

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Проскурников, А. Л. Фрадков, Задачи и методы сетевого управления, *Автомат. и телемех.*, 2016, выпуск 10, 3–39

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.145.16.81

19 ноября 2024 г., 18:20:16



© 2016 г. А.В. ПРОСКУРНИКОВ, канд. физ.-мат. наук (avp1982@gmail.com),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики)

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СЕТЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

Управление сетевыми системами, или сетевое управление, – бурно развивающаяся область современной теории автоматического управления. Для сетевого управления характерно сочетание классического аппарата теории управления (линейные системы, нелинейное управление, робастное управление и др.) с принципиально новыми математическими идеями, прежде всего приходящими из теории графов. Методы сетевого управления позволяют решать задачи анализа и синтеза сложных систем, возникающие в физике, биологии, экономике, социологии и инженерных науках. В обзоре представлены основные области приложений современной теории сетевого управления, а также формулировки ключевых ее результатов, полученных в последнее десятилетие.

1. Введение

Повсеместное распространение сетевых систем, понимаемых как совокупность подсистем (узлов), соединенных физическими или информационными связями, привело к появлению целого ряда новых задач теории управления. Среди многочисленных примеров сетевых систем можно упомянуть такие, как многопроцессорные системы передачи и обработки информации, транспортные и логистические сети, высокотехнологичные производственные сети, системы координированного управления групповым движением летательных и подводных аппаратов и подвижных роботов, распределенные системы управления электрическими сетями, сложные кристаллические решетки и наноструктурные объекты, нейронные сети, сети генетических и биохимических осцилляторов, большие социальные группы и биологические формации. Подтверждением актуальности и научной значимости проблемы является наблюдаемый в мировой научной литературе “бум” в области сложных сетевых систем (Complex Networks). Публикуются обзорные статьи, отчеты, специальные выпуски журналов [1–8]. Организуются конференции и семинары, специально посвященные управлению в сетевых системах [9]. Поиск по

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 14-08-01015, и Санкт-Петербургского государственного университета, грант 6.38.230.2015. Алгоритм скоростного градиента (35) для достижения консенсуса в сетях нелинейных агентов предложен в ИПМаш РАН при исключительной поддержке Российского научного фонда, грант 14-29-00142.

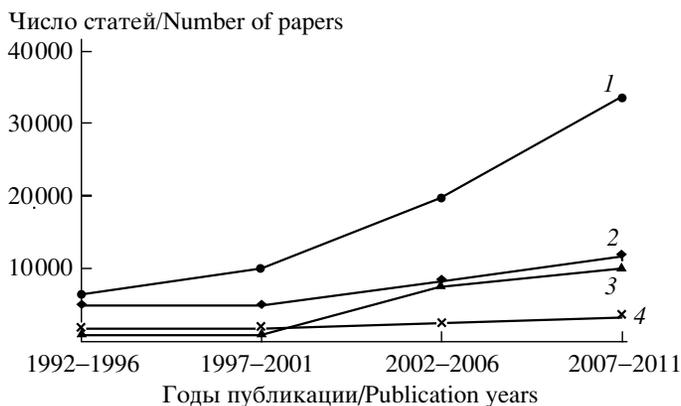


Рис. 1. Динамика публикаций по основным разделам теории управления в журналах, индексируемых в Web of Science: 1 – управление в сетях (поиск по словам “control and network”), 2 – адаптивное управление (поиск по “control and adapt”), 3 – интеллектуальные системы управления (поиск по “control and intelligen”), 4 – робастное управление (поиск по “control and robust”).

базе данных научного цитирования Web of Science (“Сеть науки”) по ключевым словам в названиях статей показывает удвоение количества статей в рецензируемых журналах по данной тематике за 5–6 лет. Поиск по ключевому слову “networks” в трудах крупнейшей конференции по теории управления 2013 г. IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2013) дает более 500 статей из 1270. Наконец, в первой десятке наиболее цитируемых статей из старейшего и наиболее престижного журнала в области автоматического управления IEEE Transactions on Automatic Control четыре места заняты статьями по сетевому управлению, появившимися всего лишь около 10 лет назад (эти статьи будут упомянуты ниже). Перечисленные факты говорят о стремительном росте и об уже достигнутом высоком уровне актуальности тематики, связанной с управлением в сетевых системах (см. рис. 1).

Почти 50 лет назад выдающийся российский ученый Я.З. Цыпкин в своей замечательной книге “Адаптация и обучение в автоматических системах” [10] провозгласил наступление нового, третьего периода развития теории управления — адаптивного периода, когда наиболее активно развивались модели и методы адаптивного управления. “Адаптивный” период продолжался почти 30 лет, почти до конца прошлого столетия. Сейчас же можно говорить о наступлении четвертого, сетевого периода.

В литературе по сетевым системам управления к настоящему времени выделены два больших раздела, первый из которых может быть определен как *управление через сеть* (англ. “networked control”), а второй — как *управление сетями* или *в сетях* (“control of networks”). Первое направление связано, главным образом, с управлением при коммуникационных и вычислительных ограничениях, которые присутствуют практически в любой сложной компьютерно-управляемой системе. Примерами вопросов, которые рассматриваются в этой области, является влияние на систему управления квантования (quantization) и дискретизации данных (sampling), задержек (delays) и

потерь данных (data losses, dropouts), ограниченной скорости передачи данных (data rate) либо емкости канала связи (channel capacity). Рассмотрение данной проблематики выходит за рамки настоящего обзора, основные задачи и важнейшие результаты области “networked control” освещены в недавно опубликованных работах [11–13].

В данном обзоре рассматриваются основные задачи и приложения второго раздела сетевой теории управления (“control of networks”), изучающего вопросы управления в сетях. Специальные задачи этой области также часто обозначают терминами “групповое управление”, “кооперативное управление”, “мультиагентное (многоагентное) управление”. Сетевые системы управления отличаются от классических как структурой объекта управления, так и структурой “регуляторов”, или алгоритмов управления, в сетевой теории управления также часто называемых *протоколами*. Объект управления подразбивается (естественно или искусственно) на отдельные подсистемы (узлы), которые, как правило, не управляются из единого центра, а принимают и реализуют решения самостоятельно на основе доступной им информации. Такой способ поведения называется *агентным*, соответственно узлы-подсистемы часто называются *агентами*, а вся система — *мультиагентной*² (или многоагентной). Способ представления сложной системы в виде группы взаимодействующих агентов часто называется “агентным моделированием” (agent-based modeling). Соответственно, алгоритм управления в сетевой (мультиагентной) системе должен быть *распределенным* и *децентрализованным* – первый термин означает, что каждый узел (агент) управляется своим независимым регулятором, а второй термин предполагает, что такие регуляторы используют лишь “локальную” информацию о системе (как правило, состояние самого узла и нескольких “соседних” узлов).

Широкий класс сетевых мультиагентных систем описывается в непрерывном времени математическими моделями

$$(1) \quad \dot{x}_i = F_i(t, x_i, u_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(t) \varphi_{ij}(x_i, x_j), \quad y_i = h(x_i, u_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где N обозначает число узлов в сети, $x_i(t)$ — векторы состояния узлов, $u_i(t)$ — входы (управления), $y_i(t)$ — измеряемые переменные (выходы), функции $F_i(\cdot)$ характеризуют собственную (локальную) динамику агентов, функции $\varphi_{ij}(\cdot)$ характеризуют взаимодействия между агентами, а числа α_{ij} задают (нагруженный) граф связей в системе. Данный граф, как и динамика самих узлов, может быть нестационарным (в частности, связи между агентами могут появляться и исчезать). Функции связей φ_{ij} и коэффициенты усиления α_{ij} могут быть фиксированы заранее, в этом случае исследуются свойства сети (1) как динамической системы со входами u_i и выходами y_i , а могут быть частью распределенного алгоритма управления.

² Наиболее часто о мультиагентном управлении говорят в ситуации, когда изначально узлы сети полностью автономны, а информационные связи между ними возникают лишь в ходе применения совместного алгоритма управления, ставящего целью достижение некоторой общей, или *кооперативной*, цели (примером могут служить рассматриваемые ниже алгоритмы консенсуса для независимых агентов, а также многочисленные задачи координации автономных мобильных роботов).

Вопросам анализа и синтеза подобных систем посвящено огромное количество работ, см. например, [1–8, 14–24]. Адекватным математическим аппаратом является сплав теории устойчивости (обычно ляпуновские или вход-выходные методы) и теории графов (свойства системы существенно зависят от спектра так называемой лапласовской матрицы графа связей, определяемой через его матрицу смежности). Смысл теоретических работ данного направления состоит в том, что формулируются динамические свойства системы (1), соответствующие тому или иному типу ее поведения (наблюдающемуся в природе или предпочтительному для конструктора системы), а затем устанавливаются условия выполнения (достижения) этих свойств. При этом для природных (физических, биологических и т.п.) систем правила взаимодействия агентов задаются исходя из физического (содержательного) смысла и решаются задачи анализа. Для технических систем, кроме того, решаются задачи синтеза правил (алгоритмов) взаимодействия, обеспечивающих достижение заданных свойств, т. е. заданные свойства выступают как цели управления.

Одной из основных целей управления является **синхронизация**, означающая согласованное поведение агентов. Так, полная или частичная координатная синхронизация означает асимптотическое сближение состояний агентов или их наблюдаемых выходов: $\|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow 0$ или $\|y_i(t) - y_j(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Ниже будет приведено общее определение синхронизации, охватывающее различные ее виды, встречающиеся в природе и технике [25, 26]. Достижению подобной цели соответствует наличие у динамической системы свойства **частичной устойчивости или устойчивости относительно функции**. Это понятие было введено еще А.М. Ляпуновым, но систематическому изучению подверглось лишь во второй половине XX в. начиная с работ В.В. Румянцева и его последователей. Частным случаем задач синхронизации являются задачи достижения **консенсуса** [3, 4, 14, 15, 27, 28], в которых состояния либо выходы агентов должны сойтись к общему значению (например, среднему начальных состояний) либо общей заданной траектории³. К задачам частичной координатной синхронизации с помощью метода виртуального лидера [16] сводятся и задачи **группового управления** (управления **формациями**) [2, 23]. Свойство частичной устойчивости близко к **понятию устойчивости множеств (set stability)**, удобному для описания свойств достижения цели управления в условиях возмущений.

При большом числе агентов (а в ряде задач число агентов достигает тысяч и миллионов) требование заданного поведения всех без исключения агентов оказывается излишне жестким. В таких случаях выделяется характерная точка в множестве состояний агентов (центр, лидер, центр тяжести), а желательным поведением является заданное поведение центра при условии ограниченности отклонений от него состояний всех агентов. Для подобных типов поведения вводятся понятия, заимствованные из биологии: **сбивание в стаи, роение** (swarming, flocking), и устанавливаются условия возникновения в системе соответствующих свойств [17–19]. Наконец, целый ряд работ посвя-

³ Как будет подробно объяснено ниже, данную терминологию нельзя назвать устоявшейся. Так, во многих работах термин “консенсус” обозначает синоним координатной синхронизации.

шен задаче о **рандеву** (rendezvous), где требуется, чтобы все агенты оказались в заданном месте в заданное время [20–22].

В дальнейших разделах приводятся математические постановки некоторых основных задач и формулировки соответствующих результатов в перечисленных областях. Представлены подходы к систематизации известных результатов [23–25]. Особое внимание уделяется также задачам адаптивного управления в сетях и подходам на основе метода пассивификации [29–34]. Прежде чем переходить к формальному изложению, рассмотрим некоторые примеры практических задач, укладывающихся в рамки сетевого управления.

2. Задачи сетевого управления

Производственные и экономические сети. Одним из наиболее известных и обсуждаемых классов динамических сетей являются производственные и экономические сети, включающие в себя финансовые и транспортные сети. Современные транснациональные производственные системы (фирмы) отличаются глобальностью географического расположения. Сырье добывается в одних странах и континентах, комплектующие изготавливаются в других, сборка производится в третьих странах, а клиенты, которым требуется отправить готовую продукцию, могут располагаться в четвертых странах. При этом процесс производства в каждом производственном узле сети должен идти без перебоев с сырьем и комплектующими, уровень автоматизации в каждом узле должен обеспечивать обмен информацией и взаимодействие измерительных и исполнительных устройств (сенсоров и актуаторов) по проводным и беспроводным каналам связи для обеспечения устойчивости и точности функционирования оборудования. Кроме того, на складах в каждом узле должны быть достаточные, но не чрезмерные запасы сырья и деталей, а на банковских счетах в каждом узле должны быть достаточные, но не чрезмерные запасы средств для обеспечения всего процесса производства. Конечная продукция должна своевременно доставляться клиентам по транспортным сетям, а оплата за нее должна своевременно ложиться на банковские счета производственных узлов через финансовые сети. Формализация задач управления, описанных выше, не представляет особых трудностей, однако решение подобных задач осложняется неоднородностью математических моделей процессов производства и обмена, а также большими (сотни и тысячи) или даже огромными (миллионы и миллиарды) размерностями возникающих массивов данных. Тем не менее публикуется большое количество работ по управлению производственными сетями и актуальность этих задач продолжает расти [35–37]. С данной проблематикой тесно связаны сетевые динамические модели рынков, аукционов и экономик, описывающих взаимодействие торговых и экономических агентов [38–41].

Групповое управление наземными, воздушными и морскими аппаратами. Сети мобильных роботов, беспилотных летательных аппаратов, надводных и подводных аппаратов привлекают большое внимание уже более десятилетия [14, 22, 27, 42–46]. Такие сети могут решать многочисленные задачи мониторинга и поиска на заданной территории или акватории, оперативной фотографии и видеосъемки и т.п. Наблюдающийся в последние несколько лет бум со-

здания и применения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) породил новые возможности: совместный перенос грузов, строительство сооружений коллективами роботов, самосборка конструкций в воздухе и т.п. Управление подобными сетями требует развития методов управления сетями динамических систем с целями управления, соответствующими различным типам поведения “коллектива” роботов. Блестящие результаты по групповому управлению квадрокоптерами были продемонстрированы в пленарном докладе Раффаэлло д’Андреа (ETH, Цюрих) на конференции CDC-2013 [47], см. также [48, 49].

Особый интерес вызывают задачи кооперативного поведения роботов при нестандартных целях управления. Примером такого класса задач является футбол роботов, где цель управления — забить гол в условиях противодействия противника. При этом возникает ряд сложных промежуточных задач: обход движущихся препятствий, планирование совокупности траекторий игроков, реализация маневров и т.д. За последние годы в решении такого рода задач достигнут серьезный прогресс; обзор основных подходов и результатов может быть найден, к примеру, в обзоре [50]. Близки к ним практически важные задачи диспетчерского управления воздушным движением, решение которых осложняется ростом “населенности” воздушного пространства, особенно вблизи крупных городов и аэропортов.

Электроэнергетические сети. Важным классом сетевых систем являются электроэнергетические сети, состоящие из большого числа генераторов (электростанций), некоторые из которых соединены линиями передач. Основной целью управления является достижение и поддержание устойчивой синхронной работы генераторов в условиях меняющейся нагрузки и разнообразных возмущений. Достижение надежной синхронизации приводит к снижению числа аварийных ситуаций (блэкаутов) и сокращению потерь различного рода. Большое число генераторов и потребителей в сети, трудности измерения соответствующих переменных, таких как фаза (мгновенное значение напряжения или тока), изменение параметров сети в широких пределах создают значительные проблемы при управлении энергосетями.

Трудность решения задач управления энергетическими сетями вызвана также их сложной динамикой. Кроме нелинейной динамики генераторов, необходимо учитывать крупномасштабную структуру и сложную топологию сети. Это приводит к существенно нелинейному характеру поведения сети, описываемому в терминах полной или частичной устойчивости, бифуркаций и хаоса. При этом достаточно полные модели реальных энергетических сетей описываются совокупностью большого числа дифференциальных и алгебраических уравнений, что еще более осложняет их исследование и управление ими [51, 52].

Новые возможности при управлении электроэнергетическими сетями появились с освоением выпуска таких приборов, как PMU (Phase Measuring Units), WAMS (Wide Area Measurement System), обеспечивающих точное измерение времени и фазовых переменных сети, и других, в частности FACTS (Flexible Alternate Current Transmission Systems) — гибких систем передачи переменного тока. Эти и другие факторы мотивировали появление концепции “умной сети” (“smart grid”) [53–56], которая в отечественных публика-

циях называется также “активно-адаптивной сетью” или “интеллектуальной сетью” [57].

Эта концепция зародилась в США и странах Европейского союза, где она легла в основу национальной политики энергетического и инновационного развития. Причины возникновения новой концепции как во всем мире, так и в России, связаны с рядом факторов: технологический прогресс (повышение уровня автоматизации, появление и развитие новых технологий, интенсивный рост количества малых генерирующих источников энергии); рост требования потребителей (требование к набору и качеству услуг, снижение цен на услуги отраслей); снижение надежности (нарастание уровня износа оборудования, снижение уровня надежности электроснабжения, высокий уровень потерь при преобразовании, передаче, распределении и использовании энергии); повышение требований к энергоэффективности и экологической безопасности) и т. п. Ряд задач управления энергетическими сетями с использованием методов адаптивного и робастного управления был рассмотрен в недавних работах [58–61].

Распределенные системы связи и компьютерные сети. В теории связи изучение распределенных сетей началось задолго до появления “сетевой” теории управления [62, 63]. Распределенная сеть связи (или коммуникационная сеть) состоит из множества принимающих и передающих узлов, соединенных нетривиальной топологией разнородных коммуникационных линий (проводных или беспроводных). Примерами могут служить телефонные и кабельные сети, сети мобильной связи, а также любая компьютерная сеть. Ряд задач, решаемых в теории распределенных сетей связи, имеет непосредственное отношение к управлению многоагентными и сетевыми системами. Одной из таких задач является задача *синхронизации времени*, т.е. фазовая и частотная синхронизация тактовых генераторов. Несмотря на то, что распределенные алгоритмы для автоподстройки времени в распределенных сетях известны достаточно давно, см. к примеру обзор [64], инструментарий для их строгого математического анализа появился совсем недавно [65, 66] в рамках изучения *консенсусных алгоритмов*, рассматриваемых ниже. Другой классической задачей является проблема динамической *балансировки загрузки* (dynamic load balancing), возникающая в любой крупной коммуникационной сети: при наличии нескольких путей доставки пакета от точки А к точке В (вообще говоря, разной пропускной способности), требуется в режиме реального времени распределять трафик между этими путями, чтобы минимизировать среднее время доставки. Аналогичная задача может быть поставлена для системы из нескольких серверов, обрабатывающих запросы, либо кластера из нескольких процессоров [67]: как перераспределять нагрузку между серверами/процессорами таким образом, чтобы сделать среднее время обработки запроса как можно меньше. Алгоритмы балансирования загрузки, основанные на *протоколах локального голосования* (по существу, алгоритмах синхронизации и консенсуса), были исследованы в недавних работах [68, 69].

Экологические сети. Экологические системы отличаются пространственной распределенностью и взаимодействием различных видов и популяций, что приводит к сложному сетевому их характеру. Связи между видами порождаются трофическими (пищевыми) цепями, определяющими “кто кем пи-

тается” (“food web”) [70]. Управление экологическими сетями может быть направлено на сохранение устойчивого существования популяций, защиты их от вымирания и сохранения численности видов в заданных пределах. Кроме того, промышленная эксплуатация экологических систем (сбора урожая, добычи ресурсов) выдвигает требования оптимизации промысла, рентабельности и т.п. При этом возможности управления — вмешательства в естественную жизнедеятельность экосистемы часто бывают ограничены. В подобных задачах может оказаться целесообразным перейти от традиционных формулировок целей управления (регулирования и слежения) к более “мягким” постановкам типа частичной стабилизации, например регулирования значений некоторой функции состояния экосистемы, которая при отсутствии управляющего воздействия сохраняется (является инвариантом свободного движения системы). В недавней работе [71] были предложены алгоритмы адаптивного управления инвариантами экологических сетей, описываемых многовидовой (multi-species) моделью Лотки–Вольтерра. Отметим, что динамика Лотки–Вольтерра тесно связана с игровыми моделями биологической эволюции видов [72], в частности *репликаторными уравнениями* (replicator dynamics). Эти модели положили начало новой бурно развивающейся области *эволюционной теории игр* [40, 73], которая связывает теорию игр и теорию сложных сетей и находит многочисленные применения в экономике, биологии и “эволюционных алгоритмах” искусственного интеллекта.

Нейронные сети. Естественным и весьма содержательным примером сетей являются нейронные сети, образованные из нервных клеток человека или животных, связанных электрическими или биохимическими взаимодействиями. Первые модели таких динамических систем, известных под названием **сетей импульсно связанных осцилляторов**, изучались в биологической, физической и математической литературе задолго до “бума” сетевой теории управления (см., например, известную работу [74] и библиографию в ней). Импульсно-связанные осцилляторы дают пример *гибридной* сетевой системы управления, в которой динамика узлов непрерывна, однако взаимодействия происходят в дискретные моменты времени, зависящие от состояния системы. В электротехнике такой способ управления известен как “импульсная модуляция второго рода”, а в современной литературе по теории управления — как “событийное управление” (event-triggered control). Для ряда важных процессов, например *циркадных* (суточных) ритмов, существуют и непрерывные модели [75], сводящиеся к общему виду (1). Вместе с тем упомянутые модели описывают весьма узкий класс процессов, управляемых нервными клетками и сводящихся к генерации устойчивых периодических ритмов. Наиболее интересными являются нейронные сети, определяющие мыслительную активность головного мозга. Динамика этих сетей настолько сложна, а возможности измерения их состояний и управления ими настолько слабы, что, на первый взгляд, математические методы управления сетями к нейросетевым системам неприменимы. Однако подобные опасения опровергает такое направление, как нейрообратная связь, возникшее в последние годы в нейронауках и получившее бурное развитие [76]. Оно основано на использовании для измерений состояния активности головного мозга многомерных сигналов, снятых с электро- или магнитоэнцефалографа. Для управления же исполь-

зается выдача на экран компьютера тех или иных образов в зависимости от близости измеренного состояния к желаемому. Сообщений об успехе применения подобных схем для нейрофизиологических исследований и для лечения мозговых заболеваний становится все больше.

Молекулярные системы и наносистемы. Хорошо известным примером сетевой структуры в физике является кристаллическая решетка. Атомы, совершают колебания вблизи узлов решетки под действием сил межатомного взаимодействия, ослабевающих с ростом расстояния между атомами. Хотя средств воздействия на подобные системы очень немного, задачи управления под действием внешних сил и электромагнитных полей в отдельных случаях могут быть решены и их решения могут привести к созданию веществ и материалов с новыми, необычными свойствами. Актуальность таких задач возросла в последние годы, когда появились средства измерения и управления (атомно-силовые микроскопы, компьютерно управляемые фемтосекундные лазеры), позволяющие вмешиваться в поведение отдельных атомов и молекул [25]. Отдельного упоминания заслуживает новая область управления *квантовыми* сетями [77], где узлы являются носителями квантовой информации (кубитов), а связи соответствуют квантовой запутанности состояний кубитов.

3. Математические модели сетевого управления

Прежде всего поясним разницу между сетевыми системами управления и традиционными для науки XX в. многосвязными системами. Объект управления (ОУ) в многосвязной системе также имеет несколько входов и несколько выходов. Однако при рассмотрении многосвязных систем традиционно считалось, что результаты измерения выходных величин поступают на центральное управляющее устройство, где реализуется алгоритм управления объектом и вырабатываются значения управляющих воздействий для подачи на входы ОУ. Для регулятора таким образом оказываются доступны все измеренные значения выходов одновременно (рис. 2, слева). Теория многосвязных систем была хорошо разработана уже в XX в. [78–82].

Что касается задач управления сетями, то там нет единого объекта управления и единого регулятора. Как объектов, так и регуляторов может быть

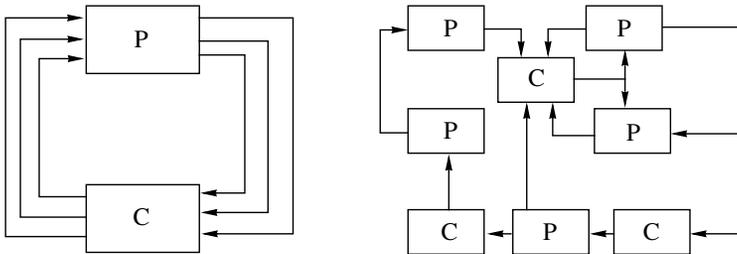


Рис. 2. Многосвязная система управления (слева) и сетевая система (справа). Блоки P и C обозначают, соответственно, объекты управления (plants) и регуляторы (controllers).

много, и они могут быть пространственно распределены (рис. 2, справа). Более того, каждому регулятору доступна лишь своя часть измеряемых (выходных) переменных, и моменты обновления информации в сети могут быть различны в разных ее частях. Таким образом, объекты и регуляторы следует рассматривать как взаимодействующие агенты в многоагентной системе и вместо алгоритмов управления следует говорить о сетевых протоколах взаимодействия подсистем (агентов). Это привносит дополнительные сложности в постановки и решения задач, но позволяет включить в рассмотрение асинхронные и управляемые событиями (event-driven, event-triggered) взаимодействия.

Рассмотрим формализованные постановки задач сетевого управления и основные подходы к их решению. Рассмотрим сеть S вида (1), состоящую из N взаимосвязанных подсистем (агентов) S_i , $i = 1, \dots, N$, каждая из которых описывается уравнениями

$$(2) \quad \dot{x}_i = F_i(x_i, u_i) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \varphi_{ij}(x_i, x_j), \quad y_i = h_i(x_i, u_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$, $y_i \in \mathbb{R}^l$ — векторы состояния, входа (управления) и выхода (измерения) для агента S_i , вектор-функции $F_i(x_i, u_i)$ и $h_i(x_i, u_i)$ описывают динамику агентов, вектор-функции $\varphi_{ij}(\cdot)$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$, описывают взаимосвязи между подсистемами, а коэффициенты $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1$ характеризуют интенсивность взаимодействий. Если все агенты идентичны, т.е. $F_i(x_i, u_i) = F(x_i, u_i)$, то сеть называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Часто встречаются сети, в которых взаимодействия агентов зависят только от их разногласий (расхождения их состояний): $\varphi_{ij}(x_i, x_j) = \varphi_{ij}(x_i - x_j)$. Такие связи, особенно в случае линейных функций φ_{ij} , часто называют *диффузионными* (diffusive coupling), сама сеть с такими связями также иногда называется диффузионной (diffusive network) [83]. Наиболее полно исследованы в настоящий момент линейные сетевые системы вида

$$(3) \quad \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} A_{ij} (x_i - x_j), \quad y_i = C_i x_i + D_i u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $A_i, B_i, C_i, D_i, A_{ij}$ — матрицы соответствующих размерностей.

Аналогично вводятся классы сетевых моделей дискретного времени, в которых производные заменены конечными разностями.

Свойства сети как объекта управления зависят от характера взаимосвязей между агентами, определяемого функциями $\varphi_{ij}(x_i, x_j)$ и коэффициентами α_{ij} . Для описания структуры взаимодействий вводится ориентированный граф (орграф) следующим образом: $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где \mathcal{V} — множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ — множество дуг. Для каждого $i = 1, \dots, N$ вершину v_i ассоциируем с агентом S_i . Будем считать, что дуга (v_i, v_j) принадлежит множеству дуг \mathcal{E} , если информация поступает от агента S_j к агенту S_i . В терминах модели сети (2) это означает, что $\alpha_{ij} \neq 0$. Предполагается, что в графе нет петель, т.е. $(v_i, v_i) \notin \mathcal{E}$ для всех $i = 1, \dots, N$. Если $\alpha_{ij} \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$\alpha_{ji} \neq 0$, то граф можно считать неориентированным. В моделях, рассматриваемых ниже, все веса положительны⁴: $\alpha_{ij} > 0$. Построенный граф называется *информационным графом* или *топологией* сети. Как показано ниже, многие фундаментальные свойства сетевых систем определяются их топологией и естественно описываются на языке теории графов. Таким образом, теория графов играет существенную роль в задачах анализа и синтеза сетевых систем управления.

4. Цели сетевого управления: синхронизация, консенсус, роение

4.1. Общее определение синхронизации

В задачах сетевого управления целью управления является желаемое групповое (коллективное, кооперативное) поведение агентов сети. Важным классом целей управления является обеспечение желаемого согласованного функционирования агентов, называемого *синхронизацией*. В частности, это может быть совпадение или сближение переменных состояния двух или нескольких подсистем или согласованное изменение некоторых количественных характеристик подсистем. В определенных случаях синхронизация возникает в силу естественных свойств самой системы взаимодействующих объектов. Примером может служить *частотная синхронизация* колеблющихся или вращающихся тел (см. ниже). В таких случаях говорят о *самосинхронизации*. В других случаях для согласования поведения объектов необходимо привнесение в систему дополнительных взаимосвязей или воздействий. Тогда говорят о *принудительной* или *управляемой синхронизации*. В этих случаях под синхронизацией понимают приведение процессов к синхронному протеканию.

Первые варианты общих определений для периодических процессов были предложены в [84] (совпадение или кратность средних частот колебательных или вращательных движений) и в [85] (существование асимптотически устойчивого инвариантного тора размерности $n - m$, где m — степень синхронизации). В [84, 86] было отмечено также, что под синхронизацией может пониматься равенство значений некоторых функционалов от координат систем. Например, в качестве функционалов могут выступать моменты обращения координат в нуль или достижения ими экстремальных значений. Целый ряд работ посвящен синхронизации колебаний в системах фазовой автоподстройки частоты [87] и более общих моделях периодических систем [88]. По мере изучения синхронизации хаотических процессов возник целый ряд новых вариантов свойства синхронизации: координатная (идентичная) синхронизация [89, 90], обобщенная синхронизация [91], фазовая синхронизация [92] и т.д.

Общее определение свойств синхронизации, охватывающее как случай самосинхронизации, так и случай управляемой синхронизации было предло-

⁴ С формальной точки зрения, всегда можно считать ненулевой вес положительным, заменив знак у функции φ_{ij} . Вместе с тем во многих сетевых системах (например, социальных [40]) связи между узлами содержательно делятся на притягивающие (attractive) и отталкивающие (repulsive). Эти системы удобно описывать знакопеременными нагруженными графами (signed graphs).

жено в [93] и развито в [26, 94, 95]. Ниже по аналогии с [25, 26] приводится общее определение синхронизации, позволяющее получать как частные случаи многие известные в литературе определения и описывать разнообразные типы сложного поведения в сетях.

Пусть имеется некоторое число k процессов (объектов), состояние каждого из которых в момент времени t характеризуется некоторым вектором $x^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, k$, где t изменяется на промежутке $0 \leq t < \infty$. Предположим сначала, что все вектор-функции $x^{(i)}(t)$ принадлежат одному и тому же функциональному пространству \mathcal{X} .

Пусть задана некоторая числовая характеристика данных процессов, определенная зависящими от времени отображениями $C_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$, где \mathcal{C} есть множество возможных значений C_t . Характеристика C_t называется *показателем синхронизации* или *индексом синхронизации*. Важно, что характеристика C_t предполагается одной и той же для всех объектов или процессов. Значение C_t может быть скаляром, вектором, матрицей, а также функцией, например частотным спектром процесса, на бесконечном или на некотором конечном, фиксированном или скользящем интервале времени. Для того чтобы иметь возможность сравнивать значения характеристики для различных процессов, вводится набор не зависящих от времени вектор-функций $F_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, k$, называемых *функциями сравнения*.

Определение 1. Будем говорить, что имеет место синхронизация процессов $x^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, k$, относительно характеристики C_t и функций сравнения F_i , если существуют вещественные числа (временные или фазовые сдвиги) τ_i , $i = 1, \dots, k$ такие, что для всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$(4) \quad F_1(C_{t+\tau_1}[x_1]) = \dots = F_k(C_{t+\tau_k}[x_k]).$$

Под *приближенной синхронизацией* (ε -синхронизацией) будем понимать случай, когда соотношения (4) выполняются лишь приближенно, с точностью до ε :

$$(5) \quad |F_i(C_{t+\tau_i}[x_i]) - F_j(C_{t+\tau_j}[x_j])| \leq \varepsilon \quad \forall i, j, \quad t \geq 0,$$

а под *асимптотической синхронизацией* — случай, когда погрешность выполнения соотношений (4) со временем исчезает:

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |F_i(C_{t+\tau_i}[x_i]) - F_j(C_{t+\tau_j}[x_j])| = 0.$$

Через $|X|$ здесь и далее обозначается евклидова норма (корень из суммы квадратов всех компонентов) вектора или матрицы X , если не оговорено иное.

Если задан некоторый оператор усреднения $\langle \cdot \rangle_t$ на промежутке $0 \leq s \leq t$, то можно ввести понятие *синхронизации в среднем* как выполнение для всех $t \geq 0$ соотношений

$$(7) \quad \langle Q_s \rangle_t < \varepsilon,$$

где Q_s — некоторая скалярная функция (мера десинхронизации), характеризующая отклонение от синхронного режима. Часто оператор усреднения задают как интегральный оператор $\langle Q_s \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t Q_s ds$, а меру десинхронизации Q_s — как средний квадрат отклонения от синхронного режима:

$$(8) \quad Q_t = \sum_{i,j=1}^k |F_i(C_{t+\tau_i}[x_i]) - F_j(C_{t+\tau_j}[x_j])|^2.$$

Введение меры десинхронизации является важным применением формального определения. Это дает возможность строить регулярные процедуры синтеза алгоритмов управления синхронизацией: определения управляющих воздействий, создающих в системе синхронный режим или изменяющих его характеристики. Такие алгоритмы могут быть разработаны, например, на основе метода скоростного градиента, см. [25, 96].

Замечание 1. Соотношения (4) иногда удобнее записывать в виде $k-1$ равенств

$$(9) \quad F_i(C_{t+\tau_i}[x^{(i)}(t)]) - F_k(C_{t+\tau_k}[x^{(k)}(t)]) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Замечание 2. Более общим понятием является *кратная синхронизация*, соответствующая случаю, когда соотношения (4) заменяются на

$$(10) \quad n_1 F_1(C_{t+\tau_1}[x^{(1)}(t)]) = \dots = n_k F_k(C_{t+\tau_k}[x^{(k)}(t)]),$$

а равенства (9) переходят в

$$(11) \quad F_i(C_{t+\tau_i}[x^{(i)}(t)]) = \frac{n_k}{n_i} F_k(C_{t+\tau_k}[x^{(k)}(t)]), \quad i = 1, \dots, k-1,$$

где n_i — *коэффициенты кратности* синхронизации.

4.2. Виды синхронизации. Консенсус

Приведенное выше определение охватывает основные встречающиеся типы синхронного поведения процессов. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1 (частотная (гюйгенсова) синхронизация). Этот вид синхронизации вводится для процессов, для которых определено понятие *частоты* ω_i , в частности для периодических (колебательных или вращательных) процессов. Характеристикой C_t в этом случае является средняя по промежутку $0 \leq s \leq t$ частота $C_t = \omega_t = \langle \dot{x} \rangle_t$, а условием синхронизации — соотношение

$$\omega_t = n_i \omega^*,$$

где n_i — целые числа (кратности синхронизации); ω^* — так называемая *синхронная частота*. Поэтому функции сравнения естественно ввести как $F_i(\omega_t) = \omega_t/n_i$. При $n_i = 1$, $i = 1, \dots, k$, имеем простую (некратную) синхронизацию.

Данный вариант синхронизации может быть распространен на непериодические процессы, если могут быть корректно определены средние частоты. Также можно рассмотреть “кусочно-периодический” случай, когда множество всех моментов времени разбивается на интервалы $\Delta_q = [t_q, t_{q+1})$, $q = 1, 2, \dots$, такие что все движения $y_i(\cdot)$ периодичны на каждом интервале Δ_q с частотами $\omega_i(t)$, представляющими собой кусочно-постоянные функции.

Расширенный вариант синхронизации по Гюйгенсу возникает, если заменить требование точного совпадения средних частот требованием согласования спектров в следующем смысле. Введем положительные функции масштабирования спектров $\alpha_i(\omega)$, $\beta_i(\omega)$ для каждой системы Σ_i , $i = 1, \dots, k$. Показатель синхронизации C определим как функцию J_ω :

$$(12) \quad C_\omega(y_i(\cdot)) = \alpha_i(\omega)S_i(\beta_i(\omega)\omega),$$

где S_i — спектральная плотность выходного сигнала $y_i(t)$, которая предполагается корректно определенной. Функции сравнения можно ввести, сопоставляя показателю синхронизации C набор значений C_ω для заданного набора частот.

Пример 2 (экстремальная синхронизация). Под экстремальной синхронизацией понимается одновременное или с определенной задержкой достижение скалярными процессами $x^{(i)}(t)$ своих экстремальных значений [93, 94]. Индексом синхронизации в этом случае является $C_t = t_i^*(t)$ — время достижения i -м процессом экстремума на промежутке $0 \leq s \leq t$. В качестве временных сдвигов τ_i могут выступать промежутки между моментами достижения первого экстремума i -м и первым процессами. Для векторных процессов можно рассматривать синхронизацию экстремумов соответствующих скалярных компонентов векторов $x^{(i)}(t)$ или некоторых скалярных функций от $x^{(i)}(t)$. Подобный вид синхронизации важен для ряда химических и биологических процессов.

Пример 3 (фазовая синхронизация). Системы фазовой синхронизации хорошо известны в радиотехнике и теории связи [87, 88]. Однако в традиционных технических применениях синхронизации подлежат периодические процессы, у которых частоты постоянны или являются периодическими функциями времени. В 1990-х гг. в физике возрос интерес к исследованию синхронизации хаотических процессов, для которых были введены обобщенные определения фазы и фазовой синхронизации [92]. Наиболее естественный путь введения понятия фазы для хаотического процесса состоит в рассмотрении хода процесса между моментами пересечения им некоторой поверхности (сечения Пуанкаре). При этом индексом синхронизации удобно считать значение фазы φ_t процесса $x(t)$, лежащее в промежутке от 0 до 2π и определяемое как $C_t[x] = \varphi_t = 2\pi \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n} + 2\pi n$, $t_n \leq t < t_{n+1}$, где t_n — время n -го пересечения траектории процесса с сечением Пуанкаре [92].

При $k = 2$, выбирая $F_1(\varphi_t) = F_2(\varphi_t) = \varphi_t$, получаем *синфазную* синхронизацию. Если же задать функции сравнения как $F_1(\varphi_t) = \varphi_t$, $F_2(\varphi_t) = \varphi_t + \pi$, то получим *противофазную* (антифазную) синхронизацию.

Несколько более общее понятие синхронизации получается, если принять в качестве значения индекса синхронизации величину $C_t = t_*(t)$, где $t_*(t)$ —

последний момент пересечения поверхности, не превосходящий момента t [93]. Этот способ позволяет охватить и случай, когда физически осмысленной фазы ввести не удастся из-за значительной нерегулярности процесса. В частности, если в качестве сечения Пуанкаре выбрать поверхность, уравнение которой определяет равенство нулю производной по времени некоторой скалярной функции от процесса, то получим экстремальную синхронизацию (см. выше).

Пример 4 (координатная синхронизация). С середины 1980-х гг. стало использоваться определение синхронизации взаимосвязанных подсистем как совпадения координат векторов их состояний [89]. Особенно популярным это определение стало после публикации статьи Л. Пекоры и Т. Кэрролла об управлении синхронизацией хаотических систем [90] (число цитирований этой статьи превышает 6000). Очевидно, координатная синхронизация укладывается в предложенное выше общее определение, если ввести индекс синхронизации $C_t(x_i) = x_i(t)$, где через $x_i(t)$ обозначено значение вектора состояния i -й подсистемы (агента) в момент времени t , а функции сравнения взять тождественными: $F_i(x) = x$, $i = 1, \dots, k$. Значительное число работ посвящено исследованию задач асимптотической координатной синхронизации, когда целью управления является выполнение соотношений

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Пример 5 (обобщенная (частичная) координатная синхронизация). Координатную синхронизацию из предыдущего примера часто называют *полной* или *тождественной*, подчеркивая необходимость совпадения всех фазовых координат подсистем. Для практики представляет интерес также случай, когда совпадает лишь часть фазовых координат подсистем или некоторые функции от фазовых координат $y_i = h(x_i)$ — выходы. Соответствующее понятие было введено в [91] и названо *обобщенной синхронизацией*. Очевидно, обобщенная синхронизация укладывается в описанную выше схему при выборе $C_t(x_i) = x_i(t)$ и $F_i(x) = h(x)$, $i = 1, \dots, k$.

Соответственно, асимптотическая частичная синхронизация может выступать в качестве цели управления:

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - y_j(t)| = 0, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Отметим, что достижение частичной синхронизации может быть связано с наличием у системы симметрий и инвариантных многообразий [83].

Пример 6 (консенсус). Специальным случаем координатной синхронизации (полной или частичной) является *консенсус* (по состоянию либо по выходу). Если помимо выполнения (13) существует (общий) *предел* состояний $\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t)$, то говорят, что между агентами установлен консенсус (более точно, асимптотический консенсус по состоянию). Аналогично, *частичный консенсус* (или консенсус по выходу) определяется как усиленная версия условия (14), предполагающая существование общего предела $\lim_{t \rightarrow \infty} y_j(t) \in \mathbb{R}^m$. Отметим, однако, что для специальных случаев под консенсусом могут пониматься и другие типы поведения. Например, для агентов с динамикой

двойного интегратора $\dot{y}_j(t) = u_j(t)$ консенсус, как правило, означает, существование общего предела для векторов скоростей \dot{y}_j , при этом траектории агентов $y_j(t)$ синхронизируются в смысле (14) [14, 27]. Далее, консенсус может означать сходимость состояний либо выходов к состоянию либо выходу выделенного агента, называемого лидером (leader-following consensus) либо просто к некоторой задающей траектории (reference tracking consensus) [14, 27]. Также во многих работах консенсус понимается как синоним полной либо частичной координатной синхронизации.

Термин “консенсус” объясняется двумя приложениями, возникшими одновременно в социологии и прикладной статистике. Первое из них связано с моделями динамики мнений и социальной власти в социальных группах. Одна из первых сетевых моделей такого рода, описывающая итеративный процесс усреднения мнений, была предложена социальным психологом Френчем в 1956 г. [97, 98]. С другой стороны, в исследовании операций и прикладной статистике рассматривалась задача принятия согласованного решения группой экспертов [99], для которой также был предложен линейный итеративный алгоритм [100]. Впоследствии поведение подобных систем активно изучалось с использованием аппарата теории марковских цепей, см. обзор [28]. Основные результаты о достижении консенсуса будут рассмотрены ниже.

Пример 7 (дискретная синхронизация). Иногда необходимо рассматривать дискретную во времени координатную синхронизацию, когда точное совпадение выходов имеет место только на некотором дискретном множестве моментов времени $\{t_q\}$, $q = 1, 2, \dots$. В этом случае индекс синхронизации $C[y_i(\cdot)]$ зависит от набора значений выходов⁵ процессов $y_i = h(x_i)$ в моменты t_q и может быть определен как бесконечная последовательность

$$C[y_i(\cdot)] = \{y_i(t_1), y_i(t_2), \dots\}.$$

Вариант дискретной координатной синхронизации встречается, если $C_q[y_i] = t_q$, где t_q — момент времени, в который некоторые координаты или выходы $y_i(t)$ приближаются к заданной точке либо пересекают заданную поверхность. Другой вариант — если значение t_q определено как время достижения q -го локального экстремума сигнала. Этот вариант является частным случаем экстремальной синхронизации (см. пример 2) и сводится к предыдущему, если учесть, что условием экстремума является равенство нулю производной по времени.

Разумеется, должны быть наложены дополнительные условия, обеспечивающие корректную определенность всех вводимых величин. Достаточно потребовать, чтобы каждая траектория пересекала сечение бесконечное число раз и среди моментов пересечений встречались сколь угодно большие $t \geq 0$. Интересно, что таким образом строится обобщенное определение фазы для неперiodического процесса, что позволяет рассматривать фазовую синхронизацию (пример 3) как вариант дискретной синхронизации.

Другие примеры. Приведенное определение позволяет за счет выбора индекса синхронизации и функций сравнения формализовать различные свойства процессов, которые интуитивно желательно отнести к синхронизации.

⁵ В частном случае может быть $y_i = x_i$.

Например, для определения координатной синхронизации колебательных процессов, протекающих синхронно, но имеющих разную амплитуду (размах) колебаний, можно ввести индекс синхронизации с нормирующим множителем:

$$C_t[x] = \frac{x(t)}{\max_{0 \leq s \leq t} |x(s)|}.$$

Если на один из двух процессов с периодом T наложен нерегулярный шум, то в качестве индекса синхронизации можно использовать скользящее среднее процесса: $C_t[x] = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds$.

Возможны разнообразные комбинации введенных определений. Например, в задачах синхронизации сетей электрических и механических систем типична ситуация, когда требуется асимптотическое совпадение угловых скоростей (частот вращения) роторов при дополнительном условии стремления разностей фаз вращения к постоянным значениям. Подобное целевое условие соответствует переходной устойчивости (transient stability) энергосистемы, иногда называемой устойчивостью по Виллемсу.

4.3. Роевые

При решении задач оптимизации и управления часто обращаются к аналогиям в поведении биологических и технических систем — подход, сформировавший науку *бионику*. Бионический подход привел к возникновению целых направлений в прикладной математике: эволюционное программирование, генетические алгоритмы и т.д. Нашли свое отражение в численных методах и попытке строить модели коллективного, сетевого поведения организмов: метод роя частиц (particle swarm technique), “муравьиные” (ant) алгоритмы оптимизации и т.п.

В задачах сетевого управления наиболее изученными являются способы создания стайного поведения (flocking). Вместо стаи (flock) употребляются также термины стадо (herd), рой (swarm), косяк рыб (school of fish). Удобная и потому общепринятая формулировка понятия “стая” была дана специалистом по компьютерной графике К. Рейнольдсом в 1987 г. [101] в виде трех правил. Эти правила были положены в основу первой компьютерной модели стайного поведения и впоследствии вызвали большой интерес. Выглядят они так:

- 1) сцепление (cohesion): не удаляться далеко от соседей;
- 2) разделение (separation): избегать столкновений с соседями;
- 3) выравнивание (alignment): приближаться по скорости к соседям.

Алгоритмы моделирования, основанные на этих правилах, позволили получить весьма реалистичное описание поведения стаи. В [17, 18, 22] предложены алгоритмы управления агентами, позволяющие создавать стайное поведение в условиях препятствий. Наиболее популярный подход к построению таких алгоритмов основан на введении так называемой *потенциальной функции*, штрафующей за нарушение правил 1)–3) и за приближение к препятствиям. Заметим, что потенциальные функции можно интерпретировать как целевые функции и строить алгоритмы на основе метода скоростного градиента [96].

5. Базовые результаты: теоремы Факса–Мюррея, Рена–Берда, Олфати-Сабера, Чена

Приведем несколько основных результатов в области сетевого управления, которые к настоящему времени уже стали классическими и составляют фундамент теоретических основ данного направления.

Пожалуй, наиболее известными публикациями по управлению сетевыми системами стали статьи, ведущим соавтором которых является ученый из Калифорнийского технологического института Ричард Мюррей [2–4]. Число цитирований статьи [3], как и статьи А.С. Морса с соавторами на близкую тему [102], превысило 3000, что является рекордом для работ по автоматике и системам управления за последние 20 лет. Число цитирований статьи [2], как и последующего обзора [4] превышает 1000, что также подтверждает вывод о важности и актуальности тематики сетевого управления.

5.1. Устойчивость и синхронизация в линейных сетях: теорема Факса–Мюррея

В [2] рассматриваются задачи стабилизации формации из идентичных агентов (экипажей) относительно заданного опорного движения. Предполагается, что динамика отклонений i -го агента от опорного движения описывается уравнениями

$$(15) \quad \dot{x}_i = A_0 x_i + B_0 u_i, \quad y_i = C_0 x_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$, $y_i \in \mathbb{R}^l$ — соответственно векторы состояния (отклонения от опорного движения), входа (управления) и выхода (измерения) для i -го агента, A_0, B_0, C_0 — матрицы соответствующих размеров. Управление, подаваемое на вход i -го агента, вырабатывается регулятором, на вход которого поступает взвешенная сумма отклонений состояния агента от состояний его соседей:

$$(16) \quad z_i = -|N_i|^{-1} \sum_{j \in N_i} C_0 (x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

где N_i — множество соседей i -го агента, $|N_i|$ — число элементов N_i . Каждый регулятор также считается линейной динамической системой и описывается уравнениями состояния

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{v}_i &= A_R v_i + B_{1,R} y_i + B_{2,R} z_i, \\ u_i &= C_R v_i + D_{1,R} y_i + D_{2,R} z_i, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N,$$

где $v_i \in \mathbb{R}^s$.

Сопоставляя агентам N вершин графа и соединяя i -ю вершину с каждым из элементов N_i , получаем информационный граф сетевой системы (вообще говоря, ориентированный). Для изучения свойств системы (15), (16) удобно ввести матрицу Лапласа этого графа $L = (L_{ij})_{i,j=1}^N$, где

$$(18) \quad L_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ -|N_i|^{-1}, & \text{при } j \in N_i, \\ 0 & \text{при } j \notin \{i\} \cup N_i. \end{cases}$$

В следующей теореме формулируются условия устойчивости и синхронизации в описанной сетевой (мультиагентной) системе.

Теорема 1 (Факс–Мюррей [2]). Система (15), (16) асимптотически устойчива ($x_j(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех j) тогда и только тогда, когда одновременно асимптотически устойчивы все системы вида

$$(19) \quad \dot{x}_i = A_0 x_i + B_0 u_i, \quad y_i = C_0 x_i, \quad z_i = \lambda_i C_0 x_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

*замкнутые регулятором (17), где λ_i — собственные числа матрицы L . Если указанное условие выполнено для всех **ненулевых** λ_i и граф сильно связный⁶, то асимптотически устойчиво консенсусное множество $\{(x_1, \dots, x_N) : x_1 = \dots = x_N\}$, иными словами, имеет место координатная синхронизация $|x_i(t) - x_j(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.*

Теорема Факса–Мюррея показывает, что стабилизируемость целевого множества сложной системы из N объектов, вектор состояния которой имеет размерность $(n + s)N$, определяется устойчивостью N систем меньшего порядка $(n + s)$. Разрешимость задачи стабилизации существенно зависит от спектра матрицы Лапласа. Заметим, что собственные числа λ_i могут быть комплексными, если L — несимметричная матрица, т.е. граф информационных связей ориентированный.

Следует отметить, что второе утверждение приводимой теоремы 1 о достижении синхронизации, на самом деле, не было явно сформулировано в [2] в виде теоремы, хотя и использовалось в примерах. Данная теорема впоследствии многократно переоткрывалась и обобщалась, см., например, [24]. Так, условие сильной связности во второй части может быть заменено существованием ориентированного остовного дерева, подобно рассматриваемым ниже консенсусным алгоритмам, а вместо (16) можно рассмотреть выходные переменные более общего вида

$$(20) \quad z_i = - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} C_0 (x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\alpha_{ij} \geq 0$. Соответственно, информационный граф определяется матрицей смежности (α_{ij}) , а обычную матрицу Лапласа следует заменить ее эквивалентом для нагруженных графов, который будет введен ниже при анализе алгоритмов консенсуса. Отметим, что теорема Факса–Мюррея дает возможность решать как задачи анализа, так и задачи синтеза. Так, при заданном информационном графе она позволяет синтезировать регулятор (17), обеспечивающий синхронизацию состояний агентов (близкая задача рассматривается в [24]). Используя “принцип внутренней модели” и его нелинейные обобщения, задачу синтеза часто удается решить для неоднородных линейных [103] и нелинейных [104] агентов. Анализ доказательства в работе Факса и Мюррея показывает, что в действительности их теорема справедлива для очень широкого класса многоагентных систем и может быть распространена на системы

⁶ Ориентированный граф называется *сильно связным*, если для любой пары вершин i, j существует направленный путь из вершины i в вершину j .

с дискретным временем, системы с периодическими коэффициентами, системы с запаздыванием и другие бесконечномерные модели. Соответствующие частные случаи, относящиеся к агентам и регуляторам специального вида, нередко публикуются без каких-либо ссылок на исходный общий результат.

Нельзя не отметить, что частный случай теоремы 1, относящийся к скалярным агентам, был существенно раньше получен Б.Т. Поляком и Я.З. Цыпкиным [105] под названием критерия устойчивости *однотипных систем*. В [105] изучалась система, которая может быть рассмотрена как сеть агентов вида

$$f\left(\frac{d}{dt}\right)y_i(t) = u_i(t), \quad u_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}y_j(t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $f(p)$ – полином либо рациональная передаточная функция, а матрица $A = (a_{ij})$ фиксирована (отметим, что она не обязательно должна иметь лапласовскую структуру). Устойчивость данной системы равносильна тому, что полиномы $f(p) - \lambda_i$ гурвицевы при всех собственных числах матрицы A . Переходя к пространству состояний, это утверждение можно доказать по аналогии с теоремой Факса–Мюррея [2]. В исходной работе [105], однако, было предложено элегантное доказательство в частотной области. Далеким развитием идей Поляка и Цыпкина являются частотные критерии устойчивости многомерных сетевых систем, полученные в последующих работах Ш. Хара, см., в частности, [106].

5.2. Мастер-функция устойчивости и сети нелинейных агентов

К кругу идей, на который опирается сформулированный выше результат Факса и Мюррея, примыкает также понятие *мастер-функции устойчивости* (master stability function), введенное американскими физиками Л. Пекорой и Т. Кэрроллом в 1998 г. [107]. Это понятие позволяет исследовать локальную устойчивость целевого многообразия для более общих, нелинейных моделей динамики однородных сетей

$$(21) \quad \dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^N l_{ij}\varphi(x_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

в которых собственная динамика агентов и связи между ними однородны. Обычно предполагается, что матрица L имеет лапласовскую структуру в том смысле, что $\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0$ и $l_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$. Если в точке x_0 выполнены соотношения $f(x_0) = 0$, $\varphi(x_0) = 0$, то очевидно, что $\mathbf{x}_0 = (x_0, \dots, x_0)$ – равновесие системы (21). Построим якобианы функций $f(x)$, $\varphi(x)$ в точке равновесия: $Df(x_0)$, $D\varphi(x_0)$ и рассмотрим дифференциальную систему (master stability equation)

$$(22) \quad \dot{z}(t) = [Df(x_0) + \lambda D\varphi(x_0)]z(t).$$

Если система (22) экспоненциально устойчива (матрица $D[f(x_0) + \lambda\varphi(x_0)]$ гурвицева) для всех собственных чисел лапласовской матрицы L , то равновесие \mathbf{x}_0 асимптотически устойчиво. Если же указанное условие выполнено

для **ненулевых** собственных чисел $\lambda \neq 0$ и матрица L отвечает сильно связанному графу, то вблизи положения равновесия траектории асимптотически синхронизируются $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0$.

Для линейных систем сформулированный результат практически совпадает с первой частью теоремы Факса–Мюррея. Однако в физике и других естественных науках нашел широкое применение следующий более общий результат, также сформулированный (без доказательства) в работе Пекоры и Кэрролла 1998 г. Пусть $s(t)$ — решение системы $\dot{s} = f(s)$, определяющее синхронный режим $\bar{X}(t) = (s(t), \dots, s(t))$ (очевидно, в силу свойства $\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0$ это решение системы (21)). Вычислим старший показатель Ляпунова $\alpha(\lambda)$ для системы, линеаризованной вдоль $s(t)$,

$$(23) \quad \dot{z}(t) = [Df(s(t)) + \lambda D\varphi(s(t))]z(t)$$

как функцию комплексного числа λ и изобразим на комплексной плоскости множество S точек λ , для которых $\alpha(\lambda) < 0$. Синхронный режим $\bar{X}(t)$ асимптотически устойчив, если все точки спектра лапласиана принадлежат S , т.е. $\lambda_i \in S$, $i = 1, \dots, N$. Если указанное условие выполнено лишь для ненулевых собственных чисел и информационный граф сильно связан, то вблизи решения $X(t)$ имеет место асимптотическая синхронизация. Таким образом, проверка асимптотической устойчивости (синхронизации) системы порядка $N \times n$ сводится к проверке асимптотической устойчивости N (соответственно, $N - 1$) систем порядка n .

5.3. Критерии консенсуса: агенты в форме интегратора

Статья [3] также оказала значительное влияние на развитие сетевого управления. В ней впервые в журнальных работах по автоматическому управлению систематически используется понятие консенсуса⁷ и излагаются основные понятия и результаты алгебраической теории графов, составившие фундамент современной теории управления сетями. Рассмотрен также случай сетей с переменной топологией (переключающихся графов связей), важный для управления в динамических условиях, когда связь между агентами может нарушаться или восстанавливаться в ходе функционирования системы. В [3] исследовалась сеть агентов в форме интегратора

$$(24) \quad \dot{x}_i = u_i, \quad y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Задача ставится как достижение при помощи консенсусного алгоритма (*протокола*)

$$(25) \quad u_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)$$

⁷ Весьма общий критерий сходимости консенсусных протоколов с дискретным временем был опубликован существенно раньше в [108], однако в этой работе не использовались понятие “консенсус” и методы теории графов.

цели управления

$$(26) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_*, \quad i = 1, \dots, N$$

для некоторого x_* . Здесь матрица (a_{ij}) определяет нагруженный (weighted) граф: агент i соединен с агентом j в том и только том случае, когда $a_{ij} > 0$. При этом коэффициент усиления a_{ij} трактуется как вес ребра (i, j) .

Если помимо (26) дополнительно выполнено соотношение

$$(27) \quad x_* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0),$$

то говорят, что достигается *средний консенсус* (average consensus).

Напомним, что граф называется *сбалансированным* (balanced), если входящие и исходящие степени вершин совпадают для всех вершин графа, т.е. если

$$\sum_i a_{ij} = \sum_i a_{ji} \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Теорема 2 (Олфати-Сабер – Мюррей, [3]). Пусть топология сети с ориентированным графом связей G фиксирована, а граф G сильно связан. Консенсусный протокол (25) обеспечивает достижение среднего консенсуса тогда и только тогда, когда граф G сбалансирован.

Если граф не сбалансирован, то консенсусное значение можно вычислить следующим образом. Введем “нагруженную” матрицу Лапласа L по аналогии с (18):

$$(28) \quad l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij} \quad \text{при } i \neq j.$$

Легко видеть, что система (24), (25) может быть переписана в виде

$$(29) \quad \dot{x} = -Lx.$$

При наличии сильной связности матрица L^\top имеет единственный собственный вектор, отвечающий нулевому собственному числу [3]: $L^\top d = 0$. Используя теорию неотрицательных матриц, можно показать [3], что данный вектор неотрицателен. Поскольку он отличен от нуля, то $\sum_{i=1}^N d_i > 0$. В силу (29) получаем $d^\top \dot{x} = 0$, откуда немедленно вытекает формула для консенсусного значения.

Следствие 1. Для графа G , удовлетворяющего теореме 2, пусть d – собственный вектор транспонированной матрицы Лапласа L^\top , соответствующий нулевому собственному числу. Тогда $d_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N d_i > 0$ и значение x_* имеет вид

$$(30) \quad x_* = \frac{\sum_{i=1}^N d_i x_i(0)}{\sum_{i=1}^N d_i}.$$

Таким образом, и в этом случае “консенсусное” значение x_* принадлежит выпуклой оболочке множества начальных условий.

Для неориентированных графов достаточно требовать связности графа, означающей, что $\text{rank } L = N - 1$. В этом случае функция

$$(31) \quad \Phi_G(x) = x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j)^2$$

неотрицательно определена. Выбирая функцию

$$(32) \quad V(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$$

в качестве функции Ляпунова для системы (24), (25), получим $\dot{V} = -\Phi_G(x) \leq 0$, откуда и следует достижение консенсуса (26).

В случае сбалансированного графа G вектор $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$ является собственным вектором матрицы L , соответствующим нулевому собственному числу, т.е. $\mathbf{1}^T L = 0$ и из (30) следует достижение среднего консенсуса.

Заметим, что функцию $\Phi_G(x)$ можно рассматривать как целевую функцию при построении протоколов управления. Действительно, для сети агентов-интеграторов в случае неориентированного графа связей можно записать консенсусный протокол (25) в виде

$$(33) \quad u = -\nabla \Phi_G(x).$$

Таким образом, поиск консенсуса в системе (24), (25) происходит в соответствии с градиентным алгоритмом минимизации функции $\Phi_G(x)$.

Интересно, что (33) можно интерпретировать и как алгоритм скоростного градиента для объектов управления вида (24) с целевой функцией $Q(x)$ вида (31). Это становится очевидным, если записать $\dot{Q}(x) = \nabla \Phi_G(x)^T u$ и вычислить градиент этого выражения по u . Обобщая это рассуждение, можно распространить выводы работы [3] на сети, динамика агентов которых нелинейна и описывается уравнениями

$$(34) \quad \dot{x}_i = f(x_i) + g(x_i)u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Консенсусный протокол на основе алгоритма скоростного градиента для сети (34) имеет вид

$$(35) \quad u = -\gamma g^T \nabla \Phi_G(x).$$

Результаты о сходимости таких протоколов для *пассивных* нелинейных агентов могут быть найдены в [109, 110]. В [29–34] рассмотрены случаи более общих пассивизируемых агентов. Ряд результатов о сходимости протоколов (35) может быть получен для *инкрементально* диссипативных агентов [111].

Следует отметить, что результаты, близкие к результатам [3], были впервые получены в [102] для систем с дискретным временем и переключающейся

топологией, в которых граф $G = G(t)$ в каждый момент времени выбирается из заданного конечного множества сильно связанных графов.

Вычисляя скорость изменения функции Ляпунова (32), легко показать, что функция (32) убывает экспоненциально с показателем экспоненты

$$(36) \quad \kappa = \inf_{G(t)} \operatorname{Re} \lambda_2(G(t)).$$

В частности, для неориентированных графов скорость синхронизации характеризуется *алгебраической связностью* графа связей.

Упомянутые выше результаты распространены в [3] также на протоколы с запаздыванием

$$(37) \quad u_i(t) = -K \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i(t - \tau_{ij}) - x_j(t - \tau_{ij})).$$

Для случая одинаковых задержек ($\tau_{ij} \equiv \tau$) показано, что если граф связей G фиксированный, неориентированный и связный, то протокол (37) обеспечивает консенсус тогда и только тогда, когда либо $0 < \tau < \pi \lambda_n / 2$, где $\lambda_n = \max \lambda_k(L)$, либо годограф частотной характеристики (Nyquist plot) агента $r(s) = \exp(-\tau s)/s$ не охватывает точку $-1/\lambda_k$ для любого $k = 2, \dots, n$, где λ_k — собственные числа матрицы Лапласа L . Кроме того, при $\tau = \pi \lambda_n / 2$ в сети существует глобально асимптотически устойчивое периодическое решение с частотой $\omega = \lambda_n$. В ряде работ (см. [112–114] и библиографию в указанных работах) было получено обобщение данных результатов на случай переменного графа и неоднородных переменных запаздываний.

Пионерские результаты [102] существенно развиты и в наиболее изящном и законченном виде сформулированы в статье У. Рена и Р. Бэрда [115]. Число цитирований этой статьи, также ставшей классической, приближается к 2000. В [115] рассматривается достижение консенсуса в системе агентов, описываемых интеграторами:

$$(38) \quad \dot{x}_i = u_i, \quad y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Граф связей G считается ориентированным и может меняться во времени: $G = G(t)$, причем $G(t)$ выбирается из конечного множества графов. Для согласования состояний агентов используется консенсусный протокол

$$(39) \quad u_i = -K \sum_{j \in N_i(t)} (x_i - x_j),$$

где $N_i(t)$ — множество соседей i -го агента в момент времени t и $K > 0$. Целью управления является достижение асимптотической координатной синхронизации

$$(40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

которая в [115] называется консенсусом. В действительности, можно показать, что консенсус в смысле более сильного условия (26) при выполнении

указанных ниже условий также достигается, причем робастен к наличию в системе коммуникационных запаздываний [116].

Для формулировки результата необходимо ввести понятие *остовного дерева* графа (подробнее см. Приложение). Подграф D орграфа G называется входящим остовным деревом, если существует такая вершина i_0 (корень), что для любой другой вершины j существует направленный путь из i_0 в j , состоящий из дуг D . Напомним также, что объединением графов G_1, \dots, G_k , имеющих одно и то же множество вершин, называется граф G с тем же множеством вершин и множеством дуг, равным объединению множеств дуг графов G_1, \dots, G_k .

В [115] предполагается, что граф является кусочно постоянным и переключается в дискретные моменты времени t_i , отделенные друг от друга положительной задержкой (dwell time) $\tau_i = t_{i+1} - t_i \geq \tau > 0$. При этом предположении имеет место следующий критерий консенсуса⁸.

Теорема 3 (Рен–Берд). Консенсусный протокол (39) обеспечивает достижение асимптотического консенсуса, если существует бесконечная последовательность непересекающихся равномерно ограниченных по длине временных промежутков $\Sigma_j = [t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$ таких, что объединение графов на каждом промежутке Σ_j имеет входящее остовное дерево.

Можно показать [117, 118], что в случае неориентированных и сбалансированных графов условие Рена–Берда можно существенно ослабить, потребовав лишь, чтобы бесконечное объединение графов G_k начиная с любого момента имело остовное дерево. Если же объединение графов G_1, \dots, G_k после некоторого конечного момента времени не имеет входящего остовного дерева, то консенсус недостижим.

Таким образом, ключевым условием достижимости консенсуса и синхронизации выступает существование остовного дерева графа. Как показано в работе [119] также одной из основополагающих (более тысячи цитирований), нарушение этого условия означает, что в графе имеются два непустых “изолированных” подмножества вершин, в которые не входит ни одно ребро извне, и поэтому соответствующие две группы агентов полностью независимы друг от друга и не могут синхронизоваться.

Смысл этого условия становится также понятен из леммы, доказанной в [115] и утверждающей, что существование остовного дерева необходимо и достаточно для того, чтобы кратность нулевого собственного числа матрицы Лапласа графа равнялась единице. Эта лемма имеет принципиальное значение: она связывает свойства сети со свойствами ее графа связей. Если принять лемму, то доказательство теоремы для случая фиксированной топологии становится очевидным. Действительно, если ввести вектор состояния сети $X = [x_1, \dots, x_N]^T$, то при фиксированной топологии графа динамику

⁸ В [115] предполагается также выполненным дополнительное условие: задержки τ_i принимают значение в бесконечном множестве Υ , которое получается из *конечного* множества $\Theta \subset (0, \infty)$ путем образования всевозможных конечных сумм $\theta_1 + \dots + \theta_k$, где $k \geq 1$ и $\theta_i \in \Theta$. В последующей монографии [27] показано (теорема 2.33), что последнее условие можно снять. Кроме того, протокол (39) можно заменить более общим протоколом (25), где веса $a_{ij}(t)$ равномерно ограничены.

сети можно описать векторным дифференциальным уравнением

$$(41) \quad \dot{X} = -K LX.$$

Если кратность нулевого собственного числа матрицы L равна единице, то собственное подпространство матрицы L , соответствующее нулевому собственному числу, одномерно. Но все решения системы (41) сходятся именно к этому подпространству, поскольку все остальные собственные числа матрицы $(-KL)$ имеют отрицательные вещественные части (см. Приложение). Поскольку собственный вектор, соответствующий нулевому собственному числу L , имеет вид $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^\top$, предельные значения состояний агентов x_i^* будут равны: $x_i^* = x_j^*$, т.е. консенсус достигается. Можно показать, кроме того, что если граф сбалансирован, то общее предельное значение $x^* = x_i^*$ равно среднему арифметическому начальных условий (средний консенсус).

Важно отметить, что ключевая лемма, доказанная в [115] и связывающая одномерность нуль-пространства матрицы Лапласа с существованием остовного дерева графа, является частным случаем гораздо более общего утверждения, установленного российскими математиками Р.П. Агаевым и П.Ю. Чеботаревым еще в 2000 г. [120]. В более поздней формулировке [120, 121] теорема Агаева–Чеботарева гласит, что размерность нуль-пространства матрицы Лапласа орграфа равна лесной размерности графа (лесной размерностью графа называется минимальное число деревьев в остовном лесу графа, см. Приложение). Теорема Агаева–Чеботарева дает возможность установить условия так называемой кластерной синхронизации, при которой размерность предельного подпространства динамической сети больше единицы [122]. Примером задачи, где граф не имеет остовного дерева, является задача *удерживающего управления* (containment control) [14], где целью управления является удержание группы агентов в выпуклой оболочке нескольких полностью не зависящих друг от друга лидеров. Лидеры являются корнями деревьев, образующими остовный лес.

5.4. Критерии консенсуса и синхронизации второго порядка

Получение условий достижения синхронизации и консенсуса для сетей многомерных агентов представляет значительные трудности. Несмотря на то, что общая теорема Факса–Мюррея формально дает условия синхронизации для агентов произвольного порядка, аналитическая проверка одновременной устойчивости нескольких систем зачастую нетривиальна. Наиболее успешным оказалось распространение результатов, полученных для сетей агентов первого порядка, на сети агентов, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка. Такие модели соответствуют простейшим механическим и физическим системам, имеющим инерционность. Наиболее изучен случай агентов, динамика которых задается моделью двойного интегратора, соответствующего движению материальной точки.

Рассмотрим сеть, состоящую из агентов

$$(42) \quad \dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для согласования состояний агентов используется пропорционально-дифференциальный консенсусный протокол

$$(43) \quad u_i = -\alpha \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j) - \beta \sum_{j \in N_i} (v_i - v_j),$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Используя определение матрицы Лапласа $L = L_{ij}$, протокол (43) можно переписать в виде

$$(44) \quad u_i = -\alpha \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j - \beta \sum_{j=1}^N L_{ij} v_j.$$

В [27, 123] доказано, что для достижения консенсуса в сети (42), (44) необходимо и достаточно, чтобы граф связей имел остовное дерево, а коэффициенты протокола (44) удовлетворяли условию

$$(45) \quad \frac{\beta^2}{\alpha} > \max_{2 \leq i \leq N} \frac{\text{Im}(\lambda_i)^2}{\text{Re}(\lambda_i)[\text{Re}(\lambda_i)^2 + \text{Im}(\lambda_i)^2]},$$

где λ_i — собственные числа матрицы Лапласа графа.

Кроме того, если консенсус достигается, то

$$(46) \quad \left\| v_i(t) - \sum_{j=1}^N \xi_j v_j(0) \right\| \rightarrow 0,$$

$$\left\| x_i(t) - \sum_{j=1}^N \xi_j x_j(0) - \sum_{j=1}^N \xi_j v_j(0) t \right\| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\xi = \text{col} \{ \xi_1, \dots, \xi_N \}$ — единственный неотрицательный левый собственный вектор матрицы L , соответствующий собственному числу 0 и удовлетворяющий равенству $\xi^\top \mathbf{1} = 1$.

Заметим, что (45) выполнено для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, если собственные числа L вещественны, например если граф связей неориентированный. Последний результат остается справедливым для ряда алгоритмов с переменной топологией [27].

Критерий консенсуса (45) распространен в [123] на сети (42) с запаздывающими связями, описываемыми протоколом

$$(47) \quad u_i = -\alpha \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j(t - \tau) - \beta \sum_{j=1}^N L_{ij} v_j(t - \tau),$$

где $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Пусть граф связей сети обладает остовным деревом и выполнено (45). Консенсус в сети (42), (44) достигается тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$(48) \quad \tau < \min_{2 \leq i \leq N} \frac{\theta_{i1}}{\omega_{i1}},$$

где $0 \leq \theta_{i1} < 2\pi$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}\cos \theta_{i1} &= [\operatorname{Re}(\lambda_i)\alpha - \operatorname{Im}(\lambda_i)\omega_{i1}\beta]/\omega_{i1}^2, \\ \sin \theta_{i1} &= [\operatorname{Re}(\lambda_i)\omega_{i1}\beta + \operatorname{Im}(\lambda_i)\alpha]/\omega_{i1}^2, \\ \omega_{i1}^2 &= (\|\lambda_i\|^2\beta^2 + \sqrt{\|\lambda_i\|^4\beta^4 + 4\|\lambda_i\|^2\beta^2})/2,\end{aligned}$$

где λ_i — собственные числа L .

Влияние, аналогичное эффекту запаздывания, имеет дискретизация регуляторов. С точки зрения реализации, дискретные алгоритмы имеют преимущества: нужно хранить в памяти значения измеренного выхода не на всем интервале запаздывания, а только в предыдущий момент дискретизации. Кроме того, высвобождается время для вычислений между моментами дискретизации. В [124] исследуется случай, когда дискретизации подвергаются измерения скоростей, а измерения координат происходят без запаздывания. Протокол управления имеет вид

$$(49) \quad u_i(t) = -\alpha \sum_{j=1}^N L_{ij}x_j(t) - \beta \sum_{j=1}^N L_{ij}v_j(t_k),$$

где t_k — моменты дискретизации (sampling instants), $T = t_{k+1} - t_k$ — интервал (шаг) дискретизации (sampling interval). Протокол (49) соответствует замене скоростей в протоколе (44) конечными разностями $x(t) - x(t_k)$ при $0 < t - t_k \leq T$.

В [124] установлено, что если орграф связей сети содержит остовное дерево, то для достижения консенсуса необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$(50) \quad 0 < \beta/\alpha < 1, \quad f(\alpha, \beta, \lambda_i, T) > 0, \quad i = 2, \dots, N,$$

где

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta, \lambda_i, h) &= \frac{(\beta/\alpha)^2}{1 - \beta/\alpha} (\sin^2(d_iT) - \sinh^2(c_iT)) \times \\ &\times (\cosh((c_iT) - \cos(d_iT))^2 - 4 \sin^2(d_iT) \sinh^2(c_iT)), \\ c_i &= \sqrt{|\alpha|(|\lambda_i| - \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{Re}(\lambda_i))/2}; \\ d_i &= \sqrt{|\alpha|(|\lambda_i| + \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{Re}(\lambda_i))/2}.\end{aligned}$$

Легко увидеть, что соотношениям (50) можно удовлетворить, если выбрать параметры так, чтобы отношение β/α было близким к единице. Для случая матрицы Лапласа с вещественным спектром, в частности для неориентированных графов формулировка упрощается.

Следствие 2. Пусть матрица Лапласа графа связей имеет вещественный спектр. Тогда необходимым и достаточным условием достижения консенсуса является выполнение неравенств

$$(51) \quad 0 < \beta < \alpha, \quad \sqrt{\alpha\lambda_i T} \neq k\pi, \quad i = 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots$$

В частности, консенсус достигается, если

$$(52) \quad 0 < T < \pi\sqrt{\alpha\lambda_N}.$$

Таким образом, для сетей с вещественным спектром матрицы Лапласа консенсус достигается при достаточно малом шаге дискретизации T . Это, казалось бы естественное, свойство неверно, если матрица Лапласа имеет хотя бы одно комплексное собственное число, что также показано в [124].

Ряд других критериев консенсуса и синхронизации агентов второго порядка может быть найден в монографиях [14, 27], а также работах первого автора [125–129]. В статьях [125–129] рассматриваются также более общие критерии синхронизации в сетях агентов произвольного порядка при *нелинейных связях*, обобщающие на мультиагентные системы круговой и поповский критерии абсолютной устойчивости. Эти результаты могут быть обобщены и на сети нелинейных агентов, обладающих свойством инкрементальной диссипативности [111].

5.5. Игольчатое управление (*pinning control*)

С начала 2000 г. стали появляться работы по управлению сложными динамическими сетями в случае, когда часть (возможно, значительная) уравнений динамики сети не содержит управления. Такой тип задач управления получил название “игольчатого” (*pinning control*). Идея игольчатого управления пришла из биологии. Ярким примером является червь *C. elegans*, широко использующийся как модельный организм в исследованиях по генетике, нейрофизиологии, биологии развития, вычислительной биологии. Хотя его длина всего около 1 мм, червь имеет разветвленную нервную систему, содержащую около 300 нейронов и 5000 синаптических соединений. Для этого червя биологам удалось ответить на вопрос: сколькими нейронами нужно управлять, чтобы передать возбуждение любому нейрону организма. Оказалось, что для управления этой нейронной сетью нужно всего 49 нейронов — менее 17% от общего количества [133].

Другой пример относится к косякам рыб и роям пчел, мигрирующим в поисках корма. Оказывается, относительно небольшое число информированных особей (примерно 5 %) способны влиять на поведение остальных особей группы и их способность двигаться к намеченной цели [134]. С точки зрения теории управления эти 17 % нейронов и 5 % пчел могут рассматриваться как группа управляемых особей, через которых можно управлять всей сложной сетью. Очевидно, такая стратегия управления весьма эффективна и экономична. Но возникают естественные вопросы: сколько нужно управляемых узлов в сети и к каким узлам лучше всего прикладывать управляющее воздействие, чтобы добиваться достижения цели наиболее эффективно? Первая попытка дать ответ на эти вопросы была сделана еще в 1997 г. [130]. Впоследствии ряд результатов был получен в работах Г. Чена и его коллег [131, 132, 136–138]. Приведем здесь один из недавних результатов для неориентированных графов сети, следуя [138]. Для ориентированных графов результат имеется в [136].

Рассмотрим динамическую сеть, описываемую уравнениями

$$(53) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i) + c \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} H x_j + u_i, & i = 1, \dots, l, \\ \dot{x}_i &= f(x_i) + c \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} H x_j, & i = l + 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где l — число узлов, на которые воздействует управление. Предположим для простоты, что агенты управляются линейными регуляторами

$$(54) \quad u_k = -c\kappa_k H(x_k - s), \quad k = 1, \dots, l,$$

где $s = s(t)$ — агент-лидер с моделью $\dot{s} = f(s)$, $\kappa_k > 0$ — коэффициенты обратной связи. Обозначим $D = \text{diag}\{\kappa_1, \dots, \kappa_l, 0, \dots, 0\}$. Назовем функцию $\psi : R^n \times R \rightarrow R^n$ равномерно V -убывающей, где V — квадратная матрица, если существует число $\rho > 0$ такое, что для всех $y, z \in R^n$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$(55) \quad (z - y)^T V(\psi(z, t) - \psi(y, t)) \leq -\rho \|z - y\|^2.$$

Пусть существуют диагональная положительно определенная матрица U , симметричная положительно определенная матрица V и квадратная матрица T такие, что функция $f(x) + Tx$ равномерно V -убывающая, а матрица

$$(U \otimes V)[\rho(A + D) \otimes H + I \otimes T]$$

симметрична и неотрицательно определена. Тогда в системе (53), (54) достигается цель управления $x_i(t) - s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

6. Заключение

Перечисленные результаты показывают, что управление сетевыми системами уже превратилось в самостоятельную научную область, имеющую развитый математический аппарат и важные нетривиальные результаты. В данном обзоре были затронуты лишь основные результаты и задачи, определявшие развитие сетевой теории управления в последние годы. Принципиальное значение перечисленных результатов в том, что они позволяют сводить исследование сложных динамических сетей, состоящих из большого числа взаимодействующих агентов, к раздельному исследованию динамики отдельного агента сети и к исследованию спектральных свойств графа связей. В этом проявляется специфика задач сетевого управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albert R., Barabasi A.-L.* Statistical Mechanics of Complex Networks // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 47–97.
2. *Fax J.A., Murray R.M.* Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 9. P. 1465–1476.

3. *Olfati-Saber R., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
4. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems // *Proc. IEEE.* 2007. V. 95. No. 1. P. 215–233.
5. *IEEE Control Systems Magazine.* Special Section “Complex Networked Control Systems”, Aug. 2007.
6. *IEEE Transactions on Automatic Control.* “Special Issue on Networked Control Systems”, Sept., 2004.
7. *Proceedings of the IEEE,* January 2007. Special Issue on Networked Control Systems Technology.
8. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2014. V. 267. Special Issue Evolving Dynam. Networks. Ed. I. Belykh, M. di Bernardo, J. Kurths and M. Porfiri
9. *IFAC Workshops Distributed Estim. Control Networked Syst. NecSys’09,* 24–26 Sept., 2009. Venice, Italy; *NecSys’10,* 13–14 Sept., 2010. Grenoble, France; *NecSys’11,* 14–15 Sept., 2012. Santa Barbara, California; *NecSys’13,* 25–26 Sept., 2013. Koblenz, Germany; *NecSys’15,* 10–11 Sept., 2015. Philadelphia, USA.
10. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
11. *Андривеский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.С.* Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // *Авт.* 2010. № 4. С. 34–99.
Andrievsky B.R., Matveev A.S., Fradkov A.L. Control and Estimation under Information Constraints: Toward a Unified Theory of Control, Computation and Communications // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 4. P. 572–633.
12. *Hespanha J.P., Naghshtabrizi P., Xu Y.* A Survey of Recent Results in Networked Control Systems // *Proc. IEEE.* 2007. V. 95. No. 1. P. 138–162.
13. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Estimation and Control over Communication Networks. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009.
14. *Ren W., Cao W.* Distributed Coordination of Multi-Agent Networks. London: Springer-Verlag, 2011.
15. *Sarlette A., Sepulchre R., Leonard N.* Autonomous Rigid Body Attitude Synchronization // *Automatica.* 2009. V. 45. No. 2. P. 572–577.
16. *Egerstedt M., Hu X., Stotsky A.* Control of Mobile Platforms Using a Virtual Vehicle Approach // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2001. V. 46. No. 11. P. 1777–1782.
17. *Olfati-Saber R.* Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2006. V. 51. No. 3. P. 401–420.
18. *Tanner H.G., Jadbabaie A., Pappas G.J.* Flocking in Fixed and Switching Networks // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2007. V. 52. No. 5. P. 863–868.
19. *Li W.* Stability Analysis of Swarms with General Topology // *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B.* 2008. V. 38. No. 4. P. 1084–1097.
20. *Lin J., Morse A.S., Anderson B.D.O.* The Multi-Agent Rendezvous Problem (in 2 parts) // *SIAM J. Control Optim.* 2007. V. 46. No. 6. P. 2096–2147.
21. *Cortes J., Martinez S., Bullo F.* Robust Rendezvous for Mobile Autonomous Agents via Proximity Graphs in Arbitrary Dimensions // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2006. V. 51. No. 8. P. 1289–1298.
22. *Martinez S., Bullo F., Cortes J., Frazzoli E.* On Synchronous Robotic Networks (in 2 parts) // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2007. V. 52. No. 12. P. 2199–2226.

23. *Ren W.* Formation Keeping and Attitude Alignment for Multiple Spacecraft Through Local Interactions // *J. Guid. Control Dynam.* 2007. V. 30. No. 2. P. 633–638.
24. *Li Z., Duan Z., Chen G., Huang L.* Consensus of Multiagent Systems and Synchronization of Complex Networks: A Unified Viewpoint // *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 2010. V. 57. No. 1. P. 213–224.
25. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003.
26. *Blekhman I.I., Fradkov A.L.* On General Definitions of Synchronization. In: *Selected Topics in Vibrational Mechanics.* Ed. I.I. Blekhman. Singapore: World Scientific. 2004. P. 179–188.
27. *Ren W., Beard R.* Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.
28. *Агаев П.П., Чеботарев П.Ю.* Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик // *Управление большими системами.* 2010. Вып. 30.1. С. 470–505.
29. *Джунусов И.А., Фрадков А.Л.* Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье // *АиТ.* 2009. № 7. С. 111–126.
Dzhunusov, I.A., Fradkov, A.L., Synchronization in Networks of Linear Agents with Output Feedbacks // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 8. P. 1615–1626.
30. *Fradkov A.L., Junussov I., Ortega R.* Decentralized Adaptive Synchronization in Nonlinear Dynamical Networks with Nonidentical Nodes // *IEEE Multiconf. Syst. Control (MSC 2009).* St. Petersburg, Russia. 2009. P. 531–536.
31. *Fradkov A.L., Junussov I.* Output Feedback Synchronization for Networks of Linear Agents // *Eur. Nonlinear Dynam. Conf. (ENOC 2011), Rome, Italy.* 2011.
32. *Fradkov A.L., Junussov I.A.* Synchronization of Networks of Linear Systems by Static Output Feedback // *IEEE Conf. Decision Control (CDC 2011).* Orlando, USA. 2011. P. 8188–8192.
33. *Fradkov A.L., Grigoriev G.K., Selivanov A.A.* Decentralized Adaptive Controller for Synchronization of Dynamical Networks with Delays and Bounded Disturbances // *IEEE Conf. Decision Control (CDC 2011).* Orlando, USA. 2011. P. 1110–1115.
34. *Selivanov A.A., Fradkov A.L., Fridman E.* Adaptive Synchronization of Networks with Delays under Incomplete Control and Incomplete Measurements // *18 IFAC World Congr. Autom. Control.* Milan, Italy. 2011. P. 1249–1254.
35. *Moyné J.R., Tilbury D.M.* The Emergence of Industrial Control Networks for Manufacturing Control, Diagnostics, and Safety Data // *Proc. IEEE.* 2007. V. 95. No. 1. P. 29–47.
36. *Coe N.M., Dicken P., Hess M.* Global Production Networks: Realizing the Potential // *J. Econom. Geograph.* 2008. V. 8. No. 3. P. 271–295.
37. *Jiao J.X., You X., Kumar A.* An Agent-Based Framework for Collaborative Negotiation in the Global Manufacturing Supply Chain Network // *Robot. Comput. Integrat. Manufactur.* 2006. V. 22. No. 3. P. 239–255.
38. *Garlaschelli D., Loffredo M.* Structure and Evolution of the World Trade Network // *Phys. A.* 2006. V. 355. No. 1. P. 138–144.
39. *Garlaschelli D., Loffredo M.* Effects of Network Topology on Wealth Distributions // *J. Phys. A.* 2004. V. 41. No. 22. P. 224018.
40. *Easley D., Kleinberg J.* Networks, Crowds and Markets. Reasoning about a Highly Connected World. Cambridge Univ. Press, 2010.

41. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton Univ. Press, 2010.
42. *Каляев И.А.* Принципы организации децентрализованных систем управления коллективов микророботов // Мехатроника. 2000. № 6.
43. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
44. *Bullo F., Cortes J., Martinez S.* Distributed Control of Robotic Networks: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms. Princeton Univ. Press, 2009.
45. *Lewis F.L., Zhang H., Hengster-Movric K., Das A.* Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal Design and Adaptive Control, Springer-Verlag, 2014.
46. *Abdessameud A., Tayebi A.* Motion Coordination for VTOL Unmanned Aerial Vehicles. Springer-Verlag, 2013.
47. *D'Andrea R.* Acrobatic Flight (plenary lecture) // IEEE Conf. Decision Control (CDC 2013). Florence, Italy. 2013.
48. *Д'Андреа Р.* Восхитительный атлетизм квадрокоптеров (The Astounding Athletic Power of Quadcopters). https://www.ted.com/talks/raffaello_d_andrea_the_astounding_athletic_power_of_quadcopters
49. *Augugliaro F., Schoellig A., D'Andrea R.* Dance of the Flying Machines // IEEE Robot. Autom. Mag. 2013. V. 20. No. 4. P. 96–104.
50. *Ной М., Матвеев А., Савкин А.В.* Algorithms for Collision-Free Navigation of Mobile Robots in Complex Cluttered Environments: A Survey // Robotica. 2015. V. 33. No. 3. P. 463–497.
51. *Hill D.J., Chen G.* Power Systems as Dynamic Networks // IEEE Int. Symp. Circuits Syst. Kos, Greece. 2006. P. 722–725.
52. *Doerfler F., Chertkov M., Bullo F.* Synchronization in Complex Oscillator Networks and Smart Grids // PNAS. 2013. V. 110. No. 6. P. 2005–2010.
53. *Butler F.* A Call to Order a Regulatory Perspective on the Smart Grid // IEEE Power & Energy Mag. 2009. No. 2. P. 16–93.
54. *Farhangi H.* The Path of the Smart Grid // IEEE Power & Energy Mag. 2010. No. 1. P. 18–28.
55. *Jackson J.* Improving Energy and Smart Grid Program Analysis with Agent-Based End-Use Forecasting Models // Energy Policy. 2010. V. 38. P. 3771–3780.
56. *Liserre M., Sauter T., Hung Y.J.* Future Energy Systems: Integrating Renewable Energy Sources into the Smart Power Grid Through Industrial Electronics // IEEE Ind. Electron. Mag. 2010. V. 4. No. 1. P. 18–37.
57. *Дорофеев В.В., Макаров А.А.* Активно-адаптивная сеть – новое качество ЕЭС России // Энергоэксперт. 2009. № 4. С. 28–34.
58. *Пчелкина И.В., Фрадков А.Л.* Моделирование процесса управления синхронизацией многомашиной энергосистемы // Информатика и системы управления. 2012. № 4. С. 18–26.
59. *Фрадков А.Л., Фуртат И.Б.* Робастное управление сетью электрических генераторов // АИТ. 2013. № 11. С. 100–113.
Fradkov A.L., Furtat I.B. Robust Control for a Network of Electric Power Generators // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 11. P. 1851–1862.
60. *Фуртат И.Б.* Управление электроэнергетической сетью с учетом ее топологии // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 4. С. 33–38.

61. *Furtat I.B., Fradkov A.L.* Robust Control of Multi-Machine Power Systems with Compensation of Disturbances // Int. J. Elect. Power & Energy Syst. 2015. V. 73. P. 584–590.
62. *Клейнрок Л.* Коммуникационные сети: Стохастические потоки и задержки сообщений. М.: Наука, 1970.
63. *Baran P.* On Distributed Communication Networks // IEEE Trans. Commun. Syst. 1964. V. 12. No. 1. P. 1–9.
64. *Lindsey W.C., Ghazvinian F., Hagmann W.G., et al.* Network Synchronization // Proc. IEEE. 1985. V. 73. No. 10. P. 1445–1467.
65. *Schenato L., Fiorentin F.* Average TimeSynch: A Consensus-Based Protocol for Clock Synchronization in Wireless Sensor Networks // Automatica. 2011. V. 47. No. 9. P. 1878–1886.
66. *Carli R., Zampieri S.* Network Clock Synchronization Based on the Second-Order Linear Consensus Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 2. P. 409–422.
67. *Shivaratri N.G., Krueger P., Singhal M.* Load Distributing for Locally Distributed Systems // Computer. 1992. V. 25 No. 12. P. 33–44.
68. *Амелина Н.О., Фрадков А.Л.* Приближенный консенсус в стохастической динамической сети с неполной информацией и задержками в измерениях // АИТ. 2012. № 11. С. 6–29.
Amelina N.O., Fradkov A.L. Approximate Consensus in the Dynamic Stochastic Network with Incomplete Information and Measurement Delays // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1765–1783.
69. *Amelina N., Fradkov A., Jiang Yu., Vergados D.J.* Approximate Consensus in Stochastic Networks with Application to Load Balancing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. No. 4. P. 1739–1752.
70. *Williams R.J., Martinez N.D.* Simple Rules Yield Complex Food Webs // Nature. 2000. V. 404. No. 9. P. 180–183.
71. *Pchelkina I.V., Fradkov A.L.* Control of Oscillatory Behavior of Multispecies Populations // Ecologic. Model. 2012. V. 227. P. 1–6.
72. *Zeeman E.C.* Dynamics of the Evolution of Animal Conflicts // J. Theor. Biol. 1981. V. 89. P. 249–270.
73. *Weibull J.W.* Evolutionary Game Theory. Cambridge: MIT Press. 1995.
74. *Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50. No. 6. P. 1645–1662.
75. *Vasalou C., Henson M.A.* A Multicellular Model for Differential Regulation of Circadian Signals in the Shell and Core Regions of the SCN // J. Theor. Biol. 2011. V. 288. P. 44–56.
76. *Овод И.В., Осадчий А.Е., Путьшев А.А., Фрадков А.Л.* Формирование нейробиологической обратной связи на основе адаптивной модели активности головного мозга // Нейрокомпьютеры. 2012. № 2. С. 36–41.
77. *Hein S.M., Schulze F., Carmele A., Knorr A.* Entanglement Control in Quantum Networks by Quantum-Coherent Time-Delayed Feedback // Phys. Rev. A. 2015. V. 91. P. 052321.
78. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966.
79. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980.

80. *Рей У.Х.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
81. *Соболев О.С.* Методы исследования линейных многосвязных систем. М.: Энергия, 1985.
82. *Мееров М.В.* Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. М.: Наука, 1986.
83. *Pogromsky A., Santoboni G., Nijmeijer H.* Partial Synchronization: From Symmetry Towards Stability // *Phys. D.* 2002. V. 172. P. 65–87.
84. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
85. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* О синхронизации динамических систем // *Прикл. матем. механика.* 1974. Т. 38. № 5. С. 799–809.
86. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
87. *Lindsey W.C.* Synchronization Systems in Communication and Control. Pearson Education, 1972.
88. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000.
89. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // *Изв. ВУЗ. Радиофизика.* 1986. Т. 29. № 9. С. 1050–1060.
90. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in Chaotic Systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 64. P. 821–823.
91. *Rulkov N.F., Sushchik M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized Synchronization of Chaos // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. P. 980.
92. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase Synchronization of Chaotic Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 1804–1807.
93. *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H., Pogromsky A.Yu.* On Self-Synchronization and Controlled Synchronization // *Syst. & Control Lett.* 1997. V. 31. P. 299–305.
94. Управление мехатронными вибрационными установками / Под ред. И.И. Блехмана, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001.
95. *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Tomchina O.P., Bogdanov D.E.* Self-Synchronization and Controlled Synchronization: General Definition and Example Design // *Math. Comput. Simulat.* 2002. V. 58. No. 4–6. P. 367–384.
96. *Мирошник И.В., Нижищоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
97. *French J.* A Formal Theory of Social Power // *Psych. Rev.* 1956. V. 63. P. 181–194.
98. *Harary F.* A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power. In Dorwin Cartwright (ed.), *Studies in Social Power.* 1959. P. 168–182.
99. *Eisenberg E., Gale D.* Consensus of Subjective Probabilities: The Pari-Mutuel Method // *Ann. Math. Statist.* 1959. V. 30. P. 165–168.
100. *DeGroot M.H.* Reaching a Consensus // *J. Am. Statist. Assoc.* 1974. V. 69. No. 345. P. 118–121.
101. *Reynolds C.* Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model // *Computer Graphics.* 1987. V. 21 No. 4. P. 25–34.
102. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2003. V. 48. No. 6. P. 988–1001.

103. *Wieland P., Sepulchre R., Allgower F.* An Internal Model Principle is Necessary and Sufficient for Linear Output Synchronization // *Automatica*. 2011. V. 47. P. 1068–1074.
104. *Isidori A., Marconi L., Casadei G.* Robust Output Synchronization of a Network of Heterogeneous Nonlinear Agents via Nonlinear Regulation Theory // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2014. V. 59. No. 10. P. 2680–2691.
105. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотишных систем // *Авт.* 1996. № 11. С. 91–104.
Polyak B.T., Tsytkin Ya.Z. Stability and Robust Stability of Uniform Systems // *Autom. Remote Control*. 1996. V. 57. No. 11. P. 1606–1617.
106. *Hara S., Tanaka H., Iwasaki T.* Stability Analysis of Systems with Generalized Frequency Variables // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2014. V. 59. No. 2. P. 313–326.
107. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 2109–2112.
108. *Tsitsiklis J.N., Bertsekas D.P., Athans M.* Distributed Asynchronous Deterministic and Stochastic Gradient Optimization Algorithms // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1986. V. 31. No. 9. P. 803–812.
109. *Hatanaka T., Chopra N., Fujita M., Spong M.W.* Passivity-Based Control and Estimation in Networked Robotics. Springer-Verlag, 2015.
110. *Arcak M.* Passivity as a Design Tool for Group Coordination // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2007. V. 52. No. 8. P. 1380–1390.
111. *Proskurnikov A., Zhang F., Cao M., Scherpen J.M.A.* A General Criterion for Synchronization of Incrementally Dissipative Nonlinearly Coupled Agents // *Proc. Eur. Control Conf. (ECC)*. 2015. P. 581–586.
112. *Proskurnikov A.V.* Average Consensus in Networks with Nonlinearly Delayed Couplings and Switching Topology // *Automatica*. 2013. V. 49. No. 9. P. 2928–2932.
113. *Proskurnikov A.V.* Delay Robustness of Nonlinear Consensus Protocols: Analytic Criteria. In E. Witrant et al. (ed.). *Recent Results on Time-Delay Systems*, Springer Int. Publ., 2016. P. 125–146.
114. *Proskurnikov A.V., Shakhova N.D.* Consensus Robustness Against Inner Delays // *Electr. Notes Discr. Math.* 2016. V. 51. P. 7–14.
115. *Ren W., Beard R.W.* Consensus Seeking in Multiagent Systems under Dynamically Changing Interaction Topologies // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2005. V. 50. No. 5. P. 655–661.
116. *Papachristodoulou A., Jadbabaie A., Münz U.* Effects of Delay in Multi-Agent Consensus and Oscillator Synchronization // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2010. V. 55. No. 6. P. 1471–1477.
117. *Matveev A.S., Novitsyn I., Proskurnikov A.V.* Stability of Continuous-Time Consensus Algorithms for Switching Networks with Bidirectional Interaction // *Eur. Control Conf. (ECC)*. 2013. P. 1872–1877.
118. *Hendrickx J., Tsitsiklis J.N.* Convergence of Type-Symmetric and Cut-Balanced Consensus Seeking Systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2013. V. 58. No. 1. P. 214–218.
119. *Moreau L.* Stability of Multiagent Systems with Time-Dependent Communication Links // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2005. V. 50. No. 2. P. 169–182.
120. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // *Авт.* 2000. № 9. С. 15–43.
Agayev R.P., Chebotarev P.Yu. The Matrix of Maximal Outgoing Forests of a Digraph and Its Applications // *Autom. Remote Control*. 2000. V. 61. No. 9. P. 1424–1450.

121. *Agaev R., Chebotarev P.* On the Spectra of Nonsymmetric Laplacian Matrices // Linear Algebra Appl. 2005. V. 399. P. 157–168.
122. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.
123. *Yu W., Chen G., Cao M.* Some Necessary and Sufficient Conditions for Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems // Automatica. 2010. V. 46. No. 6. P. 1089–1095.
124. *Yu W., Zheng W.X., Chen G., Ren W., Cao J.* Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems with Sampled Position Data // Automatica. 2011. V. 47. No. 6. P. 1496–1503.
125. *Proskurnikov A.* Consensus in Switching Networks with Sectorial Nonlinear Couplings: Absolute Stability Approach // Automatica. 2013. V. 49. No. 2. P. 488–495.
126. *Proskurnikov A.* Nonlinear Consensus Algorithms with Uncertain Couplings // Asian J. Control. 2014. V. 16. No. 5. P. 1277–1288.
127. *Проскурников А.В.* Частотные критерии консенсуса в многоагентных системах с нелинейными секторными связями // АиТ. 2014. № 11. С. 110–126.
Proskurnikov A.V. Frequency-Domain Criteria for Consensus in Multiagent Systems with Nonlinear Sector-Shaped Couplings // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 11. P. 1982–1995.
128. *Proskurnikov A.V., Matveev A.* Popov-Type Criterion for Consensus in Nonlinearly Coupled Networks // IEEE Trans. Cybern. 2015. V. 45. No. 8. P. 1537–1548.
129. *Проскурников А.В.* Консенсус в нелинейных стационарных сетях с идентичными агентами // АиТ. 2015. № 9. С. 44–63.
Proskurnikov A.V. Consensus in Nonlinear Stationary Networks with Identical Agents // Autom. Remote Control. V. 76. No. 9. P. 1551–1565.
130. *Grigoriev R.O., Cross M.C., Schuster H.G.* Pinning Control of Spatiotemporal Chaos // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. No. 15. P. 2795–2798.
131. *Wang X.F., Chen G.* Pinning Control of Scale Free Dynamical Networks // Phys. A. 2002. V. 310. P. 521–531.
132. *Li X., Wang X.F., Chen G.* Pinning a Complex Dynamical Network to Its Equilibrium // IEEE Trans. Circuit Syst.-I. 2004. V. 51. No. 10. P. 2074–2087.
133. *Cho A.* Scientific Link-Up Yields “Control Panel” for Networks // Science. 2011. V. 332. P. 777.
134. *Couzin I.D., Krause J., Franks N.R., Levin S.A.* Effective Leadership and Decision Making in Animal Groups on the Move // Nature. 2005. V. 433. P. 513.
135. *Yu W., Chen G., Lü J.* On Pinning Synchronization of Complex Dynamical Networks // Automatica. 2009. V. 45. No. 2. P. 429–435.
136. *Yu W., Chen G., Lü J., Kurths J.* Synchronization via Pinning Control on General Complex Networks // SIAM J. Control Optim. 2013. V. 51. No. 2. P. 1395–1416.
137. *Cao Y., Yu W., Ren W., Chen G.* An Overview of Recent Progress in the Study of Distributed Multi-Agent Coordination // IEEE Trans. Industr. Inform. 2013. V. 9. No. 1. P. 427–438.
138. *Chen G.* Pinning Control and Synchronization on Complex Dynamical Networks // Int. J. Control Autom. Syst. 2014. V. 12. No. 2. P. 221–230.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 27.01.2016