В. Д. Мазуров, Г. Ю. Чен, Распознаваемость по спектру конечных простых групп $L_4(2^m)$ и $U_4(2^m)$, *Алгебра и логика*, 2008, том 47, номер 1, 83–93

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ПО СПЕКТРУ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП $L_4(2^m)$ И $U_4(2^m)$*)

В. Д. МАЗУРОВ, Г. Ю. ЧЕН

Введение

Для конечной группы H обозначим через $\omega(H)$ спектр, т. е. множество порядков элементов H. Основная цель этой работы — доказать, что каждая из конечных простых групп $L_4(2^m), U_4(2^m)$, $m \geqslant 2$, распознаётся по спектру.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $m \geqslant 2$ — натуральное число, L — любая из групп $L_4(2^m)$ и $U_4(2^m)$. Если G — конечная группа, для которой $\omega(G) = \omega(L)$, то $G \simeq L$.*

Отметим, что распознаваемость по спектру простых групп $L_2(q)$, $q \neq 9$, доказана в [1]. Вопрос о распознаваемости групп $L_3(q)$ и $U_3(q)$ рассматривался в работах [2–9]. Окончательный ответ получен в [10, 11]. Распознаваемости групп $L_n(2)$ при различных частных значениях n посвящены работы [12–20]. Доказательство распознаваемости $L_n(2)$ по спектру для любого n содержится в [21, 22]. В [23, 24] распознаваемость по спектру доказана для групп $L_n(2^m)$, $n = 2^s \geqslant 16$.

*)Работа первого из авторов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 05-01-00797, № 06-01-39001, Сибирского отделения РАН, комплексный интеграционный проект 1.2, и Министерства образования Китая, проект приглашения иностранных специалистов; второй автор поддержан фондом науки г. Чунцина, проект CSTC: 2005BB8096.

Из теоремы 1 и ранее полученных результатов вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, для которой $8 \notin \omega(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(a) *G изоморфна A_7, A_8, A_9, J_1; $L_2(q)$, $q > 3$, $q \neq 9$, q^2-1 не делится на* 32; *$L_3(2^m), U_3(2^m)$, $m \geqslant 2$; $L_4(2^m), U_4(2^m)$, $m \geqslant 2$; $S_4(3^m)$, $m > 1$; ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $m \geqslant 1$, или ${}^2B_2(2^{2m+1})$, $m \geqslant 1$; и G распознаваема по спектру*;

(b) *G изоморфна A_6, $S_4(3)$, $U_4(2)$ или $S_4(q)$, $q > 3$, $q \neq 3^m$, q^2-1 не делится на* 16, *и существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H, для которых $\omega(H) = \omega(G)$.*

Доказательство обеих теорем использует классификацию конечных простых групп.

§ 1. Предварительные результаты

Для натуральной степени q простого числа обозначим через $L_n^+(q)$ группу $L_n(q)$, а через $L_n^-(q)$ — группу $U_n(q)$. Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ и натурального числа m положим $L = L_4^\varepsilon(q)$, где $q = 2^m$. Если G — конечная группа, то через $\mu(G)$ обозначается множество максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$.

ЛЕММА 1. *Имеет место $\mu(L) = \{(q^2+1)(q+\varepsilon 1), q^3-\varepsilon 1, 2(q^2-1), 4(q-\varepsilon 1)\}$. В частности, период силовской 2-подгруппы из L равен* 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из строения максимальных торов в конечных простых классических группах [25] и описания централизаторов инволюций в группах Шевалле характеристики 2 в [26].

ЛЕММА 2. *Пусть p — простое число, s — натуральное число, $s \geqslant 2$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

(а) *существует такое простое число q, что q делит p^s-1 и не делит p^t-1 для всех натуральных чисел $t < s$*;

(б) *$s = 6$ и $p = 2$*;

(в) *$s = 2$ и $p = 2^t-1$ для некоторого натурального числа t.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [27].

Простое число q, удовлетворяющее п. (а), называется *примитивным* простым делителем p^s-1.

Для конечной группы G обозначим через $\mu^i(G)$ множество тех элементов из $\mu(G)$, которые делятся на 2^i, но не делятся на 2^{i+1}.

ЛЕММА 3. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, для которой $8 \notin \omega(G)$. Тогда S — одна из групп табл. 1, где указаны также множества $\mu^i(S)$, $i=0,1,2$.*

Таблица 1. Конечные простые группы S, для которых $8 \notin \omega(S)$

S	$\mu^0(S)$	$\mu^1(S)$	$\mu^2(S)$
J_1	$7, 11, 15$	$6, 10$	
A_7	$5, 7$	6	4
A_9	$7, 9, 15$	10	12
$L_2(p^s)$, $p^s \geqslant 4$,			
p — простое,			
$p=2$	2^s-1, 2^s+1	2	
$p^s \equiv 3 \pmod 8$	$p, (p^s-1)/2$	$(p^s+1)/2$	
$p^s \equiv -3 \pmod 8$	$p, (p^s+1)/2$	$(p^s-1)/2$	
$p^s \equiv 7 \pmod{16}$	$p, (p^s-1)/2$		$(p^s+1)/2$
$p^s \equiv -7 \pmod{16}$	$p, (p^s+1)/2$		$(p^s-1)/2$
$L_3(2^s)$,			
$s=2$	$3, 5$		4
$s=2t \geqslant 4$	$2^s-1, (2^{2s}-1)/3,$	$2(2^s-1)/3$	4
	$(2^{2s}+2^s+1)/3$		
$s=2t+1 \geqslant 3$	$2^{2s}-1, 2^{2s}+2^s+1$	$2(2^s-1)$	4
$U_3(2^s)$,			
$s=2t \geqslant 2$	$2^{2s}-1, 2^{2s}-2^s+1$	$2(2^s+1)$	4
$s=2t+1 \geqslant 3$	$2^s+1, (2^{2s}-1)/3,$	$2(2^s+1)/3$	4
	$(2^{2s}-2^s+1)/3$		
$L_4(2^s)$	$(2^{2s}+1)(2^s+1), 2^{3s}-1$	$2(2^{2s}-1)$	$4(2^s-1)$
$U_4(2^s)$,			
$s=1$	$5, 7$		12
$s>1$	$(2^{2s}+1)(2^s-1),$	$2(2^{2s}-1)$	$4(2^s+1)$
	$2^{3s}-1$		
$S_4(3)$	$5, 9$		12

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

S	$\mu^0(S)$	$\mu^1(S)$	$\mu^2(S)$
$S_4(p^s),\ p^s \geqslant 4$,			
p — простое,			
$p = 2$	$2^{2s}-1$, $2^{2s}+1$	$2(2^s+1)$, $2(2^s-1)$	4
$p = 3,\ s = 2t+1$	$(3^{2s}+1)/2, 9$	$3(3^s-1)$	$3(3^s+1)$,
			$(3^{2s}-1)/2$
$p > 3,\ p^s \equiv 3 \pmod 8$	$(p^{2s}+1)/2$	$p(p^s-1)$	$p(p^s+1)$,
			$(p^{2s}-1)/2$
$p > 3,\ p^s \equiv -3 \pmod 8$	$(p^{2s}+1)/2$	$p(p^s+1)$	$p(p^s-1)$,
			$(p^{2s}-1)/2$
${}^2B_2(2^{2s+1}),\ s \geqslant 1$	$(2^{2s+1}-1)$,		4
	$2^{2s+1}+2^{s+1}+1$,		
	$2^{2s+1}-2^{s+1}+1$		
${}^2G_2(3^{2s+1}),\ s \geqslant 1$	$3^{2s+1}+3^{s+1}+1$,	6, $(3^{2s+1}+1)/2$,	
	$3^{2s+1}-3^{s+1}+1$	$3^{2s+1}-1$	

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если S — знакопеременная группа A_n, то, очевидно, $n < 10$. Если S — спорадическая, то $S \simeq J_1$ по [28]. Если S — группа лиева типа и характеристика S чётна, то S изоморфна $L_n(2^s), U_n(2^s)$, $n \leqslant 4$, ${}^2B(2^s)$ или $S_4(2^s)$ по [26]. Если характеристика S нечётна и S — классическая, то описание максимальных торов в этих группах [25] показывает, что S изоморфна $L_2(q)$, где q^2-1 не делится на 32, или $S_4(q)$, где q^2-1 не делится на 16. Если S — исключительная группа, то в силу [29, табл. OA8] выполняется

$$L_3(q) \prec G_2(q) \prec {}^3D_4(q) \prec F_4(q) \prec E_6^*(q) \prec E_7(q) \prec E_8(q),$$

и по [28] справедливо

$$U_3(3) \simeq G_2'(2) \prec G_2(2^m);\ L_3(3) \prec {}^2F_4(2) \prec {}^2F_4(2^s),$$

где $A \prec B$ означает, что A изоморфна фактор-группе подгруппы из B; а $E_6^*(q)$ — это любая из групп ${}^2E_6(q)$, $E_6(q)$; S не может быть изоморфна ни одной из исключительных групп нечётной характеристики, кроме ${}^2G_2(q)$. Лемма доказана.

Обозначим через $t(G)$ максимальное число t таких различных простых делителей $\{p_1, \dots, p_t\}$ порядка G, что $p_i p_j \notin \omega(G)$ для всех $i, j = 1, \dots, t$, $i \neq j$. Иными словами, $t(G)$ — максимальное число вершин в независимых подмножествах графа Грюнберга–Кегеля $GK(G)$ (множество вершин графа называется *независимым*, если его элементы попарно несмежны). Пусть $t(r, G)$ — максимальное число вершин в независимых множествах графа $GK(G)$, содержащих простое число r. Нам потребуется уточнение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3 (А. В. Васильев [30]). *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая двум условиям*:

(а) *существуют три простых делителя порядка G, попарно несмежных в $GK(G)$, т. е. $t(G) \geqslant 3$;*

(б) *существует нечётный простой делитель порядка G, несмежный с числом 2 в $GK(G)$, т. е. $t(2, G) \geqslant 2$.*

Тогда существует такая конечная неабелева простая группа S, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K из G. Далее, $t(S) \geqslant t(G) - 1$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) *$S \simeq A_7$ или $L_2(q)$ для некоторого нечётного числа q*;

(2) *любое простое число $r \in \pi(G)$, несмежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит $|K||\overline{G} : S|$, т. е. силовская r-подгруппа из G изоморфна силовской r-подгруппе из S*; *в частности, $t(2, S) \geqslant t(2, G)$.*

ЛЕММА 4. *Предположим, что выполняются условия теоремы* 3 *и при этом* (2) *не имеет места. Тогда разрешимый радикал K группы G содержит нетривиальную $2'$-подгруппу N индекса 2, силовская 2-подгруппа из G/N является обобщённой группой кватернионов, порядок центра G/N равен* 2 *и $t(2, G) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [30] доказано, что (2) не выполняется только в том случае, когда существует такое простое число p, делящее порядок K, что 2 и p несмежны в $GK(G)$. Пусть H — холлова $\{2, p\}$-подгруппа из KT, где T — силовская 2-подгруппа из G. Поскольку силовская p-

подгруппа P из H является силовской p-подгруппой в K, подгруппа P не может быть циклической, и поэтому H — группа Фробениуса с дополнением T. Отсюда следует, что T — обобщённая группа кватернионов. По теореме Брауэра–Сузуки [31] центр G/N является группой Z/N порядка 2, где $N = O_{2'}(G) = O_{2'}(K)$. Легко заметить, что $Z = K$ и число 2 смежно с любым нечётным простым делителем $|G/K|$. Пусть число 2 несмежно с двумя различными простыми числами p и q, делящими $|K|$. Тогда холлова $\{p, q, 2\}$-подгруппа из K является группой Фробениуса с дополнением порядка 2, и поэтому холлова $\{p, q\}$-подгруппа из K абелева. Таким образом, p и q смежны. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство основных результатов

Пусть G — конечная группа, для которой $\omega(G) = \omega(L)$, где $L = L_4^{\varepsilon}(q)$, $\varepsilon = \pm$, $q = 2^m \geqslant 4$.

ЛЕММА 5. (а) *Существует такая нормальная подгруппа R из G, содержащая разрешимый радикал K группы G, что $S = R/K$ — простая группа, изоморфная одной из групп табл. 1, а группа G/K изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}(S)$, содержащей S.*

(б) *Существуют два таких различных элемента d_1 и d_2 в $\mu^0(S)$, что $a = q^2 + 1$ делит d_1, $b = (q^2 + \varepsilon q + 1)/(3, q - \varepsilon 1)$ делит d_2 и для каждой такой пары (d_1, d_2) число d_1 делит $(q^2 + 1)(q + \varepsilon 1)$, а d_2 делит $q^3 - \varepsilon 1$.*

(в) *Если m_i, $i = 1, 2$ — наименьшее общее кратное всех элементов из $\mu^i(S)$, то m_1 делит $2(q^2 - 1)$, а m_2 делит $4(q - \varepsilon 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью леммы 1 легко вычислить, что каждый простой делитель ab несмежен с числом 2 в $GK(L)$, а также что a взаимно просто с b и для любых простых чисел p и q, делящих a и b, соответственно, вершины p и q несмежны в $GK(L)$. В частности, $t(2, G) \geqslant 3$. По теореме 3 и леммам 3, 4 выполняется п. (а), и для любого простого числа p, несмежного с числом 2 в $GK(G) = GK(L)$, число p взаимно просто с $|K||G : R|$.

Пусть C — циклическая подгруппа порядка $(q^2+1)(q+\varepsilon 1)$ в G, существующая по лемме 1. Тогда порядок $C_1 = C \cap R$ делится на a и порядок $C_2 = C_1K/K$ также делится на a. Поскольку C_2 — циклическая подгруппа в S, число a делит некоторый элемент d_1 в $\mu(S)$. Очевидно, что $d_1 \in \mu^0(S)$. Аналогично, существует такое число $d_2 \in \mu^0(S)$, что b делит d_2. Число ab не может делить d_1, поэтому $d_1 \neq d_2$. Если d_1 делит некоторый элемент m из $\mu(G) = \mu(L)$, то по лемме 1 выполняется $m = (q^2+1)(q+\varepsilon 1)$. Аналогично d_2 делит $q^3 - \varepsilon 1$; п. (б) доказан. Поскольку $q - \varepsilon 1$ делит $q^2 - 1$, п. (в) очевиден. Лемма доказана.

Зафиксируем обозначения из этой леммы до конца доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 6. *Имеет место изоморфизм* $S \simeq L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда S изоморфна одной из групп табл. 1. Так как $q \geqslant 4$ и $q^2+1 \geqslant 17$, то S не изоморфна ни одной из групп $A_7, A_9, J_1, L_3(4), L_4(2), U_4(2)$.

Предположим, что $S \simeq L_2(p^s)$, где p нечётно. Если $q^2+1 = p$, то в силу $q \geqslant 4$ число $p^{2s}-1$ делится на 32, что неверно. Следовательно, по лемме 5 число q^2+1 делит $p^s + \alpha$ для некоторого $\alpha \in \{1, -1\}$, откуда $(q^2+\varepsilon q+1)/(3, q-\varepsilon 1) = p$. Из того, что $(p^s+\alpha)/2$ делит $(q^2+1)(q+\varepsilon 1)$, вытекает

$$(((q^2+\varepsilon q+1)/(3, q-\varepsilon 1))^s + \alpha)/2 \leqslant (q^2+1)(q+1).$$

Это неравенство показывает, что $q \leqslant 16$, если $s \geqslant 2$. Рассматривая по отдельности случаи $q = 4, 8, 16$, убеждаемся, что во всех этих случаях $s = 1$. Итак, q^2+1 делит $(p+\alpha)/2 = (((q^2+\varepsilon q+1)/(3, q-\varepsilon 1)) + \alpha)/2$, что невозможно.

Аналогичные рассуждения исключают случай $S \simeq S_4(p^s)$, p нечётно.

Предположим, что $S \simeq L_2(2^s)$. По лемме 5 выполняется одно из следующих утверждений:

2^s+1 делится на q^2+1, q^4-1 делится на 2^s+1 и $q^3-\varepsilon 1$ делится на 2^s-1;

2^s-1 делится на q^2+1 и $(q^2+1)(q+\varepsilon 1)$ делится на 2^s-1.

В первом случае очевидно, что $2m \leqslant s$ и что примитивный простой делитель числа $2^{2s}-1$ делит 2^s+1 и поэтому делит $2^{4m}-1$, откуда $2s \leqslant 4m$, $s = 2m$. Следовательно, q^2-1 делит $q^3-\varepsilon 1 = q(q^2-1)+(q-\varepsilon 1)$, и поэтому q^2-1 делит $q-\varepsilon 1$, что возможно только при $q = 2$.

Во втором случае аналогичные рассуждения показывают, что $s = 4m$, и поэтому снова $q = 2$, что противоречит предположению.

Подобным же образом можно исключить все случаи, когда S изоморфна $L_3(2^s)$, $U_3(2^s)$, $S_4(2^s)$, $L_4(2^s)$, $U_4(2^s)$ и $S \not\simeq L$.

Предположим, что $S \simeq {}^2B_2(2^{2s+1})$. По лемме 5 число $q^2+1 = 2^{2m}+1$ делит d_1, где d_1 — одно из чисел $2^{2s+1}-1$, $2^{2s+1}+2^{s+1}+1$, $2^{2s+1}-2^{s+1}+1$, и d_1 делит $(q^2+1)(q-\varepsilon 1)$.

Поскольку $2^{2m}+1$ не может делить $2^t \pm 1$, если $2m$ не делит t, случай $d_1 = 2^{2s+1}-1$ невозможен. В двух оставшихся случаях d_1 делит $2^{4s+2}+1$, и поэтому m делит $2s+1$. Кроме того, $2^{2m}+1 \leqslant 2^{2s+1}+2^{s+1}+1$ и $2^{2s+1}-2^{s+1}+1 \leqslant (2^{2m}+1)(2^m+1)$, откуда $2m \leqslant 2s+1 \leqslant 3m$ и, следовательно, $2s+1 = 3m$. В этом случае $2^{2m}+1$ не делит d_1.

Предположим, что $S \simeq {}^2G_2(3^{2s+1})$, $s \geqslant 1$. По лемме 5 и табл. 1, $q^2+1 = 2^{2m}+1 \leqslant 3^{2s+1}+3^{s+1}+1$ и $3(3^{2s+1}+1)(3^{2s+1}-1) \leqslant 2^{2m+1}-1$. Эти неравенства несовместны. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Имеет место равенство $K = 1$, т. е. $R = S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Без потери общности можно считать, что K — элементарная абелева p-группа для некоторого p, делящего $|L|$. Если p делит q^2+1, то R, в отличие от L, содержит элемент порядка $2p$. Пусть теперь p не делит $q-\varepsilon 1$. Поскольку L содержит подгруппу Фробениуса порядка $4(q^2+1)$ с циклическим дополнением порядка 4, R содержит элемент порядка $4p$, что неверно. Итак, p делит $q-\varepsilon 1$. Группа S действует точно на K и содержит подгруппу Фробениуса с циклическим дополнением порядка q^2-1 и ядром, являющимся 2-группой, поэтому R содержит элемент порядка $p(q^2-1) \notin \omega(L)$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 8. *Справедливо $R = G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Предыдущие леммы показывают, что $R = S$ — простая группа, изоморфная L. Без потери общности можно считать, что $p = |G : R|$ — простое число. Если p нечётно, то некоторый элемент $a \in G \backslash R$ индуцирует в R полевой автоморфизм и поэтому p делит m. Отсюда следует, что a централизует в R нетривиальный элемент порядка, делящего q^2+1, и, следовательно, p делит $(q^2+1)(q+\varepsilon 1)$. С другой стороны, a централизует элемент порядка 4, и поэтому G содержит элемент порядка $4p$, что по лемме 1 невозможно. Итак, $p = 2$.

Поскольку нормализатор в R циклической холловой подгруппы H порядка $(q^2 + \varepsilon q + 1)/(3, q - \varepsilon 1)$ не содержит инволюций, в $N_G(H) \setminus R$ найдётся инволюция t. По [26] централизатор t в R содержит подгруппу с композиционным фактором, изоморфным одной из групп $L_4^{\pm}(q^{1/2}), S_4(q)$, и, по табл. 1, G содержит элемент порядка $u \notin \omega(L)$. Это противоречие завершает доказательство леммы и одновременно теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. По лемме 2, G изоморфна одной из групп S табл. 1. Если $4t \notin \omega(S)$ для всех $t > 1$, то заключение вытекает из [4]. В остальных случаях оно следует из теоремы 1 и [4–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Brandl, W. J. Shi*, The characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders, J. Algebra, **163**, No. 1 (1994), 109—114.
2. *В. Д. Мазуров*, О множестве порядков элементов конечной группы, Алгебра и логика, **33**, № 1 (1994), 81—89.
3. *В. Д. Мазуров*, Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов, Алгебра и логика, **37**, № 6 (1998), 651—666.
4. *В. Д. Мазуров, М. Ч. Су, Х. П. Чао*, Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов, Алгебра и логика, **39**, № 5 (2000), 567—585.
5. *М. Р. Алеева*, О композиционных факторах конечных групп с множеством порядков элементов, как у группы $U_3(q)$, Сиб. матем. ж., **43**, № 2 (2002), 249—267.
6. *В. Д. Мазуров*, Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов, Алгебра и логика, **41**, № 2 (2002), 166—198.

7. *M. R. Darafsheh, A. R. Moghaddamfar, A. R. Zokayi*, A recognition of simple groups $PSL(3, q)$ by their element orders, Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed., **24**, No. 1 (2004), 45—51.

8. *A. V. Zavarnitsine*, Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders, J. Group Theory, **7**, No. 1 (2004), 81—97.

9. *M. C. Xu*, The characterization of finite simple groups, $L_3(3^{2m-1})$ $(m \geqslant 2)$, by their element orders, Acta Math. Sin., Engl. Ser., **21**, No. 4 (2005), 899—902.

10. *А. В. Заварницин*, Веса неприводимых $SL_3(q)$-модулей в характеристике определения, Сиб. матем. ж., **45**, № 2 (2004), 319—328.

11. *А. В. Заварницин*, Распознавание простых групп $U_3(q)$ по порядкам элементов, Алгебра и логика, **45**, № 2 (2006), 185—202.

12. *W. J. Shi*, A characteristic property of $PSL_2(7)$, J. Aust. Math. Soc., Ser. A., **36**, No. 3 (1984), 354—356.

13. *W. J. Shi*, A characteristic property of A_8, Acta Math. Sin., New Ser., **3**, No. 1 (1987), 92—96.

14. *M. R. Darafsheh, A. R. Moghaddamfar*, A characterization of groups related to the linear groups $PSL(n, 2)$, $n = 5, 6, 7, 8$, Pure Math. Appl., **11**, No. 4 (2000), 629—637.

15. *M. R. Darafsheh, A. R. Moghaddamfar*, Characterization of the groups $PSL_5(2)$, $PSL_6(2)$ and $PSL_7(2)$, Comm. Algebra, **29**, No. 1 (2001), 465—475. Corrigendum to: Characterization of the groups $PSL_5(2)$, $PSL_6(2)$ and $PSL_7(2)$, Comm. Algebra, **31**, No. 9 (2003), 4651—4653.

16. *M. A. Grechkoseeva, M. S. Lucido, V. D. Mazurov, A. R. Moghaddamfar, A. V. Vasil'ev*, On recognition of the projective special linear groups over binary fields, Sib. Electron. Math. Rep., **2** (2005), 253—263.

17. *A. R. Moghaddamfar*, On spectrum of linear groups over the binary field and recognizability of $L_{12}(2)$, Int. J. Algebra Comput., **16**, No. 2 (2006), 341—349.

18. *M. R. Darafsheh, Y. Farjami, M. Khademi, A. R. Moghaddamfar*, Some results on the recognizability of the linear groups over the binary field, Commentat. Math. Univ. Carolin., **46**, No. 4 (2005), 589—600.

19. *A. R. Moghaddamfar, A. R. Zokayi, M. Khademi*, A characterization of the finite simple group $L_{11}(2)$ by its element orders, Taiwanese J. Math., **9**, No. 3 (2005), 445—455.

20. *М. С. Лючидо, А. Р. Могхаддамфар*, Распознавание некоторых линейных групп над бинарным полем по их спектрам, Сиб. матем. ж., **47**, № 1 (2006), 108—122.

21. *А. В. Заварницин, В. Д. Мазуров*, Порядки элементов в накрытиях конечных простых линейных и унитарных группах и распознаваемость $L_n(2)$ по спектру, Докл. РАН, **406**, № 6 (2006), 736—739.

22. *А. В. Заварницин, В. Д. Мазуров*, О порядках элементов в накрытиях простых групп $L_n(q)$ и $U_n(q)$, Труды Ин-та матем. механ. УрО РАН, **13**, № 1 (2007), 16—25.

23. *А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева*, О распознавании по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2, Сиб. матем. ж., **46**, № 4 (2005), 749—758.

24. *M. A. Grechkoseeva, W. J. Shi, A. V. Vasil'ev*, Recognition by spectrum of $L_{16}(2^m)$, Algebra Colloq., **14**, No. 3 (2007), 462—470.

25. *А. А. Бутурлакин, М. А. Гречкосеева*, Циклическое строение максимальных торов в конечных простых классических группах, Алгебра и логика, **46**, № 2 (2007), 129—156.

26. *M. Aschbacher, G. M. Seitz*, Involutions in Chevalley groups over fields of even order, Nagoya Math. J., **63**, No. 1 (1976), 1—91.

27. *K. Zsigmondy*, Zur Theorie der Potenzreste. Monatsh. Math. Phys., **3**, (1892), 265—284.

28. *J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson*, Atlas of finite groups, Oxford, Clarendon Press, 1985.

29. *E. Stensholt*, Certain embeddings among finite groups of Lie type, J. Algebra, **53**, No. 1 (1978), 136—187.

30. *А. В. Васильев*, О связи между строением конечной группы и свойствами её графа простых чисел, Сиб. матем. ж., **46**, № 3 (2005), 511—522.

31. *R. Brauer, M. Suzuki*, On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **45** (1959), 1757—1759.

Поступило 28 мая 2007 г.

Адреса авторов:

МАЗУРОВ Виктор Данилович,

Ин-т матем. СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4,

Новосибирский гос. ун-т, ул. Пирогова, 2,

г. Новосибирск, 630090, РОССИЯ. e-mail: mazurov@math.nsc.ru

CHEN Guiyun, School of Math. Stat., Southwest Univ., Chongqing, 400715, CHINA. e-mail: gychen@swu.edu.cn