А. Х. Гелиг, Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным равновесным состоянием, *Автомат. и телемех.*, 1964, том 25, выпуск 2, 153–160

Том XXV *«АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА»* *№ 2*

1964

УДК 62-501.32

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С НЕЕДИНСТВЕННЫМ РАВНОВЕСНЫМ СОСТОЯНИЕМ

А. Х. ГЕЛИГ

(*Ленинград*)

Рассматриваются системы автоматического регулирования с одной кусочно-непрерывной нелинейностью и неединственным положением равновесия в предположении, что спектр линейной части лежит в левой полуплоскости. Для множеств состояний равновесия этих систем при помощи второго метода А. М. Ляпунова получены достаточные условия устойчивости в целом, аналогичные частотному критерию В. М. Попова.

Ряд систем автоматического регулирования [1, 2] обладает неединственным положением равновесия. К числу таких систем принадлежат, например, системы с нелинейным разрывным трением, люфтом, некоторые релейные системы и др. В настоящей статье делается попытка применить прямой метод А. М. Ляпунова к исследованию устойчивости некоторого класса этих систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему автоматического регулирования

$$\dot{x} = Ax + a\varphi(\sigma), \qquad \sigma = (b,\ x), \tag{1}$$

где A — n-мерная квадратная вещественная матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части, а a и b — постоянные столбцы.

Функция $\varphi(\sigma)$ кусочно-непрерывна (на любом конечном промежутке имеет лишь конечное число разрывов первого рода), имеет при $\sigma = 0$ разрыв непрерывности и удовлетворяет отношению

$$\varphi(\sigma) \cdot \sigma \geqslant 0. \tag{2}$$

Предъявим к функции φ еще одно требование (рис. 1). Пусть существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\mu \geqslant 0$, что

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma) \geqslant \varphi(+0) - \mu\sigma \text{ при } 0 < \sigma \leqslant \varepsilon, \\ \varphi(\sigma) \leqslant \varphi(-0) - \mu\sigma \quad \text{при } -\varepsilon \leqslant \sigma < 0. \end{gathered} \tag{3}$$

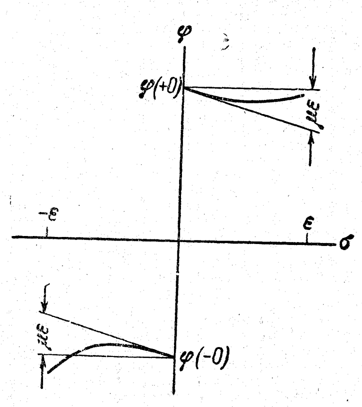

Рис. 1

Если $\varphi(\sigma)$ — характеристика силы трения, то условия (3) при $\mu = 0$ означают, что сила трения в покое не больше силы трения в движении (по крайней мере при малых скоростях).

Будем предполагать, что передаточная функция линейной части системы

$$\chi(p) = b^*(A - pI)^{-1}a \tag{4}$$

отлична от нуля * и не вырождена, т. е. полином, стоящий в знаменателе, имеет степень n и несократим с полиномом, находящимся в числителе.

Для отыскания возможных положений равновесия системы положим в (1) $x = 0$ и исключим x. Получим уравнение $\sigma + \chi(0)\varphi(\sigma) = 0$, из анализа которого в силу (2) видно, что $\sigma = 0$, $\varphi(0) = 0$ при $\chi(0) > 0$ и $\sigma = 0$, $\varphi(0) = \xi \in [\varphi(-0), \varphi(+0)]$ при $\chi(0) = 0$. Таким образом, при $\chi(0) > 0$ система (1) имеет единственное положение равновесия $x = 0$, а при $\chi(0) = 0$ — континуум положений равновесия («отрезок покоя»)

$$x = -A^{-1}a\xi, \quad \xi \in [\varphi(-0), \varphi(+0)]. \tag{5}$$

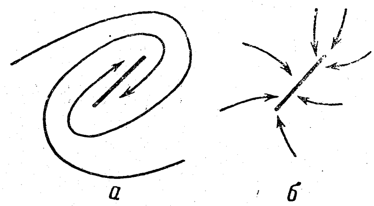

Рис. 2

Исходя из определения решения, данного в [3], в Приложении II будет показано, что любой вектор из (5) и только эти векторы являются особыми для системы (1).

В случае $\chi(0) < 0$ (Приложение II) даже линейная система, получающаяся из (1) при $\varphi(\sigma) = \varkappa\sigma$, не будет устойчивой всех $\varkappa \leqslant 0$.

Множество положений равновесия системы будем называть *стационарным.*

Определение 1. Стационарное множество называется *устойчивым в целом* (асимптотически абсолютно устойчивым), если оно устойчиво по Ляпунову и расстояние от любого решения до него стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Определение 2. Стационарное множество называется *точечно устойчивым в целом,* если оно устойчиво в целом и, кроме того, каждое решение при $t \to +\infty$ стремится к определенному положению равновесия.

На рис. 2, *а* отрезок устойчив в целом, но не точечно. Такой случай имеет место, например, при трении в муфте регулятора скорости [4]. На рис. 2, *б* отрезок точечно устойчив в целом. Если стационарное множество состоит из одной точки, то оба определения эквивалентны.

2. Основные результаты

Теорема 1. Если выполнены следующие условия: 1) функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет требованиям (2) и (3), 2) все собственные значения матрицы $A - \mu ab^*$ имеют отрицательные вещественные части, 3) функция $\chi(p)$ не вырождена и не имеет чисто мнимых корней, $\chi(0) = 0$, 4) существует такое $\alpha \geqslant 0$, что при $-\infty < \omega < +\infty$

$$\operatorname{Re}(1 + i\omega\alpha)\frac{\chi(i\omega)}{1 - \mu\chi(i\omega)} \geqslant 0 \tag{6}$$

и в случае $\alpha > 0$ $-1/\alpha$ не является собственным числом матриц A и $A - \mu ab^*$, то «отрезок покоя» (5) системы (1) точечно устойчив в целом.

Теорема 2. Если выполнены условия: 1) функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет требованию (2), 2) функция $\chi(p)$ не вырождена и не имеет чисто мнимых корней, $\chi(0) > 0$, 3) существует такое $\alpha \geqslant 0$, что при $-\infty < \omega < +\infty$

$$\operatorname{Re}(1 + i\omega\alpha)\chi(i\omega) \geqslant 0 \tag{7}$$

---

* Тривиальный случай $\chi \equiv 0$ разобран в Приложении I.

и в случае $\alpha > 0$ $-1/\alpha$ не является собственным числом матрицы A, то положение равновесия $x = 0$ системы (1) устойчиво в целом. Теоремы 1 и 2 доказаны в Приложении II.

Пример. Изучение одного вида нечувствительности системы регулирования [5] приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\tau_1\eta_1^{\cdot} = -\eta_1 + \psi(\eta_3), \qquad \tau_2\eta_2^{\cdot} = \eta_1 - \eta_2, \qquad \eta_3^{\cdot} = -\eta_2.$$

Здесь $\psi(\eta_3) = \eta_3 + \operatorname{sign}\eta_3^{\cdot}$ есть «обратный гистерезис» (рис. 3), а стационарным множеством является «отрезок покоя» $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $-1 \leqslant \eta_3 \leqslant +1$; τ_1 и τ_2 — положительные постоянные. Введя функцию $\varphi(\eta_2) = \operatorname{sign}\eta_2$, преобразуем эту систему к виду

$$\tau_1\eta_1^{\cdot} = -\eta_1 + \eta_3 - \varphi(\eta_2), \qquad \tau_2\eta_2^{\cdot} = \eta_1 - \eta_2, \qquad \eta_3^{\cdot} = -\eta_2.$$

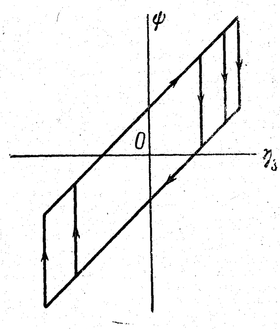

Рис. 3

Из теоремы 1 получаем следующее условие точечной устойчивости в целом «отрезка покоя»: $\tau_1\tau_2 < \tau_1 + \tau_2$. Интересно, что это неравенство совпадает с условием асимптотической устойчивости линейной системы, получающейся из исходной при $\psi(\eta_3) = \eta_3$.

3. Вспомогательная теорема

Рассмотрим систему

$$x^{\cdot} = f(x), \tag{8}$$

где $x(t)$ и $f(x)$ — n-мерные вещественные вектор-функции, причем $f(x)$ измерима и ограничена в любой ограниченной части пространства. Решение будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова [3]. Следуя [3], постоянный вектор c назовем особым вектором (положением равновесия) системы (8), если $x(t) \equiv c$ является решением системы. Предположим, что множество всех особых векторов (стационарное множество) Λ ограничено и замкнуто.

Теорема 3. Допустим, что существует непрерывная определенно положительная и бесконечно большая при $|x| \to +\infty$ функция $V(x)$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) существует такое $c_0 \in \Lambda$, что $V(x - c_0)$ не возрастает вдоль любой траектории, 2) имеется такая ε-окрестность множества Λ, что в ней для любого $c \in \Lambda$ $V(x - c)$ не возрастает вдоль любой траектории, 3) на поверхности $V(x - c_0) = \mathrm{const}$ нет других положительных полутраекторий, кроме положений равновесия.

Тогда стационарное множество Λ системы (8) точечно устойчиво в целом.

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении III.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Если $\chi(p) \equiv 0$, то система интегрируется в квадратурах:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}a\varphi[\sigma(\tau)]\,d\tau, \tag{I.1}$$

$$\sigma(t) = (b, e^{At}x(0)). \tag{I.2}$$

Из (I.2) следует, что $\sigma(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если $\varphi(\sigma)$ непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 0$ (ограничения (2) и (3) не требуются), то, оценивая интеграл в (I.1) и воспользовавшись правилом Лопиталя, найдем, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Устойчивость по Ляпунову равновесия $x = 0$ легко получается путем оценки правой части равенства (I.1). Таким образом, $x = 0$ устойчиво в целом.

Если же $\varphi(\sigma)$ разрывна в нуле, то, как показано в [6], даже при $\varphi(\sigma) = \operatorname{sign}\sigma$ равновесие $x = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Доказательство теоремы 1. Сначала преобразуем систему. Пусть $\rho_i = (b, A^{i-1}a) = 0$ при $i = 1, \ldots, q$ и $\rho_{q+1} = -(b, A^q a) \neq 0$. Из условия $\chi(p) \not\equiv 0$ следует, что $q < n$ и векторы $b, A^*b, \ldots, A^{*q}b$ линейно независимы. Введем новые координаты $\eta_i = (b, A^{i-1}x)$ $(i = 1, \ldots, q+1)$, $\eta_j = (c_j, x)$ $(j = q+2, \ldots, n)$, где векторы c_j выбраны так, что преобразование неособенное. Тогда система (1) примет вид *

$$\eta_i^{\cdot} = \eta_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

$$\eta_j^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\eta_k - \rho_j\varphi(\eta_1) \qquad (j = q + 1, \ldots, n).$$

Сделав замену $\xi_i^{\cdot} = \eta_i$ $(i = 1, \ldots, q + 1)$, $\xi_j = \eta_j - \dfrac{\rho_j}{\rho_{q+1}}\eta_{q+1}$ $(j = q + 2, \ldots, n)$, получим

$$\xi_i^{\cdot} = \xi_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, q), \tag{II.1}$$

$$\xi^{\cdot}_{q+1} = \zeta - \rho_{q+1}\varphi(\xi_1), \qquad \zeta \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_{q+1,\,k}\xi_k, \tag{II.2}$$

$$\xi_j^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\,\xi_k \qquad (j = q + 2, \ldots, n). \tag{II.3}$$

Легко проверить, что $\chi(p)$ и ρ_{q+1}, так же как характеристический определитель линейной части системы, инвариантны относительно линейного неособенного преобразования координат.

Изучим качественную картину системы (1) на гиперплоскостях разрыва функции $\varphi(\sigma)$. Пусть при $\sigma = \sigma^*$ $\varphi(\sigma)$ терпит разрыв и $\varphi(\sigma^* - 0) < \varphi(\sigma^* + 0)$. Если траектория при $t = t^*$ проходит через точку M с координатами $(\sigma^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*)$, не лежащую на многообразии

$$\xi_2 = \ldots = \xi_{q+1} = 0, \qquad \rho_{q+1}\varphi(\sigma^* - 0) \leqslant \zeta \leqslant \rho_{q+1}\varphi(\sigma^* + 0), \tag{II.4}$$

то при всех достаточно близких к t^* моментах времени t' и t'' $(t' < t^* < t'')$ $\sigma \in (\xi_1(t'), \xi_1(t''))$, т. е. часть гиперплоскости

$$\xi_1 = \sigma^*, \tag{II.5}$$

лежащую вне многообразия (II.4), траектории «прошивают насквозь». Действительно, пусть, например, $\xi_i^* = 0$ $(2 \leqslant i < j \leqslant q + 1)$, $\xi_j^* > 0$. Из (II.1) находим, что при t, достаточно близких к t^*, выполняется $\xi_{j-1}(t), \ldots, \xi_2(t) > 0$, $\xi_1(t) > \sigma^*$ (если $t > t^*$) и $\xi_{j-1}(t), \ldots, \xi_2(t) < 0$, $\xi_1(t) < \sigma^*$ (если $t < t^*$). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть теперь траектория проходит через точку $M(\sigma^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*)$, лежащую на многообразии (II.4). Исходя из определения решения [3], найдем, что в точке M $\xi^{\cdot}_{q+1} = \zeta^* - \rho_{q+1}\xi$, где ξ — любое число из промежутка $[\varphi(\sigma^* - 0), \varphi(\sigma^* + 0)]$. Однако, анализируя поле направлений в окрестности многообразия (II.4), (II.5), легко прийти к выводу, что через точку M траектория может проходить лишь при $\zeta^* = \rho_{q+1}\xi$, т. е. на многообразии (II.4), (II.5) имеем скользящий режим, описываемый системой

$$\xi_j^{\cdot} = \sum_{k=q+2}^{n} \alpha_{jk}\xi_k + \alpha_{j1}\sigma^* \qquad (j = q + 2, \ldots, n). \tag{II.6}$$

В случае $\varphi(\sigma^* - 0) > \varphi(\sigma^* + 0)$, как легко убедиться путем аналогичных рассуждений, имеет место следующая картина. Точки, лежащие на гиперплоскости (II.5) вне многообразия

$$\xi_2 = \ldots = \xi_{q+1} = 0, \qquad \rho_{q+1}\varphi(\sigma^* + 0) \leqslant \zeta \leqslant \rho_{q+1}\varphi(\sigma^* - 0), \tag{II.7}$$

траектории «прошивают насквозь», а в точках, лежащих на многообразии (II.5), (II.7), траектории ветвятся. Имеется три математически возможных значения для $\xi^{\cdot}_{q+1}$: 0, $\zeta^* - \rho_{q+1}\varphi(\sigma^* - 0)$ и $\zeta^* - \rho_{q+1}\varphi(\sigma^* + 0)$. Хотя, по-видимому, физически осуществимы лишь движения, соответствующие последним двум значениям $\xi^{\cdot}_{q+1}$, при которых траектории сходят с многообразия (II.5), (II.7), в дальнейшем будем рассматривать все математически возможные траектории. Ниже, чтобы не вводить дополнительной терминологии, режим, при котором траектории идут по многообразию (II.5), (II.7), будем называть также скользящим.

Исследуем свойства характеристического определителя

$$\Delta_{n-q-1}(p) = \begin{vmatrix} p - \alpha_{q+2,\,q+2}, \ldots, -\alpha_{q+2,\,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\alpha_{n,\,q+2}, \ldots, p - \alpha_{n,\,n} \end{vmatrix} \tag{II.8}$$

системы уравнений скользящего режима (II.6).

Пусть $\Delta_n(p) = \det(pI - A)$. Тогда, согласно (II.1)—(II.3) найдем, что

$$= \frac{\rho_{q+1}\Delta_{n-q-1}(p)}{\Delta_n(p)}. \tag{II.9}$$

* Подобная форма не является новой [6].

Пусть $u(\omega) = \operatorname{Re}\chi(i\omega)$, $v(\omega) = \omega \operatorname{Im}\chi(i\omega)$. Условия (6) и (7) равносильны неравенствам

$$u - \alpha\omega v \geqslant \mu(u^2 + v^2) \tag{II.10}$$

и

$$u - \alpha\omega v \geqslant 0 \tag{II.11}$$

соответственно. Поэтому очевидно, что из (6) следует (7). Легко убедиться, воспользовавшись критерием Найквиста, что при выполнении (7) линейная система, получающаяся из (II.1)—(II.3) при $\varphi(\xi_1) = \varkappa\xi_1$, асимптотически устойчива при всех $\varkappa \geqslant 0$. Характеристический многочлен этой системы $\Delta_n(p) + \varkappa\rho_{q+1}\Delta_{n-q-1}(p)$ должен поэтому иметь положительные коэффициенты при всех $\varkappa \geqslant 0$. Отсюда находим, что $\rho_{q+1} > 0$, $\Delta_{n-q-1}(0) \geqslant 0$, $\Delta_n(0) > 0$. Следовательно, условие $\chi(0) \geqslant 0$ необходимо для того, чтобы линеаризованная при $\varphi(\sigma) = \varkappa\sigma$ система (1) была асимптотически устойчива при всех $\varkappa \geqslant 0$.

Покажем, что все корни полинома (II.8), кроме одного нулевого, имеют отрицательные вещественные части. Пусть s корней многочлена (II.8) имеют положительную вещественную часть. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ $\Delta \operatorname{Arg} \Delta_n(i\omega) = \pi n$, $\Delta \operatorname{Arg}(1 + i\omega\alpha)\Delta_{n-q-1}(i\omega) = \pi(n - q - 2s)$ при $\alpha > 0$ и $\pi(n - q - 1 - 2s)$ при $\alpha = 0$. Поэтому $\Delta \operatorname{Arg}(1 + i\omega\alpha)\chi(i\omega) = -\pi(q + 2s)$ при $\alpha > 0$ и $-\pi(q + 2s + 1)$ при $\alpha = 0$. Так как это приращение аргумента, согласно (7), должно лежать в промежутке $[-\pi, \pi]$, то $s = 0$, а $q = 0$ либо 1. Итак, многочлен (II.8) не имеет корней в правой полуплоскости. Согласно условию 3 теоремы 1, нет чисто мнимых корней, но имеются нулевые корни. Покажем, что нулевой корень только один.

Пусть имеется m нулевых корней. Тогда

$$(1 + i\omega\alpha)\chi(i\omega) = (i\omega)^m \frac{\nu(i\omega)(1 + i\omega\alpha)}{\Delta_n(i\omega)}, \tag{II.12}$$

где $\nu(p)$ — полином с положительными коэффициентами степени $n - q - m - 1$, все корни которого имеют отрицательные вещественные части. Если $m = 2$, то при достаточно малом $\omega > 0$ вещественная часть (II.12) отрицательна, что противоречит (7). Пусть $m > 2$. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ приращение аргумента дроби в (II.12) равно $-\pi(q + m)$ при $\alpha > 0$ и $-\pi(q + m + 1)$ при $\alpha = 0$. Легко убедиться, что абсолютная величина приращения аргумента всего выражения (II.12) больше π. Поэтому неравенство (7) будет нарушено.

Для дальнейшего анализа воспользуемся вторым методом Ляпунова. Систему (1) можно записать в виде

$$x^\cdot = Ax + a\psi(x), \qquad \sigma = (b, x). \tag{II.13}$$

Здесь $\psi(x) = (b, A^{q+1}x) / \rho_{q+1}$ на многообразиях скользящего режима и $\psi(x) = \varphi(\sigma)$ вне их. Очевидно, что $x = -A^{-1}a\xi$ при $\xi \in [\varphi(-0), \varphi(+0)]$ лежит на многообразии скользящего режима в гиперплоскости $\sigma = 0$ и является собственным вектором, соответствующим нулевому собственному значению. Поэтому отрезок (5) действительно является стационарным множеством системы (1).

Желая воспользоваться теоремой 3, положим $\psi_1 = \psi(x) - \xi + \mu\sigma$, $\varphi_1 = \varphi - \xi + \mu\sigma$, где ξ — любое число из $[\varphi(-0), \varphi(+0)]$, а μ — параметр из условия (3). Рассмотрим при $c = -A^{-1}a\xi$ функцию Ляпунова

$$V(x - c) = (x - c)^* H (x - c) + \alpha \int_0^\sigma \varphi_1 \, d\sigma. \tag{II.14}$$

Здесь H — определенно положительная постоянная симметрическая матрица, а число $\alpha \geqslant 0$. Величины H и α будут выбраны ниже. После замены $x - c = y$ функция (II.14) и система (II.13) примут вид

$$V(y) = y^*Hy + \alpha \int_0^\sigma \varphi_1 \, d\sigma, \tag{II.15}$$

$$y^\cdot = A_\mu y + a\psi_1(y), \qquad \sigma = (b, y), \tag{II.16}$$

где $A_\mu = A - \mu ab^*$.

Функция V является абсолютно непрерывной и почти для всех t

$$V^\cdot = y^*(HA_\mu + A_\mu^*H)y + \alpha\varphi_1[(A_\mu^*b, y) - \rho_1\psi_1] + 2(Ha, y)\psi_1. \tag{II.17}$$

Так как в областях скользящего режима квадратная скобка равна нулю, а вне их $\varphi_1 = \psi_1$, то в (II.17) можно вместо φ_1 написать ψ_1 и преобразовать все выражение к виду

$$-V^\cdot = (Gy, y) + 2(g, y)\psi_1 + \alpha\rho_1\psi_1^2 + \sigma\psi_1, \tag{II.18}$$

где $G = -HA_\mu - A_\mu^*H$, $-g = Ha + 0{,}5(b + \alpha A_\mu^*b)$.

Предположим сначала, что $\alpha\rho_1 > 0$. Следуя [7], преобразуем (II.18) так:

$$-V^{\cdot} = \left(\frac{(g, y)}{\sqrt{\alpha\rho_1}} + \sqrt{\alpha\rho_1}\psi_1\right)^2 + y^*\left(G - \frac{gg^*}{\alpha\rho_1}\right)y + \sigma\psi_1.$$

Ищем положительную матрицу H из условия $\alpha\rho_1 G \geqslant gg^*$. Такая матрица найдется (см. Приложение IV), если при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ $\alpha\rho_1 + \mathrm{Re}((A_\mu - i\omega I)^{-1}a, b + \alpha A_\mu{}^* b) \geqslant 0$. Это неравенство легко преобразуется к виду (6) и, следовательно, выполняется при некотором $\alpha > 0$. Таким образом, в силу условия 4 теоремы 1

$$-V^{\cdot} \geqslant \sigma\psi_1. \tag{II.19}$$

Пусть теперь $\alpha\rho_1 = 0$. В этом случае выберем положительную матрицу H из условия $G \geqslant 0$, $g = 0$. Это можно сделать (см. Приложение IV), если при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ получим $\mathrm{Re}((A_\mu - i\omega I)^{-1}a, b + \alpha A_\mu{}^* b) \geqslant 0$. Последнее неравенство преобразуется к виду (6) и поэтому удовлетворяется при некотором $\alpha \geqslant 0$. Мы опять получим оценку (II.19).

Если ограничиться $\sigma \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, то ввиду (3) $\sigma\psi_1 \geqslant 0$. Из (II.19) найдем, что $V^{\cdot} \leqslant 0$ и, следовательно, условие 2 теоремы 3 выполнено.

Чтобы удовлетворить условию 1 теоремы 3, возьмем в функции (II.14) $C = C_0 = 0$, $\xi = 0$, $\mu = 0$. Тогда

$$-V^{\cdot} \geqslant \sigma\psi. \tag{II.20}$$

Правая часть этого неравенства неотрицательна при всех x в силу (2).

Остается проверить выполнение условия 3 теоремы 3. Предположим, что вдоль какой-то траектории $x(t)$ при всех $t > 0$

$$V(x) = \gamma = \mathrm{const}. \tag{II.21}$$

Из (II.20) следует, что $\sigma\psi \equiv 0$. Поэтому $\int_0^\sigma \varphi d\sigma \equiv 0$, $V(x) = (Hx, x)$ и в (II.21) $\gamma > 0$ (при $\gamma = 0$ $x \equiv 0$ — положение равновесия). Если $\psi \equiv 0$ при всех $t > 0$, то, согласно (II.13), $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, что противоречит (II.21).

Предположим, что $\psi \neq 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. При этих t имеем $\sigma = 0$ и движение $x(t)$ находится в области скользящего режима. Сделаем описанное выше преобразование координат. Тогда в области скользящего режима (Hx, x) будет определенно положительной квадратичной формой относительно $\xi_{q+2}, \ldots, \xi_n$, которую мы обозначим через $\delta[\xi_i]$. Пусть $\{\xi_{q+2}(t), \ldots, \xi_n(t)\}$ является при всех t решением линейной однородной ($\sigma^* = 0$) системы (II.6) и при $t \in [t_1, t_2]$ совпадает с траекторией, вдоль которой выполняется (II.21). Вычислим $\delta[\xi_i]$ на этом решении и рассмотрим $d\delta / dt$. Это целая функция относительно t, которая равна нулю при $t \in [t_1, t_2]$. Следовательно, она равна нулю при всех t и $\delta[\xi_i(t)] = \gamma = \mathrm{const}$ при $t \equiv (-\infty, +\infty)$. Из оценки $\delta[\xi_i] \geqslant \nu(\xi_{q+2}{}^2 + \ldots + \xi_n{}^2)$ ($\gamma = \mathrm{const} > 0$) следует, что это решение линейной системы (6) ограничено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Выше было показано, что характеристический полином этой системы имеет один нулевой корень, а вещественные части остальных корней отрицательны. Если бы это решение зависело от t, то $\xi_{q+2}{}^2 + \ldots + \xi_n{}^2 \to \infty$ при $t \to -\infty$. Поэтому оно совпадает с положением равновесия системы. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 немедленно следует из проведенных выше рассуждений. При этом следует учесть, что $\chi(0) > 0$, положение равновесия единственно и система (II.6) не имеет нулевого корня.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем, что множество Λ устойчиво по Ляпунову. Предположим противное. Тогда существует такое $\eta > 0$, что сколь бы мало ни было $\delta > 0$, в области $\rho(x, \Lambda) = \inf\limits_{y \in \Lambda} |x - y| < \delta$ найдется такая точка x_0, что при некотором $t = t^* > 0$

$$\rho(x(t^*, x_0), \Lambda) > \eta. \tag{III.1}$$

Пусть c — такая точка из Λ, что $|x_0 - c| < \delta$. По условию 2 теоремы 3 при всех тех $t > 0$, при которых решение $x(t, x_0)$ содержится в ε-окрестности множества Λ, выполняется

$$V(x(t, x_0) - c) \leqslant V(x_0 - c). \tag{III.2}$$

Поскольку

$$\lim_{\delta \to 0} V(x_0 - c) = 0, \tag{III.3}$$

то можно выбрать δ столь малым, чтобы область, ограниченная поверхностью $V(x - c) = V(x_0 - c)$, содержалась в ε-окрестности множества Λ. Тогда (III.2) будет справедливо для всех $t > 0$. Пусть $\mu > \eta$ таково, что $V(z) > 1$ при $|z| > \mu$ и, следовательно, для $|z| > \eta$ выполнено неравенство $V(z) \geqslant \nu = \min\{1, \min\limits_{\eta \leqslant |z| \leqslant \mu} V(z)\}$. При $t = t^*$ левая часть неравенства (III.2) ограничена снизу числом ν, что противоречит (III.3).

Докажем теперь, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(x(t,x_0),\Lambda) = 0$ при любом x_0. Оценка (III.2) справедлива в силу условия 1 теоремы 3 при $c = c_0$, $t > 0$ и любом x_0. Поэтому траектория $x(t,x_0)$ при $t > 0$ не покидает ограниченной части пространства и, следовательно, [3] она продолжима для всех $t > 0$, причем множество Ω ее ω-предельных точек не пусто. Из (III.2) следует, что существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(x(t,x_0) - c_0) = \gamma(x_0, c_0). \qquad \text{(III.4)}$$

Через каждую точку $y \in \Omega$ проходит траектория $x(t,y)$, вся состоящая из ω-предельных точек [3].

В силу (III.4), $V(x(t,y) - c_0) = \gamma(x_0, c_0)$. На основании условия 3 теоремы 3 вектор $x(t,y)$ при всех $t \geqslant 0$ является особым. Мы доказали, что $\Omega \subset \Lambda$.

Предположим, что $x(t,x_0)$ не стремится к Λ при $t \to +\infty$. Тогда найдется такое $\beta > 0$ и такая последовательность $t_k \to +\infty$, что $\rho(x(t_k,x_0),\Lambda) > \beta$. Точка сгущения множества $\{x(t_k,x_0)\}$ будет ω-предельной точкой, лежащей вне Λ, что противоречит доказанному выше.

Покажем, что в условиях теоремы существует $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t,x_0)$. Предположим противное. Тогда найдутся две различные ω-предельные точки c_1 и c_2 из Λ. Обозначим через ρ расстояние между ними. Пусть $\{\tau_k\}$ такая последовательность, что $\lim\limits_{\tau_k\to+\infty} x(\tau_k,x_0) = c_1$. В силу условия 2 теоремы 3 при $t > \tau_k$

$$V(x(t,x_0) - c_1) \leqslant V(x(\tau_k,x_0) - c_1),$$

если τ_k достаточно велико и, следовательно, $x(t,x_0)$ не покидает $\rho/2$-окрестность точки c_1. А тогда c_2 не может быть ω-предельной точкой.

Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

В. А. Якубович любезно сообщил мне следующую теорему *, несколько уточняющую результаты, опубликованные в [8] (замена строгих знаков неравенств на нестрогие).

Теорема. Пусть спектр постоянной матрицы B лежит в открытой левой полуплоскости, c и d — постоянные векторы и число $\rho \geqslant 0$.

Для того чтобы существовала симметричная матрица $H \geqslant 0$, удовлетворяющая соотношениям

$$\rho G - gg^* \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0,$$
$$G \geqslant 0, \quad g = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0,$$

где $G = -(HB + B^*H)$, $g = -(Hc + d)$, необходимо, чтобы при $-\infty < \omega < +\infty$

$$\rho + 2\,\mathrm{Re}\, d^*(B - i\omega I)^{-1} c \geqslant 0. \qquad \text{(IV.1)}$$

Если векторы

$$c,\ Bc,\ \ldots,\ B^{n-1}c \qquad \text{(IV.2)}$$

(n — порядок векторов и матриц) линейно-независимы, то условие (IV.1) является и достаточным. При этом нуль — пространство матрицы H содержится в подпространстве, ортогональном к подпространству, натянутому на векторы

$$d, B^*d, \ldots, B^{*n-1}d. \qquad \text{(IV.3)}$$

В частности, если последние линейно-независимы, то $H > 0$.

Чтобы при доказательстве теоремы I в Приложении II воспользоваться этим результатом, возьмем $B = A_\mu$, $c = a$, $d = 0{,}5(b + dA_\mu{}^*b)$, $\rho = \alpha\rho_1$ и убедимся, что линейно-независимы каждая из систем векторов (IV.2) и (IV.3). Из невырожденности (4) следует невырожденность функции $b^*(A_\mu - pI)^{-1}a \equiv \chi(p)/[1 - \mu\chi(p)]$. Поэтому в силу [9] линейно-независимы векторы (IV.2), а также система векторов

$$b,\ A_\mu{}^*b,\ \ldots,\ A_\mu{}^{*n-1}b. \qquad \text{(IV.4)}$$

Поскольку $-1/\alpha$ не является собственным числом матрицы A_μ, то из линейной независимости векторов (IV.4) следует линейная независимость векторов (IV.3). Действительно, в противном случае найдется вектор $x \neq 0$, ортогональный ко всем векторам (IV.3). А тогда $(b, x + \alpha A_\mu x) = \ldots = (A_\mu{}^{*n-1}b, x + \alpha A_\mu x) = 0$. Ввиду линейной независимости системы (IV.4) $x + \alpha A_\mu x = 0$, т. е. $-1/\alpha$ является собственным числом матрицы A_μ.

Поступила в редакцию
10 января 1963 г.

* Аналогичные результаты получены в работе Калмана (K a l m a n R. E. Lyapunov Functions for the Problem of Lurye in Automatic Control. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 2, 1963), которая появилась после сдачи настоящей статьи в печать.

Цитированная литература

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
2. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Гостехиздат, 1955.
3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., т. 51 (93), № 1, 1960.
4. Соколов А. А. Влияние нечувствительности на процесс непрямого регулирования скорости паровых турбин. Исследование в области регулирования паровых турбин. Сб. ст. под ред. М. З. Хейфеца. Госэнергоиздат, 1950.
5. Хейфец М. З., Гелиг А. Х. Об одном виде нечувствительности системы регулирования. Энергомашиностроение, № 1, 1964.
6. Аносов Д. В. Об устойчивости положения равновесия релейных систем. Автоматика и телемеханика, т. XX, № 2, 1959.
7. Якубович В. А. О нелинейных дифференциальных уравнениях систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом. Вестн. ЛГУ, № 7, 1960.
8. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. Докл. АН СССР, т. 143, № 6, 1962.
9. Попов В. М. Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 1, 1963.

INVESTIGATION OF STABILITY OF DISCONTINUOUS NONLINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS WITH UNSOLE EQUILIBRIUM

A. Kh. GELIG

Automatic control systems with a piece-wise nonlinearity and unsole equilibrium are considered supposing that the linear part spectrum is in the left half-plane. For the multitude of the system equilibriums, the sufficient conditions of stability in the whole which are similar to V. M. Popov frequency criterion are obtained by means of Liapounov second method.