В. А. Якубович, Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. III, *Автомат. и телемех.*, 1964, том 25, выпуск 5, 601–612

УДК 62-501.32

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ. III

В. А. ЯКУБОВИЧ

(*Ленинград*)

Методом матричных неравенств [1] исследуется общий критический случай задачи об абсолютной устойчивости регулируемых систем с одной, вообще говоря, разрывной нелинейностью. Находится условие абсолютной устойчивости, которое является достаточным и, если отбросить некоторые граничные случаи, необходимым для существования у системы функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». Исследуются возможности метода, основанного на функциях Ляпунова указанного вида.

Будем придерживаться сформулированных в [2, 3] условий относительно обозначений *. Рассмотрим систему «прямого регулирования» [4]

$$\frac{dx}{dt} = Px + pq(\sigma), \qquad \sigma = r^*x, \tag{1}$$

где $\varphi(\sigma)$ — вообще говоря, разрывная функция, имеющая лишь точки разрыва первого рода **. Предполагается, кроме того, что для любой точки непрерывности $\sigma \neq 0$ выполнено условие

$$0 < \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2 \qquad (0 < \mu_0 \leqslant +\infty) \tag{2}$$

и для любой точки разрыва $\sigma_0 \neq 0$ выполнены условия

$$\varphi(\sigma_0 - 0) \neq 0, \qquad \varphi(\sigma_0 + 0) \neq 0. \tag{3}$$

Система (1) имеет решение $x \equiv 0$, если даже функция $\varphi(\sigma)$ разрывна в точке $\sigma = 0$ (см. подробнее § 3 Приложения). Как обычно, система (1) называется абсолютно устойчивой, если для любой функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей сформулированным условиям, решение $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову и любое решение $x(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Будем полагать, что характеристическое уравнение $\det(P - \lambda I) = 0$ имеет ν_1 корней в открытой левой полуплоскости и ν_2 корней на мни-

* Большими (не жирными) латинскими буквами обозначаются матрицы, малыми латинскими — векторы, греческими — скалярные величины. Исключениями являются t — время и V — функция Ляпунова. Индексы и степени обозначаются любыми буквами. Если не оговорено противное, то матрицы, векторы и числа являются вещественными; матрицы имеют порядок $\nu \times \nu$, векторы — $\nu \times 1$. Векторы рассматриваются как одностолбцовые матрицы. Звездочка означает транспонирование, так что a^* — вектор-строка, $a^*b = (b, a)$ — число, скалярное произведение векторов a и b, ba^* — матрица. Запись $H > 0$ означает, что H — определенно-положительная симметричная матрица: $H^* = H$, $x^*Hx > 0$ для любого $x \neq 0$. I означает единичную матрицу.

** Т. е. существуют конечные пределы справа и слева $\varphi(\sigma_0 + 0)$, $\varphi(\sigma_0 - 0)$. Результаты остаются справедливыми (доказательства несколько усложняются), если $\varphi(\sigma)$ — измеримая, ограниченная на любом конечном интервале функция.

мой оси. Корни считаются с учетом кратности, так что $\nu_1 + \nu_2 = \bar{\nu}$. Критическим случаем будем называть такой, когда $\nu_2 > 0$. Если $\det P = 0$, то система (1) сводится к системе «непрямого регулирования», исследованной в [2, 3]. Поэтому в основном нас будет интересовать случай $\det P \neq 0$.

Отметим, что критический случай является не исключительным, а общим, если иметь в виду задачу [4—6] *.

В предположении, что μ_0 конечно, функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна и удовлетворяет вместо (3) условию

$$0 < \varepsilon_0\sigma^2 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2 \tag{4}$$

с некоторым $\varepsilon_0 > 0$, М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер показали [7], что критический случай сводится к некритическому и что критерий В. М. Попова [8, 9] распространяется тем самым с определенными дополнениями на случай, когда $\nu_2 > 0$. Ниже будет показано, что этот результат М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера остается справедливым в более общих сформулированных выше предположениях **. В отличие от работы [7] здесь не используются результаты [8, 9], доказательство основывается на решении специальных матричных неравенств [1]. Этот путь позволяет дать практически исчерпывающий ответ на вопрос о существовании у системы (1) функции Ляпунова вида

$$V = x^*Hx + \vartheta \int\limits_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma, \tag{5}$$

где $H = H^*$, ϑ — искомые параметры. Этому вопросу, как известно, посвящено большое число работ.

Введем переходную функцию линейной части системы

$$\chi(\lambda) = r^* \quad (P - \lambda I)^{-1}q, \tag{6}$$

которую представим в виде

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \chi_2(\lambda), \tag{7}$$

где $\chi_1(\lambda)$ — сумма простейших дробей с полюсами в открытой левой полуплоскости и $\chi_2(\lambda)$ — сумма простейших дробей с полюсами на мнимой оси.

Выбирая подходящим образом матрицу S, заменой

$$x = S\tilde{x} \tag{8}$$

приведем систему (1) к виду

$$d\tilde{x} / dt = \tilde{P}\tilde{x} + \tilde{q}\varphi(\sigma), \qquad \sigma = \tilde{r}^*\tilde{x}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{P} = S^{-1}PS = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{q} = S^{-1}q, \qquad \tilde{r} = S^*r \tag{10}$$

и спектры $\nu_1 \times \nu_1$ матрицы P_1 и $\nu_2 \times \nu_2$ матрицы P_2 лежат соответственно в открытой левой полуплоскости и на мнимой оси. Пусть

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

---

* Пусть в (1) функция $\varphi(\sigma)$ не удовлетворяет условиям (2), спектр P расположен произвольно и (μ_1, μ_2) — один из интервалов (расширить который нельзя), такой, что при $\mu_1 < \mu < \mu_2$ линеаризованное уравнение (1) с $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ асимптотически устойчиво. Задача об абсолютной устойчивости в секторе $\mu_1\sigma^2 < \sigma\varphi(\sigma) < \mu_2\sigma^2$ сводится к сформулированной задаче для критического случая, если только либо $\mu_1 \neq -\infty$ либо $\mu_2 \neq +\infty$. Это означает, что не имеет места особый случай, когда P — гурвицева матрица и амплитудно-фазовая характеристика $\chi(i\omega) = r^*(P - i\omega I)^{-1}q$ пересекает действительную ось при $-\infty < \omega < +\infty$ лишь в точке $\chi = 0$.

** Вопрос о том, сохраняется ли абсолютная устойчивость при переходе от (4) к (2), равносилен вопросу об «опасности» или «безопасности» границы $\varepsilon_0 = 0$ в пространстве параметров $\{P, q, r, \mu_0, \varepsilon_0\}$, что представляет определенный интерес для приложений. Переход от (4) к (2) означает, что допускается случай, критический по Ляпунову («в малом»), с произвольным числом чисто мнимых корней. Обычно это допущение приводит к серьезным математическим трудностям.

где векторы с индексами 1 и 2 имеют соответственно порядок ν_1 и ν_2. Система (9) запишется в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = P_1 x_1 + q_1 \varphi(\sigma), \qquad \frac{dx_2}{dt} = P_2 x_2 + q_2 \varphi(\sigma), \qquad \sigma = r_1{}^* x_1 + r_2{}^* x_2. \quad (12)$$

Так как, очевидно, $\chi(\lambda)$ является инвариантом преобразования (8), т. е. $\chi(\lambda) = \tilde{r}^*(\tilde{P} - \lambda I)^{-1}\tilde{q}$, то $\chi(\lambda) = r_1{}^*(P_1 - \lambda I)^{-1} q_1 + r_2{}^*(P_2 - \lambda I) q_2$. Сравнивая с (7), получим в силу единственности разложения (7)

$$\chi_j(\lambda) = r_j{}^*(P_j - \lambda I)^{-1} q_j \quad (j = 1,\ 2). \qquad (13)$$

Обозначим

$$\rho = \lim_{|\lambda| \to \infty} \lambda \chi(\lambda), \qquad \rho_j = \lim_{|\lambda| \to \infty} \lambda \chi_j(\lambda). \qquad (14)$$

Из (6), (13) имеем

$$\rho = -r^* q, \qquad \rho_j = -r_j{}^* q_j \quad (j = 1,\ 2). \qquad (15)$$

Для абсолютной устойчивости необходимо, чтобы было выполнено условие предельной устойчивости [7], состоящее в том, что система (1) с $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ асимптотически устойчива для достаточно малых $\mu > 0$ (матрица $P + \mu q r^*$ — гурвицева при достаточно малых $\mu > 0$). В работе [7] приведено необходимое и достаточное условие предельной устойчивости в терминах поведения на комплексной плоскости характеристики $\chi(\lambda)$. Следующая теорема дает необходимое и практически достаточное условие предельной устойчивости в аналитических терминах.

Теорема 1. Для предельной устойчивости необходимо, чтобы кратность каждого чисто мнимого корня уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$ равнялась 1 или 2, а также, чтобы при разложении функции $\chi_2(\lambda)$ (или $\chi(\lambda)$) на простейшие дроби каждой паре простых корней $\pm i\omega_0 \neq 0$ отвечало слагаемое $(\alpha\lambda + \beta) / (\lambda^2 + \omega_0{}^2)$, где $\alpha \geqslant 0$, $\alpha + |\beta| \neq 0$, простому нулевому корню — слагаемое Γ^2 / λ, где $\Gamma^2 > 0$, двукратному нулевому корню — слагаемое $\gamma_0 / \lambda^2 + \gamma_1 / \lambda$, где $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 \geqslant 0$ *, паре двукратных чисто мнимых корней $\pm i\omega_0 \neq 0$ отвечало слагаемое $(\alpha\lambda + \beta) / (\lambda^2 + \omega_0{}^2) + \gamma(\lambda^2 + \omega_0{}^2) / (\lambda^2 + \omega_0{}^2)^2$, где $\gamma > 0$, $\alpha \geqslant 0$.

Если выполнены сформулированные условия и коэффициенты указанных разложений удовлетворяют строгим неравенствам ($\alpha > 0$, $\gamma_1 > 0$), то предельная устойчивость имеет место.

Для случая $\det P = 0$ эта теорема в других терминах доказана в [2] **. В случае $\det P \neq 0$ доказательство проводится дословно так же, как и в [2], и мы его опускаем.

Определение. Будем называть функцию $\chi_j(\lambda)$, $j = 1,\ 2$, невырожденной, если ее нельзя представить в виде отношения многочленов со степенью знаменателя меньшей, чем ν_j.

Из теоремы 1 следует, что для предельной устойчивости необходимо (но, конечно, недостаточно), чтобы функция $\chi_2(\lambda)$ была невырожденной.

Обозначим через $\pm i\omega_h$ полюса функции $\chi_2(\lambda)$, т. е. в случае невырожденности чисто мнимые корни (включая нулевой, если он имеется) уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$. Положим ***

$$\varkappa_j = \sum_h \underset{(i\omega_h)}{\text{Выч}} [\lambda^j \chi_2(\lambda)] = r_2{}^* P_2{}^j q_2 \quad (j = 0, 1, \ldots) \qquad (16)$$

---

* Условия $\Gamma^2 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 \geqslant 0$ выведены А. И. Лурье [4].

** Функция $\psi(\lambda)$ [2] связана с $\chi(\lambda)$ соотношением $\lambda\chi(\lambda) = \rho + \psi(\lambda)$, где ρ — коэффициент в системе (1.1) [2], совпадающий с (14).

*** Справедливость последнего равенства (16) устанавливается сразу же применением формулы Коши для функций от матриц (см. [3]). При $j = 0$, по определению, $\varkappa_0 = r_2{}^* q_2 = -\rho_2$, даже если $\det P = 0$.

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 2. 1°. Предположим, что выполнено условие предельной устойчивости. Для абсолютной устойчивости системы (1) достаточно, чтобы для некоторых $\tau \geqslant 0$, ϑ и всех $\omega \geqslant 0$ были выполнены соотношения

$$\vartheta\rho_2 \equiv \operatorname{Re}[(\tau + i\omega\vartheta)\chi_2(i\omega)] \quad (\omega \neq \omega_h), \tag{17}$$

$$\pi(\omega) \equiv \frac{\tau}{\mu_0} + \vartheta\rho_2 + \operatorname{Re}[(\tau + i\omega\vartheta)\chi_1(i\omega)] > 0, \tag{18}$$

$$\text{если} \lim_{\omega\to+\infty} \pi(\omega) = \frac{\tau}{\mu_0} + \vartheta\rho = 0, \text{ то } \lim_{\omega\to\infty} \omega^2\pi(\omega) > 0, \tag{19}$$

$$\tau > 0 \quad \text{при} \quad \det P = 0. \tag{20}$$

2°. Соотношение (17) равносильно в случае невырожденности функции $\chi_2(\lambda)$ соотношениям

$$\vartheta\varkappa_{2h+1} + \tau\varkappa_{2h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2h - 1 \leqslant \nu_2). \tag{21}$$

Утверждение пункта 1° справедливо, если вместо предположения о предельной устойчивости выполнены условия: а) $\chi_2(\lambda)$ — невырожденная функция, б) $\nu_2 \times \nu_2$ матрицы

$$K' = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 & \varkappa_3 & 0 & \cdots \\ 0 & -\varkappa_3 & 0 & -\varkappa_5 & \cdots \\ \varkappa_3 & 0 & \varkappa_5 & 0 & \cdots \\ 0 & -\varkappa_5 & 0 & -\varkappa_7 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad K'' = \begin{pmatrix} \varkappa_0 & 0 & \varkappa_2 & 0 & \cdots \\ 0 & -\varkappa_2 & 0 & -\varkappa_4 & \cdots \\ \varkappa_2 & 0 & \varkappa_4 & 0 & \cdots \\ 0 & -\varkappa_4 & 0 & -\varkappa_6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{22}$$

удовлетворяют неравенству

$$\tau K' + \vartheta K'' > 0. \tag{23}$$

3°. При выполнении условий пп. 1° или 2° у системы (1) существует функция Ляпунова вида (5) такая, что $V > 0$ при $x \neq 0$, $\dot{V} \leqslant 0$ почти всюду, обеспечивающая абсолютную устойчивость.

4°. При $\nu_2 > 0$ из факта существования у системы (1) функции Ляпунова вида (5) такой, что $V > 0$ при $x \neq 0$, $\dot{V} \leqslant 0$ для любой непрерывной функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (2), следует существование параметров $\tau \geqslant 0$, ϑ, для которых выполнены тождественно (17) и соотношение $\pi(\omega) \geqslant 0$, где $\pi(\omega)$ определяется формулой (18).

5°. Справедливы утверждения пп. 1°, 2° и 4° с заменой соотношений (17), (18) на неравенство

$$\pi(\omega) \equiv \frac{\tau}{\mu_0} + \operatorname{Re}[(\tau + i\omega\vartheta)\chi(i\omega)] > 0 \qquad (\omega \neq \omega_h), \tag{24}$$

причем для пункта 4° в (24) знак $>$ нужно заменить на $\geqslant$.

Последнее утверждение показывает, что теорему 2 можно рассматривать как распространение критерия Попова на критический случай и случай разрывных нелинейностей.

В наиболее важном случае двух чисто мнимых корней из теоремы 2 выводим следующее достаточное условие абсолютной устойчивости.

Следствие. Предположим, что уравнение $\det(P - \lambda I) = 0$ имеет на мнимой оси лишь два корня $\pm i\omega_0 \neq 0$. Представим функцию $\chi(\lambda)$ в виде $\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) + (\alpha\lambda + \beta) / (\lambda^2 + \omega_0^2)$, где $\chi_1(\lambda)$ — голоморфная функция на мнимой оси. Для абсолютной устойчивости системы (1) достаточно, чтобы $\alpha > 0$, а также, чтобы для всех $\omega \geqslant 0$ было выполнено неравенство

$$\pi(\omega) \equiv \frac{1}{\mu_0} + \frac{\beta}{\omega_0^2} + \operatorname{Re}\left[\left(1 + i\frac{\beta\omega}{\alpha\omega_0^2}\right)\chi_1(i\omega)\right] > 0$$

и если $\lim\limits_{\omega\to 0} \pi(\omega) = 0$, то $\lim\limits_{\omega\to 0} \omega^2\pi(\omega) > 0$.

В случае, когда уравнение $\det(P - \lambda I) = 0$ имеет один нулевой и два чисто мнимых корня, теорема 2 дает результат, очень близкий к теореме 2 [2] *. Во всех прочих случаях условие (17), которое непременно выполнено, если $\dot{V} \leqslant 0$, требует, чтобы коэффициенты функции $\chi_2(\lambda)$ удовлетворяли некоторым равенствам. По непрерывности отсюда заключаем, что все применявшиеся до сих пор методы, приводящие к эффективным критериям (все эти методы основаны на функциях Ляпунова вида (5)), дают плохой результат и в некритическом случае, если уравнение $\det(P - \lambda I) = 0$ имеет более чем три корня вблизи мнимой оси **. (При стремлении этих корней к мнимой оси «области» абсолютной устойчивости в пространстве параметров вырождаются в «поверхности».) По-видимому, это означает, что класс функций Ляпунова (5) является недостаточно широким для полного исследования задачи об абсолютной устойчивости.

Выражение $\pi(\omega)$ в формуле (18) может быть записано в виде ***:

$$\pi(\omega) = \frac{\tau}{\mu_0} + \vartheta\rho + r_1^* \frac{\vartheta P_1^2 + \tau P_1}{P_1^2 + \omega^2 I_1} q_1,$$

т. е. $\pi(\omega) = \alpha(\omega^2) / (\Delta(\omega^2)$, где $\alpha(\xi)$, $\Delta(\xi)$ — многочлены степени ν_1 относительно $\xi = \omega^2$ и многочлен $\Delta(\xi) = \det(P_1^2 + \xi I_1)$ не имеет нулей при вещественных $\xi \geqslant 0$. Поэтому условие (18) сводится к тому, чтобы известный (в случае, когда ϑ, τ найдены, например, из (17)) многочлен степени ν_1 относительно $\xi = \omega^2$ не обращался в нуль при $0 \leqslant \xi < \infty$, что может быть проверено применением известных правил алгебры. Следующая теорема дает другие формулировки этого условия.

Теорема 3. Все утверждения теоремы 2 остаются справедливыми, если соотношения (18), (19) заменены одним из следующих условий:

(А) выполнено неравенство $\rho_0 = \tau / \mu_0 + \vartheta\rho \geqslant 0$ и для всех векторов q', достаточно близких к q, имеет вещественное решение векторное квадратное уравнение относительно ν_1 — вектора u_1

$$L(u_1u_1^*)(\vartheta P_1^* + \tau I_1)r_1 + 2\sqrt{\rho_0}u_1 + 2q_1' = 0, \tag{25}$$

где матрица $L(u_1u_1^*) = U_1$ определяется из соотношения

$$U_1P_1^* + P_1U_1 = -u_1u_1^*;$$

(Б) выполнено неравенство $\rho_0 = \tau / \mu_0 + \vartheta\rho \geqslant 0$ и при всех q_1', достаточно близких к q_1, существует многочлен $\zeta(\lambda)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий тождеству

$$\Delta(\lambda)\alpha(-\lambda) + \Delta(-\lambda)\alpha(\lambda) \equiv \zeta(\lambda)\zeta(-\lambda),$$

---

* В этом случае $\chi_2(\lambda) = \Gamma^2/\lambda + (\alpha\lambda + \beta)/(\lambda^2 + \omega^2)$. По теореме 2 для абсолютной устойчивости достаточно, чтобы $\pi(\omega) = 1/\mu_0 + \Gamma^2 + \alpha + \operatorname{Re}[(1 + i\omega\beta/\alpha)\chi_1(i\omega)] > > 0$, $\Gamma^2 > 0$, $\alpha > 0$ и если $\pi_\infty = \lim\limits_{\omega\to\infty} \pi(\omega) = 0$, то $\lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2\pi(\omega) > 0$. Теорема 2 [2] требует, чтобы $\Gamma^2 > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\pi(\omega) > 0$, $\pi_\infty > 0$. Отметим, что при $\det P = 0$, $\pi_\infty > 0$ общая теорема [3] (из которой следует теорема 2 [2]) дает результат более сильный, чем теорема 2, так как допускает возможность $\tau = 0$.

** Этот вывод относится также и к критерию Попова, так как из [1] следует (см. сноску в [10] и [11, 12]), что при выполнении критерия Попова существует функция Ляпунова вида (5). Впрочем, как показано в [7], для критерия Попова это заключение можно вывести из вида самого критерия.

*** Здесь и ниже через I_1 и I_2 обозначаются единичные матрицы порядков ν_1 и ν_2 соответственно.

где $\alpha(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ — многочлены, определяемые из соотношения

$$\frac{\alpha(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \lambda + \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{2} r^*{}_1 (\vartheta P_1 + \tau I_1)(P_1 - \lambda I_1)^{-1} q_1'.$$

При выполнении сформулированных в теореме 2 предположений каждое из условий (А) и (Б) равносильно соотношениям (18), (19).

Уравнение (25) в скалярной записи совпадает с разрешающими уравнениями Лурье [4, 13, 14]. Поэтому в некритическом случае ($\nu_2 = 0$) теорема 3 утверждает равносильность известного критерия Попова условиям, которые получаются по методу Лурье [12].

Заметим, что в отличие от работы [12] в уравнении (25) отсутствуют дополнительные параметры [13, 14], что связано с доказательством гипотезы [14]. В [13, 14] показано, что дополнительные параметры можно заменить нулями лишь при $\nu_1 = 2$. Наличие дополнительных параметров уже при $\nu_1 = 3$ делает невозможным получение эффективных условий абсолютной устойчивости, исчерпывающих класс функции Ляпунова (5) ($\nu_2 > 0$) или в определенном смысле достаточно общих ($\nu_2 = 0$). Отметим, что при $\det(\nu P_1 + \tau I_1) \neq 0$ уравнение (25) равносильно уравнению

$$L_*(u_1 u^*{}_1) q_1 + \sqrt{\rho_0} u_1 + \frac{1}{2}(\vartheta P^*{}_1 + \tau I_1) r_1' = 0, \tag{26}$$

которое должно иметь вещественное решение u_1 для всех векторов r_1', достаточно близких к r_1. Здесь $L_*(u_1 u_1^*) = U_1$ определяется из соотношения $U_1 P_1 + P_1^* U_1 = -u_1 u_1^*$.

Доказательство теоремы 3 достаточно сложно и здесь не приводится *. Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

§ 1. Теорема об устойчивости в целом для обобщенных динамических систем

В ν-мерном эвклидовом пространстве $\mathbf{R}$ задана обобщенная динамическая система, если каждой точке $a \in \mathbf{R}$ сопоставлено некоторое семейство непрерывных функций $x(t, a)$, определенных при $0 \leqslant t < \infty$, называемых движениями динамической системы, притом так, что выполнены условия:

1°) $x(0, a) = a$ для любого движения $x(t, a)$;

2°) для любого $t_0 \geqslant 0$ и движения $x(t, a)$ существует движение $x'[t, x(t_0, a)]$ такое, что $x(t + t_0, a) = x'[t, x(t_0, a)]$ при $t \geqslant 0$;

3°) пусть $a_n \to a$, $x(t, a_n)$ — какие-либо движения и $\tau > 0$ — произвольное число; существуют подпоследовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ и движение $x(t, a)$ такие, что $x(t, a_{n_j}) \to x(t, a)$ при $n_j \to \infty$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

А. Ф. Филиппов показал [15], что решения в смысле [15] системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями образуют дисперсную динамическую систему [16]. Поскольку дисперсная динамическая система удовлетворяет аксиомам пп. 1—3° (см. [16], теорема 2), то решения системы с разрывными правыми частями, в частности, системы (1), образуют обобщенную динамическую систему.

Следующая теорема ляпуновского типа несколько уточняет и переносит на обобщенную динамическую систему утверждения теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [17].

Теорема 4. Пусть в пространстве $\mathbf{R}$ действует обобщенная динамическая система такая, что для некоторого c имеется движение $x(t, c) \equiv c$. Предположим, что существует непрерывная функция $V(x)$ такая, что $V(c) = 0$ и $V(x)$ удовлетворяет условиям:

(I) для любого движения $x(t, a)$ функция $V[x(t, a)]$ является невозрастающей функцией t;

(II) существует $t_* > 0$ такое, что из $V[x(t, a)] \equiv \text{const}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$ следует $x(t, a) \equiv c$ при $v \leqslant t \leqslant t_*$.

Тогда для любого движения $x(t, a)$ имеет место:

а) $|x(t, a)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$,

или

б) $x(t, a) \to c$ при $t \to +\infty$.

* Одно из утверждений теоремы 3 доказано ниже (см. замечание в конце § 3 Приложения). Для случая одного нулевого корня, утверждение, близкое к теореме 3, доказано Р. Калманом (см. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 49, No. 2, 1963).

Если, кроме (I), (II), выполнено условие:

$$V(x) \longrightarrow +\infty \qquad \text{при } |x| \longrightarrow \infty, \tag{III}$$

или любое другое условие, обеспечивающее невозможность случая «а», то $V(x) > 0$ при $x \neq c$ и движение $x \equiv c$ асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Предположим, что обобщенная динамическая система обладает следующим свойством обычной динамической системы: через ω-предельную точку x_* движения $x(t, a)$ проходит некоторое движение $x(t, x_*)$, любая точка которого является ω-предельной для $x(t, a)$. Тогда, как следует из доказательства, утверждение теоремы 4 справедливо и для $t_* = \infty$.

Доказательство. Возьмем произвольное движение $x(t, a)$. Пусть не имеет места случай «а» и x_* — произвольная ω-предельная точка $x(t, a)$, т. е. $x(t_n, a) \longrightarrow x_*$ при $t_n \longrightarrow \infty$. Используя непрерывность функции $V(x)$ и свойство (1), получим, что существует

$$\lim_{t\to\infty} V[x(t, a)] = V(x_*). \tag{1.1}$$

По свойству 2°

$$x(t + t_n, a) + x^{(n)}(t, a_n), \qquad a_n = x(t_n, a),$$

где $x^{(n)}(t, a_n)$ — некоторые движения.

По свойству 3° существуют последовательность $n_1, n_2, \ldots$ и движение $x(t, x_*)$ такие, что $x(t + t_{n_j}, a) \longrightarrow x(t, x_*)$ при $n_j \longrightarrow \infty$ для любого t, $0 \leqslant t \leqslant t_*$. Из (1.1) следует $V[x(t, x_*)] \equiv V(x_*)$, $0 \leqslant t \leqslant t_*$, т. е. $x_* = c$ по условию (II). Поскольку x_* — любая ω-предельная точка, то выполнен случай «б».

Из условий (I), (III) следует невозможность случая «а»: пусть, вообще, случай «а» не имеет места. Из (I), (II) следует, что $V(x) > 0$ при $x \neq c$. Устойчивость в малом доказывается стандартным образом. По любому $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что при $|x| < \delta$ будет $V(x) \leqslant \operatorname*{Inf}_{|y|=\varepsilon} V(y)$. Из (I) следует, что $|x(t, a)| < \varepsilon$ при $|a| < \delta$. Теорема 4 доказана.

Ниже нам потребуется следующее простое предложение.

Лемма 1. Пусть P — произвольная $\nu \times \nu$ матрица, $t_* > 0$ — некоторое фиксированное число и $\chi(\lambda) = r^*(P - \lambda I)^{-1}q$ — невырожденная функция, т. е. как и выше, $\chi(\lambda)$ нельзя представить в виде отношения многочленов со степенью знаменателя меньшей, чем ν. Если известно, что решение $x(t)$ системы $\dot{x} = Px$ удовлетворяет при $0 \leqslant t < t_*$ уравнению $r^*x = 0$, то $x(t) \equiv 0$.

Доказательство. Дифференцируя тождество $r^*e^{Pt}x(0) \equiv 0$ $(0 \leqslant t < t_*)$ и полагая $t = 0$, получим

$$r^*x(0) = 0, \qquad r^*Px(0) = 0, \ldots, \qquad r^*P^{\nu-1}x(0) = 0.$$

По лемме 2 [2] из невырожденности функции $\chi(\lambda)$ следует линейная независимость векторов r, $P^*r, \ldots, P^{*\nu-1}r$. Поэтому $x(0) = 0$, $x(t) = e^{Pt}x(0) \equiv 0$.

§ 2. Теорема о существовании решения специального матричного неравенства

Сведем задачу об определении условий существования функции Ляпунова вида (5) к задаче о существовании решения некоторого матричного неравенства. Рассмотрим вначале случай, когда $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция. Переходя от (1) к (9), получим, что функция (5) и ее производная в силу (9) имеют вид

$$V = \tilde{x}^* \tilde{H} \tilde{x} + \vartheta \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma, \tag{2.1}$$

$$-\dot{V} = \tilde{x}^* G \tilde{x} + 2\tilde{x}^* g \varphi + \gamma \varphi^2, \tag{2.2}$$

где $\tilde{H} = S^*HS$ и $-G = \tilde{H}\tilde{P} + \tilde{P}^*\tilde{H}$,

$$-g = \tilde{H}\tilde{q} + \frac{\vartheta}{2}\tilde{P}^*\tilde{r}, \qquad \gamma = \vartheta\rho. \tag{2.3}$$

При $\sigma \neq 0$ выражение (2.2) можно записать в виде

$$-\dot{V} = \tilde{x}^*[G + \mu(g\tilde{r}^* + \tilde{r}g^*) + \mu^2\gamma\tilde{r}\tilde{r}^*]\tilde{x}, \tag{2.4}$$

где $\mu = \varphi(\sigma)/\sigma$. Поскольку $\varphi(\sigma)$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенствам (2), можно считать, что μ — независимый параметр, пробегающий интервал $0 < \mu \leqslant \mu_0$.

Из условия $V > 0$ при $\tilde{x} \neq 0$ для любой функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей неравенствам (2), следует, что $\tilde{H} \geqslant 0$. Таким образом, задача отыскания условий существования функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям п. 4° теоремы 2, эквивалентна задаче отыскания условий существования матрицы $\tilde{H} \geqslant 0$ такой, что для любого μ из интервала

$$0 < \mu \leqslant \mu_0 \quad \text{при } \mu_0 \neq \infty, \qquad \mu > 0 \quad \text{при } \mu_0 = \infty \tag{2.5}$$

выполнено матричное неравенство

$$F(\mu) \equiv G + \mu(g\tilde{r}^* + \tilde{r}g^*) + \mu^2\gamma\tilde{r}\tilde{r}^* \geqslant 0, \tag{2.6}$$

где G, g, γ определяются из (2.3) *. Представим матрицы $\tilde{H}$, G и вектор g в виде:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H_1 & H_{12} \\ H_{12}^* & H_2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{12}^* & G_2 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

где H_j, G_j — $\nu_j \times \nu_j$ матрицы, g_j — векторы порядка ν_j ($j = 1, 2$); H_{12}, G_{12} — $\nu_1 \times \nu_2$ матрицы.

Теорема 5. 1°. Предположим, что $\nu_2 > 0$, $r_2 \neq 0$. Для того чтобы матричное неравенство (2.6) имело решение $\tilde{H} \geqslant 0$, необходимо, чтобы существовал параметр τ, удовлетворяющий неравенствам

$$\tau \geqslant 0, \qquad \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma \geqslant 0 \tag{2.8}$$

и такой, чтобы были выполнены тождество (17) и неравенство $\pi(\omega) \geqslant 0$ для любого $\omega \geqslant 0$, где $\pi(\omega)$ определяется из (18). При этом в (2.7)

$$\begin{gathered} H_{12} = 0, \qquad G_{12} = 0, \qquad -G_2 = P_2^*H_2 + H_2P_2 = 0, \qquad -G_1 = P_1^*H_1 + H_1P_1, \\ -g_j = H_jq_j + \frac{\vartheta}{2}P_j^*r_l \quad (j=1,\ 2), \qquad q_2 = \frac{\tau}{2}r_2 \end{gathered} \tag{2.9}$$

и матрица H_1 удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{\tau}{\mu_0} + \gamma\right)G_1 - \left(g_1 - \frac{\tau}{2}r_1\right)\left(g_1 - \frac{\tau}{2}r_1\right)^* \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma > 0, \tag{2.10}$$

$$G_1 \geqslant 0, \qquad g_1 - \frac{\tau}{2}r_1 = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma = 0. \tag{2.11}$$

2°. Пусть $\chi_2(\lambda)$ — невырожденная функция, и для некоторого $\tau \geqslant 0$ выполнены соотношения (17)—(19). Тогда существует матрица $\tilde{H} = \tilde{H}^*$, удовлетворяющая неравенству (2.6) для любого μ из интервала (2.5). При этом матрица H_1 удовлетворяет соотношениям

$$F_1 \equiv G_1 - \left(\frac{\tau}{\mu_0} + \gamma\right)^{-1}\left(g_1 - \frac{\tau}{2}r_1\right)\left(g_1 - \frac{\tau}{2}r_1\right)^* > 0 \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma > 0. \tag{2.12}$$

$$G_1 > 0, \qquad g_1 - \frac{\tau}{2}r_1 = 0 \quad \text{при} \ \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma = 0 \tag{2.13}$$

и квадратичная форма $\tilde{x}^*F(\mu)\tilde{x}$ может быть представлена при $0 < \mu < \mu_0$ в виде:

$$\begin{gathered} \tilde{x}^*F(\mu)\tilde{x} = x^*{}_1G_1x_1 + \left(\frac{\tau}{\mu} + \gamma\right)^{-1}\left|x^*{}_1\left(g_1 - \frac{\tau}{2}r_1\right)\right|^2 + \\ + \left(\frac{\tau}{\mu} + \gamma\right)|x^*{}_1f_1(\mu) + \mu x^*{}_2r_2|^2 \quad \text{при} \quad \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma > 0, \end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$f_1(\mu) = \left(\frac{\tau}{\mu} + \gamma\right)^{-1}\left[g_1 + \left(\frac{\tau}{2} + \mu\gamma\right)r_1\right], \tag{2.15}$$

$$\tilde{x}^*F(\mu)\tilde{x} = x_1^*G_1x_1 + \mu^2\left(\frac{\tau}{\mu} + \gamma\right)|x^*{}_1r_1 + x^*{}_2r_2|^2 \quad \text{при} \ \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma = 0. \tag{2.16}$$

3°. Пусть выполнены предположения п. 2°. Равенство $\det\tilde{H} = 0$ равносильно равенствам $\tau = 0$, $\det P_2 = 0$. Неравенство $\tilde{H} > 0$ (или $\tilde{H} \geqslant 0$) равносильно соответствующему неравенству

$$\tau K' + \vartheta K'' > 0 \ (\geqslant 0), \tag{2.17}$$

где $\nu_2 \times \nu_2$ — матрицы K', K'' определяются по $\chi_2(\lambda)$ формулами (22), (16).

---

* Теорема 5 п. 1° показывает, что это матричное неравенство при $\nu_2 > 0$ сводится к более простым неравенствам, не содержащим параметр μ, решение которых дано в [1].

Доказательство. 1°. Из (2.6) следует, что $G \geqslant 0$. Применяя леммы 2—4 [3] последовательно, найдем, что $G_2 = 0$, $G_{12} = 0$, $H_{12} = 0$. (Аналогичное рассуждение см. в [3]). Из соотношений (2.3), (2.7), (10), (11) имеем

$$-G_1 = P_1{}^*H_1 + H_1P_1, \qquad 0 = P_2{}^*H_2 + H_2P_2, \quad -g_j = \mathrm{H}_jq_j + \frac{\vartheta}{2}P^*{}_jr_j \qquad (j = 1,\ 2). \tag{2.18}$$

Взяв вектор $\tilde{x}$ с компонентой $x_1 = 0$, получим из (2.6), что при произвольном векторе x_2 и любом значении μ из интервала (2.5) должно выполняться неравенство

$$\tilde{x}^*F(\mu)\tilde{x} = 2\mu x_2{}^*g_2r_2{}^*x_2 + \mu^2\gamma \mid r_2{}^*x_2 \mid^2 \geqslant 0. \tag{2.19}$$

Это неравенство возможно лишь в том случае, если существует параметр τ такой, что

$$g_2 = \frac{\tau}{2}r_2, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Пусть либо $\gamma \neq 0$, либо $\tau \neq 0$. Тогда из выражения (2.20) имеем $\tau / \mu + \gamma > 0$ при $0 < \mu < \mu_0$. После простых преобразований получим (2.14), (2.15), где возможно $\tau / \mu_0 + \gamma = 0$.

При $\tau / \mu_0 + \gamma = 0$ из (2.14) и условия $\tilde{x}^*F(\mu)\tilde{x} \geqslant 0$ найдем, что $g_1 - (\tau / 2)r_1 = 0$. В этом случае (2.14) преобразуется в (2.16).

При любом μ из интервала (2.5) можно подобрать вектор $x_2 = x_2(\mu)$ так, чтобы $x_1{}^*f_1 + \mu x_2{}^*r_2 = 0$. Поэтому из (2.14) и условия $\tilde{x}^*F(\mu)\tilde{x} \geqslant 0$ следует (2.12), (2.13).

Таким образом, матрица $H_1 = H_1{}^*$ удовлетворяет соотношениям (2.12), (2.13), где G_1, g_1 определяются по H_1 формулами (2.18). Матрица $H_2 = H_2{}^*$ удовлетворяет следующим соотношениям, получаемым из (2.18), (2.20):

$$P_2{}^*H_2 + H_2P_2 = 0, \qquad H_2q_2 + {}^1/_2(\vartheta P_2{}^* + \tau I_2)r_2 = 0. \tag{2.21}$$

Из (2.21) выводим для $\omega \neq \omega_j$

$$q_2{}^*(P_2 - i\omega I)^{*-1}[(P_2 - i\omega I_2)^*H_2 + H_2(P_2 - i\omega I_2)](P_2 - i\omega I_2)^{-1}q_2 \equiv 0$$

$$\mathrm{Re}\, q_2{}^*(\vartheta P_2 + \tau I_2)(P_2 - i\omega I_2)^{-1}q_2 \equiv 0. \tag{2.22}$$

Используя тождество $(\vartheta P_2 + \tau I_2)(P_2 - i\omega I_2)^{-1} \neq \vartheta I_2 + (\tau + i\omega\vartheta)(P_2 - i\omega I_2)^{-1}$, получим, что (2.22) совпадает с (17).

Повторяя выкладки пункта 4° [1], получим, что из (2.10), (2.11) следует

$$\pi(\omega) \equiv \tau/\mu_0 + \gamma + \mathrm{Re}\ [r_1{}^*(\vartheta P_1 + \tau I_1)(P_1 - i\omega \mathrm{I}_1)^{-1}q_1] \geqslant 0. \tag{2.23}$$

Здесь $\pi(\omega)$ совпадает с выражением из (18). Пункт 1° теоремы 5 доказан.

2°. Из (18) и формулы (2.23) для $\pi(\omega)$ следует $\lim\limits_{\omega\to\infty}\pi(\omega) = \tau / \mu_0 + \gamma \geqslant 0$. Будем искать матрицу $\tilde{H}$, для которой $H_{12} = 0$, а матрицы H_1, H_2 удовлетворяют соотношениям (2.12), (2.13), (2.21). Повторяя выкладки предыдущего пункта, найдем, что выполнены (2.14)—(2.16). Из (2.12), (2.13) следует, что выполнено (2.6) для любого μ из (2.5). Применяя теоремы 1, 2 [1], получим из (17)—(19) существование матрицы $H_1 = H_1{}^*$. (Следует использовать выражение (2.23) для $\pi(\omega)$.) Обозначим $s_2 = {}^1/_2(\vartheta P_2{}^* + \tau I_2)r_2$. Из (2.21) следует, что искомая матрица H_2 должна удовлетворять соотношениям:

$$\begin{gathered} H_2q_2 = -s_2, \\ H_2P_2q_2 = -P_2{}^*H_2q_2 = P_2{}^*s_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_2P_2{}^{\nu_2-1}\,q_2 = (-1)^{\nu_2}\,(P_2{}^*)^{\nu_2-1}\,s_2. \end{gathered}$$

Так как функция $\chi_2(\lambda)$ невырождена, то по лемме 2 [2] векторы $q_2, \ldots, P_2{}^{\nu_2-1}q_2$ линейно независимы. Поэтому соотношениями (2.24) матрица H_2 определяется однозначно. При этом из (2.24) следует * $(P_2{}^*H_2 + H_2P_2)P_2{}^{j-1}q_2 = 0$, $j = 1, \ldots, \nu_2$, т. е. найденная матрица H_2 удовлетворяет соотношениям (2.21). Условие $H_2{}^* = H_2$ равносильно равенствам

$$(H_2P_2{}^{\alpha-1}\,q_2,\ P_2{}^{\beta-1}q_2) = (P_2{}^{\alpha-1}\,q_2,\ H_2P_2{}^{\beta-1}q_2) \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ \nu_2),$$

которые после подстановки значений (2.24) переходят в равенства

$$(P_2{}^{2j-1}q_2, s_2) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2j - 1 \leqslant 2\nu_2 - 2). \tag{2.25}$$

При достаточно больших ω из тождества (2.22), совпадающего с (17), следует

$$0 \equiv \mathrm{Re}\, s^*{}_2\,(P_2 - i\omega I_2)^{-1}\,q_2 = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(P_2{}^{2j-1}q_2,\ s_2)}{\omega^{2j}}. \tag{2.26}$$

Таким образом, выполнено (2.25), т. е. $H_2 = H_2{}^*$.

Попутно было показано, что из (17) следует (2.26), а значит и (21). В случае невырожденности функции $\chi_2(\lambda)$ обратно из (21), т. е. в другой записи из (2.26),

* Считаем здесь и ниже, что $P_2{}^0 = I_2$ при $\det P_2 = 0$.

выводим, что матрица H_2, определенная формулами (2.24), симметрична и удовлетворяет соотношениям (2.21). Отсюда следует (2.22), т. е. (17). Этим доказано первое утверждение п. 2° теоремы 2.

3°. Из $\dot{G}_1 > 0$ следует $H_1 > 0$. Поэтому соотношения $\det \tilde{H} = 0$, $\tilde{H} \geqslant 0$, $\tilde{H} > 0$ равносильны аналогичным соотношениям для H_2. Из невырожденности функции $\chi_2(\lambda)$ по лемме 2 [2] следует линейная независимость векторов $(P_2^*)^{j-1} r_2$, $j = 1, \ldots, \nu_2$. Равенство $\det H_2 = 0$, согласно (2.24), равносильно линейной зависимости векторов

$$(-1)^j (P_2^*)^{j-1} s_2 = (-1)^j (\vartheta P_2^* + \tau I_2) (P_2^*)^{j-1} r_2, \; j = 1, \ldots, \nu_2,$$

т. е. равенству $\det (\vartheta P_2^* + \tau I_2) = 0$. Так как спектр матрицы P_2 расположен на мнимой оси, последнее равенство равносильно следующим двум: $\tau = 0$, $\det P_2 = 0$.

Пусть Q — неособая $\nu_2 \times \nu_2$ матрица со столбцами $q_2, \ldots, P_2^{\nu_2-1} q_2$. Из (2.24) выводим $Q^* H_2 Q = \tau K' + \vartheta K''$, поэтому неравенство $H_2 > 0$ или $H_2 \geqslant 0$ равносильно соответствующему неравенству (2.17). Теорема 5 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Выражение (2.2) было получено выше в предположении, что $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция. В случае, когда $\varphi(\sigma)$ — разрывная функция, решением уравнения (1) будет по А. Ф. Филиппову [15] абсолютно непрерывная функция $x(t)$ такая, что почти всюду

$$dx/dt = Px + q\psi(t), \qquad \sigma(t) = r^* x(t), \tag{3.1}$$

где $\psi(t) = \varphi[\sigma(t)]$, если функция $\varphi(\sigma)$ непрерывна при $\sigma = \sigma(t)$ и $\varliminf_{\sigma \to \sigma(t)} \varphi(\sigma) \leqslant \psi(t) \leqslant \varlimsup_{\sigma \to \sigma(t)} \varphi(\sigma)$, если $\sigma(t)$ — точка разрыва функции $\varphi(\sigma)$. Используя (2), (3), получим, что почти всюду будет выполнено неравенство

$$0 < \sigma(t)\psi(t) \leqslant \mu_0 \sigma(t)^2 \qquad \text{при } \sigma(t) \neq 0. \tag{3.2}$$

В частности, решением системы (1) является $x \equiv 0$, что было использовано выше (в этом случае $\psi(t) = 0$). Дальнейшее изложение справедливо при любом определении решения, удовлетворяющем сформулированным условиям, и таком, что решения системы (1) образуют обобщенную динамическую систему в смысле определения § 1.

Применим теорему 2, взяв для системы (9) функцию (2.1), где $\tilde{H}$ и ϑ подлежат определению. Функция $\int \varphi(\sigma)\, d\sigma$ удовлетворяет условиям Липшица на любом конечном интервале; поэтому [18] функция $V = V[\tilde{x}(t)]$ является абсолютно непрерывной. Рассмотрим всюду плотное множество **E** точек t, для которых существуют $\dot{V}$ и $\dot{x}$. Если $t \in \mathbf{E}$ и $\sigma(t)$ — точка непрерывности функции $\varphi(\sigma)$, то, очевидно:

$$\dot{V} = 2\tilde{x}^* \tilde{H} \dot{\tilde{x}} + \vartheta \varphi(\sigma) \dot{\sigma}.$$

Если $\sigma(t)$ — точка разрыва функции $\varphi(\sigma)$, существует $\dot{x}$ и $\dot{\sigma}(t) \neq 0$, то, очевидно, $(d/dt) \int_0^{\sigma(t)} \varphi(\sigma)\, d\sigma$ не существует, т. е. $t \notin \mathbf{E}$. Поэтому для значений $t \in \mathbf{E}$ таких, что $\sigma(t)$ — точка разрыва функции $\varphi(\sigma)$ («скользящий режим»), непременно $\dot{\sigma}(t) = 0$. Доопределяя $\varphi[\sigma(t)]$ для этих значений t равенством $\varphi[\sigma(t)] = \psi(t)$, получим, что соотношения (3.3) и (2.2), а, значит, и (2.4), выполнены почти всюду*. Доопределенная функция в силу (3.2) будет удовлетворять основному условию (2).

Переходим к доказательству п. 1° теоремы 2. Пусть для некоторых $\tau \geqslant 0$, ϑ выполнены соотношения (17)—(20). По п. 2° теоремы 5 существует матрица $\tilde{H}$ такая, что выполнены утверждения п. 2° теоремы 5. Используя (2.2), (2.14)—(2.16), запишем $\dot{V}$ для $t \in \mathbf{E}$ в виде

$$-\dot{V} = x_1^* G_1 x_1 \qquad \text{при } \varphi(\sigma) = 0.$$

$$-\dot{V} = x_1^* F_1 x_1 - \left| x_1^* \left(g_1 - \frac{\tau}{2} r_1 \right) \right|^2 \left[\left(\frac{\tau}{\mu_0} + \gamma \right)^{-1} - \left(\frac{\tau\sigma}{\varphi(\sigma)} + \gamma \right)^{-1} \right] +$$
$$+ \left(\frac{\tau\sigma}{\varphi} + \gamma \right)^{-1} \left[x_1^* \left(g_1 + \frac{\tau}{2} \right) r_1 + \tau x_2^* r_2 + \gamma\varphi \right]^2 \qquad \text{при } \varphi(\sigma) \neq 0, \; \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma > 0, \tag{3.4}$$

$$-\dot{V} = x_1^* G_1 x_1 + \left(\frac{\tau\sigma}{\varphi} + \gamma \right) \varphi^2 \qquad \text{при } \varphi(\sigma) \neq 0, \; \frac{\tau}{\mu_0} + \gamma = 0.$$

---

* Соотношение (3.3) (но не (2.2)) справедливо, естественно, при любом доопределении $\varphi(\sigma)$. Для скользящего режима $\psi(t)$ определяется почти всюду (за исключением тривиального случая) из (1) условием $\dot{\sigma} = 0$. Например, при $\rho \neq 0$ из (1) следует $\psi(t) = \rho^{-1} r^* P x$; поэтому уравнение скользящего режима будет $\dot{x} = (I + \rho^{-1} q r^*) P x$. Отметим, что приведенные рассуждения, позволяющие переносить метод функций Ляпунова на случай разрывных нелинейностей, по существу принадлежат А. Х. Гелигу [19].

Здесь $\tau\sigma/\varphi+\gamma\geqslant\tau/\mu_0+\gamma\geqslant 0$ и F_1 определяется из (2.12). По п. 2° теоремы 5 $F_1>0$, $G_1>0$, т. е. $\dot V\leqslant 0$ почти всюду. Так как функция V абсолютно непрерывна, то [18] $V=V\,|_{t=0}+\int\limits_0^t \dot V dt$, т. е. выполнено условие (I) теоремы 4. Берем произвольное $t_*>0$. Пусть $\dot V=0$ почти всюду на $[0, t_*]$. Из (3.4) выводим, что $x_1\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant t_*$ и, следовательно, что $\sigma=x_2{}^*r_2$. При $q_1\neq 0$ из (12) следует, что $\varphi(\sigma)=0$ почти всюду на $[0, t_*]$. Пусть $q_1=0$ и $\varphi(\sigma)\neq 0$ на множестве значений t положительной меры. Из (3.4) найдем, что это возможно лишь при $\tau/\mu_0+\gamma=0$. Тогда из выражения (2.23) следует, что $\pi(\omega)\equiv 0$, что противоречит (18). Поэтому $\varphi(\sigma)=0$, а, значит, и $\sigma=0$ почти всюду [см. (3.2)] на $[0, t_*]$. Из (12) следует, что выполнено $\dot x_2=P_2x_2$, $r_2{}^*x_2=0$ при $0\leqslant t\leqslant t_*$. По лемме 1 § 1 $x_2\equiv 0$, т. е. выполнено условие (II) теоремы 4.

Полагая в (1) $\psi(\sigma)=\mu\sigma$, получим линейную систему, матрица коэффициентов которой $Q(\mu)=P+\mu qr^*$ не может иметь собственных значений на мнимой оси в области (2.5). Из условий предельной устойчивости следует, что $Q(\mu)$ — гурвицева матрица для указанных значений μ, а, значит (например, по теореме 4), что

$$V\,|_{\varphi=\mu\sigma}=\tilde x^*\left(\tilde H+\frac{\vartheta\mu}{2}\tilde r\tilde r^*\right)\tilde x>0 \quad \text{при}\ \tilde x\neq 0. \tag{3.5}$$

Взяв $\tilde x=\tilde r$, найдем что $\vartheta\geqslant 0$ при $\mu_0=+\infty$. Из (3.5) следует, что $\tilde H\geqslant 0$, а также что

$$\tilde H+\frac{\vartheta\mu_0}{2}\tilde r\tilde r^*>0 \quad \text{при} \quad \vartheta>0. \tag{3.6}$$

Так как согласно (20) $\tau>0$ при $\det P=0$, то по п. 3° теоремы 5 $\det\tilde H\neq 0$, т. е. $H>0$. при $\vartheta\geqslant 0$ из (2.1) и при $\vartheta<0$ из формулы

$$V=\tilde x^*\left(\tilde H+\frac{\vartheta\mu_0}{2}\tilde r\tilde r^*\right)\tilde x-\vartheta\int\limits_0^\sigma(\mu_0\sigma-\varphi)\,d\sigma$$

и (3.6) следует, что $V\to\infty$ при $|\,x\,|\to\infty$. Поэтому выполнено условие (III) теоремы 4; тем самым доказаны пп. 1°, 3° теоремы 2.

Первое утверждение п. 2° было доказано в § 2. Если вместо условий предельной устойчивости выполнено (23), то по п. 3° теоремы имеем $H>0$. Следовательно, $V\,|_{\varphi=\mu\sigma}>0$ при $\tilde x\neq 0$ и достаточно малых $\mu>0$, т. е. имеет место предельная устойчивость и справедливо утверждение п. 2° теоремы 2.

Пункт 4° теоремы 2 следует из п. 1° теоремы 5.

Переходим к доказательству п. 5°. Пусть

$$\chi_2(\lambda)=\sum_h\chi_2{}^{(h)}(\lambda),$$

где $\chi_2{}^{(h)}(\lambda)$ — простейшие дроби, каждая из которых имеет вид, указанный в теореме 1, и отвечает полюсу (однократному или двукратному) функции $\chi_2(\lambda)$. Рассматривая поведение функции $\operatorname{Re}[\tau+i\omega\vartheta)\chi(i\omega)]$ в окрестности каждого полюса функции $\chi_2(\lambda)$, легко убедиться (с использованием в случае двукратных полюсов условий предельной устойчивости, даваемых теоремой 1), что неравенство (24) возможно лишь в случае, когда $\operatorname{Re}[(\tau+i\omega\vartheta)\chi_2{}^{(h)}(i\omega)]\equiv\text{const}$. Поэтому из (24) следует (17), (18), на чем заканчивается доказательство теоремы 2.

Замечание. Из доказательства следует, что условия (18), (19) теоремы 2 обеспечивают существование решения $H_1=H_1{}^*$ матричных неравенств (2.12), (2.13). Повторяя выкладки [13, 14], получим, что для существования решения этих неравенств достаточно потребовать разрешимости уравнения (25) или уравнения (26). Поэтому условия (18), (19) могут быть заменены условием (А), как утверждает теорема 3.

Поступила в редакцию
16 апреля 1963 г.

Цитированная литература

1. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств. Докл. АН СССР, т. 143, № 6, 1962.
2. Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. I. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 2, 1963.
3. Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. II. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 6, 1963.
4. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.

5. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. Усп. матем. наук, т. 4, № 4 (32), 1949.
6. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1956.
7. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. О критических случаях в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 6, 1963.
8. Popov V. M. Criterii sufficiente de stabilitate asimptotică în mare pentru sistemele automate nelineare. Acad. Rep. Pop. Romîne, Inst. de Energetica, Studii si cercetâri de energetica, vol. IX, № 3, 1959.
9. Popov V. M. Noi criterii de stabilitate pentru sistemele automate nelineare. Acad. Rep. Pop. Romîne., Inst de Energetica, Studii si cercetâri de energetica, vol. X, № 1, 1960.
10. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Докл. АН СССР, т. 149, № 2, 1963.
11. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Межвузовская конф. по аналит. механ. и прикл. теории устойчивости. Изд. Казанск. авиац. ин-та, 1964.
12. Розенвассер Е. Н. Об абсолютной устойчивости нелинейных систем. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 3, 1963.
13. Якубович В. А. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, т. 117, № 1, 1957.
14. Якубович В. А. О нелинейных дифференциальных уравнениях систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом. Вестн. ЛГУ, № 7, вып. 2, 1960.
15. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., т. 51 (93), вып. 1, 1960.
16. Будак Б. М. Понятие движения в обобщенной динамической системе. Уч. зап. МГУ, Математика, т. 5, вып. 155, 1952.
17. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом. Докл. АН СССР, т. 76, № 3, 1952.
18. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1957.
19. Гелиг А. Х. О применении второго метода Ляпунова к исследованию устойчивости движения нелинейных разрывных систем. Вестн. ЛГУ, № 7, вып. 2, 1962.

ABSOLUTE STABILITY OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS IN CRITICAL CASES. III

V. A. YAKUBOVICH

A general critical case of absolute stability of control systems with single discontinuous nonlinearity is investigated by means of the method of matrix inequalities. An absolute stability criterion is found which is sufficient and necessary, except certain boundary cases, for the existence of a Lyapounov function of the «quadratic form plus integral of the nonlinearity» kind. The possibilities of the method based on Lyapounov functions of the above kind are analyzed.