А. А. Оноприенко, Теорема о понижении мощности для логик QHC и QH4, *Алгебра и логика*, 2022, том 61, номер 6, 720–741

DOI: 10.33048/alglog.2022.61.604

*Алгебра и логика, 61, № 6 (2022), 720—741*

DOI: 10.33048/alglog.2022.61.604 УДК 510.53

# ТЕОРЕМА О ПОНИЖЕНИИ МОЩНОСТИ ДЛЯ ЛОГИК QHC И QH4*)

**А. А. ОНОПРИЕНКО**

## Введение

Объединённая логика задач и высказываний QHC, рассматриваемая в настоящей работе, введена С. А. Мелиховым [1, 2]. В этой логике каждая переменная и каждая формула имеют один из двух сортов: либо высказывание, либо задача. Формулы сорта высказывание и сорта задача связаны между собой двумя модальностями ? и !. Применив ! к высказыванию $p$, мы получим задачу $!p$, которую можно неформально понимать как „доказать высказывание $p$“. А применив ? к задаче $\alpha$, мы получим высказывание $?\alpha$, которое можно неформально понимать как „задача $\alpha$ имеет решение”. Создание и изучение системы QHC мотивировано неформальным исчислением задач А. Н. Колмогорова и лежит в русле исследований конструктивной семантики Брауэра–Гейтинга–Колмогорова, [3–20].

Логика QHC получена как комбинация классической и интуиционистской логик. Д. М. Габбай [21] отметил, что при попытке добавить в язык одновременно классические и интуиционистские связки наблюдается проблема схлопывания: логические связки такого языка ведут себя классическим образом. Логическая система, в которой эта проблема отсутствует, была построена в [22]. Другие подходы к решению проблемы схлопывания интуиционистских и классических связок изложены в [23–26]. В логи-

*)Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 21-18-00195. Автор является стипендиатом Фонда развития теор. физ. и матем. „БАЗИС“.

ке QHC заданы два отдельных сорта формул: сорт высказывание и сорт задача, а классические (интуиционистские) связки могут быть применены только к формулам соответствующего сорта, поэтому логика QHC служит ещё одним вариантом решения проблемы схлопывания.

Как было показано в [1, 27], логика QHC является консервативным расширением классической логики предикатов, интуиционистской логики предикатов, предикатного варианта классической модальной логики S4, а также предикатной интуиционистской модальной логики, названной С. А. Мелиховым логикой QH4. Системы, родственные логике QH4, возникали ранее в [28–33]. С. Артёмов и Т. Протопопеску [34] провели глубокий анализ интуиционистской логики знания и построили три формальные системы $\mathrm{IEL}^{-}$, IEL и $\mathrm{IEL}^{+}$, последняя из которых совпадает с логикой QH4. Работа [34] имеет также журнальную версию [20], однако в ней не упоминается логика $\mathrm{IEL}^{+}$.

В работах автора [35, 36] подробно изучены различные типы семантик пропозиционального фрагмента логики QHC — логики HC. Как оказалось, для каждого из предложенных классов моделей выполнено свойство конечных моделей, откуда следует разрешимость логики HC. Семантика этой логики типа Крипке для её предикатного варианта рассмотрена в работе автора [27]. Там же построены и модели типа Крипке логики QH4, для которых имеет место теорема о полноте.

Предикатная логика QHC, безусловно, не является разрешимой, но будет перечислимой в силу рекурсивной аксиоматизируемости. Для интуиционистских и модальных предикатных логик, полных относительно некоторых классов моделей Крипке, имеет место перевод в классическую логику первого порядка [37–39]. Используя этот перевод, можно доказать аналог теоремы Лёвенгейма–Сколема о счётной элементарной подмодели для таких логик. В настоящей работе строится погружение логик QHC и QH4 в классическую логику предикатов и доказывается теорема о понижении мощности (из существования погружения следует также разрешимость логик QHC и QH4 относительно классической логики предикатов). Таким образом, при изучении теорий в логике QHC с не более чем счётной сигнатурой достаточно ограничиться их счётными моделями. В частности, для любого варианта QHC-теории множеств будет иметь место аналог парадокса Сколема.

Отметим, что изучение вопроса об истинности теоремы о повышении мощности не входит в рамки настоящей работы. Во-первых, необходимы уточнения, мощность чего именно повышается (множества миров, или предметной области каждого мира, или множества, состоящего из объединения всех предметных областей). Во-вторых, если не задавать ограничения типа нормальности на модель, то утверждение теоремы о повышении мощности станет бессодержательным. Поэтому сначала следует определить QHC-теории с равенством (классическим, или интуиционистским, или с обоими сразу), после чего станет возможным сформулировать осмысленные варианты теорем о повышении мощности. Истинность какого-нибудь варианта такой теоремы означала бы, что логика QHC не различает бесконечные мощности, что является мотивировкой для изучения логик высших порядков, расширяющих логику QHC.

## § 1. Логика QHC

В этом разделе приведём определение логики QHC, подробно изложенное в [1, 27].

Язык $\Omega$ логики QHC состоит из множества индивидных переменных $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, множества константных символов $\{c_i \mid i \in \mathcal{C}\}$ и двух множеств предикатных символов: сорта высказывание $\{P_i \mid i \in \mathcal{P}\}$ и сорта задача $\{\Phi_i \mid i \in \mathcal{T}\}$ ($\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ — некоторые индексные множества). Множество термов логики QHC состоит из переменных $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ и констант $\{c_i \mid i \in \mathcal{C}\}$ (термы не принадлежат ни к какому сорту — интуитивно можно считать, что это „объекты“, которые могут встречаться в формулировках высказываний и задач). Каждому предикатному символу приписано натуральное число, обозначающее его валентность. Отметим, что мы рассматриваем языки только с константными и предикатными символами (без функциональных символов). Это сделано, во-первых, для простоты изложения, а во-вторых, это является несущественным ограничением выразительных возможностей, поскольку вместо $n$-местного функционального символа $f$ можно рассматривать $(n+1)$-местный предикатный символ $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, понимаемый как $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

Приведём определение формулы логики QHC. Формулы логики QHC сорта высказывание (задача) будем обозначать строчными латинскими (греческими) буквами.

(1) Если $P$ $(\Phi)$ — предикатный символ сорта высказывание (задача) валентности $n$, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ $(\Phi(t_1, \ldots, t_n))$ — формула сорта высказывание (задача). Такие формулы называются атомарными.

(2) $0$ — формула сорта высказывание, $\perp$ — формула сорта задача ($0$ и $\perp$ обозначают классическую и интуиционистскую ложь соответственно).

(3) Если $p, q$ — формулы сорта высказывание, то $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $\exists x\, p$, $\forall x\, p$ — формулы сорта высказывание.

(4) Если $\alpha, \beta$ — формулы сорта задача, то $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $\exists x\, \alpha$, $\forall x\, \alpha$ — формулы сорта задача.

(5) Если $p$ — формула сорта высказывание, то $!\, p$ — формула сорта задача.

(6) Если $\alpha$ — формула сорта задача, то $?\, \alpha$ — формула сорта высказывание.

Схемы аксиом и правила вывода логики QHC следующие.

(I) Все схемы аксиом и правила вывода классической логики предикатов. В схемы аксиом вместо переменных по формулам можно подставлять любые формулы сорта высказывание (возможно, содержащие модальности ? и !). Пример конкретной аксиоматизации классической логики предикатов см. в [40].

(II) Все схемы аксиом и правила вывода интуиционистской логики предикатов. В схемы аксиом вместо переменных по формулам можно подставлять любые формулы сорта задача (возможно, содержащие модальности ? и !). Пример конкретной аксиоматизации интуиционистской логики предикатов см. в [41].

Для удобства читателя приведём правила вывода, участвующие в пп. (I), (II):

$$\frac{\Phi \quad \Phi \to \Psi}{\Psi}; \quad \frac{\Phi \to \Psi}{\exists x\, \Phi \to \Psi}; \quad \frac{\Psi \to \Phi}{\Psi \to \forall x\, \Phi}.$$

Здесь $\Phi, \Psi$ — произвольные формулы логики QHC одного сорта (сорта высказывание или сорта задача). Во втором и третьем правилах вывода переменная $x$ не входит во множество свободных переменных формулы $\Psi$[1]).

(III) Дополнительные схемы аксиом и правила вывода, перечисленные ниже.

(1) $!\,(p \to q) \;\to\; (!\,p \;\to !\,q)$;

(2) $?\,(\alpha \to \beta) \;\to\; (?\alpha \to ?\beta)$;

(3) $\dfrac{p}{!\,p}$;

(4) $\dfrac{\alpha}{?\,\alpha}$;

(5) $?!\,p \to p$;

(6) $\alpha \to !?\,\alpha$;

(7) $\neg\,!\,0$.

Правила вывода (3) и (4) называются правилами усиления. Формула, выводимая в логике QHC, называется теоремой логики QHC.

## § 2. Модели Крипке логики QHC

Приведём определение шкалы и модели Крипке логики QHC, введённое в [27].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Omega$ — язык логики QHC. *Шкала Крипке* этого языка — набор $(\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$, где $(\mathcal{W}, \preccurlyeq)$ — непустое частично упорядоченное множество возможных миров, $\mathrm{Aud} \subseteq \mathcal{W}$ — множество отмеченных миров, и выполнено условие

$$\forall a \in \mathcal{W}\; \exists b \in \mathcal{W}\; \left(a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud}\right).$$

*Моделью Крипке* логики QHC называется пятёрка $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \mathcal{D}, \models)$, где $(\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$ — шкала Крипке, $\mathcal{D}$ — функция, которая каждому $a \in \mathcal{W}$

[1]) Понятие множества свободных переменных формулы определяется стандартным образом.

сопоставляет непустое множество $\mathcal{D}_a$. Расширим язык $\Omega$ множеством константных символов для обозначения всех элементов $\bigcup\limits_{a \in W} \mathcal{D}_a$ $\Bigl($будем отождествлять эти константные символы и элементы $\bigcup\limits_{a \in W} \mathcal{D}_a\Bigr)$. Обозначим этот расширенный язык через $\Omega(\mathcal{D})$. Пусть $\models$ — соответствие между мирами (отмеченными мирами) $a \in \mathcal{W}$ и замкнутыми атомарными формулами сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(\mathcal{D})$. При этом выполнены следующие условия:

(1) если $a \preccurlyeq b$, то $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_b$;

(2) если язык $\Omega$ содержит константу $c$, то она принадлежит любому $\mathcal{D}_a$ для $a \in \mathcal{W}$;

(3) если $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ — атомарная формула сорта задача, $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D}_a$, $a \models \Phi(z_1, \ldots, z_n)$ и $a \preccurlyeq b$, то $b \models \Phi(z_1, \ldots, z_n)$ (монотонность);

(4) если $a \models A(z_1, \ldots, z_n)$, то $\{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq \mathcal{D}_a$ (здесь $A$ — некоторый предикатный символ валентности $n$ сорта высказывание или сорта задача языка $\Omega$).

Можно полагать, что $\left(\bigcup\limits_{a \in W} \mathcal{D}_a\right) \cap \mathcal{W} = \varnothing$. Добавление этого ограничения не влияет на доказательство теоремы о полноте, сформулированной ниже. Действительно, если $\left(\bigcup\limits_{a \in W} \mathcal{D}_a\right) \cap \mathcal{W} \neq \varnothing$, то можно заменить элементы множества миров $\mathcal{W}$ из пересечения (переопределив при этом $\preccurlyeq$, $\mathrm{Aud}$, $\mathcal{D}$ и $\models$ соответствующим образом), чтобы пересечение оказалось пустым. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в моделях Крипке $\left(\bigcup\limits_{a \in W} \mathcal{D}_a\right) \cap \mathcal{W} = \varnothing$.

Пусть $a \in \mathcal{W}$ ($a \in \mathrm{Aud}$) — произвольно взятый мир. Продолжим соответствие $\models$ между $a$ и множеством замкнутых атомарных формул сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(\mathcal{D})$ до соответствия $\models$ между $a$ и множеством всех замкнутых формул сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(\mathcal{D})$ индукцией по построению формулы. Для атомарных формул оно уже определено; для любого мира $b \in \mathcal{W}$ ($b \in \mathrm{Aud}$) полагаем $b \not\models \perp$ ($b \not\models 0$). Индуктивный переход для классических связок $\wedge, \vee, \to$ определяется поточечно в мирах множества Aud:

$a \models p \wedge q$ тогда и только тогда, когда $a \models p$ и $a \models q$;

$a \models p \vee q$ тогда и только тогда, когда $a \models p$ или $a \models q$;

$a \models p \to q$ тогда и только тогда, когда $a \not\models p$ или $a \models q$.

Индуктивный переход для интуиционистских связок $\wedge, \vee, \to$ определяется в мирах множества $\mathcal{W}$ как в шкалах Крипке интуиционистской логики. Индуктивный переход для модальностей определяется следующим образом:

$$a \models ?\alpha \Leftrightarrow a \models \alpha \quad (\text{для } a \in \mathrm{Aud});$$
$$a \models !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}(a \preccurlyeq b \Rightarrow b \models p) \ \ (\text{для } a \in \mathcal{W}).$$

Определим индуктивный переход для классических кванторов $\exists$ и $\forall$ ($a \in \mathrm{Aud}$):

$$a \models \exists x\, p \Leftrightarrow (\exists z \in \mathcal{D}_a) a \models p[x/z];$$
$$a \models \forall x\, p \Leftrightarrow (\forall z \in \mathcal{D}_a) a \models p[x/z].$$

(Здесь $p[x/z]$ означает результат замены всех свободных вхождений $x$ в формуле $p$ на $z$[2].)

Наконец, определим индуктивный переход для интуиционистских кванторов $\exists$ и $\forall$ ($a \in \mathcal{W}$):

$$a \models \exists x \ \alpha \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{D}_a \ a \models \alpha[x/z];$$
$$a \models \forall x \ \alpha \Leftrightarrow \forall b \succcurlyeq a \ \forall z \in \mathcal{D}_b \ b \models \alpha[x/z].$$

Отметим, что выше мы определили соответствие $w \models A$ для замкнутых формул $A$ сорта задача (сорта высказывание) языка $\Omega(\mathcal{D})$ и мира $w \in \mathcal{W}$ ($w \in \mathrm{Aud}$). Допустима также запись $\mathcal{K}, w \models A$, чтобы подчеркнуть, о какой именно модели Крипке идёт речь. Для произвольной (не обязательно замкнутой) формулы $A$ запись $w \models A$ означает, что в мире $w$ истинно универсальное замыкание формулы $A$. Если $w \models A$, то будем говорить, что формула $A$ истинна в мире $w$. Будем говорить, что формула сорта задача (высказывание) истинна в модели Крипке языка $\Omega$, если она истинна в любом мире (отмеченном мире) этой модели Крипке.

[2] Понятия свободного вхождения переменной в формулу и замены $p[x/z]$ определяются стандартным образом при помощи индукции по построению формулы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Теорией в логике* QHC называется множество $\Gamma$ замкнутых формул, содержащее все теоремы логики QHC и замкнутое относительно всех правил вывода логики QHC, кроме, возможно, правила усиления $\dfrac{p}{!\,p}$. Теория *непротиворечива*, если она не содержит константы 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из непротиворечивости теории следует, что она не содержит обе константы ложь: $\perp$ и 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Замыканием* $[\Gamma]$ множества замкнутых формул $\Gamma$ называется наименьшая по включению теория, содержащая $\Gamma$. Множество $\Gamma$ *непротиворечиво*, если теория $[\Gamma]$ непротиворечива.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [27] введены отношения выводимости $\vdash$ и $\vdash^*$ формулы из множества формул логики QHC, первое из которых называлось слабой выводимостью, а второе — выводимостью. При выводе $\vdash^*$ допускается использование всех правил вывода логики QHC, а при слабом выводе $\vdash$ не допускается использование правил усиления, но при выводе формулы из гипотез допускается использовать любые теоремы логики QHC (в том числе полученные с использованием обоих правил усиления). В некотором смысле они соответствуют локальному и глобальному отношениям следования в модальной логике, см. [42]. В частности, для слабой выводимости $\vdash$ имеет место теорема о дедукции.

Как было отмечено в [27], для получения замыкания множества формул $\Gamma$ необходимо добавить в него все теоремы логики QHC, затем замкнуть его относительно отношения $\vdash$, после чего для каждой формулы $\alpha$ сорта задача добавить формулу $?\alpha$, и затем снова замкнуть относительно отношения $\vdash$.

В определении теории отсутствует требование замкнутости множества формул относительно правила усиления $\dfrac{p}{!\,p}$, поскольку при доказательстве теоремы о полноте именно из таких теорий собирается модель Крипке. В моделях Крипке для формул сорта высказывание не требуется свойства монотонности, что существенно для справедливости теоремы о полноте (в частности, логика QHC является консервативным расширением логики QS4, см. [1], а для моделей Крипке логики QS4 немонотонность отношения истинности также существенна). В моделях Крипке для формул сорта задача свойство монотонности имеет место, и если бы модель собиралась только из теорий, замкнутых относительно всех правил вывода логики QHC, то в таких моделях свойство монотонности имело бы место для всех формул.

**ЛЕММА 2.1** [27]. *Для любой непротиворечивой теории* $\Gamma$ *логики* QHC *существуют модель Крипке* $\mathcal{K}$ *и её отмеченный мир, такие что в этом мире модели* $\mathcal{K}$ *истинны все формулы из* $\Gamma$.

**ТЕОРЕМА 1** (о корректности и полноте) [27]. (1) *Если замкнутая формула языка* $\Omega$ *выводима в логике* QHC, *то она истинна в любой модели Крипке для языка* $\Omega$.

(2) *Для любого непротиворечивого множества замкнутых формул* $\Gamma$ *логики* QHC *существует модель Крипке* $\mathcal{K}$ *и её отмеченный мир, такие что в этом мире модели* $\mathcal{K}$ *истинны все формулы из* $\Gamma$.

## § 3. Погружение QHC в QCL$^=$

В этом разделе опишем погружение логики QHC в классическую логику с равенством QCL$^=$. Рассмотрим язык классической логики, в котором зафиксированы предикатные буквы $W, R, A, D, P_i^\star$ $(i \in \mathcal{P})$, $\Phi_i^\star$ $(i \in \mathcal{T})$ и константные символы $c_i^\star$ $(i \in \mathcal{C})$. $W$ — унарный предикатный символ, который мы будем содержательно интерпретировать как „быть миром модели Крипке логики QHC“. Бинарный предикатный символ $R$ содержательно интерпретируется как отношение достижимости между мирами, унарный предикатный символ $A$ — как свойство „быть Aud-миром“, а бинарный предикатный символ $D(w, z)$ — как свойство „$z$ — объект, принадлежащий предметной области мира $w$“. Если предикатный символ $P_i$ $(\Phi_i)$ логики QHC имеет валентность $n$, то предикатный символ $P_i^\star$ $(\Phi_i^\star)$ будет иметь валентность $n+1$. $P_i^\star(w, z_1, \ldots, z_n)$ $(\Phi_i^\star(w, z_1, \ldots, z_n))$ содержательно интерпретируется как „в мире $w$ истинна атомарная формула $P_i(z_1, \ldots, z_n)$

$(\Phi(z_1, \ldots, z_n))$“. Константный символ $c_i^\star$ соответствует константному символу $c_i$ языка логики QHC и интерпретируется как объект, принадлежащий каждому $\mathcal{D}_a$ в модели Крипке логики QHC.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим формулы *Frame*, $D_{func}$, $P_k^{val}$ $(k \in \mathcal{P})$, $\Phi_k^{val}$ $(k \in \mathcal{T})$, $c_k^{val}$ $(k \in \mathcal{C})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathit{Frame} = {} & \exists\, w W(w) \wedge \forall w \forall u (R(w,u) \to W(w) \wedge W(u)) \\
& \wedge \forall w (W(w) \to R(w,w)) \\
& \wedge \forall w \forall u \forall v (W(w) \wedge W(u) \wedge W(v) \wedge R(w,u) \wedge R(u,v) \to R(w,v)) \\
& \wedge \forall w \forall u (W(w) \wedge W(u) \wedge R(w,u) \wedge R(u,w) \to w = u) \\
& \wedge \forall w (A(w) \to W(w)) \wedge \forall w (W(w) \to \exists u (A(u) \wedge R(w,u)));\\
D_{func} = {} & \forall w (W(w) \to \exists z D(w,z)) \\
& \wedge \forall w \forall z (D(w,z) \to W(w)) \wedge \forall z (\exists w W(w) \wedge D(w,z) \to \neg W(z)) \\
& \wedge \forall w \forall u \forall z (W(w) \wedge W(u) \wedge R(w,u) \wedge D(w,z) \to D(u,z)) \\
& \wedge \forall z (W(z) \vee \exists w D(w,z));\\
P_k^{val} = {} & \forall w \forall z_1, \ldots, z_n \left( W(w) \wedge P_k^\star(w, z_1, \ldots, z_n) \to \bigwedge_{i=1}^{n} D(w, z_i) \wedge A(w) \right);\\
\Phi_k^{val} = {} & \forall w \forall z_1, \ldots, z_n \left( W(w) \wedge \Phi_k^\star(w, z_1, \ldots, z_n) \to \bigwedge_{i=1}^{n} D(w, z_i) \right) \\
& \wedge \forall w \forall u \forall z_1, \ldots, z_n (W(w) \wedge W(u) \wedge R(w,u) \\
& \wedge \Phi_k^\star(w, z_1, \ldots, z_n) \to \Phi_k^\star(u, z_1, \ldots, z_n));\\
c_k^{val} = {} & \forall w (W(w) \to D(w, c_k^\star)).
\end{aligned}$$

Рассмотрим классическую теорию *Model*, порождённую множеством замкнутых формул

$$\{\mathit{Frame}, D_{func}\} \cup \{P_k^{val} \mid k \in \mathcal{P}\} \cup \{\Phi_k^{val} \mid k \in \mathcal{T}\} \cup \{c_k^{val} \mid k \in \mathcal{C}\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая модель этой теории с носителем $M$. Для формул $\phi$ классической логики предикатов будем использовать запись $\mathcal{M} \Vdash \phi$, если формула $\phi$ истинна в модели $\mathcal{M}$. Определим для этой модели $\mathcal{M}$ пятёрку $\mathcal{M}^{\mathrm{QHC}} = (\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \mathcal{D}, \models)$ следующим образом:

$\mathcal{W} = \{w \in M \mid \mathcal{M} \Vdash W(w)\}$;

$w \preccurlyeq u \Leftrightarrow \mathcal{M} \Vdash R(w, u)$;

$\mathrm{Aud} = \{w \in M \mid \mathcal{M} \Vdash A(w)\}$;

$\mathcal{D}_w = \{z \in M \mid \mathcal{M} \Vdash D(w, z)\}$;

$w \models P_k(z_1, \ldots, z_n) \Leftrightarrow \mathcal{M} \Vdash P_i^\star(w, z_1, \ldots, z_n)$ (аналогично для $\Phi_k$).

С другой стороны, пусть дана модель Крипке $\mathcal{K} = (\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \mathcal{D}, \models)$ логики QHC. Определим $\mathcal{K}^\star$ — модель языка классической логики с носителем $K^\star$, содержащего предикатные символы $W, R, A, D, P_i^\star, \Phi_i^\star$ и константные символы $c_i^\star$, следующим образом:

$K^\star = \mathcal{W} \cup \{\mathcal{D}_w \mid w \in \mathcal{W}\}$;

$W(w) \Leftrightarrow w \in \mathcal{W}$;

$R(w, u) \Leftrightarrow w \preccurlyeq u$;

$A(w) \Leftrightarrow w \in \mathrm{Aud}$;

$D(w, z) \Leftrightarrow z \in D_w$;

$P_i^\star(w, z_1, \ldots, z_n) \Leftrightarrow w \models P_i(z_1, \ldots, z_n)$;

$\Phi_i^\star(w, z_1, \ldots, z_n) \Leftrightarrow w \models \Phi_i(z_1, \ldots, z_n)$.

В обоих случаях константные символы $c_i$ совпадают с константными символами $c_i^\star$.

**ЛЕММА 3.1.** *Для определённых выше объектов имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если* $\mathcal{M}$ *— модель теории Model, то пятёрка*

$$\mathcal{M}^{\mathrm{QHC}} = (\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \mathcal{D}, \models)$$

*является моделью Крипке логики* QHC.

(2) *Если* $\mathcal{K}$ *— модель Крипке логики* QHC, *то* $\mathcal{K}^\star$ *является моделью теории Model.*

(3) *Если* $\mathcal{M}$ *— модель теории Model, то* $(\mathcal{M}^{\mathrm{QHC}})^\star$ *совпадает с* $\mathcal{M}$.

(4) *Если* $\mathcal{K}$ *— модель Крипке логики* QHC, *то* $(\mathcal{K}^\star)^{\mathrm{QHC}}$ *совпадает с* $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует непосредственно из определений выше. Покажем, что имеет место, напр., п. (1).

Пусть $\mathcal{M}$ — модель теории *Model*. Тогда из истинности формулы *Frame* на модели $\mathcal{M}$ следует, что $\mathcal{W}$ — непустое множество с частичным порядком $\preccurlyeq$, $\mathrm{Aud} \subseteq \mathcal{W}$ и выполнено условие $\forall w \in \mathcal{W} \exists u \in \mathrm{Aud}\ w \preccurlyeq u$. Таким образом, $(\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud})$ — шкала Крипке логики QHC. Далее, если $\mathcal{M} \Vdash D(w,z)$, то $z \in \mathcal{D}_w$, верно и обратное. Истинность формулы $D_{func}$ в модели $\mathcal{M}$ означает непустоту каждого $\mathcal{D}_w$, а также условие $w \preccurlyeq u \Rightarrow \mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{D}_u$. Если $\mathcal{M} \Vdash P_k^{val}(w, z_1, \ldots, z_n)$, то в модели Крипке имеем $w \models P_k(z_1, \ldots, z_n)$, причём также выполнено $w \in \mathrm{Aud}$ и $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D}_w$. Если $\mathcal{M} \Vdash \Phi_k^{val}(w, z_1, \ldots, z_n)$, то в модели Крипке верно $w \models \Phi_k(z_1, \ldots, z_n)$, причём выполнено $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D}_w$, а также монотонность соответствия $\models$ для атомарной формулы $\Phi_k(z_1, \ldots, z_n)$. Наконец, из истинности формулы $c_k^{val}$ в модели $\mathcal{M}$ следует, что при наличии в языке константы $c_k$ ей соответствует объект $c_k$, принадлежащий каждому $\mathcal{D}_w$. Таким образом, полученная структура представляет собой модель Крипке логики QHC.

Индукцией по построению формулы логики QHC определим перевод формулы $A$ логики QHC в формулу $ST_w(A)$ классической логики следующим образом.

Перевод атомарных формул осуществляется по правилам

$$ST_w(P_k(t_1, \ldots, t_n)) = P_k^\star(w, t_1, \ldots, t_n);$$
$$ST_w(\Phi_k(t_1, \ldots, t_n)) = \Phi_k^\star(w, t_1, \ldots, t_n).$$

Индуктивный переход с использованием классических связок и кванторов осуществляется по правилам

$$\begin{aligned} ST_w(0) &= 0; \\ ST_w(p \bullet q) &= ST_w(p) \bullet ST_w(q), \quad \text{где } \bullet \in \{\wedge, \vee, \to\}; \\ ST_w(\exists x\, p[v/x]) &= \exists x(D(w,x) \wedge (ST_w(p)[v/x])); \\ ST_w(\forall x\, p[v/x]) &= \forall x(D(w,x) \to (ST_w(p)[v/x])). \end{aligned}$$

Индуктивный переход с использованием интуиционистских связок и кванторов осуществляется по правилам

$$
\begin{aligned}
ST_w(\bot) &= 0;\\
ST_w(\phi \bullet \psi) &= ST_w(\phi) \bullet ST_w(\psi), \quad \text{где } \bullet \in \{\wedge, \vee\};\\
ST_w(\phi \to \psi) &= \forall u(R(w,u) \to (ST_u(\phi) \to ST_u(\psi)));\\
ST_w(\exists x\, \phi[v/x]) &= \exists x(D(w,x) \wedge (ST_w(\phi)\,[v/x]));\\
ST_w(\forall x\, \phi[v/x]) &= \forall u(R(w,u) \to \forall x(D(u,x) \to (ST_u(\phi)[v/x]))).
\end{aligned}
$$

Индуктивный переход с использованием модальностей осуществляется по правилам

$$
\begin{aligned}
ST_w(?\,\phi) &= A(w) \wedge ST_w(\phi);\\
ST_w(!\,p) &= \forall u(A(u) \wedge R(w,u) \to ST_u(p)).
\end{aligned}
$$

**ЛЕММА 3.2.** *Пусть* $\mathcal{K}$ *— модель Крипке логики* QHC, $w$ *— её мир,* $B$ *— произвольная формула логики* QHC, $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D}_w$. *Имеет место* $\mathcal{K}, w \models B[v_1/z_1, \ldots, v_n/z_n]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{K}^\star \Vdash ST_w(B)\,[v_1/z_1, \ldots, v_n/z_n]),$$

*где* $\mathcal{K}^\star$ *— классическая модель теории Model, соответствующая модели Крипке логики* QHC $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по построению формулы при помощи рутинного разбора всех случаев индуктивного перехода. Самый трудный случай индуктивного перехода — использование модальности !, т. е. $B = !\,p$.

По определению

$$\mathcal{K}, w \models !p \Leftrightarrow \forall u \in \mathrm{Aud}(w \preccurlyeq u \Rightarrow \mathcal{K}, u \models p).$$

По индуктивному предположению это равносильно

$$\forall u \in \mathrm{Aud}(w \preccurlyeq u \Rightarrow \mathcal{K}^\star \Vdash ST_u(p)).$$

Последнее равносильно

$$\mathcal{K}^\star \Vdash \forall u(R(w,u) \wedge A(u) \to ST_u(p)),$$

т. е. $\mathcal{K}^\star \Vdash ST_w(!p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно погрузить логику QHC в классическую логику QCL в языке без равенства. Для этого необходимо зафиксировать ещё один бинарный предикатный символ $\sim$ и добавить к теории *Model* формулу, утверждающую, что $\sim$ является отношением эквивалентности, сохраняющим все предикатные символы (т. е. конгруэнтностью).

## § 4. Теорема о понижении мощности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть

$$\mathcal{K}^1 = (\mathcal{W}^1, \preccurlyeq^1, \mathrm{Aud}^1, \mathcal{D}^1, \models^1),$$
$$\mathcal{K}^2 = (\mathcal{W}^2, \preccurlyeq^2, \mathrm{Aud}^2, \mathcal{D}^2, \models^2)$$

являются моделями Крипке логики QHC. Модель $\mathcal{K}^2$ будем называть *элементарной подмоделью* модели $\mathcal{K}^1$, если выполнены следующие условия:

$(\mathcal{W}^2, \preccurlyeq^2, \mathrm{Aud}^2)$ — подшкала шкалы $(\mathcal{W}^1, \preccurlyeq^1, \mathrm{Aud}^1)$, т. е. $\mathcal{W}^2 \subseteq \mathcal{W}^1$, порядок $\preccurlyeq^2$ индуцируется с порядка $\preccurlyeq^1$, и $\mathrm{Aud}^2 = \mathcal{W}^2 \cap \mathrm{Aud}^1$;

для любого $a \in \mathcal{W}^2$ имеем $\mathcal{D}^2_a \subseteq \mathcal{D}^1_a$;

для любой формулы $p$ сорта высказывание ($\alpha$ сорта задача), любого $w \in \mathrm{Aud}^2$ ($w \in \mathcal{W}^2$) и любых $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{D}^2_w$ имеет место

$$w \models^1 p[v_1/z_1, \dots, v_n/z_n]) \Leftrightarrow w \models^2 p[v_1/z_1, \dots, v_n/z_n]$$
$$(w \models^1 \alpha[v_1/z_1, \dots, v_n/z_n]) \Leftrightarrow w \models^2 \alpha[v_1/z_1, \dots, v_n/z_n].$$

Используемое нами понятие подшкалы не является интуиционистским. В интуиционистском определении подшкалы являются конусами: $\forall u \in \mathcal{W}_2 \forall w \in \mathcal{W}_1 (u \preccurlyeq^1 w \Rightarrow w \in \mathcal{W}_2)$, см. [43].

**ТЕОРЕМА 2.** *Пусть* $\Omega$ *— не более чем счётный язык логики* QHC*,* $\mathcal{K} = (\mathcal{W}^1, \preccurlyeq^1, \mathrm{Aud}^1, \mathcal{D}^1, \models^1)$ *— модель Крипке логики* QHC *в этом языке,* $S$ *— не более чем счётное подмножество* $\mathcal{W}^1$*. Тогда у* $\mathcal{K}$ *существует элементарная подмодель* $\mathcal{N} = (\mathcal{W}^2, \preccurlyeq^2, \mathrm{Aud}^2, \mathcal{D}^2, \models^2)$*, имеющая не более* *чем счётное множество миров, для каждого её мира $w$ множество $\mathcal{D}_w$ также не более чем счётно, и $S \subseteq \mathcal{W}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 модели Крипке $\mathcal{K} = (\mathcal{W}^1, \preccurlyeq^1, \mathrm{Aud}^1, \mathcal{D}^1, \models^1)$ логики QHC соответствует модель $\mathcal{K}^\star$ теории *Model*. Поскольку язык $\Omega$ не более чем счётный, язык классической логики, в котором построена модель $\mathcal{K}^\star$ теории *Model*, также будет не более чем счётным. В силу теоремы Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности для классической логики, существует не более чем счётная классическая элементарная подмодель $\mathcal{N}^\star$ модели $\mathcal{K}^\star$, содержащая множество $S$ (понятие классической элементарной подмодели и формулировку теоремы Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности для классической логики см. в [40]).

Любая классическая элементарная подмодель модели $\mathcal{K}^\star$ будет иметь вид $\mathcal{L}^\star$, поскольку она является моделью теории *Model* в силу свойств классических элементарных подмоделей. Таким образом, для любой формулы $B$ языка $\Omega$ и любых $w, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{N}^\star$, для которых выполнено $W(w)$ и $D(w, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\mathcal{N}^\star \Vdash ST_w(B[\bar{v}/\bar{z}]) \Leftrightarrow \mathcal{K}^\star \Vdash ST_w(B[\bar{v}/\bar{z}])$$

(для краткости обозначили $\bar{v} = v_1, \ldots, v_n$, $\bar{z} = z_1, \ldots, z_n$). Согласно лемме 3.1 модели $\mathcal{N}^\star$ соответствует модель Крипке $\mathcal{N} = (\mathcal{W}^2, \preccurlyeq^2, \mathrm{Aud}^2, \mathcal{D}^2, \models^2)$ логики QHC. По лемме 3.2 получаем

$$\mathcal{N}, w \models B[\bar{v}/\bar{z}] \Leftrightarrow \mathcal{K}, w \models B[\bar{v}/\bar{z}].$$

В силу того, что $\mathcal{N}^\star$ — классическая элементарная подмодель модели $\mathcal{K}^\star$, и леммы 3.1(3) $(\mathcal{W}^2, \preccurlyeq^2, \mathrm{Aud}^2)$ образует подшкалу шкалы $(\mathcal{W}^1, \preccurlyeq^1, \mathrm{Aud}^1)$, и $\mathcal{D}^2_a \subseteq \mathcal{D}^1_a$ для любого $a \in \mathcal{W}^2$. Таким образом, $\mathcal{N}$ — элементарная подмодель модели $\mathcal{K}$. В силу не более чем счётности $\mathcal{N}^\star$ множество миров $\mathcal{N}$ не более чем счётно, и для каждого мира $w$ множество $\mathcal{D}_w$ также не более чем счётно. Наконец, $S \subseteq \mathcal{W}^2$, поскольку модель $\mathcal{N}^\star$ содержит $S$ в качестве подмножества.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Пусть $\Gamma$ — непротиворечивое множество замкнутых формул логики* QHC *в не более чем счётном языке $\Omega$. Тогда су-*

*ществует модель Крипке $\mathcal{K}$ логики* QHC *и её мир $w$, такие что в мире $w$ истинны все формулы из $\Gamma$, множество миров $\mathcal{K}$ не более чем счётно, и для каждого её мира $v$ множество $\mathcal{D}_v$ также не более чем счётно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 существуют модель Крипке $\mathcal{L}$ и её отмеченный мир $w$, в котором истинны все формулы из $\Gamma$. Рассмотрим множество $S = \{w\}$. По теореме 2 существует не более чем счётная элементарная подмодель $\mathcal{K}$ модели $\mathcal{L}$, предметная область каждого мира которой не более чем счётна, и множество миров модели $\mathcal{K}$ содержит все миры из множества $S$. $\mathcal{K}$ — элементарная подмодель модели $\mathcal{L}$, поэтому $\mathcal{K}, w \models A \Leftrightarrow \mathcal{L}, w \models A$ для любой формулы $A$. Следовательно, $\mathcal{K}$ является требуемой моделью Крипке.

## § 5. Логика QH4

В этом разделе будут доказаны результаты, аналогичные установленным в §§ 3, 4, но для логики QH4. Одной из интересных особенностей логики QH4 является то, что она содержит формулы лишь одного сорта, и при этом для неё выполнена теорема о корректности и полноте относительно семантики Крипке, основанной на тех же шкалах, что и семантика Крипке логики QHC, см. [27].

Логика QH4 — расширение интуиционистской логики предикатов модальностью $\nabla$, для которой имеют место следующие схемы аксиом:

$(1^{\nabla})$ $\alpha \to \nabla\alpha$;

$(2^{\nabla})$ $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;

$(3^{\nabla})$ $\nabla\bot \to \bot$;

$(4^{\nabla})$ $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

Данная логика является расширением так называемой „lax logic“ дополнительной аксиомой $\nabla\bot \to \bot$, [31, 32]. В [27] построены модели Крипке логики QH4, определение которых во многом совпадает с определением 1 моделей Крипке логики QHC. Отличия в определении моделей Крипке логики QH4 от моделей Крипке логики QHC следующие:

— в п. (3) определения вместо „атомарная формула сорта задача“ следует читать „атомарная формула“;

— поскольку формулы логики QH4 одного сорта, соответствие $\models$ определяется между мирами и всеми замкнутыми атомарными формулами в соответствующем расширенном языке.

Продолжим соответствие $\models$ между $\mathcal{W}$ и множеством замкнутых атомарных формул до соответствия $\models$ между $\mathcal{W}$ и множеством всех замкнутых формул логики QH4 индукцией по построению формулы. Для интуиционистских связок $\wedge, \vee, \rightarrow$ и кванторов индуктивный переход такой же, как и в моделях Крипке логики QHC. Осталось определить индуктивный переход для модальности $\nabla$:

$$a \models \nabla\phi \;\Leftrightarrow\; \forall b \in \mathcal{W}(a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud} \Rightarrow b \models \phi).$$

**ТЕОРЕМА 3** [27]**.** (1) *Если замкнутая формула языка* $\Omega$ *выводима в логике* QH4*, то она истинна в любой модели Крипке логики* QH4 *для языка* $\Omega$.

(2) *Для любого непротиворечивого множества формул* $\Gamma$ *логики* QH4 *существуют модель Крипке* $\mathcal{K}$ *и её отмеченный мир, такие что в этом мире модели* $\mathcal{K}$ *истинны все формулы из* $\Gamma$.

Как и для логики QHC, возможно построить погружение логики QH4 в классическую логику предикатов и доказать теорему о понижении мощности. Пусть язык логики QH4 содержит предикатные символы $\{\Phi_k \mid k \in \mathcal{T}\}$ и константные символы $\{c_k \mid k \in \mathcal{C}\}$. Рассмотрим классическую теорию $Model^{\mathrm{QH4}}$, порождённую множеством замкнутых формул $\{Frame, D_{func}\} \cup \{\Phi_k^{val} \mid k \in \mathcal{T}\} \cup \{c_k^{val} \mid k \in \mathcal{C}\}$. Аналогично тому, как это было проделано в § 4, определим по модели $\mathcal{M}$ теории $Model^{\mathrm{QH4}}$ пятёрку $\mathcal{M}^{\mathrm{QH4}} = (\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \mathcal{D}, \models)$, и, наоборот, по модели Крипке $\mathcal{K}$ логики QH4 — модель $\mathcal{K}^{\star}$ классической логики. При этом, как легко убедиться, справедлива следующая

**ЛЕММА 5.1.** (1) *Если* $\mathcal{M}$ *— модель теории* $Model^{\mathrm{QH4}}$*, то пятёрка* $\mathcal{M}^{\mathrm{QH4}} = (\mathcal{W}, \preccurlyeq, \mathrm{Aud}, \mathcal{D}, \models)$ *является моделью Крипке логики* QH4.

(2) *Если* $\mathcal{K}$ *— модель Крипке логики* QH4, *то* $\mathcal{K}^\star$ *является моделью теории* $Model^{\mathrm{QH4}}$.

(3) *Если* $\mathcal{M}$ *— модель теории* $Model^{\mathrm{QH4}}$, *то* $(\mathcal{M}^{\mathrm{QH4}})^\star$ *совпадает с* $\mathcal{M}$.

(4) *Если* $\mathcal{K}$ *— модель Крипке логики* QH4, *то* $(\mathcal{K}^\star)^{\mathrm{QH4}}$ *совпадает с* $\mathcal{K}$.

Индукцией по построению формулы логики QH4 определим перевод формулы $A$ логики QH4 в формулу $ST_w^{\mathrm{QH4}}(A)$ классической логики следующим образом. Перевод атомарных формул, а также индуктивный переход с использованием связок и кванторов выглядят так же, как и перевод атомарных формул, интуиционистских связок и кванторов логики QHC. Индуктивный переход с использованием модальности $\nabla$ следующий:

$$ST_w^{\mathrm{QH4}}(\nabla\alpha) = \forall u(A(u) \wedge R(w,u) \to ST_u^{\mathrm{QH4}}(\alpha)).$$

Доказательства следующих утверждений проводятся теми же методами, что и доказательства аналогичных утверждений про логику QHC. Определение элементарной подмодели отличается тем, что в логике QH4 формулы только одного сорта, и поэтому в последнем пункте определения 5 не требуется разделять формулы двух сортов.

**ЛЕММА 5.2.** *Пусть* $\mathcal{K}$ *— модель Крипке логики* QH4, $w$ *— её мир,* $A$ *— произвольная формула логики* QH4, $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D}_w$. *Имеет место* $\mathcal{K}, w \models A[v_1/z_1, \ldots, v_n/z_n]$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}^\star \Vdash ST_w^{\mathrm{QH4}}(A)[v_1/z_1, \ldots, v_n/z_n]$, *где* $\mathcal{K}^\star$ *— классическая модель теории* $Model^{\mathrm{QH4}}$, *соответствующая модели Крипке* $\mathcal{K}$ *логики* QH4.

**ТЕОРЕМА 4.** *Пусть* $\Omega$ *— не более чем счётный язык логики* QH4, $\mathcal{K} = (\mathcal{W}^1, \preccurlyeq^1, \mathrm{Aud}^1, \mathcal{D}^1, \models^1)$ *— модель Крипке логики* QH4 *в этом языке,* $S$ *— не более чем счётное подмножество* $\mathcal{W}^1$. *Тогда существует* $\mathcal{N} = (\mathcal{W}^2, \preccurlyeq^2, \mathrm{Aud}^2, \mathcal{D}^2, \models^2)$ *— элементарная подмодель* $\mathcal{K}$, *имеющая не более чем счётное множество миров, для каждого её мира* $w$ *множество* $\mathcal{D}_w$ *также не более чем счётно, и* $S \subseteq W^2$.

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *Пусть* $\Gamma$ *— непротиворечивая теория логики* QH4 *в не более чем счётном языке* $\Omega$. *Тогда существует модель Крипке*

*$\mathcal{K}$ логики* QH4 *и её мир $w$, такие что в мире $w$ истинны все формулы из* Γ*, множество миров $\mathcal{K}$ не более чем счётно, и для каждого её мира $v$ множество $\mathcal{D}_v$ также не более чем счётно.*

В заключение автор выражает свою благодарность М. Н. Рыбакову за ценные замечания и исправление многих неточностей, рецензенту за внимание к работе и указание на ряд полезных ссылок.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *S. A. Melikhov*, A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax, `arXiv:1312.2575 [math.LO]`.
2. *S. A. Melikhov*, A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics, `arXiv:1504.03379 [math.LO]`.
3. *А. Н. Колмогоров*, Избранные труды. Математика и механика, М., Наука, 1985.
4. *А. Н. Колмогоров*, О принципе tertium non datur, Матем. сб., **32**, № 4 (1925), 646—667.
5. *A. Heyting*, Intuitionism. An introduction (Stud. Logic Found. Math.), Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1956.
6. *S. A. Melikhov*, Mathematical semantics of intuitionistic logic, `arXiv: 1504.03380 [math.LO]`
7. *A. S. Troelstra*, Aspects of constructive mathematics, in: J. Barwise (ed.), Handbook of mathematical logic (Stud. Logic Found. Math., **90**), Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland Publ. Co., 1977, 973—1052.
8. *A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg*, Basic proof theory (Camb. Tracts Theor. Comput. Sci., **43**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996.
9. *G. Kreisel*, Perspectives in the philosophy of pure mathematics, in: P. Suppes (ed.) et al., Logic, methodology and philosophy of science. IV. Proc. Fourth Int. Congr. Logic, Methodol. Philos. Sci. (Bucharest, August 29–September 4, 1971), (Stud. Logic Found. Math., **74**), Amsterdam-London, North-Holland Publ. Co.; New York, American Elsevier Publ. Co., 1973, 255—277.
10. *P. Martin-Löf* Intuitionistic Type Theory. Notes by Giovanni Sambin of a Series of Lectures given in Padua, June 1980 (Studies in Proof Theory. Lecture Notes, **1**), Napoli, Bibliopolis, 1984.

11. *С. К. Клини*, Введение в метаматематику, М., Иностр. лит-ра, 1957.
12. *S. N. Artemov*, Explicit provability and constructive semantics, Bull. Symb. Log., **7**, No. 1 (2001), 1—36.
13. *С. Н. Артёмов*, Подход Колмогорова и Гёделя к интуиционистской логике и работы последнего десятилетия в этом направлении, УМН, **59**, № 2(356) (2004), 9—36.
14. *K. Gödel*, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, Ergebnisse Math. Kolloquium Wien, **4** (1933), 39—40.
15. *K. Gödel*, Vortrag bei Zilsel, in: S. Feferman (ed.), Kurt Gödel Collected Works, v. III: Unpublished essays and lectures, New York, NY, Oxford Univ. Press, 1995, 86—113.
16. *S. C. Kleene*, On the interpretation of intuitionistic number theory, J. Symb. Log., **10**, No. 4 (1945), 109—124.
17. *Ю. Т. Медведев*, Финитные задачи, Докл. АН СССР, **142**, № 5 (1962), 1015—1018.
18. *A. S. Troelstra, D. Van Dalen*, Constructivism in mathematics (Stud. Logic Found. Math., **121, 123**), Amsterdam etc., North-Holland, 1988.
19. *J. Yu*, Self-referentiality of Brouwer-Heyting-Kolmogorov semantics, Ann. Pure Appl. Logic, **165**, No. 1 (2014), 371—388.
20. *S. Artemov, T. Protopopescu*, Intuitionistic epistemic logic, Rev. Symb. Log., **9**, No. 2 (2016), 266—298.
21. *D. M. Gabbay*, An overview of fibred semantics and the combination of logics, in: F. Baader (ed.) et al., Frontiers of combining systems. First int. workshop (Munich, Germany, March 26-29, 1996), (Appl. Log. Ser., **3**), Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1996, 1—55.
22. *L. Fariñas del Cerro, A. Herzig*, Combining classical and intuitionistic logic. Or: Intuitionistic implication as a conditional., in: F. Baader (ed.) et al., Frontiers of combining systems. First int. workshop (Munich, Germany, March 26-29, 1996), (Appl. Log. Ser., **3**), Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1996, 93—102.
23. *C. Caleiro, J. Ramos*, Combining classical and intuitionistic implications, in: Konev, Boris (ed.) et al., Frontiers of combining systems. 6th international symposium, FroCoS 2007 (Liverpool, UK, September 10-12, 2007), Proc. (Lecture Notes Comput. Sci., **4720**; Lecture Notes Artif. Intell.), Berlin, Springer, 2007, 118—132.

24. *C. Caleiro, J. Ramos*, From fibring to cryptofibring. A solution to the collapsing problem, Log. Univers., **1**, No. 1 (2007), 71—92.

25. *S. Lewitzka*, A modal logic amalgam of classical and intuitionistic propositional logic, J. Log. Comput., **27**, No. 1 (2017), 201—212.

26. *S. Niki, H. Omori*, Another combination of classical and intuitionistic conditionals, Electron. Proc. Theor. Comput. Sci., **358** (2022), 174—188.

27. *А. А. Оноприенко*, Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний, Матем. сб., **213**, № 7 (2022), 97—120.

28. *R. I. Goldblatt*, Grothendieck topology as geometric modality, Z. Math. Logik Grundlagen Math., **27** (1981), 495—529.

29. *R. I. Goldblatt*, Cover semantics for quantified lax logic, J. Log. Comput., **21**, No. 6 (2011), 1035—1063.

30. *А. Г. Драгалин*, Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., Наука, 1979.

31. *M. Fairtlough, M. Mendler*, Propositional lax logic, Inf. Comput., **137**, No. 1 (1997), 1—33.

32. *M. Fairtlough, M. Walton*, Quantified lax logic, Tech. Report CS-97-11, Dep. Comput. Sci., Univ. Sheffield, July 1997.

33. *P. Aczel*, The Russell-Prawitz modality, Math. Struct. Comput. Sci., **11**, No. 4 (2001), 541—554.

34. *S. Artemov, T. Protopopescu*, Intuitionistic epistemic logic, `arXiv:1406.1582v2[math.LO]`

35. *А. А. Оноприенко*, Семантика типа Крипке для пропозициональной логки задач и высказываний, Матем. сб., **211**, № 5 (2020), 98—125.

36. *А. А. Оноприенко*, Топологические модели пропозициональной логики задач и высказываний, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2022, № 5, 25—30.

37. *D. M. Gabbay, D. Skvortsov, V. Shehtman*, Quantification in nonclassical logic. Vol. I (Stud. Logic Found. Math., **153**), Amsterdam, Elsevier, 2009.

38. *J. van Benthem*, Modal logic and classical logic (Indices. Monogr. Philos. Logic Formal Linguist., **III**), Napoli, Bibliopolis, 1985.

39. *М. Н. Рыбаков, А. В. Чагров*, Стандартные переводы неклассических формул и относительная разрешимость логик, Труды научно-исследователь-

ского семинара Логического центра Института философии РАН, XIV, М., Изд-во Института философии РАН, 2000, 81–98.

40. *Н. К. Верещагин, А. Шень*, Лекции по математической логике и теории алгоритмов, Ч. 2. Языки и исчисления, 4-е изд., испр., М., МЦНМО, 2012.

41. *В. Е. Плиско, В. Х. Хаханян*, Интуиционистская логика, М., Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009.

42. *M. Kracht*, Modal consequence relation, in: P. Blackburn (ed.), Handbook of Modal Logic (Stud. Log. Pract. Reason., **3**), Amsterdam, Elsevier, 2007.

43. *С. П. Одинцов, С. О. Сперанский, С. А. Дробышевич*, Введение в неклассические логики, учеб. пособие, Новосибирск, РИЦ НГУ, 2014.

Поступило 15 мая 2022 г.

Окончательный вариант 13 октября 2023 г.

Адрес автора:

ОНОПРИЕНКО Анастасия Александровна, Ин-т проблем передачи информ. им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва, РОССИЯ.

e-mail: ansidiana@yandex.ru