно целевой точки. В частности, каждый агент вынужден либо рассчитывать свою терминальную точку самостоятельно, либо каким-то образом распознавать ее в пространстве (например, используя специальный приемопередатчик). В обоих случаях агенты формации не являются взаимозаменяемыми и применяют разные законы управления: каждый из них движется к своей цели. Если один или несколько агентов выходят из строя, то для перегруппировки формации необходимо производить полный перерасчет целевых значений x_j^0 .

2.1. Децентрализованный протокол для равномерного размещения агентов с моделью интегратора

В противоположность прямому “централизованному” решению (2) в [18, 20, 29] предложен и изучен более перспективный *децентрализованный* протокол для агентов первого порядка (1), который обеспечивает равномерную расстановку агентов с использованием только “локальных” взаимодействий:

$$(3) \quad u_j(t) = \frac{1}{2}(x_{j-1}(t) - x_j(t)) + \frac{1}{2}(x_{j+1}(t) - x_j(t)), \quad j = 1, \dots, N.$$

Протокол (3) обладает множеством преимуществ в сравнении с (2). Агенты используют только относительные измерения без доступа к полной информации о группе. Кроме того, каждому агенту нужно знать в формации только своих “предшественника” и “последователя”, не зная собственного номера в формации. Если j -й агент выйдет из строя, необходимо лишь одно “переподключение” в системе для назначения агентов $j - 1$ и $j + 1$ соседями, после чего протокол (3) автоматически расположит равномерно оставшихся $N - 1$ агентов. Аналогичное переподключение позволяет добавить нового агента в формацию.

Поскольку протокол (2) покоординатно развязан, не умаляя общности, можно положить $d = 1$: $x_j(t) \in \mathbb{R}$. Вводя вектор состояния системы $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^\top$, можно записать ее динамику в матричной форме

$$(4) \quad \dot{x} = Ax + b,$$

где матрица A и вектор b имеют вид:

$$(5) \quad A := \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 0 & \dots & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0,5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$(6) \quad b := [x_0/2, 0, \dots, 0, x_{N+1}/2]^\top \in \mathbb{R}^N.$$

Трехдиагональная матрица A имеет собственные числа [32]

$$(7) \quad \lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Поскольку $\lambda_k < 0$ при любом $k = 1, \dots, N$, то матрица A является гурвицевой и система (4) имеет одно экспоненциально устойчивое положение равновесия

$$(8) \quad x_* := -A^{-1}b = x_0[1, \dots, 1]^\top + \frac{x_{N+1} - x_0}{N+1}[1, 2, \dots, N]^\top \in \mathbb{R}^N.$$

Иными словами, протокол (3) обеспечивает равномерное расположение агентов на отрезке с концами x_0 и x_{N+1} независимо от начальных условий. Из (7) сразу следует оценка скорости сходимости

$$(9) \quad \|x(t) - x_*\| \leq e^{-\hat{\lambda}t} \|x(0) - x_*\|,$$

справедливая для любого решения системы (4), где $x(0)$ — вектор начального положения агентов, а показатель скорости сходимости $\hat{\lambda}$ определяется соотношением

$$(10) \quad \hat{\lambda} = \min_k |\lambda_k| = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2(N+1)}.$$

Следует отметить, что таким же образом можно исследовать дискретную версию системы (1), (3), изученную в [18].

В данной статье рассматривается задача равномерного размещения агентов с более реалистичной динамикой *второго порядка*

$$(11) \quad \ddot{x}_j + a\dot{x}_j = u_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Здесь $a \geq 0$ обозначает постоянный коэффициент трения. При $a = 0$ модель (11) превращается в двойной интегратор. Задачи консенсуса в мультиагентных системах и управления формациями с агентами второго порядка представляют значительный интерес в связи с приложениями к мультиагентным группам мобильных роботов, например, см. [1, 5, 6].

3. Основные результаты

Представим основные результаты — распределенные протоколы управления, обеспечивающие равномерное размещение агентов второго порядка (11) на заданном отрезке.

Для начала посмотрим, можно ли применять протокол управления (3) для агентов второго порядка (11). Введем некоторые обозначения. Для двух чисел $p, q \in \mathbb{R}$ пусть $h_1(p, q), h_2(p, q) \in \mathbb{C}$ — два корня (действительные или комплексные) уравнения $h^2 + hp + q = 0$ и $H(p, q) := \max(\operatorname{Re} h_1(p, q), \operatorname{Re} h_2(p, q))$. Другими словами,

$$(12) \quad H(p, q) = \begin{cases} -p/2, & p^2 - 4q < 0, \\ \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, & p^2 - 4q \geq 0. \end{cases}$$

В следующей теореме показано, что при наличии у каждого агента обратной связи по скорости ($a > 0$) можно применить протокол (3) для агентов такого рода и получить оценку скорости сходимости.

Теорема 1. Пусть $a > 0$. Тогда протокол (3) обеспечивает равномерное размещение агентов (11) на отрезке с концами x_0 и x_{N+1} , т.е. $x(t) \rightarrow x_*$ и $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. При этом сходимость является экспоненциальной

$$(13) \quad \|x(t) - x_*\| + \|\dot{x}(t)\| \leq C e^{-\mu t},$$

где $C = C(x(0), \dot{x}(0))$ и $\mu := -H(a, \hat{\lambda}) > 0$.

При $a \rightarrow 0$ получаем $\mu \rightarrow 0$, таким образом, скорость сходимости к положению равновесия при использовании протокола (3) замедляется. В действительности при $a = 0$ протокол не обеспечивает сходимости к равномерному положению, поскольку соответствующая линейная система

$$\ddot{x} = Ax + b,$$

где матрицы A, b – те же, что в уравнении (4), не является экспоненциально устойчивой, а лишь устойчивой по Ляпунову. Решения системы имеют вид $x(t) = x_* + \operatorname{Re}[v_k e^{i\omega_k t}]$, где v_k – собственный вектор A , отвечающий собственному числу λ_k , а $\omega_k := \sqrt{|\lambda_k|}$. Вместе с тем теорема 1 допускает следующую модификацию протокола (3), применимую не только при $a = 0$, но и для любого неустойчивого агента (11) ($a < 0$).

Следствие. Алгоритм управления

$$(14) \quad u_j(t) = -\varkappa \dot{x}_j(t) + \frac{1}{2}(x_{j-1}(t) - x_j(t)) + \frac{1}{2}(x_{j+1}(t) - x_j(t))$$

обеспечивает равномерное размещение агентов на отрезке с концами x_0 и x_{N+1} при $a + \varkappa > 0$. При этом скорость сходимости имеет вид (13), где $\mu := -H(a + \varkappa, \hat{\lambda}) > 0$.

Доказательство. При помощи протокола (14), применяемого к агентам (11), получаем замкнутую систему, аналогичную той, которую можно было бы получить с использованием первоначального алгоритма (14) к агентам с измененным коэффициентом “трения” $a \mapsto a + \varkappa$. Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 1.

В отличие от протокола (3) закон управления (14) использует не только относительные измерения, но и *абсолютную* скорость агента. В некоторых приложениях измерение абсолютной скорости может быть доступно, несмотря на то что измерить позицию в неподвижной системе невозможно. Примером является морское судно, для которого скорость может измеряться электромагнитным или доплеровским лагом. При этом интегрирование данной скорости дает слишком большие погрешности в оценке позиции, чтобы ее можно было использовать для управления. Другим примером являются системы инерциальной навигации, которые могут определять абсолютную скорость объекта существенно более точно, чем его координаты. Тем не менее существенно более широкий круг приложений имеют алгоритмы управления формациями, основанные исключительно на относительных измерениях.

Применительно к рассматриваемой в статье задаче предлагается следующий протокол управления:

$$(15) \quad u_j(t) = \frac{1}{2}(x_{j-1}(t) - x_j(t)) + \frac{1}{2}(x_{j+1}(t) - x_j(t)) + \frac{p}{2}(\dot{x}_{j-1}(t) - \dot{x}_j(t)) + \frac{p}{2}(\dot{x}_{j+1}(t) - \dot{x}_j(t)), \quad j = 1, \dots, N.$$

Здесь $p > 0$ — некоторый постоянный коэффициент. Следующий результат показывает, что протокол (15) позволяет равномерно выстраивать агентов на отрезке и обеспечивает экспоненциальную сходимость.

Теорема 2. Пусть $a = 0$ и $p > 0$. Тогда протокол (15) обеспечивает равномерное размещение агентов (11) на отрезке с концами x_0 и x_{N+1} , т.е. $x(t) \rightarrow x_*$ и $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, кроме того, выполнено (13), где

$$\mu = -\max_k H(-p\lambda_k, -\lambda_k) > 0 \text{ и } \lambda_k \text{ определяется из (7).}$$

Протокол (15) позволяет равномерно выстраивать агентов на основе относительных измерений. Вместе с тем можно вообще избежать необходимости измерения скорости ценой снижения скорости сходимости. Обозначим через $w_j(t) := (x_{j-1}(t) + x_{j+1}(t))/2 - x_j(t)$, тогда алгоритм (15) можно переписать в виде $u_j(t) = w_j(t) + p\dot{w}_j(t)$. Идея, заимствованная из [31], заключается в замене производной $\dot{w}_j(t)$ выходом некоторого дифференцирующего фильтра низких частот $\dot{w}_j(t) \approx \dot{y}_j(t)$, где

$$\dot{y}_j(t) = -\gamma y_j(t) + w_j(t), \quad \gamma > 0.$$

Сделав такую замену, протокол управления (15) преобразуется к виду:

$$(16) \quad \begin{aligned} u_j(t) &= w_j(t) + p\dot{y}_j(t) = (1+p)w_j(t) - p\gamma y_j(t), \\ \dot{y}_j(t) &= -\gamma y_j(t) + w_j(t), \\ w_j(t) &= \frac{1}{2}(x_{j-1}(t) - x_j(t)) + \frac{1}{2}(x_{j+1}(t) - x_j(t)). \end{aligned}$$

Протокол (16) также позволяет получить равномерное расположение агентов с экспоненциальной сходимостью, что подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $a = 0$ и $p, \gamma > 0$. Тогда протокол управления (16) обеспечивает равномерное размещение агентов (11) на отрезке с концами x_0 и x_{N+1} , т.е. $x(t) \rightarrow x_*$ и $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, кроме того, выполняется (13), где

$$\mu = -\max \{ \operatorname{Re} z : z^3 + \gamma z^2 - (p+1)\lambda_k z - \gamma\lambda_k = 0 \} > 0.$$

Замечание 1. Рассматриваемый специальный алгоритм управления формацией можно рассматривать как частный случай задачи об “удерживающем управлении” (containment control): группа мобильных агентов применяет алгоритм, удерживающий их в выпуклой оболочке нескольких “лидеров”, которые в простейшем случае являются неподвижными [1]. Данная задача не сводится к обычному консенсусному протоколу; граф взаимодействий

не имеет остовного дерева, а покрывается остовным лесом деревьев, имеющих корнями неподвижных лидеров. В отличие от консенсусных протоколов, в которых имеется бесконечно много положений равновесия, протоколы в задаче об “удерживающем управлении” с фиксированными лидерами, как правило, обеспечивают сходимость агентов к единственному положению равновесия. Данное положение равновесия зависит, вообще говоря, от топологии и положений лидеров, в общем случае вычисление данного финального положения агентов является трудоемким даже для случая одиночных интеграторов [1]. В рассматриваемом случае не только явно вычисляются установившиеся положения агентов (точки, равномерно расставленные на отрезке между двумя лидерами), но и оценивается скорость сходимости к этим положениям.

Замечание 2. Близкие по структуре алгоритмы управления формациями для агентов второго порядка изучены в [33]. Предложенный в [33] критерий устойчивости формации относится к случаю более общего графа взаимодействий (агент может использовать информацию не только о двух соседях) и требует решения линейного матричного неравенства, включающего лапласиан графа и коэффициенты передаточной функции агента. Для вывода критериев устойчивости в [33] был использован метод “обобщенной частотной переменной”, по существу, эквивалентный методу Поляка–Цыпкина [34], применяемому в данной статье. Вместе с тем применительно к агентам с динамикой второго порядка результаты [33] имеют ряд ограничений. Так, следствия 5.1 и 5.2 из [33], где рассматриваются распределенные алгоритмы, аналогичные по структуре (15), предполагают, что коэффициент трения строго положителен $a > 0$. В случае агентов с динамикой двойного интегратора доказана сходимость алгоритма более сложной структуры, включающего интегрирующее звено (следствие 5.3 в [33]). В отличие от [33] для модели без трения в настоящей статье устанавливается сходимость алгоритма (15); кроме того, рассматривается также алгоритм с “дифференциатором” (16), позволяющий не измерять относительные скорости соседних агентов. Помимо этого, теоремы 1–3 дают точные оценки скорости сходимости алгоритма, которые не были установлены в [33].

4. Примеры

Продемонстрируем эффективность предложенных протоколов управления для равномерного размещения агентов на плоскости:

$$(17) \quad \ddot{\xi}_j + a\xi_j = u_j, \quad \xi_j = [x_j, y_j]^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Как уже указывалось ранее, все результаты справедливы для пространства любой размерности, поскольку протоколы управления поординатно развязаны. Во всех тестовых примерах рассматривается мультиагентная система со следующими параметрами: группу из $N = 5$ агентов вида (17) необходимо равномерно разместить на отрезке с концами $\xi_0 = [-2, 3, 1]^\top$ и $\xi_6 = [2, 2, 1]^\top$.

На первом примере показано движение агентов (17), $a = 2$, под действием протокола управления (3). На рис. 1 агенты стремятся выстроиться равномерно удаленно в соответствии с теоремой 1.

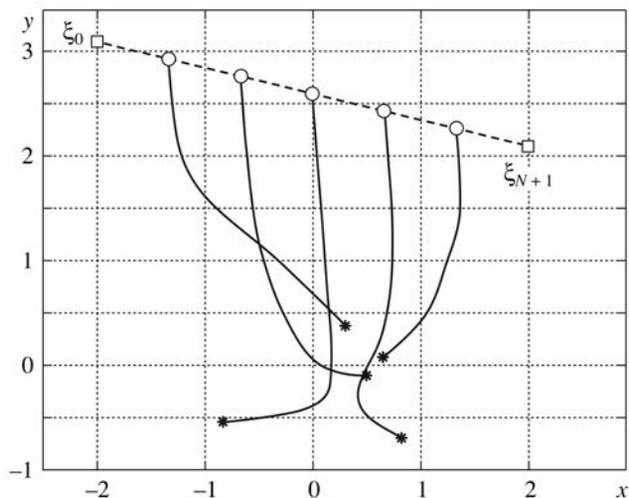


Рис. 1. Протокол (3) для агентов с демпфирующей обратной связью по скорости ($a = 2$).

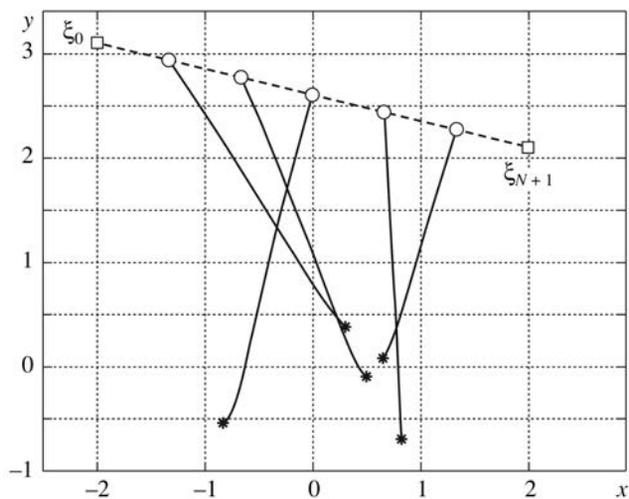


Рис. 2. Траектории агентов без трения ($a = 0$) при протоколе управления (15).

В следующих примерах показана применимость алгоритмов (15) и (16) для агентов без отрицательной обратной связи по скорости: $a = 0$. При моделировании были приняты следующие значения констант: $p = 10$ и $\gamma = 1,4$ (последний параметр задействован только в алгоритме (16)). На рис. 2 показано поведение системы под действием протокола (15), использующего относительные скорости, а на рис. 3 представлены траектории системы при использовании протокола (16). Оба протокола обеспечивают равномерное размещение, что и утверждается в теоремах 2 и 3. Необходимо также отметить, что алгоритм (15) дает более “гладкие” траектории и более высокую ско-

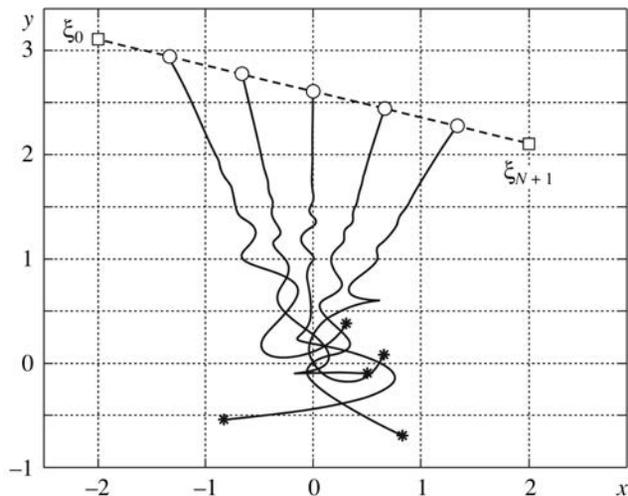


Рис. 3. Траектории агентов без трения ($a = 0$) при протоколе управления (16).

рость сходимости. Такое поведение объясняется введением дополнительной динамической системы — дифференцирующего фильтра низких частот, замедляющего динамику всей системы.

5. Заключение

В статье рассматривается специальная задача построения статичной формации агентов — равномерной расстановки на отрезке с фиксированными концами. В отличие от предшествующих публикаций рассматривается случай, когда уравнения агентов имеют второй порядок, при этом агент может измерять свое положение относительно соседей и абсолютную (или также относительную) скорость. Кроме того, рассматривается более общий случай, когда измерение даже относительных скоростей невозможно, а вместо них используются оценки, полученные с помощью дифференцирующего фильтра нижних частот. Теоретические результаты подкреплены компьютерным моделированием. В дальнейшем авторы планируют рассмотреть задачи построения мобильных агентов в плоскую или пространственную формацию.

Теоремы 1 и 2 получены при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-00063). Теорема 3 получена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-29-00142) в Институте проблем машиноведения РАН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При доказательстве устойчивости замкнутых систем, полученных при использовании протоколов (3), (15) и (16) для агентов вида (11), будем пользоваться следующим критерием устойчивости, разработанным Б.Т. Поляком и Я.З. Цыпкиным [34], позднее независимо полученным Ш. Хара [33], и основанным на понятии “обобщенной частотной переменной”.

Положим, что необходимо исследовать устойчивость линейной системы высокого порядка, имеющей вид

$$(П.1) \quad \phi \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) = Ax(t),$$

где $\phi(s)$ — скалярный полином, матрица A имеет размерность $N \times N$. Обозначив характеристический полином матрицы A через $D(s) := \det(sI - A)$, легко показать, что система (П.1) устойчива тогда и только тогда, когда полином $G(s) := D(\phi(s))$ гурвицев. В более общем случае пусть $\phi(s) = \psi(s)/\rho(s)$ — рациональная функция, аналитическая в закрытой правой полуплоскости $\bar{\mathbb{C}}_+ := \{s : \operatorname{Re} s \geq 0\}$ (т.е. полином ρ — гурвицев). Тогда система (П.1) примет вид

$$\psi \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) = \rho \left(\frac{d}{dt} \right) Ax(t)$$

и будет являться устойчивой тогда и только тогда, когда у рациональной функции $G(s) = D(\phi(s))$ нет нулей в $\bar{\mathbb{C}}_+$. Несмотря на то что это свойство можно проверять напрямую, не используя структуры $G(s)$, такая процедура может оказаться вычислительно затратной для полиномов высоких степеней. В качестве альтернативы можно использовать понятие Ω -области, введенное в [34]. По определению Ω -область функции $\phi(s)$ есть множество точек λ на комплексной плоскости, для которых функция $\phi(s) - \lambda$ не имеет нулей в замкнутой правой полуплоскости:

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi(s) - \lambda \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0\}.$$

Следующая теорема П.1, установленная в [34], упрощает задачу исследования устойчивости системы (П.1), разбивая на две более простые подзадачи, а именно: а) вычисление собственных чисел матрицы A и б) нахождение Ω -области функции $\phi(s)$.

Теорема П.1. Характеристическая функция $G(s) = D(\phi(s))$ не имеет нулей в $\bar{\mathbb{C}}_+$ тогда и только тогда, когда все нули $D(s)$, т.е. собственные числа λ_k матрицы A , лежат в Ω -области функции $\phi(\cdot)$. Для любого решения (П.1) справедлива оценка

$$|x(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad \alpha := \max\{\operatorname{Re} s : \phi(s) = \lambda_k \text{ при некотором } k = 1, \dots, N\}.$$

Для доказательства сходимости алгоритмов равномерной расстановки нет необходимости точно определять Ω -область (детали соответствующего алгоритма приведены в [34]). Поскольку матрица A вида (5) гурвицева, достаточно показать, что соответствующая Ω -область содержит все отрицательные вещественные числа.

Перейдем теперь к доказательству основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, тогда замкнутую систему (11), (3) легко переписать в виде

$$(П.2) \quad \phi \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) = Ax(t) + b, \quad \phi(s) = s^2 + as,$$

где A и b имеют вид (5) и (6) соответственно. Устойчивость положения равновесия $x_* = -A^{-1}b$ эквивалентна устойчивости автономной системы (П.1). По предположению $a > 0$, поэтому уравнение $\phi(s) = \lambda$ не имеет неустойчивых корней при $\lambda < 0$ (полином $\phi(s) - \lambda$ гурвицев), откуда сразу следует устойчивость: все собственные числа матрицы A вещественные отрицательные и имеют вид (7). В соответствии с теоремой П.1, показатель экспоненты μ в (13) имеет вид $\mu = \max_k H(a, -\lambda_k)$, что влечет за собой $\mu = H(a, \hat{\lambda})$, поскольку функция $H(a, \cdot)$ неубывающая. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $a = 0$. Запишем замкнутую систему (11), (15) в виде

$$s^2x = (ps + 1)(Ax + b), \quad s := \frac{d}{dt},$$

что представляет собой (П.2) с рациональной функцией $\phi(s) = s^2/(ps + 1)$. Устойчивость положения равновесия $x_* = -A^{-1}b$ эквивалентна устойчивости автономной системы (П.1), что следует из теоремы П.1, поскольку уравнение $\phi(s) = \lambda$ не имеет неустойчивых корней при $\lambda < 0$ (полином $s^2 - p\lambda s - \lambda$ гурвицев при $p > 0$ и $\lambda < 0$). В частности, Ω -область содержит все собственные числа λ_k . Формула скорости сходимости очевидным образом вытекает из теоремы П.1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Аналогично предыдущим доказательствам система (11), (15) приводится к виду

$$s^2x = q(s)(Ax + b), \quad s := \frac{d}{dt}, \quad q(s) := 1 + \frac{ps}{s + \gamma},$$

что равносильно системе (П.2) с рациональной функцией $\phi(s) = s^2(s + \gamma)/(s(p + 1) + \gamma)$. Для проверки устойчивости достаточно показать, что у уравнения $\phi(s) - \lambda$ нет неустойчивых корней при $\lambda < 0$. Устойчивость вытекает из критерия Рауса—Гурвица, утверждающего, что полином $s^3 + as^2 + bs + c$ гурвицев тогда и только тогда, когда $a, b, c > 0$ и $ab > c$. В частности, полином $s^2(s + \gamma) - \lambda(p + 1)s - \lambda\gamma$ гурвицев при $\gamma, p > 0$ и $\lambda < 0$. Таким образом, положение равновесия является экспоненциально устойчивым. Формула для скорости сходимости следует из теоремы П.1. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ren W., Cao W. Distributed Coordination of Multi-Agent Networks. London: Springer-Verlag, 2011.
2. Mesbahi M., Egerstedt M. Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton and Oxford: Princeton Univ. Press, 2010.
3. Antonelli G. Interconnected Dynamic Systems. An Overview on Distributed Control // IEEE Control Syst. Mag. 2013. V. 33. No. 1. P. 76–88.
4. Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик // Управление большими системами. 2010. Вып. 30.1. С. 470–505.
5. Ren W., Beard R. Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control. Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.

6. *Bullo F., Cortes J., Martinez S.* Distributed Control of Robotics Networks. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009.
7. *Lafferriere G., Williams A., Caughman J., et al.* Decentralized Control of Vehicle Formations // Syst. & Control Lett. 2005. V. 54. No. 9. P. 899–910.
8. *Olfati-Saber R.* Flocking for Multi-agent Dynamic Systems. Algorithms and Theory // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 3. P. 401–420.
9. *Zavlanos M.M., Egerstedt M.B., Pappas G.J.* Graph-theoretic Connectivity Control of Mobile Robot Networks // Proc. IEEE. 2011. V. 99. No. 9. P. 1525–1540.
10. *Reynolds C.W.* Flocks, Herds, and Schools. A Distributed Behavioral Model // Computer Graphics. 1987. V. 21. No. 4. P. 25–34.
11. *Schwager M., Rus D., Slotine J.J.* Unifying Geometric, Probabilistic, and Potential Field approaches to Multi-robot Deployment // Int. J. Robot. Res. 2011. V. 30. No. 3. P. 371–383.
12. *Ny J.L., Ribeiro A., Pappas G.J.* Adaptive Communication-Constrained Deployment of Unmanned Vehicle systems // IEEE J. Select. Areas Commun. 2012. V. 30. No. 5. P. 923–934.
13. *Li W., Spong M.W.* Unified Cooperative Control of Multiple Agents on a Sphere for Different Spherical Patterns // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 5. P. 1283–1289.
14. *Flocchini P., Prencipe G., Santoro N.* Self-deployment of Mobile Sensors on a Ring // Theor. Comp. Sci. 2008. V. 402. No. 1. P. 67–80.
15. *Elor Y., Bruckstein A.M.* Uniform Multi-agent Deployment on a Ring // Theor. Comp. Sci. 2011. V. 412. No. 8–10. P. 783–795.
16. *Cortes J.* Coverage Optimization and Spatial Load Balancing by Robotic Sensor Networks // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 55. No. 3. P. 749–754.
17. *Pavone M., Arsie A., Frazzoli E., et al.* Distributed Algorithms for Environment Partitioning in Mobile Robotic Networks // IEEE Trans. Autom. Control. 2011. V. 56. No. 8. P. 1834–1848.
18. *Wagner I.A., Bruckstein A.M.* Row Straightening via Local Interactions // Circuits Syst. Signal Process. 1997. V. 16. No. 2. P. 287–305.
19. *Elmachtoub A.N., van Loan C.F.* From Random Polygon to Ellipse. An Eigenanalysis // SIAM Rev. 2010. V. 52. No. 1. P. 151–170.
20. *Щербаков П.С.* Управление формациями. Схема Ван Лоуна и другие алгоритмы // Управление большими системами. 2010. Вып. 30.1. С. 681–696.
Shcherbakov P.S. Formation Control. The Van Loan Scheme and Other Algorithms // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 681–696.
21. *Parsegov S., Polyakov A., Shcherbakov P.* Nonlinear Fixed-time Control Protocol for Uniform Allocation of Agents on a Segment // Proc. IEEE Conf. Decision Control. 2012. P. 7732–7737.
22. *Парсегов С.Э., Поляков А.Е., Щербаков П.С.* Достижение равноудаленного расположения агентов на отрезке за заданное время // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 524–528.
Parsegov S.E., Polyakov A.E., Shcherbakov P.S. Nonlinear Fixed-time Control Protocol for Uniform Allocation of Agents on a Segment // Doklady Math. 2013. V. 87. No. 1. P. 133–136.
23. *Фрадков А.Л., Григорьев Г.К.* Децентрализованное адаптивное управление синхронизацией сетей динамических систем при ограниченных возмущениях // АиТ. 2013. № 5. С. 137–155.
Fradkov A.L., Grigor'ev G.K. Decentralized Adaptive Control of Synchronization of

Dynamic System Networks at Bounded Disturbances // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 5. P. 829–844.

24. *Амелина Н.О., Фрадков А.Л.* Приближенный консенсус в стохастической динамической сети с неполной информацией и задержками в измерениях // *АиТ.* 2012. № 11. С. 6–29.
Amelina N.O., Fradkov A.L. Approximate Consensus in the Dynamic Stochastic Network with Incomplete Information and Measurement Delays // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1765–1783.
25. *Проскурников А.В.* Частотные критерии консенсуса в многоагентных системах с нелинейными секторными связями // *АиТ.* 2014. № 11. С. 110–126.
Proskurnikov A.V. Frequency-domain Criteria for Consensus in Multiagent Systems with Nonlinear Sector-shaped Couplings // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 11. P. 1982–1995.
26. *Proskurnikov A.V.* Nonlinear Consensus Algorithms with Uncertain Couplings // *Asian J. Control.* 2014. V. 16. No. 5. P. 1277–1288.
27. *Проскурников А.В.* Консенсус в нелинейных стационарных сетях с идентичными агентами // *АиТ.* 2015. № 9. С. 44–63.
Proskurnikov A.V. Consensus in Nonlinear Stationary Networks with Identical Agents // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1551–1565.
28. *Selivanov A., Fradkov A., Fridman E.* Passification-based Decentralized Adaptive Synchronization of Dynamical Networks with Time-varying Delays // *J. Franklin Inst.* 2015. V. 352. No. 1. P. 52–72.
29. *Квинто Я.И., Парсегов С.Э.* Равноудаленное расположение агентов на отрезке. Анализ алгоритма и его обобщения // *АиТ.* 2012. № 11. С. 30–41.
Kvinto Y.I., Parsegov S.E. Equidistant Arrangement of Agents on Line. Analysis of the Algorithm and Its Generalization // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1784–1793.
30. *Ramirez J.L., Pavone M., Frazzoli E., et al.* Distributed Control of Spacecraft Formations via Cyclic Pursuit. Theory and experiments // *AIAA J. Guidance, Control, Dynamics.* 2010. V. 33. No. 5. P. 1655–1669.
31. *Zheng Y., Wang L.* Consensus of Heterogeneous Multi-agent Systems without Velocity Measurements // *Int. J. Control.* 2012. V. 85. No. 7. P. 906–914.
32. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
33. *Hara S., Hayakawa T., Sugata H.* Stability Analysis of Linear Systems with Generalized Frequency Variables and Its Applications to Formation Control // *Proc. IEEE Conf. Decision Control.* 2007. P. 1459–1466.
34. *Поляк Б.Т., Цыткин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // *АиТ.* 1996. № 11. С. 91–104.
Polyak B.T., Tsypkin Y.Z. Stability and Robust Stability of Uniform Systems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Шербаковым.

Поступила в редакцию 12.01.2016