А. А. Пекарский, Рациональные приближения функций с производными из пространства В. И. Смирнова, *Алгебра и анализ*, 2001, том 13, выпуск 2, 165–190

Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 2

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА В. И. СМИРНОВА

© А. А. Пекарский

В комплексной плоскости рассмотрим односвязную ограниченную область G со спрямляемой границей Жордана ∂G. Пусть $E_p = E_p(G)$, $0 < p \leqslant \infty$, есть пространство В. И. Смирнова функций f, аналитических в G и наделенных стандартной квазинормой $\|f\|_{E_p} = \|f\|_{L_p(\partial G)}$. Через $R_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение f в E_p посредством рациональных функций степени не выше $n = 0, 1, 2, \ldots$. При $p = \infty$ дополнительно предполагается, что f непрерывна на $\overline{G} = G \cup \partial G$, и тогда $R_n(f)_\infty$ — наилучшее равномерное рациональное приближение функции f.

В случае $G = \{z : |z| < 1\}$, т.е. когда E_p суть пространство Харди, нами ранее получен следующий результат. *Если $s \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant \infty$, $1/\sigma = s + 1/p$, f аналитична в G и $f^{(s)} \in E_\sigma$, то*

$$R_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s}\|f^{(s)}\|_{E_\sigma}, \quad n = s, s+1, s+2, \ldots,$$

где $c > 0$ и не зависит от f и n.

Здесь нами получено обобщение этого результата на случай приближений f в пространстве В. И. Смирнова $E_p(G)$ при следующих ограничениях на ∂G: 1) если $0 < p < \infty$, то ∂G — кривая М. А. Лаврентьева; 2) если $p = \infty$, то ∂G — кривая С. Я. Альпера или Радона.

§1. Введение

1.1. В работах Е. П. Долженко [7], автора [19–21], автора и Г. Шталя [24] получены прямые и обратные теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Харди H_p в круге для функций f с производными $f^{(s)}$ из пространства H_σ, где $p \in (0, +\infty]$, $s \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in (0, 1]$ связаны условием $1/\sigma = s + 1/p$. Естественным обобщением этих результатов является случай рациональной аппроксимации функций в пространстве В. И. Смирнова $E_p(G)$, где G — односвязная ограниченная область со спрямляемой границей ∂G. Обратные теоремы в указанном направлении получены в работах Е. П. Долженко [8],

Ключевые слова: пространство Харди (Hardy spaces), простанство Смирнова (Smirnov spaces), прямые теоремы рациональной аппроксимации (direct theorems of rational approximations).

В. И. Данченко и Е. П. Долженко [6] и автора [18, 22]. В настоящей работе получены прямые теоремы рациональной аппроксимации в пространстве $E_p(G)$. В этих теоремах на границу ∂G накладываются более жесткие ограничения, чем в уже известных обратных теоремах. Показано также, что эти ограничения естественны и не могут быть существенно ослаблены.

1.2. Введем необходимые обозначения. Пусть K — компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $C(K)$ обозначим банахово пространство комплексных функций f, непрерывных на K, наделенных максимум-нормой: $\|f\|_{C(K)} := \max_{z\in K} |f(z)|$. $C_A := C_A(K)$ — подпространство в $C(K)$, состоящее из функций, аналитичных во внутренних точках компакта K.

Пусть S — спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая) и $0 < p \leqslant \infty$. Через $L_p := L_p(S)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций на S, т.е. $f \in L_p$, если f измерима на S и конечна квазинорма (норма при $1 \leqslant p \leqslant \infty$)

$$\|f\|_{L_p} := \|f\|_{L_p(S)} := \left(\int_S |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f\|_{L_\infty} := \|f\|_{L_\infty(S)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in S} |f(\zeta)|, \quad p = \infty.$$

Согласно определению [14, 28], функция f, аналитическая в круге $D := \{z : |z| < 1\}$, принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \leqslant \infty$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{r\in(0,1)} \|f\|_{L_p(S_r)},$$

где S_r — окружность $|z| = r$. Как известно, функции $f \in H_p$ для почти всех $\zeta \in \partial D$ имеют некасательные предельные значения, которые мы будем обозначать через $f(\zeta)$. При этом оказывается, что $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\partial D)}$. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, +\infty]$. Через H_p^s обозначим множество функций f, аналитических в D, для которых $f^{(s)} \in H_p$. Нами в [19, 20] пространство H_p^s названо пространством *Харди–Соболева*. Это название объясняется следующими соображениями. Во-первых, H_p^s определено на основе пространства Харди H_p и, во-вторых, класс функций $\operatorname{Re} H_p^s$ на ∂D при $1 < p < \infty$ совпадает с хорошо изученным классом Соболева W_p^s.

Имеют место следующие вложения:

$$H_1^1 \subset C_A, \tag{1.1}$$

$$H_\sigma^s \subset H_p, \quad 0 < p < \infty, \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad 1/\sigma = s + 1/p. \tag{1.2}$$

Вложение (1.1) принадлежит Ф. Риссу. При этом функции из H_1^1 абсолютно непрерывны на ∂D. Вложение (1.2) получено Харди и Литтлвудом. Подробности, связанные с (1.1) и (1.2), см. в [1, 14, 15, 17, 28].

Пусть $\mathcal{R}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — множество рациональных функций степени не выше n. Через $R_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in H_p$, $0 < p \leqslant \infty$, посредством множества $\mathcal{R}_n \cap H_p$, т.е.

$$R_n(f)_p := \inf\{\|f - r\|_{H_p} : r \in \mathcal{R}_n \cap H_p\}.$$

При $p = \infty$ здесь естественно подразумевать, что $f \in C_A$ и приближения рассматриваются относительно нормы пространства C_A.

Из вложений (1.1) и (1.2) следует, что $H^s_{1/s} \subset C_A$ при $s \geqslant 1$. Поэтому естественна постановка задачи об аппроксимации класса $H^s_{1/s}$ в C_A, а также (см. (1.2)) H^s_σ в H_p. Известны следующие прямая и обратная теоремы теории аппроксимации.

Если $f \in H^s_\sigma$ $(\sigma = 1/s$ *при* $p = \infty)$, *то*

$$R_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s}\|f^{(s)}\|_{H_\sigma} \quad \text{при } n = s, s+1, s+2, \ldots ; \tag{1.3}$$

$$R_n(f)_p = o\left(\frac{1}{n^s}\right) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.4}$$

Здесь постоянная c положительна и зависит лишь от p и s. Обратно, *если* $0 < p \leqslant \infty$, $1/p \notin \mathbb{N}$ *и* $f \in H_p$ *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^s R_n(f)_p)^\sigma < \infty \implies f \in H^s_\sigma. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.3) и (1.4) принадлежат автору [20, 21]. Импликация (1.5) для $p = \infty$ и $s = 1$ получена Е. П. Долженко [7], в оставшихся случаях для $1 < p \leqslant \infty$ — автором [19]; для $p < 1$ — автором и Г. Шталем [24].

1.3. Введем (см., например, [16, 28]) пространство *В. И. Смирнова* $E_p(G)$. Пусть G — ограниченная односвязная область со спрямляемой границей ∂G. Через $z = \varphi(w)$ обозначим какую-либо функцию, конформно отображающую круг D на область G. Как известно, φ продолжается до гомеоморфного отображения замкнутого круга $\overline{D}$ на $\overline{G}$ и $\varphi \in H^1_1$. Согласно В. И. Смирнову, функция f, аналитическая в G, принадлежит пространству $E_p := E_p(G)$, если функция $g(w) := f[\varphi(w)]\sqrt[p]{\varphi'(w)}$ принадлежит H_p. М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев дали эквивалентное определение класса E_p, которое не использует конформные отображения. Именно $f \in E_p$, если

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_{L_p(\partial G_n)} < \infty$$

хотя бы для одной последовательности $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ односвязных областей, удовлетворяющих условиям: a) границы ∂G_n спрямляемы; b) $G_n \subset G_{n+1}$ и $\overline{G}_n \subset G$ при всех n; c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$.

Пространство E_p обладает некоторыми свойствами, аналогичными свойствам пространства H_p. В частности, $f \in E_p$ имеет почти для всех $\zeta \in \partial G$ некасательные предельные значения, которые мы будем обозначать через $f(\zeta)$. При этом имеет место равенство $\|f\|_{L_p(\partial G)} = \|g\|_{H_p}$. В связи с этим под квазинормой $\|f\|_{E_p}$ мы подразумеваем $\|f\|_{L_p(\partial G)}$ или $\|g\|_{H_p} = \|g\|_{L_p(\partial D)}$.

Пусть $p \in (0, +\infty]$ и $s \in \mathbb{N}$. Говорим, что функция f, аналитическая в G, принадлежит пространству *Смирнова-Соболева* $E_p^s := E_p^s(G)$, если $f^{(s)} \in E_p$. Решение поставленной выше задачи о рациональной аппроксимации класса E_σ^s в E_p существенно зависит от гладкости границы ∂G.

1.4. Введем необходимые классы кривых. Пусть S спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая). Назовем S кривой *Альфорса* [4, 11], если существует такое $\kappa > 0$, что для всех $\zeta \in S$ и $r > 0$ выполняется неравенство $|S \cap \{z : |z - \zeta| \leqslant r\}| \leqslant \kappa r$. Здесь и ниже через $|\gamma|$ для множества $\gamma \subset S$ мы обозначаем его линейную меру Лебега.

Простую кривую Жордана S назовем кривой *Лаврентьева*, если существует такое $\kappa > 0$, что для любых ζ_1 и ζ_2 из S для дуги $\gamma(\zeta_1, \zeta_2) \subset S$, концами которой являются точки ζ_1 и ζ_2, выполняется соотношение $|\gamma(\zeta_1, \zeta_2)| \leqslant \kappa|\zeta_1 - \zeta_2|$. Если же S замкнута, то ее назовем кривой Лаврентьева, если последнее неравенство выполняется хотя бы для одной из двух дуг, концами которых являются точки ζ_1 и ζ_2.

Предположим, что кривая S задана посредством естественной параметризации: $\zeta = \zeta(s)$, $0 \leqslant s \leqslant |S|$. Как известно, почти для всех s в точке $\zeta(s)$ кривая S имеет касательную. Через $\theta(s)$ обозначим угол наклона касательной к вещественной оси. Кривую S назовем кривой *Радона* [13, 31], если $\theta(s)$ можно продолжить на отрезок $[0, |S|]$ до функции ограниченной вариации с возможными скачками, модуль которых меньше π.

Предположим, что S является гладкой и, следовательно, $\theta(s)$ непрерывна на $[0, |S|]$. Если S замкнута, то $\theta(s)$ рассматриваем как непрерывную $|S|$-периодическую функцию. Кривую S будем называть кривой *Альпера* [13, 31], если $\omega(\theta, t)$ — модуль непрерывности функции θ — удовлетворяет условию

$$\int_0^{|S|} \omega(\theta, t) \ln \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{t} < \infty.$$

Односвязную ограниченную область G называем областью Альфорса, Радона, Альпера и т.д., если таковой является ее граница ∂G.

1.5. Вложение (1.1) сохраняется для пространства Смирнова-Соболева E_1^1 без каких-либо ограничений на границу области. Именно [28] для любой односвязной ограниченной области G со спрямляемой границей справедливо вложение

$$E_1^1(G) \subset C_A(\overline{G}). \tag{1.6}$$

Кроме того, функции из $E_1^1(G)$ абсолютно непрерывны на ∂G.

Вложение (1.2) в отличие от (1.1) распространяется на пространства Смирнова–Соболева лишь при дополнительных ограничениях на область G. Это отражено в следующих теоремах 1.1 и 1.2, доказанных в §3.

Теорема 1.1. *Пусть G — область Лаврентьева, $s \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$ и $1/\sigma = s + 1/p$. Тогда $E_\sigma^s(G) \subset E_p(G)$.*

Из теоремы 1.1. и вложения (1.6) немедленно получаем

Следствие 1.1. *Если G — область Лаврентьева и $s \geqslant 2$, то $E_{1/s}^s(G) \subset C_A(\overline{G})$. При этом функции из $E_{1/s}^s(G)$ абсолютно непрерывны на ∂G.*

Пусть функция $\lambda(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет *условию Липшица*, т.е. существует такая постоянная $\kappa > 0$, что для всех x' и x'' из $[0, 1]$ выполняется неравенство $|\lambda(x') - \lambda(x'')| \leqslant \kappa|x' - x''|$. Предположим также, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda(x) > 0$ при $x > 0$ и $\lambda(x) = o(x)$ при $x \to 0$. Через Δ обозначим область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченную прямыми $y = 0$, $x = 1$ и кривой $y = \lambda(x)$. Очевидно, Δ есть область Альфорса, которая не является областью Лаврентьева.

Теорема 1.2. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $p \in (0, +\infty]$ и $1/\sigma = s + 1/p$, причем при $p = +\infty$ считаем, что $s \geqslant 2$. Тогда пространство $E_\sigma^s(\Delta)$ содержит функции, которые не принадлежат $E_p(\Delta)$.*

1.6. Перейдем к обсуждению аналогов соотношений (1.3), (1.4) и (1.5) для пространства Смирнова E_p. Пусть $f \in E_p$ и $0 < p \leqslant \infty$. Через $R_n(f)_p$ обозначим наилучшие приближения f в E_p посредством множества $\mathcal{R}_n \cap E_p$. Обратная теорема для E_p-аппроксимации известна в следующей форме. *Пусть G — область Альфорса, $s \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant \infty$, $1/\sigma = s + 1/p$ и $f \in E_p(G)$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(n^s R_n(f)_p)^\sigma < \infty \implies f \in E_\sigma^s(G). \tag{1.7}$$

Впервые эта теорема в одном частном случае ($p = \infty$, $s = 1$ и G — область Альпера) была получена Е. П. Долженко [8]. Автор [18] доказал импликацию (1.7) при $p = \infty$ и $s = 1$ для областей Рисса. Спустя некоторое время Давид (см. [4] или [11]) получил свой замечательный результат, согласно которому множества кривых Рисса и Альфорса совпадают. Тем самым было доказано соотношение (1.7) при $p = \infty$ и $s = 1$ для областей Альфорса. В. И. Данченко и Е. П. Долженко [6] получили последний результат без использования весьма сложного результата Давида. Импликация (1.7) в общем виде доказана автором [22]. Другое доказательство и некоторые обобщения получены В. И. Данченко [5]. Класс областей Альфорса является максимальным классом, для которых справедлива импликация (1.7). Для $p = \infty$ и $s = 1$ это доказано В. И. Данченко и Е. П. Долженко в [6], где использовано утверждение 1 из [4]; для других значений p и s доказательство аналогично.

Импликация (1.7) устанавливается с помощью некоторого неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций. Автором [23] и Е. М. Дынькиным [12] даны другие доказательства этого неравенства в случае круга. Рассуждения из [23] и [12] можно обобщить на область Альфорса.

Наилучшие рациональные приближения в комплексной области в указанном направлении изучались еще В. В. Пеллером [26, 27]. Им использовались аналитические классы функций О. В. Бесова.

В следующих теоремах 1.3 и 1.4, доказанных в §4, 5, дается обобщение соотношений (1.3) и (1.4) на пространства $E_p(G)$. Ограничения на область G в этих теоремах не могут быть существенно ослаблены. На это указывает теорема 1.2.

Теорема 1.3. *Пусть G является либо областью Альпера, либо областью Радона, и $f \in E^s_{1/s}(G)$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$R_n(f)_\infty \leqslant \frac{c}{n^s}\|f^{(s)}\|_{E_{1/s}} \quad \text{при } n = s, s+1, s+2, \dots; \tag{1.8}$$

$$R_n(f)_\infty = o\left(\frac{1}{n^s}\right) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.9}$$

Здесь $c > 0$ не зависит от f и n.

Теорема 1.4. *Пусть G — область Лаврентьева и $f \in E^s_\sigma(G)$, где $s \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$ и $1/\sigma = s + 1/p$. Тогда*

$$R_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s}\|f^{(s)}\|_{E_\sigma} \quad \text{при } n = s, s+1, s+2, \dots; \tag{1.10}$$

$$R_n(f)_p = o\left(\frac{1}{n^s}\right) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.11}$$

Здесь $c > 0$ не зависит от f и n.

§2. Некоторые вспомогательные утверждения

2.1. Разбиения типа Уитни. Пусть K и Γ — некоторые множества в $\mathbb{C}$. Через $\rho(K, \Gamma)$ обозначим расстояние между K и Γ, т.е. $\rho(K,\Gamma) = \inf\{|z-\zeta| : z \in K, \zeta \in \Gamma\}$. В частности, $\rho(z, \Gamma)$ — расстояние точки z до множества Γ. Через $d(K)$ и $d_0(K)$ обозначим соответственно диаметр наименьшего замкнутого круга, содержащего K, и диаметр наибольшего открытого круга, содержащегося в K.

Через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначаем либо абсолютные положительные постоянные, либо положительные величины, зависящие от некоторых параметров.

Значение параметров будет ясно из контекста или будет указываться в скобках или специально оговариваться.

Плоскую меру Лебега множества $K \subset \mathbb{C}$ обозначим через $m_2(K)$.

Пусть G — односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$. Семейство $\mathcal{L} = \{Q\}$ замкнутых односвязных областей Q с кусочно-гладкой границей называем *разбиением типа Уитни* области G, если выполнены следующие условия:

a) любые две области семейства $\mathcal{L}$ могут пересекаться разве лишь по границам;

b) $G = \bigcup Q$;

c) существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что для любого Q выполняются соотношения

$$c_1\rho(Q, \partial G) \leqslant d_0(Q) \leqslant d(Q) \leqslant c_2\rho(Q, \partial G). \tag{2.1}$$

Примером такого разбиения являются *квадраты Уитни* [30, гл. VI]; для них $c_1 = \sqrt{2}/8$ и $c_2 = 1$.

Разбиения типа Уитни квазиинвариантны относительно конформных отображений области. В частности, пусть $z = \varphi(w)$ — функция, осуществляющая конформное отображение круга D на область G и Q' — прообраз области Q при этом отображении. Тогда семейство $\mathcal{L}' := \{Q'\}$ является разбиением типа Уитни круга D. Свойства a) и b) для $\mathcal{L}'$ очевидны. Доказательство свойства c) несложно, хотя и кропотливо, и основано на теореме Кёбе о покрытии и теореме искажения для однолистных в круге функций (см., например, [29]). Приведем аналог соотношения (2.1) для семейства $\mathcal{L}' = \{Q'\}$:

$$c_3\rho(Q', \partial D) \leqslant d_0(Q') \leqslant d(Q') \leqslant c_4\rho(Q', \partial D). \tag{2.2}$$

Здесь постоянные c_3 и c_4 могут быть выражены через постоянные c_1 и c_2 из (2.1).

Из теоремы Кёбе выводится следующее свойство функции φ' (см. также [3, 9]):

$$\frac{1}{4}\,\frac{\rho(\varphi(w), \partial G)}{\rho(w, \partial D)} \leqslant |\varphi'(w)| \leqslant 4\frac{\rho(\varphi(w), \partial G)}{\rho(w, \partial D)}, \quad w \in D. \tag{2.3}$$

2.2. Распределения значений функций класса E_p. Предположим сейчас, что граница области G спрямляема, $f \in E_p(G)$ и $0 < p < \infty$. Положим

$$\lambda_p(f, Q) := \rho(Q, \partial G)^{1/p} \|f\|_{C(Q)}.$$

Лемма 2.1. *Единственной предельной точкой множества $\{\lambda_p(f, Q)\}$ является точка 0 и, если $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нумерация семейства $\mathcal{L}$, соответствующая невозрастанию последовательности $\{\lambda_p(f, Q_k)\}_{k=1}^{\infty}$, то*

$$\lambda_p(f, Q_k) \leqslant \frac{c}{k^{1/p}} \|f\|_{E_p},$$

где c зависит лишь от p и c_1, c_2 из (2.1).

Лемму 2.1 мы получим из аналогичной леммы 2.2 для круга. Последняя в случае специального разбиения типа Уитни получена нами в [23]. Итак, пусть $g \in H_p$, $0 < p < \infty$, и

$$\lambda_p(g, Q') := \rho(Q', \partial D)^{1/p} \|g\|_{C(Q')}.$$

Лемма 2.2. *Единственной предельной точкой множества $\{\lambda_p(g, Q')\}$ является точка 0 и, если $\{Q'_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нумерация семейства $\mathcal{L}'$, соответствующая невозрастанию последовательности $\{\lambda_p(g, Q'_k)\}_{k=1}^{\infty}$, то*

$$\lambda_p(g, Q'_k) \leqslant \frac{c}{k^{1/p}} \|g\|_{H_p},$$

где c зависит лишь от p и c_1, c_2 из (2.1).

Доказательство. Сначала приведем необходимые вспомогательные утверждения. Пусть

$$\nu(A) := \int_A \frac{dm_2(w)}{(1 - |w|^2)^2}, \quad A \subset D,$$

— гиперболическая площадь в круге D; $A(w_0, r) := \{w : |w - w_0| \leqslant r\}$ ($w_0 \in D$ и $0 < r < 1 - |w_0|$) — круг радиуса r с центром в точке w_0. Тогда

$$\nu(A(w_0, r)) = \frac{\pi r^2}{(1 - |w_0|^2)(1 - (|w_0| + r)^2)}. \tag{2.4}$$

Для получения (2.4) достаточно заметить, что гиперболическая площадь инвариантна относительно конформных отображений круга D на себя и что $\nu(A(0, r)) = \pi r^2/(1 - r^2)$.

Пусть $Q' \in \mathcal{L}'$ и $A(w_0, r)$ — круг максимального диаметра, вписанный в Q'. Из (2.2) получаем $1 - |w_0| = \rho(w_0, \partial D) \leqslant d(Q') + \rho(Q', \partial D) \leqslant (c_4 + 1)\rho(Q', \partial D) \leqslant \frac{2r}{c_3}(c_4 + 1)$. С учетом (2.4) отсюда находим

$$\nu(Q') \geqslant \nu(A(w_0, r)) \geqslant \frac{\pi r^2}{4(1 - |w_0|)^2} = \frac{\pi c_3^2}{16(c_4 + 1)^2}.$$

Таким образом,

$$\nu(Q') \geqslant c_5. \tag{2.5}$$

Для $\zeta \in \partial D$ и $a > 1$ введем сектор Лузина $\Gamma_a(\zeta) := \{w \in D : |\zeta - w| < a(1 - |w|)\}$ и некасательную максимальную функцию

$$(M_a g)(\zeta) := \sup\{|g(w)| : w \in \Gamma_a(\zeta)\}.$$

Как известно [14], справедливо неравенство

$$\|M_a g\|_{L_p(\partial D)} \leqslant c_6 \|g\|_{H_p}, \quad c_6 = c_6(a, p). \tag{2.6}$$

В дальнейшем считаем, что $a = c_4 + 1$, где c_4 — постоянная из (2.2). Для этого значения a любая область Q' удовлетворяет условию

$$w = re^{it} \in Q' \implies Q' \subset \overline{\Gamma}_a(e^{it}). \tag{2.7}$$

Действительно, условие (2.7) будет заведомо выполнено, если $\rho(Q', \partial D) + d(Q') \leqslant a\rho(Q', \partial D)$. Ввиду правого неравенства (2.2) последнее неравенство имеет место.

Через N_ε для $\varepsilon > 0$ обозначим количество областей Q', для которых $\lambda_p(g, Q') \geqslant \varepsilon$. Если $w = re^{it} \in Q'$, то, согласно (2.2) и (2.7),

$$\lambda_p(g, Q') \leqslant (1 + c_4)^{1/p}(1 - r)^{1/p}(M_a g)(e^{it}).$$

Следовательно, N_ε не превышает количества областей Q' таких, что в каждой точке $w = re^{it} \in Q'$ выполняется неравенство

$$(1 - r)^{1/p}(M_a g)(e^{it}) \geqslant c_7 \cdot \varepsilon, \quad c_7 := (1 + c_4)^{-1/p}.$$

С учетом (2.5) находим

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &\leqslant \frac{1}{c_5}\nu(\{w : w = re^{it}, (1 - r)^{1/p}(M_a g)(e^{it}) \geqslant c_7 \cdot \varepsilon\}) \\ &= \frac{1}{c_5}\nu(\{re^{it} : 0 \leqslant t < 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant \max\{0, 1 - (c_7 \cdot \varepsilon)^p \cdot (M_a g)^{-p}(e^{it})\}\}) \\ &\leqslant c_8 \varepsilon^{-p} \int_0^{2\pi} (M_a g)^p(e^{it})\,dt. \end{aligned}$$

Остается заметить, что, согласно неравенству (2.6), $N_\varepsilon \leqslant c_9 \varepsilon^{-p}\|g\|^p_{H_p}$. Этим лемма 2.2 доказана. •

Доказательство леммы 2.1. Положим $g(w) = f(\varphi(w))\sqrt{[p]}{\varphi'(w)}$. Тогда $g \in H_p$ и $\|g\|_{H_p} = \|f\|_{E_p}$. Пусть точка $\widetilde{z} \in Q$ такова, что $\|f\|_{C(Q)} = |f(\widetilde{z})|$, а $\widetilde{w}$ — прообраз точки $\widetilde{z}$ при отображении $z = \varphi(w)$. Используя (2.1), (2.2) и (2.3), находим, что

$$\begin{aligned} \lambda_p(f, Q) &= \rho(Q, \partial G)^{1/p}|f(\widetilde{z})| = \rho(Q, \partial G)^{1/p}|\varphi'(\widetilde{w})|^{-1/p}|g(\widetilde{w})| \\ &\leqslant c_{10}\rho(Q', \partial D)^{1/p}|g(\widetilde{w})| \\ &\leqslant c_{10}\lambda_p(g, Q'). \end{aligned}$$

Остается воспользоваться леммой 2.2. •

Следствие 2.1. *Пусть* $f \in E_p(G)$, $0 < p < \infty$ *и* $q > p$. *Тогда*

$$\int_G |f(z)|^q \rho(z, \partial G)^{q/p-2} dm_2(z) \leqslant c(p,q) \|f\|^q_{E_p}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — нумерация областей Q, соответствующая невозрастанию последовательности $\{\lambda_p(f, Q_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Согласно лемме 2.1, находим, что вклад от Q_k в интеграл из (2.8) не превышает $ck^{-q/p}\|f\|^q_{E_p}$. •

Следствие 2.1 для $G = D$, $0 < p < 1$ и $q = 1$ известно [14, гл. II, упр. 5]. Используя это вместе с (2.3), можно получить еще одно доказательство оценки (2.8) для $0 < p < 1$ и $q = 1$. Именно этот частный случай нам понадобится. Лемма 2.1 будет играть существенную роль в дальнейшем.

2.3. Квазиконформное отражение. Из теории казиконформных отображений нам понадобится понятие квазиокружности и теорема о квазиконформном отражении; все эти сведения имеются в [2, 3]. Пусть G — область Лаврентьева и, следовательно, ∂G есть квазиокружность. Выберем некоторое разбиение типа Уитни $\mathcal{L} = \{Q\}$ области G. Для определенности можем считать, что Q — квадраты Уитни. Через Q_0 обозначим одну из областей семейства $\mathcal{L}$, для которой $d_0(Q)$ имеет наибольшее значение. Будем считать, что центр круга диаметра $d_0(Q_0)$, вписанного в Q_0, совпадает с точкой 0. Очевидно, это условие не ограничивает общности рассматриваемой задачи.

Пусть $\zeta \mapsto \zeta^*$ — квазиконформное отражение плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ относительно ∂G. Именно $*$ есть антиквазиконформное отображение плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, являющееся инволюцией и сохраняющее точки на ∂G: $\zeta^{**} = \zeta$ при всех ζ, $\zeta^* = \zeta$ на ∂G и $0^* = \infty$. Очевидно, $G^* = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G}$ и $(\overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{G})^* = G$ (A^* — образ множества A при отображении $*$). Такое отображение неединственно, и его можно выбрать удовлетворяющим следующим условиям:

a) отображение $\zeta \mapsto \zeta^*$ непрерывно дифференцируемо в $\mathbb{C} \backslash (0 \cup \partial G)$;

b) для любой окрестности U точки 0 отображение $\zeta \mapsto \zeta^*$ квазиизометрично в области $\overline{\mathbb{C}} \backslash (U \cup U^*)$;

c) при всех $\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \backslash (U \cup U^* \cup \partial G)$ справедливы соотношения

$$\left| \frac{\partial \zeta^*}{\partial \zeta} \right| \leqslant c_1, \quad c_2 \leqslant \left| \frac{\partial \zeta^*}{\partial \overline{\zeta}} \right| \leqslant \frac{1}{c_2},$$

где c_1, c_2 зависят лишь от G и U.

Будем считать, что отображение $*$ выбрано именно так. Например, для круга D можем положить $\zeta^* = 1/\overline{\zeta}$.

Из указанных свойств отображения $*$ и соотношений (2.1) получаем следующие утверждения:

a) если Q пробегает семейство $\mathcal{L} \backslash Q_0$, то величины $\rho(Q, \partial G)$, $\rho(Q^*, \partial G)$, $d(Q)$, $d(Q^*)$, $d_0(Q)$, $d_0(Q^*)$ имеют одинаковый порядок малости;

b) для любого $\zeta \in \mathbb{C} \backslash (Q_0 \cup Q_0^*)$ выполняется неравенство

$$|\zeta - \zeta^*| \leqslant c_3 \min\{\rho(\zeta, \partial G), \rho(\zeta^*, \partial G)\}.$$

2.4. Интегральное представление. Определим наименьшее $r_0 > 0$ такое, чтобы образ области $|\zeta| \geqslant r_0$ при отображении $\zeta \mapsto \zeta^*$ принадлежал кругу диаметра $d_0(Q_0)$ с центром в точке 0; $\Omega := \{\zeta : |\zeta| < 2r_0\}\backslash\overline{G}$. Введем функцию η, непрерывную на $[0, 2r_0]$: $\eta(x) = 1$ при $x \in [0, r_0]$ и $\eta(x) = 2 - x/r_0$ при $x \in [r_0, 2r_0]$. В силу такого построения образ области Ω при отображении $\theta(\zeta) := \zeta^*\eta(|\zeta|)$ содержится в области G. Кроме того, $\theta(\zeta) = \zeta^*$ при $\zeta \in \Omega\backslash Q_0^*$ и $\theta(\zeta) \subset Q_0$ при $\zeta \in \Omega \cap Q_0^*$.

Доказательства теорем 1.1, 1.3 и теоремы 1.4 для $s \geqslant 2$ основаны на следующей лемме.

Лемма 2.3. *Пусть* $f \in E^s_{1/(s+1)}(G)$, $s \in \mathbb{N}$ *и* $T_{s-1}(z) := T_{s-1}(z, f) := \sum\limits_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$. *Тогда для любого* $z \in G$ *имеет место равенство*

$$f(z) = T_{s-1}(z) - \frac{1}{\pi(s-1)!} \int\limits_{\Omega} f^{(s)}(\theta(\zeta))(\zeta - \theta(\zeta))^{s-1} \cdot \frac{\partial\theta(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Доказательство. Сходимость указанного интеграла вытекает из свойств функции $\theta(\zeta)$ и следствия 2.1.

Область Лаврентьева является областью Смирнова [16, 28]. Значит, согласно теореме Смирнова–Келдыша (см., например, [16]), множество алгебраических полиномов является всюду плотным в $E_p(G)$ при $0 < p < \infty$. Поэтому из следствия 2.1 и указанных выше свойств отражения $\zeta \mapsto \zeta^*$ получаем, что нам достаточно убедиться в справедливости равенства для полиномов. В частности, можем считать функцию f аналитической на $\overline{G}$.

Следуя Е. М. Дынькину [10, п. 2.2], осуществим псевдоаналитическое продолжение функции f из $\overline{G}$ в $\overline{\Omega}$. Именно, введем функцию $\mathbf{f}(\zeta) := f(\zeta)$ при $\zeta \in \overline{G}$ и $\mathbf{f}(\zeta) := \sum\limits_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(\theta(\zeta))}{k!}(\zeta - \theta(\zeta))^k$ при $\zeta \in \overline{\Omega}\backslash\partial G$. Зафиксируем $z \in G$ и положим $F_z(\zeta) := \mathbf{f}(\zeta)/(\zeta - z)$. Поскольку функция f аналитична на $\overline{G}$, то из свойств отображения $*$ получаем, что функция $F_z(\zeta)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}$, а частная производная $\partial F_z(\zeta)/\partial\overline{\zeta}$ ограничена в $\Omega\backslash\{\zeta : |\zeta| = r_0\}$. Значит, мы можем применить формулу Грина в комплексной форме:

$$\int\limits_{\partial\Omega} F_z(\zeta)d\zeta = 2i \int\limits_{\Omega} \frac{\partial F_z(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} dm_2(\zeta).$$

Сейчас заметим, что

$$\frac{\partial F_z(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} = \frac{f^{(s)}(\theta(\zeta))}{(s-1)!} \cdot \frac{\partial\theta(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{(\zeta - \theta(\zeta))^{s-1}}{\zeta - z};$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} F_z(\zeta)d\zeta = -\int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{|\zeta|=2r_0} \frac{\mathbf{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -2\pi i f(z) + 2\pi i T_{s-1}(z).$$

Здесь для вычисления интегралов мы воспользовались интегральной формулой Коши и равенством $\mathbf{f}(\zeta) = T_{s-1}(\zeta)$ при $|\zeta| = 2r_0$. •

§3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $m = [1/p]$ — целая часть числа $1/p$, $0 < p < \infty$, и $f \in E^s_\sigma(G)$. Тогда при всех $z \in G$ имеет место равенство

$$f(z) = T_{s-1}(z) - \frac{m!}{\pi(s+m-1)!} \int\limits_{\Omega} f^{(s)}(\theta(\zeta))(\zeta - \theta(\zeta))^{s+m-1} \frac{\partial\theta(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \frac{dm_2(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}. \quad (3.1)$$

Для $m = 0$, т.е. для $1 < p < \infty$, справедливость данной формулы утверждается леммой 2.3. В случае, когда $m \geqslant 1$, для вывода равенства (3.1) необходимо воспользоваться леммой 2.3 для m-го интеграла функции f. Затем полученную формулу нужно m раз продифференцировать.

Через $I_Q(z)$ обозначим вклад в интеграл из (3.1) от области $Q^* \cap \Omega$ (напомним, что $Q^* \cap \Omega = Q^*$ при $Q \neq Q_0$). Очевидно, функция $I_Q(z)$ аналитична на $\overline{G}$ и, следовательно, $I_Q(z) \in E_p(G)$. Поскольку

$$f(z) - T_{s-1}(z) = -\frac{m!}{\pi(s+m-1)!} \sum_{Q \in \mathcal{L}} I_Q(z), \quad z \in G, \quad (3.2)$$

нам достаточно показать, что данный ряд сходится в $E_p(G)$.

Через ζ_Q обозначим точку из области Q, для которой $\|f^{(s)}\|_{C(Q)} = |f^{(s)}(\zeta_Q)|$. Из свойств семейства $\mathcal{L}$ и отражения $*$ получаем

$$|I_Q(z)| \leqslant c_2 |f^{(s)}(\zeta_Q)| \rho(\zeta_Q, \partial G)^{s+m+1} \frac{1}{|\zeta_Q - z|^{m+1}}, \quad z \in \partial G. \quad (3.3)$$

Кроме того, следует учесть, что точка ζ_{Q_0} лежит на ∂Q_0. Это вытекает из принципа максимума модуля аналитической функции.

Согласно условию, ∂G — кривая Лаврентьева, и, значит, она является кривой Альфорса. Поэтому (см., например, [4, утверждение 1]) для $l > 1$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\partial G} \frac{|dz|}{|\zeta - z|^l} \leqslant \frac{c_3(l, \partial G)}{\rho(\zeta, \partial G)^{l-1}} \quad \text{при } \zeta \in \mathbb{C} \setminus \partial G. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) находим

$$\int\limits_{\partial G} |I_Q(z)|^p |dz| \leqslant c_4 |f^{(s)}(\zeta_Q)|^p \rho(\zeta_Q, \partial G)^{ps+1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial G} |I_Q(z)|^p |dz| \leqslant c_5 \lambda_\sigma (f^{(s)}, Q)^p. \quad (3.5)$$

В случае, когда $1 < p < \infty$, из (3.5), неравенства треугольника и леммы 2.1 получаем нужный результат:

$$\|f - T_{s-1}\|_{E_p} \leqslant c_5^{1/p} \sum_{Q\in\mathcal{L}} \lambda_\sigma(f^{(s)}, Q) \leqslant c_6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s+1/p}} \|f^{(s)}\|_{E_\sigma} = c_7 \|f^{(s)}\|_{E_\sigma}.$$

Если же $0 < p \leqslant 1$, то проводится аналогичная выкладка с заменой неравенства треугольника на p-неравенство треугольника:

$$\|f - T_{s-1}\|_{E_p}^p \leqslant c_6 \sum_{Q\in\mathcal{L}} \lambda_\sigma(f^{(s)}, Q)^p \leqslant c_7 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{ps+1}} \|f^{(s)}\|_{E_\sigma}^p = c_8 \|f^{(s)}\|_{E_\sigma}^p. \quad \bullet$$

Замечания. a) Фактически нами доказано следующее утверждение. Если $0 < p \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{N}$, причем $s \geqslant 2$ при $p = \infty$, и $f \in E_\sigma^s(G)$, то $f \in E_p(G)$ при $p < \infty$ и $f \in C_A(\overline{G})$ при $p = \infty$. Кроме того, имеет место неравенство

$$\|f - T_{s-1}\|_{E_p} \leqslant c \|f^{(s)}\|_{E_\sigma}. \tag{3.6}$$

Анализ приведенного доказательства показывает также, что постоянную c в (3.6) можно считать зависящей лишь от p, s и κ (κ — число из определения кривой Лаврентьева, см. п. 1.4).

b) Для области Липшица (определение см. в п. 5.1) неравенство (3.6) и теорему 1.1 можно доказать существенно проще — как в [1, с. 55] или [17, с. 583], где эта теорема получена для полуплоскости и круга.

3.2. Здесь мы дадим доказательство теоремы 1.2. Будем использовать обозначения из §1. Нам необходима следующая лемма.

Лемма 3.1. *Для каждого $t \in (0,1]$ аналитическая на $\overline{\Delta}$ функция $z \mapsto \varphi(z,t)$,*

$$\varphi(z,t) := \frac{\lambda(t)}{(z-t)^2 + 4\lambda(t)^2},$$

удовлетворяет условию

$$\int_{\partial\Delta} |\varphi(z,t)dz| \leqslant c, \quad c = c(\lambda). \tag{3.7}$$

Доказательство. Граница $\partial\Delta$ „треугольника" Δ состоит из отрезков $[0,1]$, $I := [1, 1+i\lambda(1)]$ и кривой $J := \{x + i\lambda(x) : x \in [0,1]\}$. Функция $\varphi(x,t)$ положительна при $x \in [0,1]$, и интеграл по отрезку $[0,1]$ легко вычисляется. Поэтому

$$\int_0^1 |\varphi(z,t)dz| = \int_0^1 \varphi(x,t)dx \leqslant \pi. \tag{3.8}$$

Для оценки вклада в интеграл (3.7) от отрезка I заметим, что $|\varphi(z,t)| \leqslant \kappa\rho(\Gamma, I)^{-2}$ при $z \in I$, где $\Gamma := \{x+2i\lambda(x) : x \in [0,1]\}$ и κ — число из определения функции λ. Следовательно,

$$\int_I |\varphi(z,t)dz| \leqslant \kappa\lambda(1)\rho(\Gamma, I)^{-2}.$$

Получим сейчас подходящую оценку вклада в интеграл (3.7) от дуги J. Положим $P := P(x,y) := (x-t)^2 + (\lambda(x) - 2\lambda(t))^2$ и запишем очевидные соотношения

$$\lambda(t)^2 \cdot |\varphi(x+i\lambda(x),t)|^{-2} = P\cdot((x-t)^2+(\lambda(x)+2\lambda(t))^2) \geqslant P\cdot((x-t)^2+4\lambda(t)^2). \quad (3.9)$$

Покажем, что P при всех x и t из $[0,1]$ удовлетворяет неравенству

$$P \geqslant c_1((x-t)^2 + 4\lambda(t)^2), \quad c_1 = c_1(\lambda). \quad (3.10)$$

Действительно, $|\lambda(x) - \lambda(t)| \leqslant \kappa|x-t|$, согласно условию, и, значит, $(x-t)^2 \geqslant \kappa^{-2}(\lambda(x) - \lambda(t))^2$. Поэтому

$$P \geqslant \kappa^{-2}(\lambda(x) - \lambda(t))^2 + (\lambda(x) - 2\lambda(t))^2 \geqslant \frac{1}{1+\kappa^2}\lambda(t)^2.$$

С учетом очевидного неравенства $P \geqslant (x-y)^2$, отсюда получим (3.10) с $c_1 = (5+4\kappa^2)^{-1}$. Из (3.9) и (3.10) находим $|\varphi(x+i\lambda(x),t)| \leqslant c_2\varphi(x,t)$ при $x \in [0,1]$ и $t \in (0,1]$. Ввиду (3.8) отсюда следует нужная оценка вклада в интеграл (3.7) от дуги J:

$$\int_J |\varphi(z,t)dz| = \int_0^1 |\varphi(x+i\lambda(x),t)|\sqrt{1+\lambda'(x)^2}dx \leqslant c_3\int_0^1 \varphi(x,t)dx \leqslant c_3\pi.$$

Сложив полученные оценки вкладов, придем к (3.7). •

Доказательство теоремы 1.2. Ввиду соотношения $\lambda(t) = o(t)$ при $t \to 0$, из $(0,1/2]$ можем выделить последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям $t_{k+1} \leqslant t_k/2$ и $\lambda(t_k)/t_k \leqslant 2^{-k}$ при $k = 1,2,3,\ldots$ Положим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\varphi(z,t_k)\right)^{1/\sigma}, \quad z \in \overline{\Delta}\setminus\{0\},$$

где для степенной функции выбрана ветвь так, чтобы все слагаемые были положительными при $z \in (0,1]$. Для $z \in \overline{\Delta}\setminus\{0\}$ и $t \in (0,1]$ имеем $|\varphi(z,t)| \leqslant \kappa/\rho(z,\Gamma)^2$, где $\Gamma := \{x+2i\lambda(x) : x \in [0,1]\}$. Поэтому указанный ряд сходится равномерно на любом компакте из $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$. Следовательно, функция

$f(z)$ аналитична в Δ и непрерывна на $\overline{\Delta}\backslash\{0\}$. Ввиду полноты пространства $E_\sigma(\Delta)$ и леммы 3.1 заключаем, что $f \in E_\sigma(\Delta)$:

$$\|f\|_{E_\sigma}^\sigma \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \|\varphi(\cdot, t_k)\|_{E_\sigma}^\sigma \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Функция

$$g(z) := \int_1^z (z-\zeta)^{s-1} f(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \overline{\Delta}\backslash\{0\},$$

аналитична в Δ, непрерывна на $\overline{\Delta}\backslash\{0\}$ и удовлетворяет соотношению $g^{(s)} = (s-1)!f$. В частности, $g \in E_\sigma^s(\Delta)$. Покажем, что $g \notin E_p(\Delta)$. С этой целью выделим два случая: 1) $p < \infty$ и $s \geqslant 1$; 2) $p = \infty$ и $s \geqslant 2$.

Рассмотрим первый случай. Поскольку g непрерывна на $\overline{\Delta}\backslash\{0\}$, нам достаточно показать, что $|g|^p$ несуммируема на $(0,1]$. Для $t \in [t_k/2, t_k]$ имеем

$$\begin{aligned}
|g(t)| &= \int_t^1 (x-t)^{s-1} f(x)\, dx \geqslant \int_{t_k}^1 (x-t_k)^{s-1} f(x)\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{k^{2/\sigma}} \int_{t_k}^{t_k+\lambda(t_k)} (x-t_k)^{s-1} \left[\frac{\lambda(t_k)}{(x-t_k)^2 + 4\lambda(t_k)^2}\right]^{1/\sigma} dx \\
&\geqslant \frac{1}{s(5k^2)^{1/\sigma}} \cdot \frac{1}{\lambda(t_k)^{1/p}}.
\end{aligned}$$

Ввиду условия $t_{k+1} \leqslant t_k/2$ интервалы $(t_k/2, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Поэтому

$$\int_0^1 |g(t)|^p dt \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k/2}^{t_k} |g(t)|^p dt \geqslant \frac{1}{2 \cdot s^p \cdot 5^{2p/\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p/\sigma}} \cdot \frac{t_k}{\lambda(t_k)}.$$

Последний ряд расходится, так как $t_k/\lambda(t_k) \geqslant 2^k$. Таким образом, $g|_{(0,1]} \notin L_p$.

Рассмотрим второй случай. Поскольку g непрерывна на $\overline{\Delta}\backslash\{0\}$, нам достаточно показать, что g неограничена на полуинтервале $(0,1]$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\begin{aligned}
|g(t_{k+1})| &= \int_{t_{k+1}}^1 (x-t_{k+1})^{s-1} f(x)\, dx \\
&\geqslant \frac{1}{k^{2s}} \int_{t_k}^{t_k+\lambda(t_k)} (x-t_{k+1})^{s-1} \left[\frac{\lambda(t_k)}{(x-t_k)^2 + 4\lambda(t_k)^2}\right]^s dx \\
&\geqslant \frac{1}{k^{2s}} \int_{t_k}^{t_k+\lambda(t_k)} \left(\frac{t_k}{2}\right)^{s-1} \left(\frac{1}{5\lambda(t_k)}\right)^s dx = \frac{2}{(10 \cdot k^2)^s} \cdot \left(\frac{t_k}{\lambda(t_k)}\right)^{s-1}.
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы учли, что $x - t_{k+1} \geqslant t_k - t_{k+1} \geqslant t_k/2$. Так как $t_k/\lambda(t_k) \geqslant 2^k$, то $|g(t_{k+1})| \to \infty$. •

§4. Доказательство теоремы 1.4 и теоремы 1.3 для $s \geqslant 2$

4.1. Прежде всего покажем, что асимптотические оценки (1.9) и (1.11) являются следствиями равномерных оценок (1.8) и (1.10) соответственно.

Пусть $P_n(f^{(s)})_\sigma$ — наилучшее приближение в E_σ функции $f^{(s)}$ посредством алгебраических полиномов степени не выше n, а ψ_n — соответствующий полином наилучшего приближения. Тогда $P_n(f^{(s)})_\sigma = \|f - \psi_n\|_{E_\sigma}$. Через $\psi_n^{(-s)}$ обозначим s-й интеграл от ψ_n, т.е. $\psi_n^{(-s)}$ — алгебраический многочлен степени не выше $n+s$ и $(\psi_n^{(-s)})^{(s)} = \psi_n$. Если $n \geqslant s$, то из (1.8) и (1.10) получаем, что при соответствующих ограничениях на область G

$$R_{2n+s}(f)_p \leqslant R_n(f - \psi_n^{(-s)})_p \leqslant \frac{c}{n^s}\|f^{(s)} - \psi_n\|_{E_\sigma} = \frac{c}{n^s} P_n(f^{(s)})_\sigma.$$

Согласно теореме Смирнова–Келдыша, $P_n(f^{(s)})_\sigma \to 0$ при $n \to \infty$. Этим соотношения (1.9) и (1.11) доказаны.

4.2. Мы будем использовать обозначения и построения из §1–2. Для функции h, суммируемой в области Ω, рассмотрим ее потенциал Коши

$$g(z) := \int_\Omega \frac{h(\zeta)dm_2(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in G. \tag{4.1}$$

Пусть $Q \in \mathcal{L}$ и $1 < p \leqslant \infty$. Положим

$$\tau_p(h, Q) = \rho(Q, \partial G)^{\frac{1}{p}-1} \int_{Q^* \cap \Omega} |h| dm_2.$$

Напомним, что $Q^* \cap \Omega = Q^*$ при $Q \neq Q_0$. Следующая лемма 4.1 является очевидным следствием основных результатов работы [22].

Лемма 4.1. *Пусть точка* 0 *является единственной предельной точкой множества* $\{\tau_p(h,Q)\}$ *и* $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ *— нумерация семейства* $\mathcal{L}$, *соответствующая невозрастанию последовательности* $\{\tau_p(h,Q_k)\}_{k=1}^\infty$. *Предположим также существование постоянных* $a > 0$ *и* $\alpha > 0$ *таких, что*

$$\tau_p(h, Q_k) \leqslant a k^{-\alpha - 1/p} \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

а) *Если* $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, G *— область Лаврентьева, то* $g \in E_p(G)$ *и*

$$R_n(g)_p \leqslant c a n^{-\alpha} \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots,$$

где $c = c(\alpha, p, G)$.

b) *Если* $\alpha > 1$, $p = \infty$, G *— область Альпера или Радона, то* $g \in C_A(\overline{G})$ *и*

$$R_n(g)_\infty \leqslant can^{-\alpha} \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots,$$

где $c = c(\alpha, G)$.

Доказательство оценки (1.8) для $s \geqslant 2$ и оценки (1.10) для $1 < p < \infty$. Согласно лемме 2.3, имеем

$$f(z) = T_{s-1}(z) + g(z),$$

где g — потенциал Коши с плотностью

$$h(\zeta) = -\frac{1}{\pi(s-1)!} f^{(s)}(\theta(\zeta))(\zeta - \theta(\zeta))^{s-1} \frac{\partial \theta(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}}.$$

Из леммы 2.1, свойств семейства $\mathcal{L}$ и отражения * несложно получить, что функция h удовлетворяет условию леммы 4.1. Точнее, справедливо соотношение

$$\tau_p(h, Q_k) \leqslant ck^{-s-\frac{1}{p}} \|f^{(s)}\|_{E_\sigma}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Остается применить лемму 4.1. •

4.3. В случае, когда $0 < p \leqslant 1$, положим $m = [1/p]$, т.е. m — целая часть числа $1/p$. Рассмотрим m-ю производную функции g, заданной соотношением (4.1):

$$g^{(m)}(z) := m! \int\limits_{\Omega} \frac{h(\zeta) dm_2(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}, \quad z \in G. \tag{4.2}$$

Введем числа

$$\tau_p(h, Q) = \rho(Q, \partial G)^{\frac{1}{p} - m - 1} \int\limits_{Q^* \cap \Omega} |h| dm_2.$$

Следующая лемма является аналогом леммы 4.1 для $0 < p \leqslant 1$.

Лемма 4.2. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, *точка* 0 *является единственной предельной точкой множества* $\{\tau_p(h, Q)\}$ *и* $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ *— нумерация семейства* $\mathcal{L}$, *соответствующая невозрастанию последовательности* $\{\tau_p(h, Q_k)\}_{k=1}^\infty$. *Предположим, что существуют постоянные* $a > 0$ *и* $\alpha > 0$, *для которых*

$$\tau_p(h, Q_k) \leqslant ak^{-\alpha - 1/p}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$R_n(g^{(m)})_p \leqslant can^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $c = c(\alpha, p, G)$.

Доказательству леммы 4.2 мы предпошлем лемму 4.3.

Лемма 4.3. *Пусть $A \subset \Omega$ — замкнутая область, удовлетворяющая условию $\rho(A, \partial G) \geqslant 2d(A)$;*

$$g_A(z) := \int_A \frac{h(\zeta)dm_2(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Тогда для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ существует рациональная функция ψ степени не выше k, для которой

$$\|g_A^{(m)} - \psi\|_{E_p} \leqslant \frac{c}{2^k}\rho(A, \partial G)^{\frac{1}{p}-m-1} \int_A |h| dm_2,$$

где $c = c(p, G)$. При этом, если $k = 0, 1, 2, \dots, m$, можем считать, что $\psi \equiv 0$.

Доказательство. Пусть ζ_0 — центр круга диаметра $d(A)$, содержащего A. Тогда ввиду условия $\rho(A, \partial G) \geqslant 2d(A)$ при $\zeta \in A$ и $z \in \overline{G}$ справедливы соотношения $|\zeta_0 - \zeta| \leqslant \frac{1}{2}d(A)$ и $|\zeta_0 - z| \geqslant \rho(A, \partial G) - \frac{1}{2}d(A) \geqslant \frac{3}{2}d(A)$. Отсюда получаем, что

$$\left|\frac{(\zeta_0 - \zeta)^j}{(\zeta_0 - z)^j}\right| \leqslant \frac{1}{3^j} \quad \text{при } j = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.3}$$

и, следовательно, равномерно по $\zeta \in A$ и $z \in \overline{G}$ сходится ряд

$$\frac{m!}{(\zeta - z)^{m+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+m)!}{j!} \cdot \frac{(\zeta_0 - \zeta)^j}{(\zeta_0 - z)^{j+m+1}}.$$

Таким образом, при $z \in \overline{G}$

$$g_A^{(m)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+m)!}{j!} \cdot \frac{1}{(\zeta_0 - z)^{j+m+1}} \cdot \int_A (\zeta_0 - \zeta)^j h(\zeta) dm_2(\zeta).$$

Покажем, что в случае, когда $k \geqslant m+1$, в качестве ψ можно взять $(k-m-1)$-ю частичную сумму последнего ряда. Действительно, используя (4.3), легко найти, что при $z \in \overline{G}$

$$|g_A^{(m)}(z) - \psi(z)| \leqslant \frac{1}{|\zeta_0 - z|^{m+1}} \cdot \int_A |h| dm_2 \cdot \sum_{j=k-m}^{\infty} \frac{(j+m)!}{3^j j!}.$$

Остается применить неравенство (3.4).

Очевидно, можно провести аналогичные рассуждения и при $k = 0, 1, \dots, m$, положив $\psi = 0$. •

Доказательство леммы 4.2. Существует натуральное число N, зависящее лишь от постоянных c_1, c_2 из (2.1) и отражения $*$, удовлетворяющее следующему условию. Каждую область $Q^* \neq Q_0^*$, а также область $\Omega \cap Q_0^*$ можно представить в виде объединения не более N замкнутых подобластей A, пересекающихся разве лишь по границам, для которых $\rho(A, \partial G) \geqslant 2d(A)$. В результате мы получим разбиение области Ω на семейство $\{A\}$ подобластей A. Из условий леммы следует, что для $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — подходящей нумерации семейства $\{A\}$ — будут выполняться соотношения

$$\rho(A_k, \partial G)^{\frac{1}{p}-m-1} \int\limits_{A_k} |h| dm_2 \leqslant c_1 a k^{-\alpha-\frac{1}{p}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для $n \in \mathbb{N}$ введем последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$: $\nu_k = [\sqrt{n/k}]$ при $n/k \leqslant 4$ и $\nu_k = 0$ при $n/k < 4$. Согласно лемме 4.3, для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ существует рациональная функция ψ_k степени не выше ν_k такая, что

$$\|g_{A_k}^{(m)} - \psi_k\|_{E_p} \leqslant c_2 a 2^{-\nu_k} k^{-\alpha-\frac{1}{p}}. \tag{4.4}$$

Положим $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots$ Здесь имеется не более $n/4$ слагаемых, отличных от нуля, так как $\psi_k \equiv 0$ при $\nu_k = 0$. Значит, ψ — рациональная функция, и ее степень не превышает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n/4} \sqrt{\frac{n}{k}} \leqslant \int\limits_0^{n/4} \sqrt{\frac{n}{x}} dx = n.$$

Поэтому из (4.4) следует утверждение леммы

$$R_n(g^{(m)})_p^p \leqslant \|g^{(m)} - \psi\|_{E_p}^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{A_k}^{(m)} - \psi_k\|_{E_p}^p \leqslant c_2^p a^p \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-p\nu_k} k^{-p\alpha-1}$$
$$\leqslant c_3^p a^p n^{-\alpha p}. \quad \bullet$$

Доказательство оценки (1.10) для $p \leqslant 1$ проводится аналогично случаю $1 < p < \infty$. Отличия состоят в том, что вместо леммы 2.3 нужно применить интегральное представление (3.1), а вместо леммы 4.1 — лемму 4.2. •

4.4. Как отмечалось во Введении, не удается распространить импликацию (1.7) на случай $p < 1$ ($1/p \notin \mathbb{N}$). Если $1/p \in \mathbb{N}$, то, рассматривая функции вида $(z - z_0)^{-1/p}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$, легко убедиться, что (1.7) не выполняется. Однако используя неравенство типа Бернштейна из [25], несложно получить следующий ослабленный вариант свойства (1.7) для $p \leqslant 1$. *Если* $0 < p \leqslant 1$, $s \in \mathbb{N}$, $0 < \tau < (s + 1/p)^{-1}$ *и* G — *область Альфорса, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (n^s R_n(f)_p)^{\tau} < \infty \Longrightarrow f^{(s)} \in E_{\tau}.$$

4.5. При условиях, наложенных на G, p, s и σ в теоремах 1.3 и 1.4, исключая лишь случай $p = \infty$ и $s = 1$, можно получить следующее утверждение, объединяющее и усиливающее соотношения (1.8)–(1.11). *Если* $f \in E^s_\sigma(G)$, *то*

$$\sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{n}(n^s R_n(f)_p)^2 \leqslant c(p,s,G)\|f^{(s)}\|^2_{E_\sigma}.$$

Для пространства H_p это неравенство получено автором в [20, 21]. В данном случае нужно использовать интегральное представление из леммы 2.3 с заменой s на $s+1$. Потребуется также более детальное изучение возникающей при этом функции плотности потенциала Коши.

§5. Доказательство теоремы 1.3 для $s = 1$

5.1. Как замечено в п. 4.1, нам достаточно получить равномерную оценку (1.8) для $s = 1$. Из-за условия $\alpha > 1$ лемма 4.1 в данном случае неприменима. Нужный результат мы получим из (1.3) с помощью преобразований Фабера, которые хорошо известны в случае полиномиальных приближений [10, 13, 31]. В рациональной аппроксимации со свободными полюсами впервые они применялись В. В. Пеллером [26, 27] и позже автором [22].

Пусть G — односвязная ограниченная область со спрямляемой границей ∂G. Положим $G^+ := G$, $G^- := \overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}$ и, в частности, $D^+ := D$, $D^- := \mathbb{C}\backslash\overline{D}$. Пространства Харди $H_p(D^-)$ и В. И. Смирнова $E_p(G^-)$ определяются почти так же, как и для областей D^+ и G^+. Отличие состоит в том, что нужно рассматривать лишь функции, исчезающие на бесконечности.

Пусть функция $w = \varphi(z)$ осуществляет конформное отображение области G^- на D^- и $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0$; $z = \psi(w)$ — обратное отображение. Как известно, φ и ψ продолжаются до непрерывных функций в соответствующих замкнутых областях. Кроме того, φ и ψ абсолютно непрерывны на границах этих областей.

Прямым преобразованием Фабера функции $g \in H_\infty$ называется функция

$$(\mathcal{F}g)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{g[\varphi(\zeta)]d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G.$$

Обратным преобразованием Фабера функции $f \in E_\infty(G)$ называется функция

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f[\psi(\eta)]d\eta}{\eta - w}, \quad w \in D.$$

Свойства операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ изучаются в [13, 31]. Мы отметим, что $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$ и $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}g = g$ для функций f и g, аналитических на $\overline{G}$ и $\overline{D}$ соответственно. При дополнительных ограничениях на ∂G можно существенно расширить класс функций f и g, для которых справедливы последние равенства. В частности, это позволяют сделать следующие леммы 5.1 и 5.2.

Лемма 5.1 [13, 31]. *Если G — область Альпера или Радона, то оператор $\mathcal{F}$ непрерывен из $C_A(\overline{D})$ в $C_A(\overline{G})$.*

Лемму 5.2 мы получим для более широкого класса областей, чем это нужно для доказательства оценки (1.8) при $s = 1$. Спрямляемую кривую S (простую или замкнутую) называем *кривой Липшица*, если для любой точки $O \in S$ существуют декартова система координат $O\xi\eta$ и функция $\eta(\xi)$, удовлетворяющая условию Липшица (определение см. в п. 1.5), такие, что в некоторой окрестности точки O кривую S можно задать в виде $\eta = \eta(\xi)$. Очевидно, кривая Липшица является кривой Лаврентьева. Несложные примеры кривых типа спирали показывают, что обратное неверно. В то же время, гладкие кривые и кривые Радона являются кривыми Липшица.

Лемма 5.2. *Если G — область Липшица, то оператор $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывен из $E_1^1(G)$ в H_1^1. Именно если $f \in E_1^1(G)$, то*

$$\|(\mathcal{F}^{-1}f)'\|_{H_1} \leqslant c(G)\|f'\|_{E_1}. \tag{5.1}$$

Доказательство этой леммы приводится в п. 5.2.

Доказательство оценки (1.8) для $s = 1$. Пусть $f \in E_1^1(G)$ и $g(w) = (\mathcal{F}^{-1}f)(w)$, $w \in D$. Согласно лемме 5.2, имеем $g \in H_1^1$ и $\|g'\|_{H_1} \leqslant c_1\|f'\|_{E_1}$. Используя это и неравенство (1.3), получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует рациональная функция $r_n \in \mathcal{R}_n$, для которой

$$\|g - r_n\|_{C_A(\overline{D})} \leqslant \frac{c_2}{n}\|f'\|_{E_1}.$$

На основании леммы 5.1, отсюда получаем

$$\|\mathcal{F}g - \mathcal{F}r_n\|_{C_A(\overline{G})} \leqslant \frac{c_3}{n}\|f'\|_{E_1}.$$

Остается заметить, что $\mathcal{F}g = f$ и $\mathcal{F}r_n \in \mathcal{R}_n$. •

5.2. Приведем необходимые сведения для доказательства леммы 5.2. В случае, если G — область Липшица, функции $|\varphi'|$ и $|\psi'|$ на ∂G и ∂D соответственно удовлетворяют [9, 11] условию Макенхаупта (A_p) при некотором $p > 1$. В частности [14, гл. VI, §6], они удовлетворяют обратному неравенству Гёльдера. Сформулируем последний результат для $|\psi'|$. Существует число $p > 1$ такое, что для любой дуги $J \subset \partial D$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{|J|}\int\limits_J |\psi'|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{c}{|J|}\int\limits_J |\psi'|, \quad c = c(p, G). \tag{5.2}$$

Пусть G — область Альфорса и $f \in L_1(\partial G)$. Введем *интеграл типа Коши* $C^{\pm}f$ и *сопряженную функцию* $\widetilde{f}$:

$$(C^{\pm}f)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G^{\pm};$$

$$\widetilde{f}(\eta) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - \eta}, \quad \eta \in \partial G.$$

Во всех трех случаях интегрирование осуществляется в положительном направлении относительно области G^+. Интеграл для $\widetilde{f}(\eta)$ понимается в смысле главного значения по Коши. Известно (см., например, [4, 11]), что $C^{\pm}f \in E_p(G^{\pm})$ при всех $p < 1$ и, следовательно, $C^{\pm}f$, имеют некасательные граничные значения почти всюду на ∂G. Кроме того, $\widetilde{f}(\eta)$ также существует почти для всех $\eta \in \partial G$, и имеют место равенства $f(\eta) = (C^+f)(\eta) - (C^-f)(\eta)$, $i\widetilde{f}(\eta) = (C^+f)(\eta) + (C^-f)(\eta)$. Если $1 < p < \infty$, то операторы $C^{\pm}\colon L_p(\partial G) \to E_p(G^{\pm})$ непрерывны, а оператор $\widetilde{\ }$ непрерывен из $L_p(\partial G)$ в себя (см. теорему Давида [4, 11]).

Ввиду сказанного выше в случае области Альфорса будет корректным следующее определение. Именно функция $f \in L_1(\partial G)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_1(\partial G)$, если $\widetilde{f} \in L_1(\partial G)$. Иначе говоря, $f \in \mathcal{E}_1$, если $C^{\pm}f \in E_1(G^{\pm})$. Пространство $\mathcal{E}_1$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{E}_1} := \|f\|_{L_1} + \|\widetilde{f}\|_{L_1}.$$

Койфманом (см., например, [15, 17]) получено вещественное описание пространства $\mathcal{H}_1 := \mathcal{E}_1(\partial D)$ с помощью атомических разложений. Лемма 5.3 есть аналогичный результат для $\mathcal{E}_1$ в случае области Липшица. Ее доказательство проводится так же, как и в случае круга, и мы его опускаем. Отметим лишь, что необходимое для этого неравенство для некасательной максимальной функции в области Липшица имеется в [9, 11].

Функцию $a \in L_\infty(\partial G)$ и ассоциированную с ней замкнутую дугу $I(a) \subset \partial G$, содержащую $\operatorname{supp} a$ — носитель a, называем *атомом*, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: 1) $\int_{\partial G} a(\zeta)d\zeta = 0$; 2) $I(a) = \partial G$. В первом случае будем считать, что $I(a)$ совпадает с наименьшей дугой, содержащей $\operatorname{supp} a$.

Лемма 5.3. *Пусть G — область Липшица. Тогда функция $f \in L_1(\partial G)$ принадлежит $\mathcal{E}_1$ в том и только том случае, когда существует последовательность атомов $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ (конечная или бесконечная) такая, что*

$$\text{a)} \quad \sum_{k\geqslant 1} |I(a_k)|\|a_k\|_{L_\infty} < \infty;$$

$$\text{b)} \quad f(\zeta) = \sum_{k\geqslant 1} a_k(\zeta) \ \textit{п.в. на } \partial G.$$

Если $f \in \mathcal{E}_1$, то справедливы соотношения

$$c_1(G)\|f\|_{\mathcal{E}_1} \leqslant \inf \sum_{k\geqslant 1} |I(a_k)|\|a_k\|_{L_\infty} \leqslant c_2(G)\|f\|_{\mathcal{E}_1},$$

где inf *берется по всем последовательностям,* $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$, *удовлетворяющим условиям* a) *и* b).

Доказательство леммы 5.2. Пусть $f \in E_1^1(G)$. Методом интегрирования по частям находим, что

$$(\mathcal{F}^{-1}f)'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f[\psi(\eta)]d\eta}{(\eta - w)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f'[\psi(\eta)]\psi'(\eta)}{\eta - w}d\eta, \quad w \in D.$$

Отсюда, используя также лемму 5.3, заключаем, что для доказательства оценки (5.1) нам достаточно получить неравенство

$$\int\limits_{\partial D} |((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\sim}| \leqslant c(G)|I(a)|\|a\|_{L_\infty(\partial G)} \tag{5.3}$$

для любого атома a на ∂G.

Пусть $p > 1$ — число, удовлетворяющее условию (5.2). Согласно теореме М. Рисса [14], оператор $\tilde{}$ непрерывен из $L_p(\partial D)$ в себя. Поэтому, применив предварительно неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}\|((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\sim}\|_{L_1} &\leqslant (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\|((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\sim}\|_{L_p} \leqslant c_1\|(a\circ\psi)\cdot\psi'\|_{L_p} \\ &\leqslant c_1\|a\|_{L_\infty}\cdot\|\psi'\|_{L_p} = c_2\|a\|_{L_\infty}.\end{aligned}$$

Этим неравенство (5.3) доказано для a с большим $|I(a)|$. Именно пусть $J(a)$ — образ дуги $I(a)$ при отображении $\eta = \varphi(\zeta)$. Тогда (5.3) можно считать доказанным для $|J(a)| \geqslant \pi$.

Пусть теперь $|J(a)| < \pi$ и τ_0 — середина дуги $J(a)$. Обозначим через A дугу окружности ∂D, концентрическую с $J(a)$, и длиной $2|J(a)|$; $B := \partial D\backslash A$. Используя условие $\int_{\partial G} a(\zeta)d\zeta = 0$, находим, что при $\eta \in B$

$$((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\sim}(\eta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{J(a)} a(\psi(\tau))\psi'(\tau)\left[\frac{1}{\tau-\eta} - \frac{1}{\tau_0 - \eta}\right]d\tau.$$

Следовательно,

$$|((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\sim}(\eta)| \leqslant \frac{1}{4}|J(a)|\cdot|I(a)|\cdot\|a\|_{L_\infty}\cdot\frac{1}{|\tau_0-\eta|^2}, \quad \eta \in B;$$

$$\int\limits_{B} |((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\sim}| \leqslant |I(a)|\|a\|_{L_\infty}.$$

Для оценки вклада в интеграл (5.3) по множеству A снова применим неравенство Гёльдера и теорему М. Рисса. Имеем

$$\int_A |((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\frown}| \leqslant |A|^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_A |((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\frown}|^p\right)^{1/p} \leqslant |A|^{1-\frac{1}{p}}\|((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\frown}\|_{L_p(\partial D)}$$
$$\leqslant c_3|J(a)|^{1-\frac{1}{p}}\|(a\circ\psi)\cdot\psi'\|_{L_p(\partial D)}$$
$$= c_3|J(a)|\cdot\left(\frac{1}{|J(a)|}\int_{J(a)}|(a\circ\psi)\cdot\psi'|^p\right)^{1/p}.$$

Продолжим оценку, используя неравенство (5.2):

$$\int_A |((a\circ\psi)\cdot\psi')^{\frown}| \leqslant c_3\|a\|_{L_\infty}\cdot|J(a)|\cdot\left(\frac{1}{|J(a)|}\int_{J(a)}|\psi'|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant c_4\|a\|_{L_\infty}\cdot\int_{J(a)}|\psi'| = c_4\|a\|_{L_\infty}\cdot|I(a)|.$$

Сложив найденные оценки вкладов в интеграл из (5.3) от множеств A и B, получим нужное неравенство. •

5.3. Пусть S — спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая) и $f\in L_p(S)$, $0<p\leqslant\infty$. Здесь $R_n(f)_p$ будет обозначать наилучшее L_p-приближение функции f посредством множества $\mathcal{R}_n\cap L_p(S)$. Если $p=\infty$, естественно предполагать, что $f\in C(S)$, и тогда $R_n(f)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение. Приведем некоторые следствия из теорем 1.3 и 1.4. Эти следствия доказываются так же, как и в случае отрезка или окружности [17, 20, 21]. Нужные для этого свойства операторов $C^\pm$ и $\tilde{}$ частично приведены выше в п. 5.2; более подробно см. [4, 11].

Следствие 5.1. *Пусть S — замкнутая кривая Альпера или Радона, функция f абсолютно непрерывна на S и $f'\in\mathcal{E}_1(S)$. Тогда*

$$R_n(f)_\infty \leqslant \frac{c(S)}{n}\|f'\|_{\mathcal{E}_1} \quad \textit{при } n=1,2,\dots;$$
$$R_n(f)_\infty = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \textit{при } n\to\infty.$$

Эти соотношения остаются справедливыми также при замене $R_n(f)_\infty$ на $R_n(\tilde{f})_\infty$.

Следствие 5.2. *Пусть S — кривая Альпера или Радона, функция f абсолютно непрерывна на S и $f' \in L_p(S)$ при некотором $p > 1$. Тогда*

$$R_n(f)_\infty \leqslant \frac{c(p,S)}{n}\|f'\|_{L_p} \quad \text{при } n = 1,2,\dots;$$
$$R_n(f)_\infty = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следствие 5.3. *Пусть S — кривая Альпера или Радона, $s \in \mathbb{N}$, функция f имеет на S $(s-1)$-ю абсолютно непрерывную производную $f^{(s-1)}$, и $f^{(s)}$ есть функция ограниченной вариации* ($\operatorname{Var} f^{(s)} < \infty$). *Тогда*

$$R_n(f)_\infty \leqslant \frac{c(s,S)}{n^{s+1}}\operatorname{Var} f^{(s)} \quad \text{при } n \geqslant s,$$
$$R_n(f)_\infty = o\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Следствие 5.4. *Пусть S — кривая Лаврентьева, f — функция ограниченной вариации на S* ($\operatorname{Var} f < \infty$) *и $p < \infty$. Тогда*

$$R_n(f)_p \leqslant \frac{c(p,S)}{n}\operatorname{Var} f \quad \text{при } n = 1,2,\dots;$$
$$R_n(f)_p = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Список литературы

[1] Aleksandrov A. B., *Essays on nonlocally convex Hardy classes*, Complex Analysis and Operator Theory (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., vol. 864, Springer, Berlin–New York, 1981, pp. 1–89.

[2] Альфорс Л., *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[3] Белый В. И., *Современные методы геометрической теории функций комплексного переменного в задачах аппроксимации*, Алгебра и анализ **9** (1997), №3, 3–40.

[4] David G., *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), 157–189.

[5] Данченко В. И., *Некоторые интегральные оценки производных рациональных функций на множествах с ограниченной плотностью*, Мат. сб. **187** (1996), №10, 33–52.

[6] Данченко В. И., Долженко Е. П., *Отображение множеств конечной α-меры посредством рациональных функций*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **51** (1987), №6, 1309–1321.

[7] Долженко Е. П., *Оценки производных рациональных функций*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **27** (1963), №1, 9–28.

[8] Долженко Е. П., *Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций*, Мат. сб. **69** (1966), №4, 498–524.

[9] Дынькин Е. М., *Оценки аналитических функций в жордановых областях*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **73** (1977), 70–90.

[10] Дынькин Е. М., *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова*, Тр. Мат. и-та АН СССР **155** (1981), 41-76.
[11] Дынькин Е. М., *Методы теории сингулярных интегралов. II. Теория Литтлвуда-Пэли и ее приложения*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 42, ВИНИТИ, М., 1989, сс. 105-198.
[12] Dyn'kin E., *Inequalities for rational functions*, J. Approx. Theory **91** (1997), no. 3, 349-367.
[13] Гайер Д., *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, М., 1986.
[14] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
[15] Кашин Б. С., Саакян А. А., *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
[16] Келдыш М. В., *Избранные труды. Математика*, Наука, М., 1985, Статьи 1-4.
[17] Lorentz G. G., Golitschek M., Makovoz Y., *Constrictive approximation. Advanced problems*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 304, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
[18] Пекарский А. А., *Оценки производной интеграла типа Коши с мероморфной плотностью и их приложения*, Мат. заметки **31** (1982), №3, 389-402.
[19] Пекарский А. А., *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации*, Мат. сб. **124** (1984), №4, 571-588.
[20] Пекарский А. А., *Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p*, Мат. сб. **127** (1985), №1, 3-20.
[21] Пекарский А. А., *Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке*, Мат. сб. **133** (1987), №1, 86-102.
[22] Пекарский А. А., *Наилучшие рациональные приближения в комплексной области*, Тр. Мат. и-та АН СССР **190** (1989), 222-233.
[23] Пекарский А. А., *Обобщенная рациональная аппроксимация в круге*, Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук **1990**, №6, 9-14.
[24] Пекарский А. А., Шталь Г., *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций в пространствах L_p при $p < 1$*, Мат. сб. **186** (1995), №1, 119-130.
[25] Пекарский А. А., *Неравенства для производных рациональных функций в простанствах Лоренца*, Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук **1997**, №3, 14-16.
[26] Пеллер В. В., *Рациональная аппроксимация и гладкость функций*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **107** (1982), 150-159.
[27] Пеллер В. В., *Рациональная аппроксимация в L_p и преобразования Фабера*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **157** (1987), 70-75.
[28] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
[29] Привалов И. И., *Введение в теорию функций комплексного переменного*, Наука, М., 1977.
[30] Стейн И., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
[31] Суетин П. К., *Ряды по многочленам Фабера*, Наука, М., 1984.

Белорусский государственный
технический университет
Беларусь, 220630, Минск
ул. Свердлова, 13а
E-mail: pekarski@bstu.unibel.by

Поступило 14 августа 2000 г.