В. И. Воротников, Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития, *Автомат. и телемех.*, 2005, выпуск 4, 3–59

Автоматика и телемеханика, № 4, 2005

Обзоры

© 2005 г. **В. И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук**
**(Уральский государственный технический университет,
Нижнетагильский технологический институт)**

ЧАСТИЧНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ: СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ[1]

Анализируется состояние междисциплинарной проблемы, связанной с исследованием задач частичной устойчивости и стабилизации нелинейных динамических систем, в том числе задач устойчивости и стабилизации по части переменных (части координат фазового вектора). Дается классификация таких задач и рассматривается их связь с другими, в том числе и вновь возникшими в последние годы, задачами устойчивости и стабилизации. Анализируются основные направления развития теории и методов исследования, указываются ряд полученных результатов и приложения. Рассматривается концепция частичного управления, также возникшая на стыке дисциплин. Приводится обширная библиография работ в данных областях.

1. Введение

Наряду с постановкой задачи устойчивости по всем переменным основоположнику современной теории устойчивости А.М. Ляпунову также принадлежит постановка более общей задачи об устойчивости по отношению к некоторой заданной части переменных (а не по всем переменным), определяющих состояние исследуемой системы [73]. Начиная с середины XX столетия эта задача, а затем и тесно связанная с ней задача стабилизации по отношению к части переменных стали систематически разрабатываться в научных центрах России и бывшего СССР, а также Европы, США, Индии, Японии и Китая. Благодаря большой математической общности постановки указанные задачи являются междисциплинарными и естественным образом возникают при моделировании многих явлений и управляемых процессов в самых разных разделах науки: механике, физике, экономике, биологии, и других. Они часто называются также задачами частичной устойчивости (стабилизации). Основополагающие результаты в данной области принадлежат В.В. Румянцеву [109–113], в работах которого заложены основы теории устойчивости по части переменных для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью, а также показана принципиальная применимость полученных результатов к задачам устойчивости более общих моделей систем, содержащих звенья с распределенными параметрами. В последующих работах многих ученых теория и методы

[1] Расширенный и переработанный вариант аналитического обзора, подготовленного для Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-07003).

исследования задач устойчивости и стабилизации по части переменных получили определенное развитие; также решен ряд важных прикладных проблем.

Проведенные исследования выявили принципиальные трудности, возникающие при изучении задач устойчивости (стабилизации) по части переменных, для преодоления которых потребовались существенно новые идеи, выдвинутые в ряде работ. Были вскрыты и специфические особенности этих задач, проливающие свет на опасности, которые кроются на пути практического использования некоторых заманчивых теоретических результатов. Оказалось также, что задачи устойчивости (стабилизации) по части и по всем переменным тесно связаны между собой и дополняют друг друга при решении практических вопросов. С другой стороны, свойство частичной устойчивости в ряде случаев является не только достаточным для нормального функционирования систем, но и необходимым для обеспечения желательных режимов их работы. Именно задачи частичной устойчивости (стабилизации), в отличие от задач устойчивости (стабилизации) по всем переменным, становятся строгой математической базой для многих важных современных исследований.

Формально-математический аспект развития теории частичной устойчивости (стабилизации) связан не только с дальнейшим изучением систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью, но и с рассмотрением более общих классов этих систем (разрывных, с многозначной правой частью, дифференциально-алгебраических), а также систем иной формы математического описания: с распределенными параметрами (в частных производных), функционально-дифференциальных, стохастических, дискретных, а также абстрактных динамических систем в метрическом пространстве. При этом помимо первоначального изучения только задач устойчивости (стабилизации) по отношению к части переменных, в теории частичной устойчивости (стабилизации) стали рассматриваться и примыкающие к ним задачи: устойчивости и стабилизации "частичных" положений равновесия, стабилизации по отношению к неклассической целевой функции, устойчивости и стабилизации по части переменных "частичных" положений равновесия и др.

Кроме того, получили развитие задачи устойчивости по двум мерам, полиустойчивости, более общая задача устойчивости "от входа к выходу", ранее охватывавшая только анализ операторных соотношений "вход-выход" для описания систем, а также задача устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств.

Задачи управления по части переменных, в том числе игровые задачи управления при неконтролируемых помехах и неизвестных параметрах, также и даже в большей степени естественны для теории и приложений и интенсивно развиваются. С научной и методической точек зрения их естественно и небезынтересно рассматривать совместно с проблемами частичной устойчивости и стабилизации, и в настоящее время ощущается потребность в систематизации и осмыслении накопленного в указанных областях прикладной математики научного потенциала на базе единой концепции задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления.

Предлагаемый обзор включает:

– классификацию задач частичной устойчивости, анализ их связей с другими задачами устойчивости, такими как задачи устойчивости множеств (компактных и некомпактных), "вход-выходных" операторных соотношений, от "входа к выходу" в пространстве состояний и др.;

– классификацию задач частичной стабилизации;

– анализ основных направлений, по которым происходит развитие теории и методов исследования частичной устойчивости и стабилизации, некоторые основные полученные результаты (для случая обыкновенных дифференциальных уравнений);

– изучение особенностей задач частичной устойчивости;

– вопросы, касающиеся применения методов теории частичной устойчивости (стабилизации) к анализу задач устойчивости (стабилизации) по всем переменным, а также взаимосвязи с задачами нелинейной “нуль-обнаруживаемости”, устойчивости “от входа-выхода к фазовому вектору”, “частичной обнаруживаемости”;

– анализ концепции частичного управления;

– библиографию российских и зарубежных работ.

В заключение обсуждаются перспективы развития рассматриваемых задач и выделяются некоторые нерешенные проблемы.

Актуальность предлагаемого обзора вызвана усиливающимся интересом к задачам частичной устойчивости (стабилизации) и управления как в научной, так и в учебной литературе, их возрастающей ролью для современных исследований в нелинейной теории управления, механике, биологии, а также на стыке физики, химии и теории управления.

Подчеркнем, что к настоящему времени анализу задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления уже посвящен ряд обзорных работ [102, 260, 214, 22, 320][2] и монографий [120, 21, 319, 33], где приводится обширная библиография. Поэтому при подготовке данного обзора сделана попытка более высокого уровня обобщения полученных результатов, а рассмотрение линии развития теории частичной устойчивости (стабилизации) и близких к ним задач управления учитывает самые новые направления исследований, многие из которых ведутся с достаточно разных позиций.

2. Классификация задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления. Связь с другими задачами

Многообразие задач, рассматриваемых в теории частичной устойчивости (стабилизации), требует их систематизации и осмысления. Важным шагом на этом пути представляется выделение таких основных задач, которые не только характеризуют в основных чертах проблему частичной устойчивости (стабилизации) и ее связи с другими задачами устойчивости (стабилизации), но и являются наиболее естественными и наглядными с точки зрения как самой постановки, так и методов исследования устойчивости (стабилизации) с использованием двух мер. Проблематика частичного управления также включает ряд задач, близких по сути, но отличающихся терминологически. Учитывая в то же время, что разработка задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления в разных разделах науки (механике, физике, химии, биологии и др.) имеет свою специфику и достаточно разные исходные позиции, важно “нащупать” связи между этими исследованиями. Далее делается попытка указанной систематизации и осмысления задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления. Подчеркнем, что приводимые далее определения и постановки задач не всегда в точности совпадают по форме с авторскими, но полностью отражают их содержание.

2.1. Классификация задач частичной устойчивости

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно выделить три основных класса задач, характеризующих в основных чертах проблему частичной устойчивости. Это задачи:

1) устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия (задачи частичной устойчивости Ляпунова – Румянцева);

2) устойчивости “частичных” положений равновесия;

3) устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия.

[2] Здесь и далее ссылки даются в хронологическом порядке.

2.1.1. Задачи устойчивости по части переменных. К данному классу задач относятся задачи устойчивости по компонентам вектора $\mathbf{y}$ (кратко – задачи $\mathbf{y}$-устойчивости) положения равновесия $\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \tag{2.1}$$

при достаточно общих допущениях относительно вектор-функций $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$. (Здесь и далее Т – знак транспонирования.)

В этом случае имеют место условия

$$\mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

причем система (2.1), (2.2) строится (каждый раз заново) как система возмущенного движения для каждого конкретного изучаемого на устойчивость процесса, а понятие устойчивости соответствующим образом математически формализуется. Разумеется, построения системы возмущенного движения не требуется, если для исходной системы изучается задача $\mathbf{y}$-устойчивости нулевого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Стандартные для теории частичной устойчивости допущения на вектор-функции $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ включают предположения о непрерывности системы (2.1) в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty, \tag{2.3}$$

а также о единственности и $\mathbf{z}$-продолжимости ее решений.

Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ решение системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x_0} = \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x_0})$.

Определение 1 ([109, 184, 267]). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.2):

1) $\mathbf{y}$-*устойчиво, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{x_0}\| < \delta$ *следует* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$*;*

2) *равномерно* $\mathbf{y}$-*устойчиво, если* δ *не зависит от* t_0*;*

3) *асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво, если оно* $\mathbf{y}$-*устойчиво и для любого* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta\ (t_0) > 0$ *такое, что для каждого решения* $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *системы* (2.1), (2.2), *для которого* $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$, *имеет место соотношение*

$$\lim \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| \to 0, \quad t \to \infty; \tag{2.4}$$

4) *эквиасимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво, если для любого* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta(t_0) > 0$ *такое, что соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по* $\mathbf{x_0}$ *из области* $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$*: для любого числа* $\eta > 0$ *найдется не зависящее от* $\mathbf{x_0}$ *число* $T(t_0, \eta) > 0$ *такое, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ *при* $t \geq t_0 + T$ *и* $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$ *(это гарантирует также и* $\mathbf{y}$-*устойчивость положения* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.2)*);*

5) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво, если оно равномерно* $\mathbf{y}$-*устойчиво и* Δ *не зависит от* t_0, *а соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по* t_0, $\mathbf{x_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$ *(для любого* $\eta > 0$ *найдется не зависящее от* t_0 *и* $\mathbf{x_0}$ *число* $T(\eta) > 0$ *такое, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ *при* $t \geq t_0 + T$ *и* $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$*);*

6) *асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво в целом (globally asymptotically* $\mathbf{y}$-*stable), если оно* $\mathbf{y}$-*устойчиво и соотношение* (2.4) *выполняется при произвольных* $t_0 \geq 0$ *и* $\mathbf{x_0}$ *(в этом случае стандартные для теории частичной устойчивости допущения относительно правых частей системы* (2.1) *делаются в области* $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$ *и любое решение системы* (2.1) *считается определенным при всех* $t \geq 0$*);*

7) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво в целом, если оно равномерно* $\mathbf{y}$-*устойчиво и соотношение* (2.4) *выполняется при произвольных* $t_0 \geq 0$ *и* $\mathbf{x_0}$ *равномерно по* t_0, $\mathbf{x_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x_0} \in K$, K *– произвольный компакт* $\mathbf{x}$-*пространства*

(для любых $\eta > 0$ и $r > 0$ найдется не зависящее от t_0 и $\mathbf{x_0}$ число $T(\eta, r) > 0$ такое, что $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ при $t \geq t_0 + T$ и $\|\mathbf{x_0}\| \leq r$);

8) *экспоненциально асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво, если существуют положительные постоянные Δ, M и α, такие что для каждого решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ системы* (2.1), (2.2)*, для которого $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$, при всех $t \geq t_0 \geq 0$ имеет место соотношение*

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| \leq M\|\mathbf{x_0}\| \exp[-\alpha(t - t_0)]; \tag{2.5}$$

9) *экспоненциально асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво в целом, если существуют положительные постоянные M и α, такие что соотношение* (2.5) *выполняется при $t \geq t_0 \geq 0$ и произвольных $t_0 \geq 0$ и $\mathbf{x_0}$.*

Заметим, что предположение о $\mathbf{z}$-продолжимости решений системы (2.1) не является следствием факта $\mathbf{y}$-устойчивости. Поэтому $\mathbf{z}$-продолжимость решений изучается, вообще говоря, отдельно от $\mathbf{y}$-устойчивости. Сами же по себе условия $\mathbf{y}$-устойчивости могут “пропустить” в качестве допустимых системы с $\mathbf{z}$-непродолжимыми решениями [23, 319, 33].

Развитием задачи устойчивости по части переменных является задача устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) по отношению к некоторым заданным функциям координат фазового вектора (задача устойчивости “по выходу”) [34, 198, 88].

2.1.2. Задачи устойчивости “частичных” положений равновесия. К задачам данного класса относятся задачи устойчивости (по компонентам вектора $\mathbf{y}$) “частичных” положений равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (2.1). В этом случае имеет место соотношение

$$\mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}, \tag{2.6}$$

и при выполнении условий единственности решений системы (2.1) положение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ является инвариантным множеством этой системы.

Подчеркнем, что для данного класса задач система (2.1) рассматривается, как правило, “сама по себе” и не является результатом перехода к системе возмущенного движения для некоторой другой исходной системы. Поэтому в данном случае система (2.1) может и не иметь нулевого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В то же время, естественно, в случае (2.2) система не обязана иметь “частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, хотя нередки случаи, когда система (2.1) имеет и положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и (одновременно) “частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Определение 2 ([278, 138, 120, 31]). *“Частичное” положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы* (2.1), (2.6)*:*

1) *устойчиво, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$ следует $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$ и произвольном значении $\mathbf{z_0}$ (часто используется также эквивалентная запись $\|\mathbf{z_0}\| < \infty$);*

2) *равномерно устойчиво, если δ не зависит от t_0;*

3) *асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и для любого $t_0 \geq 0$ найдется $\Delta(t_0) > 0$ такое, что для каждого решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ системы* (2.1), (2.6) *с $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ при произвольном значении $\mathbf{z_0}$ имеет место соотношение* (2.4)*;*

4) *эквиасимптотически устойчиво, если для любого $t_0 \geq 0$ найдется $\Delta(t_0) > 0$ такое, что соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по $\mathbf{y_0}$ из области $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ при произвольном значении $\mathbf{z_0}$: для любого $\eta > 0$ найдется $T(t_0, \eta) > 0$ такое, что $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ при $t \geq t_0 + T$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ и произвольном значении $\mathbf{z_0}$ (это гарантирует также и устойчивость “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы* (2.1), (2.6)*);*

5) *равномерно асимптотически устойчиво, если оно равномерно устойчиво и Δ не зависит от t_0, а соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по t_0, $\mathbf{y_0}$ из обла-*

сти $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ *при произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ *(для любого* $\eta > 0$ *найдется* $T(\eta) > 0$ *такое, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ *при* $t \geq t_0 + T$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ *и произвольном значении* $\mathbf{z_0}$*);*

6) *асимптотически устойчиво в целом, если оно устойчиво и соотношение* (2.4) *выполняется при произвольных* $t_0 \geq 0$ *и* $\mathbf{x_0}$*;*

7) *равномерно асимптотически устойчиво в целом, если оно равномерно устойчиво и соотношение* (2.4) *выполняется при произвольных* $t_0 \geq 0$ *и* $\mathbf{x_0}$ *равномерно по* t_0, $\mathbf{y_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\mathbf{y_0} \in K_y$, K_y *– произвольный компакт* $\mathbf{y}$*-пространства, при произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ *(для любых* $\eta > 0$ *и* $r > 0$ *найдется* $T(\eta, r) > 0$ *такое, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ *при* $t \geq t_0 + T$, $\|\mathbf{y_0}\| \leq r$ *и произвольном значении* $\mathbf{z_0}$*);*

8) *экспоненциально асимптотически устойчиво в целом, если существуют положительные постоянные* M *и* α*, такие что для каждого решения системы* (2.1), (2.2) *при всех* $t \geq t_0 \geq 0$ *имеет место соотношение*

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| \leq M\|\mathbf{y_0}\| \exp[-\alpha(t - t_0)]. \tag{2.7}$$

Отметим, что равномерность локальной сходимости решений системы (2.1), (2.6) к множеству $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (п.п. 4, 5 определения 2) можно определять и несколько иначе, полагая, что соотношение (2.4) выполняется равномерно по $\mathbf{x_0}$ (п. 4) или равномерно по t_0, $\mathbf{x_0}$ (п. 5) из области $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, $\mathbf{z_0} \in K_z$, где K_z – произвольный компакт $\mathbf{z}$-пространства. Аналогично, равномерность глобальной сходимости к множеству $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (п. 7 определения 2) можно трактовать как сходимость, равномерную по t_0, $\mathbf{x_0}$ из области $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x_0} \in K$. Однако равномерность асимптотической устойчивости в смысле определения 2 в бо́льшей мере отражает независимость соответствующих понятий устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ от начальных значений фазового $\mathbf{x}$-вектора в $\mathbf{z}$-пространстве.

Заметим также, что выполнение собственно соотношений (2.4), (2.5), (2.7) для $\mathbf{y}$-компонент решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ системы (2.1) не связано, вообще говоря, с наличием у системы (2.1) ни положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ни “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ [33, 30]. Однако в случае существования у системы (2.1) асимптотически устойчивого “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ это положение равновесия является нетривиальным аттрактором в пространстве состояний данной системы [198, 88].

Развитием задачи устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (2.1) является задача устойчивости по тем функциям координат фазового вектора, по которым система (2.1) допускает положение равновесия. Эта задача тесно связана с задачей устойчивости инвариантных множеств (см. [35, 89, 209] и другие работы).

2.1.3. Унификация понятий в двух классах задач частичной устойчивости. Задачи устойчивости по части переменных Ляпунова – Румянцева не сводятся [267, 33], вообще говоря, к какого-либо рода задачам устойчивости множеств, в то время как задачи устойчивости “частичных” положений равновесия являются задачами устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств [242, 313]. Тем не менее при определенной взаимной модификации понятий устойчивости по части переменных Ляпунова – Румянцева и устойчивости “частичных” положений равновесия указанные задачи можно сблизить, а условия их разрешимости сделать одинаковыми (см. раздел 3.2).

Начнем с модификации понятия $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (2.2) в смысле определения 1.

Определение 3 ([278, 120, 21, 319, 29]). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.2)*:*

1) $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ ($\mathbf{y}$*-stable to the whole of* $\mathbf{z_0}$)*, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$ *следует* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$ *и произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ ($\|\mathbf{z_0}\| < \infty$)*;*

2) $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0*, если* $\delta = \delta(\varepsilon)$*;*

3) $\mathbf{y}$*-устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ ($\mathbf{y}$*-stable for large* $\mathbf{z_0}$)*, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *и любого заданного числа* $L > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$ *следует* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$*;*

4) $\mathbf{y}$*-устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0*, если* $\delta = \delta(\varepsilon, L)$.

Заметим также, что $\mathbf{y}$-устойчивость в целом по $\mathbf{z_0}$ называется [253] $\mathbf{y}$-устойчивостью при произвольных начальных $\mathbf{z}$-возмущениях ($\mathbf{y}$-stability under arbitrary $\mathbf{z}$-perturbations).

Встречным шагом на пути сближения и унификации понятий является соответствующее уточнение понятия устойчивости "частичных" положений равновесия.

Определение 4 ([28, 31]). *"Частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.6)*:*

1) *квазиустойчиво (или устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$*), если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *и любого заданного числа* $L > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$ *следует* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$*;*

2) *равномерно квазиустойчиво (устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0*), если* $\delta = \delta(\varepsilon, L)$.

Подчеркнем, что проведенная унификация понятий частичной устойчивости поразному коснулась понятий $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (2.2) и устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (2.6). В самом деле, определение 3 дает более общее понятие $\mathbf{y}$-устойчивости положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, чем в определении 1 (п.п. 1 и 2). В то же время определение 4 дает более слабые в сравнении с определением 2 (п.п. 1 и 2), понятия устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. По сути, устойчивость при большом $\mathbf{z_0}$ "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ в определении 4 есть лишь квазиустойчивость, поскольку устойчивость (определение 2) предполагает произвольное значение $\mathbf{z_0}$; это объясняет двойную терминологию в определении 4.

Другой путь к унификации [30] предполагает анализ частичной устойчивости "оценочного" для системы (2.1) положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, которое может и не быть положением равновесия этой системы. Здесь можно провести аналогию с концепцией эвентуальной устойчивости (eventual stability), возникшей в 60-х годах XX в. в теории адаптивного управления [236], а также с концепцией "оценочной" устойчивости (rated stability) [337].

Аналогично проводится унификация соответствующих понятий частичной асимптотической устойчивости [28].

Определение 5 ([278, 21, 319, 28, 31]). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.2)*:*

1) *асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$*, если оно* $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ *и для любого* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta(t_0) > 0$ *такое, что для каждого решения* $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *системы* (2.1), (2.2) *с* $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ *при произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ ($\|\mathbf{z_0}\| < \infty$) *имеет место соотношение* (2.4)*;*

2) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$*, если* $\mathbf{y}$*-устойчивость в целом по* $\mathbf{z_0}$ *является равномерной (по* t_0*),* Δ *не зависит от* t_0*, а соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по* t_0*,* $\mathbf{y_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$ *при произвольном значении* $\mathbf{z_0}$*;*

3) *экспоненциально асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$*, если существуют положительные постоянные* Δ*,* M *и* α*, такие что для каждого решения*

$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *системы* (2.1), (2.2), *для которого* $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, *при всех* $t \geq t_0 \geq 0$ *и произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ *имеет место соотношение* (2.7);

4) *асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$, *если оно* $\mathbf{y}$-*устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ *и для любого* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta(t_0, L) > 0$ *такое, что для каждого решения* $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *системы* (2.1), (2.2) *с* $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$ *имеет место соотношение* (2.4);

5) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$, *если* $\mathbf{y}$-*устойчивость при большом* $\mathbf{z_0}$ *является равномерной* (*по* t_0), $\Delta = \Delta(L)$, *а соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по* t_0, $\mathbf{x_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$ (*для любого* $\eta > 0$ *найдется* $T(\eta, L) > 0$ *такое, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \eta$ *при* $t \geq t_0 + T$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$);

6) *асимптотически* $\mathbf{y}$-*устойчиво в целом равномерно по* t_0, $\mathbf{y_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\mathbf{y_0} \in K_y$ *при произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ (*globally uniformly asymptotically* $\mathbf{y}$-*stable to the whole of* $\mathbf{z_0}$), *если оно* $\mathbf{y}$-*устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0, *а соотношение* (2.4) *выполняется при произвольных* $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x_0}$ *равномерно по* t_0, $\mathbf{y_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\mathbf{y_0} \in K_y$.

Определение 6 ([28]). *"Частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.6):

1) *асимптотически квазиустойчиво* (*асимптотически устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$), *если оно квазиустойчиво* (*устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$) *и для любых* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta(t_0, L) > 0$ *такое, что для каждого решения* $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *системы* (2.1), (2.6) *с* $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$ *имеет место соотношение* (2.4);

2) *равномерно асимптотически квазиустойчиво* (*равномерно асимптотически устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$), *если квазиустойчивость* (*устойчивость при большом* $\mathbf{z_0}$) *является равномерной* (*по* t_0), $\Delta = \Delta(L)$, *а соотношение* (2.4) *выполняется равномерно по* t_0, $\mathbf{x_0}$ *из области* $t_0 \geq 0$, $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$.

Определения 3–6 позволяют унифицировать понятия в введенных двух классах задач частичной устойчивости и, в конечном счете, получить единые условия устойчивости: $\mathbf{y}$-устойчивости (асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости) в целом по $\mathbf{z_0}$ или при большом $\mathbf{z_0}$ положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) в случае (2.2), а также устойчивости (асимптотической устойчивости) или квазиустойчивости (асимптотической квазиустойчивости) "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ в случае (2.6).

2.1.4. Задачи устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия. Данный класс представляет своего рода объединение первых двух указанных классов задач частичной устойчивости. Пусть $\mathbf{y} = \left(\mathbf{y_1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{y_2}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ и предположим, что система (2.1) допускает "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Примем допущения о непрерывности правых частей системы (2.1) в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y_1}\| \leq h, \quad \|\mathbf{y_2}\| < \infty, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty, \tag{2.8}$$

а также о единственности и $(\mathbf{y_2}, \mathbf{z})$-продолжимости ее решений.

Определение 7 ([29]). *"Частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.6):

1) $\mathbf{y_1}$-*устойчиво, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$ *следует* $\|\mathbf{y_1}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$ *и произвольном значении* $\mathbf{z_0}$ ($\|\mathbf{z_0}\| < \infty$);

2) $\mathbf{y_1}$-*квазиустойчиво* ($\mathbf{y_1}$-*устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$), *если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *и любого заданного числа* $L > 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{y_0}\| < \delta$, $\|\mathbf{z_0}\| < L$ *следует* $\|\mathbf{y_1}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$;

3) *асимптотически* $\mathbf{y_1}$-*устойчиво, если оно* $\mathbf{y_1}$-*устойчиво и для любого* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta(t_0) > 0$ *такое, что для любого решения системы* (2.1), (2.6) *с* $\|\mathbf{y_0}\| < \Delta$

при произвольном значении $\mathbf{z_0}$ *имеет место соотношение* $\lim \|\mathbf{y_1}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| \to 0$, $t \to \infty$.

По аналогии также вводятся понятия равномерной $\mathbf{y_1}$-устойчивости (в том числе асимптотической и при большом $\mathbf{z_0}$), а также ряд других определений данного типа; получены условия такого рода устойчивости в контексте метода функций Ляпунова [29, 4].

2.2. Связь с другими задачами устойчивости

Математическая содержательность и тесная связь постановки задач частичной устойчивости с практическими приложениями привели к тому, что возникли связанные с ней новые общие концепции устойчивости, такие, как:

– устойчивость по отношению к двум мерам [90, 124, 234], когда близость невозмущенного и возмущенных движений в начальный и последующий моменты времени, как и в задаче устойчивости по части переменных, оценивается по разным мерам;

– полиустойчивость (полиустойчивость по отношению к части переменных) [5, 80, 81], когда различные группы переменных (различные группы заданной части переменных) системы возмущенного движения обладают различными видами устойчивости;

– устойчивость "от входа к выходу" (input to output stability) [304, 305], означающая, что при любых начальных возмущениях "выходные" переменные системы остаются ограниченными (становятся достаточно малыми), если внешние "входные" воздействия на систему также ограничены (достаточно малые);

– частичная устойчивость движений общих динамических систем на метрическом пространстве [252, 258], включая динамические системы, которые не могут быть определены обычными классическими (дифференциальными) уравнениями.

Для ряда приложений, таких как (динамика биоценозов и динамика твердого тела) также полезно понятие устойчивости по заданному (в количественном отношении) числу переменных, без фиксации их состава [21, 319].

2.2.1. Устойчивость по двум мерам. Первоначально поставленная для случая систем с распределенными параметрами [90] задача устойчивости по двум мерам затем получила развитие и для систем обыкновенных, а также функционально-дифференциальных уравнений [234, 40]. Пусть $\rho_0(\mathbf{x})$ и $\rho(t, \mathbf{x})$ – две непрерывные функции (меры), $\rho_0(\mathbf{0}) = 0$, $\rho(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, которые используются для характеристики отклонений траекторий системы (2.1), (2.2) от положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ соответственно в начальный $t = t_0$ и произвольный последующий момент времени $t > t_0$.

Определение 8 ([234]). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.2) *называется:*

1) (ρ_0, ρ)*-устойчивым, если для любых чисел* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $\rho_0(\mathbf{x_0}) < \delta$ *следует* $\rho(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})) < \varepsilon$ *при всех* $t > t_0$*;*

2) *асимптотически* (ρ_0, ρ)*-устойчивым, если оно* (ρ_0, ρ)*-устойчиво и, кроме того, для каждого* $t_0 \geq 0$ *существует число* $\Delta(t_0) > 0$ *такое, что решение* $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *с* $\rho_0(\mathbf{x_0}) < \Delta$ *удовлетворяет условию* $\lim \rho(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})) = 0$, $t \to \infty$.

Заметим, что при $\rho_0 = \|\mathbf{x_0}\|$ и $\rho = \|\mathbf{y}\|$ определение 8 переходит в определение 1 $\mathbf{y}$-устойчивости (асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1). Поэтому, на наш взгляд, именно задача устойчивости по части переменных представляется наиболее естественной и наглядной с точки зрения особенностей как самой постановки, так и методов исследования задач устойчивости с использованием двух мер. В литературе имеется ряд других определений устойчивости по двум мерам, в том числе и для процессов, описываемых системой вида (2.1) с неограниченным разрывным оператором в банаховом пространстве [234].

2.2.2. Полиустойчивость. Среди многочисленных постановок задач полиустойчивости наиболее часто встречается ситуация, когда асимптотическая устойчивость по части переменных того или иного вида рассматривается в сочетании с устойчивостью (неасимптотической) по всем переменным. Выделим два часто встречающихся в приложениях понятия такого рода, одно из которых введено [75] еще на заре развития теории устойчивости.

Определение 9 ([75, 5]). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1), (2.2) *называется:*

1) *устойчивым по Ляпунову и* (*одновременно*) *асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *найдется* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из* $\|\mathbf{x_0}\| < \delta$ *следует* $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$ *и, кроме того, для любого* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\Delta(t_0) > 0$ *такое, что для любого решения* $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})$ *системы* (2.1), (2.2)*, для которого* $\|\mathbf{x_0}\| < \Delta$*, имеет место соотношение* (2.4)*;*

2) *равномерно устойчивым по Ляпунову и* (*одновременно*) *экспоненциально асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ *найдутся* $\delta(\varepsilon) > 0$ *и числа* $M > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что из* $\|\mathbf{x_0}\| < \delta$ *при всех* $t \geq t_0$ *следует соотношение* $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0})\| < \varepsilon$ *и соотношение* (2.5).

Ряд других понятий и методы исследования задач полиустойчивости можно найти в работах [5, 81, 247, 125]. Рассматривается также и задача полиустойчивости по части переменных [80].

2.2.3. Устойчивость от "входа к выходу". Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{X}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}), \tag{2.9}$$

в которой $\mathbf{x}$ – фазовый вектор, $\mathbf{y}$ – вектор "выходных" переменных ("выход" системы), а вектор $\mathbf{w}$ характеризует внешние "входные" воздействия (возмущения).

Вектор-функция $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ непрерывна и локально липшицева по $\mathbf{x}$ равномерно по $\mathbf{w}$; $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ локально липшицева по $\mathbf{x}$, а $\mathbf{w}(t)$ измерима и локально существенно ограничена при всех $t \geq 0$. Считаем, что для любого начального состояния $\mathbf{x_0}$ и любого входного воздействия $\mathbf{w}$ существует единственное решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0}, \mathbf{w})$ системы (2.9), которое определено при всех $t \geq t_0 \geq 0$. Класс допустимых внешних воздействий достаточно широк и позволяет охватить, в частности, гауссовские случайные процессы.

Для формулировки соответствующих определений устойчивости используются следующие функции:

1) функция $\gamma(r)$ класса K (K-функция γ) – непрерывная, строго возрастающая при $r \in [0, \infty)$, или класса K_∞ (K_∞-функция γ), если, кроме того, $\gamma(r) \to \infty$ при $r \to \infty$;

2) функция $\beta(r, t)$ класса KL (KL-функция β) – непрерывная, класса K по $r \in [0, \infty)$ для любого фиксированного t и строго убывающая к нулю при $t \to \infty$ для любого фиксированного r.

В отличие от евклидовой нормы $\|\cdot\|$ обозначим $\|\mathbf{w}\|_\infty = \mathit{ess}\sup\{\|\mathbf{w}(t)\|,\ t \in [0, \infty]\}$.

Определение 10 ([305–307]). *Система* (2.9) *называется:*

1) *устойчивой "от входа к выходу"* (*input to output stable*)*, если существуют* KL*-функция* β *и* K*-функция* γ *такие, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0}, \mathbf{w})\| \leq \beta(\|\mathbf{x_0}\|, t) + \gamma(\|\mathbf{w}\|_\infty)$ *для всех* $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{w}$ *и всех* $t \geq t_0 \geq 0$*;*

2) *устойчивой "от входа к выходу" независимо от вектора состояния* (*state – independently input to output stable*)*, если существуют* KL*-функция* β*- и* K*-функция* γ*, такие, что* $\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x_0}, \mathbf{w})\| \leq \beta(\|\mathbf{y_0}\|, t) + \gamma(\|\mathbf{w}\|_\infty)$ *для всех* $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{w}$ *и всех* $t \geq t_0 \geq 0$.

Грубо говоря, система (2.9) устойчива “от входа к выходу”, если ее положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво в целом при $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ (при отсутствии возмущений), а эффект воздействия помех на эту устойчивость пропорционален их величине: ситуация, имеющая место для линейных систем. Отметим, что при $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ определение 10 переходит в соответствующие определения равномерной асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости в целом положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1).

Постановка задачи устойчивости “от входа к выходу” в пространстве состояний системы (2.9) имеет принципиальный характер, ибо позволяет сблизить теорию устойчивости Ляпунова с другой важной ветвью современной теории устойчивости, в которой изучается устойчивость собственно “вход-выходных” операторных соотношений для описания систем [334, 226]. В настоящее время теория устойчивости “от входа к выходу” в пространстве состояний интенсивно развивается [305, 301, 306, 302, 189, 307, 303, 222].

2.2.4. Частичная устойчивость движений общих динамических систем. Пусть (X, d) – метрическое пространство с нормой d. Имея в виду охватить частичную устойчивость, предположим, что (X, d) есть произведение двух метрических пространств (Y, d_y) и (Z, d_z), так что $X = Y \times Z$, т.е. для каждого $\mathbf{x} \in X$ имеем $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{z} \in Z$. Норму d определим следующим образом: $d(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = (d_y(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})^p + d_z(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2})^p)^{1/p}$ для всех $\mathbf{x_1} = (\mathbf{y_1^{\mathrm{T}}}, \mathbf{z_1^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x_2} = (\mathbf{y_2^{\mathrm{T}}}, \mathbf{z_2^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}} \in X$, $1 \le p \le +\infty$, где для $p = +\infty$ имеем $d(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \max\{d_y(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}), d_z(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2})\}$. Расстояние между точкой $\mathbf{w} \in X$ и множеством $M \subset X$ определяется как $d(\mathbf{w}, M) = \inf\limits_{\mathbf{q} \in M} d(\mathbf{w}, \mathbf{q})$. Далее T будет означать или $R^+ = [0, \infty)$ или $N = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть $A \subset X$. Для любого фиксированного $\mathbf{a} \in A$, $t_0 \in T$ отображение $\mathbf{p}(\cdot, \mathbf{a}, t_0) : T_{\mathbf{a}, t_0} \to X$ называется движением, если $\mathbf{p}(t_0, \mathbf{a}, t_0) = \mathbf{a}$, $T_{\mathbf{a}, t_0} = [t_0, t_1) \cap T$, $t_1 > t_0$ и t_1 конечно или бесконечно. Для любого движения $\mathbf{p}(\cdot, \mathbf{a}, t_0)$ имеем $\mathbf{p}(t, \mathbf{a}, t_0) = (\mathbf{p_y}(t, \mathbf{a}, t_0), \mathbf{p_z}(t, \mathbf{a}, t_0))$, где $\mathbf{p_y}(t, \mathbf{a}, t_0) \in Y$, $\mathbf{p_z}(t, \mathbf{a}, t_0) \in Z$. Пусть S будет семейством движений:

$$S \subset \{\mathbf{p}(\cdot, \mathbf{a}, t_0) \in \mathbf{\Lambda} : \mathbf{p}(t_0, \mathbf{a}, t_0) = \mathbf{a}\},$$
$$\mathbf{\Lambda} = \bigcup_{(\mathbf{a}, t_0) \in A \times T} \{T_{\mathbf{a}, t_0} \times \{\mathbf{a}\} \times \{t_0\} \to X\}.$$

Совокупность $\{T, X, A, S\}$ называется динамической системой (непрерывной по времени, если $T = R^+$, и дискретной по времени, если $T = N$), а множество $M \subset A$ называется инвариантным по отношению к этой системе, если $\mathbf{a} \in M$ предполагает, что $\mathbf{p}(t, \mathbf{a}, t_0) \in M$ для всех $t \in T_{\mathbf{a}, t_0}$, любом $t_0 \in T$ и $\mathbf{p}(\cdot, \mathbf{a}, t_0) \in S$.

По смыслу частичной устойчивости предположим, что $M = M_y \times M_z$. Тогда $\mathbf{y} \in M_y$ и $\mathbf{z} \in M_z$ для любого $\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in M$. Расстояние между точками $\mathbf{p}_y \in Y$ и $\mathbf{p}_z \in Z$ и множествами $M_y \subset Y$, $M_z \subset Z$ определим как $d_y(\mathbf{p}_y, M_y) = \inf\limits_{\mathbf{q}_y \in M_y} d(\mathbf{p}_y, \mathbf{q}_y)$ и $d_z(\mathbf{p}_z, M_z) = \inf\limits_{\mathbf{q}_z \in M_z} d(\mathbf{p}_z, \mathbf{q}_z)$ соответственно. Множество $M \subset A$ называется $\mathbf{y}$-инвариантным по отношению к системе $\{T, X, A, S\}$, если $\mathbf{a} \in M$ предполагает, что $\mathbf{p}_y(t, \mathbf{a}, t_0) \in M_y$ для всех $t \in T_{\mathbf{a}, t_0}$, любом $t_0 \in T$ и $\mathbf{p}(\cdot, \mathbf{a}, t_0) \in S$.

Определение 11 ([252]). *Пусть $M = M_y \times M_z \subset A$ является $\mathbf{y}$-инвариантным множеством по отношению к динамической системе $\{T, X, A, S\}$. Множество M называется:*

1) *$\mathbf{y}$-устойчивым по отношению к системе $\{T, X, A, S\}$, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in T$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что $d_y(\mathbf{p}_y(t, \mathbf{a}, t_0), M_y) < \varepsilon$ для всех $t \in T_{\mathbf{a}, t_0}$ и всех $\mathbf{p}(\cdot, \mathbf{a}, t_0) \in S$, если только $d(\mathbf{a}, M) < \delta$;*

2) *равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчивым по отношению к системе* $\{T, X, A, S\}$*, если* $\delta =$
$= \delta(\varepsilon)$.

При $X = R^n$, $T = R^+$ и $M = \{\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset R^n$ введенные понятия переходят в соответствующие понятия $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1), (2.2), а при $X = R^n$, $T = R^+$ и $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\} \subset R^n$ – в соответствующие понятия устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (2.6).

Аналогично вводятся [252] и ряд других понятий частичной (в том числе и асимптотической) устойчивости для общих динамических систем.

2.3. Задачи частичной стабилизации и управления

Дальнейшим развитием задач частичной устойчивости на класс управляемых систем являются задачи частичной стабилизации [36, 116, 280, 136, 120, 21, 106, 61, 319, 338, 33, 44], предполагающие:

– стабилизацию по части переменных либо программных движений управляемых систем, либо положений равновесия систем (без управлений) дополнительными силами;

– стабилизацию "частичных" положений равновесия систем дополнительными силами.

Более общими являются задачи частичной стабилизации: "по выходу" [245, 190, 205]; по отношению к неклассической целевой функции (не являющейся определенно положительной по всем переменным) [198, 88, 293–295]; "от входа к выходу" [190].

С другой стороны, уже́ в классических работах [104, 65] по теории управления отмечается принципиальная необходимость в ряде важных для приложений случаев исследования задач управления лишь по отношению к части координат фазового вектора системы. Такие задачи называются также задачами управления по части переменных [92, 21, 60, 230, 319]. (В отличие от задач стабилизации речь идет об управлении на конечном промежутке времени.) Аналогичными, а также тесно связанными с ними более общими задачами, являются задачи управления: с "подвижными концами" [104]; на многообразиях [43]; в "пространстве конфигураций" [107]; "по выходу" [241, 149, 223]; частичного управления (partial control) [319, 198, 88].

Заметим, что по смыслу частичная стабилизация и управление предполагают меньшее воздействие на изучаемую систему, чем стабилизация и управление по всем ее фазовым переменным, и могут в значительной степени сохранить естественную динамику этой системы. Данное обстоятельство позволяет рассматривать задачи частичной стабилизации и управления в контексте задач управления с использованием собственных движений системы, актуальность которых в настоящее время возрастает. Однако, несмотря на сказанное, принципиальный характер собственно задач частичного управления стал подчеркиваться только в последнее время, и растущий интерес к этой проблеме наблюдается в механике [319, 33] и кибернетической физике [197, 135].

С несколько иных позиций концепция частичного управления выдвинута и систематически разрабатывается на стыке химии и теории управления [217, 229, 230]. Здесь стимулом к разработке данной концепции послужил раздел теории управления (plantwide control), разрешающий постоянно возникающий перед инженерами вопрос о том, "какие переменные должны быть управляемыми, какие должны измеряться, какие входные воздействия должны подбираться и какие связи должны быть установлены между ними" [243].

Рассмотрим задачи частичной стабилизации, наиболее близкие к проблематике данного обзора.

2.3.1. Стабилизация по части переменных программных движений управляемых систем. Используя концепцию возмущенного-невозмущенного движения, допустим, что возмущенное движение объекта управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{2.10}$$

в которой $\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор фазовых переменных, а $\mathbf{u}$ – вектор управлений, формируемый по принципу обратной связи в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Предполагается, что вектор-функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ непрерывна в области (2.3), правая часть системы (2.10) определена и непрерывна в области

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty, \quad \|\mathbf{u}\| < \infty, \tag{2.11}$$

а система (2.10) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет ограничениям, наложенным на систему (2.1). В этом случае далее пишем $\mathbf{u} \in U$.

Задача 1 ([116, 280]). *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathbf{0}}(t, \mathbf{x}) \in U$, *обеспечивающую асимптотическую* $\mathbf{y}$*-устойчивость положения равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.10).

Постановка задачи 1 часто дополняется требованием $\mathbf{y}$-стабилизации из заданной области начальных возмущений. Среди других важным является и требование соблюдения заданных ограничений на управления. В приложениях также имеет место неполнота информации о текущем состоянии системы.

Развитием задачи 1 является задача синтеза управлений $\mathbf{u} \in U$, так что положение равновесия системы (2.10) не только асимптотически устойчиво по заданной части переменных, но и устойчиво (неасимптотически) по всем переменным [39, 319]. Такую задачу можно рассматривать как один из вариантов задачи полистабилизации.

2.3.2. Стабилизация по части переменных систем дополнительными силами. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.12}$$

в которой $\mathbf{X}^*(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{R}(t, \mathbf{x}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Выражение $\mathbf{R}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в (2.12) можно трактовать как вектор дополнительных воздействий на систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}). \tag{2.13}$$

Задача 2 ([120]). *Найти вектор управлений* $\mathbf{u} \in U$ *так, чтобы посредством вектора* $\mathbf{R}$ *дополнительных воздействий сделать положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.13) *асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчивым.*

Данная задача (как и задача стабилизации программных движений управляемых систем) очень часто возникает в приложениях [120, 21, 319].

2.3.3. Оптимальная стабилизация по части переменных программных движений. Для приложений важно не только выбрать управление, решающее задачу 1, но и сделать это управление наилучшим (в некотором смысле) по сравнению с другими возможными управлениями. Критерий качества управления примем в виде

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, \mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t]) dt,$$

где $\omega = \omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0$ – скалярная, непрерывная в области (2.11) функция; $\mathbf{x}[t]$ – решение системы (2.10) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}[t] = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}[t])$.

З а д а ч а 3 (В.В. Румянцев [1970, 1971]). *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathbf{0}}(t, \mathbf{x}) \in$ $\in U$, *обеспечивающую асимптотическую* $\mathbf{y}$-*устойчивость положения равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.10), *причем для любой другой вектор-функции* $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in U$, *удовлетворяющей этому условию, должно выполняться неравенство*

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, \mathbf{x}^{\mathbf{0}}[t], \mathbf{u}^{\mathbf{0}}[t]\right) dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{u}^*[t]\right) dt,$$

$$t_0 \geq 0, \quad \mathbf{x}^{\mathbf{0}}[t_0] = \mathbf{x}^*[t_0] = \mathbf{x}_{\mathbf{0}}, \quad \|\mathbf{x}_{\mathbf{0}}\| < \delta = \text{const } > 0.$$

2.3.4. Стабилизация по отношению к целевой функции. Эта задача рассматривается для нелинейных управляемых систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ при достаточно общих предположениях относительно вектор-функции $\mathbf{X}$ и гладкой целевой V-функции.

Пусть D – некоторая заданная область начальных значений $\mathbf{x}_{\mathbf{0}}$.

З а д а ч а 4 ([198, 88]). *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, *для любых начальных значений* $\mathbf{x}_{\mathbf{0}} \in D$ *обеспечивающую цель управления*

$$V(\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_{\mathbf{0}})) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{2.14}$$

В случае, когда целевая функция не является положительно определенной по всем переменным, задача 4 относится к классу задач частичной стабилизации.

2.4. Мотивы, побуждающие к исследованию задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления

Ряд общих ситуаций и конкретных проблем, приводящих к исследованию задач частичной устойчивости и стабилизации, а также задач управления по части переменных, уже проанализирован в литературе [22, 319, 33]. Этот анализ позволил, в свою очередь, выделить основные мотивы такого рода исследований.

1. Наличие систем с избыточными (так называемыми "лишними") переменными. Проблема устойчивости (стабилизации) и управления "по выходу"; наличие "частичных" положений равновесия у исследуемых систем.

2. Достаточность свойства частичной устойчивости для нормального функционирования многих систем в реальных условиях их работы; достаточность решения задачи управления только по части переменных, характеризующих состояние системы.

3. Необходимость (желательность) изучения задачи частичной устойчивости и стабилизации для строгой математической формализации реально протекающих явлений или желаемых процессов в системе.

4. Оценка возможностей работы проектируемой системы в "нештатных" ситуациях, где "лучшая" устойчивость заведомо невозможна; невозможность решения задачи управления по всем переменным (в силу, например, неуправляемости системы или слишком большой затраты ресурсов).

5. Существенные трудности строгого исследования устойчивости по всем переменным во многих возникающих в приложениях случаях; необходимость оценки переходного процесса системы лишь по некоторым (основным) переменным.

6. Решение задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления как вспомогательных. При этом часто из устойчивости (стабилизации) или управляемости по одним переменным следует устойчивость (стабилизация) или управляемость и по оставшимся переменным. В других случаях устойчивость (стабилизируемость) ли управляемость по всем переменным может оказаться удобным доказать последовательным исследованием, в том числе и разными методами, нескольких задач частичной устойчивости (стабилизации) или управления.

Указанные мотивы исследований показывают, что смысл понятия частичной устойчивости (в отличие от устойчивости по всем переменным) – не только в том, что оно задает некоторую соответствующим образом математически сформулированную "меру прочности" рассматриваемых явлений и управляемых процессов или положений равновесия. В рамках задач частичной устойчивости возможна также строгая математическая формулировка ряда явлений и управляемых процессов, происходящих в динамических системах. С этой точки зрения смысловой аспект задач частичной устойчивости представляется более многоплановым.

3. Основные направления развития теории и методов исследования частичной устойчивости (стабилизации) и управления

Начиная с основополагающей работы В.В. Румянцева [109], к середине 70-х гг. XX столетия усилиями ряда ученых найдены модификации известных теорем метода функции Ляпунова (МФЛ) применительно к задачам устойчивости и стабилизации по части переменных для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью [109, 42, 208, 184, 85, 278, 266, 36, 267, 116, 274, 193, 117, 280, 95, 185, 96, 283, 97]. Показана принципиальная применимость полученных результатов к задачам устойчивости сплошных сред и решен ряд прикладных проблем, связанных с устойчивостью движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью [110, 111, 113, 91], упругими элементами [322, 248], а также с устойчивостью и стабилизацией голономных и неголономных систем с конечным числом степеней свободы [120].

Проведенные исследования также выявили принципиальные трудности на пути переноса основных теорем МФЛ на случай задач частичной устойчивости. Это, прежде всего: 1) необходимость отдельного доказательства желательного для приложений свойства равномерности асимптотической устойчивости по части переменных даже в случае автономных систем; 2) вынужденность дополнительного требования ограниченности (по "неконтролируемым" переменным) решений исследуемых систем для перенесения на задачу частичной устойчивости широко используемой схемы доказательства теорем типа Барбашина – Красовского.

Затем возник и получил развитие другой подход к проблемам частичной устойчивости и стабилизации [21, 319], опирающийся на первый метод Ляпунова. В рамках данного подхода рассмотрены задачи устойчивости и стабилизации по части переменных для линейных систем и по линейному приближению, а также разработаны некоторые пути конструктивного построения функций Ляпунова для нелинейных систем. Показано, что класс нелинейных систем, для которых вопрос об устойчивости по части переменных решается линейным приближением, можно существенно расширить, если вместо линейной части исходной нелинейной системы рассматривать специально построенную систему линейного приближения, эквивалентную некоторой нелинейной подсистеме исходной нелинейной системы. В процессе указанных исследований начато и изучение механизмов возникновения (потери) свойств частичной устойчивости. Это позволило понять и осмыслить поведение частично устойчивых систем в условиях аддитивных (постоянно действующих), параметрических и структурных возмущений, а также осознать не только заманчивые возможности задач частичной устойчивости, но и проблемы с обеспечением нормального функционирования частично устойчивых систем (см. подробнее [22]). С другой стороны, принципиальное значение стало уделяться изучению задач частичной устойчивости (стабилизации) как вспомогательных на первом этапе решения задач устойчивости (стабилизации) по всем переменным. На данном пути разработан эффективный метод "эквивалентной линеаризации" для решения многочисленных задач динамики управляемого твердого тела [21, 319].

Некоторые другие, а также дальнейшие исследования задач частичной устойчивости и стабилизации связаны с развитием и совершенствованием указанных подходов, объединением лежащих в их основе идей, а также с использованием современных достижений качественной теории дифференциальных уравнений (методы топологической динамики, усреднения, дифференциальной геометрии, и другие). Кроме того, предметом исследования стали как более общие задачи частичной устойчивости (стабилизации), так и более общие модели систем. Более конкретно, в центре внимания оказались следующие вопросы.

1. Преодоление выявленных принципиальных трудностей на пути переноса основных теорем МФЛ на случай задач устойчивости по части переменных, а также анализ этих задач на основе современных достижений в области топологической динамики. Важными на данном пути являются работы [8, 210, 9, 212, 213, 10, 11], которые развивают классические результаты Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского для автономных систем в двух направлениях. Во-первых, удалось рассмотреть асимптотическую устойчивость по части переменных для автономных систем, "неконтролируемые" переменные которых не ограничены. Во-вторых, введение соответствующих предельных систем и предельных функций Ляпунова позволило рассмотреть аналогичные вопросы и для неавтономных систем. Асимптотическая устойчивость по части переменных и предельные уравнения рассмотрены также в ряде других работ [171, 64, 281, 335, 77].

2. Анализ влияния области, в которой происходит построение функций Ляпунова, на свойства этих функций. На основе изучения факторов, определяющих допущения на "неконтролируемые" переменные, предложен метод варьирования (сужения) области, в которой происходит построение функций Ляпунова. В результате при исследовании частичной устойчивости оказалось возможным использовать функции Ляпунова более широкого класса: они не являются, вообще говоря, знакоопределенными в смысле Ляпунова – Румянцева, а их производные могут быть даже знакопеременными в областях (2.3) и (2.8). Это существенно расширяет рамки использования МФЛ при изучении частичной устойчивости [23, 319, 26, 28, 29, 4].

3. Анализ задач частичной устойчивости на основе использования МФЛ в сочетании с методом усреднения [138, 227, 7]. В данном случае вводится обобщенная функция Ляпунова, связанная с окрестностью положения равновесия, исследуемого на устойчивость. Условия накладываются на обобщенную функцию в кольцевой области (в самом положении равновесия обобщенная функция может быть не ограничена или даже не определена), а также на знак среднего от производной обобщенной функции Ляпунова, которое вычисляется интегрированием вдоль интегральных кривых невозмущенной системы. Такое обобщение метода функции Ляпунова ориентировано на применение к многочастотным системам, содержащим резонансные гармоники.

4. Унификация понятий в различных классах задач частичной устойчивости для получения единых условий разрешимости [267, 28]. Расширились и сами трактовки понятий частичной устойчивости. Побуждающие мотивы к этому, в частности, связаны не только с необходимостью обеспечения возможностей указанной модификации, но и с желанием ослабить требования к функциям Ляпунова при изучении ранее введенных понятий. В результате помимо задач частичной устойчивости, частичной асимптотической и равномерной частичной асимптотической устойчивости, стали рассматриваться, например:

– устойчивость по части переменных при любых или больших начальных возмущениях "неконтролируемой" части переменных [278, 120, 21, 319, 29];

– частичная эквиасимптотическая устойчивость, промежуточная к свойствам частичной асимптотической устойчивости и равномерной частичной асимптотической устойчивости [266, 120, 48, 4];

– квазиустойчивость “частичных” положений равновесия [28, 29, 31]; см. определения 4, 6.

5. Унификация методов исследования в теории частичной устойчивости и теории устойчивости по всем переменным неавтономных систем [182, 183], позволяющая рассматривать теорию устойчивости по всем переменным неавтономных систем как специальный случай теории частичной устойчивости автономных систем. При этом используются понятия частичной устойчивости типа введенных в определениях 3 и 5. Заметим также, что сравнение данных двух теорий дает возможность увидеть специфические особенности задач устойчивости по части переменных автономных систем в привычном свете отличий, имеющих место при анализе устойчивости по всем переменным автономных и неавтономных систем. Например, становится понятным, почему свойство асимптотической устойчивости по части переменных (в отличие от свойства асимптотической устойчивости по всем переменным) автономных систем не является, вообще говоря, равномерным.

С более общих позиций теорию устойчивости по всем переменным неавтономных систем можно рассматривать как частный случай теории устойчивости произвольных замкнутых (некомпактных) множеств, охватывающей задачу устойчивости “частичных” положений равновесия. Соответствующие аналогии можно провести также и между теорией устойчивости по части переменных неавтономных систем и теорией устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия автономных систем.

6. Изучение трактовок задач частичной устойчивости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

– при постоянно действующих возмущениях [58, 100, 255, 120, 45, 21, 319];

– интегральной [254, 296, 282] и технической устойчивости по части переменных [42, 323, 78, 79, 162, 138, 227].

7. Изучение задач частичной устойчивости для более общих классов систем:

– функционально-дифференциальных [208, 186, 146, 151–153, 50, 128, 173, 174, 54, 59, 122, 21, 237, 298, 319, 13, 49, 312, 33, 219, 168, 141];

– дискретных [264, 123, 94, 137, 51, 18, 179, 240, 314, 180, 290];

– стохастических [147, 142, 291, 138, 21, 227, 319, 272, 33, 246];

– стохастических дискретных [270] и стохастических функционально-дифференциальных [52, 53];

– дифференциально-алгебраических [162, 262];

– с импульсным эффектом [299, 333, 156, 268, 331, 203, 204];

– с многозначной правой частью [311] и дифференциальных включений [263, 313].

8. Выход на новый уровень обобщений, связанный с развитием задач частичной устойчивости для абстрактных общих динамических систем в метрическом пространстве, нелинейных непрерывных полугрупп, а также для систем дискретных событий [249–252, 308–310, 341], позволивший существенно расширить круг вопросов, рассматриваемых в рамках задач частичной устойчивости.

9. Изучение особенностей функционирования частично устойчивых систем, механизмов потери и возникновения свойств частичной устойчивости, попытки выделить общие стратегии исследования задач частичной устойчивости путем анализа факторов, определяющих допущения на “неконтролируемые” переменные [21–23, 319, 33].

10. Использование методов исследования частичной устойчивости (стабилизации) для решения задач устойчивости (стабилизации) по всем переменным [208, 21, 319, 33]. Это позволяет не только расширить область применения разработанных в теории частичной устойчивости (стабилизации) подходов, но и лучше понять роль и место задач частичной устойчивости (стабилизации) в ряду основных проблем

теории систем, а также решить ряд трудных прикладных задач, анализ которых другими методами затруднен.

11. Анализ задач частичной устойчивости (стабилизации) в связи с проблемами управления хаосом [199, 14, 15, 200], а также в связи с геометрическими проблемами нелинейной динамики [198, 169, 88, 87, 256, 257], что позволило по-новому взглянуть на саму проблематику задач частичной устойчивости и стабилизации.

12. Изучение тесно связанных с теорией частичной устойчивости задач ограниченности по части переменных решений систем обыкновенных [332, 266, 275, 175, 164, 178, 176, 177], а также функционально-дифференциальных уравнений [209, 155, 329].

К данному направлению также относится задача ограниченности по части переменных инвариантных множеств [41].

3.1. Развитие метода функций Ляпунова применительно к задачам устойчивости по части переменных

Введем два класса вспомогательных функций. 1) Однозначные, непрерывные, удовлетворяющие условию $V(t,\mathbf{0}) \equiv 0$ функции $V(t,\mathbf{x})$, обладающие в области (2.3) непрерывными частными производными по t, $\mathbf{x}$, а также их полные производные по времени $\dot{V}$, взятые в силу системы (2.1). 2) Непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in [0,h]$ функции $a(r)$, $b(r)$, $c(r) \in K$ – функции типа Хана [207, 277, 301]; см. раздел 2.2.

3.1.1. Обобщения теоремы Ляпунова об устойчивости. При изучении частичной устойчивости в общем случае V-функция зависит не только от переменных, устойчивость по отношению к которым изучается, но и от остальных переменных, и не удовлетворяет условиям классической теоремы Ляпунова – не является знакоопределенной по всем переменным (знакоопределенной по Ляпунову). Поэтому для обобщения теоремы Ляпунова об устойчивости на системы, в которых исследуется устойчивость по части переменных, В.В. Румянцевым [109] введено понятие V-функции, знакоопределенной по отношению к части переменных.

Определение 12 ([109]). *Функция $V(t,\mathbf{y},\mathbf{z})$ называется $\mathbf{y}$-определенно положительной, если существует однозначная, непрерывная функция $W(\mathbf{y})$, $W(\mathbf{y}) > 0$ при $\|\mathbf{y}\| < h$, $W(\mathbf{0}) = 0$ такая, что в области* (2.3) *справедливо неравенство $V(t,\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq W(\mathbf{y})$.*

Показано [184], что V-функция является $\mathbf{y}$-определенно положительной функцией тогда и только тогда, когда в области (2.3) справедливо неравенство $V(t,\mathbf{y},\mathbf{z}) \geq a(\|\mathbf{y}\|)$, $a \in K$, более удобное при проведении доказательств теорем МФЛ. Заметим, что хотя это и может показаться странным на первый взгляд, однако V-функция, знакоопределенная по всем переменным, может не быть знакоопределенной по части переменных в смысле определения 12 [120, 319].

Теорема 1 ([109]). *Пусть для системы* (2.1) *возможно найти V-функцию, удовлетворяющую в области* (2.3) *условиям*

$$V(t,\mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\|), \quad \dot{V}(t,\mathbf{x}) \leq 0. \tag{3.1}$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) *$\mathbf{y}$-устойчиво.*

В работах [127, 184] отмечено, что если при условиях теоремы 1 также справедливо неравенство $V \leq b(\|\mathbf{x}\|)$, то $\mathbf{y}$-устойчивость, как и в классическом случае, является равномерной. Если же, помимо (3.1), выполняется условие $V \leq b(\|\mathbf{y}\|)$, то $\mathbf{y}$-устойчивость является $\mathbf{y}$-устойчивостью в целом по $\mathbf{z_0}$ равномерной по t_0 [278, 193] и, кроме того, система (2.1) имеет равномерно устойчивое “частичное” положение равновесия (инвариантное множество) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ [120]; см. также раздел 3.2.

Дальнейшее развитие теоремы Ляпунова – Румянцева связано с расширением класса используемых V-функций.

Определение 13 ([22, 319]). *Функция $V = V(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ называется $\mathbf{y}$-определенно положительной $\boldsymbol{\mu}$-функцией V, если найдется однозначная, непрерывная вектор-функция $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, такая, что $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, и в области*

$$t \geq 0, \quad \|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\| \leq h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{3.2}$$

справедливо неравенство $V(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\|)$.

Подчеркнем, что уже в случае $\dim(\mathbf{y}) = \dim(\mathbf{z}) = 1$ в качестве $\boldsymbol{\mu}$-функции V может быть выбрана функция $V(y_1, z_1)$, не являющаяся знакоопределенной ни по y_1, z_1 (в смысле Ляпунова), ни по y_1 (в смысле определения 9) [22, 23, 319].

Теорема 2 ([23, 319]). *Пусть для системы* (2.1) *найдутся скалярная $V(t, \mathbf{x})$ и векторная $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ функции, такие, что в области* (3.2) *выполняются условия*

$$V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\|), \quad \dot{V} \leq 0. \tag{3.3}$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) *$\mathbf{y}$-устойчиво.*

Данный результат показывает, что выбор V-функций в задаче $\mathbf{y}$-устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) возможен не только среди знакоопределенных по отношению к $\mathbf{y}$ (или по отношению к большему числу фазовых переменных) функций. Целесообразно также рассматривать V-функции более широкого класса, знакоопределенные как по отношению к $\mathbf{y}$, так и (одновременно) по отношению к некоторым функциям $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$: такие V-функции не обязательно являются знакоопределенными в смысле Ляпунова и Румянцева, а их производные могут быть даже знакопеременными в области (2.3).

3.1.2. Условия асимптотической устойчивости по части переменных, основанные на V-функциях со знакоопределенной производной. В данном направлении получен ряд результатов [109, 267, 116, 96, 283, 120, 319, 26], обобщающих классические теоремы Ляпунова и Марачкова.

Условия теоремы Ляпунова применительно к задаче асимптотической устойчивости по части переменных формулируются следующим образом.

Теорема 3 ([109, 116, 319]). *Пусть для системы* (2.1) *найдутся скалярная $V(t, \mathbf{x})$ и векторная $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ функции такие, что в области* (2.3) *при $\mathbf{w} = \left[\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\right]^{\mathrm{T}}$ выполняются условия*

$$a(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{w}\|), \quad \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -c(\|\mathbf{w}\|). \tag{3.4}$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) *равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво.*

В первоначальном варианте теоремы [109, 116] $\mathbf{w} = (x_1, \ldots, x_k)^{\mathrm{T}}$, $\dim(\mathbf{y}) \leq k \leq \dim(\mathbf{x})$; однако в этом случае условия (3.4) могут оказаться излишне ограничительными [21, 319]. В литературе также часто приводятся условия асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости:

1) $a(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{y}\|), \quad \dot{V} \leq -c(\|\mathbf{y}\|);$

2) $a(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq b(\|\mathbf{x}\|), \quad \dot{V} \leq -c(\|\mathbf{x}\|),$

являющиеся частными случаями условий (3.4). Отметим, что их первая группа фактически дает условие равномерной асимптотической устойчивости “частичного” положения равновесия (инвариантного множества) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$; такие условия при некоторых дополнительных предположениях относительно правой части системы (2.1) являются не только достаточными, но и необходимыми [95].

Дальнейшее развитие теоремы 3 возможно на пути использования знакоопределенной $\boldsymbol{\mu}$-функции V: вместо проверки условий (3.4) в области (2.3) достаточно проверить существенно более слабые условия [319]

$$a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{x})\|) \le V(t,\mathbf{x}) \le b(\|\mathbf{w}\|), \quad \dot{V}(t,\mathbf{x}) \le -c(\|\mathbf{w}\|)$$

в области (3.2). В данном случае V-функция не обязательно является знакоопределенной в смысле Ляпунова и Румянцева, а ее производная может быть даже знакопеременной в области (2.3).

Для случая неравномерной асимптотической устойчивости по части переменных можно использовать модификацию теоремы Марачкова.

Т е о р е м а 4 ([267, 96]). *Пусть в области* (2.3) *выполнены условия*

$$V(t,\mathbf{x}) \le a(\|\mathbf{y}\|), \quad \dot{V} \le -c(\|\mathbf{y}\|), \tag{3.5}$$

и, кроме того, для любого $t_0 \ge 0$ *найдется* $\delta'(t_0) > 0$ *такое, что для любой точки* $\mathbf{x_0}$ *с* $\|\mathbf{x_0}\| < \delta'$ *каждая компонента* Y_i, $i = \overline{1,m}$, $(m = \dim(\mathbf{y}))$ *вектор-функции* $\mathbf{Y}(t,\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x_0}))$ *при всех* $t \ge t_0$ *ограничена или сверху или снизу числом* $N(t_0,\mathbf{x_0})$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) *асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво.*

Как и в классическом случае, в условиях теоремы 4 нет требования бесконечно малого высшего предела (по терминологии А.М. Ляпунова) ни по всем (условие $V \le b(\|\mathbf{x}\|)$), ни по части переменных (условие $V \le b(\|\mathbf{y}\|)$) – впервые условия такого типа при рассмотрении задачи устойчивости по всем переменным получены В.П. Марачковым. При этом, в отличие от классического случая, требуется ограниченность лишь вектор-функции $\mathbf{Y}$, а не всей вектор-функции $\mathbf{X} = \left(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$. Естественно, проверка ограниченности $\mathbf{Y}$ в области (2.3) более затруднена, поскольку приходится считаться с возможной $\mathbf{z}$-неограниченностью решений системы (2.1).

Дальнейшее развитие теоремы 4, как и теоремы 3, возможно на пути использования знакоопределенной $\boldsymbol{\mu}$-функции V: вместо проверки условий (3.5) в области (2.3) достаточно в области (3.2) проверить существенно более слабые условия [319]

$$V(t,\mathbf{x}) \ge a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{x})\|), \quad \dot{V} \le -c(\|\mathbf{y}\|). \tag{3.6}$$

Еще более общий результат получается [26], если в (3.6) условие на $\dot{V}$ ослабить, используя идею работы [284].

Т е о р е м а 5 ([26]). *Пусть существует скалярная* V *и две векторных* $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{\mu}$ *функции, такие что в области* (3.2) *справедливы условия:*

1) $V(t,\mathbf{x}) \ge a(\|\mathbf{y}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{x})\|)$, $\dot{V} \le -c(\|\mathbf{U}(t,\mathbf{x})\|)$, $\|\mathbf{U}\| \ge b(\|\mathbf{y}\|)$;

2) *для любого* $t_0 \ge 0$ *найдется* $\delta'(t_0) > 0$ *такое, что для любой точки* $\mathbf{x_0}$ *с* $\|\mathbf{x_0}\| < \delta'$ *каждая компонента вектор-функции* $\dot{\mathbf{U}}(t,\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x_0}))$ *при всех* $t \ge t_0$ *ограничена или сверху или снизу числом* $N(t_0,\mathbf{x_0})$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) *асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво.*

Условия теоремы 5 переходят в условия теоремы 4 при $\mathbf{U} = \mathbf{y}$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, а при $\mathbf{U} = \mathbf{y}$ получаем условия (3.6). Заметим также, что в иной форме идея сужения области (2.3) при проверке свойств производной V-функции в задачах асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости высказана в работе [266].

3.1.3. Условия асимптотической устойчивости по части переменных, основанные на V-функциях со знакопостоянной производной. В большинстве случаев удается построить V-функцию лишь со знакопостоянной $\dot{V} \le 0$ (а не знакоопределенной) производной. Условия асимптотической устойчивости по отношению ко всем переменным в этом случае получены Е.А. Барбашиным и Н.Н. Красовским для автономных систем при дополнительном требовании к множеству $M = \left\{\mathbf{x} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\right\}$.

При переносе схемы доказательства теоремы Барбашина – Красовского на случай устойчивости по части переменных [274, 280, 97, 24, 319] возникло требование $\mathbf{z}$-ограниченности решений системы (2.1), начинающихся в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Это требование является исходным в теореме 6.

Теорема 6. *Пусть для автономной системы* (2.1) *возможно указать V-функцию, удовлетворяющую в области $\|\mathbf{y}\| \le h$, $\|\mathbf{z}\| \le H < \infty$ условиям*

$$V(\mathbf{x}) \ge a(\|\mathbf{y}\|), \quad \dot V = 0 \ (\mathbf{x} \in M), \quad \dot V < 0 \ (\mathbf{x} \overline{\in} M). \tag{3.7}$$

1. *Если множество $M \cap \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) > 0\}$ не содержит целых полутраекторий при $t \in [t_0, \infty)$, то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы* (2.1) *равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво* [280, 97].

2. *Если найдется векторная $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$-функция, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, такая что множество $M_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ инвариантно, а множество $M \setminus M_1$ не содержит целых полутраекторий при $t \in [t_0, \infty)$, то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво* [274, 24, 319].

В первоначальном варианте второй части теоремы [274] $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$; в случае $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \ne \mathbf{0}$ можно показать [24, 319], что условия второй части теоремы 6 могут быть применимы, когда условия первой части теоремы 6 не выполняются. Теорема 6 (при $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$) доказана также для случаев, когда правая часть системы (2.1) является периодической или почти-периодической функцией t [280, 47].

Приведен пример [97], показывающий, что без требования $\mathbf{z}$-ограниченности решений теорема 6, вообще говоря, не верна. Предложено [210] два пути снятия этого ограничения, которые предполагают соответственно:

1) дополнительные требования к V-функции при $\|\mathbf{z}\| \to \infty$;

2) возможность построения "предельной" системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}_*(\mathbf{y}), \tag{3.8}$$

($\mathbf{Y}_* = \lim \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ при $\|\mathbf{z}\| \to \infty$ равномерно по $\mathbf{y}$, $\|\mathbf{y}\| \le h' < h$), получающейся из первой группы уравнений исходной системы (2.1) при $\|\mathbf{z}\| \to \infty$.

Обозначим [210] через $V_m^{-1}[c, \infty]_0$ множество $\{\mathbf{y}\}$, для которых существует последовательность $\dot V(\mathbf{y_i}, \mathbf{z_i})$ такая, что $\mathbf{y_i} \to \mathbf{y}$, $\|\mathbf{z_i}\| \to \infty$, $V(\mathbf{y_i}, \mathbf{z_i}) \to c$ и $\dot V(\mathbf{y_i}, \mathbf{z_i}) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 7 ([210]). *Пусть для автономной системы* (2.1) *возможно указать V-функцию такую, что в области* (2.3) *выполнены условия* (3.7), *а также имеет место одно из двух условий:*

1) *существует число $\rho > 0$ такое, что $V \to \infty$ при $\mathbf{y} \to \mathbf{y}^*$, $\|\mathbf{z}\| \to \infty$, $0 < \|\mathbf{y}^*\| < \rho$, и если множество $M \cap \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) > 0\}$ содержит целые полутраектории системы* (2.1), *то эти полутраектории содержатся в множестве $M_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$;*

2) *для каждого $c > 0$ множество $V_m^{-1}[c, \infty]_0$ не содержит целых полутраекторий предельной системы* (3.8) *за исключением $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.*

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) *асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво.*

В [10, 11] выдвинута новая идея $\mathbf{z}$-предельных систем, позволившая сделать дальнейший существенный шаг в решении проблемы снятия требования $\mathbf{z}$-ограниченности решений системы (2.1). В отличие от предельных систем типа (3.8), такие $\mathbf{z}$-предельные системы позволяют учитывать $\mathbf{z}$-свойства решений исходной системы (2.1). Условием существования $\mathbf{z}$-предельной системы для автономной системы (2.1) является $\mathbf{z}$-предкомпактность ее сдвигов: для любой последовательности $\boldsymbol{\eta}_n \to \infty$ должна существовать подпоследовательность $\{\boldsymbol{\eta}_{nk}\} \in \{\boldsymbol{\eta}_n\}$ и вектор-функция $\mathbf{X}^*(\mathbf{x})$ такие, что $\mathbf{X}(\mathbf{y}, \mathbf{z} + \boldsymbol{\eta}_{nk}) \to \mathbf{X}^*(\mathbf{x})$ равномерно на каждом компакте

$\{\|\mathbf{y}\| \le h' < h,\ \|\mathbf{z}\| \le Q\}$. Тогда система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(\mathbf{x})$ будет $\mathbf{z}$-предельной к (2.1). Для $\mathbf{z}$-предкомпактности сдвигов системы (2.1), в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ была ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $S = \{\|\mathbf{y}\| \le h_1 < h,\ \|\mathbf{z}\| < \infty\}$. Аналогичные условия требуются и для существования предельных V-функций.

Т е о р е м а 8 ([10]). *Пусть для $\mathbf{z}$-предкомпактной автономной системы* (2.1) *в области* (2.3) *найдется V-функция, такая что:*

1) $V(\mathbf{x}) \ge a(\|\mathbf{y}\|)$, $\dot{V} \le -W(\mathbf{x}) \le 0$;

2) *функции V, W являются $\mathbf{z}$-предкомпактными и для любой предельной совокупности $(\mathbf{X}^*, V^*, W^*)$, определенной для одних и тех же последовательностей $\boldsymbol{\eta}_n \to \infty$, множество $\{V^*(\mathbf{x}) = \text{const} > 0\} \cap \{W^*(\mathbf{x}) = 0\}$ не содержит целых полутраекторий $\mathbf{z}$-предельной системы.*

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) *равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво.*

При анализе асимптотической устойчивости по части переменных неавтономных систем в случае $\dot{V} \le 0$ наметились два направления: 1) опирающееся на использование двух или нескольких V-функций; 2) связанное с построением предельных систем и предельных V-функций.

Применению двух функций Ляпунова к решению задачи устойчивости по части переменных посвящен ряд работ [266, 193, 96, 283, 139, 211, 120]. Концепция вектор-функции $\mathbf{V}$, приведшая затем к развитию общего принципа сравнения с вектор-функцией $\mathbf{V}$, еще в большей мере расширяет возможности анализа устойчивости неавтономных систем; см. раздел 3.1.4.

В рамках другого направления исследований, связанного с построением предельных систем и V-функций, рассматриваются такие общие классы неавтономных систем, для которых предельные множества решений обладают некоторыми характерными для автономного случая свойствами типа инвариантности относительно семейства предельных систем [8, 210, 9, 212, 213, 10, 11].

3.1.4. Применение дифференциальных неравенств и вектор-функций Ляпунова. Пусть в области (2.3) V-функция Ляпунова в силу системы (2.1) удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{V} \le \omega(t, V(t, \mathbf{x})), \quad \omega(t, 0) \equiv 0. \tag{3.9}$$

Если $V \ge a(\|\mathbf{y}\|)$, то при достаточно общих допущениях на функцию ω в (3.9) из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения $v = 0$ уравнения сравнения $\dot{v} = \omega(t, v)$ следует [184] $\mathbf{y}$-устойчивость (асимптотическая $\mathbf{y}$-устойчивость) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1).

Для нелинейных систем высокой размерности построение единой функции Ляпунова от всех переменных крайне затруднено и целесообразно использовать [163, 84] несколько функций Ляпунова (иначе – векторную $\mathbf{V}$-функцию), удовлетворяющих некоторой системе дифференциальных неравенств

$$\dot{\mathbf{V}} \le \mathbf{f}(t, \mathbf{V}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

К каждой функции Ляпунова из этой совокупности (вектор-функции) предъявляются менее жесткие требования, чем в теоремах с одной функцией Ляпунова. Дано приложение [85] метода вектор-функции Ляпунова (МВФЛ) к задаче частичной устойчивости; затем этот вопрос рассматривался в ряде публикаций [266, 267, 297, 120, 21, 319].

Т е о р е м а 9 ([86]). *Предположим, что для системы* (2.1) *в области* (2.3) *возможно указать удовлетворяющую системе* (3.10) *вектор-функцию $\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = [V_1(t, \mathbf{x}), \ldots, V_k(t, \mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$, такую, что:*

1) $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)^{\mathrm{T}}$ *определена и непрерывна в области* $t \geq 0$, $\|\mathbf{V}\| \leq R$, *а* $R = \infty$ *или* $R > \sup[\|\mathbf{V}(t;\mathbf{x})\| : t \geq 0, \|\mathbf{y}\| \leq h]$, *причем каждая из* $f_s(t, V_1, \ldots, V_k)$, $s = \overline{1,k}$ *не убывает по* $V_i (i \neq s)$;

2) $\max V_i(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y}\|)$, $i = \overline{1,l}$ $(1 \leq l \leq k)$;

3) *решение* $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ *системы сравнения* $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\omega})$ *устойчиво (асимптотически устойчиво) по* $\omega_1, \ldots, \omega_l$.

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y}$*-устойчиво (асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво).*

С позиций обсуждаемых проблем отметим, что если $\max\ V_i(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{x}\|)$, $i = \overline{1,l}$, то из устойчивости по части переменных нулевого решения системы сравнения $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\omega})$ следует устойчивость по всем переменным невозмущенного движения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ исходной системы (2.1). Это обстоятельство показывает, что два вида устойчивости – по всем и по части переменных, оказываются тесно связанными и дополняющими друг друга при решении практических задач. Развитие теоремы 9 на случай, когда $\dot{\mathbf{V}} \leq \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{V})$ [140], расширяет возможности использования МВФЛ при решении конкретных задач частичной устойчивости.

В настоящее время в теории устойчивости развивается также метод матричных функций Ляпунова, в том числе применительно к задаче частичной устойчивости [247].

3.1.5. Проблемы обращения теорем МФЛ и построение V-функций Ляпунова. При построении V-функций неизбежно встает вопрос: всегда ли при наличии в системе того или иного типа устойчивости существует V-функция с соответствующими свойствами? Возникает проблема обращения теорем МФЛ, впервые поставленная Н.Г. Четаевым еще в 30-е гг. XX столетия.

Указанная проблема рассматривалась также и применительно к задаче частичной устойчивости [42, 208, 184, 185, 95, 318, 101, 120, 122, 21, 319, 168, 258]. Хотя при этом, как и в классическом случае, в основном удалось установить лишь сам факт существования V-функций для ряда теорем МФЛ, тем не менее имеются методы их построения, такие как:

1) метод Четаева связки первых интегралов, эффективно использующийся при анализе механических систем [109, 91, 277, 120, 93, 339];

2) методы построения вспомогательных систем [42, 21, 319];

3) методы построения предельных систем и предельных V-функций [8, 210, 9, 212, 213, 10, 11];

4) метод варьирования (сужения) допустимой области "неконтролируемых" переменных [23, 319, 26].

Проблема обращения теорем МФЛ анализировалась и для задач устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств [325, 242, 313], по двум мерам [235, 234], "от входа к выходу" [307, 222].

3.1.6. Анализ факторов, определяющих допущения на "неконтролируемые" переменные. В задаче $\mathbf{y}$-устойчивости положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1), (2.2) поведение $\mathbf{z}$-переменных (при соблюдении общих условий) в принципе не требует контроля. В то же время допущения на эти переменные позволяют существенно ослабить требования, предъявляемые к функциям Ляпунова. В этой связи проанализированы [23, 319] факторы, определяющие допущения на "неконтролируемые" $\mathbf{z}$-переменные.

1. Расчет на "наихудший" (при соблюдении общих условий) случай изменения "неконтролируемых" $\mathbf{z}$-переменных. Такой расчет приводит к допущению $\|\mathbf{z}\| < \infty$ и в итоге к изучению $\mathbf{y}$-устойчивости положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) в области (2.3). Подобный расчет может оказаться излишне осторожным. Действительно, не используются имеющие место (или допустимые) неравенства $|z_i| \leq h$ для некоторых

$\mathbf{z}$-компонент или соотношения типа $|f_i(t,\mathbf{x})| \le h$. Такие соотношения могут существенно облегчить исследование $\mathbf{y}$-устойчивости. В известной мере указанный расчет на "наихудший" случай в задачах частичной устойчивости можно сравнить с концепцией теории игр.

2. Расчет на конкретизацию требований к "неконтролируемым" $\mathbf{z}$-переменным. Это альтернатива расчету на "наихудший" случай. Смысл подобного расчета различен, и можно выделить три мотива.

1. Рационализация самой постановки задач частичной устойчивости за счет "навязывания" системе некоторых общих (в том числе – интегральных) оценок для "неконтролируемых" $\mathbf{z}$-переменных, что существенно упрощает решение. В качестве примера укажем на исследования по устойчивости движения тел, имеющих полости с жидкостью [110, 111, 113, 91], где устойчивость изучается по отношению к переменным, определяющим движение твердого тела, а также по отношению к некоторым интегральным характеристикам, определяющим движение жидкости.

2. Желание облегчить решение задач частичной устойчивости за счет использования дополнительных соотношений, связывающих компоненты фазового вектора системы (2.1). Выполнимость подобных соотношений должна подтверждаться (тем или иным способом) в процессе решения. На этот подход опираются, например, методы решения задач частичной устойчивости посредством построения вспомогательных систем, а также посредством варьирования (сужения) допустимой области изменения "неконтролируемых" переменных [21, 319, 26]; см. замену условий (3.1) в области (2.3) на условия (3.3) в области (3.2).

3. Использование оценок (сколь угодно грубых) для "неконтролируемых" $\mathbf{z}$-переменных. При этом задачу частичной устойчивости для системы (2.1) можно свести к задаче устойчивости по всем переменным для вспомогательной системы дифференциальных уравнений той же размерности [42].

3.1.7. Частичная асимптотическая устойчивость в целом. Существенным достоинством МФЛ является возможность анализа устойчивости при больших начальных возмущениях. Одной из модификаций такой задачи является задача асимптотической устойчивости в целом (задача глобальной асимптотической устойчивости). Имеются две группы условий асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости в целом, которые основаны соответственно на функциях Ляпунова с знакоопределенной или знакопостоянной производной.

Показано [117], что асимптотическая $\mathbf{y}$-устойчивость в целом положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) (равномерно по t_0, $\mathbf{y_0}$ из области $t \ge 0$, $\mathbf{y_0} \in K_y$, при произвольном значении $\mathbf{z_0}$) будет гарантирована, если при $\mathbf{w} = \mathbf{y}$ условия теоремы 3 выполнены в области $t \ge 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$ и, кроме того, $a \in K_\infty$. Указанные условия гарантируют также существование у системы (2.1) асимптотически устойчивого в целом "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ [120]. При $\mathbf{w} = (x_1, \dots, x_k)^{\mathrm{T}}$ асимптотическая $\mathbf{y}$-устойчивость в целом имеет место [120], если к условиям теоремы 3 добавить предположение о том, что $V(t,\mathbf{x}) \to \infty$, $(x_1^2 + \ldots + x_k^2)^{1/2} \to \infty$ (равномерно по $t, x_{m+1}, \dots, x_n$); соотношение (2.4) выполняется равномерно по $t \ge 0$, $(x_{10}, \dots, x_{k0}) \in$ $\in K_*$ (K_* – произвольный компакт пространства переменных $x_1, \dots, x_k$) при произвольных значениях $x_{m+1,0}, \dots, x_{n,0}$. Если при $\mathbf{w} = \big(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\big)^{\mathrm{T}}$ к условиям теоремы 3 добавить предположение $V(t,\mathbf{x}) \to \infty$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \to \infty$ (равномерно по $t, \mathbf{x}$), то асимптотическая $\mathbf{y}$-устойчивость в целом также будет гарантирована [31]; соотношение (2.4) выполняется равномерно по $t \ge 0$, $\mathbf{w} \in K_w$, (K_w – произвольный компакт $\mathbf{w}$-пространства).

Отметим, что K_* и K_w, будучи компактами соответственно в пространствах переменных $x_1, \dots, x_k$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, в то же время являются неограниченными множествами в фазовом пространстве исследуемой системы (2.1).

Условия неравномерной асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости в целом можно получить в духе теорем типа Марачкова: если условия (3.5) выполнены в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$, а для любых $t_0 \geq 0$ и $\mathbf{x_0}$ найдется число $N(t_0, \mathbf{x_0}) > 0$, такое, что $\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x_0}))\| \leq N$, то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво в целом [267]. В данном случае требование $a \in K_\infty$ не предполагается. Однако такое требование имеет место при переносе на задачу асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости в целом условий теоремы 6 [274, 319].

3.2. Единые условия разрешимости в различных классах задач частичной устойчивости

В последние годы наметилась тенденция к унификации понятий и формулированию единых условий разрешимости в различных классах задач частичной устойчивости. В самом деле, известно, что ряд условий $\mathbf{y}$-устойчивости (асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) фактически являются также условиями существования и устойчивости (асимптотической устойчивости) "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ данной системы. При этом предположение о существовании у системы (2.1) положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ может вообще не использоваться [267, 122, 21, 319, 198, 88, 28, 87, 257].

3.2.1. Задачи устойчивости по части переменных и задачи устойчивости "частичных" положений равновесия. Сформулируем единые условия частичной устойчивости: $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) и устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ этой системы, систематизирующие в том числе и ранее полученные результаты в каждом из этих классов задач. Для этого наряду с уже введенными в разделе 3.1 функциями также будем рассматривать функцию $V^*(t, \mathbf{y})$, $V^*(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, непрерывную в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{y}\| \leq h$.

Теорема 10. *Пусть для системы* (2.1) *найдется V-функция Ляпунова такая, что в области* (2.3) *выполнены условия* (3.1). *Если кроме того:*

1) $V \leq V^*(t, \mathbf{y})$, *то для системы* (2.1) *существует устойчивое "частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, *а в случае* (2.2) *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ [29]*;*

2) $V \leq b(\|\mathbf{y}\|)$, *то для системы* (2.1) *существует равномерно устойчивое "частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, *а в случае* (2.2) *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0 [278, 120]*;*

3) $V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ $(V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0,\ V \leq b(\|\mathbf{x}\|))$, *то для системы* (2.1) *существует квазиустойчивое* (*равномерно квазиустойчивое*) *"частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, *а в случае* (2.2) *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y}$*-устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ ($\mathbf{y}$*-устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0) [28].

Заметим, что условие $V \leq V^*(t, \mathbf{y})$, как и совокупность условий $V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ и $V \leq b(\|\mathbf{x}\|)$, слабее условия $V \leq b(\|\mathbf{y}\|)$. В то же время совокупность условий $V \leq V^*(t, \mathbf{y})$ и $V \leq b(\|\mathbf{x}\|)$ эквивалентна условию $V \leq b(\|\mathbf{y}\|)$. Условия третьей части теоремы 10 можно ослабить [28] путем замены условий (3.1) в области (2.3) на условия (3.3) в области (3.2).

3.2.2. Задачи устойчивости по части переменных и задачи устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия. Сформулируем единые условия частичной устойчивости: $\mathbf{y_1}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (2.1) и $\mathbf{y_1}$-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ этой системы.

Теорема 11 ([29]). *Пусть для системы* (2.1) *найдутся скалярная* $V(t, \mathbf{x})$ *и векторная* $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *функции такие, что в области* $t \geq 0$, $\|\mathbf{y_1}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\| \leq h$, $\|\mathbf{y_2}\| < \infty$, $\|\mathbf{z}\| < \infty$ *выполняются условия* $V(t, \mathbf{x}) \geq a(\|\mathbf{y_1}\| \|\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})\|)$, $\dot{V} \leq 0$. *Если кроме того:*

1) $V \leq V^*(t, \mathbf{y})$ $(V \leq b(\|\mathbf{y}\|))$, *то в случае* (2.5) *"частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y_1}$*-устойчиво (равномерно* $\mathbf{y_1}$*-устойчиво), а в случае* (2.2) *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y_1}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ ($\mathbf{y_1}$*-устойчиво в целом по* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0*);*

2) $V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ $(V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0,\ V \leq b(\|\mathbf{x}\|))$, *то в случае* (2.5) *"частичное" положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y_1}$*-квазиустойчиво* ($\mathbf{y_1}$*-квазиустойчиво равномерно по* t_0*), а в случае* (2.2) *положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) $\mathbf{y_1}$*-устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ ($\mathbf{y_1}$*-устойчиво при большом* $\mathbf{z_0}$ *равномерно по* t_0*).*

Получен также ряд единых условий разрешимости в различных классах задач частичной асимптотической, эквиасимптотической, а также равномерной асимптотической устойчивости [28, 29, 31, 4].

3.3. Исследования линейных систем, по линейному приближению и некоторых конкретных систем

К настоящему времени получили определенное развитие задачи устойчивости по части переменных:

– для общих классов линейных систем [42, 85, 266, 185, 72, 259, 32, 68, 261, 120, 20, 74, 330, 218, 239, 21, 319];

– по линейному приближению [185, 72, 105, 19, 132, 120, 20, 21, 202, 319] и нелинейному приближению [143, 21, 319, 2, 3];

– в критических случаях [98, 105, 144, 120, 20, 145, 21, 70, 319, 26];

– для некоторых конкретных систем [192, 161, 286, 181, 287, 288, 216, 201, 225, 215].

3.3.1. Устойчивость по части переменных для общих классов линейных систем. Начиная с 50-х гг. XX столетия возник интерес к задаче устойчивости по части переменных для общих классов линейных систем. Использовались методы функций и вектор-функций Ляпунова [42, 85, 185]. Здесь следует отметить критерий [185], относящийся к линейным системам

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{z}, \quad \dot{\mathbf{z}} = C(t)\mathbf{y} + D(t)\mathbf{z}, \tag{3.11}$$

с непрерывными по $t \in [t_0, \infty)$ коэффициентами.

Теорема 12 ([185]). *Для экспоненциальной асимптотической* $\mathbf{y}$*-устойчивости (в целом) линейной системы* (3.11) *необходимо и достаточно, чтобы существовала* V*-функция, удовлетворяющая условиям*

$$\|\mathbf{y}\| \leq V(t, \mathbf{x}) \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -\alpha V,$$
$$|V(t, \mathbf{x}') - V(t, \mathbf{x})| \leq M(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|),$$

где M *и* α *– положительные постоянные.*

Также предложен другой подход к задаче устойчивости по части переменных линейных систем, основанный на построении для исходной линейной системы некоторой вспомогательной линейной системы ($\boldsymbol{\mu}$-системы) той же или меньшей размерности, из устойчивости по всем переменным которой следует устойчивость по заданной части переменных исходной системы [32, 21, 319]. В случае, когда коэффициенты исходной системы постоянны, коэффициенты вспомогательной $\boldsymbol{\mu}$-системы также постоянны; однако для неавтономных систем не только с непрерывными, но и даже аналитическими коэффициентами приходится рассматривать $\boldsymbol{\mu}$-системы с разрывными (2-го рода) по t коэффициентами. Этот метод позволил получить необходимые и достаточные условия устойчивости по части переменных для линейных систем с постоянными, а также аналитическими и периодическими коэффициентами [20, 21, 319]; однако в общем случае он дает лишь достаточные условия устойчивости по части переменных и проблема нахождения конструктивных условий устойчивости по части переменных линейных систем продолжает оставаться открытой.

Идеи указанного подхода легли в основу анализа задачи полиустойчивости по части переменных линейных систем [82, 83], а также задачи исследования устойчивости по части переменных на основе квадратичных форм [101, 120]. Кроме того, данный подход распространен на другие классы линейных систем: с запаздывающим аргументом, стохастические и дискретные [270, 51, 18, 21, 319].

Известны также [72, 68] и другие условия устойчивости по части переменных для линейных автономных систем, основанные на анализе корневых векторов этих систем.

3.3.2. Устойчивость по части переменных по линейному приближению. Исследование устойчивости по части переменных нелинейных систем по линейному приближению на основе метода функций Ляпунова начато в работах [185, 97, 105]. Пусть система (2.1) имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{z} + \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{z}} = C(t)\mathbf{y} + D(t)\mathbf{z} + \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{3.12}$$

где A, B, C, D – непрерывные при $t \in [t_0, \infty)$ матричные функции соответствующих размеров; $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ – нелинейные вектор-функции.

Т е о р е м а 13 ([97, 105]). *Пусть B – нулевая матрица, коэффициенты матриц A, C, D постоянны, причем собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части. Если в области* (2.3) *имеет место условие*

$$\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| \le \alpha \|\mathbf{y}\|, \tag{3.13}$$

где $\alpha > 0$ – достаточно малое число, то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (3.12) *равномерно асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво (в целом по $\mathbf{z_0}$).*

Условие (3.13) весьма общее, однако его конструктивная проверка затруднена. Исключение составляет случай [105], когда заранее известна равномерная $\mathbf{z}$-ограниченность решений системы (2.1). В такой ситуации дальнейшие исследования пошли по двум направлениям: 1) поиск более конструктивно проверяемых условий $\mathbf{y}$-устойчивости по линейному приближению для системы (3.12), который привел к изменению точки зрения на само понятие линейного приближения [21, 319]; 2) рассмотрение более узких классов систем [120, 20, 21, 319, 26].

1. Изменение точки зрения на понятие линейного приближения. Допустим, что B и C – нулевые, а A и D – постоянные матрицы, и представим $\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ в виде $\mathbf{Y} = \mathbf{Y^0}(\mathbf{z}) + \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, где вектор-функция $\mathbf{Y^0}$ является однородной формой $\mathbf{z}$-переменных конечного порядка; $\mathbf{Y^0}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{Y}^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. В качестве системы первого приближения для исходной нелинейной системы (3.12) выберем не линейную часть этой системы, а нелинейную подсистему вида

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{Y^0}(\mathbf{z}), \quad \dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}. \tag{3.14}$$

Конечношаговой процедурой введения новых переменных вида $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{Y^0}(\mathbf{z})$ и т.д. нелинейная подсистема (3.14) сводится к линейной автономной системе. Допустим, не нарушая общности рассуждений, что такое сведение возможно уже на первом шаге введения новых переменных, и получим линейную автономную систему

$$\dot{\mathbf{w}} = A^*\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \left[\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\right]^{\mathrm{T}}, \tag{3.15}$$

условия асимптотической устойчивости по всем переменным которой являются необходимыми и достаточными условиями асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости нулевого решения нелинейной подсистемы (3.14).

В результате указанного преобразования нелинейной подсистемы (3.14) к линейной системе (3.15) из исходной нелинейной системы (3.12) выделяется подсистема

$$\dot{\mathbf{w}} = A^*\mathbf{w} + \mathbf{Z}^*(t, \mathbf{w}, \mathbf{z}).$$

Т е о р е м а 14 ([21, 319]). *Пусть все собственные числа матрицы A^* имеют отрицательные действительные части. Если в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{w}\| \leq h$, $\|\mathbf{z}\| < \infty$ имеет место условие $\|\mathbf{Z}^*(t, \mathbf{w}, \mathbf{z})\| \leq \alpha\|\mathbf{w}\|$, где $\alpha > 0$ – достаточно малое число, то положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы* (3.12) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво.*

2. Рассмотрение более узких классов систем. В русле данного направления исследований определенную завершенность получили результаты, восходящие к очень часто используемой в приложениях теореме Ляпунова – Малкина [76] об устойчивости по линейному приближению в критических по Ляпунову случаях.

Допустим, что нелинейные возмущения $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ в системе (3.12) удовлетворяют в области $t \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| \leq h$ условиям [120]

$$\mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0, \quad \mathbf{Z}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{Z}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0},$$

$$\frac{\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| + \|\mathbf{Z}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\|}{\|\mathbf{y}\|} \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\| \to 0, \quad t \geq t_0. \tag{3.16}$$

Т е о р е м а 15 ([26]). *Пусть линейная система* (3.11) *равномерно устойчива по Ляпунову и* (*одновременно*) *экспоненциально асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчива. Если выполнены условия* (3.16), *то положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *нелинейной системы* (3.12) *также равномерно устойчиво по Ляпунову и* (*одновременно*) *экспоненциально асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво.*

Теорема 15 является развитием результатов ряда работ [73, 76, 98, 99, 120, 21, 319]. В этих работах: 1) матричные функции A, B, C, D не зависят от t [21, 319], причем $B = 0$, $D = 0$ (все компоненты матриц B и D равны нулю) [76] или $B = 0$ [98]; 2) матричные функции A, C, D зависят от t, однако $B = 0$ и, кроме того, все компоненты матричных функций A и C ограничены при $t \in [t_0, \infty)$ [99, 120]. Для случая $B \equiv 0$ рассмотрен более общий класс $\mathbf{Z}$-нелинейностей [99, 120], а в случае, когда матричные функции A, C, D не зависят от t, – более общий класс $\mathbf{Y}$-нелинейностей [21, 319].

3.3.3. Анализ некоторых конкретных систем. В литературе имеется немало результатов, касающихся исследования задач частичной устойчивости для тех или иных конкретных систем. Не имея возможности провести систематизацию всех этих результатов, остановимся на некоторых из них.

Ряд вопросов, касающихся устойчивости по части переменных механических систем, возник еще во второй половине XIX в. у английского механика Дж. Рауса [279]. К рассмотрению таких вопросов естественным образом приводит разработанный Раусом метод игнорирования циклических координат. В курсе по теории дифференциальных уравнений [286], одном из первых общих курсов дифференциальных уравнений, даже предложено устойчивость по части переменных называть устойчивостью по Раусу. Однако этот термин не получил распространения в литературе. Дело, по-видимому, в том, что результаты Рауса, несмотря на их важность, касаются только отдельных классов механических систем и не обладают достаточной общностью применительно к изучению устойчивости динамических систем общего вида.

В самом начале XX столетия доказан следующий нетривиальный результат, касающийся линейных систем.

Т е о р е м а 16 ([192]). *Если для уравнения*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x = 0 \tag{3.17}$$

с непрерывными, ограниченными при $t \in [t_0, \infty)$ *коэффициентами выполняется условие* $|x(t)| \le M_1 = \mathrm{const} > 0$*, то существует положительное число* M_2 *такое, что* $|x^{(k)}(t)| \le M_2$*,* $k = \overline{1, n-1}$.

Учитывая, что для уравнения (3.17) ограниченность решений эквивалентна их устойчивости, заключаем, что из устойчивости положения равновесия $x = \ldots = x^{(n-1)} = 0$ по координате x следует устойчивость и по производным $x^{(k)}$, $k = \overline{1, n-1}$. Однако несмотря на указанный "запрет" некоторых ситуаций частичной устойчивости для уравнения (3.17), уже в случае $n = 2$ остаются возможности различных других видов частичной устойчивости этого уравнения и, в частности, возможность асимптотической устойчивости по отношению к координате x при отсутствии асимптотической устойчивости по отношению к скорости $\dot{x}$. Кроме того, обширное поле для исследований различных типов частичной устойчивости дает уравнение (3.17) с неограниченными при $t \in [t_0, \infty)$ коэффициентами [159, 285, 315, 326, 286, 273, 181, 215]. Некоторые конкретные примеры уравнения (3.17) при $n = 2$, позволяющие наглядно проиллюстрировать механизмы возникновения частичной устойчивости, можно найти в монографии [33].

В 40-х гг. XX в. найден ряд условий [161] x-притяжения положения равновесия $x = \dot{x} = 0$ нелинейного уравнения $\ddot{x} = \varphi(t)x^{\lambda}$, $\lambda > 1$; более простое доказательство этих результатов можно найти в [201]. Устойчивость по части переменных положений равновесия ряда других нелинейных уравнений анализируется в работах [287, 288, 216, 225], где можно найти библиографию по данной проблеме. Получен [121] аналог теоремы 16 для линейных систем с запаздыванием и показано [63], что эта теорема неприменима для линейных систем с запаздыванием нейтрального типа.

3.4. Особенности функционирования частично устойчивых систем

Устойчивость и асимптотическая устойчивость по части переменных являются достаточно тонкими свойствами системы (2.1). Необходимая "стабильность" таких свойств, в отличие от свойства равномерной асимптотической устойчивости по Ляпунову, определяется бо́льшим числом факторов. Это обстоятельство требует глубокого проникновения в сущность задач частичной устойчивости, понимания законов функционирования частично устойчивых систем, механизмов возникновения (потери) свойств частичной устойчивости. Необходимо также осознать "опасности" на пути практического использования заманчивых возможностей теории частичной устойчивости. Сформулируем некоторые положения [21–23, 319], позволяющие понять особенности функционирования частично устойчивых систем.

3.4.1. Требование предсказуемости структурных изменений – условие нормального функционирования частично устойчивых систем. Это требование вызвано бо́льшей (в сравнении со свойством равномерной асимптотической устойчивости по отношению ко всем переменным) чувствительностью любого из рассмотренных свойств частичной устойчивости к изменению структуры системы (2.1). В результате концепция "робастности" в теории частичной устойчивости не может быть столь же общей, как в теории устойчивости по всем переменным, ибо теория частичной устойчивости имеет дело с более тонкими случаями. В этих случаях "лучшая устойчивость" часто просто невозможна. Кроме того, нередко свойства частичной устойчивости не только желательны, но и необходимы, а многообразная вспомогательная функция задач частичной устойчивости может использоваться и для установления различных "робастных" свойств системы.

Лучшему пониманию проблемы способствует также выяснение характера взаимоотношений между понятиями, определяющими сохранение свойств частичной устойчивости. В их числе свойства частичной устойчивости при аддитивных постоянно действующих возмущениях (ПДВ) и параметрических возмущениях.

3.4.2. Частичная устойчивость при ПДВ не означает, вообще говоря, сохранение частичной устойчивости при малых параметрических возмущениях. Это имеет место уже в случае линейных автономных систем. Данные системы, будучи устойчивыми по части переменных при ПДВ, могут терять устойчивость даже при малом "шевелении" некоторых коэффициентов [21, 22, 319]. Указанной ситуации нет в задаче устойчивости по отношению ко всем переменным. Сделанный вывод свидетельствует об относительно меньшей ценности критериев устойчивости по части переменных при ПДВ [101] и, фактически, переносит принятие решения по использованию результатов теории частичной устойчивости на проектировщика системы в каждом конкретном случае. При этом важную роль приобретают условия сохранения свойств частичной устойчивости [184, 120, 45, 46, 21, 319].

Несмотря на указанную "хрупкость" свойств частичной устойчивости, важно подчеркнуть следующие два обстоятельства [21, 319].

1. Теряющая свойство частичной устойчивости система тем не менее часто является грубой в смысле Андронова – Понтрягина. Поскольку фазовый портрет грубой системы при малом "шевелении" параметров принципиально не изменяется, то потеря свойств частичной устойчивости в этом случае означает лишь некоторый "поворот" фазового портрета: ситуация, которая не имеет места при потере свойства устойчивости по всем переменным.

2. Возможность сохранения свойства частичной устойчивости при сколь угодно больших ПДВ в некоторых каналах системы. Теоретически возможны также случаи, когда частичная устойчивость не только сохраняется, но и даже приобретает асимптотический характер при появлении ПДВ [21, 319].

3.5. Исследования задач частичной стабилизации и управления

К числу основных методов исследования задач частичной стабилизации и управления, которые эффективно используются в приложениях, можно отнести:

– метод, основанный на применении принципа максимума для задач оптимального управления с "подвижными концами" [104];

– метод функций Ляпунова в соответствующей модификации [116, 280, 136, 120, 119, 106, 61, 134, 196, 198, 88, 44, 339, 228, 190];

– метод исследования линейных систем и по линейному приближению [36, 21, 319] для задач стабилизации по части переменных;

– метод, основанный на принципе экстремального прицеливания [66] для игровых задач оптимального управления по части переменных при неконтролируемых помехах;

– асимптотический метод [1, 157] приближенного синтеза оптимального управления по части переменных, основанный на сочетании методов малого параметра (усреднения, регулярных и сингулярных возмущений) и теории оптимального управления;

– метод "эквивалентной линеаризации" нелинейных управляемых систем, основанный на нелинейных преобразованиях переменных этих систем в сочетании со специальным выбором структуры управления [21, 319, 27, 198, 88], использующийся также и в случае управления по части переменных при неконтролируемых помехах [319, 27, 33];

– метод ориентированных многообразий [60, 230] для нахождения условий управляемости по части переменных на основе анализа системы уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям для функций Ляпунова в теории устойчивости.

Получено также [338] необходимое условие стабилизируемости по части переменных посредством обратной связи, обобщающее на случай частичной стабилизации известное необходимое условие стабилизируемости Р. Брокетта [172]. Дальнейшее развитие получила и задача частичной стабилизации бесконечномерных систем [340–343].

Остановимся более подробно на методах функций Ляпунова и "эквивалентной линеаризации" преобразований переменных для решения задач частичной стабилизации, как более близких проблематике данного обзора, а также рассмотрим задачу стабилизации по части переменных для линейных систем.

3.5.1. Применение метода функций Ляпунова. К настоящему времени можно выделить, по-видимому, три направления использования МФЛ в задачах частичной стабилизации:

– построение оптимальных функций Ляпунова для решения задач оптимальной стабилизации по части переменных [116, 280, 120];

– построение алгоритмов скоростного градиента для решения задач частичной стабилизации по отношению к неклассической целевой функции посредством малых по величине управлений [134, 196, 198, 88, 294, 295];

– использование управляемых функций Ляпунова [44, 339, 190].

1. Задача оптимальной стабилизации по части переменных. Обозначим $\langle\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения соответствующих вектор-функций; $\mathbf{w} = (x_1, \ldots, x_k)^{\mathrm{T}}$, $\dim(\mathbf{y}) \le k \le \dim(\mathbf{x})$.

Теорема 17 ([116, 119]). *Пусть для системы* (2.10) *возможно указать функцию* $V^0 = V^0(t, \mathbf{x})$, *удовлетворяющую в области* (2.3) *неравенствам* $a(\|\mathbf{y}\| \le \le V^0(t, \mathbf{x}) \le b(\|\mathbf{w}\|)$, *и вектор-функцию* $\mathbf{u} = \mathbf{u^0}(t, \mathbf{x}) \in U$, *для которых:*

1) $\omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u^0}(t, \mathbf{x})) \ge c(\|\mathbf{w}\|)$;

2) $B\left[V^0, t, \mathbf{x}, \mathbf{u^0}(t, \mathbf{x})\right] = \dfrac{\partial V^0}{\partial t} + \left\langle \dfrac{\partial V^0}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u^0}) \right\rangle + \omega(t, \mathbf{x}, \mathbf{u^0}) \equiv 0$;

3) $B(V^0, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \ge 0$ *для любого* $\mathbf{u} \in U$;

4) *для любого* $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in U$, *обеспечивающего асимптотическую* $\mathbf{y}$*-устойчивость положения равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *справедливо равенство* $\lim V^0(t, \mathbf{x}^*[t]) = 0$, $t \to \infty$.

Тогда вектор-функция $\mathbf{u} = \mathbf{u^0}(t, \mathbf{x})$ *решает для системы* (2.10) *задачу оптимальной* $\mathbf{y}$*-стабилизации. При этом*

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, \mathbf{x^0}[t], \mathbf{u^0}[t]\right) dt = \min \int_{t_0}^{\infty} \omega\left(t, \mathbf{x}^*[t], \mathbf{u}^*[t]\right) dt = V^0(t_0, \mathbf{x}[t_0]).$$

Заметим, что в случае $k = \dim(\mathbf{y})$ условие 4) является следствием условия $V^0(t, \mathbf{x}) \le b(\|\mathbf{w}\|)$, и во избежание повторения неточностей подчеркнем, что в случае $k \ne \dim(\mathbf{y})$ условие 4) первоначально оказалось опущенным в ряде работ. Кроме того, отметим, что в случае $\mathbf{w} = (x_1, \ldots, x_k)^{\mathrm{T}}$ условия теоремы 17 излишне ограничительны; как и в теореме 3, можно положить $\mathbf{w} = \left[\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\right]^{\mathrm{T}}$.

К настоящему времени не найдено общих конструктивных методов построения V^0-функций. Один из возможных подходов к этой проблеме [116] сводится к выбору в качестве оптимальной соответствующей V-функции для неуправляемой части системы (2.12). При этом происходит как бы "полуобратный" выбор функционала качества J: подынтегральное выражение становится полностью определенным (структура подынтегрального выражения задается заранее) только после решения задачи. Данный подход (с рассмотрением ряда примеров из механики) подробно излагается в монографии [120].

Расширения возможностей решения задач частичной стабилизации можно добиться за счет перехода к разрывным управлениям [319]. Особенность в том, что эти управления, будучи дробно-нелинейными функциями фазовых переменных и являясь разрывными в области (2.3), не приводят, вообще говоря, к системам с переменной структурой. Замкнутая система имеет непрерывную структуру, удовлетворяет условиям, наложенным на систему (2.1), и может изучаться стандартными для теории частичной устойчивости методами. Чтобы избежать точек разрыва управлений, можно допустить свободный характер движения системы в окрестности этих точек до тех пор, пока система не пройдет их.

2. Построение алгоритмов скоростного градиента [133] требует задания целей управления как уменьшения значения некоторой скалярной целевой функции до заданной величины. Случай, когда целевая функция не является положительно определенной по всем переменным, соответствует задачам частичной стабилизации.

Если цель управления задана в виде (2.14), то для решения задачи 4 частичной стабилизации используется алгоритм скоростного градиента вида $\mathbf{u} = -\gamma \nabla_{\mathbf{u}} \dot{V}$, где $\dot{V}$ – скорость изменения целевой V-функции в силу управляемой системы, $\gamma > 0$ – коэффициент усиления, $\nabla_{\mathbf{u}}$ – градиент функции $\dot{V}$ по компонентам вектора $\mathbf{u}$ [134, 196, 198, 88, 294, 295]. Используются также и более общие алгоритмы вида $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi}(\nabla_{\mathbf{u}} \dot{V})$, где вектор-функция $\boldsymbol{\Psi}$, $\|\boldsymbol{\Psi}\| = 1$, задающая направление обратной связи, составляет острый угол со скоростным градиентом $\nabla_{\mathbf{u}} \dot{V}$, а также их модификации.

3. Метод управляемых функций Ляпунова предполагает использование функций Ляпунова, производные которых в силу управляемой системы оцениваются значениями их точных нижних границ по всевозможным допустимым управлениям [160, 300, 301]. Применительно к задаче частичной стабилизации этот метод развит в работах [44, 339]. Доказана теорема о частичной стабилизации неавтономных управляемых систем, а для линейных по управлению неавтономных систем предложен конструктивный способ построения позиционных управлений при условии существования управляемой функции Ляпунова со знакоопределенной по части переменных производной. Для автономных систем аналогичные результаты получены при условии знакопостоянства производной управляемой функции Ляпунова.

Метод управляемых функций Ляпунова рассмотрен также для случаев стабилизации “по выходу” и стабилизации “от входа к выходу” [190].

3.5.2. Применение метода “эквивалентной линеаризации”. Разобьем переменные, входящие в фазовый вектор $\mathbf{y}$ системы (2.10), на две группы: $\mathbf{y} = \left(\mathbf{y_1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{y_2}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y_1} \in R^{m_1}$, $\mathbf{y_1} \in R^{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$; при этом $\mathbf{x} = \left(\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{y_1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{y_2}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in R^n$, $n = m_1 + m_2 + p$. Пусть система (2.10) имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{Y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}} = \mathbf{Y_2}(\mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{x}), \tag{3.18}$$

т.е. управления входят только в какую-то одну группу уравнений этой системы.

Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\Phi} \in R^{m_2+q}$, $\boldsymbol{\Phi} = \|\Phi_i\|_{i=1}^{m_2+q}$, первые $q(0 \le q \le r \le \le m_1)$ компонент которой являются первыми q компонентами вектор-функции $\mathbf{Y_1}$, а остальные m_2 – компонентами вектор-функции $\langle(\partial \mathbf{Y_2}/\partial \mathbf{y})\mathbf{X}\rangle$, где $\mathbf{X} = \left(\mathbf{Y_1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Y_2}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$. Считая $m_2 + q \ge r$, введем матрицу Якоби $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\partial \Phi_i / \partial u_j\|$, $i = \overline{1, m_2 + q}$, $j = \overline{1, r}$. Допустим, что справедливо условие $\operatorname{rank} F(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = r$. (Не нарушая общности рассуждений, считаем, что в матрице $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ линейно независимы первые r строк.) Тогда в некоторой окрестности положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ уравнение $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{u^0}$ имеет решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = \|u_i^0\|_{i=1}^r, \tag{3.19}$$

где $\mathbf{u}^*$ – вектор вспомогательных законов управления. Из замкнутой системы (3.18), (3.19) можно выделить линейную управляемую систему

$$\dot{y}_{1i} = u_i^*, \quad i = \overline{1, q}; \quad \ddot{y}_{2j} = u_j^*, \quad j = \overline{1, r - q}. \tag{3.20}$$

Введем также матрицу Якоби $Q = Q(\mathbf{x})$ от первых $r-q$ компонент вектор-функции $\mathbf{Y_2}$ по переменным y_{1i}, $i=\overline{q+1,m_1}$, y_{2j}, $j=\overline{r-q+1,m_2}$ (при этом считаем, что $r-q \geq m_1+m_2-r$) и рассмотрим "укороченную" систему

$$(3.21) \qquad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z^0}(\mathbf{z}),$$

получающуюся из последней группы уравнений (3.18) при $\mathbf{y_1} = \mathbf{y_2} = \mathbf{0}$.

Теорема 18 ([319]). *Пусть выполняются условия:*

1) $r = m_1$ *и существует число* q *такое, что* $m_2 + q = r = m_1$*;*

2) $\operatorname{rank} F(\mathbf{0},\mathbf{0}) = r$, $\operatorname{rank} Q(\mathbf{0}) = m_1 + m_2 - r$*;*

3) *нулевое решение* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *системы* (3.21) *устойчиво по Ляпунову;*

4) *вектор* $\mathbf{u}^*$ *решает задачу стабилизации* (*по всем переменным*) *вспомогательной линейной системы* (3.20) *посредством линейной обратной связи по фазовым переменным этой системы.*

Тогда закон управления (3.19) *гарантирует устойчивость по Ляпунову и асимптотическую* $\mathbf{y}$*-устойчивость положения равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *исходной нелинейной системы* (3.18).

Отметим, что структурная форма (3.18) характерна для многих механических систем, а достоинство предложенного подхода к решению задачи частичной стабилизации в том, что он позволяет вести проектирование законов управления для исходной нелинейной системы путем решения соответствующих задач управления для вспомогательных линейных систем простейшего вида – управляемых систем типа (3.20). При этом происходит своего рода "эквивалентная линеаризация" исходной нелинейной задачи [21, 319, 33].

3.5.3. Стабилизация по части переменных линейных систем. Пусть система (2.10) является линейной

$$(3.22) \qquad \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z} + P\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{z}} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} + Q\mathbf{u},$$

где A, B, C, D, P, Q – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Вектор $\mathbf{u}$ линейной обратной связи в задаче $\mathbf{y}$-стабилизации системы (3.22) можно построить в виде [21, 319]

$$(3.23) \qquad \mathbf{u} = \Gamma\mathbf{z} + \mathbf{u}^*,$$

где постоянная матрица Γ определяется преобразованием, приводящим замкнутую систему (3.22), (3.23) к вспомогательной линейной системе той же или меньшей размерности. Управление $\mathbf{u}^*$ решает для построенной вспомогательной управляемой линейной системы задачу стабилизации по всем переменным.

3.6. Применение теории частичной устойчивости (стабилизации) для анализа устойчивости (стабилизации) по всем переменным

Укажем общие условия, при выполнении которых решение задачи устойчивости (стабилизации) или управления по всем переменным может быть получено на основе предварительного решения задачи устойчивости (стабилизации) или управления по части переменных.

3.6.1. Задачи устойчивости. Наряду с системой (2.1) также рассмотрим "усеченную" систему уравнений

$$(3.24) \qquad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t,\mathbf{0},\mathbf{z}),$$

получающуюся из второй группы уравнений системы (2.1) при $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Т е о р е м а *19* ([208]). *Пусть:*

1) *положение равновесия* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) *равномерно* $\mathbf{y}$*-устойчиво* (*равномерно асимптотически* $\mathbf{y}$*-устойчиво*);

2) *нулевое решение системы* (3.24) *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Тогда положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *системы* (2.1) *равномерно устойчиво по Ляпунову* (*равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову*).

Теорема 19 дает общие условия, при выполнении которых решение задачи устойчивости по всем переменным может быть получено на основе предварительного решения задачи устойчивости по части переменных.

Заметим, что теорема 19 имеет локальный характер. Например, для часто рассматриваемой линейно-нелинейной каскадной системы [289]

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + B\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{3.25}$$

такой, что нулевое решение $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ "усеченной" системы $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ асимптотически устойчиво в целом, управлением вида

$$\mathbf{u} = R\mathbf{y} \tag{3.26}$$

(R – постоянная матрица) нельзя, вообще говоря, добиться асимптотической устойчивости в целом положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. В то же время локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы (3.25), (3.26) гарантируется теоремой 19.

В современной теории устойчивости аналогичные вопросы ставятся в более общем виде: найти условия, при которых для системы (2.1) соотношение $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$ (для любых начальных возмущений) и локальное свойство $\mathbf{y}$-устойчивости будут означать $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ (также для любых начальных возмущений) и устойчивость по Ляпунову. Такие задачи изучаются в рамках устойчивости "от выхода к фазовому вектору" (output to state stability); подобное понятие устойчивости является аналогом понятия "обнаруживаемости" (detectability) для линейных систем и трактуется так же как нелинейная "нуль-обнаруживаемость" (zero-detectability) применительно к нелинейным системам. Более общим является понятие "V-обнаруживаемости" нелинейных систем.

Обобщением понятия устойчивости "от выхода к фазовому вектору" на нелинейные системы вида (2.9) является понятие устойчивости "от входа-выхода к фазовому вектору" (input-output to state stability); еще более общими являются понятия "V-обнаруживаемости" и "частичной обнаруживаемости" (partial detectability) применительно к нелинейным системам вида (2.9).

Строгие математические формулировки указанных понятий, а также подходы к их изучению можно найти в работах [305, 301, 293, 302, 292, 231, 221, 158].

3.6.2. Задачи стабилизации и управления. Предложены также условия разрешимости задачи стабилизации (управления) по всем переменным на основе предварительного решения вспомогательной задачи стабилизации (управления) по части переменных, эффективно применяемые к изучению многочисленных задач стабилизации и управления угловым движением твердого тела [21, 319]. В рамках предложенных условий происходит уже отмечавшаяся в разделе 3.5 "эквивалентная линеаризация" рассматриваемых нелинейных (в том числе и игровых) задач.

В последние годы в контексте решения задач стабилизации по всем переменным получила развитие другая трактовка проблемы частичной стабилизации, предполагающая сохранение устойчивой части спектра и стабилизацию неустойчивой части спектра линейных управляемых систем [165–167]. Аналогичные идеи [187] связаны с изучением отображений, сохраняющих частичную устойчивость (partial stability preserving maps).

С указанных в разделе 2.4 мотивирующих позиций проведен ряд исследований задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления, охватывающих общие классы нелинейных систем.

1. Механические голономные и неголономные конечномерные системы [109, 274, 244, 118, 71, 139, 140, 8, 55, 129, 43, 130, 206, 260, 57, 210–213, 131, 216, 10, 120, 126, 148, 214, 62, 21, 22, 336, 56, 319, 198, 88, 33].

Были выявлены, например, такие интересные явления, как:

– "уход" оси гироскопа [244];

– "асимптотическое останавливание" систем, в частности, "уход" от нижнего положения равновесия математического маятника под действием сильно возрастающего коэффициента демпфирования [277];

– наличие асимптотической устойчивости по части переменных при отсутствии активных диссипативных сил у устойчивых перманентных вращений вокруг вертикали кельтских камней, движущихся на абсолютно шероховатой поверхности [55];

– только "перевод" (не "принимая на себя") возмущений на неконтролируемую часть переменных в процессе частичной стабилизации стационарных движений твердого тела посредством связанного с ним маховика [22, 319, 26].

2. Сложные механические системы, содержащие звенья с распределенными параметрами, в том числе модели космических аппаратов, искусственных спутников, орбитальных комплексов с учетом упругих элементов и баков, содержащих жидкость [110, 111, 113, 91, 115, 248, 265, 108, 93, 6, 340–343].

3. Системы, описывающие динамику управляемого твердого тела – космического аппарата [112, 114, 67, 43, 120, 21, 25, 319, 26, 17, 191, 316, 339, 317], в том числе системы, описывающие динамику управляемого твердого тела при неконтролируемых помехах и неопределенных параметрах [319, 27, 33].

4. Силовые системы (power system) [324, 233].

5. Многомерные системы [170, 194, 127, 328, 224].

6. Системы, описывающие фокусировку и ускорение частиц в электромагнитных полях, а также динамику встречи движений [43].

7. Экологические системы Лотки-Вольтерры [277, 195, 238].

8. Некоторые классы адаптивных самонастраивающихся систем и систем параметрической идентификации [136, 103, 63, 232, 198, 88, 276].

9. Сингулярно возмущенные системы [188, 133, 198, 88].

10. Системы Лурье – Постникова [21, 321, 319].

В рамках задач частичной устойчивости (стабилизации) и управления также проведены исследования:

– ряда проблем, возникающих в небесной механике [37, 38, 138, 227];

– сходимости некоторых алгоритмов оптимизации [94];

– нелинейной абстрактной проблемы Коши [154];

– устойчивости правильного вихревого n-угольника [69];

– координатной синхронизации динамических систем [327, 199, 14, 15, 30, 200], связанные (в случае синхронизации хаотических систем) с проблемой безопасной коммуникации;

– оценивания состояний и областей частичной устойчивости динамических систем [16, 269];

– устойчивости радарных систем [150];

– балансировки загрузки компьютерных сетей [252];

– устойчивости биотехнологических процессов [271].

Рассмотрим примеры, касающиеся: устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия голономной лагранжевой системы; стабилизации по части переменных перманентного вращения асимметричного твердого тела с помощью одного маховика; управления по части переменных угловым движением асимметричного твердого тела.

3.7.1. Устойчивость по части переменных положения равновесия голономной лагранжевой системы [109, 319]. Пусть имеем уравнения движения голономной механической системы с n степенями свободы в лагранжевых координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = \overline{1,n}), \tag{3.27}$$

где T – кинетическая энергия, а $\Pi(\mathbf{q})$ – потенциальная энергия системы.

Пусть система (3.27) имеет положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, а наложенные на нее связи и T не зависят явно от времени. В этом случае имеет место интеграл энергии $H = T + \Pi = \mathrm{const}$.

Предположим, что T определенно положительна относительно всех обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, $i = \overline{1,n}$, а Π определенно положительна относительно части обобщенных координат: относительно q_s $(s = \overline{1,m} < n)$. Тогда [109] положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (3.27) устойчиво по отношению к q_s, $\dot{q}_i$ $(s = \overline{1,m};\ i = \overline{1,n})$.

В самом деле, выбирая V-функцию Ляпунова вида $V = H$, заключаем, что при сделанных предположениях эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 1, если в вектор $\mathbf{y}$ включить переменные q_s, $\dot{q}_i$ $(s = \overline{1,m};\ i = \overline{1,n})$.

Если, помимо сделанных допущений, $\Pi = 0$ при $q_s = 0$ $(s = \overline{1,m})$, то [319] положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (3.27) устойчиво по q_s, $\dot{q}_i$ $(s = \overline{1,m} < n;\ i = \overline{1,n})$ при больших $q_{m+1,0}, \ldots, q_{n,0}$. Действительно, в силу $T(\mathbf{q}, \mathbf{0}) \equiv 0$ в данном случае H обращается в нуль при $q_s = 0$, $\dot{q}_i = 0$ $(s = \overline{1,m};\ i = \overline{1,n})$ и выполнены условия третьей части теоремы 10.

3.7.2. Стабилизация по части переменных перманентного вращения асимметричного твердого тела посредством одного маховика [319, 26]. Известно, что в процессе стабилизации по всем переменным стационарных движений твердого тела посредством связанных с ним маховиков (роторов) приводимые во вращение роторы "принимают на себя" возмущения, появляющиеся в результате отклонения тела от заданного состояния. Наряду с этим хорошо известным фактом также показано [319, 26], что при проведении частичной (по части переменных) стабилизации стационарных движений основного тела, достаточной во многих практически важных случаях, связанные с телом массы могут только "переводить" (не "принимая на себя") возмущения на неконтролируемую при стабилизации часть переменных. Указанная ситуация не противоречит неизменности полного кинетического момента системы относительно центра масс в отсутствие внешних сил.

Пусть имеем асимметричное твердое тело, вдоль одной из главных центральных осей инерции которого закреплена ось вращения однородного симметричного маховика. Угловое движение этой системы (гиростата) вокруг центра масс описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &(A_1 - J_1)\dot{x}_1 = (A_2 - A_3)x_2x_3 - u_1, \quad A_2\dot{x}_2 = (A_3 - A_1)x_1x_3 - J_1x_3\dot{\varphi}, \\ &A_3\dot{x}_3 = (A_1 - A_2)x_1x_2 + J_1x_2\dot{\varphi}, \quad J_1(\ddot{\varphi} + \dot{x}_1) = u_1, \end{aligned} \tag{3.28}$$

в которых A_i – главные центральные моменты инерции гиростата: x_i – проекции вектора угловой скорости основного тела на главные центральные оси i_1, i_2, i_3 инерции гиростата; J_1, $\dot{\varphi}$ – осевой момент инерции и угловая скорость собственного вращения маховика; u_1 – управляющий момент, приложенный к маховику.

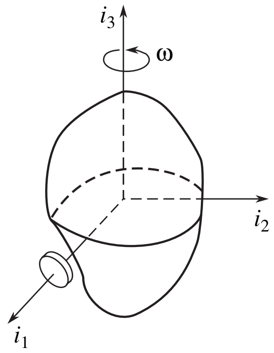

Рис. 1.

Уравнения (3.28) допускают решение

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \omega = \text{const} > 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad u_1 = 0, \tag{3.29}$$

соответствующее перманентному вращению (закрутке) основного тела гиростата с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси i_3. При этом маховик, ось вращения которого закреплена вдоль оси i_1, неподвижен относительно основного тела, а направление вектора $\mathbf{K}$ кинетического момента гиростата совпадает с направлением оси i_3; – см. рис. 1.

Вводя новые переменные $y_j = x_j$ $(j = 1, 2)$, $y_3 = \dot{\varphi}$, $z_1 = x_3 - \omega$, составим систему в отклонениях от решения (3.29):

$$\begin{aligned} &(A_1 - J_1)\dot{y}_1 = (A_2 - A_3)y_2(z_1 + \omega) - u_1, \\ &A_2\dot{y}_2 = [(A_3 - A_1)y_1 - J_1 y_3](z_1 + \omega), \\ &(A_1 - J_1)\dot{y}_3 = (A_3 - A_2)y_2(z_1 + \omega) - J_1^{-1}A_1 u_1, \\ &A_3\dot{z}_1 = [(A_1 - A_2)y_1 + J_1 y_3]y_2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Найдем позиционное управление u_1, решающее задачу $\mathbf{y}$-стабилизации положения равновесия $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, $z_1 = 0$ системы (3.30). Отметим, что стабилизация по y_1, y_2 означает гашение малых прецессионных и нутационных колебаний вектора $\mathbf{K}$ кинетического момента гиростата по отношению к связанным с телом осям i_1, i_2. Дополнительная стабилизация по y_3 означает, что в процессе стабилизации по y_1, y_2 маховик лишь "переводит" малые возмущения в "дополнительное вращение" гиростата вокруг оси вращения i_3.

Покажем, что при $A_2 \neq A_3$ решение этой задачи дает линейный закон управления

$$u_1 = L\mathbf{y}, \tag{3.31}$$

где L – некоторый постоянный вектор-строка размера (1×3).

Для доказательства рассмотрим линейную подсистему, описывающую поведение $\mathbf{y}$-переменных линейной части системы (3.30). При $A_2 \neq A_3$ эта подсистема полностью управляема. Поэтому коэффициенты в L можно выбрать так, что положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $z_1 = 0$ линейной части системы (3.30) равномерно устойчиво по Ляпунову и (одновременно) экспоненциально асимптотически $\mathbf{y}$-устойчиво. Поскольку нелинейные члены в системе (3.30) обращаются в нуль при $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то указанным для линейной части системы (3.30) свойством полиустойчивости, на основании теоремы 15 обладает и положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $z_1 = 0$ самой нелинейной системы (3.30).

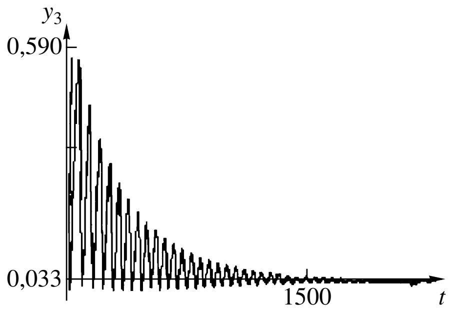

Рис. 2.

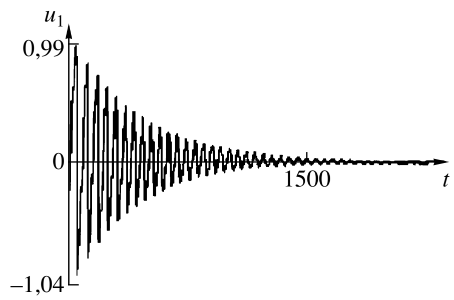

Рис. 3.

Технически реализация закона управления (3.31) сводится к следующему. Пока гиростат совершает заданное движение (3.29), маховик находится в состоянии покоя (управляющий двигатель выключен). При появлении малых возмущений специальные устройства формируют и прикладывают к маховику управляющий момент (3.31). В результате основное тело гиростата с течением времени возвращается в исходный режим стационарного вращения, а сам маховик – в состояние покоя.

Приведем результаты моделирования замкнутой системы (3.30), (3.31) при значениях параметров $A_1 = 900$, $A_2 = 600$, $A_3 = 500$, $J = 100$ (кгм^2), $\omega = 0{,}4$ (с$^{-1}$) и начальных данных $y_{10} = y_{20} = 0{,}1$ (с$^{-1}$), $y_{30} = z_{10} = 0$. Допустим, что управление u_1 подчинено ограничению $|u_1| \leq 1$ (Нм). Расчет показывает, что коэффициенты $L = (l_1, l_2, l_3)^{\mathrm{T}}$ можно выбрать в виде $l_1 = -3{,}5$; $l_2 = -3{,}5$; $l_3 = -1{,}1$ (Нмс). Практическое гашение возмущений по переменным y_1, y_2, как и практическая остановка маховика, достигаются в данном случае спустя примерно 1500 (с). На рис. 2, 3 показаны графики изменения переменной y_3 (графики y_1, y_2 примерно такие же, как по характеру, так и по скорости сходимости) и управления u_1.

3.7.3. "Прохождение" асимметричным твердым телом заданного углового положения в пространстве [25, 319]. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{x}_1 &= (A_2 - A_3)x_2x_3 + u_1,\\
A_2\dot{x}_2 &= (A_3 - A_1)x_1x_3 + u_2,\\
A_3\dot{x}_3 &= (A_1 - A_2)x_1x_2 + u_3,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

описывающие угловое движение твердого тела под действием управляющих моментов u_i; A_i – главные центральные моменты инерции тела.

Наряду с (3.32) рассмотрим определяющие ориентацию тела кинетические уравнения в переменных Родрига – Гамильтона

$$
\begin{aligned}
&2\dot{\lambda}_0 = -\sum(x_i\lambda_i),\\
&2\dot{\lambda}_1 = x_1\lambda_0 + x_3\lambda_2 - x_2\lambda_3,\\
&2\dot{\lambda}_2 = x_2\lambda_0 + x_1\lambda_3 - x_3\lambda_1,\\
&2\dot{\lambda}_3 = x_3\lambda_0 + x_2\lambda_1 - x_1\lambda_2.
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Переменные λ_0, λ_i, образующие вектор $\boldsymbol{\lambda}$, связаны равенством

$$\lambda_0^2 + \sum \lambda_i^2 = 1. \tag{3.34}$$

Найдем удовлетворяющие заданным ограничениям

$$|u_i| \le \alpha_i = \text{const } > 0 \tag{3.35}$$

управляющие моменты u_i, переводящие тело за конечное время из начального состояния $\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}^0$ в заданное $\boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{\lambda}^1$. Начальное состояние является состоянием покоя $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$. Величина $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(t_1)$ угловой скорости в момент $t = t_1$ может быть произвольной. Момент времени t_1 не фиксируется.

Данная задача является задачей управления по части переменных (по λ_i), определяющих состояние системы (3.32)–(3.34): задачей "прохождения" асимметричным твердым телом заданного углового положения в трехмерном инерциальном пространстве. Такая задача небезынтересна, например, в случае необходимости быстрейшей переориентации космического аппарата для совершения кратковременных действий в момент достижения требуемого углового положения; это может быть фотографирование, поражение цели, передача информации и т.п.

Не нарушая общности далее считаем $\boldsymbol{\lambda}^1 = (1, 0, 0, 0)$.

Для решения задачи используем управляющие моменты

$$
\begin{aligned}
u_1 = {} & 2A_1\lambda_0^{-1}\left[(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)u_1^* + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)u_2^* + (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)u_3^*\right] + \\
& + \frac{1}{2}A_1\lambda_1\lambda_0^{-1}\sum x_i^2 + (A_3 - A_2)x_2x_3 \quad (123)
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

(выписан только управляющий момент u_1, а u_2, u_3 получаются из (3.36) циклической перестановкой индексов $1 \to 2 \to 3$), позволяющие из замкнутой системы (3.32)–(3.34), (3.36) выделить вспомогательную линейную управляемую систему

$$\ddot{\lambda}_i = u_i^*. \tag{3.37}$$

В соответствии с целью рассматриваемой нелинейной задачи управления решим вспомогательную задачу быстрейшего приведения линейной системы (3.37) в положение

$$\lambda_i = 0. \tag{3.38}$$

Ее решение при ограничениях $|u_i^*| \le \alpha_i^* = \text{const } > 0$ имеет вид

$$u_i^* = -\alpha_i^* \operatorname{sgn} \lambda_i^0, \tag{3.39}$$

а соотношения $\tau = \left[2|\lambda_i^0|(\alpha_i^*)^{-1}\right]^{1/2}$ определяют минимальное время τ (одновременное по отношению ко всем переменным λ_i) достижения положения (3.38): время τ управления в исходной нелинейной задаче.

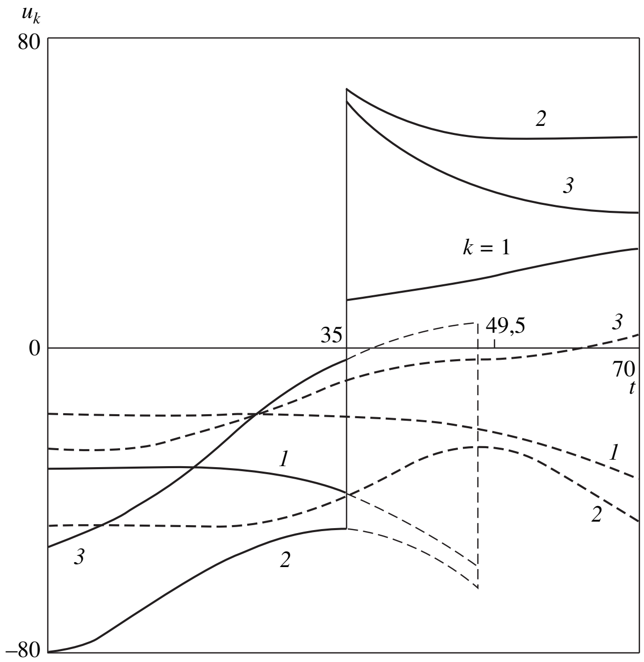

Рис. 4.

В результате получаем следующий алгоритм решения исходной нелинейной задачи управления [25, 319].

1. Выбор конструкции (3.36) управляющих моментов u_i с u_i^* вида (3.39).

2. "Назначение" α_i^* с учетом "выравнивания" времени управления по каждой из переменных λ_i и проверка выполнимости заданных ограничений (3.35) на u_i. Для этого используем равенства

$$x_1 = 2\lambda_0^{-1}\left[(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)\dot{\lambda}_1 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)\dot{\lambda}_2 + (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)\dot{\lambda}_3\right] \quad (123),$$

получающиеся решением уравнений для $\dot{\lambda}_i$ в (3.33) по x_i, которые позволяют проверить выполнение ограничений (3.35) на траекториях линейной системы (3.37), (3.39).

Если оценки (3.35) не выполняются, или наоборот, есть "резерв" в их выполнении, необходимо продолжить поиск подходящих α_i^*. В противном случае переориентация осуществляется за время τ.

Отметим, что структура (3.36) управляющих моментов содержит сомножитель λ_0^{-1}, который формально приводит к "особенности". Однако в случае $\boldsymbol{\lambda}^1 = (1,0,0,0)$ в процессе управления $|\lambda_0| \in [\,|\lambda_0^0|, 1]$. Поэтому указанной "особенности" не возникает. Кроме того, если $\boldsymbol{\lambda}^1 \neq (1,0,0,0)$, или значение λ_0^0 мало, то достаточно перейти к управляющим моментам, получающимся из (3.36) перестановкой индексов (или к комбинации таких управляющих моментов).

С учетом проведенных рассуждений заключаем, что решение поставленной задачи управления всегда можно получить посредством сколь угодно малых по величине управляющих моментов. При этом можно получить оценку времени переориентации в зависимости от заданных ограничений (3.35) на u_i:

$$\tau \le \max(\gamma_i),$$
$$\gamma_1^2 = 4\alpha_1^{-1}\left[1-(\lambda_0^0)^2\right]^{1/2}\Big\{A_1\left[1+(\lambda_1^0)^2(\lambda_0^0)^{-2}\right]^{1/2}+$$
$$+2(\lambda_0^0)^{-2}\left[A_1\lambda_1^0(\lambda_0^0)^{-1}+|A_3-A_2|\right]\left[1-(\lambda_0^0)^2\right]^{1/2}\Big\} \quad (123).$$

Предложенный подход распространен на случай действия неконтролируемых помех [319, 27].

Для твердого тела с $A_1 = 4\cdot 10^4$, $A_2 = 8\cdot 10^4$, $A_3 = 5\cdot 10^4$ (кгм^2) рассмотрим переориентацию из положения $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\lambda}^0 = (0{,}701; 0{,}353; 0{,}434; 0{,}432)$ в положение $\boldsymbol{\lambda}^1 \ne (1,0,0,0)$ в двух случаях:

1) значение $\mathbf{x}^1 \ne \mathbf{0}$ и может быть произвольным;

2) $\mathbf{x}^1 = \mathbf{0}$.

В случае 1 за время $\tau = 70$ (с) переориентация посредством управлений (3.36), (3.39) достигается при $\alpha_1 = 29{,}9$; $\alpha_2 = 40{,}1$; $\alpha_3 = 24{,}9$ (Нм). Для сравнения, в случае 2 при том же τ переориентация посредством управлений (3.36), в которых u_i^* приводят систему (3.37) в нулевое положение равновесия, достигается при $\alpha_1 = 32{,}6$; $\alpha_2 = 80{,}1$; $\alpha_3 = 68{,}0$ (Нм). Расчет также показывает, что при $\max\alpha_i \le 80{,}1$ (Нм) переориентация в случае 1 достигается за время 49,5 (с); при одних и тех же ограничениях на u_i выигрыш во времени в сравнении со случаем 2 составляет 29,3%. На рис. 4 сплошной линией показаны управления u_i (разрывные при $t = 35$ (с)), решающие задачу переориентации в случае 2 за время $\tau = 70$ (с); пунктирной линией – управления u_i (непрерывные), обеспечивающие переориентацию в случае 1 за время $\tau = 70$ (с). Сплошной линией (при $0 \le t \le 49{,}5$ (с)) с последующим продолжением точечной линией – управления u_i (непрерывные), обеспечивающие переориентацию в случае 1 при $\max\alpha_i \le 80{,}1$ (Нм) (за время $\tau = 49{,}5$ (с)).

4. Заключение и нерешенные проблемы

За последнее десятилетие развитие теории частичной устойчивости (стабилизации), как это и предполагалось в предыдущем обзоре [22], было существенным. Более того, именно в этот период появились дополнительные стимулы к дальнейшей разработке такой теории. Помимо традиционных и не теряющих актуальности задач механики, частичная устойчивость оказалась подходящим понятием в бурно развивающихся на стыке физики и теории управления методах управления хаосом, а частичное управление стало систематически исследоваться на стыке химии и теории управления. Получили развитие и ряд других теоретических и прикладных разделов современной нелинейной теории управления, посвященных различным аспектам инвариантности нетривиальных множеств и аттрактивности многомерных геометрических объектов, также тесно связанных с концепцией частичной устойчивости. Наконец, наряду с исследованиями операторных соотношений “вход-выход” для описания систем, “вход-выходные” свойства стали систематически исследоваться и для систем, заданных в пространстве состояний. Возникла и получила развитие новая теория устойчивости “от входа к выходу” для систем, заданных в пространстве состояний, опирающаяся на метод функции Ляпунова в соответствующей модификации.

Указанные направления исследований позволяют в значительной степени по-новому смотреть как на саму проблематику задач частичной устойчивости (стабилизации) и место этих задач в общей теории динамических систем, так и на перспективы их развития. По-видимому, интерес к задачам частичной устойчивости (стабилизации) будет расти, и в ближайшее время в этой области вновь можно ожидать получения новых результатов. Можно ожидать и расширения круга рассматриваемых вопросов, ведь термины “частичная устойчивость”, “частичная стабилизация”, “частичное управление”, помимо технической сферы, используются при анализе химических процессов, в экономике и политике. Несмотря на появление и развитие новых более общих задач той же направленности, задачи частичной устойчивости (стабилизации) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интересной и поучительной историей их развития будут оставаться важным звеном дальнейших исследований. Кроме того, при решении прикладных задач переход к более общим постановкам, во всяком случае на первоначальном этапе исследования, не всегда необходим.

Отметим основные нерешенные вопросы, касающиеся собственно теории частичной устойчивости (стабилизации) и управления.

1. По-прежнему актуальны вопросы конструктивного построения решающих задачу частичной устойчивости функций Ляпунова как для достаточно общих классов, так и для конкретных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этой связи значительный интерес представляет дальнейшая работа по ослаблению требований к функциям Ляпунова. В еще большей степени данная проблема касается требований к функционалам Ляпунова – Красовского, решающих задачу частичной устойчивости для систем с последействием (запаздыванием).

2. В последнее десятилетие стало значительно меньше работ, посвященных применению первого метода Ляпунова к задачам частичной устойчивости. Вместе с тем потенциал этого метода, в сочетании с современными достижениями дифференциально-геометрической теории и качественной теории дифференциальных уравнений, достаточно высок и на его основе, по-видимому, можно было бы выделить общие структурные формы частично устойчивых нелинейных систем 2-го и 3-го порядков.

3. Обширным полем для исследований продолжает оставаться проблема разработки конструктивных методов построения законов управления в задачах частичной стабилизации и управления. Несмотря на усилившийся интерес к такой проблеме, здесь остается много нераскрытых возможностей. В частности, небезынтересным представляется развитие уже обсуждавшейся в разделе 3.5 идеи расширения возможностей решения задач частичной стабилизации и управления за счет использования позиционных управлений из класса дробно-нелинейных функций фазовых переменных.

4. Необходимо дальнейшее изучение условий сохранения свойств частичной устойчивости при возмущениях структуры системы. Также желательно провести общий анализ изменения фазового портрета частично устойчивой системы при возмущениях ее структуры. Особенность ситуации в том, что потеря свойства частичной устойчивости может происходить в “грубой” в смысле Андронова – Понтрягина системе.

5. Целесообразно провести всесторонний анализ того, каким образом наличие свойства частичной устойчивости в системе может быть использовано для дальнейшего анализа устойчивости этой системы по всем переменным. Было бы также полезно с общих позиций синтеза многомерных систем изучить ситуации, когда в устойчивой по части переменных системе проводится стабилизация по оставшимся переменным с целью ее стабилизации по всем переменным.

6. Заслуживает внимания изучение задачи частичной устойчивости на конечном промежутке времени с учетом возможности сохранения (при возмущениях) данного свойства частичной устойчивости на рассматриваемом промежутке функционирования системы. Возможно, именно на данном пути удастся предложить более стабильную к помехам и возмущениям структуры системы концепцию частичной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
2. *Александров А.Ю.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных неавтономных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 5–9.
3. *Александров А.Ю.* Об устойчивости одного класса нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 545–550.
4. *Алексеева С.А., Воротников В.И., Феофанова В.А.* К задачам частичной эквиасимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // АиТ. 2005. № 2. С. 3–16.
5. *Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К.* Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 709–716.
6. *Анапольский Л.Ю., Чайкин С.В.* Об устойчивости по части переменных относительных равновесий упругого спутника // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 67–76.
7. *Анашкин О.В., Хапаев М.М.* О частичной устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 371–381.
8. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 796–805.
9. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 707–713.
10. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 253–259.
11. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 539–547.
12. *Андреев А.С.* Об устойчивости положений равновесия неавтономной механической системы // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.
13. *Андреев А.С., Павликов С.В.* Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 3–12.
14. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического регулирования с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.
15. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом. I. Методы // АиТ. 2003. № 5. С. 3–45.
16. *Бакан Г.М., Волосов В.В., Куссуль Н.Н.* Оценивание состояний непрерывных динамических систем методом эллипсоидов // Кибернетика и системный анализ. 1996. Т. 32. № 6. С. 72–91.
17. *Бурков И.В.* Стабилизация натуральных механических систем без измерения ее скоростей с приложением к управлению твердым телом // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 923–933.
18. *Вавилов П.А., Прокопьев В.П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных разностных систем // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1986. С. 3–6.
19. *Воротников В.И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 441–450.
20. *Воротников В.И.* Об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 372–385.

21. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991.

22. *Воротников В.И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // АиТ. 1993. № 3. С. 3–62.

23. *Воротников В.И.* К теории устойчивости по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 553–561.

24. *Воротников В.И.* К теоремам типа Барбашина – Красовского в задаче устойчивости по части переменных // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 4. С. 481–484.

25. *Воротников В.И.* О нуль-управляемости по части переменных нелинейных динамических систем // АиТ. 1997. № 6. С. 50–63.

26. *Воротников В.И.* К задачам устойчивости по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 736–745.

27. *Воротников В.И.* К нелинейной игровой задаче переориентации асимметричного твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 1. С. 3–18.

28. *Воротников В.И.* Два класса задач частичной устойчивости: к унификации понятий и единым условиям разрешимости // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 47–51.

29. *Воротников В.И.* Об устойчивости и устойчивости по части переменных частичных положений равновесия нелинейных динамических систем // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 332–337.

30. *Воротников В.И.* К задаче координатной синхронизации динамических систем // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 5–23.

31. *Воротников В.И.* К задаче частичной асимптотической устойчивости в целом // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 3. С. 295–299.

32. *Воротников В.И., Прокопьев В.П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 268–271.

33. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.

34. *Вуйичич В.А., Козлов В.В.* К задаче Ляпунова об устойчивости по отношению к заданным функциям состояния // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 555–559.

35. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971.

36. *Гальперин Е.А., Ярославцев А.А.* О частичной стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 140–147.

37. *Демин В.Г.* Применение теоремы В.В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных в задачах небесной механики // Космич. исслед. 1964. Т. 2. Вып. 5. С. 416–418.

38. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968.

39. *Демин В.Г., Фурасов В.Д.* К стабилизации управляемых систем по части переменных // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 355–359.

40. *Дружинина О.В., Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для задач устойчивости и притяжения временных систем // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 10. С. 17–48.

41. *Зайцев В.В.* Критерий существования и оценки инвариантных ограниченных множеств автономных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 20. № 5. С. 766–772.

42. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.

43. *Зубов В.И.* Динамика управляемых процессов. М.: Высш. шк., 1982.

44. *Зуев А.Л.* Стабилизация неавтономных систем по части переменных с помощью управляемых функций Ляпунова // Пробл. управления и информатики. 2000. Т. 32. № 4. С. 25–34.

45. *Игнатьев А.О.* Устойчивость движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // Математическая физика и нелинейная механ. Киев: Наук. думка. 1988. № 10. С. 20–25.

46. *Игнатьев А.О.* О сохранении свойства равномерной асимптотической устойчивости относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 167–171.

47. *Игнатьев А.О.* Об устойчивости почти-периодических систем относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 1446–1448.

48. *Игнатьев А.О.* Об эквиасимптотической устойчивости относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 871–875.

49. *Игнатьев А.О.* Устойчивость относительно части переменных в функционально-дифференциальных системах с запаздыванием // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка. 2000. № 30. С. 158–164.

50. *Ильясов К.* Об устойчивости по части переменных систем с последействием // Мат. физика. Киев: Наук. думка. 1982. № 31. С. 32–36.

51. *Ильясов К.* Об устойчивости по части переменных решений линейных разностных уравнений // Мат. физика. Киев: Наук. думка. 1984. № 35. С. 30–32.

52. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости по части переменных линейных стохастических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2000. Т. 44. № 6. С. 75–79.

53. *Кадиев Р.И.* Устойчивость по части переменных решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению // Изв. вузов. Математика. 2001. Т. 45. № 5. С. 30–35.

54. *Калистратова М.А.* Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // АиТ. 1986. № 5. С. 32–37.

55. *Карапетян А.В.* О перманентных вращениях тяжелого твердого тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 808–814.

56. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал, 1998.

57. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техн. Общ. механ. Т. 6. М.: ВИНИТИ. 1983. С. 3–127.

58. *Каримов А.У.* Об устойчивости по части переменных при постоянно действующих возмущениях // Мат. физика и электродинамика. М.: МГУ, 1973. С. 3–10.

59. *Карнишин С.Г.* Об устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений по части переменных / Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь: Изд-во ППИ, 1987.

60. *Ковалев А.М.* Управляемость динамических систем по части переменных // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 41–50.

61. *Ковалев А.М.* Частичная устойчивость и стабилизация динамических систем // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47. № 2. С. 186–193.

62. *Козлов В.В.* Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 51. Вып. 1. С. 12–19.

63. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы систем с последействием. М.: Наука, 1981.

64. *Косов А.А.* К задаче об устойчивости движения относительно части переменных / Вопросы качеств. теории дифф. уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.

65. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

66. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.

67. *Крементуло В.В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977.

68. *Кривошеев Ю.А., Луценко А.В.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем с постоянной и почти постоянной матрицей // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 205–210.

69. *Куракин Л.Г.* Об устойчивости правильного вихревого n-угольника // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 729–731.

70. *Лизунова М.Г.* Об устойчивости относительно части переменных в критическом случае пары чисто мнимых корней / Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: Изд-во УрГУ. 1991.

71. *Лилов Л.К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 977–985.

72. *Луценко А.В., Стадникова Л.В.* О частичной устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. 1973. Т.9. № 8. С. 1530–1533.

73. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

74. *Ляо Сяо Син.* Об асимптотической устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1034–1035.

75. *Малкин И.Г.* Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Мат. сб. 1938. Т. 3(45). № 1. С. 47–100.

76. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

77. *Мамедова Т.Ф.* Асимптотическая эквивалентность дифференциальных уравнений и устойчивость решений по части переменных // Мат. Междунар. конф. "Дифференц. уравнения и их приложения". Саранск: Изд-во СарГУ, 1995.

78. *Мартынюк А.А.* О технической устойчивости движения относительно отдельно заданных координат // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 3. С. 87–91.

79. *Мартынюк А.А.* Практическая устойчивость движения. Киев: Наук. думка, 1983.

80. *Мартынюк А.А.* О полиустойчивости движения относительно части переменных // Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 1. С. 39–41.

81. *Мартынюк А.А.* Полиустойчивость – новое направление в анализе нелинейных систем // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 5. С. 3–17.

82. *Мартынюк А.А., Чернецкая Л.Н.* О полиустойчивости линейных автономных систем // Докл. АН Украины. 1993. № 8. С. 17–19.

83. *Мартынюк А.А., Чернецкая Л.Н.* О полиустойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами // Докл. АН Украины. 1993. № 11. С. 61–65.

84. *Матросов В.М.* К теории устойчивости движения // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 992–1002.

85. *Матросов В.М.* Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости // Тр. II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 112–125.

86. *Матросов В.М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. IV // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 12. С. 2129–2143.

87. *Мирошник И.В.* Частичная устойчивость и геометрические проблемы нелинейной динамики // АиТ. 2002. № 11. С. 39–55.

88. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.

89. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.

90. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.

91. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.

92. *Мухарлямов Р.Г.* Управление программным движением по части переменных // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 8. С. 938–942.

93. *Набиуллин М.К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука, 1990.

94. *Носов В.Р., Фурасов В.Д.* Об устойчивости дискретных процессов по заданным переменным и сходимости некоторых алгоритмов оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19. № 2. С. 316–328.

95. *Озиранер А.С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1971. № 1. С. 92–100.

96. *Озиранер А.С.* О некоторых теоремах второго метода Ляпунова // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 396–404.

97. *Озиранер А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659–665.

98. *Озиранер А.С.* Об устойчивости движения в критических случаях // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 415–421.

99. *Озиранер А.С.* Об устойчивости неустановившихся движений по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 424–430.

100. *Озиранер А.С.* Об устойчивости относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 419–427.

101. *Озиранер А.С.* Об исследовании устойчивости по части переменных при помощи квадратичных форм // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 163–167.

102. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364–384.

103. *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980.

104. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.

105. *Прокопьев В.П.* Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 422–426.

106. *Пятницкий Е.С.* Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных систем // АиТ. 1993. № 7. С. 19–37.

107. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1992.

108. *Рубановский В.Н., Румянцев В.В.* Об устойчивости движения сложных механических систем // Успехи механики. 1979. Т. 2. Вып. 2. С. 53–79.

109. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия, химия. 1957. № 4. С. 9–16.

110. *Румянцев В.В.* Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 2. С. 291–294.

111. *Румянцев В.В.* Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1057–1065.

112. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростата // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.

113. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения тел с полостями, наполненными жидкостью // Тр. II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 57–71.

114. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967.

115. *Румянцев В.В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 946–957.

116. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.

117. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 147–152.

118. *Румянцев В.В.* Некоторые задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных / Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972.

119. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации движения по отношению к части переменных // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 184–189.

120. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

121. *Рутман М.А.* Об ограниченных решениях линейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений // Тр. Одес. гидромет. ин-та. 1959. Вып. 20. С. 3–7.

122. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных систем. Киев: Наук. думка, 1989.

123. *Силаков В.П., Юдаев Г.С.* Об устойчивости разностных систем относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 909–913.

124. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987.

125. *Слынько В.И.* К задачам полиустойчивости движения // Прикл. механика. 2001. Т. 37. № 12. С. 125–129.

126. *Смирнов Е.Я., Ермолина М.В.* Стабилизация программных движений механических систем по части переменных / Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.

127. *Строгая Г.В.* Об устойчивости по части переменных систем, распадающихся при отсутствии возмущений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 1949–1955.

128. *Тереки Й.* О частичной устойчивости решений линейных автономных дифференциально-разностных уравнений // Stud. Sci. Math. Hung. 1983. V. 18. № 2–4. P. 143–152.

129. *Тереки Й., Хатвани Л.* О частичной устойчивости и сходимости движений // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 428–435.

130. *Тереки Й., Хатвани Л.* Об асимптотическом останавливании при наличии вязкого трения // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 20–26.

131. *Тереки Й., Хатвани Л.* Функция Ляпунова типа механической энергии // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 894–899.

132. *Туан Ву.* Об устойчивости по первому приближению относительно части переменных // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 211–220.

133. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление сложными системами. М.: Наука, 1990.

134. *Фрадков А.Л.* Исследование физических систем при помощи обратных связей // АиТ. 1999. № 3. С. 213–230.

135. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб: Наука, 2003.

136. *Фурасов В.Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.

137. *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.

138. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.

139. *Хатвани Л.* О некоторых признаках устойчивости с двумя функциями Ляпунова // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 172–177. (Исправление: Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 251.)

140. *Хатвани Л.* О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механ. 1975. № 3. С. 83–89.

141. *Чудинов К.М.* Об устойчивости по части переменных линейных автономных систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2004. Т. 48. № 6. С. 72–78.

142. *Шаров В.Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // АиТ. 1978. № 11. С. 63–71.

143. *Щенников В.Н.* Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1645–1649.

144. *Щенников В.Н.* О частичной устойчивости в критическом случае $2k$ чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: методы топологической динамики. Горький: Изд-во ГГУ, 1985.

145. *Щенников В.Н.* Методы сравнения и методы Ляпунова. Саранск: Изд-во МрГУ, 1990.

146. *Юдаев Г.С.* К вопросу об устойчивости относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 6. С. 1023–1029.

147. *Юдаев Г.С.* Об устойчивости стохастических дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 430–435.

148. *Юрков А.В.* Стабилизация движения механических систем с непрямым регулированием по части переменных / Вопросы качественной теории дифференц. уравнений. Новосибирск: Наука, 1988. С. 270–272.

149. *Якубович В.А.* Оптимальное гашение вынужденных колебаний по заданному выходу системы // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 323–327.

150. *Abed E.H., Gover R.E., Goldberg A.J., Wolk S.I.* Nonlinear and stochastic stability problems in gated radar range trackers // Stoch. Theor. Contr. Lect. Notes. Control Inf. Sci. 2002. V. 280. P. 1–17.

151. *Akinyele O.* On partial stability of differential equations with time delay // Ann. Math. Pure Appl. (IV). 1979. V. 121. P. 351–372.

152. *Akinyele O.* Necessary conditions for the non-uniform partial stability for delay systems // Rend. Acc. Naz. del Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). 1979. V. 66. № 3–4. P. 509–515.

153. *Akinyele O.* On non-uniform partial stability and perturbations for delay systems // Rend. Acc. Naz. del Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). 1980. V. 67. № l–2. P. 39–44.

154. *Akinyele O.* On the partial stability of the nonlinear abstract Cauchy problem // Riv. Mat. Univ. Parma. (IV). 1980. V. 6. P. 81–88.

155. *Akinyele O.* On partial boundedness of differential equations with time delay // Riv. Mat. Univ. Parma. (IV).1982. V. 7. P. 9–21.

156. *Akinyele O.* Cone-valued Lyapunov functions and stability of impulsive control systems // Nonlin. Anal. TMA. 2000. V. 39. № 2. P. 247–259.

157. *Akulenko L.D.* Problems and Methods of Optimal Control. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.

158. *Angeli D., Ingalls B., Sontag E.D., Wang Y.* Uniform global asymptotic stability of differential inclusion // J. Dynam. Control Syst. 2004. V. 10. № 3. P. 391–412.

159. *Armellini G.* Sopra un'equazione differenziale della dinamica // Rend. Acc. Naz. del Lincei. 1935. V. 21. № 1–2. P. 111–116.

160. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlin. Anal. TMA. 1983. V. 7. № 3. P. 1163–1173.

161. *Avakumovic V.G.* Sur l'equation differentielle de Thomas-Fermi // Bull. Inst. Math. Belgrade. 1947. V. 1. P. 101–113.

162. *Bajic V.B.* Partial exponential stability of semi-state systems // Int. J. Control. 1986. V. 44. № 5. P. 1383–1394.

163. *Bellman R.* Vector Liapunov functions // SIAM J. Control. Ser. A. 1962. V. 1. P. 32–34.

164. *Belloni M., Risito C.* On the global existence in the future and the partial boundedness of the motion of a wide class of holonomic scleronomic systems // Rend. Mat. Appl. (VII). 1992. V. 16. № 4. P. 587–598.

165. *Benner P.* Partial stabilization of generalized state-space systems using the dick function method // PAMM. 2003. V. 2. № 1. P. 479–480.

166. *Benner P., Castillo M., Quintana-Orti E.S.* Partial stabilization of large-scale discrete-time linear control systems // J. Parallel. Distrib. Sci. Eng. Computing. 2004. V. 1/2.

167. *Benner P., Castillo M., Quintana E.S., Hernandes V.* Parallel partial stabilizing algorithms for large linear control systems // J. Supercomput. 2000. V. 15. № 1. P. 193–206.

168. *Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O.* On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlin. Anal. TMA. 2003. V. 55. № 4–6. P. 641–656.

169. *Blanchini F.* Set invariance in control // Automatica. 1999. V. 35. № 11. P. 1747–1767.

170. *Bondi P., Fergola P., Gambardella L., Tenneriello C.* Partial stability of large-scale systems // IEEE Tranc. Automat Control. 1978. V. AC-24. № 1. P. 94–97.

171. *Bondi P., Fergola P., Gambardella L., Tenneriello C.* Partial asymptotic stability via limiting equations // Math. Meth. Appl. Sci. 1981. V. 3. № 4. P. 516–522.

172. *Brockett R.W.* Asymptotic stability and feedback stabilization / Differential Geometric Control. Theory. Boston: Birkhauser, 1983.

173. *Cai W.X.* The connective stability with respect to a part of the variables of dynamic systems with delay // J. Xiamen. Univ., Nat. Sci. 1984. V. 23. № 3. P. 291–299.

174. *Cai W.X.* The connective stability with respect to part of the variables of large-scale systems with delay // J. Xiamen. Univ., Nat. Sci. 1987. V. 26. № 3. P. 277–285.

175. *Campanini R.* On the continuability and the partial boundedness of the solutions of systems of differential equations // Boll. Unione Mat. Ital. (VI). 1984. V. 3. P. 75–84.

176. *Cantarelli G.* Criteria of a partial boundedness for the motion of holonomic scleronomic dissipative systems // Riv. Mat. Univ. Parma. (V). 1995. V. 4. P. 69–78.

177. *Cantarelli G.* Global existence and boundedness for quasi-variational systems // Int. J. Math. and Math. Sci. 1999. V. 22. № 2. P. 281–311.

178. *Cantarelli G., Risito C.* Criteri di esistenza globale e di limitatezza per i sistemi olonomi scleronomi // Ann. Math. Pure Appl. (IV). 1992. V. 162. P. 383–394.

179. *Cao Q.G.* The partial stability for linear discrete systems // J. Math. Res. Expo. 1989. V. 9. № 4. P. 541–545.

180. *Cao Q.G., Xiong K.Q.* Partial asymptotic stability for linear time-varying discrete systems // Ann. Diff. Equat. 1993. V. 9. № 2. P. 141–149.

181. *Cesari L.* Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1959.

182. *Chellaboina V., Haddad W.M.* Teaching time-varying stability theory using autonomous partial stability theory // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. Orlando, Fl., December 2001. P. 3230–3235.

183. *Chellaboina V., Haddad W.M.* A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems // IEEE Control Systems. Magazine. 2002. V. 22. № 6. P. 66–75. (Erratum: IEEE Contr. Syst. Magazine. 2003. V. 23. № 1. P. 103.)

184. *Corduneanu C.* Sur la stabilite partielle // Rev. Roumaine math. Pures. Appl. 1964. V. 9. № 3. P. 229–236.

185. *Corduneanu C.* Some problems concerning partial stability // Symp. Math. V. 6. Meccanica non-lineare stabilita. 23–26 febbrario, 1970. N.Y.: Acad. Press, 1971. P. 141–154.

186. *Corduneanu C.* On partial stability for delay systems // Ann. Pol. Math. 1974. V. 29. P. 357–362.

187. *Djiaferis T.E.* Partial stability preserving maps and stabilization // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. Maui, December 2003. P. 2490–2495.

188. *Dragan V., Halanay A.* Partial stability for singularly perturbed systems // Workshop in Diff. Equations and Their Contr. Iasi. 1983. P. 36–45.

189. *Edwards H., Lin Y., Wang Y.* On input-to-state stability for time – varying nonlinear systems // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, December 2000. P. 3501–3506.

190. *Efimov D.V.* Universal formula for output asymptotic stabilization // Proc. 15-th World Congr. of the IFAC, Barselona, Spain, Yuly 2002.

191. *El-Gohary A.* Optimal stabilization of the rotational motion of a rigid body with the help of rotors // Int. J. Nonlin. Mech. 2000. V. 35. № 3. P. 393–403.

192. *Esclangon E.* Nouvelles recherches sur les fonctions quasiperiodiques // Ann. Obs. Bordeaux. 1917. V. 16. P. 51–226.

193. *Fergola P., Moauro V.* On partial stability // Ricerche Mat. 1970. V. 19. № 2. P. 185–207.

194. *Fergola P., Tenneriello C.* Partial stability of composite systems with unstable subsystems // Large Scale Syst. 1983. V. 4. P. 101–105.

195. *Fergola P., Tenneriello C.* Lotka-Volterra models: partial stability and partial ultimate boundedness // Biomath. Related Comput. Probl. 1988. P. 283–294.

196. *Fradkov A.L.* Exploring nonlinearity by feedback // Physica D. 1999. V. 128. № 2–4. P. 159–168.

197. *Fradkov A.L.* Physics and control: exploring physical systems by feedback // Prep. V IFAC Symp. Nonlinear Control Syst. 2001. V. 5. P. 1503–1509.

198. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.

199. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction in Control of Oscillations and Chaos. Singapure: World Scientific, 1998.

200. *Ge Z.M., Chen Y.S.* Synchronization of undirectional coupled chaotic systems via partial stability // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. V. 21. № 1. P. 101–111.

201. *Geluk J.L.* Note on a theorem of Avakumovic // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 112. № 2. P. 429–431.

202. *Guo Y.X.* Partial stability for nonlinear time varying dynamical systems // Ann. Diff. Equat. 1992. V. 8. № 3. P. 276–283.

203. *Haddad W.M., Chellaboina V., Nersesov S.G.* A unification between partial stability of state-dependent impulsive systems and stability theory for time-dependent impulsive systems // Int. J. Hybrid Syst. 2002. V. 2. № 1–2. P. 155–168.

204. *Haddad W.M., Chellaboina V., Nersesov S.G.* A unification between partial stability of state-dependent impulsive systems and stability theory for time-dependent impulsive systems // Proc. Amer. Control Conf. Denver, CO, June 2003. P. 4004–4009.

205. *Haddad W.M., Chellaboina V., Oh J.H.* Linear controller analysis and design for systems with input hystereses nonlinearities // J. Franklin Inst. 2003. V. 340. № 5. P. 371–390.

206. *Hagedorn P.* Steady motions in controlled gyrostat systems // Ing. Arch. 1982. V. 52. № 2. P. 183–204.

207. *Hahn W.* Stability of Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

208. *Halanay A.* Differential Equation: Stability, Oscillations, Time Lags. N.Y.: Acad. Press, 1966. (Translation of the Rumanian edition, Bucharest, 1963).

209. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

210. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. I. (Autonomous systems). II. (The method of limiting equations) // Acta Sci. Math. 1983. V. 45. P. 219–231; 1983. V. 46. P. 143–156.

211. *Hatvani L.* On the asymptotic stability by nondecrescent Ljapunov function // Nonlin. Anal. TMA. 1984. V. 8. № 1. P. 67–77.

212. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. III. (Energy-like Ljapunov functions) // Acta Sci. Math. 1985. V. 49. P. 157–167.

213. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability by the method of limiting equation // Ann. Math. pura appl. (IV). 1985. V. 139. P. 65–82.

214. *Hatvani L.* On the stability of the solutions of ordinary differential equations with mechanical applications // Alkalmaz. Mat. Lapok. 1991. V. 15. № 1/2. P. 1–90.

215. *Hatvani L.* On the Armellini-Sansone-Tonelli theorem // Mem. Diff. Equat. Math. Phys. 1997. V. 12. P. 76–81.

216. *Hatvani L., Terjeki I.* Stability properties of the equilibrium under the influence of unbounded damping // Acta Sci. Math. 1985. V. 48. № 1–4. P. 187–200.

217. *Havre K., Skogestad S.* Input/output selection and partial control // Proc. 13-th Triennial World Congr. of the IFAC, San Francisco, Yuly 1996. V. M. P. 181–186.

218. *Huang L.* A discussion on some problems of Lyapunov matrix equation about the partial stability // J. Math. Res. Expo. 1990. V. 10. № 2. P. 195–198.

219. *Ignatyev A.O.* On the partial equiasymptotic stability in functional-differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 268. № 2. P. 615–628.

220. *Ingalls B.P.* Comparisons of Notions of Stability for Nonlinear Control Systems with Outputs. Ph.D. Thesis. Rutgers University, New Brunswick, N.J. 2001.

221. *Ingalls B.P., Sontag E.D., Wang Y.* Measurement to error stability: a notion of partial detectability for nonlinear systems // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas. Nevada. December 2002. P. 3946–3951.

222. *Ingalls B., Wang Y.* On input-to-output stability for systems not uniformly bounded // Prep. V IFAC Symp. Nonlinear Control Systems. 2001. V. 5. P. 1503–1509.

223. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems II. London: Springer-Verlag, 1999.

224. *Jian J.G., Liao X.X.* Partial exponential stability of nonlinear time-varying large-scale systems // Nonlin. Anal. TMA. 2004. V. 59. № 5. P. 789–800.

225. *Kertesz V.* Partial stability investigations of differential equational of second order // Comput. Math. Appl. 1991. V. 21. № 1. P. 95–102.

226. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 2 ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall. 1996.

227. *Khapaev M.M.* Averaging in Stability Theory. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.

228. *Kolesnichenko O., Shiriaev A.S.* Partial stabilization of underactuated Euler-Lagrange systems via a class of feedback transformations // Syst. Control Lett. 2002. V. 45. № 2. P. 299–305.

229. *Kothare M.V., Shinnar R., Rinard I., Morari M.* On defining the partial control problem: concepts and examples // Proc. Amer. Contr. Conf., Philadelphia, PA, Yune 1998. P. 2103–2107; AIChE J. 2000. V. 46. № 12. P. 2456–2474.

230. *Kovalev A.M.* Control and stabilization problems with respect to a part of the variables // ZAMM. 1994. V. 74. № 7. P. 59–60.

231. *Krichman M., Sontag E.D., Wang Y.* Input-output-to-state-stability // SIAM J. Contr. Optim. 2000. V. 39. № 6. P. 1874–1928.

232. *Krstic M., Deng H.* Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London: Springer-Verlag, 1998.

233. *Kundur P., Paserba J., Ajjarapu V. et al.* Definition and classification of power systems stability // IEEE Trans. on Power Systems. 2004. V. 19. № 3. P. 1387–1401.

234. *Lakshmikantham V., Liu X.Z.* Stability Analysis in Terms of Two Measures. Singapure: World Scientific, 1993.

235. *Lakshmikantham V., Salvadori L.* On Massera type converse theorem in term of two different measures // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. A. 1976. V. 13. № 2. P. 293–301.

236. *La Salle J.P., Rath R.J.* Eventual stability // Proc. 2-nd Triennial World Congr. of the IFAC, 1963. V. 1. P. 556–560.

237. *Li W.J., Duan K.C.* Partial stability and boundedness of solutions to retarded functional-differential equations // J. Xinjiang Univ., Nat. Sci. 1993. V. 10. № 4. P. 31–33.

238. *Liao X.X., Li J.* Robust interval stability, persistence, and partial stability on Lotka-Volterra systems with time-delay// Appl. Math. Comput. 1996. V. 75. № 2–3. P. 103–115.

239. *Liao X.X., Wu W.H.* The necessary and sufficient conditions of partial stability for linear dynamical systems // Chin. Sci. Bull. 1990. V. 35. № 11. P. 899–903.

240. *Lin X.Y.* On converses to the partial stability theorems for difference equations // Pure Appl. Math. 1992. V. 8. № 1. P. 32–36.

241. *Lin Y.* Lyapunov Functions Techniques for Stabilization. Ph. D. Thesis. Rutgers University, New Brunswick, N.J. 1992.

242. *Lin Y., Sontag E.D., Wang Y.* A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability // SIAM J. Contr. Optim. 1996. V. 34. № 1. P. 124–160.

243. *Luyben B.L., Tyrens B.D., Luyben M.L.* Plantwide Process Control. N.Y.: McGraw-Hill, 1999.

244. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

245. *Mahony R., Mareels I.M., Campion G., Bastin G.* Output stabilization of square non-linear systems // Automatica. 1997. V. 33. № 8. P. 1571–1577.

246. *Mao X.R.* Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 260. № .2. P. 325–340.

247. *Martynyuk A.A.* Stability by Liapunov's Matrix Function Method with Applications. N.Y.: Marcel Dekker, 1998.

248. *Meirovitch L.* Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems in the neighbourhood of nontrivial equilibrium // Ibid. 1974. V. 12. № 7. P. 889–898.

249. *Michel A.N., Molchanov A.P., Sun Y.* Partial stability and boundedness of discontinuous dynamical systems // Nonlin. Stud. 2002. V. 9. № 3. P. 225–247.

250. *Michel A.N., Molchanov A.P., Sun Y.* Partial stability of systems with applications to discrete events systems // Proc. 15th Triennial World Congr. of the IFAC, Barselona, Spain, Yuly 2002. 6 p.

251. *Michel A.N., Molchanov A.P., Sun Y.* Partial stability of discontinuous dynamical systems // Proc. Amer. Contr. Conf., Anchorage, Alaska, May 2002. P. 74–79.

252. *Michel A.N., Molchanov A.P., Sun Y.* Partial stability and boundedness of general dynamical systems on metric spaces // Nonlin. Anal. TMA. 2003. V. 52. № 4. P. 1295–1316.

253. *Michel A.N., Sun Y.* Partial stability of general dynamical systems under arbitrary initial $\mathbf{z}$-perturbations // Int. J. Hybrid Syst. 2002. V. 2. № 1–2. P. 57–92.

254. *Miki K.* Partial integral stability theorems by comparison principle // Res. Rept. Akita Tech. Coll. 1990. V. 25. P. 84–89.

255. *Miki K., Masamichi A., Shoichi S.* On the partial total stability and partially total boundedness of a system of ordinary differential equations // Res. Rept. Akita Tech. Coll. 1985. V. 20. P. 105–109.

256. *Miroshnik I.V.* Partial stability and geometric problems of nonlinear control // Proc. 15-th Triennial World Congr. of the IFAC, Barselona, Spain, Yuly 2002. 6 p.

257. *Miroshnik I.V.* Attractors and partial stability of nonlinear dynamical systems // Automatica. 2004. V. 40. № 3. P. 473–480.

258. *Molchanov A.P., Michel A.N., Sun Y.* Converse theorems of the principal Lyapunov results for partial stability of general dynamical systems on metric space // Nonlin. Stud. 2003. V. 10. № 2. P. 113–134.

259. *Muller P.S.* Stabilitat und Matrizen. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

260. *Muller P.S.* Zum problem der partiellen asymptotichen stabilitat // Fest. zum 70 Gelebr. von Herrn Prof. Dr. K. Magnus. TU Munchen. 1982. P. 237–268.

261. *Muller P.S.* Kriterien fur Untersuchung der partiellen asymptotischen stabilitas // ZAMM. 1984. V. 64. № 4. P. 71–72.

262. *Muller P.S.* Stability and optimal control of nonlinear descriptor systems: A survey // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 1998. V. 8. № 2. P. 269–286.

263. *Muresan M.* On partial stability for differential inclusion // Proc. Int. Conf. Diff. Equat. Barcelona, Spain, August 26–31, 1991. (Perello C., ed.). Singapure: World Scientiflc, 1993. P. 778–780.

264. *Pachpatte B.G.* Partial stability of solution of difference equations // Proc. Nat. Acad. Sci., India. Sect. A. 1973. V. A3. P. 235–238.

265. *Pascal M.* La stabilite d'attitude dun satellite muni de panneaux solares // Ibid. 1978. V. 5. № 10. P. 817–844.

266. *Peiffer K.* La Methode de Liapunoff Appliquée á I Edúte de la Stabilite Partielle. Université Catholique de Louvain. Faculté des sciences. 1968.

267. *Peiffer K., Rouche N.* Liapounov's second method applied to partial stability // J. Mecanique. 1969. V. 8. № 2. P. 323–334.

268. *Peng L.P.* Strong stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect // J. Beijing Univ. Aeron. Astron. 2001. V. 27. № 3. P. 365–369.

269. *Peng S.T., Chen C.K.* Estimation of the partial stability region of a class of robust controllers with input constraints // J. Franklin Inst. 1998. V. 335. № 7. P. 1271–1281.

270. *Phillis Y.* Y-stability and stabilizability in the mean of discrete-time stochastic systems // Int. J. Control. 1984. V. 40. № 1. P. 149–160.

271. *Pico-Marco E., Pico J.* Partial stability for specific growth rate control in biotechnological fed-batch processes // Proc. IEEE Conf. Control Appl. 2003. P. 724–728.

272. *Potcovaru G.* On the partial stability of a dynamical systems with random parameters // Ann. Univ. Bucur., Math. 1999. V. 48. № 2. P. 163–168.

273. *Prodi G.* Un' osservazione sugl' integrali dell' equazione $\ddot{y}+A(x)y=0$ net caso $A(x)\to+\infty$ per $x\to\infty$ // Rend. Acc. Naz. del Lincei. 1950. V. 8. P. 462–464.

274. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parziale // Ann. Math. Pura Appl. 1970. V. 84. P. 279–292.

275. *Risito C.* Metodi per lo studio della stabilita di sistemi con integrali primi noti // Ann. Math. Pura Appl. 1976. V. 107. P. 49–94.

276. *Rokni Lamooki G.R., Townley S.B.* Partial stability in back-stepping and adaptive control // Proc. Int. Conf. Methods Models in Autom. and Robotics. Miedzyzdroje, Poland. August 2003. P. 491–496.

277. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Liapounov's Direct Method. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

278. *Rouche N., Peiffer K.* Le theoreme de Lagrange-Dirichle et la deuxieme methode de Liapunoff // Ann. Soc. Scient. Bruxelle. Ser. I. 1967. V. 81. № 1. P. 19–33.

279. *Routh J.E.* A Triatise on the Stability of a Given State of Motion. London: Macmillan and Co, 1877.

280. *Rumyantsev V.V.* On the stability with respect to a part of the variables // Symp. Math. V. 6. Meccanica non-lineare stability. N.Y.: Acad. Press, 1971. P. 243–265.

281. *Russinov I.K.* Върху асимптотическата устойчивост и неустойчивост по част от променливите на определен тип неавтономни системи // Nauchni Tr., Plovdivski Univ., Mat. 1988. V. 26. № 3. P. 67–73.

282. *Russinov I.K.* Integral stability with respect to a part of the variables and perturbing Lyapunov functions // Nauchni Tr., Plovdivski Univ., Mat. 1994. V. 31. № 3. P. 83–87.

283. *Salvadori L.* Sul problema della stabilita asimptotica // Rend. Acc. Naz. del Lincei. 1972. V. 53. № 1–2. P. 35–38.

284. *Salvadori L.* Some contributions to asymptotic stability theory // Ann. Soc. Scient. Bruxelle. Ser.1. 1974. V. 88. № 2. P. 183–194.

285. *Sansone G.* Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di un' equazione differenziale della dinamica // Scritti Math. offerti a Luigi Berzolari. Pavia. 1936. P. 385–403.

286. *Sansone G.* Equazioni Differenziali nel Campo Reale. Pt. 2. Bologna: Zanichelli. 1949.

287. *Scott F.J.* New partial asymptotic stability results for nonlinear ordinary differential equations // Pacific J. Math. 1977. V. 72. № 2. P. 523–535.

288. *Scott F.J.* On a partial asymptotic stability theorem of Willett and Wong // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 63. № 2. P. 416–420.

289. *Sepulchre R., Jankovic M., Kokotovic P.V.* Constructive Nonlinear Control. London: Springer-Verlag, 1997.

290. *Shen J.H., Du X.T.* Partial exponential stability of large-scale nonautonomous discrete systems // Acta Sci. Nat. Univ. Norm. Hunan. 1995. V. 18. № 3. P. 16–21.

291. *Shen Y.Y.* Partial stability and unstability of Ito stochastic systems // J. Stangdong Coll. Oceanol. 1982. V. 12. № 4. P. 69–76.

292. *Shiriaev A.S.* The notion of V-detectability and stabilization of invariant sets of nonlinear systems // Syst. Control Lett. 2000. V. 39. № 5. P. 327–338.

293. *Shiriaev A.S., Fradkov A.L.* Stabilization of invariant sets of cascaded nonlinear systems // Proc. IEEE Conf. Decision Control Phoenix. 1999. P. 1296–1301.

294. *Shiriaev A.S., Fradkov A.L.* Stabilization of invariant sets for nonlinear non-affine systems // Automatica. 2000. V. 36. № 11. P. 1709–1715.

295. *Shiriaev A.S., Fradkov A.L.* Stabilization of invariant sets for nonlinear systems with applications to control of oscillations // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2001. V. 11. № 3. P. 215–240.

296. *Shoichi S.* On the partial iniformly integral stability of solutions of ordinary differential equation // Res. Rept. Akita Tech. Coll. 1990. V. 25. P. 78–83.

297. *Shoichi S., Miki K., Masamichi A.* Partial stability theorems by comparison principle // Res. Rept. Akita Tech. Coll. 1982. V. 17. P. 95–99.

298. *Shu W.H.* On partial stability of functional-differential equations with delays // J. Cent. China Norm. Univ., Nat. Sci. 1996. V.30. № 2. P. 135–138.

299. *Simenov P.S., Bainov D.D.* Stability with respect to a part of variables in systems with impulse effect // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 117. № 1. P. 247–263; 1987. V. 124. № 2. P. 547–560.

300. *Sontag E.D.* A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. № 2. P. 117–123.

301. *Sontag E.D.* Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. 2-ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1998.

302. *Sontag E.D.* The ISS phylosophy as a unifying framework for stability behavior // Nonlinear control in the Year 2000. V. 2. (A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Respondek, eds.) Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 443–468.

303. *Sontag E.D.* Input to state stability and related notions // Proc. Symp. Chemical Process Contr. VI. Tueson, Arisona, Jan. 2001. P. 109–120.

304. *Sontag E.D., Wang Y.* A notion of input to output stability // Proc. Europ. Control Conf. Brussels, July 1997. Paper WE-E-A2. 6 p.

305. *Sontag E.D., Wang Y.* Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems // Syst. Control Lett. 1997. V. 29. № 4–5. P. 279–290.

306. *Sontag E.D., Wang Y.* Notions of input to output stability // Syst. Control Lett. 1999. V. 38. № 4–5. P. 235–248.

307. *Sontag E.D., Wang Y.* Lyapunov characterizations of input to output stability // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 39. № 1. P. 226–249.

308. *Sun Y., Michel A.N.* Partial stability of general dynamical systems under arbitrary initial $\mathbf{z}$-perturbations // Tranc. IEEE Conf. Decision Control. Las Vegas. Nevada. December 2002. P. 2663–2668.

309. *Sun Y., Michel A.N.* Partial stability and boundedness of discontinous dynamical systems under arbitrary initial $\mathbf{z}$-perturbations // Int. J. Hybrid Syst. 2002. V. 2. № 3. P. 261–288.

310. *Sun Y., Molchanov A.P., Michel A.N.* Partial stability of dynamical systems // Proc. 15-th Int. Symp. Math. Theory Networks Syst. Univ. Notre Dame, IN, August 2002. 6 p.

311. *Talpalary P., Stefancu D.* On partial stability of multivalued differential equations // Bull. Inst. Politech. Iasi. Ser. I. 1987. V. 33. № 1–4. P. 41–46.

312. *Tang S.Y., Xi Y.N.* Robust interval stability and partial stability of Kolmogorov systems with time delay // J. Math., Wuhan Univ. 2000. V. 20. № 2. P. 180–184.

313. *Teel A., Praly L.* A smooth Lyapounov function from a class KL-estimate involving two positive semidefinite functions // ESAIM: Contr., Optimiz. Calculus Variat. 2000. V. 5. P. 313–367.

314. *Tian X.G.* Extension of a stability theorem for discrete systems and the Lyapunov function for partial stability // Acta Math. Sin. 1993. V. 36. № 5. P. 676–681.

315. *Tonelli L.* Estratto di lettera al prof. G. Sansone // Scritti Math. offerti a Luigi Berzolari. Pavia. 1936. P. 404–405.

316. *Tsiotras P., Schleicher A.* Detumbling and partial attitude stabilization of a rigid spacecraft under actuator failure // AIAA Guidance, Navigat. Control Conf. Denver, Colorado, August 2000. AIAA Paper 00-4044.

317. *Tsiotras P., Wilson B.C.* Zero and low-bias control design for active magnetic bearings // IEEE Tranc. Control Syst. Tech. 2003. V. 11. № 6. P. 889–904.

318. *Vannelli A., Vidyasagar M.* Theory of partial stability: theorems, converse theorems, and maximal Lyapunov functions // Proc. Annual Southeast Symp. Piscataway, N.J. 1980. P. 16–20.

319. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.

320. *Vorotnikov V.I.* Partial stability, stabilization and control: a some recent results // Proc. 15-th Triennial World Congr. of the IFAC, Barselona, Spain, Yuly 2002. 12 p.

321. *Wada T., Ohta Y., Ikeda M., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of Lur'e systems // Proc. IEEE Conf. Decision Control. New Orleans, December 1995. P. 1449–1454.

322. *Wang P.K.C.* Stability analysis of elastic and aeroelastic systems via Lyapunov's direct method // J. Franklin Inst. 1966. V. 281. № 1. P. 51–72.

323. *Weiss L., Infante E.F.* Finite time stability under perturbing forces and on product spaces // IEEE Tranc. Autom. Contr. 1967. V. AC-12. № 1. P. 54–59.

324. *Willems J.L.* A partial stability approach to the problem of transient power system stability // Int. J. Control. 1974. V. 19. № 1. P. 1–14.

325. *Wilson F.W., Jr.* Smothing direvatives of functions and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 413–428.

326. *Wiman A.* Ueber eine Stabilitatsfrage in der Theorie der linearen Differentialgleichungen // Acta Math. 1936. V. 66. P. 121–145.

327. *Wu C.W., Chua L.O.* A unified framework for synchronization and control of dynamical systems // Int. J. Bifurcat. Chaos. 1994. V. 4. № 4. P. 979–998.

328. *Xiao H.M., Liu Y.Q.* Partial exponential stability of large-scale system // Math. Appl. 1990. V. 3. № 2. P. 65–70.

329. *Xiao H.M., Liu Y.P., Hu Y.M.* The partial boundedness of neutral functional systems and their perturbation systems // Adv. Model. Simul. 1992. V.30. № 2. P. 5–15.

330. *Xiong K.Q., Cao Q.G.* On the partial stability of a linear system and control system // Ann. Diff. Equat. 1989. V. 5. № 1. P. 87–97.

331. *Yang T.* Impulsive Control Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

332. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapounov's Second Method. Tokyo: Math. Soc. Japan, 1966.

333. *Yu G.D.* On the partial stability of impulsive differential equations // Ann. Diff. Equat. 1998. V. 14. № 2. P. 407–412.

334. *Zames G.* On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. I. II // IEEE Trans. Automat Control. 1966. V. AC-11. № 2. P. 228–238; № 3. P. 465–477.

335. *Zhao J.X.* On partial asymptotic stability and limit equations // J. Nanjing Univ. Math. Biquart. 1990. V. 7. № 1. P. 100–108.

336. *Zhu H.P., Mei F.X.* On the stability of nonholonomic mechanical systems with respect to part variables // Chin. J. Appl. Math. Mech. 1995. V. 16. № 3. P. 225–233.

337. *Zubov S.V.* Rated stability // Proc. 1 Int. Conf. "Contr. Oscill. and Chaos". St.-Petersburg, Russia, August 1997. V. 1. P. 170–171.

338. *Zuyev A.L.* On Brockett's condition for smooth stabilization with respect to a part of the variables // Proc. Europ. Control Conf. (ECC'1999). Karlsruhe, Germany. 1999. 6 p.

339. *Zuyev A.L.* On partial stabilization of nonlinear autonomous systems: sufficient conditions and examples // Proc. Europ. Control Conf. (ECC'2001). Porte, Portugal. 2001. P. 1918–1922.

340. *Zuyev A.L.* Partial stabilization of rigid body with a several elastic beams // Proc. 15th Triennial World Congr. IFAC, Barselona, Spain, Yuly 2002. 6 p.

341. *Zuyev A.L.* Partial asymptotic stability and stabilization of nonlinear abstract differential equations // Proc. IEEE Conf. Decision Control. Maui, December 2003. P. 1321–1326.

342. *Zuyev A.L.* On partial stabilization of a system of the Euler-Bernoulli beam equations // The Abdus Salam Int. Center for Theor. Phys. Trieste, Italy. 2003. Preprint IC2003150. 22 p.

343. *Zuyev A.L.* On partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. 2005. V. 41. № 1. P. 1–10.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Ю. Рапопортом.

Поступила в редакцию 27.11.2003