В. А. Якубович, Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II. Абсолютная устойчивость в классе нелинейностей с условием на производную, *Автомат. и телемех.*, 1965, том 26, выпуск 4, 577–590

УДК 62-501.32

МЕТОД МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

II. АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ С УСЛОВИЕМ НА ПРОИЗВОДНУЮ

В. А. ЯКУБОВИЧ

(*Ленинград*)

Для систем с одной нелинейностью получено новое частотное условие абсолютной устойчивости, улучшающее для ряда случаев известное условие В. М. Попова и охватывающее для рассматриваемого класса нелинейностей все условия, которые могут быть выведены с использованием функций Ляпунова вида «квадратичная форма координат и нелинейности плюс интеграл от нелинейности». Доказательство основано на решении специальных матричных неравенств [1].

Рассмотрим систему *

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(\sigma), \qquad \sigma = r^*x, \tag{1}$$

где $\varphi(\sigma)$ — дифференцируемая в каждой точке функция, удовлетворяющая обычным условиям

$$0 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2 \qquad (\mu_0 \leqslant +\infty), \tag{2}$$

а также одному из условий

$$\varphi'(\sigma) \leqslant \alpha_1, \tag{3}$$

$$\varphi'(\sigma) \geqslant \alpha_2. \tag{4}$$

Формально более общий случай, когда вместо (2) выполнено $\sigma^2\mu_1 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_2\sigma^2$, где по крайней мере одно из чисел μ_1, μ_2 конечно, сводится к рассматриваемому случаю заменой $\varphi_1 = \varphi - \mu_1\sigma$ или $\varphi_1 = \mu_2\sigma - \varphi$. Из (2)—(4) следует, что либо $\sigma\varphi(\sigma) \leqslant \alpha_1\sigma^2$, либо $\alpha_2\sigma^2 \leqslant \sigma\varphi(\sigma)$, поэтому без ограничения общности можно предполагать

$$\alpha_1 \geqslant \mu_0, \qquad \alpha_2 \leqslant 0, \tag{5}$$

в противном случае неравенства (2) были бы заменены на менее ограничительные.

В данной статье будут выведены условия абсолютной устойчивости для класса нелинейностей, удовлетворяющих неравенствам (2), (3) или (2), (4), а также некоторому дополнительному условию на бесконечности.

---

* Здесь и ниже используются обозначения, принятые в [2, 3]. Большие латинские (нежирные) буквы означают матрицы, малые латинские буквы — векторы, греческие — скалярные величины. Исключениями являются t — время, V — функция Ляпунова и индексы. Запись $H > 0$ означает, что $H = H^*$ и $x^* Hx > 0$ при $x \neq 0$; $H \geqslant 0$ означает, что $H = H^*$ и $x^*Hx \geqslant 0$.

Введем передаточную функцию линейной части системы (1) от входа φ к выходу $(-\sigma)$:

$$\chi(\lambda) = r^*(P - \lambda I)^{-1}q. \tag{6}$$

Для удобства формулировок обозначим:

$$\begin{aligned} &\alpha = \alpha_1, \quad \varepsilon = -1, \quad \text{если выполнено (3)}, \\ &\alpha = \alpha_2, \quad \varepsilon = +1, \quad \text{если выполнено (4)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Будем различать некритический случай, когда P — гурвицева матрица, и критический случай, когда собственные значения матрицы P расположены в левой замкнутой полуплоскости и часть из них — на мнимой оси. Рассмотрим вначале некритический случай.

Теорема 1. Предположим, что

а) в системе (1) P — гурвицева матрица;

б) функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет неравенствам (2), (3) или (2), (4) и выполнено соответствующее соотношение (5);

в) существуют постоянные $\varkappa \geqslant 0$, ϑ, такие, что характеристика $\chi(i\omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$\pi(\omega) \equiv \frac{1}{\mu_0} + \operatorname{Re}\left[(1 + i\omega\vartheta + \varepsilon\varkappa\omega^2)\chi(i\omega)\right] + \\ + \alpha\varepsilon\varkappa\omega^2|\chi(i\omega)|^2 > 0 \quad \text{при} \quad \omega \geqslant 0, \tag{8}$$

$$+\infty \geqslant \lim_{\omega\to\infty} \omega^2\pi(\omega) > 0; \tag{9}$$

г) если $\mu_0 \neq \infty$, $\varkappa \neq 0$, то

$$+\infty \geqslant \varliminf_{|\sigma|\to\infty} \frac{\vartheta}{\sigma^2}\left[\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma - \frac{\sigma\varphi(\sigma)}{2}\right] \geqslant 0, \tag{10}$$

и если $\mu_0 = \infty$, $\varkappa \neq 0$, то

$$\varlimsup_{|\sigma|\to\infty} \vartheta\left[\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma - \frac{\sigma\varphi(\sigma)}{2}\right] = +\infty. \tag{11}$$

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом, т. е. решение $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову и любое решение $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Сделаем некоторые замечания.

1. Условие (10), очевидно, выполнено, если либо

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} \frac{1}{\sigma^2}\left[\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma - \frac{\sigma\varphi(\sigma)}{2}\right] = 0,$$

либо найдется число $\sigma_* > 0$, такое, что

$$\vartheta\left[\int_0 \varphi(\sigma)\,d\sigma - \frac{\sigma\varphi(\sigma)}{2}\right] \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\sigma| \geqslant \sigma_*,$$

а тем более, если существуют пределы $\lim\limits_{|\sigma|\to\pm\infty} \varphi(\sigma)/\sigma \neq \infty$.

2. Функция $\pi(\omega)$, как это следует из (8), преобразуется к виду

$$\pi(\omega) = \frac{1}{\mu_0} + (1 + \varepsilon\varkappa\omega^2)\chi_1(\omega) - \vartheta\chi_2(\omega) + \alpha\varepsilon\varkappa\,\{\omega^2\chi_1(\omega)^2 + \chi_2(\omega)^2\},$$

где

$$\chi_1(\omega) = r^*\frac{P}{P^2 + \omega^2 I}q, \quad \chi_2(\omega) = \omega^2 r^*\frac{I}{P^2 + \omega^2 I}q,$$

$$\chi(i\omega) = \chi_1(\omega) + \frac{i}{\omega}\chi_2(\omega).$$

Поэтому при $\omega \to \infty$

$$\pi(\omega) = \frac{1}{\mu_0} + \varepsilon\varkappa r^* P q - \vartheta r^* q + \alpha\varepsilon\varkappa (r^* q)^2 + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

и условие (9) может быть записано в виде

$$\pi(\infty) = \frac{1}{\mu_0} + \varepsilon\varkappa r^* P q - \vartheta r^* q + \alpha\varepsilon\varkappa (r^* q)^2 > 0$$

либо

$$\pi(\infty) = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \pi(\omega) = r^* P q + \vartheta r^* P^2 q - \varepsilon\varkappa r^* P^3 q + $$
$$+ \varepsilon\alpha\varkappa (r^* P q)^2 - 2\varepsilon\alpha\varkappa (r^* q)(r^* P^2 q) > 0. \qquad (12)$$

Перейдем к геометрической интерпретации частотного условия «в». Обозначим

$$\zeta(\omega) = \varepsilon\omega^2 [\operatorname{Re}\chi(i\omega) + \alpha|\chi(i\omega)|^2],$$
$$\xi(\omega) = \frac{1}{\zeta(\omega)}\left[\frac{1}{\mu_0} + \operatorname{Re}\chi(i\omega)\right], \qquad \eta(\omega) = \frac{1}{\zeta(\omega)} \operatorname{Re}[i\omega\chi(i\omega)]. \qquad (13)$$

Условие (8) при $\zeta(\omega) \not\equiv 0$ выполнено, если *

$$\xi(\omega) + \vartheta\eta(\omega) + \varkappa > 0 \quad \text{при} \quad \zeta(\omega) > 0,$$
$$\xi(\omega) + \vartheta\eta(\omega) + \varkappa < 0 \quad \text{при} \quad \zeta(\omega) < 0, \qquad (14)$$
$$|\xi(\omega)| + |\vartheta|\,|\eta(\omega)| \neq 0 \quad \text{при} \quad \zeta(\omega) = 0.$$

Любую прямую на плоскости $\{\xi, \eta\}$ с уравнением $\xi + \vartheta\eta + \varkappa = 0$, где $\varkappa \geqslant 0$, будем называть допустимой прямой. Другими словами, допустимой прямой будет называться любая прямая, пересекающая полуось $\eta = 0$, $\xi \leqslant 0$. Полуплоскость, ограниченную допустимой прямой и содержащую полуось $\eta = 0$, $\xi > 0$, будем называть положительной полуплоскостью (для нее $\xi + \vartheta\eta + \varkappa \geqslant 0$); полуплоскость, ограниченную допустимой прямой и не содержащую полуось $\eta = 0$, $\xi > 0$, будем называть отрицательной полуплоскостью (для нее $\xi + \vartheta\eta + \varkappa \leqslant 0$).

Построим на плоскости $\{\xi, \eta\}$ по амплитудно-фазовой характеристике $\chi(i\omega)$ и формулам (13) кривые

$$\Gamma_+\{\xi = \xi(\omega), \quad \eta = \eta(\omega), \quad \zeta(\omega) > 0\},$$
$$\Gamma_-\{\xi = \xi(\omega), \quad \eta = \eta(\omega), \quad \zeta(\omega) < 0\}$$

для значений ω из интервала $0 \leqslant \omega \leqslant +\infty$. Будем говорить, что допустимая прямая разделяет кривые Γ_+ и Γ_-, если кривая Γ_+ расположена в положительной и кривая Γ_- в отрицательной полуплоскостях.

Заменяя (8) на (14) и рассматривая случай $\zeta(\omega) \not\equiv 0$, получим: условие «в» теоремы 1 выполнено, если

1) каждому значению ω_0, для которого $\zeta(\omega_0) = 0$, соответствуют ветви кривых Γ_+, Γ_-, уходящие в бесконечность (т. е. выполнено последнее условие (14));

2) существует допустимая прямая, разделяющая кривые Γ_+ и Γ_- и либо не имеющая с ними общих точек, либо имеющая одну общую точку, соответствующую значению $\omega = +\infty$, причем в последнем случае выполнено (9) [или (12)].

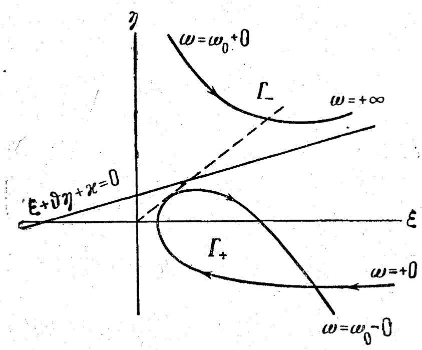
---

* При $\zeta(\omega) \equiv 0$ характеристика $\chi(i\omega)$ расположена на окружности $\operatorname{Re}\chi + \alpha|\chi|^2 = 0$. В этом исключительном случае имеет место абсолютная устойчивость по критерию В. М. Попова. Условие (14) совпадает с (8), если отбросить некоторые другие исключительные случаи, в которых теорема 1 не дает новых результатов.

Параметры ϑ, $\varkappa$ находятся из уравнения $\xi + \vartheta\eta + \varkappa = 0$ допустимой прямой *.

На рисунке даны кривые Γ_+, Γ_1 и разделяющая их допустимая прямая.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимоотношении сформулированного частотного условия и условия Попова [4]. Условие Попова (в формулировке [5, 6]) совпадает с пунктом «в» теоремы 1 для $\varkappa = 0$. При этом отсутствуют предположение о дифференцируемости функции $\varphi(\sigma)$, условия (3), (4), а также условия на бесконечности (10), (11) **. Более того, как показано в [6], при выполнении пункта «в» для $\varkappa = 0$ имеет место абсолютная устойчивость в классе разрывных, а также определенного типа гистерезисных нелинейностей, удовлетворяющих условию (2) (см. также [7]).



Проведем на комплексной плоскости χ окружность C с уравнением $\mathrm{Re}\,\chi + \alpha|\chi|^2 = 0$, т. е. окружность, проходящую через начало координат и имеющую центр в точке $(-1/2\alpha)$. (При $\alpha = 0$ окружность C вырождается в прямую $\mathrm{Re}\,\chi = 0$; в этом случае ниже под внутренностью окружности C будем понимать полуплоскость $\mathrm{Re}\,\chi > 0$.). Кривой Γ_+ соответствуют, согласно первой формуле (13), а также (5), (7), те части характеристики $\chi(i\omega)$, которые лежат внутри окружности C, а кривой Γ_- — части, лежащие вне окружности C. Если характеристика $\chi(i\omega)$ при $\omega \neq 0$ целиком содержится внутри окружности C (т. е. $\zeta(\omega) > 0$ при $\omega \neq 0$ и кривая Γ_- отсутствует), то, очевидно, выполнено частотное условие Попова (например, для $\vartheta = 0$), а также сформулированное условие. Если характеристика $\chi(i\omega)$ лежит (при $\omega \neq 0$) вне окружности C (т. е. $\zeta(\omega) < 0$ при $\omega \neq 0$ и отсутствует кривая Γ_+), то сформулированное частотное условие, как следует из (8), (11), не может дать ничего нового по сравнению с условием Попова.

Предположим, что характеристика $\chi(i\omega)$ рассекает окружность C. Поскольку $\chi(0)$ вещественно, этот случай всегда имеет место для некоторых α. Критерий Попова, в терминах кривых Γ_+, Γ_- равносилен тому, что можно провести допустимую прямую через начало координат $\xi = 0$, $\eta = 0$, разделяющую кривые Γ_+ и Γ_- так, как указано в пункте 2. Возможно, однако, что допустимую прямую, разделяющую Γ_+ и Γ_-, провести можно, но не через начало координат *** (см. рисунок). Для таких систем частотное условие Попова не выполнено, но по теореме 1 имеет место устойчивость в целом, т. е. для таких систем теорема 1 улучшает критерий Попова.

Отметим следующие свойства кривых Γ_+, Γ_-, доказанные в Приложении (п. 4):

а) кривая Γ_+ не имеет общих точек с полуосью $\xi \leqslant 0$, $\eta = 0$;

б) для асимптотической устойчивости линейной системы (1) с функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ для всех μ из интервала

$$0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0 \quad \text{при} \quad \mu_0 \neq 0, \qquad \mu \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \mu_0 = \infty \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы кривая Γ_- не имела общих точек с по-

---

* Если одна из кривых Γ_+, Γ_- отсутствует, а вторая расположена по отношению к допустимой прямой в соответствующей полуплоскости, то условие разделения считается выполненным.

** Из доказательства теоремы 1 (Приложение, п. 2, 3) отчетливо видно, почему при $\varkappa = 0$ отпадают эти условия.

*** Примеры показывают, что такие случаи действительно имеют место.

луосью

$$\eta = 0,\ \xi \geqslant 0 \text{ при } \mu_0 \neq \infty,\ \eta = 0,\ \xi > 0 \text{ при } \mu_0 = \infty, \tag{16}$$

а также, чтобы $\chi(0) \neq -1/\mu_0$ при $\mu_0 \neq \infty$ и, если $\alpha = \mu_0 \neq \infty$, то чтобы $\chi(i\omega) \neq -1/\mu_0$.

Следующая теорема отличается от теоремы 1 в основном тем, что в соотношении (8) допускается знак равенства, а хотя бы одно из трех неравенств (2), (3) или (2), (4) должно быть выполнено строго.

Теорема 2. Пусть выполнены условия «а», «в», «г» теоремы 1, причем в условии «в» неравенства (8), (9) заменены на неравенство $\pi(\omega) \geqslant 0$ при $\omega \geqslant 0$ и, кроме того,

б) функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет одной из трех систем неравенств: либо неравенствам $0 \leqslant \sigma\varphi < \mu_0\sigma^2$, а также (3) или (4), либо неравенствам $0 < \sigma\varphi \leqslant \mu_0\sigma^2$ ($\mu_0 \neq \infty$), а также (3) или (4), либо неравенствам (2), а также строгим неравенствам (3) или (4) (со знаком $>$ вместо $\geqslant$), причем в последнем случае $\varkappa \neq 0$;

д) векторы q, Pq, ..., $P^{\nu-1}q$, где ν — порядок системы (1), линейно независимы *;

е) при $\mu_0 \neq \infty$ выполнено необходимое условие

$$\frac{1}{\mu_0} + \chi(i\omega) \neq 0 \qquad (0 \leqslant \omega < +\infty).$$

Тогда решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Пусть $\zeta(\omega) \not\equiv 0$. Условие существования параметров $\varkappa \geqslant 0$, ϑ, для которых $\pi(\omega) \geqslant 0$, означает в геометрических терминах, что существует допустимая прямая, разделяющая кривые Γ_+, Γ_- (имеющая, может быть, общие с ними точки).

Действительно, последнее условие означает, что $\pi(\omega) \geqslant 0$ при $\zeta(\omega) \neq 0$. Так как нули функции $\zeta(\omega)$ могут быть лишь изолированными, то $\pi(\omega) \geqslant 0$ для всех $\omega \geqslant 0$. Как и выше, если одна из кривых Γ_+, Γ_- отсутствует, а вторая расположена по отношению к допустимой прямой в соответствующей полуплоскости, то условие разделения считается выполненным.

Доказательство теорем 1, 2 основано на использовании функций Ляпунова вида

$$V = x^*Hx + 2x^*h\varphi(\sigma) + \gamma\varphi(\sigma)^2 + \vartheta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma, \tag{17}$$

где H, h, γ, ϑ — неизвестные параметры. Основная часть задачи состоит в отыскании условий существования этих параметров, при которых $\dot V \leqslant 0$. Производная $\dot V$ в силу системы (1) может быть приведена к виду (см. Приложение)

$$-\dot V = \Omega_1(x, \varphi) + \varepsilon[\varphi'(\sigma) - \alpha]\,\Omega_2(x, \varphi) + \left(\sigma - \frac{\varphi}{\mu_0}\right)\varphi, \tag{18}$$

где $\Omega_1(x, \varphi)$, $\Omega_2(x, \varphi)$ — квадратичные формы относительно x и φ, а α и ε определяются из (5). Слагаемое $(\sigma - \varphi/\mu_0)\varphi$ и выражение $\varepsilon[\varphi'(\sigma) - \alpha]$ неотрицательны в силу (3) — (5), (7). Поскольку должно быть выполнено $\dot V \leqslant 0$, естественно потребовать, чтобы в (18) формы $\Omega_1\,\Omega_2$ были неотрицательны **. При этом требовании частотное условие $\pi(\omega) \geqslant 0$ дает «огибающую» всех условий, которые могут быть получены посредством функций Ляпунова вида (17) на основании следующей теоремы.

* Это условие заведомо выполнено, если функция $\chi(\lambda)$ невырождена, т. е. не представима в виде отношения многочленов со степенью знаменателя, меньшей ν (см. [8], лемма 1). Обратное утверждение неверно.

** Т. е. $\Omega_j(x, \varphi) \geqslant 0$ ($j = 1, 2$) при любых x, φ.

Теорема 3. Для того чтобы существовала функция Ляпунова вида (17), такая, что в выражении (18) квадратичные формы $\Omega_1(x, \varphi)$, $\Omega_2(x, \varphi)$ неотрицательны, необходимо, чтобы для некоторых $\varkappa \geqslant 0$, ϑ было выполнено неравенство $\pi(\omega) \geqslant 0$ при $\omega \geqslant 0$, где $\pi(\omega)$ определяется из (8).

На самом деле имеет место более сильное предложение*; условие $\pi(\omega) \geqslant 0$ необходимо для того, чтобы было выполнено неравенство $\dot{V} \leqslant 0$ для любой функции φ из какого-либо класса функций, удовлетворяющих соотношениям (2), (3) или (2), (4) и таких, что

$$\operatorname{Inf} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = 0, \quad \sup \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = \mu_0, \quad \operatorname{Inf} \varepsilon\varphi'(\sigma) = \varepsilon\alpha$$

(Inf и sup берутся по всем функциям φ из этого класса, в первых двух равенствах $\sigma \neq 0$).

Это предложение показывает, что за счет использования дополнительных сведений о нелинейности $\varphi(\sigma)$ типа $\sup|\varphi(\sigma)|$, $\sup|\varphi''(\sigma)|$, $\operatorname{Inf}|\varphi''(\sigma)|$ и т. п. нельзя улучшить частное условие $\pi(\omega) \geqslant 0$, если использовать функции Ляпунова вида (17).

Прежде чем переходить к расмотрению критического случая, выясним поведение функции $\pi(\omega)$ при изменении матрицы P таком, что хотя бы одно из ее собственных значений приближается к какой-либо точке $i\omega_0$ на мнимой оси. В этом случае $|\chi(i\omega_0)| \to +\infty$, а так как $\varepsilon\alpha\varkappa \leqslant 0$, то $\pi(\omega_0) \to -\infty$ при $\alpha\varkappa \neq 0$. Таким образом, при $\alpha\varkappa \neq 0$ условие (8) будет нарушено. Поэтому в критическом случае следует считать, что $\alpha\varkappa = 0$ **. Поскольку предположение $\varkappa = 0$ приводит к обобщенному условию Попова [3], будем считать, что $\alpha = 0$, т. е. что вместо (3), (4) выполнено

$$\varphi'(\sigma) \geqslant 0. \tag{19}$$

Вместо условия «г» будем предполагать, что функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \delta\sigma^2 \leqslant \sigma^2\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2 \tag{20}$$

с некоторым $\delta > 0$ ***. Представим передаточную функцию $\chi(\lambda)$ в виде

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \chi_2(\lambda), \tag{21}$$

где $\chi_1(\lambda)$ — функция, голоморфная на мнимой оси; все полюсы функции $\chi_2(\lambda)$, которые обозначим через $i\omega_h$, расположены на мнимой оси. Числа $i\omega_h$ являются, очевидно, собственными значениями матрицы P.

Теорема 4. 1. Предположим, что все собственные значения матрицы P расположены в левой замкнутой полуплоскости, причем часть из них — на мнимой оси, а также что

а) имеет место предельная устойчивость, т. е. линейная система (1) с функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ асимптотически устойчива при достаточно малых $\mu > 0$ ****;

б) выполнено (19), (20);

в) существуют постоянные $\varkappa \geqslant 0$, ϑ такие, что

$$\pi(\omega) \equiv \frac{1}{\mu_0} + \operatorname{Re}[(1 + i\omega\vartheta + \varkappa\omega^2)\chi(i\omega)] \geqslant 0 \qquad (\omega \neq \omega_h); \tag{22}$$

---

* Это предпсложение следует из теоремы 4 [18].

** Это рассуждение поясняет следующее утверждение, доказательство которого здесь не приводится: в критическом случае при $\alpha\varkappa \neq 0$ не существует функции Ляпунова вида (17) такой, что $\dot{V} \leqslant 0$ для любой функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (2), (3) или (2), (4).

*** Вместо (20) следовало бы рассмотреть условие $0 < \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2$ подобно тому как это сделано в работе [3]. Предположение (20), однако, позволяет свести задачу к некритическому случаю и тем самым избежать серьезных математических осложнений, обычных для критических случаев (см. в связи с этим [9]).

**** Относительно условий предельной устойчивости см. [9], теорема 2; [3], теорема 1.

г) выполнен пункт «г» теоремы 1;

д) если $\mu_0 = \infty$, $\lim\limits_{\omega\to\infty} \pi(\omega) = 0$, $\lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2\pi(\omega) = 0$,

$$\varkappa \lim_{\omega\to\infty} i\omega\chi(i\omega) = -\varkappa r^* q = 0, \quad \varkappa \lim_{\omega\to\infty} \omega^2\chi(i\omega) = \varkappa r^* P q = 0,$$

то векторы $q, Pq, \ldots, P^{\nu-1}q$ линейно независимы.

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

2. Справедливо утверждение пункта 1 с заменой условия «в» на условие:

в′) существуют постоянные $\varkappa \geqslant 0$, ϑ, ψ такие, что выполнено тождество

$$\operatorname{Re}[(1 + i\omega\vartheta + \varkappa\omega^2)\chi_2(l\omega)] = \psi \quad (\omega \neq \omega_h) \tag{23}$$

и неравенство

$$\pi(\omega) \equiv \frac{1}{\mu_0} + \psi + \operatorname{Re}[(1 + i\omega\vartheta + \varkappa\omega^2)\chi_1(i\omega)] \geqslant 0. \tag{24}$$

Условие «в» допускает прежнюю геометрическую интерпретацию: должна существовать допустимая прямая, разделяющая кривые Γ_+, Γ_-.

В качестве иллюстрации условия «в′» рассмотрим случай пары чисто мнимых собственных значений, т. е. случай, когда $\chi_2(\lambda) = \dfrac{\alpha\lambda + \beta}{\lambda^2 + \omega_0^2}$. По теореме 1 [3] для предельной устойчивости необходимо, чтобы $\alpha \geqslant 0$, и если $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$, и достаточно, чтобы $\alpha > 0$. Будем предполагать, что $\alpha > 0$. Тождество (23) дает $\psi = \dfrac{\beta}{\omega_0^2}$, $\vartheta = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\varkappa + \dfrac{1}{\omega_0^2}\right)$. Условие (24) означает, что кривая

$$\xi = \frac{\beta}{\omega_0^2} + \operatorname{Re}\left[\left(1 + \frac{i\omega\beta}{\omega_0^2\alpha}\right)\chi_1(i\omega)\right] \quad \left(= \operatorname{Re}\left[\left(1 + \frac{i\omega\beta}{\omega_0^2\alpha}\right)\chi(i\omega)\right]\right),$$

$$\eta = \operatorname{Re}\left[\left(\omega^2 + i\omega\frac{\beta}{\alpha}\right)\chi_1(i\omega)\right] \quad \left(= \operatorname{Re}\left[\left(\omega^2 + i\omega\frac{\beta}{\alpha}\right)\chi(i\omega)\right]\right)$$

должна лежать в какой-либо полуплоскости

$$\frac{1}{\mu_0} + \xi + \varkappa\eta \geqslant 0 \quad (\varkappa \geqslant 0).$$

Обобщенное условие Попова [3, 9] совпадает с этим условием для $\varkappa = 0$, т. е. является более ограничительным. Оно гарантирует, однако, абсолютную устойчивость для более широкого класса нелинейностей [3, 9].

Доказательства теорем 1—4 приведены в Приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Вспомогательные предложения о матричных неравенствах

Приведем утверждение теорем 1, 2 [1] в несколько иной, более удобной для дальнейшего формулировке.

Лемма 1. Даны гурвицева $\nu \times \nu$ матрица P, векторы q, r порядка ν и число $\rho \geqslant 0$. По неизвестной матрице $X = X^*$ составим выражения

$$-G = XP + P^*X, \qquad -g = Xq + r \tag{1.1}$$

и $(\nu+1)\times(\nu+1)$ матрицу

$$F=\begin{pmatrix} G & g \\ g^* & \rho \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

1. Пусть $\rho>0$. Для существования матрицы $X=X^*$ такой, что $F>0$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\omega\geqslant 0$ было выполнено условие

$$\pi_1(\omega)\equiv\rho+2\operatorname{Re} r^*(P-i\omega I)^{-1}q>0. \tag{1.3}$$

2. Пусть $\rho=0$. Для существования матрицы $X=X^*$, такой, что матрица F имеет ранг ν и $F\geqslant 0$ (т. е. что $G>0$, $g=0$), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\omega\geqslant 0$ было выполнено неравенство (1.3) и неравенство

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\pi_1(\omega)>0. \tag{1.4}$$

Утверждение 2 совпадает (для вещественного случая) с утверждением теоремы 2 [1]; утверждение 1 сразу следует из теоремы 1 [1]. Действительно, в [1] взято $\rho=1$ и вместо условия $F>0$ фигурирует условие $G-gg^*>0$.

Равносильность последних условий следует из представления квадратичной формы $\Omega(x,\varphi)=x^*Gx+2x^*g\varphi+\varphi^2$ в виде $\Omega(x,\varphi)=x^*(G-gg^*)x+|x^*g-\varphi|^2$. Случай $\rho=1$ сводится к случаю $\rho>0$ простой заменой $\varphi=\rho^{1/2}\varphi_1$ *.

Лемма 2. Даны гурвицева $\nu\times\nu$ матрица P, векторы p, q, s порядка ν и числа α, β, γ. По неизвестной $\nu\times\nu$ матрице $H=H^*$ составим выражения

$$-G=HP+P^*H,\qquad -g=Hq+p. \tag{1.5}$$

Рассмотрим $(\nu+1)\times(\nu+1)$ матрицы

$$R=\begin{pmatrix} G & g \\ g^* & \gamma \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} ss^* & \beta s \\ \beta s^* & \beta^2 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

1. Пусть $\gamma+\alpha\beta^2>0$. Для того чтобы существовала матрица $H=H^*$, удовлетворяющая неравенству

$$R+\alpha S>0, \tag{1.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех вещественных $\omega\geqslant 0$ было выполнено

$$\pi_2(\omega)\equiv\gamma+2\operatorname{Re} p^*(P-i\omega I)^{-1}q+\alpha|\beta-s^*(P-i\omega I)^{-1}q|^2>0. \tag{1.8}$$

2. Пусть $\gamma+\alpha\beta^2=\lim\limits_{\omega\to\infty}\pi_2(\omega)=0$. Для того чтобы существовала матрица $H=H^*$, удовлетворяющая соотношениям

$$R+\alpha S\geqslant 0,\ \text{ранг }(R+\alpha S)=\nu, \tag{1.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех вещественных $\omega\geqslant 0$ было выполнено (1.8), а также, чтобы

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\pi_2(\omega)>0. \tag{1.10}$$

3. В случае, когда вектор p имеет вид $p=\zeta(P^*)r$, где $\zeta(\lambda)$ — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами, выражение $\pi_2(\omega)$ в (1.8) преобразуется к виду

$$\pi_2(\omega)=\gamma+\alpha|\beta-s^*(P-i\omega I)^{-1}q|^2+2\operatorname{Re}[\zeta(i\omega))\chi(i\omega)]+$$
$$+2\operatorname{Re} r^*\left[\zeta'(i\omega)I+\frac{\zeta''(i\omega)}{2!}(P-i\omega I)+\frac{\zeta'''(i\omega)}{3!}(P-i\omega I)^2+\dots\right]q, \tag{1.11}$$

где

$$\chi(i\omega)=r^*(P-i\omega I)^{-1}q. \tag{1.12}$$

Отметим, что неравенство (1.7) утверждает положительную определенность относительно x и φ следующей квадратичной формы:

$$\Omega_1(x,\varphi)=x^*Gx+2\varphi x^*g+\gamma\varphi^2+\alpha|x^*s+\beta\varphi|^2. \tag{1.13}$$

Соотношения (1.9) вместе с равенством $\gamma+\alpha\beta^2=0$ означают, что форма (1.13) приводится к виду

$$\Omega_1(x,\varphi)=x^*(G+\alpha ss^*)x \tag{1.14}$$

и является положительно определенной формой x.

---

* Отметим, что из представления формы $\Omega(x,\varphi)=x^*Gx+2\varphi x^*g+\rho\varphi^2$ (где $\rho>0$) в виде $\Omega(x,\varphi)=(\rho-g^*G^{-1}g)\varphi^2+|\varphi G^{-1/2}g+G^{1/2}x|^2$ следует равносильность условий $F>0$ и $G>0$, $\rho>g^*G^{-1}g$. Поскольку X и G однозначно связаны первой формулой (1.1), неравенство $F>0$ равносильно существованию матрицы $G>0$, такой, что $g^*G^{-1}g<\rho$, где $g=g(G)$ определяется формулами (1.1). Эта форма задачи явилась исходной в исследованиях Лефшеца [10, 11] (см. также [12]).

Доказательство. Приведем заданные матричные неравенства к неравенствам леммы 1. Для этого сделаем в (1.5) замену $H = H_0 + X$, где $H_0 = H_0^*$ — матрица, однозначно определяемая соотношениями

$$H_0 P + P^* H_0 = \alpha s s^*. \tag{1.15}$$

Тогда получим $R + \alpha S = F$, где F имеет вид (1.2), причем G, g определяются из (1.1) и $r = H_0 q + p - \alpha\beta s$, $\rho = \gamma + \alpha\beta^2$. Применяя лемму 1, получим утверждения 1, 2 леммы 2 с условием, что $\pi_2(\omega)$ определяется формулой:

$$\pi_2(\omega) = \rho + 2\mathrm{Re}(H_0 q + p - \alpha\beta s)^* (P - i\omega I) q^{-1}. \tag{1.16}$$

Обозначим $P_\omega = P - i\omega I$. Из (1.15) имеем $H_0 P_\omega + P_\omega^* H_0 = \alpha s s^*$. Умножая это соотношение слева на $q^* P_\omega^{*-1}$ и справа на $P_\omega^{-1} q$, найдем $2\mathrm{Re} q^* H_0 P_\omega^{-1} q = \alpha |s^* P_\omega^{-1} q|^2$. Подставляя это значение в (1.16), преобразуем (1.16) к виду (1.8). Если $p = \zeta(P^*) r$, то $p^* = r^* \zeta(P^*)^* = r^* \zeta(P)$, так как коэффициенты многочлена $\zeta(\lambda)$ вещественны. Поскольку,

$$\frac{\zeta(P)}{P - i\omega I} = \frac{\zeta(i\omega)}{P - i\omega I} + \zeta'(i\omega) I + \frac{\zeta''(i\omega)}{2!}(P - i\omega I) + \ldots,$$

то выражение $\pi_2(\omega)$ преобразуется к виду (1.11). Лемма 2 доказана.

Неравенства [1] с заменой знаков $>$ на $\geqslant$ решены Калманом [13] (см. также [4], приложение; в [13] получен также ряд других результатов). Приведем этот результат Калмана в несколько иной, более удобной для нас формулировке.

Лемма 3 (Калман [13]). Даны гурвицева $\nu \times \nu$ матрица P, ν — векторы q, r и число $\rho \geqslant 0$. По матрице $X = X^*$ определим G, g и матрицу F формулами (1.1), (1.2).

1. Для того чтобы существовала матрица $X = X^*$, удовлетворяющая неравенству $F \geqslant 0$, необходимо, чтобы для любых $\omega \geqslant 0$ было выполнено условие

$$\rho + 2\mathrm{Re} r^* (P - i\omega I)^{-1} q \geqslant 0. \tag{1.17}$$

2. Если векторы

$$q,\ Pq,\ \ldots,\ P^{\nu-1} q \tag{1.18}$$

линейно независимы, то условие (1.17) является и достаточным. При этом нуль-пространство матрицы X содержится в подпространстве, ортогональном к подпространству, натянутому на векторы

$$r,\ P^* r,\ \ldots,\ P^{*\nu-1} r. \tag{1.19}$$

В частности, если векторы (1.19) линейно независимы, то $X > 0$.

Отметим, что лемма 3 может быть также выведена из [1] (или из леммы 1) соответствующим предельным переходом. Доказательство Калмана [13] пункта 2 не использует результаты [1] *. В свою очередь, из леммы 3 сравнительно просто получить лемму 1. Доказательство леммы 3 имеется также в [4], приложение.

Повторяя приведенные выше выкладки, из леммы 3 получим следующее утверждение.

Лемма 4. Даны гурвицева $\nu \times \nu$ матрица P, ν — векторы p, q, s и числа α, β, γ. Определим матрицы R, S формулами (1.5), (1.6).

1. Для того чтобы существовала матрица $H = H^*$ такая, что $R + \alpha S \geqslant 0$ [или иначе: чтобы форма (1.13) была неотрицательна для любых x, φ], необходимо, чтобы было выполнено условие $\pi_2(\omega) \geqslant 0$ при $\omega \geqslant 0$, где $\pi_2(\omega)$ определяется из (1.8) или (1.11).

2. В случае линейной независимости векторов (1.18) условие $\pi_2(\omega) \geqslant 0$ является и достаточным.

2. Доказательство теорем 1 и 3

Возьмем производную функцию (17) в силу системы (1) и прибавим равное нулю выражение **

$$(x^* r - \varphi / \mu_0)\varphi - (\sigma - \varphi / \mu_0)\varphi.$$

---

* Пункт 1 леммы 3 может быть доказан дословным повторением пункта 4 [1] с заменой знаков $>$ на $\geqslant$.

** Поясним смысл этого приема, примененного впервые А. И. Лурье [14] ($\mu_0 = \infty$) и Е. Н. Розенвассером [15] ($\mu_0 < \infty$). Выражение для $\dot V$ имеет вид $\dot V = -\Omega_2(x, \varphi) \times [\varphi' - \alpha] + \Omega_3(x, \varphi)$, где $\Omega_2(x, \varphi)$, $\Omega_3(x, \varphi)$ — квадратичные формы своих аргументов. Из условия $\dot V < 0$ для всех x и φ из рассматриваемого класса функций следует, что $\Omega_3(x, \varphi) > 0$ в области $(x^* r - \varphi / \mu_0)\varphi \geqslant 0$, $|x| + |\varphi| \neq 0$. Прием Лурье — Розенвассера позволяет заменить трудную задачу отыскания условий существования матрицы H, для которой $\Omega_3(x, \varphi) > 0$ в указанной области, на более легкую задачу отыскания условий существования матрицы H, такой, что в (18) $\Omega_1(x, \varphi) > 0$ при $|x| + |\varphi| \neq 0$. Последняя задача, как будет следовать из доказательства теоремы 1, сводится к матричному неравенству, решение которого дается леммой 2.

Тогда $\dot V$ примет вид (18), где

$$\Omega_1(x,\varphi) = x^*Gx + 2\varphi x^*g + \rho\varphi^2 - 2\alpha(\gamma\varphi + x^*h)(r^*Px + r^*q\varphi),$$

$$\Omega_2(x,\varphi) = -2\varepsilon(h^*x + \gamma\varphi)(r^*Px + r^*q\varphi),$$

$$-G = HP + P^*H, \quad -g = Hq + P^*h + \frac{\vartheta}{2}P^*r + \frac{1}{2}r,$$

$$\rho = \frac{1}{\mu_0} - \vartheta r^*q - 2h^*q. \tag{2.1}$$

Из условия $\Omega_2(x,\varphi) \geqslant 0$ следует, что существует число $\varkappa$, такое, что

$$h = -\varepsilon\frac{\varkappa}{2}P^*r, \quad \gamma = -\varepsilon\frac{\varkappa}{2}r^*q, \quad \varkappa \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Действительно, вводя векторы порядка $\nu+1$, запишем Ω_2 в виде $\Omega_2 = z^*abz^*$, где z — вектор с компонентами x, φ. Если a и b линейно независимы, то $\Omega = -(|a|\,|b| - a^*b)^2 < 0$ для $z = a/|a| - b/|b|$. Таким образом, векторы a и b должны быть линейно зависимы, откуда следует (2.2). Используя (2.2), преобразуем Ω_1 к виду

$$\Omega_1(x,\varphi) = x^*Gx + 2\varphi x^*g \mp \rho\varphi^2 + \varepsilon\varkappa\alpha|r^*Px + r^*q\varphi|^2. \tag{2.3}$$

Применяя пункт 1 леммы 4 и проводя элементарные преобразования, получим утверждение теоремы 3.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Достаточно рассмотреть случай $\varkappa \neq 0$, так как при $\varkappa = 0$ утверждение теоремы 1 следует из критерия Попова в формулировке [5, 6]. Определим в (17) h, γ формулами (2.2). Тогда

$$\Omega_2(x,\varphi) = \varkappa|r^*Px + r^*q\varphi|^2, \tag{2.4}$$

т. е. $\Omega_2(x,\varphi) \geqslant 0$ при $\varkappa \geqslant 0$.

Используя проведенные выше выкладки, получим по лемме 2, что существует матрица $H = H^*$ такая, что в (18) $\Omega_1(x,\varphi)$ — положительно определенная форма, либо x и φ (если $\lim\limits_{\omega\to\infty}\pi(\omega) > 0$), либо только x (если $\lim\limits_{\omega\to\infty}\pi(\omega) = 0$, $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^2\pi(\omega) > 0$). В последнем случае Ω_1 приводится к виду (1.14). В обоих случаях из (18) следует, что $\dot V < 0$ при $x \neq 0$.

По теореме 4 [3] достаточно доказать, что $\overline{\lim}\, V[x(t)] = +\infty$ для любого решения $x(t)$, такого, что $|x(t)| \to \infty$.

Рассмотрим линейную систему, получающуюся из (1) при $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, для значений μ из интервала (15). Поскольку, по доказанному $\dot V|_{\varphi=\mu\sigma} < 0$ при $x \neq 0$, то эта система не может иметь периодических решений. Так как матрица коэффициентов этой системы $Q(\mu) = P + \mu qr^*$ гурвицева при $\mu = 0$, то матрица $Q(\mu)$ является гурвицевой для всех μ из интервала (15). Поэтому $V|_{\varphi=\mu\sigma} = \Omega_2(x,\mu) > 0$ при $x \neq 0$ и указанных значениях μ. Введем в рассмотрение функцию $\Omega_0(x)$, определенную для $\sigma = r^*x \neq 0$ и получающуюся из $V|_{\varphi=\mu\sigma}$ заменой $\mu = \varphi(\sigma)/\sigma$. Поскольку из (17) следует, что

$$V|_{\varphi=\mu\sigma} = x^*\left[H + (rh^* + hr^*)\mu + \left(\gamma + \frac{\vartheta}{2}\mu\right)\mu^2rr^*\right]x, \tag{2.5}$$

$$\Omega_0(x) = x^*Hx + 2x^*h\varphi(\sigma) + \gamma\varphi(\sigma)^2 + \frac{\vartheta\sigma\varphi(\sigma)}{2}. \tag{2.6}$$

Доопределим последним равенством (т. е. по непрерывности) $\Omega_0(x)$ на значения x, для которых $\sigma = r^*x = 0$.

Пусть $\mu_0 \neq \infty$. Так как собственные значения $\lambda_j(\mu)$ матрицы, стоящей в квадратных скобках в формуле (2.5), непрерывные и положительные (при $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$) функции μ, то найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $\lambda_j(\mu) \geqslant \varepsilon_0$, т. е. $V|_{\varphi=\mu\sigma} > \varepsilon_0|x|^2$. Последнее означает, что для $\sigma \neq 0$ имеет место неравенство

$$\Omega_0(x) \geqslant \varepsilon_0|x|^2. \tag{2.7}$$

По непрерывности это неравенство выполнено для всех значений x. Из (17), (2.6) следует, что

$$V(x) = \Omega_0(x) + \vartheta\left[\int\limits_0^\sigma \varphi\, d\sigma - \frac{\sigma\varphi(\sigma)}{2}\right]. \tag{2.8}$$

Так как, по предположению, выполнено (10), то существует $\sigma_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, такие, что

$$\frac{\vartheta}{\sigma^2}\left[\int_0^\sigma \varphi d\sigma - \frac{\sigma\varphi(\sigma)}{2}\right] \geqslant -\frac{\varepsilon_0}{2|r|^2} \text{ при } |\sigma| \geqslant \sigma_0. \tag{2.9}$$

Из (2.7)—(2.9) следует, что

$$V(x) \geqslant \varepsilon_0 / 2|x|^2 \text{ при } |\sigma| \geqslant \sigma_0. \tag{2.10}$$

Поскольку квадратная скобка в (2.8) ограничена при $|\sigma| \leqslant \sigma_0$, получим

$$V(x) \geqslant \varepsilon_0|x|^2 - \psi_0 \text{ при } |\sigma| \leqslant \sigma_0, \tag{2.11}$$

где $\psi_0 > 0$ — некоторая постоянная. Неравенства (2.10), (2.11) означают, что $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Рассмотрим случай $\mu_0 = \infty$. Оценка (2.7) теперь неверна, однако по любому $\sigma_0 > 0$ можно найти $\varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$\Omega_0(x) \geqslant \varepsilon_0|x|^2 \text{ при } |\sigma| \leqslant \sigma_0. \tag{2.12}$$

Действительно, из существования $\varphi'(0)$ следует, что функция $\varphi(\sigma) / \sigma$ меняется в ограниченном интервале при $|\sigma| \leqslant \sigma_0$, а тогда справедливы предыдущие рассуждения. Пусть $|x| \to \infty$. Если существует $\sigma_0 > 0$, такое, что $|\sigma| = |r^*x| \leqslant \sigma_0$, то из (2.12), как и выше, получим (2.11), т. е. $V(x) \to \infty$. В противном случае существует последовательность $t_n \to \infty$, такая, что $|\sigma(t_n)| = |r^*x(t_n)| \to \infty$. Поскольку $\Omega_0(x) \geqslant 0$, из (2.8), (11) следует, что $\overline{\lim}\, V[x(t)] = \infty$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим в евклидовом пространстве систему дифференциальных уравнений

$$dx / dt = f(x) \tag{3.1}$$

с измеримой и ограниченной в каждой конечной области, но, вообще говоря, разрывной вектор-функцией $f(x)$. Решение системы (3.1) будем понимать в смысле Филиппова [16]. Пусть среди решений системы (3.1) имеется $x \equiv 0$.

Лемма 5. Предположим, что

I) решение $x \equiv 0$ устойчиво «в малом» по Ляпунову, а также, что существует непрерывная функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям:

II) для любого обобщенного решения $x(t)$ функция $V[x(t)]$ не возрастает;

III) если $V[x(t)] \equiv \mathrm{const}$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

IV) $\overline{\lim}\, V[x(t)] = \infty$ для любого решения $x(t)$, такого, что $|x(t)| \to \infty$ *.

Тогда решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Утверждение остается справедливым, если одно из условий I, IV или оба вместе заменены соответственно на условия:

I′) $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, $V(0) = 0$,

IV′) система (3.1) не имеет решений, таких, что $|x(t)| \to \infty$ при $t \to \tau$, где $(0, \tau)$ — интервал существования решения $x(t)$.

Основное отличие данной леммы от аналогичных теорем ляпуновского типа (например, теорем Барбашина — Красовского, Ешизавы, Лефшеца — Ла-Салля [17]) заключается в отсутствии требования $V > 0$. Кроме того, на многообразии $V \equiv \mathrm{const}$ могут быть решения системы (3.1), условие $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ может быть не выполнено, функция $f(x)$ может быть разрывной.

Доказательство. Из условий II, IV следует IV′. Возьмем произвольное решение $x(t, a)$, интервал существования которого обозначим $(0, \tau)$. Согласно IV′, решение $x(t, a)$ имеет конечную ω-предельную точку x_*. По свойству II существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{t\to\tau} V[x(t, a)]$. Поскольку $x(t_n, a) \to x_*$ для некоторой последовательности $t_n \to \tau$ и функция $V(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{t\to\tau} V[x(t, a)] = V(x_*). \tag{3.2}$$

Согласно [16], существует решение $x(t, x_*)$, проходящее при $t = 0$ через точку x_* и целиком состоящее из ω-предельных точек решения $x(t, a)$. Так как вместо x_* можно взять $x(t, x_*)$, то для любого фиксированного $t > 0$ из (3.2) следует, что $V[x(t, x_*)] \equiv V(x_*)$.

По свойству III $x(t, x_*) \to 0$ при $t \to \infty$. Покажем, что $\tau = \infty$ и

$$x(t, a) \to \infty \quad \text{при } t \to \infty. \tag{3.3}$$

---

* В случае, когда $\overline{\lim}\, V(x) = \infty$ при $|x| \to \infty$, условие IV, очевидно, выполнено.

Используя условие I, по заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $|c| < \delta(\varepsilon)$ для любого решения $x(t, c)$ выполнено $|x(t, c)| < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$. Пусть $|x(t_1, x_*)| < \delta(\varepsilon) / 2$. Поскольку $x(t_1, x_*)$ является ω-предельной точкой для $x(t, a)$, существует $t_0 > 0$, такое, что $|x(t_0, a) - x(t_1, x_*)| \leqslant \delta(\varepsilon) / 2$. Тогда $|x(t_0, a)| \leqslant |x(t_1, x_*)| + |x(t_0, a) - x(t_1, x_*)| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Поэтому $|x(t, a)| \leqslant \varepsilon$ при $\tau > t \geqslant t_0$. Следовательно, $\tau = \infty$ и выполнено (3.3), т. е. решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Поскольку при доказательстве было использовано лишь свойство IV′ (которое было выведено из II, IV), то свойство IV может быть заменено на IV′. Так как из I′ и II следует I, то I можно заменить на I′. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. Повторяя доказательство теоремы 1 и воспользовавшись леммой 4, вместо леммы 2 получим, что существует функция V вида (17), такая, что в выражении (18) функции Ω_1, Ω_2 неотрицательны. При этом неравенство $\Omega_1 \geqslant 0$ по лемме 4 обеспечено условием $\pi(\omega) \geqslant 0$ [см. также «д»], а неравенство $\Omega_2 \geqslant 0$ — формулами (2.2). Таким образом, выполнено условие II леммы 5.

Покажем, что выполнено условие III. Поскольку существует $\varphi'(0)$ и $0 \leqslant \varphi'(0) \leqslant \mu_0$, достаточно показать, что матрица $Q(\mu) = P + \mu q r^*$ является гурвицевой в области (15), т. е. что характеристика $\chi(i\omega)$ при конечных ω не имеет общих точек с отрезком $(-\infty, -1 / \mu_0)$, если $\mu_0 \neq \infty$, или с отрезком $(-\infty, 0)$, если $\mu_0 = \infty$. Пусть χ вещественно и $\chi < 0$. Из неравенства $\pi(\omega) \geqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{\mu_0} + \chi \geqslant -\varepsilon\varkappa\omega^2(\chi + \alpha|\chi|^2). \tag{3.4}$$

Если выполнены (4), (5), то $\alpha = \alpha_2 \leqslant 0$, $\varepsilon = 1$, поэтому из (3.4) следует $1 / \mu_0 + \chi \geqslant 0$. Если выполнены (3), (5), то $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha_1 \geqslant \mu_0$. Тогда из (3.4) следует $(1 / \mu_0 + \chi)(1 - \varkappa\omega^2\mu_0\chi) \geqslant 0$, откуда снова $1 / \mu_0 + \chi \geqslant 0$. Теперь из предположения «е» следует сформулированное утверждение. Таким образом, выполнено условие I леммы 5.

Рассмотрим условие III. Из $\dot{V} \equiv 0$ следует $(\sigma - \varphi / \mu)\varphi \equiv 0$. Если выполнено $0 \leqslant \sigma\varphi < \mu_0\sigma^2$, то $\varphi \equiv 0$ и из (1) $x \to 0$ при $t \to \infty$. Если выполнено $0 < \sigma\varphi \leqslant \mu_0\sigma^2$, $\mu_0 \neq \infty$, то $\varphi \equiv \mu_0\sigma$, т. е. снова $x \to 0$ при $t \to \infty$, так как, по доказанному, матрица $Q(\mu_0)$ гурвицева. Пусть выполнены строгие неравенства (3) или (4) и $\varkappa \neq 0$. Тогда из $\dot{V} \equiv 0$ следует, что $\Omega_2 \equiv 0$, т. е. по формуле (2.4), что $r^*\dot{x} \equiv 0$, $\sigma \equiv \sigma_0$. Из соотношения $\varphi(\sigma_0)(\sigma_0 - \varphi(\sigma_0) / \mu_0) = 0$ следует, что либо $\varphi \equiv \varphi(\sigma_0) = 0$, либо $\varphi \equiv \mu_0\sigma_0 = \mu_0 r^* x$. В обоих случаях, как и выше, $x \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, выполнено условие III леммы 5. Повторяя конец доказательства теоремы 1, получим, что выполнено условие IV леммы 5. Применяя лемму 5, получаем утверждение теоремы 2.

4. Доказательство свойств «а», «б» кривых Γ_+, Γ_-

Предположим, что кривая Γ_+ имеет общую точку с полуосью $\xi \leqslant 0$, $\eta = 0$, т. е. что для некоторого $\omega \neq 0$ выполнены условия

$$\zeta(\omega) > 0, \qquad \xi(\omega) \leqslant 0, \qquad \eta(\omega) = 0. \tag{4.1}$$

Из выражения (13) для $\eta(\omega)$ следует, что $\chi(\omega)$ вещественно; из второй формулы (13) выводим, что

$$\frac{1}{\mu_0} + \chi = \xi\zeta \leqslant 0 \qquad (\chi \leqslant 0).$$

Пусть $\alpha \leqslant 0$, $\varepsilon = 1$ [см. (5), (7)]. Из (13) получим $\zeta = \omega^2[\chi + \alpha|\chi|^2] \leqslant 0$, что противоречит (4.1).

Пусть $\alpha \geqslant \mu_0$, $\varepsilon = -1$. Из (13) следует, что

$$\zeta = -\omega^2[\chi + \alpha|\chi|^2] \leqslant -\omega^2(\chi + \mu_0|\chi|^2) = -\omega^2\chi\mu_0\xi\zeta,$$

т. е. $1 + \omega^2\chi\mu_0\xi \leqslant 0$, что противоречит неравенствам $\chi \leqslant 0$, $\xi \leqslant 0$. Свойство «а» доказано.

Переходим к доказательству свойства «б». Для устойчивости линеаризованной системы (1), $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, для всех μ из интервала (15) необходимо и достаточно, чтобы

при $\mu_0 \neq \infty$

$$\text{если } \operatorname{Im}\chi = 0, \text{ то } 1 / \mu_0 + \operatorname{Re}\chi > 0;$$

при $\mu_0 = \infty$

$$\text{если } \operatorname{Im}\chi = 0, \text{ то } \operatorname{Re}\chi \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\chi(i\omega) \neq -1 / \mu_0$ при $\mu_0 \neq \infty$.

Пусть выполнено (4.2) и кривая Γ_- для некоторого $\omega > 0$ имеет общую точку с осью $\eta = 0$. Тогда из (13) следует, что $\operatorname{Im}\chi = 0$, и из (13) и (4.2), что

$$\xi < 0 \text{ при } \mu_0 \neq 0, \qquad \xi \leqslant 0 \text{ при } \mu_0 = \infty, \tag{4.3}$$

т. е. кривая Γ_- не имеет общих точек с полуосью (16). Предположим обратное: на кривой Γ_- из $\eta = 0$ следует (4.3). Пусть $\operatorname{Im}\chi = 0$. Если $\zeta < 0$, то $\eta = 0$, и из (4.3) получим (4.2). Если $\zeta > 0$, $\operatorname{Im}\chi = 0$, то $\eta = 0$, $\xi > 0$, т. е. снова выполнено (4.2). Если $\zeta = 0$, то возможно одно из трех:

I. $\chi = -1 / \alpha$; II. $\chi = 0$; III. $\omega = 0$.

Случай I, по предположению, невозможен, если $\mu_0 = \alpha$; если же $\mu_0 < \alpha$, то выполнено (4.2). В случае II также выполнено (4.2). Рассмотрим случай III. Если $\zeta(\omega) \equiv 0$, то кривая Γ_- отсутствует, а характеристика $\chi(i\omega)$ расположена на окружности C, откуда следует, что выполнено (4.2). Пусть $\zeta(\omega) \not\equiv 0$; так как $\zeta(\omega)$ — аналитическая функция ω и $\zeta(0) = 0$, то $\zeta(\omega) \neq 0$ при всех достаточно малых $\omega \neq 0$. Поскольку из свойства «а» и (4.3) следует, что $\zeta(\omega)\xi(\omega) \geqslant 0$ (ω — вещественно), то

$$\frac{1}{\mu_0} + \chi(0) = \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{1}{\mu_0} + \operatorname{Re}\chi(i\omega)\right] = \lim_{\omega\to 0}\xi(\omega)\zeta(\omega) \geqslant 0.$$

Равенство $1 / \mu_0 + \chi(0) = 0$ при $\mu_0 \neq \infty$ исключено по предположению, поэтому (4.2) выполнено и при $\omega = 0$. Свойство «б» доказано.

5. Доказательство теоремы 4

Вводя функцию $\varphi_1(\sigma) = \varphi(\sigma) - \sigma\delta$, преобразуем (1) к виду

$$\dot{x} = Q(\delta)x + q\varphi_1(\sigma), \qquad \sigma = r^*x. \tag{5.1}$$

Согласно пункту «а» матрицу $Q(\delta) = P + \delta qr^*$ можно без ограничения общности считать гурвицевой. Применим к (5.1) теорему 1. Пункт «г» теоремы 1 выполнен, так как выражения под знаками пределов в (10) и (11) для функций φ и φ_1 совпадают. Неравенства (2), (4) для системы (5.1) имеют, очевидно, вид $0 \leqslant \varphi_1\sigma \leqslant \mu_0 - \delta$, $\varphi_1' \geqslant -\delta$. Обозначим через χ_1, π_1 соответствующие функции для системы (5.1). Поскольку $\chi_1 = \chi(1 + \delta\chi)$, то, используя формулу (8) для функции $\pi_1(\omega)$, после простых преобразований получим *

$$\pi_1(\omega)\,|\,1 + \delta\chi\,|^2 = \pi(\omega) + \varepsilon\varkappa\delta\omega^2\,|\,\chi\,|^2 + \frac{\delta}{1 - \delta / \mu_0}\left|\frac{1}{\mu_0} + \chi\right|^2, \tag{5.2}$$

откуда при $\omega \neq \omega_j$

$$\pi_1(\omega) \geqslant \frac{\delta}{1 - \delta / \mu_0}\cdot\frac{|\,1 / \mu_0 + \chi\,|^2}{|\,1 + \delta\chi\,|^2}. \tag{5.3}$$

Переходя к пределу при $\omega \longrightarrow \omega_j$, найдем

$$\pi_1(\omega_j) \geqslant \frac{1}{\delta(1 - \delta / \mu_0)} > 0,$$

т. е. выполнено (8). Из (5.2) имеем

$$\pi_1(\infty) = \pi(\infty) + \frac{\delta}{\mu_0 - \delta} + \varkappa\delta\,|\,r^*q\,|^2.$$

Поэтому (9) выполнено, если либо $\pi(\infty) \neq 0$, либо $\mu_0 \neq \infty$, либо $\varkappa r^* q \neq 0$. Пусть $\mu_0 = \infty$, $\pi(\infty) = 0$, $\varkappa r^*q = 0$. Тогда из (5.2)

$$\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\pi_1(\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\omega^2\pi(\omega) + \delta\varkappa\,|\,r^*Pq\,|^2 + \delta\,|\,r^*q\,|^2,$$

если либо $\lim\limits_{\omega\to\infty}\omega^2\pi_1(\omega) > 0$, либо $r^*q \neq 0$, либо $\varkappa|r^*Pq| \neq 0$. В этом случае выполнено (9). Таким образом, условия теоремы 1 выполнены, если не имеет место случай, когда

$$\mu_0 = \infty, \qquad \pi(\infty) = 0, \qquad \lim_{\omega\to\infty}\omega^2\pi(\omega) = 0, \qquad \varkappa r^*q = 0, \qquad \varkappa r^*Pq = 0. \tag{5.4}$$

В этом исключительном случае применим теорему 2. Уменьшая, если нужно, число δ, получим, что $0 < \sigma^2\delta_1 \leqslant \varphi_1\sigma \leqslant (\mu_0 - \delta)\sigma^2$, т. е. выполнен пункт «б» теоремы 2. Требование «д» теоремы 2 приводит к условию «д» теоремы 4.

Таким образом, для системы (5.1) выполнены условия либо теоремы 1, либо теоремы 2, откуда следует утверждение первой части теоремы 4.

---

* Формула (5.2) справедлива и для $\alpha \neq 0$. В данном случае $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$.

Очевидно, что из (23), (24) следует (22). Покажем обратное. Представим функцию $\chi_2(\lambda)$ в виде суммы простейших дробей $\chi_2(\lambda)=\sum_j \chi_2^{(j)}(\lambda)$, где каждая из функций $\chi_2^{(j)}(\lambda)$ отвечает полюсу функции $\chi_2(\lambda)$. Поскольку имеет место предельная устойчивость, функции $\chi_2^{(j)}(\lambda)$ имеют специальный вид, указанный в теореме 1 [3]. Рассматривая поведение функции $\mathrm{Re}[1+i\omega\vartheta+\varepsilon\varkappa\omega^2)\chi(i\omega)]$ в окрестности каждого полюса функции $\chi_2(\lambda)$, легко убедиться (с использованием специального вида функций $\chi_2^{(j)}(\lambda)$), что неравенство (22) возможно лишь в случае, когда

$$\mathrm{Re}[(1+i\omega\vartheta+\varepsilon\varkappa\omega^2)\chi_2^{(j)}(i\omega)]\equiv\mathrm{const}.$$

Поэтому из (22) следует (23), (24). Теорема 4 доказана.

Поступила в редакцию
23 сентября 1963 г.

Цитированная литература

1. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. Докл. АН СССР, т. 143, № 6, 1962.
2. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний. Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 7, 1964.
3. Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. III. Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 5, 1964.
4. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1963.
5. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Тр. межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости и аналитической механике. Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1964.
6. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Докл. АН СССР, т. 149, вып. 2, 1963.
7. Попов В. М. Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 1, 1963.
8. Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. I. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 3, 1963.
9. Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р. О критическом случае в теории абсолютной устойчивости. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 6, 1963.
10. Lefschetz S. On Automatic Controls. RIAS. Technical Report, 60-9, AFOSR, TN-60-230, 1960.
11. Lefschetz S. Some Mathematical Considerations on Nonlinear Automatic Controls. Contributions to Diff. Equations, Princeton University Press, v. 1, No. 1, 1962.
12. Morozan T. Remarques sur une Note de V. Yakoubovitsch. C. R. Acad. Sci (Paris), t. 254, 4127—4129, 1962.
13. Kalman R. E. Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control. Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., v. 49, No. 2, 1963.
14. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
15. Розенвассер Е. Н. О построении функции Ляпунова для одного класса нелинейных систем. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., Механика и машиностроение, № 2, 1960.
16. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., т. 51 (93), вып. 1, 1960.
17. La Salle J., Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications. Acad. Press, N. Y., 1961.
18. Якубович В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории автоматического регулирования. Докл. АН СССР, т. 152, № 2. 1964.

THE METHOD OF MATRIX INEQUALITIES IN THE THEORY OF STABILITY OF NONLINEAR CONTROLLED SYSTEMS. II. ABSOLUTE STABILITY IN A CLASS OF NONLINEARITIES WITH DERIVATIVE CONDITION

V. A. YAKUBOVICH

There obtained, for single-nonlinearity systems, a new frequency condition of absolute stability improving, for a number of cases, the V. M. Popov condition and covering, for a class of nonlinearities under consideration, all the conditions which may be derived by means of the Lyapunov function of the kind: «quadratic form of coordinates and nonlinearity plus nonlinearity integral». The proof is based on the solution of special matrix inequalities [1].
