В. А. Якубович, Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками, *Автомат. и телемех.*, 1967, выпуск 6, 5–30

Непрерывные системы управления

УДК 62-501

ЧАСТОТНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ИЛИ ЛИНЕЙНЫМИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ БЛОКАМИ *

В. А. ЯКУБОВИЧ

(Ленинград)

Рассматриваются системы управления с квадратичными связями на входы и выходы нелинейных блоков. Показывается, что связям этого типа удовлетворяют многие обычно встречающиеся нелинейности. Устанавливаются частотные условия абсолютной устойчивости, которые могут быть записаны непосредственно по передаточным функциям линейной части и связям на нелинейности.

Введение

Будем рассматривать замкнутые системы управления с конечным числом степеней свободы, содержащие несколько нелинейных или линейных нестационарных блоков (которые для краткости будем также иногда называть нелинейными). Обозначим через $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ входы указанных блоков и через $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — их выходы. Не исключается случай, когда ряд нелинейных блоков имеет одинаковый вход, а также случай, когда некоторые из нелинейных блоков имеют несколько входов, т. е. описываются функциями многих переменных. Возможен также случай, когда ряд нелинейных блоков описывается гистерезисными функциями, т. е. значение φ_j в момент t может определяться значениями входов в промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant t$, а также, быть может, начальным значением $\varphi_j|_{t=0}$ (см. подробнее [3, 6]). Будем предполагать, однако, что нелинейные блоки удовлетворяют определенным условиям, сформулированным и подробно поясненным ниже.

Частотные условия абсолютной устойчивости систем со многими нелинейностями получены Поповым [7—9], Халанаем [10], Джури и Ли [11] и другими авторами (см. [4, 12, 13]). В этих работах предполагается, как правило, что $m = n$ и что $\varphi_j = \varphi_j(\sigma_j)$ — обычные стационарные функции, такие, что ограничены (сверху или снизу) отношения $\varphi_j(\sigma_j) / \sigma_j$. Центральным результатом является критерий Попова [7, 8, 4]. Для случая линейных нестационарных блоков частотное условие асимптотической устойчивости получено Бонджорно [14]. Случай импульсных систем со многими нелинейностями рассмотрен в работах Цыпкина и Эпельмана [15], Джури и Ли [11] и других авторов.

В отличие от цитированных работ частотное условие абсолютной устойчивости, выведенное в настоящей статье, во-первых, применимо во многих случаях, когда неприменимы известные критерии (нелинейности могут зависеть от нескольких входов, могут быть гистерезисными, отношения $\varphi_j(\sigma_j) / \sigma_j$ могут быть неограниченными ни сверху, ни снизу), и, во-вторых, это условие часто позволяет более полно использовать известные свойства нелинейностей. В силу последнего обстоятельства частотное условие

* Настоящая статья является продолжением статей [1—3]. Анонсированные в [1] и оставшиеся неразобранными темы рассмотрены не будут, так как близкие результаты отчасти изложены в [4] и отчасти получены в [5].

настоящей работы может дать лучший результат даже в случаях, когда применимы известные критерии. В разделе 5 приведен пример системы с двумя однозначными стационарными нелинейностями, для которой критерий Попова результата не дает, но которая является абсолютно устойчивой согласно критерию теоремы 1. Наиболее интересные результаты получаются при наличии нескольких нелинейных блоков с общими входами. (К этому случаю относится и указанный пример раздела 5).

Автор выражает благодарность М. А. Айзерману, А. М. Летову и Е. С. Пятницкому за ряд ценных замечаний, учтенных в окончательной редакции статьи.

1. Основные предложения

Перейдем к подробному изложению. Пусть ν — размерность фазового пространства системы и x — вектор (порядка $\nu \times 1$) фазовых переменных систем. Введем $m \times 1$ и $n \times 1$-векторы $\sigma = \|\sigma_j\|$, φ Z $\|\varphi_j\|$.

Дифференциальные уравнения рассматриваемых систем в векторно-матричных обозначениях имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi, \quad \sigma = r^* x, \tag{1}$$

где P, q, r — постоянные вещественные матрицы соответственно порядков $\nu \times \nu$, $\nu \times n$, $\nu \times m$. Передаточной матрицей линейной части системы от входов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ к выходам $-\varphi_1, \ldots, -\varphi_n$ будет $m \times n$-матрица

$$\chi(\lambda) = r^*(P - \lambda I)^{-1} q = \|\chi_{jh}(\lambda)\|. \tag{2}$$

Будем предполагать вначале линейную часть системы асимптотически устойчивой, т. е. считать, что P — гурвицева матрица. Последнее означает, что все полюсы передаточных функций $\chi_{jh}(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости. Система (1) может быть формально записана в виде

$$\sigma = -\chi(p)\varphi \quad (p = d/dt) \tag{3}$$

или (в скалярной форме) в виде

$$\sigma_j + \sum_{h=1}^{n} \chi_{jh}(p)\varphi_h = 0 \quad (p = d/dt,\ j = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Уравнения (4) можно получить из заданной системы дифференциальных уравнений (не обязательно приведенной к виду (1)), заменяя формально d/dt на p и выражая аргументы σ_j нелинейностей φ_h через эти нелинейности. Например, для скалярного уравнения $T_0^2 d^2\sigma / dt^2 + T_1 d\sigma / dt + \sigma + d / dt\, \varphi(\sigma, t) = 0$ имеем сразу $\sigma = -\chi(p)\varphi$, где $\chi(p) = p(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1)^{-1}$. Именно в виде уравнений (4) задаются обычно уравнения системы.

Сформулируем теперь основное предположение о характере нелинейностей. Будем предполагать, что могут быть указаны однородные квадратичные формы W_j относительно $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, а такие, что в процессе работы системы входы $\sigma_j(t)$ и выходы $\varphi_h(t)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered} W_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k_1), \\ W_j \geqslant 0 \quad (j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2 = k). \end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим разные случаи, поясняя, каким образом могут быть найдены соотношения (5).

А. Пусть выход φ_j и вход σ_j располагаются всегда на плоскости $\{\sigma_j, \varphi_j\}$ между лучами $\varphi_j = \mu_1\sigma_j$ и $\varphi_j = \mu_2\sigma_j$, где $\mu_1 < \mu_2$ — постоянные числа.

В этом случае выполнено $\mu_1 \leqslant \varphi_j / \sigma_j \leqslant \mu_2$, т. е.

$$W_j \equiv (\varphi_j - \mu_1\sigma_j)(\mu_2\sigma_j - \varphi_j) \geqslant 0. \quad (6)$$

Если $\mu_1 = -\infty$, то имеем

$$W_j = \sigma_j(\mu_2\sigma_j - \varphi_j) \geqslant 0. \quad (7)$$

Если $\mu_2 = \infty$, то

$$W_j = \sigma_j(\varphi_j - \mu_1\sigma_j) \geqslant 0. \quad (8)$$

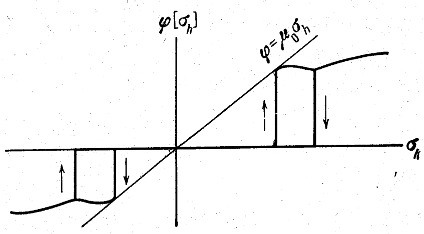

Рис. 1

Например, в случае, когда $\varphi_j = \mu(t)\sigma_j$, где $\mu_1 \leqslant \mu(t) \leqslant \mu_2$, или когда $\varphi_j = \Phi(\sigma_j)$, где $\mu \leqslant \Phi'(\sigma_j) \leqslant \mu_2$, будет выполнено (6), в случае, когда $\varphi_j = \Phi(\sigma_i)$, где $\Phi'(\sigma_j) \geqslant 0$, $\sup \Phi'(\sigma_j) = \infty$, будет выполнено (8) с $\mu_1 = 0$ и т. п. Соотношения (6)—(8) могут иметь место также в случае, когда φ_j — гистерезисная функция σ_j. Это может быть, например, для функции, график которой изображен на рис. 1. Нужно лишь, чтобы график этой функции (меняясь, возможно, во времени) лежал постоянно в некотором секторе указанного вида.

B. Предположим, что φ_j для $j = 1, 2, \ldots, k_1$ имеют вид

$$\varphi_j = (\alpha_j \cos t + \beta_j \sin t + \gamma_j \cos 2t + \delta_j \sin 2t)\sigma_1.$$

Подставляя эти значения в уравнения (4), преобразуем последние к виду, когда вместо k_1 «нелинейностей» имеются следующие четыре:

$$\varphi_1 = \cos t \cdot \sigma_1, \qquad \varphi_2 = \sin t \cdot \sigma_1, \qquad \varphi_3 = \cos 2t \cdot \sigma_1, \qquad \varphi_4 = \sin 2t \cdot \sigma_1.$$

Эти функции удовлетворяют соотношениям:

$$W_1 \equiv \sigma_1^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 0, \qquad W_2 \equiv \sigma_1\varphi_3 - \varphi_2^2 + \varphi_2^2 = 0,$$

$$W_3 \equiv 2\varphi_1\varphi_2 - \sigma_1\varphi_4 = 0.$$

C. Пусть некоторые из φ_j являются не зависящими от времени нечетными функциями σ_1 степени не выше пятой, т. е.

$$\varphi_j = \alpha_j\sigma_1 + \beta_j\sigma_1^3 + \gamma_j\sigma_1^5. \quad (9)$$

Определяя из двух каких-либо уравнений (9) (например, для $j = 1, 2$) σ_1^3 и σ_1^5, получаем

$$\sigma_1^3 = l_1(\sigma_1, \varphi_1, \varphi_2), \qquad \sigma_1^5 = l_2(\sigma_1, \varphi_1, \varphi_2),$$

где l_1, l_2 — линейные однородные формы.

Имеем $(\sigma_1^3)^2 = \sigma_1(\sigma_1^5)$, т. е.

$$W_1 \equiv l_1^2 - \sigma_1 l_2 = 0,$$

где W_1 — квадратичная форма σ_1, φ_1, φ_2. Для оставшихся переменных получим $\varphi_j = \alpha_j\sigma_1 + \beta_j l_1 + \gamma_j l_2$, т. е.

$$W_j \equiv (\varphi_j - \alpha_j\sigma_1 - \beta_j l_1 - \gamma_j l_2)^2 = 0.$$

Здесь W_j — также квадратичные формы.

Отметим, что в этом случае применим прием предыдущего примера с введением новых нелинейностей $\tilde{\varphi}_1 = \sigma_1^3$, $\tilde{\varphi}_2 = \sigma_1^5$. Однако при этом следует иметь в виду, что за счет наличия линейных членов в (9) полюсы новых передаточных функций могут измениться.

D. Прием примера C применим в случае, когда рассматриваемая группа нелинейностей имеет вид

$$\varphi_j = (\alpha_j + \beta_j\psi + \gamma_j\psi^2)\sigma_1, \quad (10)$$

где ψ — произвольная, может быть, неизвестная функция. Следует, однако, стремиться к тому, чтобы соотношения (5), соответствующие группе нелинейностей (10), не только вытекали из (10), но и чтобы при изменении ψ в известных нам пределах совпадали геометрические места точек, определяемые соотношениями (5) и (10). Пусть, например, рассматриваемая группа нелинейностей имеет вид:

$$\varphi_1 = \psi\sigma_1, \qquad \varphi_2 = \psi^2\sigma_1, \tag{11}$$

где

$$\psi = \sigma_1^2 \text{ при } 0 \leqslant \sigma_1^2 \leqslant \alpha, \qquad \psi = \alpha \text{ при } \sigma_1^2 \geqslant \alpha. \tag{12}$$

Полагая $\mu_1 = \varphi_1 / \sigma_1$, $\mu_2 = \varphi_2 / \sigma_1$, получаем, что точка $\mu_1 = \psi(\sigma_1)$, $\mu_2 = \psi(\sigma_1)^2$ описывает при $-\infty < \sigma_1 < \infty$ дугу параболы $\mu_2 = \mu_1^2$ от точки (0, 0) до точки (α, α^2). Соотношение $\mu_2 = \mu_1^2$ дает

$$W_1 \equiv \varphi_2\sigma_1 - \varphi_1^2 = 0. \tag{13}$$

Это соотношение, однако, выполняется и в случае, когда отсутствует условие (12). Поэтому следует добавить какое-либо соотношение, точно «вырезающее» указанный отрезок параболы, например соотношение $\mu_2 \leqslant \alpha\mu_1$. Последнее дает дополнительное условие:

$$W_2 \equiv (\alpha\varphi_1 - \varphi_2)\sigma_1 \geqslant 0. \tag{14}$$

Геометрические места точек в пространстве σ_1, φ_1, φ_2 (или μ_1, μ_2), определяемые соотношениями (11), (12) и соотношениями (13), (14), совпадают.

Е. Предположим, что имеются две нелинейности φ_1, φ_2 одной переменной σ_1, являющиеся непрерывными, нечетными, кусочно-линейными функциями, графики которых составлены из трех отрезков прямых линий. Геометрическим местом точек $\mu_1 = \varphi_1(\sigma_1) / \sigma_1$, $\mu_2 = \varphi_2(\sigma_1) / \sigma_1$ при $-\infty < \sigma_1 < +\infty$ на плоскости μ_1, μ_2 является ломаная, составленная из двух отрезков. Пусть $l_1(\mu_1, \mu_2) = 0$, $l_2(\mu_1, \mu_2) = 0$ — уравнения соответствующих линий и $L(\mu_1, \mu_2) = 0$ — какая-либо кривая второго порядка, вырезающая указанные два отрезка из линий $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, т. е. такая, что в области $L \geqslant 0$ содержатся части линий $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, совпадающие с заданными отрезками. Тогда ограничения (5), соответствующие заданным нелинейностям, имеют вид:

$$W_1 \equiv \sigma_1^2 l_1(\mu_1, \mu_2) l_2(\mu_1, \mu_2) = 0, \qquad W_2 \equiv \sigma_1^2 L(\mu_1, \mu_2) \geqslant 0,$$

причем W_1, W_2 являются, очевидно, однородными квадратичными формами σ_1, φ_1, φ_2.

Этот способ определения соотношений (5) применим в любом случае для двух нелинейностей, когда геометрическим местом точек $\mu_1 = \varphi_1 / \sigma_1$, $\mu_2 = \varphi_2 / \sigma_1$ на плоскости μ_1, μ_2 является линия, составленная из двух отрезков. Это имеет место, например, в случае кусочно-линейных функций $\varphi_1(\sigma_1)$, $\varphi_2(\sigma_1)$, графики которых состоят не более чем из пяти отрезков прямых линий, при условии, что соответствующие точки излома у графиков φ_1 и φ_2 имеют одинаковые абсциссы.

Поясним этот прием следующим простым примером. Пусть φ_1, φ_2 имеют вид, указанный на рис. 2, т. е. $\varphi_1(\sigma_1) = \sigma_1$ при $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \beta$, $\varphi_1(\sigma_1) = \beta$ при $\sigma_1 \geqslant \beta$, $\varphi_2(\sigma_1) = \sigma_1$ при $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, $\varphi_2(\sigma_1) = \alpha$ при $\sigma_1 \geqslant \alpha$ и $\varphi_j(-\sigma_1) = -\varphi_j(\sigma_1)$ $(j = 1, 2)$. (Поскольку φ_1 и φ_2 определяются с точностью до множителя, можно считать без ограничения общности, что совпадают угловые коэффициенты отрезков $\varphi_1 = \varphi_1(\sigma_1)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\sigma_1)$, проходящих через начало координат.)

На плоскости μ_1, μ_2 указанным геометрическим местом точек является ломаная OAB, где точки O, A, B имеют координаты $O(0, 0)$, $A(\alpha / \beta, 1)$, $B(1, 1)$. Уравнения линий OA и AB имеют вид $l_1 \equiv \alpha\mu_2 - \beta\mu_1 = 0$, $l_2 \equiv \mu_2 - 1 = 0$. В качестве кривой L можно взять параболу $L \equiv (\alpha + \beta)\mu_1 - \beta\mu_1^2 - \alpha\mu_2 = 0$, проходящую через точки O, A, B. Соотношения (5), соответствующие указанным нелинейностям, записываются в виде:

$$W_1 \equiv (\alpha\varphi_2 - \beta\varphi_1)(\varphi_2 - \sigma_1) = 0,$$

$$W_2 \equiv (\alpha + \beta)\sigma_1\varphi_1 - \beta\varphi_1^2 - \alpha\sigma_1\varphi_2 \geqslant 0.$$

Заканчивая рассмотрение примеров, поясняющих процесс получения условий (5), отметим следующее. В дальнейшем будут использованы лишь условия (5). Поэтому при их составлении следует стремиться к тому, чтобы они возможно более полно использовали известные свойства нелинейностей: из двух вариантов условий (5) предпочтительнее тот, который описывает более узкое множество в пространстве $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. С другой стороны, как будет следовать из дальнейшего, чем больше число k условий (5), тем труднее исчерпывающая проверка окончательного частот-

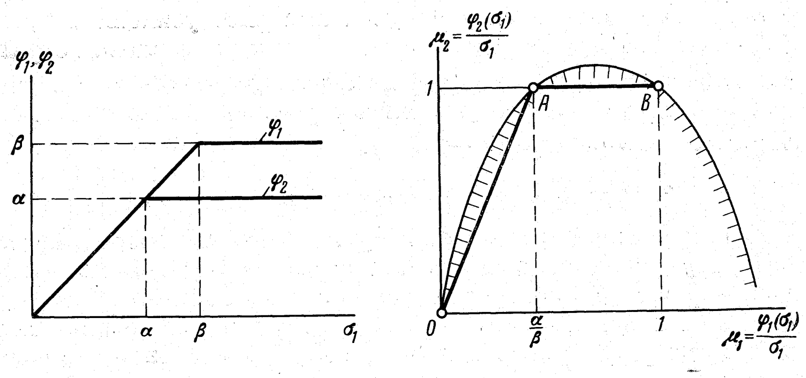

Рис. 2

ного критерия. Поэтому следует стремиться к уменьшению по возможности числа условий (5) *.

Ниже будут использованы некоторые свойства нелинейностей, выраженные в следующем определении **.

Определение 1. Будем говорить, что нелинейность (функционал) $\varphi_j = \varphi_j[\sigma_h]_t$ удовлетворяет условию положительности по отношению к аргументу σ_h, если для любой функции $\sigma_h(t)$ и любых начальных значений $\varphi_j|_{t=0}$ и прочих значений параметров и функций, от которых, возможно, зависит φ_j, найдется постоянная $\delta > 0$, такая, что

$$\int_0^t \varphi_j d\sigma_h \geqslant -\delta \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{15}$$

и усиленному условию положительности, если в (15) $\delta = \delta[\sigma_h(0)]$ — зависящая лишь от $\sigma_h(0)$ непрерывная функция и $\delta[0] = 0$.

Поясним это определение следующими примерами. Пусть $\varphi_j = \psi(\sigma_h)$ — обычная непрерывная функция, такая, что $\sigma_h\psi(\sigma_h) \geqslant 0$ и

* Одно неравенство (6), например, равносильно двум неравенствам:

$$W_j' \equiv \varphi_j\sigma_j - \mu_1\sigma_j^2 \geqslant 0, \qquad W_j'' \equiv \mu_2\sigma_j^2 - \varphi_j\sigma_j \geqslant 0,$$

которые являются согласно сказанному менее приемлемыми.

** Читатель может пропустить это определение, перейдя непосредственно к правилу составления формы W (раздел 2) и полагая по всем дальнейшем изложении $\vartheta_j = 0$ (что приведет к некоторому огрублению результатов). В определении 1 предполагается, что значение φ_j в момент t $(0 \leqslant t < \infty)$ является функционалом относительно $\sigma_h(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$, зависящим, вообще говоря, от начального значения $\varphi_j|_{t=0}$ (см. подробнее [3, 6]). Кроме того, возможно, φ_j зависит от других входов и других параметров. В определении 1 также предполагается, что интеграл в (15) имеет смысл. Если φ_j — обычная или гистерезисная разрывная функция σ_h, то в интеграле (15) она понимается как дополненная [1] в силу системы (1).

$\Psi(\sigma_h) = \int\limits_0^{\sigma_h} \psi(\sigma_h)\,d\sigma_h$. Тогда $\Psi(\sigma_h) \geqslant 0$ и справедливо (15) с $\delta = \Psi[\sigma_h(0)]$. Следовательно, указанная функция удовлетворяет усиленному условию положительности. Заметим, что в случае, когда график функции $\varphi_j = \psi(\sigma_h)$ лежит в секторе $0 \leqslant \varphi_j / \sigma_h \leqslant \mu_0 < \infty$, усиленному условию положительности удовлетворяет также функция $\mu_0\sigma_h - \varphi_j$.

Интегрированием по частям получим аналогично, что функция $\varphi_j = \alpha(t)\psi(\sigma_h)$ удовлетворяет усиленному условию положительности, если $\alpha(t) \geqslant 0$, $d\alpha(t) / dt \leqslant 0$.

Для гистерезисных функций условие положительности означает, что обход любой петли гистерезиса совершается с приращением площади [3, 6]. Так, гистерезисная функция $\varphi[\sigma_h]$, график которой изображен на рис. 1 (понимаемая как дополненная [1]), удовлетворяет усиленному условию положительности *. При изменении на рис. 1 всех направлений стрелок на обратные полученная функция $\widetilde{\varphi}[\sigma_h]$ не будет удовлетворять условию положительности. В этом случае усиленному условию положительности будет удовлетворять функция $\mu_0\sigma_h - \widetilde{\varphi}[\sigma_h]$.

2. Формулировка основных результатов

В частотном условии абсолютной устойчивости, сформулированном ниже, фигурирует некоторая квадратичная форма W, зависящая от некоторых параметров, к составлению которой мы перейдем.

Сопоставим каждой квадратичной форме W_j в соотношениях (5) вещественный параметр τ_j, причем будем считать, что значения τ_j произвольны для $j = 1, \ldots, k_1$ (в условиях (5) соответствующие $W_j = 0$) и $\tau_j \geqslant 0$ для $j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2 = k$ (соответствующие $W_j \geqslant 0$). Указанные значения параметров τ_j будем называть допустимыми. Введем квадратичную форму

$$W(\varphi, \sigma) = \sum_{j=1}^{k} \tau_j W_j,$$

которую представим в виде

$$W(\varphi, \sigma) = \sum_{j,h=1}^{n} \alpha_{jh}\varphi_j\varphi_h + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \beta_{jh}\varphi_j\sigma_h + \sum_{j,h=1}^{m} \gamma_{jh}\sigma_j\sigma_h. \tag{16}$$

Отметим, что соотношения (5) равносильны выполнению неравенства $W(\varphi, \sigma) \geqslant 0$ при всех допустимых значениях τ_j.

В соотношениях (16) $\varphi = \|\varphi_j\|$, $\sigma = \|\sigma_h\|$ — независимые вещественные переменные. Распространим теперь значение W на комплексные значения этих переменных с сохранением эрмитовости формы W. Для этого достаточно каждое произведение $\xi\eta$ скалярных переменных ξ, η заменить на $\operatorname{Re}\xi\eta^*$ (звездочка означает комплексное сопряжение) и, следовательно, ξ^2 на $|\xi|^2$. Очевидно, такое распространение возможно лишь единственным образом **. Обозначая полученную эрмитову форму снова через W, имеем

$$W(\varphi, \sigma) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j,h=1}^{n} \alpha_{jh}\varphi_j\varphi_h^* + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \beta_{jh}\varphi_j\sigma_h^* + \sum_{j,h=1}^{m} \gamma_{jh}\sigma_j\sigma_h^*\right). \tag{17}$$

---

* Предполагается, что график не меняется во времени.

** Действительно, пусть эрмитовы формы $W_j = x^*A_jx$ ($j = 1, 2$) совпадают для вещественных векторов x, т. е. $x^*Ax = 0$, где $A = A_1 - A_2 = A^*$. Тогда $\operatorname{grad} x^*Ax = 2Ax = 0$ для любого вещественного x. Поэтому $A = 0$, $A_1 = A_2$, $W_1(x) = W_2(x)$.

Коэффициенты формы $W(\varphi, \sigma)$ зависят от параметров $\tau_1, \ldots, \tau_k$.

Рассмотрим снова заданные нелинейности $\varphi_h = \varphi_h[\sigma_{q_h}]$, выделяя один из входов σ_{q_h}, от которого зависит φ_h. Сопоставим каждой нелинейности вещественный параметр ϑ_h со следующей областью значений: $\vartheta_h \geqslant 0$, если $\varphi_h[\sigma_{qh}]$ удовлетворяет условию положительности, и $\vartheta_h \leqslant 0$, если $(-\varphi_h[\sigma_{qh}])$ удовлетворяет условию положительности, и $\vartheta_h = 0$, если ни φ_h, ни $(-\varphi_h)$ не удовлетворяют условию положительности *. Указанные значения параметров ϑ_h будем называть допустимыми.

Составим следующую квадратичную форму комплексных переменных $\varphi = \|\varphi_n\|$ с коэффициентами, зависящими от комплексного параметра p:

$$F(p, \varphi) = \mathrm{Re}\left[p \sum_{h=1}^{n} \vartheta_h \varphi_h^* \sigma_{q_h}\right] + W(\varphi, \sigma), \tag{18}$$

где $\sigma = -\chi(p)\varphi$.

Таким образом, вместо σ_j должны быть подставлены их значения (4) для комплексного p. Коэффициенты формы F зависят также от введенных вещественных параметров τ_j $(j = 1, \ldots, k)$ и ϑ_h $(h = 1, \ldots, n)$. В случае, когда все $\vartheta_h = 0$, имеем просто $F(p, \varphi) = W(\varphi, -\chi(p)\varphi)$, т. е. форма F получается из формы W подстановкой вместо σ_j значений (4).

Теорема 1. Пусть в системе (1) P — гурвицева матрица (следовательно, полюсы передаточных функций $\chi_{jh}(p)$ лежат в левой полуплоскости) и выполнены условия (5). Определим допустимые значения τ_j, ϑ_h и построим формы $W = W(\varphi, \sigma)$, $F = F(p, \varphi)$ так, как было указано выше. Предположим, что для некоторых допустимых значений τ_j, ϑ_h при $\varphi_j = 0$ форма W является неотрицательной формой σ_h и форма F является отрицательно определенной формой φ_j для всех $p = i\omega$ $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$.

Тогда:

а) для любого решения $x(t)$ системы (1) выполнено $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

б) сходятся интегралы $\int\limits_0^\infty |x|^2 dt$, $\int\limits_0^\infty |\varphi_j|^2 dt$;

в) если все $\vartheta_h = 0$, то для любых $t \geqslant t_0$ выполнено

$$|x(t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon_0(t-t_0)} |x(t_0)|, \tag{19}$$

где постоянные $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ не зависят от нелинейностей φ_j;

г) если некоторые $\vartheta_h \neq 0$ и соответствующие нелинейности $\pm\varphi_h[\sigma_{q_h}]$ удовлетворяют усиленным условиям положительности, то существует не зависящая от нелинейностей непрерывная скалярная функция $\Omega(\xi)$, $\Omega(0) = 0$, такая, что для любого $t \geqslant 0$ выполнено условие

$$|x(t)| \leqslant \Omega[|x(0)|].$$

Утверждения «а», «в», «г» показывают, что имеет место абсолютная устойчивость в соответствующем классе нелинейностей (т. е. в классе нелинейностей, удовлетворяющих условиям (5) и при $\vartheta_h \neq 0$ — усиленным условиям положительности).

Простой заменой (см. Приложение) из теоремы 1 получается следующее утверждение.

Теорема 2. Предположим, что все $\vartheta_h = 0$, а также, что корни уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$ (и, следовательно, полюсы передаточных функций $\chi_{jh}(\lambda)$) лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha$ и что выполнены условия (5).

* Из сказанного следует, что можно взять $\vartheta_h = 0$ и в случае, когда φ_h или $(-\varphi_h)$ удовлетворяет условию положительности, но это неизвестно, или этот факт сознательно не учитывается.

Пусть форма W для $\varphi_j = 0$ является неотрицательной формой σ_h и форма $F = F(p, \varphi)$ является отрицательно определенной формой φ_h для всех $p = -\alpha + i\omega$ $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$ и для некоторых допустимых значений τ_j. Тогда справедливы утверждения «б», «в» теоремы 1 с заменой в них $x(t)$ на $e^{\alpha t}x(t)$ и φ_j на $e^{\alpha t}\varphi_j$.

Доказательство теорем 1, 2 приведено в Приложении. Рассмотрим различные случаи применения теорем 1, 2.

3. Частотное условие Попова для системы с одной нелинейностью

Рассмотрим систему (1) с одной нелинейностью $(m = n = 1)$, удовлетворяющей условию $0 \leqslant \varphi / \sigma \leqslant \mu_0 \leqslant +\infty$ $(\sigma \neq 0)$, т. е. неравенству

$$W_1 \equiv \varphi(\sigma - \mu_0^{-1}\varphi) \geqslant 0.$$

Этому условию соответствует один параметр τ_1 с областью допустимых значений $\tau_1 \geqslant 0$.

Распространяя W_1 на комплексные значения и полагая $W = \tau_1 W_1$, получаем

$$W = \tau_1 \operatorname{Re} \varphi^* (\sigma - \mu_0^{-1}\varphi).$$

Условие теорем 1, 2 ($W \geqslant 0$ при $\varphi = 0$), очевидно, выполнено. Система (4) в данном случае совпадает со скалярным уравнением (3), где $\chi(p)$ — передаточная функция. Поэтому форма (18) имеет вид

$$F(p, \varphi) = -[\tau_1(\mu_0^{-1} + \operatorname{Re}\chi) + \operatorname{Re}(p\vartheta\chi)]|\varphi|^2.$$

Условие ее отрицательной определенности для $p = i\omega$ дает частотное условие Попова:

$$\tau_1\mu_0^{-1} + \operatorname{Re}[(\tau_1 + i\omega\vartheta)\chi(i\omega)] > 0 \qquad (-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty).$$

В случае обычной нелинейности $\varphi = \varphi(\sigma)$ допустимыми значениями τ_1, ϑ являются согласно сказанному $\tau_1 \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant 0$. В случае, когда $\varphi = \varphi(\sigma)$ — обычная нелинейность, после простого преобразования, указанного в [16] (или [17], гл. 3), получим, что допустимыми являются также значения $\tau_1 \geqslant 0$, $\vartheta \leqslant 0$ (это будет также сразу следовать из сформулированной ниже теоремы 5). Согласно теореме 1 получаем указанное в [3] распространение частотного условия Попова на нестационарное и гистерезисные нелинейности: допустимыми значениями являются значения $\tau_1 \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant 0$, если $\varphi = \varphi[\sigma]_t$ удовлетворяет условию положительности, и значения $\tau_1 \geqslant 0$, $\vartheta \leqslant 0$, если $(-\varphi[\sigma]_t)$ удовлетворяет условию положительности. (Случай гистерезисных и нестационарных нелинейностей для $\vartheta = 0$ рассмотрен В. М. Поповым в [18].)

Отметим, что в [3] получен несколько более полный результат, который может быть выведен из приведенной ниже теоремы 5.

4. Частотное условие Бонджорно [14]

Рассмотрим линейную нестационарную систему, уравнения которой в матричной форме имеют вид (1) или (3), причем $\varphi = K(t)\sigma$, где $K(t)$ — матрица порядка $n \times m$ с ограниченными элементами. Пусть известна оценка модуля матрицы * $|K(t)| \leqslant \varkappa$ и корни уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$ (полюсы функций $\chi_{jh}(\lambda)$) расположены в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -\alpha$. Имеем $|\varphi| \leqslant \varkappa|\sigma|$, т. е. $W_1(\varphi, \sigma) \equiv \varkappa^2|\sigma^2| - |\varphi|^2 \geqslant 0$. В данном случае $W = \tau_1 W_1(\varphi, \sigma)$. Допустимыми являются значения параметров $\tau_1 \geqslant 0$, $\vartheta_j = 0$. Условие $W(0, \sigma) \geqslant 0$ выполнено. Полагая без ограничения общности $\tau_1 = 1$, имеем

$$F = \varkappa^2|\varphi^*\chi^*\chi\varphi| - |\varphi|^2 \leqslant \varkappa^2|\chi|^2|\varphi|^2 - |\varphi|^2.$$

* Под модулем матрицы понимается, как обычно, корень из суммы квадратов модулей ее элементов.

Из теоремы 2 следует, что при выполнении условия $\varkappa^2|\chi(p)|^2 < 1$ для $p = -\alpha + i\omega$ $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$ или, иначе, условия

$$\sup_t |K(t)| \sup_\omega |\chi(-\alpha + i\omega)| < 1 \tag{20}$$

для любого решения $x(t)$ системы имеет место оценка $|x(t)| \leqslant C \exp \times \times [-(\alpha + \varepsilon_0)t]$, $(t \geqslant 0)$ с одинаковыми для всех решений $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$. Это условие получено (другим методом) Бонджорно [14].

Например, для системы с простыми гармоническими коэффициентами можно считать без ограничения общности (см. случай В), что уравнение системы имеет вид

$$\sigma + \chi_1(p)[\cos t \cdot \sigma] + \chi_2(p)[\sin t \cdot \sigma] = 0 \qquad (p = d/dt),$$

где σ — скалярная величина и $\chi_1(p)$, $\chi_2(p)$ — рациональные (скалярные) функции с указанным выше расположением полюсов. Условие Бонджорно (20) в данном случае записывается в виде *

$$|\chi_1(-\alpha + i\omega)|^2 + |\chi_2(-\alpha + i\omega)|^2 < 1 \qquad (-\infty < \omega < +\infty). \tag{21}$$

В общем случае, когда $\varphi = K(t)\sigma$, теоремы 1, 2 дают более сильный результат. Так, повторяя выкладки, придем вместо (20) к условию

$$\sup_t |K(t)^* K(t)| \sup_\omega |\chi(-\alpha + i\omega)^* \chi(-\alpha + i\omega)| < 1.$$

Можно привести примеры с $m = n > 1$, когда это условие выполнено, но (20) нарушается. При использовании дополнительных сведений об элементах матрицы $K(t)$ из теорем 1, 2 можно получить еще более сильные частотные условия **. Это имеет место, например, для $m = n = 1$, $0 \leqslant K(t) \leqslant \mu_0$, $dK/dt \leqslant 0$.

5. Пример абсолютно-устойчивой системы с двумя однозначными стационарными нелинейностями, для которой не выполнено частотное условие Попова

Приводимый ниже пример показывает, что частотный критерий теоремы 1 может дать результат в случаях, когда частотный критерий Попова хотя и применим (в частности, нелинейности являются стационарными и однозначными), но результата не дает. Это связано с тем, что критерий теоремы 1 дает возможность более полно использовать известные свойства нелинейностей и, в частности, учесть те из них, которые не используются в критерии Попова. Этот пример, кроме того, является достаточно общим и интересным в прикладном отношении. Отметим, однако, что в этом примере (как и в критерии Попова с числом нелинейностей $n \geqslant 2$) остается нерешенным вопрос об оптимальном выборе параметров τ_j, ϑ_j.

Рассмотрим систему (1) для $m = 1$, $n = 2$. Уравнения для нее возьмем в виде (4), т. е.

$$\sigma + \chi_1(p)\varphi_1 + \chi_2(p)\varphi_2 = 0 \qquad (p = d/dt),$$

где все величины являются скалярными. Пусть $\varphi_j = a_j\sigma^3 + b_j\sigma^5$ $(j = 1, 2, a_j, b_j$ — постоянные). Подставляя эти значения и заменяя $\chi_j(p)$ их линейными комбинациями, придем к случаю (который и будем рассматривать), когда

---

* Частотное условие (21) выводится также и непосредственно из теоремы 2. В данном случае $\varphi_1 = \cos t\sigma$, $\varphi_2 = \sin t\sigma$, $W_1 \equiv \sigma^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 0$, $\tau_1 = 1$, $F = |\chi_1\varphi_1 + \chi_2\varphi_2|^2 - |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2$.

** Отметим, что на возможность усиления частотного условия Бонджорно [14] указал в своем выступлении на III Конгрессе ИФАК (Лондон, июль 1966 г.) проф. Б. Н. Наумов.

$\varphi_1 = \sigma^3$, $\varphi_2 = \sigma^5$. Поскольку $0 \leqslant \varphi_1 / \sigma \leqslant \mu_1 = \infty$, $0 \leqslant \varphi_2 / \sigma < \mu_2 = \infty$, то можно применить критерий Попова *. Для двух нелинейностей этот критерий имеет вид:

$$\pi(\omega) \equiv \tau_d \mu_d^{-1} + \mathrm{Re}\,[(\tau_d + i\omega\vartheta_d)\chi(i\omega)] > 0 \qquad (-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty),$$

(см. [7], [4], стр. 45, а также раздел 12 данной статьи) **.

Здесь

$$\tau_d = \begin{Vmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{Vmatrix}, \qquad \mu_d^{-1} = \begin{Vmatrix} \mu_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_2^{-1} \end{Vmatrix},$$

$$\vartheta_d = \begin{Vmatrix} \vartheta_1 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 \end{Vmatrix}, \qquad \chi = \begin{Vmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{Vmatrix},$$

$\mathrm{Re}\, U = \dfrac{1}{2}(U + U^*)$. Соотношение $\pi(\omega) > 0$, означающее положительную определенность матрицы $\pi(\omega)$, должно быть выполнено для каких-либо значений параметров ϑ_j, $\tau_j \geqslant 0$. Пусть φ — вектор-столбец с двумя комплексными компонентами φ_1, φ_2. Учтя, что $\mu_d^{-1} = 0$, получим

$$\varphi^* \pi(\omega) \varphi = \mathrm{Re}\,(\xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2)^* (\chi_1\varphi_1 + \chi_2\varphi_2),$$

где $\xi_j = \tau_j - i\omega\vartheta_j$. Для $\varphi_1 = \chi_2$, $\varphi_2 = -\chi_1$ соотношение $\varphi^*\pi(\omega)\varphi > 0$ нарушается. Поэтому критерий Попова не может быть выполнен для рассматриваемой системы ни при каких значениях параметров τ_j, ϑ_j.

Возможны различные обобщения критерия Попова, связанные с заменой условия $\pi(\omega) > 0$ на условие $\pi(\omega) \geqslant 0$ и с введением некоторых дополнительных предположений. Для рассматриваемой системы неравенство $\varphi^*\pi(\omega)\varphi \geqslant 0$ может быть выполнено (при любых φ), лишь если $\chi_1 / \chi_2 \equiv \xi_1 / \xi_2$. Если выражение $\chi_1(p) / \chi_2(p)$ нельзя представить в виде отношения двух линейных функций, то указанное тождество невозможно и, следовательно, для такой системы не может быть выполнено также ни одно из обобщений критерия Попова указанного типа.

Этот вывод существенно использует вырожденность матрицы χ что, в свою очередь, является следствием того факта, что нелинейности имеют одинаковый вход. Легко проверить, что этот вывод остается справедливым в случае произвольного числа нелинейностей с одним входом.

Применим теперь к рассматриваемой системе теорему 1. В нашем случае нелинейности удовлетворяют следующим квадратичным связям: $W_1 \equiv \sigma\varphi_1 \geqslant 0$, $W_2 \equiv \sigma\varphi_2 - \varphi_1^2 = 0$. Связь $W_3 \equiv \sigma\varphi_2 \geqslant 0$ является следствием рассмотренных, и поэтому ее учитывать не нужно. По общему правилу $\tau_1 \geqslant 0$, τ_2 произвольно, $W = \tau_1 W_1 + \tau_2 W_2$. Условие $W \geqslant 0$ при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, очевидно, выполнено. Для комплексных σ, φ_1, φ_2 имеем $W_1 = \mathrm{Re}\,(\sigma^*\varphi_1)$, $W_2 = \mathrm{Re}\,(\sigma^*\varphi_2) - |\varphi_1|^2$. По формуле (18) для $p = i\omega$ получим $F(p, \varphi) = \mathrm{Re}\,[\sigma^*(\xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2)] - \tau_2|\varphi_1|^2$, где ξ_j имеют прежние значения. Искомое частотное условие получится, если вместо σ подставить его значение для $p = i\omega$ и потребовать выполнения условий отрицательной определенности формы F для всех φ_1, φ_2. Выкладки будут более простыми, если вместо φ_1, φ_2 ввести переменные φ_1, ψ, где

$$\psi = (1 + p)\sigma = -(1 + p)\chi_1\varphi_1 - (1 + p)\chi_2\varphi_2.$$

---

* Отметим, что например, в случае, когда $\varphi_1 = \sigma^2$, $\varphi_2 = \sigma^3$, критерий Попова неприменим, так как выражение φ_1 / σ не ограничено ни сверху, ни снизу. В этом случае критерий теоремы 1 также приводит к определенным условиям устойчивости в целом (см. замечание в конце этого раздела).

** В формуле (4.20) на стр. 45 [4] имеется опечатка: лишний коэффициент 2 перед знаком вещественной части.

Эта замена является неособой для всех $p = i\omega$ $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$, если только

$$\rho_2 \neq \lim_{|p|\to\infty} p\chi_2(p) \neq 0, \qquad \chi_2(i\omega) = 0,$$

что будем предполагать выполненным. При этом условия отрицательной определенности относительно φ_1, φ_2 и φ_1, ψ равносильны. Выражая φ_2 через φ_1 и ψ, находим, что матрицей формы $[-F(p, \varphi)]$ является

$$\begin{Vmatrix} \tau_2 & \alpha \\ \alpha^* & \beta \end{Vmatrix}, \text{ где } \alpha = \frac{\chi_1\xi_2 - \chi_2\xi_1}{2(1-p)\chi_2}, \qquad \beta = \operatorname{Re}\frac{\xi_2}{(1-p^2)\chi_2}.$$

По критерию Сильвестра условиями положительной определенности формы $(-F)$ будут неравенства $\tau_2 > 0$, $\tau_2\beta - |\alpha|^2 > 0$. Последнее неравенство преобразуется к виду:

$$4\tau_2 \operatorname{Re}(\xi_2\chi_2^*) - |\xi_1\chi_2 - \xi_2\chi_1|^2 > 0. \tag{22}$$

Это неравенство, являющееся искомым частотным условием, должно быть выполнено для всех $p = i\omega$ $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$ и для некоторых $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_2 > 0$, $\vartheta_1 \geqslant 0$, $\vartheta_2 \geqslant 0$. (Напомним, что $\xi_j = \tau_j - p\vartheta_j$.) Не рассматривая, как было отмечено выше, вопрос об оптимальном выборе параметров τ_j, ϑ_j, приведем простой пример функций $\chi_1(p)$, $\chi_2(p)$, когда это условие выполнено. Пусть $\chi_2 = A / (p + r)$, $\chi_1 = B / (p + r_1)(p + r_2)$, где A, B, $r > 0$, $r_j > 0$ — вещественные постоянные. Для $\tau_1 = \vartheta_1 = 0$, $\tau_2 = r$, $\vartheta_2 = 1$ условие (22) примет вид $4Ar > B^1|(r - i\omega)(r_1 + i\omega)^{-1} \times (r_2 + i\omega)^{-1}|$ $(0 \leqslant \omega < \infty)$. Это условие, очевидно, выполнено при достаточно малых B. Система с функциями $\chi_1(p)$, $\chi_2(p)$ указанного вида абсолютно устойчива, но для нее не выполнен критерий Попова. Можно привести много других примеров подобных систем, удовлетворяющих частотному условию (22).

Рассмотрим в заключение этого раздела случай, когда $\varphi_1 = \sigma^2$, $\varphi_2 = \sigma^3$ (к этому случаю сводится система с двумя произвольными нелинейностями, являющимися кубическими многочленами переменной σ). Связь $W_2 \equiv \equiv \varphi_2\sigma - \varphi_1^2 = 0$ остается выполненной, а связь $W_1 \equiv \sigma\varphi_1 \geqslant 0$ теперь не выполнена. Поэтому частотное условие (22) остается справедливым, если считать $\tau_1 = 0$.

6. Система с одной монотонной, вообще говоря, нестационарной нелинейностью *

Рассмотрим систему (1) с одной нелинейностью $\varphi = \varphi(\sigma, t)$, удовлетворяющей соотношениям $\varphi(0, t) = 0$, $0 \leqslant \Delta\varphi / \Delta\sigma \leqslant \mu_0$ (где $\Delta\varphi = \varphi(\sigma', t) - \varphi(\sigma'', t)$, $\Delta\sigma = \sigma' - \sigma''$, μ_0 — заданное число, σ', σ'' произвольны), а также усиленным условиям положительности. Возможно, например, что $\varphi = \varphi(\sigma)$ — обычная непрерывная $(\mu_0 < \infty)$ или разрывная $(\mu_0 = \infty)$ стационарная функция, для которой $0 \leqslant \Delta\varphi / \Delta\sigma \leqslant \mu_0$. Возможно, что $\varphi = \varphi(\sigma, t)$ отличается от функции указанного типа множителем $c(t)$, где $0 \leqslant c(t) \leqslant 1$, $dc(t) / dt \leqslant 0$. В предположении, что $\varphi = \varphi(\sigma)$ — стационарная дифференцируемая функция, частотное условие Попова усилено в [2] (см. также [4]). Для стационарной дифференцируемой нелинейности ряд другого типа усилений условий Попова другого типа получен недавно Броккером и Вилемсом [20].

* После того как настоящая статья была сдана в редакцию, автор ознакомился с книгой В. М. Попова [19], в которой имеется много новых результатов и, в частности, получен критерий (§ 29, I, стр. 222), очень близкий к излагаемому и, в этом разделе. Отличие, по-видимому, лишь в том, что в книге В. М. Попова $\varphi(\sigma)$ — непрерывная стационарная нелинейность. Приводимое ниже доказательство, использующее прием введения дополнительных нелинейностей, отлично от доказательства В. М. Попова и интересно в том отношении, что оно применимо во многих других случаях. Можно, например, получить аналогичные частотные условия с использованием найденных в [20] соотношений, которым удовлетворяет нелинейность. Приводимое доказательство дословно переносится на случай многих нелинейностей (см. также замечание в конце раздела 6).

Покажем, что для указанного выше класса нелинейностей имеет место абсолютная устойчивость, если для некоторых значений параметров $\beta_j \geqslant \alpha_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, k)$, $\tau \geqslant \sum_{j=1}^{k} \beta_j$ и для всех $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$ выполнено частотное условие

$$\operatorname{Re}\{\zeta(i\omega)[\mu_0^{-1} + \chi(i\omega)]\} > 0,$$

где

$$\zeta(p) = \tau + \vartheta p - \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j^2}{\beta_j + p}.$$

Частотное условие Попова получается из указанного при $\alpha_j = 0$. В частотном условии [20] класс функций $\zeta(p)$ имеет похожий вид, но должно быть выполнено дополнительно неравенство

$$\operatorname{Re}\{\zeta(i\omega)^{-1}[\mu_0^{-1} + \chi(i\omega)]\} > 0.$$

При доказательстве используем следующий, во многих случаях весьма полезный, прием «введения дополнительных нелинейностей». Дополним систему (1) системой

$$dy / dt = Ax + By + e\varphi + f\tilde{\varphi}, \qquad \tilde{\sigma} = g^* x + h^* y,$$

где A, B, e, f, g, h — постоянные матрицы, $\tilde{\varphi}$ — вектор дополнительных нелинейностей, $\tilde{\sigma}$ — вектор дополнительных входов *. Вводя вектор $\tilde{x} = \left\| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right\|$, получаем относительно $\tilde{x}$ уравнение вида (1). Если удастся указанное дополнение сделать так, чтобы для φ, $\tilde{\varphi}$, σ, $\tilde{\sigma}$ получить новые соотношения типа (5), то, применяя к системе относительно $\tilde{x}$ теорему 1 или 2, получаем более сильное (вообще говоря) частотное условие, справедливое для расширенной, а следовательно, и для первоначальной системы. При этом дополнительные уравнения системы можно сразу задать в виде

$$\tilde{\sigma} = -\chi^{(1)}(p)\varphi - \chi^{(2)}(p)\tilde{\varphi} \qquad (p = d / dt),$$

аналогичном уравнениям (4), задавая передаточные матрицы $\chi^{(1)}(p)$, $\chi^{(2)}(p)$. Последние могут быть произвольными матрицами рациональных функций, такими, что $\chi^{(1)}(\infty) = 0$, $\chi^{(2)}(\infty) = 0$, и полюсы их удовлетворяют условиям теорем 1 или 2.

Переходя к доказательству, предположим вначале, что $\mu_0 = \infty$. Применяя указанный прием, введем дополнительные фазовые переменные $\sigma = \|\sigma_j\|$ и дополнительные нелинейности $\tilde{\varphi} = \|\varphi_j\|$ $(j = 1, \ldots, k)$, полагая $\varphi_j = \varphi(\sigma_j, t)$ (здесь k — произвольное целое число, $\varphi(\sigma, t)$ — заданная функция). Условие монотонности функции $\varphi(\sigma, t)$ по σ дает возможность написать следующие выполненные очевидным образом дополнительные квадратичные условия:

$$W_j' \equiv (\varphi_j - \varphi)(\sigma_j - \sigma) \geqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Кроме того, как и выше, имеем ** $W_j'' \equiv \sigma_j \varphi_j \geqslant 0$.

* При рассмотрении этого приема можно считать, что в (1) числа m и n произвольны.

** В случае, когда $\varphi = \varphi(\sigma, t)$ — разрывная функция σ, расширенная система (1) будет системой со многими разрывными нелинейностями. Решение системы (1) в этом случае определяется дословно так же, как это сделано для одной нелинейности в [1]. Под значением φ, φ_j следует понимать дополненные [1] функции. Соотношения $W_j' \geqslant 0$, $W_j'' \geqslant 0$ остаются при этом выполненными, что и дает возможность включить в рассмотрение случай разрывной функции. Отметим, что указанное определение в случае многих нелинейностей отлично от известного определения Филиппова.

Повторяя рассуждения раздела 1, получаем, что теперь к квадратичной форме $F(p, \varphi)$ раздела 1 добавится выражение

$$\Delta F = \operatorname{Re}\left[\sum_{j=1}^{k} \tau_j'(\varphi_j - \varphi)^*(\sigma_j - \sigma) + \tau_j''\sigma_j\varphi_j^* + \vartheta p\sigma_j\varphi_j^*\right].$$

Здесь τ_j', τ_j'', ϑ_j — произвольные неотрицательные параметры. Дополнительные дифференциальные уравнения системы возьмем в виде

$$\sigma_j = -\chi_j(p)\varphi \qquad (p = d / dt),$$

где функции $\chi_j(p)$ будут определены ниже. Подставим эти значения, а также значение $\sigma = -\chi(p)\varphi$ в выражение для ΔF и применим теорему 1.

Из условия отрицательной определенности формы F следует, что коэффициенты при $\varphi_j^*\varphi$ должны обратиться в нуль:

$$\tau_j'(\chi - \chi_j) - (\tau_j'' + \vartheta_j p)\chi_j = 0.$$

Отсюда

$$\chi_j = \tau_j'(\tau_j^0 + \vartheta_j p)^{-1}\chi,$$

где $\tau_j^0 = \tau_j' + \tau_j'' \geqslant \tau_j'$. Условие относительно полюсов функций $\chi_j(p)$ выполнено при $\tau_j^0 > 0$, $\vartheta_j > 0$. Имеем

$$\Delta F = -\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k} \tau_j'(\chi - \chi_j)\,|\varphi|^2 = -\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k} \tau_j'\left(\frac{\tau_j'' + \vartheta_j p}{\tau_j^0 + \vartheta_j p}\right)\chi|\varphi|^2.$$

Прибавляя выражение $(-\Delta F)$ для $p = i\omega$ к левой части неравенства в критерии Попова (раздел 1), где $\mu_0 = \infty$, и полагая $\vartheta_j = 1$, $\tau = \tau_1 + \sum_{j=1}^{k} \tau_j'$, $\tau_j' = \alpha_j$, $\tau_j^0 = \beta_j \geqslant \alpha_j$, получаем сформулированное выше частотное условие.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_0 \neq \infty$. Расширяя, как и выше, систему и вводя вместо σ, σ_j новые входы $\tilde{\sigma} = \sigma - \varphi\mu_0^{-1}$, $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j - \varphi_j\mu_0^{-1}$, получаем, что выполнены условия:

$$\tilde{W}_j' = (\varphi_j - \varphi)(\tilde{\sigma}_j - \sigma) \geqslant 0, \qquad \tilde{W}_j'' = \varphi_j\tilde{\sigma}_j \geqslant 0.$$

Поскольку $\tilde{\sigma} = -\tilde{\chi}(p)\varphi$, где $\tilde{\chi}(p) = \mu_0^{-1} + \chi(p)$, то все предыдущие выкладки пройдут без изменения, а результат будет получаться из результата для случая $\mu_0 = \infty$ заменой $\chi(p)$ на $\tilde{\chi}(p)$. Отсюда следует справедливость сформулированного частотного условия и для $\mu_0 \neq \infty$.

Из приведенного в Приложении доказательства теоремы 1 легко вывести, что при выполнении сформулированного частотного условия у системы (1) существует функция Ляпунова вида

$$V = x^*Hx + \vartheta\int_0^{\sigma} \varphi(\sigma)\,d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j \int_0^{\sigma_j} \varphi(\sigma_j)\,d\sigma_j,$$

где σ_j — дополнительные фазовые переменные, определяемые по σ уравнениями $d\sigma_j / dt + \tau_j^0\sigma_j = \alpha_j\sigma$. (Эти уравнения являются дополнительными дифференциальными уравнениями системы; они следуют сразу из соотношений $(\tau_j^0 + p)\chi_j = \alpha_j\chi$.)

Используя тот же прием, при помощи несколько более громоздких выкладок можно получить усиление частотного условия Попова для случая, когда нелинейность $\varphi = \varphi(\sigma)$, кроме обычного условия $0 \leqslant \varphi(\sigma) / \sigma \leqslant \mu_0$, удовлетворяет условию $-\alpha_1 \leqslant \Delta\varphi / \Delta\sigma \leqslant \alpha_2$ с известными α_1, α_2. Можно расширить частотный критерий, учтя, что выполнены квадратичные условия

$$W_{jh} = (\varphi_j - \varphi_h)(\sigma_j - \sigma_h) \geqslant 0$$

в случае $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \mu_0$ и аналогичные — в общем случае. Эти и другие результаты, основанные на использовании дополнительных сведений о нелинейности, из-за недостатка места опускаем.

Если известны квадратичные связи между величинами σ, $\varphi = \varphi(\sigma)$, σ_j, $\varphi_j = \varphi(\sigma_j)$, где $\sigma_j = h_j{}^*x$ — некоторые линейные комбинации x, то теорема 1 дает частотные условия абсолютной устойчивости, при выполнении которых существует функция Ляпунова указанного выше вида с $\sigma_j = h_j{}^*x$.

7. Случай вырождения формы $F(i\omega, \varphi)$ при $\omega = \pm\infty$

Вернемся снова к рассмотрению системы (1) с произвольными m, n. В ряде случаев условие $F(i\omega, \varphi) < 0$ заведомо нарушается при $\omega = \pm\infty$ *. Например, при $\vartheta_j = 0$ из (18) следует, что $F(\infty, \varphi) = W(\varphi, 0)$. Если эта форма зависит лишь от части переменных φ_j, то условие $F(\infty, \varphi) < 0$ не может быть выполнено. Предположим, что $F(i\omega, \varphi) < 0$ при $-\infty < \omega < +\infty$. Тогда $F(\infty, \varphi) \leqslant 0$ и поэтому можно ввести переменные ψ_j, связанные с φ_j неособым линейным преобразованием, такие, что форма $F(\infty, \varphi)$ является отрицательно определенной формой части переменных ψ_j, которые назовем невырожденными, и не зависит от остальных переменных ψ_j, которые назовем вырожденными. Пусть ψ' — набор невырожденных и ψ'' — набор вырожденных переменных. Тогда $F(i\omega, \varphi) = F^0(\omega, \psi', \psi'')$ — эрмитова форма относительно ψ, ψ''. Положим **

$$F_\infty{}^0 = \lim_{|\omega|\to\infty} F^0(\omega, \psi', \omega\psi'').$$

Форма $F_\infty{}^0$ получается, таким образом, заменой вырожденных переменных ψ_j на $\omega\psi_j$ и переходом к пределу при $|\omega| \to \infty$. Форма $F_\infty{}^0$ зависит от переменных ψ_j, но можно, при желании, вернуться к прежним переменным.

Если $F(\infty, \varphi)$ является положительно определенной формой тех переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$, от которых она зависит, то $\psi_j = \varphi_j$, т. е. указанной выше замены делать не нужно. В этом случае сразу имеем: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$ — невырожденные и $\varphi_{n_1+1}, \ldots, \varphi_{n_1+n_2}$ — вырожденные переменные $(n_1 + n_2 = n)$.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения теоремы 1 с заменой условия $F(i\omega, \varphi) < 0$ при $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$ на условие $F(i\omega, \varphi) < 0$ при $-\infty < \omega < \infty$. Пусть, кроме того, форма $F_\infty{}^0$ является отрицательно определенной и выполнено неравенство *** $\nu \geqslant n_2$.

Если все $\vartheta_j = 0$, то имеет место экспоненциальная абсолютная устойчивость: для любых $t \geqslant t_0$ и любого решения $x(t)$ выполнено (19), где числа $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ не зависят от нелинейностей.

В общем случае:

a′) имеет место абсолютная устойчивость в следующем ослабленном

---

* Здесь и ниже, говоря об условии $F(p, \varphi) < 0$, имеем в виду условие отрицательной определенности формы $F(p, \varphi)$, т. е. условие $F(p, \varphi) < 0$, выполненное для всех $\varphi \neq 0$.

** Конечный предел существует. Это показано в разделе 3 Приложения.

*** Напомним, что n_2 — число вырожденных переменных и ν — число степеней свободы (порядок) системы.

смысле: сходится интеграл $\int\limits_0^\infty |x|^2\,dt$ и выполнено утверждение «г» теоремы 1;

б′) сходятся интегралы $\int\limits_0^\infty |\psi_j|^2\,dt$, соответствующие невырожденным переменным *;

в′) если нелинейности φ_j обладают тем свойством, что их значения являются ограниченными функциями времени при ограниченных входах $\sigma_h(t)$ (или при ограниченном $x(t)$), то любое решение $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 4. Предположим, что выполнены условия (5), что все $\vartheta_h = 0$, а также, что корни уравнения $\det(P - \lambda I) = 0$ (и, следовательно, полюсы передаточных функций $\chi_{jh}(\lambda)$) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -\varepsilon_0$. Пусть, кроме того, ранг $m \times n$ матрицы $\beta = \|\beta_{jh}\|$ в формуле (16) равен m и ранг каждой из матриц $\Phi = \|q, Pq, \ldots, P^{\nu-1}q\|$, $\Psi = \|r, P^*r, \ldots, P^{*\nu-1}r\|$ равен ν. Условие относительно рангов Φ и Ψ выполнено, если функции $\chi_{jh}(p)$ не представимы в виде $\chi_{jh}(p) = \alpha_{jh}(p) / \Delta_0(p)$, где $\alpha_{jh}(p)$, $\Delta_0(p)$ — многочлены, и степень многочлена $\Delta_0(p)$ меньше ν.

Если форма W для $\varphi_j = 0$ является неотрицательной формой σ_h и форма $F = F(p, \varphi)$ является неположительной формой φ_j для всех $p = -\varepsilon_0 + i\omega$ $(-\infty < \omega < +\infty)$ и для некоторых допустимых значений параметров τ_j, то для любого решения $x(t)$ и любых $t \geqslant t_0$ выполнено (19). При этом постоянная C не зависит от решения $x(t)$ и вида нелинейностей.

Рассмотрим примеры, поясняющие применение теорем 3, 4, в которых имеется также ряд приемов по упрощению проверки основных частотных условий.

8. Пример системы с одной разрывной нелинейностью, зависящей от трех входов

Предположим, что дана система с одной нелинейностью, определенной для $\sigma_1 \neq 0$ формулой $\varphi = (\beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3)^2 / \sigma_1$, где β, γ — постоянные. При $\sigma_1 = 0$ значение φ произвольно.

Уравнения (4) системы имеют вид

$$\sigma_j = -\chi_j(p)\varphi \qquad (j = 1, 2, 3, \quad p = d / dt).$$

В данном случае имеется одно соотношение (5)

$$W_1 \equiv (\beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3)^2 - \sigma_1\varphi \geqslant 0.$$

Допустимые значения параметров: $\tau_1 \geqslant 0$, $\vartheta_1 = 0$. Условие $W(0, \sigma) = \tau_1 W_1(0, \sigma) \geqslant 0$ выполнено. Считаем без ограничения общности, что $\tau_1 = 1$.

Для комплексных σ_j, φ имеем $W = |\beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3|^2 - \operatorname{Re}(\sigma_1\varphi^*)$. Поэтому $F = |\beta\chi_2 + \gamma\chi_3|^2|\varphi|^2 + \operatorname{Re}\chi_1|\varphi|^2$. Условие $F < 0$ при $p = i\omega$ $(-\infty < \omega < +\infty)$ дает

$$\Delta(\omega) \equiv \operatorname{Re}\chi_1(i\omega) + |\beta\chi_2(i\omega) + \gamma\chi_3(i\omega)|^2 < 0 \qquad (-\infty < \omega < +\infty). \tag{23}$$

Соотношение $\Delta(\omega) < 0$ нарушается при $|\omega| = \infty$. Единственная переменная φ является вырожденной. Заменяя φ и $\omega\varphi$ и переходя к пределу, получаем предельное неравенство:

$$\Delta_\infty{}^0 = \lim_{\omega\to\infty} \omega^2\Delta(\omega) < 0. \tag{24}$$

* Здесь ψ_j — построенные выше линейные формы, в которых подставлены значения нелинейностей на заданном решении.

В данном случае $F_\infty{}^0 = \Delta_\infty{}^0|\varphi|^2$. По теореме 3 при выполнении условий (23), (24) будет выполнено (19). Значение $\varepsilon_0 > 0$, однако, неизвестно.

Предположим, что полюсы функций $\chi_j(p)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} p < -\varepsilon_0 < 0$, где ε_0 известно, а также, что степень общего наименьшего кратного знаменателей $\chi_j(p)$ совпадает с числом степеней свободы. Если выполнено соотношение

$$\operatorname{Re}\chi_1(p) \leqslant -\,|\beta\chi_2(p) + \gamma\chi_3(p)|^2$$

$$\text{для } p = -\,\varepsilon_0 + i\omega \qquad (-\,\infty < \omega < +\,\infty),$$

то по теореме 4 справедливо (19).

9. Пример системы с одним нелинейным блоком и с гармонически меняющимися во времени параметрами

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\sigma_1 + \chi_{11}(p)\varphi_1 = 0,\\ &\sigma_2 + \chi_{21}(p)\varphi_1 + \chi_{22}(p)\varphi_2 + \chi_{23}(p)\varphi_3 = 0 \qquad (p = d/dt) \end{aligned} \tag{25}$$

в предположении, что нелинейности удовлетворяют соотношениям:

$$\sigma_2\varphi_1 \geqslant 0, \qquad \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \leqslant \sigma_1^2.$$

(Например, $\varphi_1 = a(t)\sigma_2^3$, $a(t) \geqslant 0$, $\varphi_2 = \sin\varphi t\cdot\sigma_1$, $\varphi_3 = \cos\varphi t\cdot\sigma_1$.) Имеем $\vartheta_j = 0$, $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_2 \geqslant 0$,

$$W = \tau_1(\sigma_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2) + \tau_2\sigma_2\varphi_1.$$

Распространяя W на комплексные значения переменных, получаем

$$W = \tau_1(|\sigma_1|^2 - |\varphi_2|^2 - |\varphi_3|^2) + \tau_2\operatorname{Re}(\sigma_2\varphi_1^*).$$

Имеем далее $F(p,\varphi) = W$, где σ_1, σ_2 определяются из (25) для комплексного p. При $p = \infty$ форма F вырождена: $F(\infty,\varphi) = -\tau_1(|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2)$. Вырожденной переменной является φ_1. Применяем теорему 3. Матрицей формы

$$\begin{aligned} -F(i\omega,\varphi) = \tau_1(-|\chi_{11}|^2\,|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2) +\\ + \tau_2\operatorname{Re}[(\chi_{21}\varphi_1 + \chi_{22}\varphi_2 + \chi_{23}\varphi_3)\varphi_1^*], \end{aligned}$$

где $\chi_{jh} = \chi_{jh}(i\omega)$, является матрица

$$\pi_0(\omega) = \begin{Vmatrix} \tau_2\operatorname{Re}\chi_{21} - \tau_1|\chi_{11}|^2; & \frac{1}{2}\tau_2\chi_{22}; & \frac{1}{2}\tau_2\chi_{23} \\ \frac{1}{2}\tau_2\chi_{22}^*; & \tau_2; & 0 \\ \frac{1}{2}\tau_2\chi_{23}^{3\,*}; & 0; & \tau_1 \end{Vmatrix}.$$

Условия ее положительной определенности для всех $\omega \neq \pm\infty$ принимают вид:

$$\tau_1 > 0, \qquad 4\tau_1(\tau_2\operatorname{Re}\chi_{21} - \tau_1|\chi_{11}|^2) > \tau_2^2(|\chi_{22}|^2 + |\chi_{23}|^2). \tag{26}$$

Заменяя φ_1 на $\omega\varphi_1$, получаем форму аналогичного вида. Предельное условие $F_\infty{}^0 > 0$ получается из (26) умножением обеих частей неравенства (26) на ω^2 и переходом к пределу при $\omega \to \infty$ (с сохранением в пределе строгого неравенства). Вводя вместо параметров $\tau_1 > 0$, $\tau_2 \geqslant 0$ параметр τ формулой $\tau_2 = 2\tau\tau_1$, получаем следующие частотные условия абсолютной устойчивости:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\chi_{21} > \tau^{-1}|\chi_{11}|^2 + \tau(|\chi_{22}|^2 + |\chi_{23}|^2),\\ \lim_{\omega\to\infty} 2\omega^2\operatorname{Re}\chi_{21} > \tau^{-1}\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\,|\chi_{11}|^2 + \tau\lim_{\omega\to\infty}\omega^2(|\chi_{22}|^2 + |\chi_{23}|^2), \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\chi_{jh} = \chi_{jh}(i\omega).$$

При выполнении этих условий для некоторого $\tau > 0$ имеет место экспоненциальная абсолютная устойчивость: выполнено (19) с не зависящими от нелинейностей постоянными $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Легко найти «огибающую» условия (27) по всем $\tau > 0$.

Пусть для простоты $|\chi_{22}(i\omega)|^2 + |\chi_{23}(i\omega)|^2 \neq 0$. Положим

$$a(\omega) = |\chi_{22}|^2 + |\chi_{23}|^2, \qquad b(\omega) = \operatorname{Re}\chi_{21}, \qquad c(\omega) = |\chi_{11}|^2,$$
$$\tau_{1,2}(\omega) = (b \pm \sqrt{b^2 - ac})\,a^{-1}. \tag{28}$$

Условия (27) принимают вид:

$$b(\omega)^2 > a(\omega)c(\omega), \qquad \inf \tau_1(\omega) > \sup \tau_2(\omega) > 0. \tag{29}$$

10. Пример системы с двумя нелинейными блоками

Рассмотрим систему

$$\sigma = -\chi_1(p)\varphi_1 - \chi_2(p)\varphi_2 \qquad (p = d/dt) \tag{30}$$

(все величины являются скалярными), где φ_1, φ_2 имеют вид (11), причем ψ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $0 \leqslant \psi \leqslant \alpha$ (например, ψ имеет вид (12)).

В данном случае $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$. Ограничения (5) имеют вид (13), (14) для $\sigma_1 = \sigma$. Поэтому значение τ_1 произвольно, $\tau_2 \geqslant 0$, $F = W = \tau_1 W_1 + \tau_2 W_2$, т. е.

$$F = \tau_1[\operatorname{Re}(\varphi_2\sigma^*) - |\varphi_1|^2] + \tau_2 \operatorname{Re}[(\alpha\varphi_1 - \varphi_2)\sigma^*],$$

где σ определяется из (30) для комплексного p.

Предположим, что полюсы функций $\chi_1(p)$, $\chi_2(p)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} p < -\varepsilon_0 < 0$ с заданным ε_0 и что функции $\chi_1(p)$, $\chi_2(p)$ не представимы в виде отношения многочленов с одинаковым знаменателем, степень которого меньше ν.

Применим теорему 4. Условие относительно ранга β означает, что $|\tau_1| + |\tau_2| \neq 0$. Условие $W(0, \sigma) \geqslant 0$ выполнено, так как в данном случае $W(0, \sigma) \equiv 0$. Основное условие неположительности F удобно получить, вводя вместо переменной φ_2 переменную * σ:

$$-F = \tau_1|\varphi_1|^2 + \operatorname{Re}\{[(\tau_1 - \tau_2)\chi_1\chi_2^{-1} - \tau_2\alpha]\varphi_1\sigma^*\} + (\tau_2 - \tau_1)\operatorname{Re}(1/\chi_2)\,|\sigma|^2.$$

Полагая $\tau = \tau_2/\tau_1$, получаем следующие условия неотрицательности формы $(-F)$ для $\chi_j = \chi_j(p)$, $p = -\varepsilon_0 + i\omega$:

$$\tau_1 > 0, \qquad 4(\tau - 1)\operatorname{Re}\chi_2 - |(1 - \tau)\chi_1 - \alpha\tau\chi_2|^2 \geqslant 0. \tag{31}$$

Второе неравенство должно быть выполнено для некоторого $\tau \geqslant 0$ и для всех $\omega \neq \pm\infty$. Преобразуем (31) к виду

$$a(\omega)\tau^2 - 2b(\omega)\tau + c(\omega) \leqslant 0,$$

где

$$a(\omega) = |\alpha\chi_2 + \chi_1|^2, \qquad b(\omega) = -2\operatorname{Re}\chi_2 + |\chi_1|^2 + \alpha\operatorname{Re}(\chi_2\chi_1^*),$$
$$c(\omega) = |\chi_1|^2 - 4\operatorname{Re}\chi_2, \qquad \chi_j = \chi_j(-\varepsilon_0 + i\omega),$$

и предположим, что $a(\omega) \neq 0$. Неравенство (31) выполнено хотя бы для одного $\tau \geqslant 0$, если

$$b(\omega)^2 \geqslant a(\omega)c(\omega), \qquad \inf \tau_1(\omega) \geqslant \sup \tau_2(\omega) \geqslant 0, \tag{32}$$

где $\tau_{1,2}(\omega) = (b \pm \sqrt{b^2 - ac}\ )a^{-1}$.

При выполнении (32) для любого решения $x(t)$ справедлива оценка (19) (где $\varepsilon_0 > 0$ — заданное число).

---

* Этот простой прием существенно упрощает выкладки, так как условие неположительности F в новых переменных имеет вид $\tau_1 > 0$, $P_0(\tau_1, \tau_2) > 0$, а в старых $P_1(\tau_1, \tau_2) > 0$, $P_2(\tau_1, \tau_2) > 0$, где P_0, P_1, P_2 — квадратичные формы относительно τ_1, τ_2.

11. Одно обобщение теорем 1, 3

В ряде случаев удобно пользоваться следующим предложением.

Теорема 5. Предположим, что в условиях теорем 1,3 некоторые из допустимых значений параметров ϑ_j определяются не так, как было указано выше, а по следующему правилу: $\vartheta_j \geqslant 0$, если для некоторой постоянной μ_j^0 функционал $\varphi_j^0 = \varphi_j[\sigma_{q_j}]_t - \mu_j^0\sigma_q$ удовлетворяет условию положительности, и $\vartheta_j \leqslant 0$, если для некоторой постоянной μ_j^0 функционал $(-\varphi_j^0)$ удовлетворяет условию положительности *. Предположим при этом, что условие $W(0, \sigma) \geqslant 0$ теорем 1,3 заменено следующим: для любых σ выполнено $W(\varphi, \sigma) \geqslant 0$, где $\varphi_j = 0$, если $\mu_j^0 = 0$; $\varphi_j = \mu_j\sigma_{q\,j}$, если $\mu_j^0 \neq 0$ и μ_j — произвольные числа в интервалах $0 \leqslant \mu_j \leqslant \mu_j^0$ или $\mu_j^0 \geqslant \mu_j \geqslant 0$ в соответствии со знаком μ_j^0.

Тогда выполнены утверждения теорем 1,3 с заменой в утверждении «г» нелинейностей φ_j на φ_j^0.

Отметим, что если для некоторого индекса j и для некоторых постоянных α_j, β_j обе функции $\varphi_j - \alpha_j\sigma_{q_j}$ и $-\varphi_j + \beta_j\sigma_{q_j}$ удовлетворяют условию положительности (относительно σ_{q_j}), то, применяя дважды теорему 5, получим, что все значения ϑ_j являются допустимыми. При этом, конечно, должно быть выполнено также оставшееся предположение теоремы 5.

Продолжим рассмотрение примеров, используя теорему 5.

12. Частотное условие Попова для многих нелинейностей

Уравнения системы имеют вид:

$$\sigma_j + \sum_{h=1}^{n} \chi_{jh}(p)\varphi_h = 0, \qquad \varphi_h = \varphi_h(\sigma_h) \tag{33}$$

$$(h = 1, \ldots, n, \qquad p = d/dt).$$

Нелинейности $\varphi_h(\sigma_h)$ — обычные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant \sigma_h\varphi_h(\sigma_h) \leqslant \mu_h^0\sigma_h^2 \qquad (h = 1, \ldots, n), \tag{34}$$

где μ_h^0 — постоянные, $\mu_h^0 < +\infty$. Полюсы передаточных функций $\chi_{jh}(p)$ лежат в левой полуплоскости. Так как функции $\varphi_h = \varphi_h(\sigma_h)$ удовлетворяют усиленным условиям положительности, то допустимыми являются значения $\vartheta_h \geqslant 0$. Так как функции $-\varphi_h^0 = \mu_h^0\sigma_h - \varphi_h(\sigma_h)$ удовлетворяют усиленным условиям положительности, то допустимыми являются также значения $\vartheta_h \leqslant 0$. Таким образом, ограничений на знак ϑ_h нет.

Составим форму F. Имеем (для действительных σ_j, φ_j см. «А»)

$$W = \sum_{j=1}^{n} \tau_j[\sigma_j - (\mu_j^0)^{-1}\varphi_j]\varphi_j \geqslant 0,$$

и допустимыми являются значения $\tau_j \geqslant 0$. Из выражения для W видно, что условие $W \geqslant 0$ выполнено для значений $\varphi_j = \mu_j\sigma_j$, где μ_j — произвольные числа из интервалов $0 \leqslant \mu_j \leqslant \mu_j^0$.

Для комплексных σ_j, φ_j имеем

$$W = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^*\tau_j[\sigma_j - (\mu_j^0)^{-1}\varphi_j] = \operatorname{Re} \varphi^*\tau_d(\sigma - \mu_d^{-1}\varphi),$$

---

* Старое правило совпадает с новым при $\mu_j^0 = 0$.

где τ_d, μ_d^{-1} — диагональные матрицы с диагональными элементами $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и $\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1}$. Из (18) следует, что

$$F(p, \varphi) = \mathrm{Re}(p\varphi^* \vartheta_d \sigma) + \mathrm{Re}\, \varphi^* \tau_d (\sigma - \mu_d^{-1} \varphi). \qquad (35)$$

Здесь ϑ_d — диагональная матрица с диагональными элементами $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ и $\sigma = \|\sigma_j\|$ определяется из (33), где p — комплексное число. Подставляя в (35) значение $\sigma = -\chi(p)\varphi$, где $\chi(p) = \|\chi_{jh}(p)\|$, $p = i\omega$, получим

$$F = -\varphi^* \pi(i\omega) \varphi,$$

где

$$\pi(p) = \tau_d \mu_d^{-1} + \mathrm{Re}[(\tau_d + p\vartheta_d)\chi(p)].$$

Из теорем 1,5 следует: абсолютная устойчивость в указанном классе нелинейностей имеет место, если для некоторых $\tau_j \geqslant 0$ ϑ_j и всех ω $(-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty)$ матрица $\pi(i\omega)$ является положительно определенной.

Этот же вывод остается в силе, если некоторые из $\mu_j^0 = \infty$ и соответствующие $\vartheta_j \geqslant 0$. Справедливо также аналогичное утверждение (получающееся из теоремы 3) для случая, когда условие $\pi(i\omega)$ нарушается при $|\omega| = \infty$.

13. Распространение частотного условия Попова для многих нелинейностей на случай нестационарных, разрывных и гистерезисных нелинейностей [4, 12]

Из изложенного выше и из теорем 1, 5 следует справедливость частотного условия $\pi(i\omega) > 0$ для указанных типов нелинейностей, если параметры ϑ_j имеют соответствующий знак. Именно: $\vartheta_j \geqslant 0$, если функционал $\varphi_j = \varphi_j[\sigma_j]_t$ удовлетворяет условию положительности, $\vartheta_j \leqslant 0$, если функционал $\mu_j^0 \sigma_j - \varphi_j[\sigma_j]_t$ удовлетворяет условию положительности *.

Например, для гистерезисной функции, график которой изображен на рис. 1, допустимыми будут значения $\vartheta_j \geqslant 0$. Если на рис. 1 изменить направления стрелок на обратные, то допустимыми будут значения $\vartheta_j \leqslant 0$.

14. Критический случай

Выше везде предполагалось, что в (1) P — гурвицева матрица (полюсы $\chi_{jh}(p)$ лежат в левой полуплоскости). Следующая теорема переносит утверждения теорем 1—5 на более общий случай.

Теорема 6. Все утверждения теорем 1—5, кроме утверждения «б′» теоремы 3, остаются справедливыми, если: а) в условиях этих теорем предположение о том, что P — гурвицева матрица, заменено предположением асимптотической устойчивости системы (1) при $\varphi_j \equiv \varphi_j[\sigma_{q_j}]_t = \nu_j \sigma_{q_j}$, где ν_j — некоторые постоянные; б) условие неотрицательности формы $W(0, \sigma)$ заменено условием неотрицательности (относительно σ_j $(j = 1, \ldots, m)$) формы $W(\varphi, \sigma)$, в которой $\varphi_j = \nu_j \sigma_{q_j}$; в) условия относительно формы $F(p, q)$ и переменных $\varphi = \|\varphi_j\|$ заменены аналогичными условиями относительно формы $F_1(p, \varphi^{(1)}) \equiv F(p, \varphi)$ и переменных $\varphi^{(1)} = \|\varphi_j^{(1)}\|$, связанных с переменными φ_j соотношениями

$$\varphi_j^{(1)} = \varphi_j - \nu_j \sigma_{q_j}, \qquad \sigma_h = -\sum_h \chi_{jh}(p) \varphi_h. \qquad (36)$$

Таким образом, по теореме 6 основное условие $F(p, \varphi) < 0$ (где $p = i\omega$ для теорем 1,3 и $p = -\alpha + i\omega$, $p = -\varepsilon_0 + i\omega$ для теорем 2,4) переходит в условие отрицательной определенности той же формы, но не относительно переменных φ_j, а относительно переменных $\varphi_j^{(1)} = \varphi_j - \nu_j \sigma_{q_j}$. При этом следует вначале выразить переменные φ_j, σ_h через $\varphi_j^{(1)}$, воспользовав-

* Отметим, что последнее условие более широкое, чем условие положительности функционала $(-\varphi_j)$. Относительно случая разрывных функций см. примечание на стр. 16.

шись соотношением (36) для значений p, не являющимися полюсами $\chi_{jh}(p)$, затем подставить необходимые значения p. Из доказательства теоремы 6 следует, что коэффициенты полученной формы $F_1(p, \varphi^{(1)})$ не будут иметь особенностей. В случае, когда матрица P не имеет собственных значений на мнимой оси, легко показать, что линейное преобразование, связывающее φ_j и $\varphi_j^{(1)}$, является неособым для всех указанных выше значений p. Поэтому в этом случае можно отбросить пункт «в» теоремы 6, заменив его прежними условиями относительно формы $F(p, \varphi)$. В случае, когда матрица P имеет собственные значения ($\chi_{jh}(p)$-полюсы) на мнимой оси, такая замена, вообще говоря, незаконна и может привести к неверному результату.

Поясним сказанное следующим примером. Пусть в системе (1) матрица P имеет одно нулевое собственное значение на мнимой оси, $m = n = 1$, а квадратичная связь имеет вид $\sigma\varphi \geqslant 0$. Пусть, кроме того, система (1) асимптотически устойчива при $\varphi = \nu\sigma$ с малыми $\nu > 0$. Возьмем вначале $W(\varphi, \sigma) = \sigma\varphi$. Имеем $W(\varphi, \sigma) \geqslant 0$ на решении, $W(0, \sigma) \equiv 0$ для всех σ, $F(p, \varphi) = \operatorname{Re}(\varphi^*\sigma)$, $\varphi^{(1)} = \varphi - \nu\sigma$, $F_1(p, \varphi^{(1)}) = \operatorname{Re}(\varphi^{(1)} + \nu\sigma)^*\sigma$. Полагая $\sigma^{(1)} = -\chi_1(p)\varphi^{(1)}$, получаем $\chi_1(p) = \chi(p)[1 + \nu\chi(p)]^{-1}$, причем $\chi_1(p)$ не будет иметь особенностей на мнимой оси. Частотное условие $F_1(i\omega, \varphi^{(1)}) =$ Это естественно, так как система (1) не является асимптотически устойчивой уже для $\varphi \equiv 0$. Аналогичное условие $F(i\omega, \varphi) = -\operatorname{Re}\chi|\varphi|^2 < 0$ может быть выполнено, но дает в соответствии со сказанным выше неверный результат.

Заменив связь $\sigma\omega \geqslant 0$ более жесткой $\sigma\varphi \geqslant \nu\sigma^2$ (где $\nu > 0$ — сколь угодно малое число), получим $F(p, \varphi^{(1)}) = \operatorname{Re}[(\varphi^{(1)})^*\sigma]$. Теоремы 3, 6 дадут известное частотное условие абсолютной устойчивости: $\operatorname{Re}\chi_1(i\omega) > 0$ для $\omega \geqslant 0$, $\lim \omega^2 \operatorname{Re}\chi_1(i\omega) > 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теоремы 1

Выпишем в явном виде матрицу квадратичной формы F. Для этого введем матрицы коэффициентов формы (16):

$$\alpha = \|\alpha_{jh}\|, \qquad \beta = \|\beta_{jh}\|, \qquad \gamma = \|\gamma_{jh}\|.$$

Матрицы α и γ симметричные: $\alpha_{jh} = \alpha_{hj}$, $\gamma_{jh} = \gamma_{hj}$. Следовательно, первая и третья суммы в (17) являются вещественными. Считая, что звездочка означает эрмитово сопряжение, получаем из (17) для комплексных значений $\varphi = \|\varphi_j\|$, $\sigma = \|\sigma_j\|$:

$$W = \varphi^*\alpha\varphi + 2\operatorname{Re}\varphi^*\beta\sigma + \sigma^*\gamma\sigma. \tag{1.1}$$

Подставляя $\sigma = -\chi\varphi$, где $\chi = \chi(p)$, имеем

$$W = \varphi^*[\alpha - 2\operatorname{Re}(\beta\chi) + \chi^*\gamma\chi]\varphi.$$

Здесь и ниже для произвольной квадратной матрицы U через $\operatorname{Re} U$ обозначается $\operatorname{Re} U = {}^1/_2(U + U^*)$.

Пусть σ_{q_h}— выделенный вход, от которого зависит φ_h, причем при $\vartheta_h \neq 0$ функция φ_h или $(-\varphi_h)$ удовлетворяют условию положительности относительно σ_{q_h}.

Введем $n \times m$-матрицу $\varepsilon = \|\varepsilon_{hi}\|$, где

$$\varepsilon_{hi} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq q_h, \qquad \varepsilon_{hq_h} = 1, \tag{1.2}$$

и $n \times n$-диагональную матрицу ϑ_d с диагональными элементами $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$. Тогда $\sum_h \vartheta_h\varphi_h^*\sigma_{q_h} = \sum_{hi} \varphi_h^*\vartheta_h\varepsilon_{hi}\sigma_i = \varphi^*\vartheta_d\varepsilon\sigma$. Поэтому из (18) имеем

$$F(p, \varphi) = \operatorname{Re}(p\varphi^*\vartheta_d\varepsilon\sigma) + W(\varphi, \sigma), \tag{1.3}$$

где $\sigma = -\chi(p)\varphi$.

Подставляя значение (1.1), получаем

$$F(p, \varphi) = -\varphi^*\pi(p)\varphi, \tag{1.4}$$

где

$$\pi(p) = \mathrm{Re}\,(p\vartheta_d\varepsilon\chi) - \alpha + 2\mathrm{Re}\,(\beta\chi) - \chi^*\gamma\chi \quad (\chi = \chi(p)). \tag{1.5}$$

Из (1.5) и (2) следует, что существует $\pi(\infty) = \lim\limits_{|p|\to\infty} \pi(p) = -\alpha - \mathrm{Re}\,(\vartheta_d\varepsilon r^* q)$. Поэтому $F(i\infty, \varphi) = F(\infty, \varphi) = -\varphi^*\pi(\infty)\varphi$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$V(t) = x^*Hx + \int_0^t \varphi^*\vartheta_d\varepsilon\, d\sigma + \int_0^t W(\varphi, \sigma)\, dt, \tag{1.6}$$

где $x = x(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ определяются из (1) и $H > 0$ — какая-либо положительно определенная матрица. Имеем

$$-\dot V = x^*Gx + 2x^*g\varphi + \varphi^*\rho\varphi,$$

где

$$-G = HP + P^*H + r\gamma r^*,$$
$$-g = Hq + {}^1/_2 P^*r\varepsilon^*\vartheta_d + r\beta^*,$$
$$-\rho = \alpha + \mathrm{Re}\,(\vartheta_d\varepsilon r^* q).$$

Из (2) следует, что $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \chi(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \lambda\chi(\lambda) = -r^*q$. Поэтому $\pi(i\infty) = \rho > 0$. Постараемся подобрать матрицу H так, чтобы функция $(-\dot V)$ была положительно определенной формой x и φ.

По теореме 4 [21] о матричных неравенствах для этого необходимо и достаточно (и это центральный момент доказательства), чтобы при всех вещественных ω было выполнено условие *

$$\pi_0(\omega) = \rho + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} P^*r\varepsilon^*\vartheta_d + r\beta^*\right)^* q_\omega + q_\omega^* C q_\omega > 0, \tag{1.7}$$

где $q_\omega = (P - i\omega I)^{-1}q$, $C = -r\gamma r^*$.

Подставляя в (1.7) значения $r^*q_\omega = \chi(i\omega)$, $r^*Pq_\omega = r^*[I + i\omega(P - i\omega I)^{-1}]q = r^*q + i\omega\chi(i\omega)$, получаем $\pi_0(\omega) = \pi(i\omega)$. По условию теоремы $\pi(i\omega) > 0$, следовательно, указанная матрица $H = H^*$ существует. Поскольку $W(0, \sigma) = \sigma^*\gamma\sigma \geqslant 0$ для всех σ, то $\gamma \geqslant 0$, $C \leqslant 0$. Из неравенств $G > 0$, $HP + P^*H = -G + C < 0$ имеем $H > 0$.

На решении системы (1), по предположению, выполнено $W \geqslant 0$

$$\int_0^t \varphi^*\vartheta_d\varepsilon\, d\sigma = \sum_h \vartheta_h \int_0^t \varphi_h\, d\sigma_{q_h} \geqslant \mathrm{const}.$$

Поэтому $V(t)$ — функция, ограниченная снизу. Поскольку $\dot V \leqslant 0$, то сходится интеграл $\int\limits_0^\infty (-\dot V)\, dt = \lim\limits_{t\to\infty} V(t) - V(0)$.

Так как $(-\dot V) \geqslant \varepsilon_1|x|^2 + \varepsilon_2|\varphi|^2$ для некоторых чисел $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, то $|x| \in L_2(0, \infty)$, $|\varphi| \in L_2(0, \infty)$, т. е. выполнено утверждение «б» теоремы 1.

Из (1) следует, что и $|\dot x| \in L_2(0, \infty)$. Из сходимости интеграла

$$2\int_0^\infty |x^*\dot x|\, dt \leqslant \int_0^\infty |x|^2\, dt + \int_0^\infty |\dot x|^2\, dt$$

следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)|^2 = |x(0)|^2 + {}^1/_2 \int_0^\infty x^*\dot x\, dt.$$

Поскольку $|x| \in L_2(0, \infty)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)|^2 = 0$. Тем самым доказано утверждение «а» теоремы 1.

Пусть все $\vartheta_h = 0$. Обозначая $V_0(x) = x^*Hx$, имеем $\dot V = \dot V_0 + W \leqslant -\varepsilon_1|x|^2 - \varepsilon_2|\varphi|^2 \leqslant -2\varepsilon_0 V_0$, где постоянная $\varepsilon_0 > 0$ удовлетворяет условию $\varepsilon_1|x|^2 \geqslant 2\varepsilon_0 V_0(x)$.

* В обозначениях теоремы 4 [21] $\varkappa_1 = n$, $\varkappa_2 = 0$. Поэтому условие на ранг матрицы a_2 и условие (II) теоремы 4 [21] отсутствуют. Отметим, что в этом месте существенно, хотя и неявно, используется результат В. М. Попова [9], так как доказательство теоремы 4 [21] основано на результате [9]. Отметим также, что возможно непосредственное доказательство теоремы 4 [21], не использующее [9], аналогичное доказательству этой теоремы для $\varkappa = 1$, приведенному в [22].

Поэтому $\dot{V}_0 \leqslant 2\varepsilon_0 V_0$, т. е. $V_0[x(t)] \leqslant e^{-2\varepsilon_0(t-t_0)} V_0[x(t_0)]$, откуда следует утверждение «в».

В случае, когда при $\vartheta_h \neq 0$ функции φ_h (или $(-\varphi_h)$) удовлетворяют усиленным условиям положительности, из (1.6) имеем

$$V_0[x(0)] = V(0) \geqslant V(t) \geqslant V_0[x(t)] - \sum_{h=1}^{n} |\vartheta_h| \delta_h(|\sigma_{q_h}(0)|),$$

т. е. выполнено утверждение «г» теоремы 1.

Замечание. Из доказательства следует, что утверждение «а» — «в» теоремы остаются справедливыми, когда вместо неравенства $W \geqslant 0$ выполнено более слабое (но трудно проверяемое) условие: интеграл $\int_0^t W\, dt$ ограничен снизу для всех $t \geqslant 0$. В случае, когда эта граница стремится к нулю вместе с $|x(0)|$, выполнено и утверждение «г» теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнены предположения теоремы 2. Делая в (1) замену $x = e^{-\alpha t} x'$, получаем систему

$$dx' / dt = (P + \alpha I)x' + q\varphi', \qquad \sigma' = r^* x', \tag{2.1}$$

где $\varphi' = e^{\alpha t}\varphi$, $\sigma' = e^{\alpha t}\sigma$. Применим к системе (2.1) теорему 1, считая, что все $\vartheta_h = 0$.

Матрица $P + \alpha I$ является гурвицевой по предположению. Поскольку $W_j(\varphi', \sigma') = e^{2\alpha t} W_j(\varphi, \sigma)$, то условия (5) для системы (2.1) будут выполнены, если взять $W_j = W_j(\varphi', \sigma')$. Форма $W = W'(\varphi', \sigma')$ для системы (2.1) имеет вид $W'(\varphi', \sigma') = \Sigma\tau_j W_j(\varphi', \sigma') = W(\varphi', \sigma')$. При этом допустимые значения τ_j остаются прежними. Условие $W'(0, \sigma') = W(0, \sigma') \geqslant 0$ выполнено по предположению. Передаточная матрица $\varkappa = \chi'(p)$ для системы (2.1) получается из передаточной матрицы $\chi(p)$, для системы (1) заменой P на $P + \alpha I$, т. е. $\chi'(p) = \chi(p - \alpha)$. Поэтому форма $F = F'(p, \varphi')$ для системы (2.1) получается из формы $F = F(p, \varphi)$ для системы (2.1) по формуле $F'(p, \varphi') = F(p - \alpha, \varphi')$. По условию $F'(i\omega, \varphi') = F(i\omega - \alpha, \varphi') < 0$ при $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$. Поэтому справедливы утверждения теоремы 1 с заменой x на $x' = e^{\alpha t}x$ и φ на $\varphi' = e^{\alpha t}\varphi$, что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 3

Повторяя доказательство теоремы 1, дойдем без изменений до места, где делается вывод о существовании искомой матрицы H. В нашем случае $\pi(i\infty) = \rho$ — вырожденная матрица, поэтому $(-\dot{V})$ не может быть положительно определенной формой x и φ. Постараемся найти такую матрицу $H = H^*$, чтобы форма $(-\dot{V})$ была неотрицательной и имела максимально возможный ранг. Для этого применим снова теорему 4 [21].

Предположим вначале, что $(F)_{p=\infty}$ — отрицательно определенная форма переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$ (невырожденных) и не зависит от (вырожденных) переменных $\varphi_{n_1+1}, \ldots, \varphi_{n_1+n_2}$, где $n_1 + n_2 = n$. Пусть $\varphi' = \|\varphi_j\|_{j=1}^{n_1}$, $\varphi'' = \|\varphi_j\|_{j=n_1+1}^{n_2}$. Представим матрицы $\pi(p)$, q в виде:

$$\pi(p) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \left\| \begin{array}{cc} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{array} \right\| \end{array}\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array}, \qquad q = \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \|q_1, & q_2\| \end{array}\nu, \tag{3.1}$$

где числа n_1, n_2, ν сверху и сбоку означают число строк или столбцов. При этом $\pi_{12} = \pi_{21}^*$. Обозначая $\pi_{jh}(\infty) = \rho_{jh}$, имеем, по условию, $\rho_{11} > 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{21} = 0$, $\rho_{22} = 0$. Максимально возможным рангом формы $(-V)$ будет поэтому число $\nu + n_1$. Матрицей формы $(-F_\infty^0)$ является матрица

$$\pi_\infty^0 = \lim_{\omega\to\infty} \left\| \begin{array}{cc} \pi_{11}(i\omega), & \omega\pi_{12}(i\omega) \\ \omega\pi_{21}(i\omega), & \omega^2\pi_{22}(i\omega) \end{array} \right\|,$$

которая, по условию положительно определенна. Это означает, что

$$\rho_{11} = \pi_{11}(\infty) > 0, \qquad \lim_{\omega\to\infty} \omega^2 [\pi_{22} - \pi_{21}\pi_{11}^{-1}\pi_{12}] > 0. \tag{3.2}$$

Последнее следует из представления произвольной положительно определенной формы

$$\Omega = \varphi_1^*\alpha_{11}\varphi_1 + \varphi_1^*\alpha_{12}\varphi_2 + \varphi_2^*\alpha_{21}\varphi_1 + \varphi_2^*\alpha_{22}\varphi_2$$

(где α_{jh} — матрицы порядка $n_j \times n_h$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}^*$, φ_j — векторы порядка n_j) в виде*

$$\Omega = \xi^* \alpha_{11}^{-1} \xi + \varphi_2^* (\alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}) \varphi_2,$$

где

$$\xi = \alpha_{12} \varphi_2 + \alpha_{11} \varphi_1.$$

По теореме 4 [21] для существования матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей сформулированному выше условию ($\dot{V} \leqslant 0$ и форма $(-\dot{V})$ имеет ранг $\nu + n_1$), достаточно (и необходимо), чтобы: (I) $\pi_0(\omega) > 0$ при $-\infty < \omega < +\infty$, где $\pi_0(\omega)$ имеет вид (1.7), т. е. $\pi_0(\omega) = \pi(i\omega)$; (II) было выполнено второе неравенство (3.2) и (III) матрица q_2 имела ранг n_2.

Первые два условия выполнены. Третье следует из (III). Действительно, обозначая $b = {}^1/_2 P^* r \varepsilon\, \vartheta_d + r\beta^* = \|b_1, b_2\|$, где b_j — матрицы порядка $\nu \times n_j$, получаем из (3.1), (1.7) и равенства $\pi_0(\omega) = \pi(i\omega)$, что

$$\pi_{22}(i\omega) = 2 \operatorname{Re} b_2^* q_{2\omega} + q_{2\omega}^* C q_{2\omega},$$

где $q_{2\omega} = (P - i\omega I)^{-1} q_2$. По условию $\nu \geqslant n_2$. Если ранг q_2 меньше n_2, то для некоторого $n_2 \times 1$-вектора ζ выполнено $q_2 \zeta = 0$. Тогда $\zeta^* \pi_{22}(i\omega) \zeta \equiv 0$, т. е. нарушено второе соотношение (3.2). Следовательно, ранг q_2 равен n_2. Таким образом, по теореме 4 [21] существует матрица $H = H^*$, такая, что $(-\dot{V}) \geqslant 0$ и $(-\dot{V}) \geqslant \varepsilon_1 |x|^2 + \varepsilon_2 |\varphi'|^2$. Как и выше, получим, что $H > 0$ и что выполнены утверждения «а′», «б′» теоремы 3, а также неравенство (19) при $\vartheta_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. В частности, при выполнении усиленных условий положительности $|x(t)|$ — ограниченная функция. Последнее верно и при выполнении неусиленных условий положительности и следует из неравенства $V(0) \geqslant V(t) \geqslant x(t)^* H x(t) - \delta \sum_h |\vartheta_h|$. Если при этом, как предположено в пункте «в′» теоремы 3, функции φ_j являются ограниченными, то из (1) следует, что $|\dot{x}|$ — также ограниченная функция. Отсюда следует (это можно показать разными способами), что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно,

$$(|x|^3)^{\cdot} = 3|x|^2 |x|^{\cdot} = 3|x| x^* \dot{x}.$$

Поэтому $|(|x|^3)^{\cdot}| \geqslant 3|x|^2 |\dot{x}|$, т. е. сходится интеграл $\int\limits_0^\infty (|x|^3)^{\cdot}\, dt$. Последнее означает существование предела $\lim\limits_{t \to \infty} |x|^3$, который в силу условия $|x| \in L_2(0, \infty)$ равен нулю. Таким образом, выполнено утверждение «в′» теоремы 3.

Рассмотрим теперь случай, когда форма $(F)_{p=\infty}$ — неотрицательная форма произвольного вида. Существует неособая вещественная $n \times n$-матрица T, такая, что форма

$$(F)_{p=\infty} = -\varphi^* \pi(\infty) \varphi = -\psi^* [T^* \pi(\infty) T] \psi$$

относительно переменных $\psi = T^{-1} \varphi$ имеет указанный выше вид, т. е. $T^* \pi(\infty) T = \|\rho_{jh}'\|$, где $\rho_{11}' > 0$, $\rho_{12}' = 0$, $\rho_{21}' = 0$, $\rho_{22}' = 0$. Применяя теорему 4 [21] и взяв $\pi_0(\omega) = T^* \pi(i\omega) T$, получим, как и выше, существование матрицы $H = H^*$ и справедливость всех утверждений теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 4

Докажем вначале для полноты указанное после теоремы известное предложение о связи рангов матриц Φ и Ψ и степеней знаменателей функций $\chi_{jh}(\lambda)$. Покажем, что если ранг хотя бы одной из матриц Φ или Ψ меньше ν, то функции $\chi_{jh}(\lambda)$ можно представить в виде $\chi_{jh}(\lambda) = \alpha_{jh}(\lambda) / \Delta_0(\lambda)$, где $\alpha_{jh}(\lambda)$, $\Delta_0(\lambda)$ — многочлены и степень $\Delta_0(\lambda)$ меньше ν. Пусть ранг Φ меньше ν. Тогда найдется $\nu \times 1$-вектор $z \neq 0$, такой, что $z^* P^k q_h = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$, где q_h — столбцы матрицы q $(h = 1, \ldots, n)$. Поэтому ранг каждой $\nu \times \nu$-матрицы $\Phi_h = \|g_h, P_{g_h}, \ldots, P^{\nu-1} q_h\|$ меньше ν. По лемме 2 [23] (Приложение) $(P - \lambda I)^{-1} q_h = a_h(\lambda) / \Delta_0(\lambda)$, где степени скалярного многочлена $\Delta_0(\lambda)$ и векторного многочлена $a(\lambda)$ меньше ν. Имеем

$$\chi_{jh}(\lambda) = r_j^* (P - \lambda I)^{-1} q_h = r_j^* a_h(\lambda) / \Delta_0(\lambda),$$

* Из указанного представления следует также, что положительная определенность блочной матрицы $\alpha = \|\alpha_{jh}\|$ $(j, h = 1, 2)$ равносильна неравенствам $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} > \alpha_{21} \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12}$ (здесь $\alpha_{12}^* = \alpha_{21}$).

где r_j — столбцы матрицы r. Следовательно, функции $\chi_{jh}(\lambda)$ представимы в виде отношения многочленов указанного вида. Дословно также рассматривается случай, когда ранг матрицы Ψ меньше ν.

Покажем теперь, что в предположениях теоремы ранг $\nu \times n\nu$-матрицы $\Psi_0 = \|r\beta^*, P^*r\beta^*, \ldots, (P^{*(\nu-1)})r\beta^*\|$ равен ν. Предполагая противное, имеем $z^*(P^*)^k r\beta^* = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ и некоторого $\nu \times 1$-вектора $z \neq 0$. Так как по условию ранг $m \times n$-матрицы β^* равен m, то для любого $m \times 1$-вектора ζ из соотношения $\zeta\beta^*$ следует $\zeta = 0$. Поэтому $\zeta_k = z^*(P^*)^k r = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$, что противоречит условию относительно ранга матрицы Ψ.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Постараемся найти матрицу $H = H^*$, такую, чтобы для любого решения $x = x(t)$ системы (1) было выполнено $\dot V \leqslant 2\varepsilon_0 V$, где $V = x^*Hx$. Имеем $\dot V + 2\varepsilon_0 V = \{2x^*H(Px + q\varphi) + 2\varepsilon_0 x^*Hx + W(\varphi, \sigma)\} - W(\varphi, \sigma) = -\{x^*Gx + 2x^*g\varphi + \varphi^*\alpha\varphi\} - W(\varphi, \sigma)$, где $-G = H(P + \varepsilon_0 I) + (P + \varepsilon_0 I)^*H + r\gamma r^*$, $-g = Hq + r\beta^*$.

Поскольку $W(\varphi, \sigma) \geqslant 0$, достаточно потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках было неотрицательной формой x и φ. Согласно лемме 1 (б) Попова [9] (или согласно утверждению пункта (б) теоремы 3 [21], сформулированному в обозначениях, более близких к настоящим) искомая матрица $H = H^*$ существует, если для всех ω

$$\pi_0(\omega) = \alpha + 2\mathrm{Re}\, \beta r^* \tilde q_\omega + \tilde q_\omega^* r\gamma r^* \tilde q_\omega \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где $\tilde q_\omega = [P - (-\varepsilon_0 + i\omega)I]^{-1} q$. Соотношение (4.1) по условию теоремы выполнено. По пункту (в) теоремы 3 [21] имеем $H > 0$ (роль матрицы $\boldsymbol{\Psi}$ в условиях теоремы 3 [21] выполняет матрица $\boldsymbol{\Psi}_0$). Из неравенств $\dot V \leqslant -2\varepsilon_0 V$, $H > 0$ сразу следует (19) с постоянной $C > 0$, не зависящей от нелинейностей.

5. Доказательство теоремы 5

Рассмотрим вместо (1.6) функцию

$$V(t) = x^*H_0x + \sum_{R=1}^{n} \vartheta_j \int_0^t (\varphi_j - \mu_j^0 \sigma_{q_j}) d\sigma_{q_j} + \int_0^t W(\varphi, \sigma)\, dt. \tag{5.1}$$

При этом будем считать (без ограничения общности), что $\mu_j^0 = 0$, если ϑ_j определяются по старому правилу. Функцию $V(t)$ можно, очевидно, преобразовать к виду (1.6). Поэтому сохраняется без изменений вся часть доказательства теорем 1.3, где не используется ограниченность снизу функции $V(t)$. Для доказательства теоремы 5 достаточно установить, что $H_0 > 0$, так как тогда функция $V(t)$ будет ограниченной снизу и сохраняются доказательства теорем 1.3. Покажем, что $H_0 > 0$. Из доказательств теорем 1.3 имеем: $\dot V - W$ — отрицательно определенная форма x, φ в случае теоремы 1 или x и невырожденных переменных φ_j (или ψ_j) в случае теоремы 3. Заменим в уравнениях (1), условиях (5) и в формуле (5.1) функции $\varphi_j = \varphi_j[\sigma_{q_j}]_t$, на $\mu_j\sigma_{qj}$ где числа μ_j пробегают значения $0 \leqslant \mu_j \leqslant \mu_j^0$ или $\mu_j^0 \leqslant \mu_j \leqslant 0$ в соответствии со знаком μ_j^0 (если старое правило совпадает с новым, то $\mu_j^0 = 0$ и, следовательно, φ_j заменяется нулем). При такой замене система (1) станет линейной, а функция $V(t) - \int_0^t W(\varphi, \sigma)\, dt$ станет, с точностью до аддитивной постоянной, квадратичной формой x:

$$V(t) - \int_0^t W(\varphi, \sigma)\, dt \equiv V_0(x) + \mathrm{const},$$

где

$$V_0^0(x) = x^*H_0x + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j (\mu_j - \mu_j^0) \sigma_{q_j}^2 / 2.$$

Обозначим через $\varphi = \varphi(\sigma, \mu)$ набор соответствующих линейных функций $\mu_j\sigma_{q_j}$. По условию $W[\tilde\varphi(\sigma, \mu), \sigma] \geqslant 0$ для любых σ. Поэтому к линейной системе (1) с $\varphi = \tilde\varphi(\sigma, \mu)$ применимо доказанное утверждение, согласно которому для этой системы функции $\dot V - W = \dot V_0$ будет отрицательно определенной формой x. Поэтому матрица коэффициентов этой линейной системы, зависящая от параметров μ_j, не может иметь собственных значений на мнимой оси. Действительно, в этом случае у линейной системы было бы периодическое решение $x(t)$, тогда функция $V_0[x(t)]$ была бы периодической и неравенство $d/dt V_0[x(t)] < 0$ было бы невозможно. При $\mu_j = 0$ все $\varphi_j = 0$

и матрицей коэффициентов линейной системы является гурвицева матрица P. Следовательно, и для всех указанных значений параметров μ_j матрица коэффициентов является гурвицевой. Поскольку для квадратичной формы $V_0(x)$ выполнено $\dot{V}_0 < 0$, то $V_0(x)$ — положительно определенная форма. Для $\mu_j = \mu_j^0$ имеем $V_0(x) = x^* H_0 x$, поэтому $H_0 > 0$, что и требовалось доказать.

6. Доказательство теоремы 6

Вводя, как и выше, числа (1.2), запишем соотношения $\varphi_j = \nu_j \sigma_{q_j}$ в виде $\varphi = \nu_d \varepsilon \sigma$, где $\varepsilon = \| \varepsilon_{jh} \|$ — матрица порядка $n \times m$, ν_d — диагональная $n \times n$-матрица с диагональными элементами $\nu_1, \ldots, \nu_n$. По предположению, система $dx / dt = Px + q\nu_d \varepsilon \sigma$ является асимптотически устойчивой, т. е. матрица $P_1 = P + q\nu_d \varepsilon r^*$ является гурвицевой. Делая в системе (1) замену $\varphi = \varphi_1 + \nu_d \varepsilon \sigma$, приходим к системе

$$\partial x / \partial t = P_1 x + q\varphi_1, \qquad \sigma = r^* x. \tag{6.1}$$

Связь на нелинейности $W(\varphi, \sigma) \geqslant 0$ перейдет в условие *

$$W_1(\varphi_1, \sigma) \equiv W(\varphi_1 + \nu_d \varepsilon \sigma, \sigma) \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Поскольку P_1 — гурвицева матрица, то к системе (6.1) с квадратичными условиями (6.2) можно применить теорему 1 или 3. Соотношение $W_1(0, \sigma) \equiv W(\nu_d \varepsilon \sigma, \sigma) \geqslant 0$ по предположению выполнено для всех $\sigma \geqslant 0$. Форма $F(p, \varphi_1)$ для системы (6.1), которую обозначим через $F_1(p, \varphi_1)$, имеет вид (см. (1.3)):

$$F_1(p, \varphi_1) = \operatorname{Re}(p \varphi_1^* \vartheta_d \varepsilon \sigma) + W_1(\varphi_1, \sigma), \text{ где } \varphi_1 = -\chi_1(p) \sigma_1.$$

Подставляя в первое слагаемое значение $\varphi_1 = \varphi - \nu_d \varepsilon \sigma$ и воспользовавшись тем, что $W_1(\varphi_1, \sigma) \equiv W(\varphi, \sigma)$, получим

$$F_1(p, \varphi_1) = F(p, \varphi) - \operatorname{Re}(p \sigma^* \varepsilon^* \nu_d \vartheta_d \varepsilon \sigma).$$

Второе слагаемое обращается в нуль для чисто мнимых значений p или для $\vartheta_j = 0$. Поэтому условия теорем 1—4, связанные с формой $F_1(p, \varphi_1)$, можно заменить аналогичными условиями на форму $F(p, \varphi)$. Следовательно, все утверждения этих теорем (кроме утверждения «б′» теоремы 3 для системы (6.1)) переходят в аналогичные утверждения для системы (1), что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что теоремы 1—4 (в близком, но более слабом варианте) могут быть распространены методом В. М. Попова (см., например, [11, 13, 16]) на случай систем с бесконечным числом степеней свободы, когда в (3) $\chi_{jh}(p)$ — мероморфные функции с полюсами в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant -\alpha < 0$.

Поступила в редакцию
3 октября 1966 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний. Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 7, 1964.
2. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II. Абсолютная устойчивость систем с дифференцируемыми нелинейностями. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 4, 1965.
3. Якубович В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 5, 1965.
4. Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Тр. Второго всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Изд-во «Наука», 1966.
5. Гелиг А. Х., Комарницкая О. И. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия в критических случаях. Автоматика и телемеханика, № 8, 1966.
6. Якубович В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями. Докл. АН СССР, т. 149, № 2, 1963.
7. Popov V. M. Noi criterii de stabilitate pentru sistemele automate neliniare. Studlisi cercetari de energetica. Acad. R.P.R. anul. X, № 1, 1960 (франц. пер.: Revue d'electrotechnige et d'energetique, V., N 1, 1960).

* Это условие выполнено не тождественно, а на любом решении системы (6.1).

8. P o p o v V. M. Noi criterii grafice pentru stabilitates starii stationare a sistemolor-automate neliniare. Studii si cercetari de energetica. Acad. R.P.R., anul. X, № 3, 1960 (англ. пер.: Revue d'electrotechnique et d'energetiqus, V, № 1, 1961).
9. P o p o v V. M. Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions, Rev. Roumaine des sciences techniques, ser. Elektrotechnique et energetique, t. 9, № 4, 1964.
10. H a l a n a y A. Teoria calitativa a ecuatülor diffentiale. Editura Acad. Rep. Pop. Romine, 1963.
11. Д ж у р и Э., Л и Б. Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 6, 1965.
12. Я к у б о в и ч В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости стационарных режимов и вынужденных колебаний нелинейных систем регулирования. Тр. Международной конференции по многомерным и дискретным системам автоматического управления, Прага, 1965.
13. L e f s c h e t z S. Stability of Nonlinear Control systems. Acad. Press, New York — London, 1965.
14. Б о н д ж о р н о мл. Критерии устойчивости линейных систем с переменными во времени параметрами, выраженные через характеристики в области действительных частот. Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, № 7, июль, 1964.
15. Ц ы п к и н Я. З., Э п е л ь м а н Н. С. Критерий абсолютной устойчивости многосвязных импульсных систем с нестационарными характеристиками нелинейных элементов. Kybernetika ciolo 6, Rocnik 1/1965.
16. А й з е р м а н М. А., Г а н т м а х е р Ф. Р. О критических случаях в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 6, 1963.
17. А й з е р м а н М. А., Г а н т м а х е р Ф. Р. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1963.
18. П о п о в В. М. Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 1, 1963.
19. P o p o v V. M. Hiperstabilitatea sistemolor automate. Editura Acad. Rep. Soc. România, 1966.
20. B r o c k e t t R. W., W i l l e m s J. L. Frequency Domain Stability Criteria. P. I. II. IEEE Trans. Automatic Control, July, Oktober, 1965.
21. Я к у б о в и ч В. А. Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями. Докл. АН СССР, т. 171, № 3, 1966.
22. Я к у б о в и ч В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. Докл. АН СССР, т. 143, № 6, 1962.
23. Я к у б о в и ч В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. I. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 3, 1963.

FREQUENCY CONDITIONS OF ABSOLUTE STABILITY OF THE CONTROL SYSTEMS WITH SOME NON-LINEAR AND LINEAR NON-STATIONARY BLOCKS

V. A. YAKUBOVICH

Control systems with square connections on inputs and outputs of non-linear blocks are considered.

It is shown that several commonly used nonlinearities satisfy to connections of such type. Frequency conditions of absolute stability which may be written directly on transfer functions of linear system and connections on nonlinearities are established.