И. Б. Горшков, Распознаваемость симметрических групп по спектру, *Алгебра и логика*, 2014, том 53, номер 6, 693–703

Алгебра и логика, 53, № 6 (2014), 693—703

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ПО СПЕКТРУ[*)]

И. Б. ГОРШКОВ

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей её порядка, $\omega(G)$ — её спектр, т. е. множество порядков элементов группы G. Будем говорить, что G *распознаваема по спектру* (кратко, *распознаваема*), если для любой конечной группы L из равенства $\omega(L) = \omega(G)$ следует изоморфизм $L \simeq G$. Отметим, что распознаваемость групп S_n для $n = 7, 9, 11, 12, 13, 14$ и нераспознаваемость для $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ была установлена в работах [1–4]. Вопрос о распознаваемости симметрической группы степени 10 остаётся открытым. В [5] была доказана распознаваемость групп S_p, где p — простое число, большее 13; кроме того, там же были получены сильные ограничения на группы с тем же спектром, что и у групп S_{p+1}. В [6] было доказано: если группа G с тем же спектром, что и у симметрической группа степени n, имеет композиционный фактор, изоморфный A_n, то $G \simeq S_n$.

Граф Грюнберга–Кегеля (или *граф простых чисел*) $GK(G)$ группы G определяется следующим образом. Множеством вершин этого графа является $\pi(G)$. Различные простые числа p и q из $\pi(G)$, рассматриваемые как вершины графа $GK(G)$, соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Пусть $\rho(G)$ — некоторое максимальное по размеру множество попарно несмежных вершин графа $GK(G)$, и $t(G) = |\rho(G)|$. До настоящего момента все рассмотренные симметрические группы, за исключением

[*)]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00065).

группы S_9, распознаваемость которых была доказана, имели несвязный граф простых чисел. Симметрическая группа степени $n > 2$ имеет несвязный граф простых чисел только в том случае, если одно из чисел n или $n-1$ является простым. В нашей работе доказывается распознаваемость всех симметрических групп, за исключением конечного числа.

ТЕОРЕМА 1. *Группа S_n, где $n \notin \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 18, 21, 27, 33, 35, 39, 45\}$, распознаваема.*

ТЕОРЕМА 2. *Если группа S_{16} распознаваема, то группы S_{33}, S_{35}, S_{39}, S_{45} распознаваемы.*

Отметим также, что недавно в [7] была доказана распознаваемость знакопеременных групп A_n, $n \geq 25$. Основную идею доказательства этой работы удалось перенести на рассматриваемый здесь случай симметрических групп.

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

ЛЕММА 1 [8, лемма 1.1]. *Пусть G — конечная группа, $t(G) \geq 3$, и K — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G. Тогда для каждого подмножества ρ простых чисел $\pi(G)$, такого что $|\rho| \geq 3$ и все числа из ρ попарно несмежны в $GK(G)$, пересечение $\pi(K) \cap \rho$ содержит не более одного числа. В частности, G неразрешима.*

ЛЕММА 2 [9, теор. V.8.7]. *Пусть G — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B. Тогда*

(a) *A нильпотентна*;

(b) *произвольная силовская p-подгруппа в B является циклической в случае нечётного простого p и циклической или обобщённой группой кватернионов в случае $p = 2$.*

ЛЕММА 3 [10, лемма 2.2]. *Пусть $S = P_1 \times \ldots \times P_r$, где $P_1, \ldots, P_r$ — изоморфные конечные неабелевы простые группы. Тогда $\mathrm{Aut}\,(S) \simeq (\mathrm{Aut}\,(P_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}\,(P_r)).S_r$.*

ЛЕММА 4 [11, теор. 18.7(4)]. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G, $\overline{G} = G/K$, $\overline{x}$ — образ элемента x из G в $\overline{G}$. Если $(|x|, |K|) = 1$, то $C_{\overline{G}}(\overline{x}) = C_G(x)K/K$.*

ЛЕММА 5 [5, лемма 6]. *Пусть фактор-группа $H = G/N$ конечной группы G изоморфна знакопеременной группе степени m, где $m \geq 5$ и $N \neq 1$. Тогда в G содержится элемент, порядок которого отличен от порядка любого элемента из S_m.*

ЛЕММА 6. *Пусть H — конечная простая классическая группа, лиев ранг которой больше 5. Если числа p и q несмежны в $GK(H)$, то для некоторого $t \in \{p, q\}$ силовская t-подгруппа группы H циклическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое вытекает из [12, леммы 2.4, 2.12].

ЛЕММА 7 [10, лемма 1.2]. *При $n > 6$ имеет место $\omega(A_n) \neq \neq \omega(S_{n-1})$.*

ЛЕММА 8 [1–4]. *Симметрическая группа S_n распознаваема при $n \in \{7, 9, 11, 12, 13, 14\}$.*

ЛЕММА 9 [5]. (1) *Симметрическая группа простой степени $r \geq \geq 17$ распознаваема.*

(2) *Распознаваемость симметрической группы степени $r + 1$ для простого r, не меньшего 17, эквивалентна следующему утверждению: для любого собственного накрытия $G = N.A$ произвольной группы N с помощью группы A, изоморфной S_r или A_r, выполняется $\omega(G) \neq \omega(S_{r+1})$.*

ЛЕММА 10. *Пусть $\omega(G) = \omega(S_n)$. Предположим также существование подгрупп $K \lhd G$ и $S \trianglelefteq G/K$, таких что $S \simeq A_n$. Тогда $G \simeq S_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое непосредственно следует из леммы 5.

ЛЕММА 11 [7, лемма 9]. *Пусть $g \in A_n$ — элемент порядка r, где r — простое число и $n/2 < r < n - 2$, $n \geq 5$. Тогда $C_{A_n}(g) \simeq \langle g \rangle \times A_{n-r}$.*

ЛЕММА 12. *Пусть $g \in S_n$ — элемент порядка r, где r — простое число и $n/2 < r < n - 2$, $n > 5$. Тогда $C_{S_n}(g) \simeq \langle g \rangle \times S_{n-r}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой несложную проверку.

ЛЕММА 13 [7, лемма 12]. *Пусть $\omega(G) = \omega(A_n)$ (или $\omega(S_n)$), $y \in$ $\in G$ — элемент порядка r, где $r \in \rho(G)$, и силовская r-подгруппа группы G является циклической простого порядка. Тогда $C_G(y) = \langle y\rangle \times M$, где $\omega(M) = \omega(A_{n-r})$ (или $\omega(S_{n-r})$).*

ЛЕММА 14. *Пусть H — конечная простая группа. Если для некоторого $r \in \pi(H)$ с условием $|H|_r = r$ найдётся элемент $g \in H$ порядка r, такой что $C_H(g) \simeq \langle g\rangle A_n$ или $\langle g\rangle S_n$, где $r > n > 6$ и $n \neq 8$, то $H \simeq A_m$, где $m = r + n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что H является группой лиева типа и g — унипотентный элемент. Из ограничения $|H|_r = r$ несложно получить, что $H \simeq L_2(r)$. В этом случае $|C_H(g)| = r$. Таким образом, g является полупростым элементом. Из [13, предлож. 6; 14, теор. 4.1.5] следует, что $C_H(g)$ — расширение элементарной абелевой группы при помощи группы лиева типа, т. е. все неабелевы композиционные факторы группы $C_H(g)$ являются простыми группами лиева типа. Но при $n \geq 5$, $n \notin \{6, 8\}$ группа A_n не является группой лиева типа.

Допустим, что H является спорадической группой. Она должна удовлетворять следующим условиям: $|H|$ делится на $7!/2$; для некоторого $r \in \pi(H)$, такого что $|H|_r = r$, в $\omega(H)$ найдутся числа $2r, 3r, 5r, 7r$. Из [15] следует, что спорадических групп, удовлетворяющих этим условиям, нет. Таким образом, H является знакопеременной группой. Из леммы 11 следует, что $H = A_m$. Лемма доказана.

Положим $L = S_n$, где n — минимальное число, отличное от чисел $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 18, 21, 25, 27, 33, 35, 39, 45$, для которого группа S_n не является распознаваемой, G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(L)$.

ЛЕММА 15. *В G найдётся единственный композиционный фактор S, такой что $|\pi(S)\cap\rho(G)| \geq |\rho(G)|-1$ и $|(\pi(K)\cup\pi((G/K)/S))\cap\rho(G)| \leq 1$, где $K \lhd G$ и $S \leq G/K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично [7, док-во леммы 13].

ЛЕММА 16. *Пусть S и K удовлетворяют условию леммы 15. В $\pi(S)$ найдётся подмножество Π, такое что $\Pi \cap (\pi(K) \cup \pi((G/K)/S)) =$*

$= \varnothing$, $\Pi \subseteq \rho(G) \cap \rho(S)$, $|\Pi| \geq \rho(G) - 2$, *для любого* $p \in \Pi$ *силовская* p*-подгруппа группы* S *является циклической.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n < 149$ утверждение леммы следует из [10] и леммы 15. При $n \geq 149$ имеем $|\rho(S_n)| = |\rho(G)| \geq 14$. Из [16] и леммы 15 следует, что S — конечная простая классическая группа, лиев ранг которой больше 5. Применяя леммы 15 и 6, получаем требуемое. Лемма доказана.

Далее будем считать, что Π удовлетворяет условию леммы 16, $\overline{\Pi} = \{p \mid n/2 < p < n,\ p$ — простое число и $n - p \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 18, 21, 27, 33, 35, 39, 45\}\}$, $K \lhd G$ — подгруппа максимального порядка, такая что $S \leq G/K$, S удовлетворяет условию леммы 15. В этом случае можно считать, что $S \leq G/K \leq \mathrm{Aut}\,(S)$.

ЛЕММА 17. *Если* $n > 64$ *и* $n \neq 74$, *то* $|\overline{\Pi}| \geq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $64 < n \leq 150$, то требуемое проверяется непосредственно. Будем считать, что $n > 150$. Аналогично [17, док-во леммы 1] можно показать, что найдётся более трёх простых чисел в интервале от $n/2$ до $n - 45$. Лемма доказана.

ЛЕММА 18. *Если в множестве* Π *найдётся число* p, *такое что группа* S_{n-p} *распознаваема и подгруппа* $C_S(g)$ *имеет порядок, больший* $2p$, *где* $g \in S$ *— элемент порядка* p, *то* $G \simeq L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Силовская p-подгруппа группы S имеет порядок p и число p не делит $|K| \cdot |(G/K)/S|$, поэтому и силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p. Пусть $h \in G$ — элемент порядка p, чей образ в группе S равен g. По лемме 13 справедливо $C_G(h) = \langle h \rangle \times M$, $\omega(M) = \omega(S_{n-p})$. Из распознаваемости группы S_{n-p} следует, что $M \simeq S_{n-p}$. По лемме 4 получаем, что $C_S(g) = (C_K(h)K/K) \cap S$. Группа M является расширением простой группы при помощи группы порядка 2. В силу $|C_S(g)| > 2p$ имеет место $(MK/K) \cap S \simeq S_{n-p}$ или A_{n-p}. Таким образом, из данного утверждения и леммы 14 следует, что $S \simeq A_n$. По лемме 5 выполняется $G \simeq L$. Лемма доказана.

ЛЕММА 19 [18, лемма 14]**.** *Любое нечётное число из* $\pi(\mathrm{Out}\,(P))$, *где P — конечная простая группа, лежит в спектре группы P или не превосходит $m/2$, где $m = \max\limits_{p\in\pi(P)} p$.*

ЛЕММА 20. *Если в множестве Π найдутся числа p и q, такие что $p > q$, и группа S_{n-q} распознаваема, то $G \simeq L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Силовская q-подгруппа группы S имеет порядок q и число $|K| \cdot |(G/K)/S|$ не делится на q, поэтому и силовская q-подгруппа группы G имеет порядок q. Пусть $h \in G$ — элемент порядка q. По лемме 13, $C_G(h) = \langle h\rangle \times M$ и $\omega(M) = \omega(S_{n-q})$. Из распознаваемости группы S_{n-q} следует, что $M \simeq S_{n-q}$. По лемме 4 имеем $C_S(g) = (C_G(h)K/K) \cap S$, где $g \in S$ — образ элемента h. Как было замечено выше, $1 \leq (G/K)/S \leq \mathrm{Out}\,(S)$. Группа внешних автоморфизмов простой группы разрешима. Допустим, что $|C_S(g)| \leq 2q$, тогда группа $K \cap M$ изоморфна A_{n-q} или S_{n-q}. Пусть H — максимальная нормальная подгруппа группы G, для которой $\overline{M} \simeq M$, где $\overline{M} = MH/H$. Тогда K/H содержит характеристическую подгруппу $V \simeq M_1 \times \ldots \times M_k$, $M_i \simeq M_j$, $1 \leq i,j \leq k$, где M_i — простая группа, содержащая подгруппу, изоморфную M. Имеем $(G/H)/V \leq \mathrm{Out}\,(V) \simeq O^k.S_k$, где $O \simeq \mathrm{Out}\,(M_i)$. По лемме 19 число $|O|$ не делится на p и q. Легко показать, что централизатор в V любого $\{p,q\}$-элемента из $(G/H)/V$, рассматриваемого как автоморфизм группы V, содержит подгруппу, изоморфную M. Пусть $l \in G/H$ — элемент порядка p. Тогда $C_{G/H}(l) \geq F \simeq A_{n-q}$. С другой стороны, $\omega(C_{G/H}(l)) \subseteq \omega(S_{n-p}) \subsetneq \omega(A_{n-q})$; что противоречит лемме 7. Таким образом, $|C_S(g)| > 2q$. Применяя лемму 18, получаем, что $G \simeq S_n$. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1 при $n < 65$ или $n = 74$ и теоремы 2

Пусть $\Omega = \{i \mid 19 < i \leq 65,\ i$ — составное$\} \cup \{74\} \setminus \{21, 27\}$. Если $n \in \{33, 35, 39, 45\}$, то будем считать, что группа S_{16} распознаваема. Определим множество Ψ_m для $m \in \Omega$ следующим образом:

(1) если $m - 1$ — простое число, то положим $\Psi_m = \{A_{m-1}, A_m\}$;

(2) в противном случае Ψ_m будет состоять из конечных групп H, таких что $\pi(H) \subseteq \pi(m!)$ и $|\rho(H) \cap \rho(A_m)| \geq |\rho(A_m)| - 1$.

Из определения группы S и леммы 9 следует, что $S \in \Psi_n$. Используя [19], для каждого $m \in \Omega$ легко найти множество Ψ_m. В таблице для каждого $m \in \Omega$ приведены значения множеств $\overline{\Pi}$ и Ψ_m.

Таблица

m	$\overline{\Pi}$	Ψ_m	m	$\overline{\Pi}$	Ψ_m
20	$11, 13$	A_{19}, A_{20}	46	$29, 34, 37$	$J_4,\ A_{41}, \ldots, A_{46}$
22	13	${}^2E_6(2)$, $A_{19}, \ldots, A_{22}$	48	$29, 31, 37,\ 41$	A_{47}, A_{48}
24	$13, 17$	A_{23}, A_{24}	49	$29, 37$	$A_{43}, \ldots, A_{49}$
26	$17, 19$	${}^2E_6(2), Fi_{23}$, $A_{19}, \ldots, A_{26}$	50	$31, 37, 41, 43$	$A_{43}, \ldots, A_{50}$
28	$17, 19$	${}^2E_6(2)$, $A_{19}, \ldots, A_{28}$	51	$29, 31, 37$	$A_{43}, \ldots, A_{51}$
30	$17, 19, 23$	A_{29}, A_{30}	52	$29, 41, 43$	$A_{51}, \ldots, A_{52}$
32	$19, 23$	A_{31}, A_{32}	54	$31, 37, 43, 47$	A_{53}, A_{54}
33	$17, 19$	$A_{29}, \ldots, A_{33}$	55	$29, 31, 41, 43, 47$	$A_{47}, \ldots, A_{55}$
34	$17, 23$	$A_{29}, \ldots, A_{34}$	56	$37, 43, 47$	$A_{47}, \ldots, A_{56}$
35	$19, 23$	$A_{29}, \ldots, A_{35}$	57	$29, 31, 37, 43$	$A_{47}, \ldots, A_{57}$
36	$19, 23, 29$	$A_{29}, \ldots, A_{36}$	58	$41, 47$	$A_{47}, \ldots, A_{58}$
38	$19, 29, 31$	A_{37}, A_{38}	60	$31, 37, 41, 47, 53$	A_{59}, A_{60}
40	$23, 29, 31$	$A_{31}, \ldots, A_{40}$	62	$43, 53$	A_{61}, A_{62}
42	$23, 29, 31$	$A_{41}, \ldots, A_{42}$	63	$37, 41, 43$	$A_{59}, \ldots, A_{63}$
44	$31, 37$	A_{43}, A_{44}	64	$41, 43, 47, 53$	$A_{59}, \ldots, A_{63}$
45	$23, 29, 31$	$A_{37}, \ldots, A_{45}$	74	$43, 61, 67$	A_{73}, A_{74}

ЛЕММА 21. *Если $n \in \Omega$, то группа S_n распознаваема.*

Пусть $n = 25$ или 39, K — разрешимый радикал группы G, X — цоколь группы $G/K = \overline{G}$, $X \simeq X_1 \times \ldots \times X_k$ где X_i, $1 \leq i \leq k$ — неабелева простая группа, $t = 13$, если $n = 25$, и $t = 23$, если $n = 39$. Предположим, что $|K|$ делится на t. По лемме 1 число p не делит $|K|$, где $p = 23$, если

$n = 25$, и $p = 37$, если $n = 39$. Предположим, что p делит $\overline{G}/X$. Тогда в $\overline{G}$ найдётся элемент g порядка p, действующий сопряжением на X как внешний автоморфизм. Из леммы 3 следует, что $g \in \mathrm{Out}\,(X_i)$ или $X_i^g \neq X_i$. Предположим, что $X_1^g = X_1$. По лемме 19 элемент g не является внешним автоморфизмом группы X_i для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно, $X_1 \leq \leq C_{\overline{G}}(g)$. Таким образом, в $\overline{G}$ найдётся элемент порядка $l \cdot p$, где $l \in \pi(X_1\} \setminus \setminus 2$, но $lp \notin \omega(G)$. Значит, $X_1 \neq X_1^g$.

Пусть $x = hh^g h^{g^2} \ldots h^{g^{p-1}}$, где $h \in X_1, |h| \in \pi(X_1\} \setminus 2$. Несложно показать, что $x \in C_{\overline{G}}(g)$, $|x| = |h|$. Следовательно, в $\overline{G}$ найдётся элемент порядка $p|h|$, но $p|h| \notin \omega$. Таким образом, $p \in \pi(X_i)$ для некоторого $i \in \in \{1, \ldots, k\}$. Если $k > 1$, то в $\omega(X)$ найдётся число pl для некоторого $l \in \pi(X) \setminus 2$; противоречие. Таким образом, X — простая группа.

Пусть $T \in Syl_t(K)$. Поскольку $N_G(T)/N_K(T) \simeq G/K$, можно считать, что $T \lhd G$ и $C_K(T) \leq T$. Предположим, что $n = 39$. Из [19] и $\{17, 19, 37\} \subset \pi(S)$ следует, что S изоморфна одной из групп A_{37}, A_{38}, A_{39}. Тогда силовская 17-подгруппа группы X элементарная абелева ранга 2. Подгруппа $T.H$, где $H \in Syl_{17}(G)$, является группой Фробениуса с ядром T и дополнением H. Группа H не циклическая, т. к. содержит секцию, изоморфную элементарной абелевой подгруппе ранга 2, что противоречит лемме 2. Таким образом, t не делит $|K|$.

Пусть $n = 25$. Из [19] и того, что $\{17, 19, 23\} \subset \pi(X)$, следует, что X изоморфна одной из групп A_{23}, A_{24}, A_{25}. Допустим, что группа K/T нетривиальна. Если в X найдётся элемент порядка 23, действующий нетривиально на K/T, то в силу $C_K(T) \leq T$ и леммы 1 в G найдётся элемент порядка $23t$; противоречие. Следовательно, любой элемент из S порядка 23 централизует K/T. Таким образом, в G найдётся подгруппа изоморфная $T.\widehat{S}$, где $\widehat{X}$ — некоторое нерасщепляемое центральное расширение группы X. В X существует подгруппа, изоморфная $A_{13} \times A_{10}$. Из таблиц 13-модулярных характеров групп A_{13} и $2.A_{13}$ (см. [20]) следует, что в $K.A_{13}$ найдётся элемент g порядка $11t$. Несложно показать, что в $C_G(g^t)$ имеется подгруппа, изоморфная $C_K(g^t).A_{10}$. Из таблиц обыкновенных характеров групп A_{10} и $2.A_{10}$ (см. [20]) следует, что в $C_G(g^t)$ найдётся элемент порядка

$7t$, значит, в G есть элемент порядка $77t$; противоречие. Таким образом, t не делит $|K|$.

Пусть $n = 25$ или 39. Предположим, что $p \in \pi(K)$, где $p = 23$, если $n = 25$, и $p = 37$, если $n = 39$. В силу леммы 2 силовская 3-подгруппа группы G/K циклическая. По лемме 15 в G/K найдётся неабелев композиционный фактор R, для которого $t, 17 \in \pi(R)$. Из [19] следует, что силовская 3-подгруппа группы R не циклическая, а следовательно это верно и для силовской 3-подгруппы группы G/K. Таким образом, $p \notin \pi(K)$. Рассуждая, как выше, можно показать, что G содержит единственный неабелев композиционный фактор X. Из [19] и того, что t не делит K и $\mathrm{Out}\,(X)$ (по лемме 19), следует, что силовская t-подгруппа группы G является циклической простого порядка и её централизатор нетривиален. Из леммы 18 вытекает, что S_n распознаваема.

Пусть $n = 22$. Тогда $\rho(G) = \{11, 13, 17, 19\}$. Заметим, что группы S_{22-11} и S_{22-13} распознаваемы. Если $S \not\simeq A_{22}$, то силовские 11- и 13-подгруппы группы S циклические. Для некоторого $p \in \{11, 13\}$ силовская p-подгруппа группы G имеет простой порядок. Из таблицы следует, что $|C_S(g)| > 2p$. По лемме 18 получаем изоморфизм $S \simeq A_{22}$. Из леммы 10 вытекает, что $G \simeq L$.

Пусть $n \in \{26, 28, 46\}$. Заметим, что в Π найдётся число h, большее любого числа из $\overline{\Pi}$. Из неравенства $|\overline{\Pi}| \geq 2$ следует, что в Π есть числа p и q, $q < p$, причём $q \in \overline{\Pi}$. По лемме 20 группа S_n распознаваема.

Пусть $n \in \Omega \setminus \{22, 26, 28, 33, 35, 45, 46\}$. Тогда S — знакопеременная группа степени l и для любого $t \in \overline{\Pi}$ справедливо $l - t \geq 2$. Таким образом, для любого элемента $g \in S$ порядка $t \in \overline{\Pi}$ выполняется $|C_S(g)| > 2t$. Заметим, что $|\overline{\Pi}| \geq 2$. По определению группы S в пересечении $\overline{\Pi} \cap \pi(S)$ найдётся число p, не делящее $|K|$. По лемме 18 группа S_n распознаваема.

Заключения теоремы 1 (при $n < 65$ или $n = 74$) и теоремы 2 следуют из лемм 8 и 21.

§ 3. Доказательство теоремы 1 при $n > 65$ и $n \neq 74$

Так как n — минимальное число, отличное от чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8,$

$10, 15, 16, 18, 21, 27, 33, 35, 39, 45$, для которого группа S_n не является распознаваемой, то $n > 65$ и $n \neq 74$. По лемме 17 выполняется $|\overline{\Pi}| \geq 4$. Из леммы 16 следует, что $|\overline{\Pi} \cap \Pi \cap \rho(S)| \geq 2$. По лемме 20 группа S_n распознаваема. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Brandl, W. Shi*, Finite groups whose element orders are consecutive integers, J. Algebra, **143**, No. 2 (1991), 388—400.
2. *C. E. Praeger, W. Shi*, A characterization of some alternating and symmetric groups, Commun. Algebra, **22**, No. 5 (1994), 1507—1503.
3. *В. Д. Мазуров*, Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов, Алгебра и логика, **36**, № 1 (1997), 37—53.
4. *M. R. Darafsheh, A. R. Moghaddamfar*, A characterization of some finite groups by their element orders, Algebra Colloq., **7**, No. 4 (2000), 467—476.
5. *А. В. Заварницин*, Распознавание по множеству порядков элементов симметрических групп степени r и $r+1$ для простого r, Сиб. матем. ж., **43**, № 5 (2002), 1002—1006.
6. *А. В. Заварницин, В. Д. Мазуров*, О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп, Алгебра и логика, **38**, № 3 (1999), 296—315.
7. *И. Б. Горшков*, Распознаваемость знакопеременных групп по спектру, Алгебра и логика, **52**, № 1 (2013), 57—63.
8. *А. В. Васильев*, О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел, Сиб. матем. ж., **46**, № 3 (2005), 511—522.
9. *B. Huppert*, Endliche Gruppen. I (Grundlehren mathem. Wiss. Einzeldarstel., **134**), Berlin a.o., Springer-Verlag, 1967.
10. *А. В. Заварницин*, Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ для простого r и группы степени 16, Алгебра и логика, **39**, № 6 (2000), 648—661.
11. *M. Aschbacher*, Finite group theory (Cambridge Stud. Adv. Math., **10**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1986.
12. *A. V. Vasil'ev*, On finite groups isospectral to simple classical groups, J. Algebra, **423** (2015), 318—374.

13. *R. W. Carter*, Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **37**, No. 3 (1978), 491—507.

14. *D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon*, The classification of the finite simple groups. Part I. Chapter A: Almost simple K-groups (Math. Surv. Monogr., **40**(3)), Providence, RI, Am. Math. Soc., 1998.

15. *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.

16. *А. В. Васильев, Е. П. Вдовин*, Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы, Алгебра и логика, **50**, № 4 (2011), 425—470.

17. *А. С. Кондратьев, В. Д. Мазуров*, Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов, Сиб. матем. ж., **41**, № 2 (2000), 359—369.

18. *И. А. Вакула*, О строении конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе, Тр. ИММ УрО РАН, **16**, № 3 (2010), 45—60.

19. *A. V. Zavarnitsine*, Finite simple groups with narrow prime spectrum, Sib. Electr. Math. Rep., **6** (2009), 1—12, http://semr.math.nsc.ru/v6/p1-12.pdf.

20. *The GAP Group*, GAP — Groups, Algorithms, Programming — a System for Computational Discrete Algebra, vers. 4.7.5 (2014);

http://www.gap-system.org.

Поступило 23 апреля 2014 г.

Адрес автора:

ГОРШКОВ Илья Борисович, Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ;

e-mail: ilygor8@gmail.com