М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина, Сингулярные возмущения в задачах управления, *Автомат. и телемех.*, 2006, выпуск 1, 3–51

Автоматика и телемеханика, № 1, 2006

Обзоры

PACS 02.30.Yy

© 2006 г. **М. Г. ДМИТРИЕВ, д-р физ.-мат. наук**
(Российский государственный социальный университет),
Г. А. КУРИНА, д-р физ.-мат. наук
(Воронежская государственная лесотехническая академия)

СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Кратко описаны основные результаты, полученные при исследовании сингулярно возмущенных задач управления, с использованием публикаций с 1982 г.

1. Введение

Исследование влияния возмущений на решение задач оптимального управления имеет не только теоретическое, но и большое практическое значение. Особый интерес представляют сингулярные возмущения. Такие возмущения связаны как с постановкой задач (малые постоянные времени, моменты инерции, массы, большие коэффициенты усиления и т.п.), так и с методами исследования задач управления (параметры штрафа, регуляризации, аппроксимации импульсов и др.).

Практически в любой математической модели управления динамическими объектами необходимо анализировать контур с так называемой "паразитной" динамикой. Зачастую физические управления находятся в этом контуре, и пренебрежение этой динамикой приводит к упрощенным моделям, где управлениями уже являются быстрые фазовые переменные. Учет контура с быстрыми переменными состояния помимо обоснования идеализации модели дает дополнительные возможности для повышения точности решения и организации новых алгоритмов управления.

Из условий оптимальности управления для сингулярно возмущенных задач появляются "жесткие" краевые задачи. Поэтому при численном решении возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В связи с этим возрастает роль асимптотических методов, тем более что при их применении зачастую происходит значительное упрощение исходной математической модели (пренебрежение нелинейностями, декомпозиция исходной задачи на задачи меньшей размерности и др.).

Сингулярно возмущенным задачам управления посвящены обзоры [184, 200, 205, 15, 220, 181, 94], см. также [182, 183, 22, 51, 68, 62, 164, 206, 207, 137, 223–225]. Последним обзором, охватывающим многочисленные направления использования теории

[1] Работа первого автора поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований: 04-01-00536а, 05-06-80237а, работа второго автора поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих школ РФ № НШ-1 643.2003.1.

сингулярных возмущений в задачах управления, является обзор [15], опубликованный в 1982 г. С этого времени появились новые идеи и результаты. Обзор этой активности можно получить по материалам ряда международных конференций (см., например, [151, 226–228]), которые полностью или в виде секций были посвящены сингулярно возмущенным задачам управления и применению техники асимптотического анализа к системам управления. Отметим недавно опубликованный обзор [207] работ за 1984–2001 г.г., список литературы в котором содержит 467 наименований. В этом обзоре перечислено очень много работ, посвященных использованию теории сингулярных возмущений в различных приложениях. Основное внимание в [207] уделено систематизации публикаций, что не всегда проясняет суть идей и подходов. Также отсутствуют практически конкретные постановки задач по тематике обзора и неполно отражены результаты, полученные в эти годы советскими и российскими авторами. Однако это не снижает большой ценности проделанной автором работы. Часть статьи [207] представляет собой переработанный вариант обзора [208].

В библиографическом указателе [102] отражены публикации за 1982–2002 г.г. В алфавитный указатель включено 514 работ (242 – в русском алфавите, 272 – в латинском алфавите). Именной указатель содержит список авторов работ в алфавитном порядке (110 – в русском алфавите, 253 – в латинском алфавите). Тематический указатель состоит из 41 раздела. Почти для всех работ имеются ссылки на реферат из реферативного журнала "Математика".

В настоящем обзоре на основании публикаций с 1982 г. кратко описаны важнейшие результаты, полученные при исследовании сингулярно возмущенных задач управления. Поскольку рассматривается большой промежуток времени, а объем обзора ограничен, то он ни в коей мере не претендует на полноту и в значительной степени отражает научные интересы авторов. Мы приносим свои извинения всем авторам, чьи работы, посвященные исследованию рассматриваемого направления, не указаны в обзоре.

Всюду в этой статье $\varepsilon > 0$ – малый параметр, штрих обозначает транспонирование и, если не оговорено противное, то $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$.

2. Асимптотика решения сингулярно возмущенных краевых задач

Так как условия оптимальности управления приводят в общем случае к исследованию краевых задач, то изучение сингулярно возмущенных задач оптимального управления часто основывается на методах построения асимптотики решения сингулярно возмущенных краевых задач, которым посвящена обширная литература (см., например, [14] и [56]).

В монографии [14] рассматривается один из эффективных асимптотических методов в теории сингулярных возмущений – метод пограничных функций Васильевой – Вишика – Люстерника. Приведем один результат, касающийся асимптотического решения тихоновской системы

$$\begin{aligned} &dx/dt = f(x, y, t), \\ &\varepsilon dy/dt = g(x, y, t) \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x^0, \quad y_1(0) = y_1^0, \quad y_2(T) = y_2^{\mathrm{T}},$$

где $y = y(t) = (y_1', y_2')'$, $y_1 \in \mathbb{R}^k$, $y_2 \in \mathbb{R}^{m-k}$. При некоторых предположениях в условно устойчивом случае, т.е. в случае, когда собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы

$$\overline{g}_y(t) = g_y(\overline{x}(t), \overline{y}(t), t),$$

где $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$ – решение вырожденной (при $\varepsilon = 0$) системы с условием $\overline{x}(0) = x^0$, удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t) < 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad \operatorname{Re}\lambda_i(t) > 0, \quad i = \overline{k+1,m},$$

можно построить асимптотическое разложение решения в виде суммы трех рядов по неотрицательным степеням ε: регулярного с коэффициентами, зависящими от t, погранслойного в окрестности $t = 0$ с коэффициентами, зависящими от $\tau_0 = t/\varepsilon$, и погранслойного в окрестности $t = T$ с коэффициентами, зависящими от $\tau_1 = (t-T)/\varepsilon$.

В большинстве работ, посвященных построению асимптотики экстремалей Понтрягина, используется именно эта техника метода пограничных функций (см., например, [16, 50]).

В [56] изучаются решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, зависящих от малого параметра. Асимптотическое разложение решения имеет, вообще говоря, различную структуру в разных областях (например, в области пограничного слоя, в окрестности разрыва предельного решения и т.п.). Тогда необходимо согласование (сращивание) асимптотических разложений. Методам согласования и посвящена большая часть монографии [56] (см. также [57]).

В последнее время внимание многих исследователей в различных областях естествознания привлекают явления возникновения контрастных структур, характеризующихся сочетанием участков плавного и резкого изменения переменной. Обзор результатов по асимптотической теории контрастных структур типа ступеньки и всплеска (в литературе используется также и другая терминология – внутренние слои) в нелинейных сингулярно возмущенных задачах приведен в [13]. Основное внимание уделяется алгоритмам построения асимптотических разложений контрастных структур для различных классов как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными. Для большинства рассмотренных задач приведены результаты о существовании контрастных структур и точности построенной асимптотики.

В [229] рассматривается метод декомпозиции сингулярно возмущенных дифференциальных систем, основанный на методе интегральных многообразий [122] и сочетающий в себе приемы асимптотических и качественных методов анализа. Сущность метода состоит в выделении класса медленных движений изучаемой системы и последующем разделении быстрых и медленных движений. Опишем этот метод для тихоновской системы. При некоторых предположениях (в частности, алгебраическое уравнение $0 = g(x(t), y(t), t, 0)$ должно иметь изолированный корень $y_0(t) = h_0(x(t), t)$) существует интегральное многообразие системы, определяемое равенством

$$y(t) = h(x(t), t, \varepsilon).$$

Тогда $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dx/dt = f(x, h, t, \varepsilon).$$

Предположив, что функция $h(x, t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема, из быстрого дифференциального уравнения получаем уравнение для функции $h = h(x(t), t, \varepsilon)$

$$\varepsilon\frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}f(x, h, t, \varepsilon) = g(x, h, t, \varepsilon).$$

Если функции f и g бесконечно дифференцируемы, тогда h может быть представлено в виде

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \varepsilon^2 h_2(x, t) + \ldots.$$

Функции h_i, $i \geqslant 0$ могут быть найдены из уравнения для функции h, используя только алгебраические операции.

Системы дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными и правыми частями, разрывными на некоторой поверхности, могут описывать функционирование многих технических объектов, а также возникать, как правило, при решении задач оптимизации с ограничениями на управление. Асимптотика решения краевых задач для таких систем построена в [108].

В [128] производится разделение движений в разнотемповых разрывных системах управления с запаздыванием и предлагается алгоритм построения асимптотических разложений медленных периодических решений при помощи метода пограничных функций.

3. Прямая схема построения асимптотики решения задач оптимального управления

В подавляющем большинстве работ асимптотический анализ решений задач оптимального управления в классической постановке производится на основе асимптотики решений краевых задач, вытекающих из условий оптимальности управления (см., например, [15, 220, 39, 206, 94]).

Второй путь построения асимптотики решения задач с малым параметром, называемый прямой схемой и заключающийся в непосредственной подстановке в условия задачи постулируемого асимптотического разложения решения и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики, применяется в [4, 134, 5] в случае отсутствия ограничений на управление для задачи минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = G(x(T), y(T)) + \int\limits_0^T F(x, y, u, t)dt$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, y, u, t), \quad x(0) = x^0, \\ \varepsilon dy/dt &= g(x, y, u, t), \quad y(0) = y^0. \end{aligned}$$

В указанных работах было построено асимптотическое разложение решения погранслойного типа с произвольной точностью, получены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному по управлению, траектории, функционалу, а также установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании нового приближения асимптотического разложения оптимального управления. Отметим, что только с помощью прямой схемы удается установить последний факт.

Опишем кратко алгоритм прямой схемы. Следуя методу пограничных функций Васильевой А.Б. (см., например, [14]), решение рассматриваемой задачи ищется в виде

$$z = \overline{z}(t, \varepsilon) + \Pi z(\tau_0, \varepsilon) + Qz(\tau_1, \varepsilon), \quad z = (x', y', u')',$$

где $\overline{z}(t, \varepsilon) = \overline{z}_0(t) + \varepsilon\overline{z}_1(t) + \ldots$ – регулярный ряд с коэффициентами, зависящими от t, $\Pi z(\tau_0, \varepsilon) = \Pi_0 z(\tau_0) + \varepsilon\Pi_1 z(\tau_0) + \ldots$ – левый пограничный ряд с коэффициентами, зависящими от $\tau_0 = t/\varepsilon$, $Qz(\tau_1, \varepsilon) = Q_0 z(\tau_1) + \varepsilon Q_1 z(\tau_1) + \ldots$ – правый пограничный ряд с коэффициентами, зависящими от $\tau_1 = (t - T)/\varepsilon$, $\Pi_k z(\tau_0) \to 0$ при $\tau_0 \to +\infty$, $Q_k z(\tau_1) \to 0$ при $\tau_1 \to -\infty$.

Подставляя постулируемое асимптотическое разложение решения в уравнения состояния и начальные условия, затем проводя обычные преобразования метода пограничных функций – разлагая в степенные ряды по степеням ε правые части дифференциальных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t, τ_0, τ_1, получаем соотношения для членов регулярного и пограничных рядов. Далее, подставляем разложение решения в критерий качества и разлагаем его в ряд по степеням ε, используя при этом условия оптимальности управления для задач, из которых находятся члены асимптотического разложения решения. Основная идея прямой схемы состоит в следующем: группируя коэффициенты при одинаковых степенях ε в критерии качества, ищем каждое приближение как решение некоторых вариационных задач более простой структуры – задач поэтапной минимизации.

После преобразований коэффициентов разложения критерия оказывается, что каждый коэффициент является либо функцией неизвестных членов регулярного ряда, либо неизвестных пограничных функций одного приближения.

В качестве примера приведем задачи для нахождения членов асимптотического разложения решения нулевого порядка. Нулевой член регулярного ряда определяется как решение следующей вырожденной задачи:

$$\begin{aligned}
&P_0 : \overline{J}_0 = G(\overline{x}_0(T), y_0^T) + \int\limits_0^T F(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{u}_0, t)dt \to \min,\\
&d\overline{x}_0/dt = f(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{u}_0, t), \quad \overline{x}_0(0) = x^0,\\
&0 = g(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{u}_0, t), \quad y_0^T = \arg\min_y G(\overline{x}_0(T), y).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание преобразованное с учетом условий оптимальности управления в задаче P_0 выражение для коэффициента при ε в разложении критерия качества по степеням ε, естественно определить задачи $\Pi_0 P$ и $Q_0 P$ для нахождения $\Pi_0 z(\tau_0)$ и $Q_0 z(\tau_1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Pi_0 P : \Pi_0 J = -\int\limits_0^\infty (H(\tau_0) - \overline{H}(0))d\tau_0 \to \min,\\
&d\Pi_0 y/d\tau_0 = g(x^0, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y, \overline{u}_0(0) + \Pi_0 u, 0),\\
&\Pi_0 y(0) = y^0 - \overline{y}_0(0),\\
&Q_0 P : Q_0 J = -\int\limits_0^\infty (H(\tau_1) - \overline{H}(T))d\tau_1 \to \min,\\
&dQ_0 y/d\tau_1 = g(\overline{x}_0(T), \overline{y}_0(T) + Q_0 y, \overline{u}_0(T) + Q_0 u, T),\\
&Q_0 y(0) = y_0^T - \overline{y}_0(T),
\end{aligned}$$

где $H(z,p,q,t)$ – гамильтониан для исходной возмущенной задачи, $H(\tau_0) = H(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau_0), \overline{p}_0(0), \overline{q}_0(0), 0)$, $H(\tau_1) = H(\overline{z}_0(T) + Q_0 z(\tau_1)$, $\overline{p}_0(T)$, $\overline{q}_0(T), T)$, $\overline{p}_0(t)$, $\overline{q}_0(t)$ – сопряженные переменные, а $\overline{H}(t)$ – гамильтониан для задачи P_0.

Установлены условия [5], при которых для достаточно малых ε в некоторой окрестности решения вырожденной задачи существует единственное решение исходной возмущенной задачи $z^*(t,\varepsilon)$, задачи декомпозиции n-го приближения однозначно разрешимы и справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
&\|\Pi_n z(\tau_0)\| \leqslant ce^{-\alpha\tau_0}, \quad \|Q_n z(\tau_1)\| \leqslant ce^{-\alpha\tau_1}, \quad c>0, \quad \alpha>0;\\
&\|x^*(t,\varepsilon)-\widetilde{x}_n(t,\varepsilon)\|_C \leqslant c\varepsilon^{n+1}, \|y^*(t,\varepsilon)-\widetilde{y}_n(t,\varepsilon)\|_C \leqslant c\varepsilon^{n+1},\\
&\|u^*(t,\varepsilon)-\widetilde{u}_n(t,\varepsilon)\|_{L_2} \leqslant c\varepsilon^{n+1},\\
&J_\varepsilon(\widetilde{u}_n)-J_\varepsilon(u^*) \leqslant c\varepsilon^{2(n+1)},\\
&J_\varepsilon(\widetilde{u}_n) \leqslant J_\varepsilon(\widetilde{u}_{n-1}+\varepsilon^n\overline{u}_n) \leqslant J_\varepsilon(\widetilde{u}_{n-1}) \leqslant J_\varepsilon(\widetilde{u}_0) \leqslant J_\varepsilon(\overline{u}_0),
\end{aligned}
$$

где $\widetilde{u}_n = \widetilde{u}_n(t,\varepsilon)$ определяется равенством

$$
\widetilde{u}_n(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i(\overline{u}_i(t) + \Pi_i u(t/\varepsilon) + Q_i u((t-T)/\varepsilon)),
$$

а $\widetilde{x}_n(t,\varepsilon)$, $\widetilde{y}_n(t,\varepsilon)$ – траектории возмущенной задачи, соответствующие управлению $\widetilde{u}_n(t,\varepsilon)$.

Для дискретной нелинейной задачи с малым шагом вида

$$
\begin{aligned}
&J_\varepsilon(u) = G(x(T)) + \varepsilon\sum_{k=0}^{N-1} F(x(k\varepsilon), u(k\varepsilon), k\varepsilon) \to \min,\\
&x(t+\varepsilon) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0,
\end{aligned}
$$

где $t \in T_\varepsilon = \{t : t = k\varepsilon,\, k = \overline{0, N-1}\}$, $T = N\varepsilon$, асимптотика решения погранслойного типа при помощи прямой схемы построена в [19, 40].

В [20] на основе применения прямой схемы строится асимптотика решения линейно-квадратичной дискретной задачи с малым шагом ε при линейном терминальном ограничении типа неравенства. Используя полученную асимптотику, конструируется допустимое управление, являющееся ε-субоптимальным управлением (определение см. в [15]) порядка $2n+2$, где n – порядок асимптотики.

Для задачи управления непрерывными нелинейными слабоуправляемыми системами (при нулевом значении параметра система становится неуправляемой) вида

$$
\begin{aligned}
&J_\varepsilon(u) = \int_0^T (F(x,t) + \varepsilon^q G(x,u,t))dt \to \min,\\
&dx/dt = f(x,t) + \varepsilon g(x,u,t), \quad x(0) = x^0
\end{aligned}
$$

асимптотика решения по целым неотрицательным степеням ε построена при помощи прямой схемы в [98] для $q=1$ и в [99] для $q>1$.

Асимптотика решения дискретного аналога последней задачи

$$
\begin{aligned}
&J_\varepsilon(u) = \sum_{k=0}^{N} F(x(k),k) + \varepsilon\sum_{k=0}^{N-1} G(x(k),u(k),k) \to \min,\\
&x(k+1) = f(x(k),k) + \varepsilon g(x(k),u(k),k), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad x(0) = x^0
\end{aligned}
$$

построена по прямой схеме в [101].

Для большинства задач, асимптотика решений которых строилась при помощи прямой схемы, доказаны оценки близости построенного приближенного решения к точному по управлению, траектории и функционалу, установлено невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании нового приближения асимптотического разложения оптимального управления. Более подробный обзор работ, посвященных использованию прямой схемы в задачах управления, см. в [47].

Идея прямого разложения условий сингулярно возмущенной вариационной задачи в ряд по степеням малого параметра и последующем решении получающихся при этом вариационных задач меньшей размерности, использованная в выше указанных работах для поиска аппроксимации программного управления, в [115] применяется для построения приближенного синтеза в линейно-квадратичной задаче оптимального управления, где поведение объекта описывается сингулярно возмущенным параболическим уравнением. Аппроксимация синтеза получается с помощью разложения методом угловых пограничных функций В.Ф. Бутузова решения соответствующего интегро-дифференциального уравнения Риккати, причем члены этого разложения имеют вариационный смысл.

4. Оптимальное управление с обратной связью

Метод асимптотического решения задачи синтеза периодического оптимального управления сингулярно возмущенной линейной периодической системой при интегральном квадратичном критерии качества предлагается в [54]. При этом для решения периодической задачи для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати

$$dK/dt = -KA(t,\varepsilon) - A'(t,\varepsilon)K + KS(t,\varepsilon)K - W(t,\varepsilon),$$

где

$$K = \begin{pmatrix} K_1(t,\varepsilon) & \varepsilon K_2(t,\varepsilon) \\ \varepsilon K_2'(t,\varepsilon) & \varepsilon K_3(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1(t,\varepsilon) & A_2(t,\varepsilon) \\ A_3(t,\varepsilon)/\varepsilon & A_4(t,\varepsilon)/\varepsilon \end{pmatrix},$$
$$S(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} S_1(t,\varepsilon) & S_2(t,\varepsilon)/\varepsilon \\ S_2'(t,\varepsilon)/\varepsilon & S_3(t,\varepsilon)/\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

указывается конструктивный способ вычисления матрицы

$$F(\varepsilon) = K(0,\varepsilon) = K(1,\varepsilon).$$

В [154] рассматривается сингулярно возмущенная система, линейная по управлению, нелинейная по быстрой и медленной переменным состояния,

$$dx/dt = f(x,y) + B_1(x,y)u, \quad x(0) = x^0,$$
$$\varepsilon dy/dt = g(x,y) + B_2(x,y)u, \quad y(0) = y^0$$

с квадратичным по управлению критерием качества на бесконечном интервале

$$J(u) = \int\limits_0^\infty (w'(x,y)w(x,y) + u'R(x,y)u)dt$$

в критическом случае, т.е. не требуется разрешимость относительно y алгебраического уравнения

$$g(x,y) + B_2(x,y)u = 0.$$

Построены асимптотические разложения оптимального управления в форме нелинейной обратной связи и оптимальной траектории. Этой же задаче посвящена статья [156].

При асимптотическом анализе различных сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления часто используются асимптотические разложения решений операторных уравнений типа Риккати.

Так, например, статья [28] посвящена асимптотике решения задачи Коши для матричного дифференциального уравнения Риккати с двумя малыми параметрами. В основе метода из [121] асимптотического решения задачи синтеза оптимального управления в сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче лежит построение медленных интегральных многообразий для сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати, при этом построены матричные коэффициенты усиления, не содержащие быстро меняющихся членов типа погранслоя и тем не менее дающие решение с любой точностью.

В [230] приводится разложение алгебраического уравнения Риккати на два уравнения меньшей размерности, отвечающие "быстрому" и "медленному" времени в соответствующей сингулярно возмущенной системе управления.

Асимптотика решения уравнения вида

$$(A' + \varepsilon B')dK/dt = -K'C(t) - C'(t)K + K'S(t)K - W(t)$$

с условием

$$(A' + \varepsilon B')K(T) = F(\varepsilon),$$

где оператор A вырожден, а $A + \varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, построена в [91] в случае, когда $(A' + \varepsilon B')^{-1}F(\varepsilon)$ разлагается в ряд по неотрицательным степеням ε, и в [92] в общем случае. Наряду с функциями от t асимптотические разложения содержат функции погранслоя $V_j(\tau)$, удовлетворяющие оценке $\|V_j(\tau)\| \leqslant c\exp(\alpha\tau)$, где c, $\alpha > 0$, $\tau = (t-T)/\varepsilon^p$, а p определяется свойствами A и B.

При решении задачи минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T (x'(t)D_1(t)x(t) + 2x'(t)D_2(t)y(t) + y'(t)D_3(t)y(t) + u'(t)R(t)u(t))dt$$

на траекториях системы с малым запаздыванием в переменных состояния

$$\begin{aligned}
&dx/dt = A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t) + H_1(t)x(t-\varepsilon h) + H_2(t)y(t-\varepsilon h) + B_1(t)u(t),\\
&\varepsilon dy/dt = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t) + H_3(t)x(t-\varepsilon h) + H_4(t)y(t-\varepsilon h) + B_2(t)u(t),\\
&x(\tau) = x^0(\tau), \quad y(\tau) = y^0(\tau), \quad -\varepsilon h \leqslant \tau \leqslant 0
\end{aligned}$$

возникает система функционально-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&dP(t)/dt = -P(t)A(t,\varepsilon) - A'(t,\varepsilon)P(t) + P(t)S(t,\varepsilon)P(t) -\\
&- Q(t,0) - Q'(t,0) - D(t),\\
&(\partial/\partial t - \partial/\partial\tau)Q(t,\tau) = -(A(t,\varepsilon) - S(t,\varepsilon)P(t))'Q(t,\tau) - K(t,0,\tau),\\
&(\partial/\partial t - \partial/\partial\tau - \partial/\partial\rho)K(t,\tau,\rho) = Q'(t,\tau)S(t,\varepsilon)Q(t,\rho),
\end{aligned}$$

решения которых должны удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned}
&P(T) = 0, Q(T,\tau) = 0, \quad K(T,\tau,\rho) = 0, \quad P(t)H(t,\varepsilon) = Q(t,-\varepsilon h),\\
&H'(t,\varepsilon)Q(t,\tau) = K(t,-\varepsilon h,\tau),\\
&0 \leqslant t \leqslant T, \quad -\varepsilon h \leqslant \tau, \quad \rho \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ D_2'(t) & D_3(t) \end{pmatrix}, \quad A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\varepsilon & A_4(t)/\varepsilon \end{pmatrix},$$
$$H(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_3(t)/\varepsilon & H_4(t)/\varepsilon \end{pmatrix}, \quad S(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t)/\varepsilon \end{pmatrix} R^{-1}(t) \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t)/\varepsilon \end{pmatrix}'.$$

В [167] последняя система записывается в виде системы с малым параметром ε при части производной, для которой строится асимптотическое разложение решения нулевого порядка.

В [166] изучается сингулярно возмущенная линейно-квадратичная задача оптимального управления в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Построено асимптотическое разложение решения соответствующего операторного уравнения Риккати. Полученные результаты иллюстрируются на примере задачи управления интегро-дифференциальным уравнением второго порядка.

5. Задачи с “дешевым” управлением

Задачами с “дешевым” управлением в литературе называются задачи оптимального управления, близкие к вырожденным в смысле принципа максимума Понтрягина. Эти задачи связаны с задачами с большим коэффициентом усиления и их можно считать регуляризованными по А.Н. Тихонову по отношению к некорректно поставленным вырожденным задачам.

В [221] показывается, что замкнутая линейная система управления с большим коэффициентом усиления в цепи обратной связи по вектору наблюдения состояния может быть преобразована к линейной сингулярно возмущенной системе, анализ которой позволяет сделать вывод о характере полюсов замкнутой системы. Затем рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (y'y + \varepsilon^2 u' R(t) u)dt \to \min,$$
$$dx/dt = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x^0, \quad y = Cx$$

с управлением

$$u = -R^{-1}B'Ky/\varepsilon^2,$$

где K – решение соответствующего матричного уравнения Риккати. Строится асимптотика решения уравнения Риккати, а затем асимптотика оптимального управления. Потом эта же задача для постоянных коэффициентов рассматривается на полуоси и изучается асимптотика передаточной функции замкнутой системы. Результаты [221] развиты в [222].

Асимптотическая декомпозиция на задачи, отвечающие быстрому и медленному движениям, осуществляется в [218] для линейно-квадратичной задачи оптимального управления на полуоси с постоянными коэффициентами и с малым параметром при управлении в критерии качества. Изучается асимптотика оптимального значения критерия качества, собственных значений системы, замкнутой оптимальным регулятором, траекторий и оптимальных управлений при $\varepsilon \to 0$.

Для построения асимптотики решения задачи с “дешевым” управлением, заключающейся в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x'W(t)x + \varepsilon^2 u'R(t)u)dt$$

на траекториях системы

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u, x(0) = x^0$$

в [6] применялась прямая схема. Перед ее применением задача преобразуется путем введения новых переменных, количество которых определяется числом L таким, что

$$B_j'(t)W(t)B_j(t) = 0, \quad j = \overline{0, L-2}, \quad B_{L-1}'(t)W(t)B_{L-1}(t) > 0,$$

где

$$B_j(t) = A(t)B_{j-1}(t) - dB_{j-1}(t)/dt, \quad j \geqslant 1, \quad B_0(t) = B(t).$$

В преобразованной задаче в качестве малого параметра выступает $\sqrt[L]{\varepsilon}$.

В [147] рассматривается линейно-квадратичная задача с ранжированными “дешевыми” управлениями

$$J_\varepsilon(u) = \int\limits_0^\infty \left(x'Qx + \sum_{j=1}^r \varepsilon_j^2 u_j' u_j\right) dt \to \min,$$

$$dx/dt = Ax + \sum_{j=1}^r B_j u_j, \quad x(0) = x^0.$$

Здесь $\varepsilon_j(\varepsilon) > 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varepsilon_{j+1}(\varepsilon)}{\varepsilon_j(\varepsilon)} = 0$, $\varepsilon_0(\varepsilon) = 1$. С помощью асимптотики решения соответствующего алгебраического уравнения Риккати устанавливается асимптотика оптимального синтеза и оптимальных траекторий.

В [41–43, 144] исследованы асимптотики контрастных структур (траекторий с внутренними слоями) в экстремальных траекториях простейших вариационных задач, близких к вырожденным. В [42], например, приведен алгоритм построения при помощи прямой схемы асимптотики решения следующей нелинейной задачи:

$$J_\varepsilon(u) = \int\limits_0^T \left(a(x,t) + b'(x,t)u + \frac{1}{2}\varepsilon^2 u'u\right) dt \to \inf,$$

$$dx/dt = u, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 0.$$

Утверждается, что структуры типа “всплеска” связаны с точками локального максимума, а структуры типа “ступеньки” – с точками глобального максимума по x функции

$$P(x,t) = -a(x,t) + \varphi_t(x,t),$$

где $\varphi(x,t)$ удовлетворяет системе $\varphi_x(x,t) = b(x,t)$.

В [43] прямая схема применения метода пограничных функций проиллюстрирована на примере построения асимптотики траектории с внутренним переходным слоем (контрастной структурой типа ступеньки) для скалярного варианта приведенной выше вариационной задачи с закрепленными концами.

В [193] изучается асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ минимального значения функционала и оптимального синтеза $u^*(x,\varepsilon)$, стабилизирующего замкнутую систему, для задачи

$$\int\limits_0^\infty \left(y^2 + \varepsilon^2 u^2\right) dt \to \min,$$

$$dx/dt = f_1(x) + f_2(x)u, \quad x(0) = x^0, \quad y = c'x, \quad u = u(t) \in \mathbb{R},$$

при предположениях аналитичности f_1, f_2 и условиях управляемости, наблюдаемости в системе первого приближения. При этом строятся аппроксимации коэффициентов разложения в ряд по ε решения уравнения Гамильтона – Якоби.

Разделение переменных на быстрые и медленные для частного случая нелинейной задачи оптимального управления с "дешевым" управлением производится в [217].

На примере периодической задачи оптимального управления

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2T}\int\limits_0^T \left(x_1^2 + \frac{x_2^4}{2} - x_2^2 + \varepsilon^2 u^2\right) dt \to \min,$$

$$dx_1/dt = x_2, \quad dx_2/dt = u,$$

$$x_1(0) = x_1(T), \quad x_2(0) = x_2(T),$$

где период T не известен, а $\varepsilon \to 0$, в [141] показывается, что из-за невыпуклости функционала появляются высокочастотные колебания, аппроксимирующие скользящий режим. С помощью техники сингулярных возмущений, где параметр сингулярных возмущений есть дробная степень ε, строятся асимптотические приближения к скользящему режиму.

6. Задачи H_∞-управления

За последние двадцать лет теория H_∞-оптимизации стала одной из наиболее интересных областей теории оптимального управления, теориии фильтрации и их приложений. Главное преимущество H_∞-оптимизации обусловлено тем, что полученные таким образом регуляторы и фильтры являются устойчивыми (робастными) относительно возмущений.

Задачи H_∞-управления системами, содержащими медленные и быстрые движения, изучались, например, в [179, 152, 150]. Таким задачам посвящена глава в монографии [162].

В [211, 212] исследуется задача H_∞-оптимального управления сингулярно возмущенной линейной системой с переменными коэффициентами на конечном и бесконечном интервалах путем использования теории линейно-квадратичных дифференциальных игр. При этом вводятся быстрые и медленные подсистемы и соответствующие им дифференциальные игры. На основе медленной и быстрой задач строится составной регулятор для исходной возмущенной задачи.

Следуя [162] (там же даны соответствующие ссылки), приведем постановку сингулярно возмущенной задачи H_∞-оптимального управления. Состояние системы задается уравнениями

$$dx/dt = A_1x + A_2y + B_1u + D_1w,$$

$$\varepsilon dy/dt = A_3x + A_4y + B_2u + D_2w,$$

где $w = w(t) \in \mathbb{R}^p$ – возмущение. Минимизируемый критерий качества имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (x'(t)Wx(t) + u'(t)Ru(t))dt, \quad W = W' \geqslant 0, \quad R = R' > 0.$$

Задача H_∞-оптимального управления имеет решение, выражаемое через положительно полуопределенное стабилизирующее решение H_∞-алгебраического уравнения Риккати

$$A'P + PA - P\left(S - \frac{1}{\gamma^2}Z\right)P + W = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}A_3 & \frac{1}{\varepsilon}A_4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} S_1 & \frac{1}{\varepsilon}S_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}S_2' & \frac{1}{\varepsilon^2}S_3 \end{pmatrix} \geqslant 0$, $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & \frac{1}{\varepsilon}Z_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}Z_2' & \frac{1}{\varepsilon^2}Z_3 \end{pmatrix} \geqslant 0$, $S_1 = B_1R^{-1}B_1'$, $S_2 = B_1R^{-1}B_2'$, $S_3 = B_2R^{-1}B_2'$, $Z_1 = D_1D_1'$, $Z_2 = D_1D_2'$, $Z_3 = D_2D_2'$, а γ – действительный положительный параметр, представляющий оптимальный уровень затухания возмущений в следующем смысле:

$$\inf_{u(t)}\sup_{w(t)}\left(\frac{\sqrt{J}}{\|w(t)\|}\right) < \gamma.$$

Оптимальный регулятор, гарантирующий уровень оптимальности γ, имеет вид

$$u_{opt}(t) = -R^{-1}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\varepsilon \end{pmatrix}Px(t).$$

В [162] из гамильтоновой формы H_∞-алгебраического уравнения Риккати путем линейной замены переменных получаются независимые уравнения для медленного и быстрого движений.

H_∞-управление для сингулярно возмущенной системы, которая нелинейна по медленной переменной, изучалось в [153, 213]. В [153] построен регулятор высокого порядка точности в виде разложения по степеням малого параметра. В [155] рассматривается сингулярно возмущенная система, которая линейна по управлению и нелинейна по обеим, медленной и быстрой, переменным состояния. В [234] утверждается, что любой не зависящий от малого параметра H_∞-регулятор линеаризованной сингулярно возмущенной системы является локальным H_∞-регулятором для нелинейной задачи.

Отметим также [238, 232, 157], где рассматривались задачи H_∞-управления в критическом случае.

Статья [172] посвящена H_∞-управлению на бесконечном промежутке линейной сингулярно возмущенной системой с постоянными коэффициентами и малым запаздыванием в состоянии вида

$$\begin{aligned}
&dx/dt = A_1x(t) + A_2y(t) + H_1x(t-\varepsilon h) + H_2y(t-\varepsilon h) + B_1u(t) + F_1\omega(t),\\
&\varepsilon dy/dt = A_3x(t) + A_4y(t) + H_3x(t-\varepsilon h) + H_4y(t-\varepsilon h) + B_2u(t) + F_2\omega(t),\\
&v(t) = \operatorname{col}\{C_1x(t) + C_2y(t), u(t)\}, \quad t > 0,\\
&x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad t \leqslant 0,
\end{aligned}$$

где $\omega \in L_2(0,\infty)$ – возмущение. Для заданной постоянной $\gamma > 0$ рассматривается функционал

$$J(u,\omega) = \|v\|_{L_2}^2 - \gamma^2 \|\omega\|_{L_2}^2 .$$

Ищется регулятор $u^*(x,y)$, который стабилизирует заданную систему и обеспечивает неравенство $J(u^*,\omega) \leqslant 0$ для всех $\omega \in L_2(0,\infty)$. Построено асимптотическое разложение решения связанной с этой задачей системы, состоящей из алгебраического уравнения типа Риккати, обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения с частными производными, решение которой определяет искомый регулятор. Основываясь на этом разложении, выведены условия существования решения исходной задачи. Получен упрощенный регулятор, пригодный для рассматриваемой возмущенной задачи при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$.

7. Сингулярные возмущения дескрипторных систем

При пренебрежении малым параметром в задачах управления может появиться система с необратимым оператором при производной. Такие системы интенсивно изучаются в течение последних тридцати лет и носят название дескрипторных, неявных, дифференциально-алгебраических, алгебро-дифференциальных, сингулярных и т.п. Задачам управления дескрипторными системами посвящены обзоры [195, 94], монографии [203, 129], библиографический указатель [18]. В большинстве работ исследуется управляемость (см., например, [130]).

Разрешимость линейно-квадратичных задач оптимального управления дескрипторными системами с переменными коэффициентами без ограничений на управление доказана при наиболее общих условиях в [191] (дискретный аналог изложен в [190]). Случай ограничений на управление типа замкнутых неравенств см., например, в [83].

К уравнениям с необратимым оператором при старшей производной приводят также задачи с вырожденным при нулевом значении параметра условием Лежандра. Вариационные задачи с вырожденным условием Лежандра изучались в [3, 55, 129].

Для линейно-квадратичных задач получено оптимальное управление в форме обратной связи и формула для минимального значения функционала как в случае вырожденного [100] условия Лежандра, так и в случае невырожденного ([188] – непрерывные задачи для дескрипторных систем, [189] – дискретный аналог).

Имеется цикл работ, посвященных построению асимптотики решения задач оптимального управления на фиксированном промежутке $[0,T]$ и приводящих к уравнениям с оператором при производной вида $A+\varepsilon B$, где A вырожден и B – жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину p.

О работах, основанных на построении асимптотики решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условий оптимальности управления, написано в обзоре [94].

Применение прямой схемы для таких задач изучалось в [105, 48] (линейно-квадратичные задачи с закрепленным левым концом и свободным правым), [192, 106] (нелинейные и линейно-квадратичные периодические задачи). В [105] рассматривалась минимизация квадратичного критерия качества на траекториях системы

$$(A+\varepsilon B)dx/dt = C(t)x + D(t)u, \quad x(0) = x^0.$$

В [48] исследовалась линейно-квадратичная задача с закрепленным левым концом и свободным правым в случае матричного сингулярного возмущения в критерии качества. В [105, 48] построено несколько первых членов асимптотического разложения решения, содержащего наряду с функциями от t функции погранслоя в окрестностях $t = 0$ и $t = T$ от аргументов t/ε^p и $(t - T)/\varepsilon^p$ соответственно.

Асимптотическое разложение решения по целым неотрицательным степеням ε построено в [192] для задачи минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \int\limits_0^T F(x, u, t, \varepsilon) dt$$

на траекториях системы

$$(A + \varepsilon B) dx/dt = f(x, u, t, \varepsilon), \quad x(0) = x(T),$$

где F, f и управление $u = u(t)$ – T-периодические по t функции.

В [106] построена асимптотика решения следующей периодической задачи оптимального управления:

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty (x' W(t) x + u'(A + \varepsilon B)' R (A + \varepsilon B) u) dt \to \min,$$
$$dx/dt = C(t)x + D(t)u + f(t), \quad x(0) = x(T),$$

причем разложения оптимальной траектории и минимального значения функционала содержат только неотрицательные целые степени ε, а в разложении оптимального управления могут присутствовать и отрицательные степени ε.

Оценки близости построенного приближенного асимптотического решения к точному по управлению, траектории и функционалу получены в [105, 192, 106]. Невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании асимптотического приближения оптимального управления высшего порядка установлено в [105, 48, 192, 106], при этом в [48, 106] используется управление в форме обратной связи.

Доказательство оценки остаточного члена асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной периодической задачи основывается на возможности приведения матрицы, стоящей при неизвестной в линеаризованном уравнении для быстрой переменной, при помощи вещественной матрицы того же периода к блочно-диагональной форме, где одна из матриц, стоящих на диагонали, имеет при всех значениях аргумента спектр в открытой левой полуплоскости, а другая – в правой. Если такое условие приводимости, названной в [103] условной, наложить априори, то оно практически очень трудно проверяемо. Оказывается, что при некоторых условиях может быть установлена условная приводимость для неотрицательно гамильтоновой периодической оператор-функции. А именно, непрерывная на отрезке неотрицательно гамильтонова оператор-функция, спектр которой при всех значениях аргумента не пересекается с мнимой осью, условно приводима [1]. Если гамильтонова оператор-функция гладкая, то приводимость осуществляется при помощи гладкой оператор-функции. Достаточные условия отсутствия точек спектра на мнимой оси для неотрицательно гамильтоновых операторов указаны, например, в [103]. Результаты о приводимости неотрицательно гамильтоновых периодических оператор-функций использовались при асимптотическом анализе периодических задач из [192, 106]. Условная приводимость имеет место (см. [104]) и для непрерывных оператор-функций вида

$$\begin{pmatrix} A(t) & \mu B(t) \\ \mu C(t) & -A'(t) \end{pmatrix},$$

если для всех $t, \mu \in [0, 1]$ последний оператор не имеет точек спектра на мнимой оси.

Двухточечная краевая задача, возникающая при минимизации квадратичного функционала на траекториях линейного уравнения с обратимым при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператором $A+\varepsilon B$ при производной, рассматривается в [96]. Доказывается, что можно произвести асимптотическое расщепление рассматриваемой задачи на регулярно возмущенную краевую задачу и две сингулярно возмущенные задачи Коши. Различные способы расщепления краевых задач для дескрипторных систем исследованы в [95].

8. Задачи с ограничением на управление

Наиболее распространенный подход к исследованию задач оптимального управления, содержащих малые параметры, состоит в применении методов асимптотического разложения решений возмущенных дифференциальных уравнений к краевой задаче принципа максимума, что позволяет строить асимптотику решений задач с открытой областью управления и гладкими управляющими воздействиями, т.е. задач классического вариационного типа. В задачах современной теории оптимального управления, имеющих прямые ограничения на значения управляющих воздействий в виде замкнутых неравенств, реализация указанного подхода встречает серьезные трудности, поскольку динамические уравнения краевой задачи принципа максимума не обладают необходимой для применения асимптотических методов гладкостью. Наверное поэтому, в данном случае ранние исследования, в основном, сводились лишь к выяснению вопроса о предельной задаче, к решению которой в той или иной топологии сходится решение возмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю (см., например, [17, 145, 146]). В [17] для линейной сингулярно возмущенной системы управления с ограничениями на управление изучено предельное поведение множества допустимых траекторий при $\varepsilon \to 0$, где ε – параметр сингулярных возмущений. Установлено, что это множество траекторий L_1 – слабо замкнуто, а минимальное значение критерия качества J_ε (при определенных условиях выпуклости) в задаче Лагранжа полунепрерывно снизу в точке $\varepsilon = 0$. Что касается построения асимптотики решения в задачах с замкнутыми множествами допустимых значений управляющих воздействий, то имеющиеся здесь результаты еще далеки от того уровня, который мог бы удовлетворить запросы практики. В первую очередь, это относится к нелинейным сингулярно возмущенным задачам, для которых вопрос о построении асимптотических приближений к оптимальным управлениям в общем случае остается открытым.

В монографии [68] описан метод построения асимптотики точек переключения управления для задач оптимального управления, в которых сингулярно возмущенные динамические системы линейны по быстрой переменной и управлению, а на значения управляющих воздействий наложены прямые ограничения типа замкнутых неравенств (см. также обзорные статьи на эту тему [66, 70]). Основываясь на [70], перечислим некоторые основные результаты, полученные в этом направлении.

В [61] построено асимптотическое приближение к решению следующей задачи оптимального быстродействия для линейной сингулярно возмущенной системы:

$$\begin{aligned}
&dx/dt = A_1x + A_2y + b_1u, \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = 0,\\
&\varepsilon dy/dt = A_3x + A_4y + b_2u, \quad y(0) = y^0, \quad y(T) = 0,\\
&|u(t| \leqslant 1, \quad J(u) = T \to \min,
\end{aligned}$$

где $u \in \mathbb{R}$. Предполагаются выполненными следующие условия:

a) матрица A_4 устойчивая, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны;

b) $\operatorname{rank}(b_2, A_4b_2, \ldots, A_4^{m-1}b_2) = m$.

Оптимальное управление в возмущенной задаче при достаточно малых ε наряду с точками переключения, близкими к соответствующим точкам в вырожденной задаче

$$\begin{aligned}
&d\overline{x}/dt = A_0\overline{x} + b_0u, \quad \overline{x}(0) = x^0, \quad \overline{x}(T) = 0, \quad |u(t)| \leqslant 1,\\
&J_0(u) = T \to \min, \quad A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3, \quad b_0 = b_1 - A_2A_4^{-1}b_2,
\end{aligned}$$

имеет пограничные точки переключения, сосредоточенные вблизи конечного момента T. Для описания структуры решения возмущенной задачи вблизи момента оптимального быстродействия в [61] введена новая предельная задача (вторая базовая задача):

$$\begin{aligned}
&dz/ds = A_4z + b_2u, \quad z(-\infty) = A_4^{-1}b_2, \quad |u(s)| \leqslant 1,\\
&s \leqslant 0, \quad z(0) = 0,\\
&J(u) = \int\limits_{-\infty}^{0} (u(s) + 1)ds \to \min .
\end{aligned}$$

При выполнении условий a), b) и некоторых других достаточно общих предположений справедлив следующий результат [61]. Пусть $T_0, t_{01}, \ldots, t_{0l}$ – момент оптимального быстродействия и точки переключения оптимального управления в вырожденной задаче, $s_{01}, \ldots, s_{0p}$ – точки переключения оптимального управления во второй базовой задаче. Тогда если $T(\varepsilon)$ – момент оптимального быстродействия в возмущенной задаче, то оптимальное управление этой задачи при достаточно малых ε переключается в $l+p$ точках вида $t_1(\varepsilon), \ldots, t_l(\varepsilon), T(\varepsilon)+\varepsilon s_1(\varepsilon), \ldots, T(\varepsilon)+\varepsilon s_p(\varepsilon)$ и имеют место асимптотические разложения

$$T(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k T_k, \quad t_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k t_{kj}, \quad j = \overline{1,l}, \quad s_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_{ki}, \quad i = \overline{1,p}.$$

Предложен конструктивный алгоритм вычисления коэффициентов разложений. Установлено, что если в последних разложениях ограничиться ε^N, т.е. рассмотреть

$$T_N(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k T_k, \ \ t_{Nj}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k t_{kj}, \ \ j = \overline{1,l}, \ \ s_{Ni}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k s_{ki}, \ \ i = \overline{1,p},$$

то релейное управление, определенное на промежутке $[0, T_N(\varepsilon)]$ и переключающееся в точках $t_{N1}(\varepsilon), \ldots, t_{Nl}(\varepsilon)$, $T_N(\varepsilon) + \varepsilon s_{N1}(\varepsilon), \ldots, T_N(\varepsilon) + \varepsilon s_{Np}(\varepsilon)$ (в первой точке переключение такое же, как у решения вырожденной задачи), переводит систему в фазовое состояние $o(\varepsilon^N)$, а конечный момент $T_N(\varepsilon)$ отличается от момента оптимального быстродействия в возмущенной задаче на величину того же порядка малости $o(\varepsilon^N)$.

Предложенные в [62, 67, 69, 176] алгоритмы построения асимптотических разложений оптимальных управлений в задачах оптимизации для линейных сингулярно возмущенных систем очень близки в идейном плане к алгоритму построения асимптотического решения задачи оптимального быстродействия, о которой говорилось выше. При их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на две задачи меньшей размерности. Решения большинства рассмотренных задач имеют релейный характер и только в линейно-квадратичной [67] оптимальное управление представляет собой непрерывную функцию и содержит квазиособые участки.

На базе алгоритма, разработанного для задачи терминального управления [62], в [63] предложена процедура асимптотического решения линейной задачи с большой длительностью процесса

$$dx/dt = Ax + bu, \quad x(0) = x^0, \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0, T/\varepsilon],$$
$$Hx(T/\varepsilon) = g, \quad J(u) = \int\limits_0^{T/\varepsilon} (a'x(t) + cu(t))dt \to \max,$$

$u(t)\in\mathbb{R}$, $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $g\in\mathbb{R}^m$, $m\leqslant n$, в которой A – устойчивая матрица, а $a'A^{-1}b-c\neq 0$. Эта задача сводится к сингулярно возмущенной путем перехода к “медленному времени” $\tau = \varepsilon t$.

Обобщению полученных в [61, 62] результатов на нелинейные сингулярно возмущенные системы вида

$$dx/dt = a_1(x,t) + A_1(x,t)y + b_1(x,t)u,$$
$$\varepsilon dy/dt = a_2(x,t) + A_2(x,t)y + b_2(x,t)u$$

с устойчивой матрицей $A_2(x,t)$ посвящены работы [64] (задача оптимального быстродействия) и [65] (задача терминального управления с подвижным правым концом траектории).

Исследуемую в [71] важную для приложений ситуацию, когда используются управления с достаточно большой скоростью изменения, можно трактовать как задачу оптимизации для линейной сингулярно возмущенной системы вида

$$dx/dt = Ax + bv, \quad x(0) = x^0, \quad \varepsilon dv/dt = u, \quad v(0) = 0,$$
$$|u(t)| \leqslant 1, \quad |v(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0;T],$$
$$Hx(T) = g, \quad J(u) = c'x(T) \to \max,$$
$$u(t) \in \mathbb{R}, v(t) \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad g \in \mathbb{R}^m, \quad m \leqslant n,$$

в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$. Принципиальное отличие этой задачи от задачи, рассмотренной в [62], состоит в том, что в ней присутствует фазовое ограничение $|v(t)| \leqslant 1$. При применении предложенного в [71] алгоритма асимптотического решения задачи дело сводится к решению задачи без фазовых ограничений

$$dx/dt = Ax + bv, \quad x(0) = x^0, \quad |v(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0;T],$$
$$Hx(T) = g, \quad J(u) = c'x(T) \to \max,$$

в которой управляющее воздействие $v(t)$ выбирается из класса кусочно-непрерывных функций, и сравнительно несложной коррекции оптимального управления этой задачи.

В [72] разработан алгоритм построения асимптотического представления оптимального управления для задачи минимизации полного импульса кусочно-непрерывных управляющих воздействий, переводящих линейную динамическую систему из одного заданного состояния в другое и принимающих достаточно большие по модулю значения. Изменив масштаб управления, эту задачу можно представить в виде

$$dx/dt = Ax + bu/\varepsilon,\ x(0) = x^0,\ x(T) = x^T,\ u \in \mathbb{R},\ |u(t)| \leqslant 1,\ t \in [0;T],$$
$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T |u(t)|\,dt \to \min.$$

В [34, 35] изучаются задачи оптимального быстродействия в случае, когда вырожденная задача имеет решение с разрывным управлением, а у возмущенной задачи управление непрерывно. А именно, рассматривается задача

$$
\begin{aligned}
&dx/dt = Ax + Bu, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \\
&\|u\| \leqslant 1, \quad x(t_0) = x_0 + \varepsilon y, \quad x(T) = 0, \quad T - t_0 \to \min,
\end{aligned}
$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Предполагается, что система вполне управляема, задача разрешима, $\operatorname{rank} B = r$, $2 \leqslant r \leqslant n-1$, и решение $u(t)$ при $\varepsilon = 0$ имеет единственную точку разрыва. Доказывается теорема, согласно которой (при некоторых условиях) время быстродействия $T(\varepsilon) - t_0$ и компоненты вектора начальных условий сопряженной системы раскладываются в асимптотические ряды вида

$$
\sum_{k=0}^{\infty} R_k\left(\varepsilon, W(\varepsilon), \ln\frac{1}{W(\varepsilon)}\right),
$$

где R_k – рациональные вектор-функции своих аргументов и

$$
R_k\left(\varepsilon, W(\varepsilon), \ln\frac{1}{W(\varepsilon)}\right) = O(\varepsilon^k).
$$

9. Задачи управления распределенными системами

За последние годы получили развитие исследования Ж.-Л. Лионса по задаче оптимального управления решениями эллиптического уравнения. В [74] строится и обосновывается асимптотика решения следующей задачи оптимального управления с сингулярно возмущенным билинейным эллиптическим уравнением состояния и квадратичным критерием качества:

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon^2 \Delta y + u(x) y = f(x), \quad x \in \Omega, \\
&\partial y / \partial \overline{\nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\
&J(u) = \int\limits_{\Omega} ((y - \overline{y})^2 + \nu u^2) dx \to \inf_{u \in U},
\end{aligned}
$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ компактно, $\partial\Omega$ – класса C^∞, $f \in L_2(\Omega)$, $\overline{\nu}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, Δ – оператор Лапласа, $U = \{u(\cdot) \in L_\infty(\Omega) : \zeta_1(x) \leqslant u(x) \leqslant \zeta_2(x),\ \zeta_i \in L_\infty\}$, $\nu = \mathrm{const} > 0$, $\overline{y} \in L_2(\Omega)$.

В [33] изучается поведение при стремлении к нулю ε решения задачи оптимального управления

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \Delta z - b(x)\frac{\partial z}{\partial y} - a(x, y) z = f(x, y) - u(x, y), \\
&(x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2, \quad z \in H_0^1(\Omega), \\
&J(u) = \int\limits_{\Omega} (z^2 + \nu u^2) dx dy \to \inf_{u \in U},
\end{aligned}
$$

где $f,\ a \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $a(x, y) \geqslant A > 0$ при $(x, y) \in \Omega$, $b \in C^\infty([0, 1])$, $b(x) \geqslant B > 0$ при $x \in [0, 1]$, $U = \left\{u(\cdot) \in L_2(\Omega) : \int\limits_{\Omega} u^2 dx dy \leqslant r^2\right\}$, $\nu > 0$, $H_0^1(\Omega)$ – соболевское пространство функций, равных нулю на границе $\partial\Omega$. Получены также асимптотические оценки для решения задачи, аппроксимирующей исходную.

Методом согласования асимптотических разложений в [32] построены равномерные асимптотики решения до любой степени малого параметра для задачи оптимального управления решениями эллиптического уравнения в области с малой полостью (см. также [57]).

В [185] устанавливается предельный переход при стремлении малого параметра к нулю для решения задачи оптимального управления с уравнением состояния

$$-\varepsilon\Delta z - z^n = u.$$

При $n = 3$ эта задача изучена в [135].

Задача синтеза обратной связи для уравнения параболического типа с малым параметром при коэффициенте диффузии рассматривается в [235]. Отдельно исследуются случаи, когда управляющая функция входит в граничное условие и в правую часть уравнения. Предполагается, что наблюдению доступны лишь несколько точек, находящихся в области, где рассматривается уравнение. Исследуется асимптотическое поведение решений системы управления при стремлении малого параметра к нулю. Полученные результаты используются для построения квазиоптимального управления, доставляющего минимизируемому квадратичному функционалу значение, близкое к оптимальному. Достоинство используемого подхода в том, что для построения квазиоптимального управления нужно решать лишь алгебраические и обыкновенные дифференциальные уравнения, в то время как в формулировку исходной задачи входит параболический оператор и, следовательно, для построения оптимального управления приходится решать уравнения с частными производными.

Для решения задачи синтеза оптимального управления тепловым процессом, который описывается сингулярно возмущенным уравнением параболического типа, в [53] используется метод угловых пограничных функций. Построена асимптотика решения соответствующей задачи для уравнения Риккати в виде ряда по малому параметру. Получены оценки близости субоптимального регулятора к оптимальному по управлению и по критерию качества. В [110] рассмотрены задачи синтеза оптимального управления в сингулярно возмущенных распределенных системах с квадратичным критерием качества. Методом пограничных функций для уравнения гиперболического типа построены и обоснованы конструктивные процедуры нахождения субоптимальных регуляторов на основе асимптотических разложений по малому параметру соответствующих бесконечномерных задач Риккати.

Асимптотическому анализу задачи минимизации квадратичного функционала на траекториях сингулярно возмущенной параболической системы

$$\varepsilon^2 \partial^2 y/\partial x^2 = \partial y/\partial t + sy + g(x)u(t)$$

с периодическими краевыми условиями посвящена работа [178].

Построение асимптотического разложения решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с критерием качества

$$J(u) = \int\limits_{Q_T} (y^2 + \nu u^2)dxdt, \quad \nu = \text{const } > 0,$$
$$Q_T = \{(x,t) : x \in \overline{\Omega}, \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T], T < \infty\},$$

и с параболическим уравнением состояния с малым параметром при операторе Лапласа

$$\partial y/\partial t - \varepsilon^2 \Delta y = u,$$
$$y(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y(x,t_0) = \varphi(x)$$

рассматривалось в [75] при ограничении на управление $\|u\|_{L_2} \leqslant a < \infty$.

В [59] исследуются задачи оптимального управления гиперболической системой, описываемой уравнением с единичным оператором при первой и малым параметром при второй производной. Для решений этих задач исследуются условия и оценки сходимости по функционалу и управлению к решениям предельной задачи управления параболической системой (см. также [60]). Отметим, что сходимость для конкретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления сингулярно возмущенной параболической системой рассматривалась в [52].

В [120] рассматривается задача оптимального быстродействия для системы гиперболических уравнений с малым параметром при пространственных производных. При заданных начальных и конечных условиях управлением служит значение на левой границе. На управление наложено условие, ограничивающее его рост при уменьшении малого параметра. Получена асимптотическая по параметру оценка снизу для времени быстродействия.

10. Управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость

Декомпозиция свойства полной управляемости линейных сингулярно возмущенных систем управления в некоторых критических случаях изучается в [25].

В [149] рассматривается система

$$
\begin{aligned}
&dx/dt = A_1(t)x + A_2(t)y + B_1(t)u,\\
&\varepsilon dy/dt = A_3(t)x + A_4(t)y + B_2(t)u,
\end{aligned}
$$

где A_i, B_j ограничены, липшицевы и существуют $\delta > 0$ и $K > 0$ такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$
\int\limits_0^\delta e^{-A_4(t)s} B_2(t) B_2'(t) e^{-A_4'(t)s} ds \geqslant KI.
$$

Доказывается, что если $A_4(t)$ обратима и система, определяемая парой $(\overline{A}, \overline{B})$, где

$$
\overline{A}(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad \overline{B}(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t),
$$

равномерно вполне управляема, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ равномерно вполне управляема и рассматриваемая система. Аналогичный результат получен для сингулярно возмущенных систем с выходом (для равномерной ее наблюдаемости).

Проблема управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием исследуется, например, в [24, 76]. В [76] рассматривается система

$$
\begin{aligned}
&dx(t)/dt = A_1 x(t) + A_2 x(t-h) + C_1 y(t) + C_2 y(t-h) + B_1 u(t),\\
&\varepsilon dy(t)/dt = A_3 x(t) + A_4 x(t-h) + C_3 y(t) + C_4 y(t-h) + B_2 u(t),\\
&x(\theta) = \varphi(\theta), \quad y(\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-h; 0), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,\\
&h = \text{const} > 0, \quad \det C_3 \neq 0.
\end{aligned}
$$

С помощью невырожденного преобразования последняя система сводится к эквивалентной сингулярно возмущенной системе с разделенными переменными и с кратными запаздываниями по состоянию и управлению. Получены достаточные условия относительной управляемости по x, y, по совокупности переменных $\{x, y\}$, выраженные через условия управляемости рангового типа вырожденной ($\varepsilon = 0$) системы и системы погранслоя.

В [78] (см. также [186]) предложен унифицированный метод исследования управляемости линейных нестационарных систем шести типов (без запаздывания, с постоянным запаздыванием, систем нейтрального типа и аналогичных типов сингулярно возмущенных систем), сочетающий в себе метод пространства состояний и метод определяющих уравнений, основанный на построении по исходной дифференциальной системе двух алгебраических рекуррентных матричных уравнений.

Задачи относительной наблюдаемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа исследованы в [81] с помощью метода пространства состояний. Развивается предложенный ранее авторами унифицированный подход к составлению определяющих уравнений для нестационарных систем наблюдения. В терминах компонент решений определяющих уравнений сформулированы эффективные условия относительной наблюдаемости рангового типа. Принцип двойственности между решениями определяющих уравнений для сингулярно возмущенных систем наблюдения и управления установлен в [79]. Наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием изучалась также в [171].

К проблемам управляемости и наблюдаемости тесно примыкают проблемы идентифицируемости и стабилизируемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием, исследованные, например, в [77, 80]. В [77] с помощью метода пограничных функций получены достаточные условия стабилизируемости полной $n+m$ – линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием в медленной переменной через условия стабилизируемости вырожденной n – системы 0 – приближения и m – системы погранслоя 0 – приближения.

В [168] рассматривается сингулярно возмущенная система с малыми запаздываниями в переменных состояния и управления вида

$$\begin{aligned}
&dx/dt = A_1x(t) + A_2y(t) + H_1x(t-\varepsilon h) + H_2y(t-\varepsilon h) + B_1u(t) + G_1u(t-\varepsilon h),\\
&\varepsilon dy/dt = A_3x(t) + A_4y(t) + H_3x(t-\varepsilon h) + H_4y(t-\varepsilon h) + B_2u(t) + G_2u(t-\varepsilon h),\\
&w(t) = C_1x(t) + C_2y(t) + F_1x(t-\varepsilon h) + F_2y(t-\varepsilon h).
\end{aligned}$$

Изучаются свойства стабилизируемости и их связь для вырожденной и погранслойной систем с самой системой в целом.

Управляемость в евклидовом пространстве сингулярно возмущенных линейных систем с запаздыванием в состоянии исследована в [170].

Условия, позволяющие судить о полной управляемости стационарных систем с разными степенями малого параметра при производных вида

$$\varepsilon^{\mu_i} dx_i(t)/dt = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\varepsilon)x_j(t) + B_i(\varepsilon)u(t), \quad i=\overline{1,n},$$

где μ_i – целые числа такие, что $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n \geqslant 0$, матрицы $A_{ij}(\varepsilon), B_i(\varepsilon)$ голоморфны по ε, по свойствам систем меньшего порядка, установлены в [93].

В [90] приведены условия, обеспечивающие полную управляемость стационарных систем с оператором при производной, мало отличающимся от вырожденного, вида

$$(A+\varepsilon B)dx(t)/dt = Cx(t) + Du(t),$$

где оператор A вырожден, а $A+\varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$, причем все B-жордановы цепочки оператора A имеют одинаковую длину $p \geqslant 1$.

Для системы

$$\begin{aligned}
&dx/dt = -y - \alpha u,\\
&\varepsilon dy/dt = x - \frac{y^3}{3} + y,
\end{aligned}$$

соответствующей уравнению Ван-дер-Поля с управлением, в [117] изучается поведение множества управляемости при малых значениях ε ($\alpha \in \mathbb{R}_+$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $|u(t)| \leqslant 1$).

Управляемость сингулярно возмущенных систем с частными производными изучалась, например, в [58, 196, 197].

В [132] с помощью квадратичных функций Ляпунова для медленной и быстрой подсистем строится стабилизирующее управление для билинейной сингулярно возмущенной системы управления с постоянными коэффициентами.

Линейная система управления, где на вход помимо управляющих воздействий подается также линейная комбинация наблюдаемых переменных и их производных с большим коэффициентом усиления, рассматривается в [201]. Здесь возникают вопросы разделения движений в замкнутой системе. Помимо выделения подсистем медленных и быстрых движений в работе конструируются стабилизирующие обратные связи, вычисляемые на основе полученной декомпозиции.

Вопросы стабилизации линейных систем с помощью управлений в виде обратной связи и с большим коэффициентом усиления изучались также в [148] путем разделения движений в замкнутой системе.

Глобальная экпоненциально-стабилизирующая обратная связь для системы

$$\begin{aligned} &dx/dt = f(x, y),\\ &\varepsilon dy/dt = g(x, y) + Q(x, y)u \end{aligned}$$

строится в [139] при помощи аппарата функций Ляпунова.

На основе разделения системы

$$\begin{aligned} &dx/dt = f(x, y, u),\\ &\varepsilon dy/dt = g(x, y, u, \varepsilon) \end{aligned}$$

на "быструю" и "медленную" подсистемы и знания для каждой подсистемы стабилизирующей обратной связи в [216] строится композиционная стабилизирующая обратная связь для полной системы. При этом указывается область значений малого параметра ε, при которых имеет место стабилизация. Построения осуществляются на основе функций Ляпунова для подсистем.

Построение стабилизирующего управления, представляющего собой сумму двух управлений, где первое слагаемое связано со стабилизацией подсистемы быстрых движений, а второе – медленных движений, осуществляется в [202] для нелинейных сингулярно возмущенных систем с помощью результатов по интегральным многообразиям.

11. Поведение множеств достижимости

В [51, 17] рассматривается поведение при стремлении малого параметра ε к нулю множеств достижимости для линейной сингулярно возмущенной системы

$$\begin{aligned} &dx/dt = A_1(t)x + A_2(t)y + B_1(t)u,\\ &\varepsilon dy/dt = A_3(t)x + A_4(t)y + B_2(t)u, \end{aligned}$$

где $x(0) = x^0$, $y(0) = y^0$, $U = \{u(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^r),\ u(t) \in V$ при почти всех $t \in [0;1]\}$ – множество допустимых управлений, матрицы $A_i(t)$ и $B_j(t)$ непрерывны, при всех $t \in [0;1]$ матрицы $A_4(t)$ устойчивые, множество V компактно. Для любого x определяется множество

$$R(x) = -A_4^{-1}(1)A_3(1)x + \widetilde{R},$$

где

$$\widetilde{R} = \int\limits_0^\infty \exp(A_4(1)s)B_2(1)V\,ds.$$

Вводятся обозначения: K_ε – множество достижимости при $t = 1$ возмущенной системы, P – множество достижимости при $t = 1$ вырожденной системы

$$dx/dt = A_0(t)x + B_0(t)u, \quad x(0) = x^0,$$
$$A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3, \quad B_0 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2,$$
$$K_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m},\ x \in P,\ y \in R(x)\}.$$

Доказывается, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d_H(K_\varepsilon, K_0) = 0$, где $d_H(K_\varepsilon, K_0)$ – расстояние Хаусдорфа между множествами K_ε и K_0.

Описанный подход с введением множества $R(x)$ позволил [51] для сингулярно возмущенной задачи оптимального управления, где дифференциальные связи – сингулярно возмущенные линейные дифференциальные уравнения, а функционал порождается непрерывной функцией конечного состояния $g(x, y)$, построить вид предельного функционала при вырождении

$$g_0(x) = \inf_{y\in R} g(x, y - A_4^{-1}(1)A_3(1)x)$$

и получить сходимость по функционалу. Отметим, что при этом, вследствие операции минимизации по быстрой переменной на множестве R, которое содержит информацию об управлении, преодолевается эффект скачка в функционале при вырождении, полученный в [36].

Результат о сходимости множеств достижимости в метрике Хаусдорфа при стремлении малого параметра к нулю получен при некоторых условиях в [97] и для матрично сингулярно возмущенных систем вида

$$(A + \varepsilon B)dx/dt = C(t)x + D(t)u, \quad x(0) = x^0,$$

где оператор A – вырожден, а $A + \varepsilon B$ обратим при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Асимптотика погранслойного типа по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ для области достижимости, определяемой при помощи опорной функции, линейной сингулярно возмущенной системы управления с заданными начальными условиями $x(0) = x^0$, $y(0) = y^0$ и с интегральным ограничением на управление

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2(t)dt \le r^2,$$

где $u(t) \in \mathbb{R}$, построена в [119].

В [49] рассматривается записанная в начале этого раздела система, где $t \in [0, T]$, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \in \{z \in \mathbb{R}^{n+m} : z'Mz \leqslant 1\}, u(t) \in \{u \in \mathbb{R}^r : u'N(t)u \leqslant 1\}$, M и $N(t)$ – положительно определенные симметрические матрицы. При некоторых условиях построена асимптотика внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости. При этом использовалась асимптотика решения задачи Коши для матричного дифференциального уравнения Риккати.

В [114, 124] показано, что если подействовать явно задаваемым масштабирующим линейным оператором на область достижимости линейных автономных сингулярно возмущенных систем управления, которые не являются асимптотически устойчивыми по быстрым переменным, то полученные области сходятся в метрике Хаусдорфа при стремлении малого параметра к нулю. Это позволяет описать асимптотику множеств достижимости.

12. Задачи в условиях неопределенности и адаптивное управление

Реальные системы управления функционируют, как правило, в условиях неопределенности, обусловленной разнообразными причинами (неполные начальные данные, наличие неизвестных или неточно заданных входных возмущений, ошибки в каналах измерений и т.д.).

При синтезе и анализе адаптивных (самонастраивающихся) систем методы разделения движений играют важную роль (см., например, [174], где рассматривались отдельные классы адаптивных систем). Сама возможность адаптации регулятора к изменениям параметров объекта и среды существует лишь постольку, поскольку эти параметры меняются достаточно медленно.

Следуя [127, 109], опишем кратко одну из схем разделения движений применительно к адаптивным системам в случае, когда алгоритм адаптации относится к классу алгоритмов скоростного градиента. Пусть настраиваемый объект описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \theta, t),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = g(x, y, \theta, t),$$

где $\theta = \theta(t) \in \mathbb{R}^p$ – вектор настраиваемых параметров. Цель управления задается при помощи некоторой гладкой функции $Q(x, y, t)$ и имеет вид

$$Q(x, y, t) \leqslant \Delta \quad \text{при} \quad t \geqslant t_*.$$

Процедура синтеза по вырожденной модели настраиваемого объекта состоит в следующем. Исходная система заменяется вырожденной системой

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(\overline{x}, \theta, t) = f(\overline{x}, \varphi(\overline{x}, \theta, t), \theta, t),$$
$$\overline{y} = \varphi(\overline{x}, \theta, t),$$

где $\varphi(\overline{x}, \theta, t)$ – решение уравнения $g(\overline{x}, \overline{y}, \theta, t) = 0$ (считается, что это решение существует и единственно). Предполагается, что целевая функция вырожденной системы $\overline{Q}(\overline{x}, t) = Q(\overline{x}, \varphi(\overline{x}, \theta, t), t)$ не зависит от θ и непрерывно дифференцируема. Алгоритм скоростного градиента для вырожденной модели имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma\nabla_\theta\omega(\overline{x}, \theta, t),$$

где $\Gamma = \Gamma'$ – -положительно определенная матрица,

$$\omega(\overline{x}, \theta, t) = \frac{\partial\overline{Q}}{\partial t}(\overline{x}, t) + (\nabla_x\overline{Q})'\overline{f}(\overline{x}, \theta, t).$$

Заключительный этап синтеза состоит в проверке условий работоспособности синтезированной системы. Несмотря на выполнение цели управления в вырожденной системе, в исходной сингулярно возмущенной системе цель управления может нарушаться. Поэтому для применения описанного метода синтеза необходимо выполнение дополнительных условий, которые являются важной составной частью метода.

Условия применимости и оценки точности разделения движений для алгоритмов адаптации, синтезированных на основе метода функций Ляпунова и алгоритмов скоростного градиента, могут быть найдены в [127, 109].

Для системы управления с быстрыми и медленными движениями и с неопределенностью в правых частях в виде ограниченных нелинейностей в [194] конструируется нелинейная обратная связь, стабилизирующая подсистему медленных движений. Устанавливается структура притягивающего множества и наличие порогового значения параметра сингулярных возмущений для стабилизации возмущенной системы построенной обратной связью. Стабилизируемость сингулярно возмущенной адаптивной системы на основе информации о стабилизируемости соответствующей невозмущенной системы устанавливается также в [11, 12].

В [215] для нелинейной управляемой по выходу системы достаточно общего вида с известной линейной частью строится обратная связь по выходу с целью компенсации возмущений, которая базируется на свойствах линейной части объекта, а ее динамический коэффициент усиления связан с мажорантой выхода. При этом замкнутая система содержит и уравнения фильтра, представляющие собой тихоновские сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Устанавливается пороговая величина для параметра фильтра (параметра сингулярных возмущений) в терминах линейной части объекта и постоянных Липшица нелинейных возмущений, в пределах которой замкнутая система обладает свойством равномерной, глобальной асимптотической устойчивости.

Для всех значений параметра, не превышающих определенного порогового уровня, в [138] при ограничительных условиях построены глобальные аттракторы для сингулярно возмущенных нелинейных систем при ограниченных управлениях с неопределенностью вида

$$\begin{aligned}
&dx/dt = f_1(x) + F_1(x)y + G_1(x)u + h_1(t,x,y,u,\varepsilon),\\
&\varepsilon dy/dt = A(t)(f_2(x) + y + G_2(x)u) + h_2(t,x,y,u,\varepsilon),\\
&z(t) = r(x(t),y(t)),
\end{aligned}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $|u_i(t)| \leqslant \rho_i$, $i = \overline{1,r}$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $h_2(t,x,y,u,0) = 0$; измеримая по Лебегу матричнозначная функция $A(t)$ и $h_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ не известны заранее.

Подобные исследования в случае отсутствия ограничений на управление приведены в [7].

Для задачи управления сингулярно возмущенной системой по минимаксному критерию при неопределенных начальных условиях, геометрических ограничениях на управляющие воздействия и с терминальным функционалом качества, зависящим как от медленных, так и от быстрых переменных, в [86] предлагается итерационный метод построения последовательных приближений оптимального решения. Исследуются асимптотические свойства ансамбля траекторий. Подобная задача рассматривается также в [85].

Задача асимптотического описания информационного множества возможных состояний сингулярно возмущенной линейной системы с переменными коэффициентами, функционирующей в присутствии неопределенных воздействий при интегральных квадратичных ограничениях на реализацию последних, рассмотрена в [88].

В [187] получена оценка множества возможных состояний для сингулярно возмущенной квазилинейной системы при неопределенном начальном состоянии и неопределенных возмущениях

$$
\begin{aligned}
&dx/dt = A_{11}(t,\varepsilon)x + A_{12}(t,\varepsilon)y + C_1(t,\varepsilon)v + \varepsilon f_1(t,x,y,\varepsilon),\\
&\varepsilon dy/dt = A_{21}(t,\varepsilon)x + A_{22}(t,\varepsilon)y + C_2(t,\varepsilon)v + \varepsilon f_2(t,x,y,\varepsilon),\\
&\eta(t) = G_1(t,\varepsilon)x + G_2(t,\varepsilon)y + \xi,
\end{aligned}
$$

где $t \in [t_0; t_1]$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^s$, начальное состояние $x(t_0)$, $y(t_0)$, возмущения $v = v(t)$, $\xi = \xi(t)$ не известны заранее, причем $v(t)$, $\xi(t)$ являются измеримыми по Лебегу функциями, удовлетворяющими условиям

$$
\int\limits_{t_0}^{t_1} \xi'(t)H(t)\xi(t)dt \leqslant \nu^2, \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} v'(t)R(t)v(t)dt \leqslant \gamma^2,
$$

где $H(t)$, $R(t)$ симметрические положительно определенные матрицы с непрерывными элементами.

Линейные сингулярно возмущенные системы изучались также в [84] (неопределенность по начальным условиям) и в [87] (неопределенные воздействия при интегральных квадратичных ограничениях на их реализацию).

Для линейной системы управления с быстрыми и медленными движениями, где элементы всех матриц зависят от некоторой ограниченной неопределенности, в [165] строится составное синтезирующее управление, сохраняющее свойство устойчивости, если это свойство имеется у систем декомпозиции – вырожденной и присоединенной. Приводятся выражения для законов синтеза в подсистемах и итогового управления.

В [175] рассматриваются вопросы построения стабилизирующих обратных связей на основе декомпозиции для линейной сингулярно возмущенной системы со многими малыми параметрами и матрицами с неопределенными элементами.

Задача о попадании решения нелинейной системы с заданным начальным условием и неопределенными возмущениями в окрестность заданного многообразия, приводящая к сингулярно возмущенной системе, изучена в [177].

В [142] показано, что управление, обеспечивающее редуцированной задаче свойство слабой инвариантности относительно внешних возмущений, обеспечивает инвариантность значения функционала исходной линейной сингулярно возмущенной системы управления относительно внешних возмущений с точностью $O(\varepsilon)$.

13. Итерационные методы

Построение асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач становится очень сложным и требует больших затрат, когда требуется высокая точность решения. В таких случаях использование метода асимптотических разложений (важного теоретического орудия) становится неэффективным с вычислительной точки зрения. К тому же малый параметр возмущения не всегда очень мал и не всегда выполняются достаточно сильные условия гладкости, необходимые для построения асимптотических разложений. Поэтому особое значение приобретают итерационные методы.

В [45] предлагаются два итерационных метода (идейно близких методу Ю.П. Боглаева) определения решения сингулярно возмущенной краевой задачи условно устойчивого типа, которая связана с задачей Больца с сингулярно возмущенными дифференциальными связями.

Итерационная схема построения равномерного приближения к решению сингулярно возмущенной системы называется последовательной, если она имеет вид

$$\begin{aligned}
&d\widetilde{x}_{i-1}/dt = \widetilde{f}(\widetilde{x}_{i-1}, \widetilde{y}_{i-1}, t, \varepsilon),\\
&\varepsilon d\widetilde{y}_i/dt = \widetilde{g}(\widetilde{x}_{i-1}, \widetilde{y}_i, t, \varepsilon),
\end{aligned}$$

где $\widetilde{y}_0(t) \equiv 0$, а система получена из исходной с помощью некоторой замены переменных, суть которой получение уравнений для невязок вдоль равномерного асимптотического приближения поранслойного типа нулевого порядка (предполагается, что все условия для построения такого приближения выполнены).

Итерационная схема построения равномерного приближения к решению сингулярно возмущенной системы называется параллельной, если она имеет вид

$$\begin{aligned}
&d\widetilde{\widetilde{x}}_i/dt = \widetilde{\widetilde{f}}\left(\widetilde{\widetilde{x}}_i, \widetilde{\widetilde{x}}_{i-1}, \widetilde{\widetilde{y}}_{i-1}, t, \varepsilon\right),\\
&\varepsilon d\widetilde{\widetilde{y}}_i/dt = \widetilde{\widetilde{g}}\left(\widetilde{\widetilde{x}}_{i-1}, \widetilde{\widetilde{y}}_i, \widetilde{\widetilde{y}}_{i-1}, t, \varepsilon\right),\\
&\widetilde{\widetilde{x}}_0(t) \equiv 0, \quad \widetilde{\widetilde{y}}_0(t) \equiv 0,
\end{aligned}$$

где система получается из исходной после некоторой, уже другой, замены переменных, также использующей асимптотическое приближение погранслойного типа нулевого порядка для решения исходной задачи.

В [45] установлены условия, при которых для последовательной и параллельной схем итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии и приводят к построению не просто асимптотического приближения, но и аппроксимации точного решения исходной краевой задачи x^*, y^* с любой заданной точностью. А именно, для достаточно малых значений параметра ε справедливы неравенства

$$\|\widetilde{x}_i - x^*\|_C \leqslant c(c\varepsilon)^{i+1}, \quad \|\widetilde{y}_i - y^*\|_C \leqslant c(c\varepsilon)^{i+1},$$

где постоянная c не зависит от ε, i.

Итерационные методы решения сингулярно возмущенных матричных дифференциальных уравнений Риккати рассматриваются в [46, 164].

В [163] для решения задачи минимизации функционала

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u'Ru \right) dt \to \min, \quad W \geqslant 0, \quad R > 0,$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned}
&dx/dt = A_1x + A_2y + B_1u, \quad x(t_0) = x^0,\\
&\varepsilon dy/dt = A_3x + A_4y + B_2u, \quad y(t_0) = y^0
\end{aligned}$$

предлагается итерационный алгоритм построения матрицы оптимальных коэффициентов усиления в цепи обратной связи по выходу. Этот процесс проводится с учетом расщепления соответствующего алгебраического уравнения Риккати и позволяет получить аппроксимацию оптимальных коэффициентов усиления за k итераций алгоритма порядка $O(\varepsilon^k)$ для любого заданного k.

Следуя [162, 164], приведем итерационный алгоритм решения сингулярно возмущенного алгебраического уравнения Риккати $PA + A'P - PSP + W = 0$, где $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}A_3 & \frac{1}{\varepsilon}A_4 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} S_1 & \frac{1}{\varepsilon}S_2 \\ \frac{1}{\varepsilon}S_2' & \frac{1}{\varepsilon^2}S_3 \end{pmatrix}$.

Решение представляется в блочном виде

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2' & \varepsilon P_3 \end{pmatrix},$$

где

$$P_j = P_j^{(0)} + \varepsilon E_j.$$

Нулевое приближение решения находится из соотношений

$$P_1^{(0)} A_s + A_s' P_1^{(0)} - P_1^{(0)} S_s P_1^{(0)} + W_s = 0,$$
$$P_3^{(0)} A_4 + A_4' P_3^{(0)} - P_3^{(0)} S_3 P_3^{(0)} + W_3 = 0,$$
$$P_2^{(0)} = F_2 \left(P_1^{(0)}, P_3^{(0)} \right),$$

где A_s, W_s, S_s – известные матрицы, которые определяются путем подстановки разложения решения в исходное уравнение Риккати и приравнивания коэффициентов при ε^0, F_2 – известная линейная матричная функция. Матрицы E_j определяются при помощи соотношений вида

$$E_1^{(i+1)} D_1 + D_1' E_1^{(i+1)} = H_1 \left(E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, E_3^{(i)}, \varepsilon \right),$$
$$E_3^{(i+1)} D_3 + D_3' E_3^{(i+1)} = H_3 \left(E_2^{(i)}, E_3^{(i)}, \varepsilon \right),$$
$$E_2^{(i+1)} = H_2 \left(E_1^{(i+1)}, E_2^{(i)}, E_3^{(i+1)}, \varepsilon \right),$$
$$E_1^{(0)} = 0, \quad E_2^{(0)} = 0, \quad E_3^{(0)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

где матрицы D_i и квадратичные матричные функции H_i известны. Этот итерационный алгоритм дает сходимость к точному решению со скоростью $O(\varepsilon)$.

Итерационный метод построения приближения произвольной точности к оптимальному управлению, который использует методы проекции градиентов и условного градиента, излагается в [37] для нелинейных выпуклых задач оптимального управления

$$J_\varepsilon(u) = \Phi(x(T)) + \int_0^T F(x, y, u, t) dt \to \min_{u \in M},$$
$$dx/dt = A_1(t)x + A_2(t)y + B_1(t)u, \quad x(0) = x^0,$$
$$\varepsilon dy/dt = \varepsilon A_3(t)x + A_4(t)y + B_2(t)u, \quad y(0) = y^0,$$

где M – множество r-мерных измеримых вектор-функций, значения которых при почти всех $t \in [0, T]$ принадлежат некоторому выпуклому ограниченному, замкнутому множеству $U \subset \mathbb{R}^r$, Φ и F выпуклы по совокупности переменных (x, y, u), F сильно выпукла по u.

Эта работа развивается в [143] на случай модификации метода условного градиента, которая обеспечивает сходимость со скоростью геометрической прогрессии. Оценивается влияние вычислительных погрешностей на скорость сходимости.

Наличие асимптотических приближений любого порядка очень ценная качественная информация. Сами по себе асимптотики, являясь носителями структурной информации, могут давать плохие численные аппроксимации, и возникает вопрос, как их использовать для численного анализа. В [31] на основе асимптотических разложений погранслойного типа исследованы эффективные итерационные методы решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления и разработаны пакеты прикладных программ для ЭВМ. На различных примерах, в том числе и для "жестких" систем, продемонстрирована высокая эффективность использования асимптотического анализа систем управления для формирования качественных начальных приближений на основе нулевых членов асимптотики в итерационных пакетах по оптимальному управлению. Причем хорошая сходимость к глобальному оптимуму наблюдалась в "жестких" задачах даже с грубым начальным приближением, лишь качественно сохраняющим структуру нулевого члена асимптотики. В [31] эвристически вводились малые параметры при производных в тех уравнениях системы, которые удовлетворяли бы при этом части условий теоремы Тихонова А.Н. о предельном переходе из теории сингулярных возмущений. Условия эти связаны с асимптотической устойчивостью точки покоя присоединенной системы – корня вырожденной алгебраической системы. Это позволяло отбрасывать производные, понижать размерность задачи управления, менять фазовые переменные на управляющие, определять возможные импульсы у оптимального управления в исходной задаче и в итоге получать возможную качественную информацию о решении.

14. Сингулярно возмущенные дискретные задачи

Дискретные сингулярно возмущенные задачи оптимального управления являются объектом интенсивного изучения с начала 1980-х гг. Различным классам таких задач посвящены монография [210] и некоторые главы в монографиях [206, 162].

В частности, в [206, 210] приведен алгоритм построения асимптотического разложения решения гамильтоновой системы, вытекающей из условий оптимальности управления в следующей задаче:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \varepsilon A_2 \\ A_3 & \varepsilon A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(k), \\
&x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \\
&J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} z'(N) F z(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (z'(k) W z(k) + u'(k) R u(k)) \to \min, \\
&z'(k) = (x'(k), \varepsilon y'(k)).
\end{aligned}$$

При этом асимптотика, например, для $y(k)$ имеет вид

$$y(k) = \sum_{i \geqslant 0} \varepsilon^i (\overline{y}_i(k) + \varepsilon^k \Pi_i y(k) + \varepsilon^{N-k} Q_i y(k)).$$

Приводится также алгоритм построения асимптотики решения дискретного уравнения Риккати, возникающего при отыскании управления в форме обратной связи для этой задачи.

Следуя [198], в [162] рассматриваются линейно-квадратичные задачи с уравнением состояния

$$\begin{aligned}
&x(k+1) = (I + \varepsilon A_1) x(k) + \varepsilon A_2 y(k) + \varepsilon B_1 u(k), \quad x(0) = x^0, \\
&y(k+1) = A_3 x(k) + A_4 y(k) + B_2 u(k), \quad y(0) = y^0
\end{aligned}$$

и критериями качества

$$J_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(z'(k)Wz(k) + u'(k)Ru(k))$$

и

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}z'(N)Fz(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(z'(k)Wz(k) + u'(k)Ru(k)),$$

где $z'(k) = (x'(k), y'(k))$, $W = W' \geqslant 0$, $R = R' > 0$, $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}F_1 & F_2 \\ F_2' & F_3 \end{pmatrix} \geqslant 0.$

Путем невырожденных линейных преобразований осуществляется декомпозиция гамильтоновой системы, вытекающей из условия оптимальности управления, на независимые системы меньшей размерности. В случае управления на бесконечном промежутке производится разделение движений для дискретного алгебраического уравнения Риккати, которое используется для записи оптимального управления в форме обратной связи.

В [162] исследуются также сингулярно возмущенные дискретные задачи с белым шумом.

Задача минимизации квадратичного функционала на траекториях линейной дискретной сингулярно возмущенной системы вида

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \varepsilon y(k+1) \end{pmatrix} = A(k,\varepsilon)\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} + B(k,\varepsilon)u(k), \quad k = \overline{0,N},$$
$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0$$

изучается в [180]. Анализируются два способа получения вырожденного уравнения Риккати для соответствующего возмущенного дискретного уравнения Риккати.

Рекурсивное решение дискретной сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи рассматривается в [164]. Оптимальное H_∞-управление для сингулярно возмущенных линейных дискретных систем изучается в [209] путем перехода к некоторой дифференциальной игре.

Метод пограничных функций применяется в [38] для построения асимптотики решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления для линейно-квадратичной дискретной задачи с малым шагом.

Для линейно-квадратичной разностной задачи оптимального управления с малым шагом и малым множителем при сумме в функционале в [27] строятся асимптотическое разложение по малому шагу решения соответствующего разностного уравнения Риккати и квазиоптимальное управление. В [29] строится асимптотика по малому параметру решения задачи минимизации квадратичного критерия качества на траекториях линейной с малым шагом разностной системы уравнений, у которых левый конец закреплен, а правый принадлежит области, заданной системой линейных неравенств.

В [21] показано, что при условии устойчивости собственных движений в дискретных нестационарных линейных системах с малым шагом условия полной управляемости выглядят так же, как в стационарных системах.

Задача стабилизации при помощи обратной связи по состоянию линейной сингулярно возмущенной системы с несколькими независимыми малыми параметрами и дискретным временем рассматривается в [199]. Описывается алгоритм решения задачи, основанный на декомпозиции задачи на подзадачи для медленной и быстрой подсистем. Построена оценка области значений параметров, для которой обеспечивается асимптотическая устойчивость замкнутой системы.

В [82] получены условия, при которых равномерная по малому параметру экспоненциальная устойчивость дискретной сингулярно возмущенной нелинейной динамической системы следует из наличия этого свойства у двух изолированных подсистем, определяющих быстрое и медленное движения. Приводятся условия и соотношения, гарантирующие разрешимость задачи стабилизации в классе обратных связей по части переменных состояния, соответствующих медленным движениям.

Об использовании прямой схемы для построения асимптотического разложения решения различных дискретных задач написано в разделе 3.

15. Задачи со случайными возмущениями

В [26] система имеет вид

$$dx/dt = A(t)x + b(t) + G(t)\eta_1(t), \quad x(0) = x^0,$$

а уравнение измерения выхода имеет вид

$$y(t) = B(t)x(t) + \varepsilon\eta_2(t),$$

где $\eta_1(t), \eta_2(t)$ – гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями, распределение вектора x^0 гауссовское, случайные величины $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, x^0 взаимно не зависимы. Строится асимптотическое разложение для решения сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения типа Риккати для ковариационной матрицы ошибок оптимальной фильтрации. Асимптотическое разложение по малому параметру решения сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения типа Риккати, возникающего в линейно-квадратичной задаче оптимального управления сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением состояния с гауссовским белым шумом в коэффициентах, построено в [30].

В [162] предлагается метод расщепления, позволяющий получить линейные регуляторы для медленной и быстрой подсистем независимо друг от друга, для линейно-квадратичной задачи со стохастическим уравнением состояния

$$\begin{aligned}
&dx_1(t)/dt = A_1x_1(t) + A_2x_2(t) + B_1u(t) + G_1\omega_1(t),\\
&\varepsilon dx_2(t)/dt = A_3x_1(t) + A_4x_2(t) + B_2u(t) + G_2\omega_1(t),\\
&y(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \omega_2(t)
\end{aligned}$$

и критерием качества

$$J = \lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{t_f}M\left\{\int\limits_{t_0}^{t_f}(z'(t)z(t) + u'(t)Ru(t))dt\right\}, \quad R > 0,$$

где $z(t) = D_1x_1(t) + D_2(t)x_2(t)$, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $\omega_1(t) \in \mathbb{R}^p$ и $\omega_2(t) \in \mathbb{R}^m$ – независимые стационарные гауссовские взаимно некоррелированные белые шумы с нулевым математическим ожиданием и интенсивностями $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$ соответственно.

Рекурсивный подход к сингулярно возмущенным линейным стохастическим непрерывным и дискретным системам управления исследовался в [164] (рассматривался белый гауссовский шум).

Стохастическим сингулярно возмущенным задачам управления посвящены также глава в монографии [182] и статьи [214, 136]. В последней статье уравнение состояния имеет вид

$$\begin{aligned}
&dx = f(x, y, v)dt + \sqrt{2}d\omega_1,\\
&\varepsilon dy = g(x, y, v)dt + \sqrt{2\varepsilon}d\omega_2,\\
&x(0) = x, \quad y(0) = y,
\end{aligned}$$

где v управление, а ω_1 и ω_2 независимые Винеровские процессы.

16. Игровые задачи

В [23] изучается поведение при стремлении малого параметра к нулю цены линейной дифференциальной игры преследования, в которой динамика для преследователя и убегающего описывается сингулярно возмущенными уравнениями

$$\begin{aligned}
&dy/dt = A_1(t)y + A_2(t)\eta + B_1(t)u,\\
&\varepsilon d\eta/dt = A_3(t)y + A_4(t)\eta + B_2(t)u,\\
&y(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^{n_1},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&dz/dt = C_1(t)z + C_2(t)\zeta + D_1(t)v,\\
&\varepsilon d\zeta/dt = C_3(t)z + C_4(t)\zeta + D_2(t)v,\\
&z \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad v(t) \in V \subset \mathbb{R}^{n_2},
\end{aligned}$$

где U, V – выпуклые компакты. Игроки используют математическую формализацию игры, предложенную Н.Н. Красовским.

Ситуация равновесия по Нэшу для систем с медленными и быстрыми переменными рассматривается для дискретного случая в [233], а для непрерывного – в [219]. Приведем результаты из этих двух работ подробнее.

В [219] изучаются две линейно-квадратичные задачи. Первая описывается системой

$$\begin{aligned}
&dx/dt = a_1(x) + A_1(x)z + B_{11}(x)u_1 + B_{12}(x)u_2, \quad x(0) = x_0,\\
&\varepsilon dz/dt = a_2(x) + A_2(x)z + B_{21}(x)u_1 + B_{22}(x)u_2, \quad z(0) = z_0.
\end{aligned}$$

Функция выигрыша i-го игрока имеет вид

$$J_i = \int\limits_0^\infty (p_i(x) + z'Q_i(x)z + u_i'R_{ii}(x)u_i + u_j'R_{ij}(x)u_j)dt, \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j.$$

Вводятся усеченные – быстрая и медленная – системы, допускающие решения соответствующих игровых задач в явном виде. Показано, что выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу точной и усеченной задач отличаются на величину порядка $O(\varepsilon)$.

Второй класс дифференциальных игр описывается системой

$$\begin{aligned}
&dx/dt = a_{00}(x) + \sum_{i=1}^{2} A_{0i}(x)z_i + \sum_{i=1}^{2} B_{0i}(x)u_i, \quad x(0) = x_0,\\
&\varepsilon_i dz_i/dt = a_{i0}(x) + A_{ii}(x)z_i + \varepsilon_{ii}A_{ij}(x)z_j + B_{ii}(x)u_i, \quad z_i(0) = z_{i0},\\
&i, j = 1, 2; \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

с функциями выигрыша

$$J_i = \int_0^\infty (p_i(x) + s_i'(x)z_i + z_i'Q_i(x)z_i + u_i'R_{ii}(x)u_i)dt$$

(игроки взаимодействуют только через медленную часть системы). В этом случае приближенные задачи для быстрой и медленной переменной могут решаться независимо друг от друга. Как и в первой задаче, доказана робастность приближенной задачи с точностью до $O(\varepsilon)$.

В [233] изучается многошаговая управляемая система

$$\begin{aligned}
&x_1(n+1) = (I + \varepsilon A_1)x_1(n) + \varepsilon A_2 x_2(n) + \varepsilon B_1 u_1(n) + \varepsilon B_2 u_2(n),\\
&x_2(n+1) = A_3 x_1(n) + A_4 x_2(n) + B_3 u_1(n) + B_4 u_2(n),\\
&y(n) = C_1 x_1(n) + C_2 x_2(n),
\end{aligned}$$

где x_1 ($x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$) – медленная переменная, x_2 ($x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$) – быстрая переменная, $u_1(u_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1})$ и u_2 ($u_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$) – управления соответственно первого и второго игроков, все матрицы в предыдущей системе постоянные. Функция выигрыша i-го игрока ($i = 1{,}2$) имеет вид:

$$J_1 = -J_2 = \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (y'(n)y(n) + u_1'(n)R_1 u_1(n) + u_2'(n)R_2 u_2(n)).$$

Из исходной системы выделяются быстрая и медленная подсистемы. Пусть $\{u_{1f}, u_{2f}\}$, $\{u_{1s}, u_{2s}\}$ – ситуации равновесия по Нэшу для быстрой и медленной подсистем соответственно. Сравниваются ситуации $\{u_{1c}, u_{2c}\} = \{u_{1f}+u_{1s}, u_{2f}+u_{2s}\}$ и $\{u_1^*, u_2^*\}$ – ситуация равновесия по Нэшу исходной игры. Доказано, что $u_{ic} = u_i^* + O(\varepsilon)$, $J_{ic} = J_i^* + O(\varepsilon^2)$ ($i = 1{,}2$), где J_i^* – выигрыш i-го игрока в ситуации равновесия по Нэшу исходной игры, а J_{ic} – выигрыш i-го игрока в ситуации $\{u_{1f} + u_{1s}, u_{2f} + u_{2s}\}$ при разделении движений на быстрые и медленные.

В [204] предлагается метод исследования сингулярно возмущенных линейно-квадратичных игр. Строятся стратегии, близкие к оптимальным по Штакельбергу.

Достаточные условия существования предела решений задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений Гамильтона – Якоби получены в [123]. Эти результаты используются для исследования существования асимптотики функции цены игры, содержащей медленные и быстрые движения.

Антагонистическая дифференциальная игра, динамика которой описывается нелинейной сингулярно возмущенной системой, рассмотрена в [159]. Показано, что верхняя и нижняя функции цены этой игры имеют одинаковые пределы при стремлении малого параметра к нулю, общее значение их есть вязкое решение некоторого уравнения Гамильтона – Якоби – Айзекса.

В [169] построение седловой точки для антагонистической линейно-квадратичной дифференциальной игры с "дешевым" управлением в функции выигрыша для минимизирующего игрока сводится к сингулярно возмущенному матричному дифференциальному уравнению типа Риккати, причем для быстрых переменных краевые условия не ограничены по малому параметру. Для решения уравнения Риккати строится асимптотическое разложение, на основе которого получаются субоптимальные стратегии игроков с обратной связью, а также устанавливается асимптотическое свойство равновесных стратегий.

17. Применение метода усреднения для исследования сингулярно возмущенных систем управления

Сначала укажем опубликованные за последние два десятилетия монографии [2, 22, 118], посвященные использованию метода усреднения в задачах управления.

В [22] обосновывается общая схема усреднения для задач управления системами с быстрыми и медленными движениями, а также разрабатываются алгоритмы построения субоптимальных управлений. В [158] также развивается техника исследования сингулярно возмущенных задач оптимального управления, отличная от метода пограничного слоя, которая применяется, например, в случае, когда оптимальное управление быстро осциллирует. Изложим кратко главную идею этого подхода. По системе

$$
\begin{aligned}
&dx/dt = f(x, y, u), \quad x(0) = x_0,\\
&\varepsilon dy/dt = g(x, y, u), \quad y(0) = y_0,
\end{aligned}
$$

где допустимыми управлениями $u(t)$ являются измеримые функции со значениями в замкнутом подмножестве из $\mathbb{R}^r$, строится дифференциальное включение

$$
dx/dt \in \overline{V}(x), \quad x(0) = x_0.
$$

Здесь $\overline{V}(x) = \lim\limits_{s\to\infty} \overline{V}(x, s, y)$ (предполагается, что такой предел, вычисляемый по метрике Хаусдорфа, существует), $\overline{V}(x, s, y)$ – замыкание множества

$$
V(x, s, y) = \cup \left(\frac{1}{s} \int\limits_0^s f(x, y_x(\tau, u(\cdot), y), u(\tau)) d\tau \right),
$$

объединение берется по всем допустимым управлениям, $y_x(\tau, u(\cdot), y)$ – решение присоединенной системы

$$
dy/d\tau = g(x, y, u), \quad \tau = t/\varepsilon, \quad x = \mathrm{const}\,, \quad y(0) = y.
$$

Рассматриваются задачи минимизации функционала

$$
J(u) = G(x(1))
$$

на множестве решений сингулярно возмущенной системы (задача SP), на множестве решений вырожденной системы

$$
dx/dt = f(x, \varphi(x, u), u), \quad x(0) = x_0,
$$

где $y = \varphi(x, u)$ – корень уравнения $0 = g(x, y, u)$ (задача R), и на множестве решений дифференциального включения (задача A). Устанавливается, что необходимым и достаточным условием близости решений задач SP и R является существование решения задачи A, удовлетворяющего определенным условиям. Отметим, что предположения, при которых используется рассматриваемый подход, трудно проверяемы. Близость траектории медленного движения сингулярно возмущенной системы управления к решению дифференциального включения специального вида доказана в [160].

В [125] для дифференциального включения с управлением, содержащего медленные и быстрые переменные,

$$
dz/dt \in \varepsilon F(z, u, \varepsilon) \times G(z, u, \varepsilon), \quad z(0) = z_0
$$

приводятся теоремы об аппроксимации по медленным переменным на асимптотически большом промежутке времени $[0, 1/\varepsilon]$ с помощью более простых дифференциальных включений, размерность фазового пространства которых совпадает с размерностью вектора медленных переменных.

Аппроксимация дифференциального включения с быстрыми и медленными переменными на асимптотически большом промежутке времени при помощи более простых дифференциальных включений изучается также в [126]. Заметим, что аппроксимирующие включения определены, вообще говоря, неоднозначно.

Асимптотика сингулярно возмущенных систем управления с тремя временными шкалами исследуется в [161]. Метод усреднения применяется для построения предельной системы для наиболее медленного движения в виде дифференциального включения. Получены достаточные условия равномерной сходимости наиболее медленных траекторий.

В [131] изучается линейно-квадратичная задача оптимального управления с уравнением состояния

$$\begin{aligned} &dx/dt = \varepsilon(A_1(t)x + A_2(t)y + B_1(t)u), \quad x(0) = x^0, \\ &\varepsilon dy/dt = A_3(t)x + A_4(t)y + B_2(t)u), \quad y(0) = y^0 \end{aligned}$$

и с критерием качества

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}z'(1/\varepsilon)Fz(1/\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{1/\varepsilon}(z'W(t)z + u'R(t)u)dt, \quad z = (x', y')'.$$

С помощью методов усреднения и пограничных функций строится асимптотическое разложение решения рассматриваемой задачи управления на асимптотически большом промежутке времени.

18. Использование метода регуляризации Ломова С.А. [107]

Как хорошо известно, одной из проблем приближенного интегрирования сингулярно возмущенных задач является проблема аппроксимации их более простыми решениями, которые либо не содержат малого параметра, либо допускают сравнительно простой асимптотический анализ решений при стремлении малого параметра к нулю. В случае сингулярно возмущенной системы $\varepsilon dx/dt = f(t, x)$, $x(0) = x^0$ наиболее простой является вырожденная система $0 = f(t, \overline{x})$, получаемая из исходной при $\varepsilon = 0$. Однако не для всех сингулярно возмущенных задач вырожденная система (или, по другой терминологии, предельная система) может быть получена непосредственным предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ в исходной задаче, так как условия могут зависеть от ε сингулярным образом. Такого типа задача, заключающаяся в минимизации квадратичного критерия качества, содержащего быстро изменяющийся коэффициент,

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x'W(t)x + u'R(t)u)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu(\theta)d\theta\right)dt$$

на траекториях линейной сингулярно возмущенной системы

$$\varepsilon dx/dt = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0; T],$$

изучалась в [8, 9]. Здесь $W(t)$, $R(t)$, $A(t)$, $B(t)$ – матрицы соответствующих размерностей, при всех $t \in [0;T]$ $W(t) = W'(t) \geqslant 0$, $R(t) = R'(t) > 0$, $\mu(t) \in \mathbb{R}$, $T > 0$ фиксировано.

Из условия оптимальности управления для рассматриваемой задачи получается двухточечная краевая задача для системы, в которой поведение спектра матрицы, стоящей в дифференциальном уравнении при неизвестной, зависит от коэффициента $\mu(t)$, который (при определенных условиях) может смещать его в ту или иную сторону комплексной плоскости. При этом может возникнуть ситуация, когда какие-либо точки спектра при некоторых значениях независимой переменной обращаются в нуль. Эта ситуация, трактуемая в методе регуляризации, изложенном в [107], как случай нарушения стабильности спектра, не поддается изучению известными методами.

При некоторых условиях в случае нарушения стабильности спектра в [8] установлен предельный переход решения возмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю, а в [9] развивается алгоритм, позволяющий получать регуляризованные (по Ломову) асимптотические решения для таких задач управления.

В [46] при помощи некоторого варианта метода расщепления, в основе которого лежат идеи Биркгофа – Тамаркина – Ломова, строится асимптотика решения, сингулярности которого выписываются в замкнутой асимптотической форме, для задачи минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon}{2} x'(T) F x(T) + \int\limits_0^T (\varepsilon x' W(t) x + u' R u) dt$$

на траекториях системы

$$\varepsilon dx/dt = A(t)x + \sqrt{\varepsilon} B(t) u(t), \quad x(0) = x^0.$$

Здесь F, $W(t)$, $R > 0$, а спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_j(t) \neq \lambda_k(t), j \neq k; \quad j,k = \overline{1,n}; \quad t \in [0;T],$$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leqslant 0, \quad \operatorname{Re} \int\limits_0^T \lambda_j(t) dt < 0, j = \overline{1,n}, \quad t \in [0;T].$$

В этом случае асимптотика не может быть построена методом пограничных функций, так как его алгоритм существенным образом опирается на условие $\operatorname{Re} \lambda_j(t) < 0$.

19. Примеры приложений

Алгоритмы асимптотического расщепления сингулярно возмущенных систем, реализованные как пакеты универсальных программ для системы компьютерной алгебры в [116], использовались для решения задач управления летательными аппаратами [237].

Путем применения метода периодической оптимизации и асимптотического метода построения алгоритмов управления сингулярно возмущенными объектами в [113] разработана процедура синтеза системы стабилизации программных движений шагающих аппаратов с весомыми ногами, использующая более простое решение задачи управления аппаратом с невесомыми ногами.

В [112] предлагается метод синтеза субоптимального управления механическими системами класса роботов-манипуляторов при помощи пространственно-временной декомпозиции объекта. Таким образом, задача синтеза управления сводится к независимому определению управляющих воздействий полученных быстрых и медленных подсистем.

Предложенная в [110] методика построения субоптимального управления n-го порядка в линейно-квадратичных задачах для процессов, описываемых параболическими уравнениями с малым параметром при старшей производной по пространственной координате, применяется там при решении задач управления процессом охлаждения лопаток газовых турбин.

Достаточные условия идентифицируемости для линейных и нелинейных сингулярно возмущенных систем, полученные на основе этого свойства для быстрой и медленной подсистем, иллюстрируются на примере задачи из кардиологии в [173].

Эффективность предложенного в [164] рекурсивного метода для сингулярно возмущенных линейных систем управления демонстрируется на примерах расчета жидкостной каталитической дробилки и регулятора высоты самолета F8, поддерживающего его в устойчивом положении полета при наличии воздействия ветра. Рассматривается также дискретная модель самолета F8 и дискретная модель пятого порядка паровой энергосистемы. В этой же монографии рекурсивное решение дифференциального матричного уравнения Риккати, возникающего из сингулярно возмущенной задачи, иллюстрируется на примере модели седьмого порядка синхронной машины, связанной с бесконечной шиной (для передачи информации).

Для задачи управления ориентацией гибкого летательного аппарата и уменьшения амплитуды колебаний в [140] строится закон управления в виде комбинации законов управления для подсистем быстрых и медленных движений.

В [89] приводятся результаты численных расчетов в задаче минимизации времени набора высоты легким маневренным самолетом по алгоритму, использующему метод сращиваемых асимптотических разложений для приближенного решения сингулярно возмущенных краевых задач. Математическая модель связана с энергетической моделью. Здесь медленной переменной является приведенная энергия, быстрыми переменными – приведенная высота и угол наклона траектории.

Сингулярно возмущенная линейно-квадратичная непрерывная задача оптимального управления, возникающая при описании задачи стабилизации турбовентиляторного реактивного двигателя $F-100$, рассматривается в [231]. Показывается возможность эффективного использования при расчете обратной связи не уравнения Риккати, а системы уравнений Чандрасекхара. H_∞-управление для сингулярно возмущенной модели летательного аппарата изучается в [236]. Решение задачи о полете летательного аппарата на максимальную дальность сводится в [10] к исследованию краевой задачи, для асимптотического решения которой применяется метод погранфункций.

В [54] сведение к начальной задаче меньшей размерности периодической задачи для сингулярно возмущенного матричного уравнения Риккати используется в задаче оптимального управления крутильными колебаниями простейшего кривошипно-шатунного механизма.

Методы построения асимптотического разложения решения для задач с ограничениями на управление типа замкнутых неравенств, изложенные в [68], применялись для решения сингулярно возмущенной задачи оптимального быстродействия, описывающей процесс управления звеном манипуляционного робота.

В [133] указываются различные постановки сингулярно возмущенных стохастических задач оптимального управления тепловыми процессами с квадратичным критерием качества. Параметр сингулярных возмущений в параболических уравнениях состояния связывается с длиной и толщиной нагреваемого тела, а также с параметрами скорости источника и др. Используется техника метода угловых пограничных функций В.Ф. Бутузова для построения асимптотики решения появляющихся здесь операторных уравнений типа Риккати, затем для возмущенных задач устанавливаются оценки субоптимальности порядка единицы управлений, полученных при вырождении моделей. Построение субоптимальных алгоритмов граничного управления тепловым полем в условиях малой инерционности температуры теплоносителя приводится в [111] для тел различной термической толщины (термически тонкое тело, длинномерное термически тонкое тело, габаритное длинномерное изделие). На основе асимптотического метода погранслоя расширяются возможности существующих инженерных подходов, анализируются эффекты слоев, не учитываемые в традиционных моделях.

Условия оптимальности управления для линейно-квадратичной задачи управления процессом переноса (излучения) частиц в плоско-параллельном слое приводят к исследованию некоторой системы двухточечных краевых задач, аналитическое решение которой получить не представляется возможным. В [73] обосновывается применение метода погранфункций для решения такой задачи в случае, когда уравнение переноса частиц содержит малый параметр перед производной.

Теоретические результаты исследования сингулярно возмущенных линейных систем управления демонстрируются в [162] на практических примерах из авиации, химии, электротехники, механики.

Большой список работ, в которых применяются методы теории сингулярных возмущений для различных приложений, приведен в [207].

20. Заключение

Активные исследования по математическим задачам пограничного слоя в теории управления последних лет, к большому сожалению, представить в материале обзора полностью невозможно.

Поэтому подбор работ зачастую определялся и пристрастиями авторов, и их желанием отобразить спектр постановок и новых технологических решений, которые можно получить в теории управления на основе учета "быстрой" динамики.

Исследования задач управления методами сингулярных возмущений позволяют получать алгоритмы управления более высокой точности, приводят к появлению новых алгоритмов расчета приближенно оптимальных управлений, помогают преодолевать "жесткость" моделей задач управления, получать и объяснять нелинейные эффекты синергетического типа и многое другое.

Очевидно, что впереди множество новых задач, где учет эффектов пограничных или переходных слоев либо необходим по существу, либо будет предопределять новые эффективные алгоритмы и технологии высокоточного управления. Залогом этого является бурное развитие, как теории сингулярных возмущений, так и теории управления.

Выражаем искреннюю глубокую благодарность Барабанову А.Е., Данилину А.Р., Егорову А.И., Жуковскому В.И., Ишмухаметову А.З., Калинину А.И., Копейкиной Т.Б., Никольскому М.С., Соболеву В.А., Чистякову В.Ф., Щегловой А.А., Fridman E., Gajic Z., Gaitsgory V.G., Glizer V.Y. за полезную информацию и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т.Я., Кириакиди В.К., Курина Г.А.* Индефинитный подход к задаче о приводимости неотрицательно гамильтоновой оператор-функции к блочно-диагональной форме // Функцион. анализ и его прил. 2001. Т. 35. № 3. С. 73–75.
2. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
3. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.

4. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 147–152.
5. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем //АиТ. 1989. № 7. С. 71–82.
6. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г., Овезов Х.А.* Построение субоптимальных управлений в линейно-квадратичных задачах, близких к вырожденным / Информатика и системный анализ (Сб. статей). Ашхабад, 1990. С. 4–19.
7. *Биннинг Х.С., Гуделл Д.П.* Управление по выходу неопределенной сингулярно возмущенной нелинейной системы // АиТ. 1997. № 7. С. 81–97.
8. *Бободжанов А.А.* Предельный переход в сингулярно возмущенных интегральных системах и задачах оптимального управления // Докл.РАН. 2001. Т. 379. № 6. С. 727–729.
9. *Бободжанов А.А.* Асимптотические решения сингулярно возмущенных систем управления с быстро изменяющимся демпфированием // Мат. моделирование. 2001. Т. 13. № 11. С. 116–126.
10. *Борзов В.И., Игонина Т.Р.* О задаче полета летательного аппарата на максимальную дальность // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 2. С. 20–24.
11. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем. I // АиТ. 1995. № 4. С. 119–129.
12. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем. II // АиТ. 1995. № 5. С. 103–113.
13. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // АиТ. 1997. № 7. С. 4–32.
14. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.
15. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
16. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в нелинейной задаче оптимального управления // Актуал. проблемы мат. физ. и вычисл. математики. М.: Наука, 1984. С. 40–49.
17. *Вельов В.М., Дончев А.Л.* Непрерывность семейства траекторий линейных систем управления по сингулярным возмущениям // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 274–278.
18. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Асмыкович И.К.* Дескрипторные системы управления: Библиограф. указатель. Мн.: АН БССР, Ин-т математики, 1988.
19. *Гаипов М.А.* Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (формализм) I // Изв. АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН. 1990. № 1. С. 9–16.
20. *Гаипов М.А.* Асимптотика решения дискретной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с фазовым ограничением / Информатика и системный анализ (Сб. статей). Ашхабад, 1990. С. 43–53.
21. *Гаипов М.А., Дмитриев М.Г.* Об управляемости дискретной нестационарной линейной системой с малым шагом // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 2. С. 44–46.
22. *Гайцгори В.Г.* Управление системами с быстрыми и медленными движениями. М.: Наука, 1991.
23. *Гичев Т.Р.* Сингулярные возмущения в линейной дифференциальной игре преследования // Год. ВУЗ. Прилож. мат. 1981 (1982). Т. 17. № 3. С. 9–20.
24. *Гичев Т.Р.* Управляемость линейного сингулярно возмущенного объекта с запаздыванием // Тр. 3-й конф., Руссе, 1985. Ч. 1. Руссе, 1987. С. 83–86.
25. *Гичев Т.Р.* Управляемость сингулярно возмущенного объекта в некоторых критических случаях // Год. ВУЗ. Прилож.мат. 1986 (1987). Т. 22. № 1. С. 31–42.
26. *Глизер В.Я.* Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории линейной оптимальной фильтрации // Изв. вузов. Математика. 1984. № 12. С. 55–58.

27. *Глизер В.Я.* Об одной разностной задаче оптимального управления с малым шагом // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1440–1442.
28. *Глизер В.Я.* Асимптотика решения задачи Коши для матричного дифференциального уравнения Риккати с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С. 517–518.
29. *Глизер В.Я.* Асимптотика решения одной разностной с малым шагом задачи оптимального управления с подвижным правым концом траектории // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1457–1459.
30. *Глизер В.Я.* Сингулярные возмущения в стохастической линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 753–759.
31. *Горнов А.Ю., Дмитриев М.Г., Тятюшкин А.И.* Опыт решения задач оптимального управления с пограничным слоем. ВЦ СО АН СССР. Красноярск, 1985. Деп. в ВИНИТИ 27.11.85, 28441-1385.
32. *Данилин А.Р.* Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189. № 11. С. 27–60.
33. *Данилин А.Р.* Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 3–12.
34. *Данилин А.Р., Ильин А.М.* Асимптотическое поведение решения задачи быстродействия для линейной системы при возмущении начальных данных // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 155–157.
35. *Данилин А.Р., Ильин А.М.* О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 905–926.
36. *Дмитриев М.Г.* О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12. № 3. С. 788–791.
37. *Дмитриев М.Г.* Итерационное решение задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 2. С. 281–284.
38. *Дмитриев М.Г.* Пограничный слой в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 63–69.
39. *Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Автореферат дис… д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1984.
40. *Дмитриев М.Г., Белокопытов С.В., Гаипов М.А.* Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (обоснование) II // Изв. АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН. 1990. № 2. С. 10–18.
41. *Дмитриев М.Г., Кань Ни Минь.* Контрастные структуры в простейшей векторной вариационной задаче и их асимптотика // АиТ. 1998. № 5. С. 41–52.
42. *Дмитриев М.Г., Кань Ни Минь.* Асимптотика контрастных экстремалей в простейшей векторной вариационной задаче // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4. № 4. С. 1165–1178.
43. *Дмитриев М.Г., Кань Ни Минь.* Асимптотика решения с внутренним переходом в простейшей вариационной задаче // Прогр. системы.: Теор. основы и прил. Ин-т прогр. систем РАН. М.: 1999. С. 56–65.
44. *Дмитриев М.Г., Клишевич А.М.* Итерационный метод решения задачи о регуляторе выхода с быстрыми и медленными движениями. Препринт. Красноярск: ВЦ СО АН СССР. № 2. 1983.
45. *Дмитриев М.Г., Клишевич А.М.* Итерационные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач условно устойчивого типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 12. С. 1812–1823.
46. *Дмитриев М.Г., Коняев Ю.А.* Асимптотика типа Биркгофа некоторых сингулярно возмущенных задач оптимального управления // Мат. моделирование. 2002. Т. 14. № 3. С. 27–29.
47. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Прямая схема построения асимптотики решения классических задач оптимального управления // Программные системы. Теоретические основы и приложения / Под ред. А.К. Айламазяна. М.: Наука. Физматлит, 1999. С. 44–55.

48. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А., Овезов Х.А.* Использование прямой схемы для решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с сингулярным возмущением // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 62–68.
49. *Дмитриев М.Г., Солтанов С.Т.* Асимптотика внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости линейных сингулярно возмущенных управляемых систем // Изв.РАН. Теория и системы управления. 1996. № 3. С. 51–54.
50. *Дмитриев М.Г., Яньшин В. Н.* Нелинейная периодическая задача оптимального управления для системы с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. № 3. С. 289–295.
51. *Дончев А.* Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.
52. *Егоров А.И., Михайлова Т.Ф.* Сингулярные возмущения в задачах оптимальной стабилизации теплового процесса // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 3. С. 74–77.
53. *Егоров А.И., Михайлова Т.Ф.* Угловые пограничные функции в сингулярно возмущенной задаче управления тепловым процессом // Оптимизационный синтез в системах с распределенными параметрами. Фрунзе: ИЛИМ, 1989. С. 3–12.
54. *Жарикова Е.Н., Соболев В.А.* Оптимальные периодические системы управления с сингулярными возмущениями // АиТ. 1997. № 7. С. 151–168.
55. *Зеликин М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. М.: Факториал, 1998.
56. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
57. *Ильин А.М., Данилин А.Р., Захаров С.В.* Применение метода согласования асимптотических разложений к решению краевых задач // Современная математика и ее приложения. Т. 5. Асимптотические методы функционального анализа. АН Грузии. Ин-т кибернетики. 2003. С. 33–78.
58. *Ишмухаметов А.З.* Управляемость гиперболических систем при сингулярных возмущениях // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 241–250.
59. *Ишмухаметов А.З.* Условия и оценки сходимости решений задач управления гиперболическими системами с сингулярными возмущениями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 774–783.
60. *Ишмухаметов А.З.* Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Вычисл. центр РАН, 2001.
61. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 880–889.
62. *Калинин А.И.* Метод асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи терминального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 3. С. 366–378.
63. *Калинин А.И.* Асимптотическое решение линейной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 6. С. 488–491.
64. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной нелинейной задачи оптимального быстродействия // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 585–596.
65. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения задачи терминального управления нелинейной сингулярно возмущенной системой // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1762–1775.
66. *Калинин А.И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.
67. *Калинин А.И.* Асимптотический метод решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 9. С. 1473–1483.
68. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Мн.: Экоперспектива, 2000.

69. *Калинин А.И.* Асимптотическая минимизация квадратичных функционалов на траекториях линейных сингулярно возмущенных систем // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2001. № 1. С. 51–56.

70. *Калинин А.И.* Оптимизация возмущенных систем управления // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск: 2001. Т. 7. С. 61–70.

71. *Калинин А.И., Кириллова Ф.М.* Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем в классе малоинерционных управлений // АиТ. 1994. № 4. С. 38–46.

72. *Калинин А.И., Кириллова Ф.М.* Асимптотическая минимизация полного импульса управляющих воздействий // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 12. С. 1427–1438.

73. *Капустян В.Е.* Асимптотический анализ оптимального управления для процесса переноса частиц // Автоматика. 1989. № 6. С. 56–59.

74. *Капустян В.Е.* Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных билинейных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. 1992. № 9. С. 35–39.

75. *Капустян В.Е.* Асимптотика управлений в оптимальных сингулярно возмущенных параболических задачах. Глобальные ограничения на управление // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 428–431.

76. *Копейкина Т.Б.* Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1508–1518.

77. *Копейкина Т.Б.* К проблеме стабилизации линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 3. С. 22–27.

78. *Копейкина Т.Б.* К теории управления нестационарными сингулярно возмущенными системами // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 71–78.

79. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* Наблюдаемость линейных сингулярно возмущенных систем в пространстве состояний // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 22–32.

80. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* Метод пространства состояний в задаче исследования идентифицируемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4. С. 5–14.

81. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* К теории наблюдаемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 22–27.

82. *Коровин С.К., Мамедов И.Г., Мамедова И.П.* Равномерная по малому параметру устойчивость и стабилизация дискретных сингулярно-возмущенных динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 21–29.

83. *Костюкова О.И.* Критерий оптимальности для линейно-квадратичной задачи оптимального управления дескрипторной системой // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1475–1481.

84. *Кремлёв А.Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // АиТ. 1993. № 9. С. 61–78.

85. *Кремлёв А.Г.* Аппроксимация оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной квазилинейной системой // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1994. № 6. С. 183–193.

86. *Кремлёв А.Г.* Об оптимальном управлении ансамблем траекторий сингулярно возмущенной квазилинейной системы // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1892–1904.

87. *Кремлёв А.Г.* О построении асимптотики информационных множеств для сингулярно возмущенных систем // АиТ. 1996. № 7. С. 32–42.

88. *Кремлёв А.Г.* Асимптотика информационных множеств в сингулярно возмущенных задачах оптимального управления // Изв. РАН. Теория и системы упр. 1997. № 1. С. 79–84.

89. *Кубицкий Г.М., Лоскутов П.Б.* Оперативная реализация оптимальных траекторий методом сращиваемых асимптотических разложений // Оптимиз. задачи динам. полета. Моск. авиац. ин-т (МАИ). М.: 1990. С. 47–53.

90. *Курина Г.А.* О полной управляемости одного класса линейных сингулярно возмущенных систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1444–1446.
91. *Курина Г.А.* Асимптотика решения матрично сингулярно возмущенного уравнения Риккати // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 1. С. 26–30.
92. *Курина Г.А.* Об асимптотике решения матрично сингулярно возмущенного уравнения Риккати с бесконечно большим начальным условием // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 83–89.
93. *Курина Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // Мат. заметки. 1992. Т. 52. Вып. 4. С. 56–61.
94. *Курина Г.А.* Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной. Обзор // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 20–48.
95. *Курина Г.А.* О расщеплении линейных систем, не разрешенных относительно производной // Изв. вузов. Математика. 1992. № 4. С. 26–33.
96. *Курина Г.А.* О расщеплении двухточечной краевой задачи, возникающей в теории оптимального управления // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. № 5. С. 704–709.
97. *Курина Г.А.* О поведении множеств достижимости линейных матрично сингулярно возмущенных систем // Тр. МИРАН. 1995. Т. 211. С. 316–325.
98. *Курина Г.А.* Высшие приближения метода малого параметра для слабоуправляемых систем // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 1. С. 28–32.
99. *Курина Г.А.* Прямая схема построения асимптотики решения задач со слабым управлением // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 6. С. 162–167.
100. *Курина Г.А.* Управление в форме обратной связи для линейно-квадратичной задачи оптимального управления в случае вырожденного условия Лежандра // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 85–89.
101. *Курина Г.А.* Асимптотика решения задач оптимального управления для дискретных слабоуправляемых систем // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 214–227.
102. *Курина Г.А., Долгополова Е.Ю.* (составители). Сингулярные возмущения в задачах управления. Библиограф. указатель (1982–2002). Воронеж: ВГЛТА, 2004.
103. *Курина Г.А., Мартыненко Г.В.* О приводимости неотрицательно гамильтоновой вещественной периодической матрицы к блочно-диагональной форме // Мат. заметки. 1999. Т. 66. Вып. 5. С. 688–695.
104. *Курина Г.А., Мартыненко Г.В.* Приводимость одного класса оператор-функций к блочно-диагональной форме // Мат. заметки. 2003. Т. 74. Вып. 5. С. 789–792.
105. *Курина Г.А., Овезов Х.А.* Асимптотический анализ матрично сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления // Изв. вузов. Математика. 1996. № 12. С. 63–74.
106. *Курина Г.А., Щекунских С.С.* Асимптотика решения линейно-квадратичной периодической задачи с матричным сингулярным возмущением в критерии качества // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45. № 4. С. 620–623.
107. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
108. *Мельник Т.А.* Асимптотика решений разрывных сингулярно возмущенных краевых задач // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51. № 6. С. 861–864.
109. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
110. *Михайлова Т.Ф.* Сингулярные возмущения в задачах синтеза оптимального управления системами с распределенными параметрами. Препринт. АН УССР, Ин-т кибернетики. № 10. 1989.
111. *Михеев Ю.В.* Субоптимальные асимптотические алгоритмы граничного управления процессами теплопроводности // АиТ. 1990. № 11. С. 54–62.
112. *Наплатанов Н.Д., Запрянов Й.Д., Михайлов Л.К.* Йерархичен метод за субоптимално управление на нелинейни механични системи с висока размерност // Комплекс. сист. упр. 1985. Т. 3. С. 24–33.

113. *Науменко К.И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. Киев: Наук. думка, 1984.

114. *Овсеевич А.И., Фигурина Т.Ю.* Асимптотическое поведение областей достижимости сингулярно возмущенных линейных автономных управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 977–983.

115. *Пасынков В.Н.* Прямая схема решения задачи оптимального синтеза для сингулярно возмущенного параболического уравнения // Изв. АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН. 1988. № 1. С. 8–12.

116. *Пендюхова Н.В., Соболев В.А.* Пакет символьных вычислений SLOWMAN для анализа сингулярно возмущенных систем // Интеллектуализация программных средств. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990. С. 205–212.

117. *Плисс П.В.* К вопросу о структуре множества управляемости уравнения Ван-дер-Поля с малым параметром при производной // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. 1992. № 2. С. 38–41.

118. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. Киев: Либидь, 1992.

119. *Плотников В.А., Яценко Т.П.* Асимптотическое построение области достижимости линейной сингулярно возмущенной управляемой системы // Изв. вузов. Математика. 1987. № 7. С. 73–76.

120. *Рамазанов М.Д.* Асимптотически оптимальное управление в задаче с возмущением // Асимптот. методы решения задач мат. физ. Уфа, 1989. С. 96–108.

121. *Соболев В.А.* Сингулярные возмущения в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // АиТ. 1991. № 2. С. 53–64.

122. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.

123. *Субботина Н.Н.* Асимптотические свойства минимаксных решений уравнений Айзекса–Беллмана в дифференциальных играх с быстрыми и медленными движениями // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. № 6. С. 901–908.

124. *Фигурина Т.Ю.* Асимптотическое поведение областей достижимости линейных автономных управляемых систем с малым параметром при производных // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С. 18–21.

125. *Филатов О.П.* Усреднение дифференциальных включений с управлением // Дифференц.уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 782–785.

126. *Филатов О.П., Хапаев М.М.* Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.

127. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.

128. *Фридман Л.М.* Разделение движений в разнотемповых разрывных системах управления с запаздыванием // АиТ. 1997. № 7. С. 240–254.

129. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.

130. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // АиТ. 2002. № 3. С. 62–65.

131. *Яценко Т.П.* Асимптотическое исследование линейно-квадратичной задачи управления // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40. № 4. С. 501–507.

132. *Asamoah F., Jamshidi M.* Stabilization of a class of singularly perturbed bilinear systems // Int. J. Control. 1987. V. 46. № 5. P. 1589–1594.

133. *Banov A.M., Golovanov P.A., Mikheev Y.V., Tyomkin L.S.* Perturbation technique in thermal field control problems // 12 IMACS World Congr. Sci. Comput., Paris, 1988. V.5. Villeneuve d'Asq. 1988. P. 194–196.

134. *Belokopytov S.V., Dmitriev M.G.* Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // Syst. Control Lett. 1986. V. 8. № 2. P. 129–135.

135. *Bensoussan A.* Un résultat de perturbations singuliéres pour systémes distribués instables // C. R. Acad. Sci. Ser. 1. 1983. V. 296. № 11. P. 469–472.

136. *Bensoussan A., Blankenship G.L.* Singular perturbations in stochastic control // Singular Perturbations and Asymptotic Analysis in Control Systems. Lect. Notes in Control Inform. Sci. 1986. 90. P. 171–263.

137. *Bensoussan A.* Perturbation Methods in Optimal Control Problems. N.Y.: John Wiley, 1989.

138. *Binning H.S., Goodal D.P.* Constrained output feedbacks for singularly perturbed imperfectly known nonlinear systems // J. Franklin Inst. 1999. V. 336. P. 449–472.

139. *Chen C.-C.* Global exponential stabilization for nonlinear singularly perturbed systems // IEE Proc. Control Theory Appl. 1998. V. 145. № 4. P. 377–382.

140. *Chenumalla Shailaja, Singh Sahjendra N.* Control of elastic spacecraft by nonlinear inversion and singular perturbation // Proc. 33 IEEE Conf. on Decis. and Control, Lake Buena Vista, Fla, 1994. V. 1. Piscataway (N.J.). 1994. P. 927–932.

141. *Chuang C-H., Speyer J.L., Breakwell J.V.* An asymptotic expansion for an optimal relaxation oscillator // SIAM J. Contr. Optimiz. 1988. V. 26. № 3. P. 678–696.

142. *Dmitriev A. M.* The construction of approximately invariant strategies in singularly perturbed control systems with uncertainty // Proc. 2 Int. Conf. “Control of Oscillations and Chaos”. St. Petersburg, Russia, 2000. V. 1. P. 137–139.

143. *Dmitriev M.G., Dontchev A.L., Veliov V.M.* Регуляризованный метод условного градиента в сингулярно возмущенных управляемых оптимальных системах // Сердика Бълг. мат. списание. 1985. V. 11. № 2. P. 180–185.

144. *Dmitriev M.G., Kang Ni Ming.* Contrast structures in simplest variational vector problem and its asymptotics // Proc. IFAC Workshop “Singular Solutions and Perturbations in Control Systems, 1997, Pereslavl-Zalessky, Russia”. Oxford: Elsevier Science Ltd., 1998. P. 13–18.

145. *Dontchev A.L., Veliov V.M.* A singularly perturbed optimal control problem with fixed final state and constrained control // Contr. Cyber. 1982. V. 11. № 1–2. P. 19–28.

146. *Dontchev A.L., Veliov V.M.* Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems // SIAM J. Contr. Optimiz. 1983. V. 21. № 4. P. 566–581.

147. *Dragan V.* Cheap control with several scales // Rev. Roumaine math. Pures Appl. 1988. V. 33. № 8. P. 663–677.

148. *Dragan V., Halanay A.* High-gain feedback stabilization of linear systems // Int. J. Control. 1987. V. 45. № 2. P. 549–577.

149. *Drăgan V., Halanay A.* Uniform controllability for systems with two time-scales // Rev. Roumaine math. Pures Appl. 1992. V. 37. № 8. P. 673–681.

150. *Dragan V., Stoica A.* Some singular perturbation techniques in robust control // Rev. Roumaine sci. techn. Ser. Electrotechn. et énerg. 2000. V. 45. № 3. P. 337–348.

151. 11 IFAC World Congr. Preprints. V.6. Tallinn, Estonia, USSR, 1990.

152. *Fridman E.* Exact decomposition of linear singularly perturbed H^∞-optimal control problem // Kybernetika. 1995. V. 31. № 6. P. 591–599.

153. *Fridman E.* H^∞control of nonlinear singularly perturbed systems and invariant manifolds // New Trends in Dynamic Games and Applications, Series: Ann. Int. Society Dynamic Games, Olsder G. (ed.). Birkhauser: Boston, 1995. P. 25–45.

154. *Fridman E.* Exact slow-fast decomposition of nonlinear singularly perturbed optimal control problem // Syst. Control Lett. 2000. V. 40. P. 121–131.

155. *Fridman E.* State-feedback H^∞ control of nonlinear singularly perturbed systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2001. V. 11. № 12. P. 1115–1125.

156. *Fridman E.* A descriptor system approach to nonlinear singularly perturbed optimal control problem // Automatica. 2001. V. 37. № 4. P. 543–549.

157. *Fridman E., Shaked U.* Robust H_∞ minimum entropy static output-feedback control of singularly perturbed systems // Automatica. 2000. V. 36. P. 1181–1188.

158. *Gaitsgory V.* Suboptimization of singularly perturbed control systems // SIAM J. Contr. Optimiz. 1992. V. 30. № 5. P. 1228–1249.

159. *Gaitsgory V.* Limit Hamilton-Jacobi-Isaacs equations for singularly perturbed zero-sum differential games // Int. J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 202. P. 862–899.

160. *Gaitsgory V., Leizarowitz A.* Limit occupational measures set for a control system and averaging of singularly perturbed control systems // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 233. P. 461–475.

161. *Gaitsgory V., Nguyen Minh-Tuan.* Averaging of three time scale singularly perturbed control systems // Syst. Control Lett. 2001. V. 42. № 5. P. 395–403.

162. *Gajic Z., Lim M.* Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications. High-Accuracy Techniques. Marcel Dekker 2000. Control Engineering series.

163. *Gajic Z., Petkovski D., Harkara N.* The recursive algorithm for the optimal static output feedback control problem of linear singularly perturbed systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 4. P. 465–468.

164. *Gajic Z., Petkovski D., Shen X.* Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear Control Systems: a Recursive Approach. Berlin et al. Springer, 1990- VII, Lect. Notes Control Inform. Sci. № 140.

165. *Garofalo F., Leitman G.* Nonlinear composite control of a nominally linear singularly perturbed uncertain system // 12 IMACS World Congr. Sci. Comput., Paris, 1988. V. 2. Villeneuve d'Asq, 1988. P. 83–86.

166. *Glizer V.Y.* Asymptotic solution of singularly perturbed infinite dimensional Riccati equation // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 214. P. 63–88.

167. *Glizer V.Y.* Asymptotic solution of a singularly perturbed set of functional-differential equations of Riccati type encountered in the optimal control theory // Nonlinear Differ. Equat. and Appl. (NoDEA). 1998. V. 5. № 4. P. 491–515.

168. *Glizer V.Y.* Stabilizability and detectability of singularly perturbed linear time-invariant systems with delays in state and control // J. Dyn. and Contr. Syst. 1999. V. 5. № 2. P. 153–172.

169. *Glizer V.Y.* Asymptotic solution of zero-sum linear-quadratic differential game with cheap control for minimizer // Nonlinear Differ. Equat. and Appl. (NoDEA) 2000. V. 7. № 2. P. 231–258.

170. *Glizer V.Y.* Euclidean space controllability of singularly perturbed linear systems with state delay // Syst. Control Lett. 2001. V. 43. № 3. P. 181–191.

171. *Glizer V.Y.* Observability of singularly perturbed linear time-dependent differential systems with small delay // J. Dyn. Control Syst. 2004. V. 10. № 3. P. 329–363.

172. *Glizer V.Y., Fridman E.* H^{∞} control of linear singularly perturbed systems with small state delay // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 250. P. 49–85.

173. *Henry J., Pierret C.* Identification of systems with fast and slow dynamics application to the cardiac action potential // Proc. 25th IEEE Conf. Decis. Contr., Athens. V. 1. N.Y., 1986. P. 277–281.

174. *Ioannou P.A., Kokotovic P.V.* Adaptive Systems with Reduced Models. Lect. Notes in Control Inform. Sci. 47. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.

175. *Ioannou P., Kokotovic P.* Decentralized adaptive control in the presence of multiparameter singular perturbations and bounded disturbances // Proc. Amer. Contr. Conf., San Francisco, Calif., 1983. V. 2. s.l., s.a. P. 553–558.

176. *Kalinin A.I., Polevikov S.V.* Asymptotic solution of the minimum force problem for linear singularly perturbed systems // Automatica. 1998. V. 34. № 5. P. 625–630.

177. *Kamenski M., Nistri P., Quincampoix M.* Sliding mode control of uncertain systems: a singular perturbation approach // IMA J. Math. Control Inform. 2002. V. 19. P. 377–398.

178. *Kapustyan V.E.* The asymptotic analysis of optimal control problems for singularly perturbed periodical parabolical system // Proc. Int. Workshop "Singular Solutions and Perturbations Contr. Syst". Pereslavl-Zalessky, 1995. C. 45–47.

179. *Khalil H., Chen F.* H^{∞} control of two-time-scale systems // Syst. Control Lett. 1992. V. 19. P. 35–42.

180. *Kimura M.* On the matrix Riccati equation for a singularly perturbed linear discrete control system // Int. J. Control. 1983. V. 38. № 5. P. 959–975.

181. *Kokotovic P.V.* Application of singular perturbation techniques to control problems // SIAM Review. 1984. V. 26. № 4. P. 501–550.

182. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. London etc.: Academic Press, 1986.
183. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. SIAM, 1999.
184. *Kokotovic P.V., O'Malley R.E. Jr., Sannuti P.* Singular perturbations and order reduction in control theory. An overview // Automatica. 1976. V. 12. № 2. P. 123–132.
185. *Komornik V.* Perturbations singuliéres de systémes distriués instables // C.r. Acad. sci. 1983. Sér. 1. V. 296. № 19. P. 797–799.
186. *Kopeikina T.B.* The qualitative theory of control processes // Notes mat. Univ. Andes. 2001. № 215. P. 1–73.
187. *Kremlev A.G.* Asymptotic approximation of the sets of possible states of singularly perturbed quasilinear systems // Int. Conf. "Dynamical systems: stability, control, optimization". Abstracts. V. 2. Minsk, Belarus, 1998. P. 162–165.
188. *Kurina G.A.* Feedback control for time-varying descriptor systems // Syst. Sci. 2001. V. 26. № 3. P. 47–59.
189. *Kurina G.A.* Feedback control for discrete descriptor systems // Syst. Sci. 2002. V. 28. № 2. P. 29–40.
190. *Kurina G.A.* Linear-quadratic discrete optimal control problems for descriptor systems in Hilbert space // J. Dyn. Control Syst. 2004. V. 10. № 3. P. 365–375.
191. *Kurina G.A., März R.* On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems // SIAM J. Contr. Optimiz. 2004. V. 42. № 6. P. 2062–2077.
192. *Kurina G. A., Shabanova S. S.* Asymptotic solution of periodic control problem perturbed by matrix // IFAC Workshop on Singular Solutions and Perturbations in Control Systems, 1997, Pereslavl-Zalessky, Russia. Elsevier Science Ltd. Oxford, 1998. P. 37–42.
193. *Lee J.T., Bien Z.N.* A quadratic regulator with cheap control for a class of nonlinear systems // J. Optimiz. Theory Appl. 1987. V. 55. № 2. P. 289–302.
194. *Leitmann G.* Controlling singularly perturbed uncertain dynamical systems // Model and Contr. Syst. Eng., Quantum Mech., Econ. and Biosci.: Proc. Bellman Contin. Workshop, Sophia Antipolis, 1988. Berlin etc., 1989. P. 3–14.
195. *Lewis F.L.* A survey of linear singular systems // Circuits, Syst. Signal Proc. 1986. V. 5. № 1. P. 3–36.
196. *Lions J.L.* Exact controllability and singular perturbations // Wave Motion: Theory, Modelling and Comput.: Proc. Conf. Hon. 60 birthday Peter D.Lax., Berkeley, Calif., 1986. N.Y. e.a., 1987. P. 217–247.
197. *Lions J.L.* Controlabilité exacte et perturbations singuliéres (II). La methode de dualité // Appl. Multiple Scaling Mech.: Proc. Int. Conf., Ec. norm. super., Paris, 1986. Paris, 1987. P. 223–227.
198. *Litkouhi B., Khalil H.* Infinite-time regulators for singularly perturbed difference equations // Int. J. Control. 1984. V. 39. P. 587–598.
199. *Mahmoud Magdi S.* Stabilization of discrete systems with multiple-time scales // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. № 2. P. 159–162.
200. *O'Malley R.E. Jr.* Singular perturbations and optimal control // Lect. Notes Math. 1978. V. 680. P. 171–218.
201. *Mc Clamroch N.H., Krishnan H.* Non-standard singularly perturbed control systems and differential-algebraic equations // Int. J. Control. 1992. V. 55. № 5. P. 1239–1253.
202. *Marino R., Kokotovic P.* A geometric approach to composite control of two-time-scale systems // Proc. 25 IEEE Conf. Decis. Control, Athens, 1986. V. 2. N.Y.: 1986. P. 1397–1399.
203. *Mehrmann V.L.* The autonomous linear quadratic control problem. Lect. Notes Control Inform. Sci. 1991. V. 163.
204. *Mizukami K., Xu H.* Near-optimal incentive Stackelberg strategies for singularly perturbed systems // Automat. Contr.: Proc. 11th Trienn. World Congr. Int. Fed. Autom. Contr., Tallinn, 1990. V. 3. Oxford etc., 1991. P. 427–432.
205. *Moiseev N.N., Chernousko F.L.* Asymptotic methods in the theory of optimal control // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. № 5. P. 993–1000.

206. *Naidu D.S.* Singular Perturbation Methodology in Control Systems. IEE Control Eng. ser., 1988. 34.
207. *Naidu D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview // Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. & Algorithm. 2002. V. 9. P. 233–278.
208. *Naidu D.S., Calise A.J.* Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: a survey // AIAA J. Guidance, Control Dynam. 2001. V. 24. P. 1057–1078.
209. *Naidu D.S., Charalambous C.D., Moore K.L., Abdelrahman M.A.* H_∞-optimal control of singularly perturbed discrete-time systems, and risk-sensitive control // Proc. 33 IEEE Conf. Decis. and Contr., Lake Buena Vista, Fla. 1994. V. 2. P. 1706–1711.
210. *Naidu D.S., Rao A.K.* Singular perturbation analysis of discrete control systems // Lect. Notes Math. 1985. V. 1154.
211. *Pan Z., Basar T.* H^∞-optimal control for singularly perturbed systems. Part I: Perfect state measurements // Automatica. 1993. V. 29. P. 401–424.
212. *Pan Z., Basar T.* H^∞-optimal control for singularly perturbed systems. Part II: Imperfect state measurements // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. AC-39. № 2. P. 280–299.
213. *Pan Z., Basar T.* Time-scale separation and robust controller design for uncertain nonlinear singularly perturbed systems under perfect state measurements // Int. J. Robust Nonlinear Contr. 1996. V. 6. P. 585–608.
214. *Pan Z., Basar T.* Model simplification and optimal control of stochastic singularly perturbed systems under exponentiated quadratic cost // SIAM J. Contr. Optimiz. 1996. V. 34. № 5. P. 1734–1766.
215. *Ryan E. P., Yaacob Z.B.* Singularly perturbed uncertain systems and dynamic output feedback control // Model and Contr. Syst. Eng., Quantum Mech., Econ. and Biosci.: Proc. Bellman Contin. Workshop, Sophia Antipolis, 1988. Berlin etc., 1989. P. 37–50.
216. *Saberi A., Khalil H.* Stabilization and regulation of nonlinear singularly perturbed systems-composite control // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. 30. № 8. P. 739–747.
217. *Saberi A., Sannuti P.* Time-scale decomposition of a class of linear and nonlinear cheap control problems // Proc. Amer. Contr. Conf., Boston, Mass., 1985. V.3. Green Valley, Ariz., 1985. P. 1414–1421.
218. *Saberi A., Sannuti P.* Cheap and singular controls for linear quadratic regulators // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. AC-32. № 3. P. 208–219.
219. *Saksena Vikram R., Cruz J.B., Jr.* Robust Nash strategies for a class of non-linear singularly perturbed problems // Int. J. Control. 1984. V. 39. № 2. P. 293–310.
220. *Saksena V.R., O'Reilly J., Kokotovic P.V.* Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976–1983 // Automatica. 1984. V. 20. № 3. P. 273–293.
221. *Sannuti P.* Direct singular perturbation analysis of high gain and cheap control problems // Automatica. 1983. V. 19. № 1. P. 41–51.
222. *Sannuti P., Wason H.* Multiple time-scale decomposition in cheap control problems – singular control // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. AC-30. № 8. P. 633–644.
223. Singular Perturbations and Asymptotic Analysis in Control Systems / Ed. P. Kokotovic, A. Bensoussan, G. Blankenship. Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.
224. Singular Perturbations in Systems and Control / Ed. M.D. Ardema. International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. № 280. Wien-New York: Springer-Verlag, 1983.
225. Singular Perturbations in Systems and Control / Ed. P.V. Kokotovic, H.K. Khalil. N.Y.: IEEE Press, 1986.
226. Singular Solutions and Perturbations in Control Systems. Proc. of Int. Workshop "Singular Solutions and Perturbations in Control Systems", Pereslavl-Zalessky, 1993.
227. Singular Solutions and Perturbations in Control Systems. Proc. of Int. Workshop "Singular Solutions and Perturbations in Control Systems", Pereslavl-Zalessky, 1995.
228. Singular Solutions and Perturbations in Control Systems. Proc. of Int. Workshop "Singular Solutions and Perturbations in Control Systems", Pereslavl-Zalessky, 1997.

229. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system // Syst. Control Lett. 1984. V. 5. P. 169–179.
230. *Su W. C., Gajic Z., Shen X.M.* The exact slow-fast decomposition of the algebraic Riccati equation of singularly perturbed systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. 37. № 9. P. 1456–1459.
231. *Syrcos G.P., Sannuti P.* Singular perturbation modeling and design techniques applied to jet engine control // Optim. Control Appl. Meth. 1986. V. 7. № 1. P. 1–17.
232. *Tan W., Leung T., Tu Q.* H^{∞} control for singularly perturbed systems // Automatica. 1998. V. 34. № 2. P. 255–260.
233. *Tran Minh T., Sawan Mahmoud E.* Nash strategies for discrete-time systems with slow and fast modes // Int. J. Syst. Sci. 1983. V. 14. № 12. P. 1355–1371.
234. *Tuan H.D, Hosoe S.* On linear robust H^{∞} controllers for a class of nonlinear singular perturbed systems // Automatica. 1999. V. 35. № 4. P. 735–739.
235. *Van Harten A.* Singularly perturbed systems of diffusion type and feedback control // Automatica. 1984. V. 20. № 1. P. 79–91.
236. *Vian John L., Sawan M. Edwin.* H_{∞} control for a singularly perturbed aircraft model // Optim. Control Appl. Meth. 1994. V. 15. № 4. P. 277–289.
237. *Voropaeva N.V.* Computer algebra methods in the problems of control and dynamics of aircrafts // Proc. Int. Congr. Comput. Syst. Appl. Math. CSAM'93. St/Petersburg, 1993. P. 116.
238. *Xu H., Mizukami K.* Nonstandard extension of H^{∞}-optimal control for singularly perturbed systems // Proc. 7 Int. Symp. Dynamic Games Appl. Kanagawa, Japan. 1996. P. 931–948.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.П. Курдюковым.

Поступила в редакцию 21.05.2004