

Общероссийский математический портал

Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, Длинные корневые торы в группах Шевалле,
Алгебра и анализ, 2012, том 24, выпуск 3, 22–83

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.147.60.137

1 октября 2024 г., 02:26:26



Николаю Гордееву,
замечательному математику,
дорогому другу и щедрому коллеге

ДЛИННЫЕ КОРНЕВЫЕ ТОРЫ В ГРУППАХ ШЕВАЛЛЕ

© Н. А. ВАВИЛОВ, А. А. СЕМЕНОВ

Статья посвящена детальному изучению самых важных, и, вообще говоря, самых просто устроенных полупростых элементов в группах Шевалле $G = G(\Phi, K)$, а именно длинных корневых элементов $gh_\alpha(\varepsilon)g^{-1}$, где корень α длинный, $\varepsilon \in K^*$, а $g \in G$. Мы приводим детальные доказательства всех анонсированных нами ранее результатов, относящихся к таким элементам. Пусть $Q = \{gh_\alpha(\varepsilon)g^{-1}, \varepsilon \in K^*\}$, где $g \in G$, есть длинный корневой тор. Зафиксируем борелевскую подгруппу $B = B(\Phi, K)$, и пусть $U = U(\Phi, K)$ — ее унипотентный радикал. Мы доказываем сильную форму редукции к D_4 , утверждающую, что найдется $u \in U$ такое, что uQu^{-1} содержится в какой-то подгруппе $G(\Delta, K)$ типа $\Delta \leq \Phi$, где Δ изоморфна скручиванию подсистемы в D_4 . Оказывается, что при этом все элементы $gh_\alpha(\varepsilon)g^{-1}$, $\varepsilon \in K^*$, кроме единичного и еще самое большее двух из них, лежат в одном и том же типичном классе разложения Брюа Bw_0B . Иными словами, найдется не более одного элемента $\theta \neq 1$ такого, что $gh_\alpha(\theta)g^{-1} \in BwB$ и $gh_\alpha(\theta^{-1})g^{-1} \in Bw^{-1}B$ для некоторого $w \neq w_0$.

Ключевые слова: группы Шевалле, полупростые корневые элементы, разложение Брюа, борелевские орбиты, параболические подгруппы с экстраспециальным унипотентным радикалом.

Основным стимулом к завершению настоящей статьи для первого автора была работа в рамках проекта РФФИ 10-01-90016 „Исследование структуры форм редуктивных групп и поведения малых унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп“ (СПбГУ). На заключительном этапе его работа была поддержана проектами РФФИ 09-01-00762 (Сибирский федеральный университет), 09-01-00784 (ПОМИ РАН), 09-01-00878 (СПбГУ), 09-01-91333 (ПОМИ РАН), 09-01-90304 (СПбГУ), 10-01-92651 (СПбГУ), 11-01-00756 (РГПУ). Кроме того, работа авторов поддержана грантом Президента РФ НШ-5282.2010.1 „Мотивы, когомологии, алгебраические группы, представления, законы взаимности, нижние и верхние оценки схемной сложности булевых функций“ и темой НИР 6.38.74.2011 СПбГУ „Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической К-теории“.

Введение

В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [17], мы доказываем все анонсированные в [28, 83] результаты о разложении Брюа длинных корневых торов в группах Шевалле над полем. Здесь приведены первые полные доказательства редукции к D_4 , а также теорем о количестве, типах и глубине вырождений.

Вообще говоря, в односвязной группе Шевалле $G = G(\Phi, K)$ нет полупростых элементов, устроенных проще, чем длинные корневые полупростые элементы $xh_\alpha(\varepsilon)x^{-1}$, где $\alpha \in \Phi$ — длинный корень, $\varepsilon \in K^*$, $x \in G$. С другой стороны, длинные корневые полупростые элементы порождают максимальный расщепимый тор $T = T(\Phi, K)$ этой группы и поэтому естественно возникают при изучении всех связанных с ним вопросов. Это в особенности относится к случаям $\Phi = E_8, F_4$ и G_2 , так как для этих систем не существует микровесов.

Для остальных систем корней максимальный тор присоединенной группы порождается микровесовыми элементами, которые могут быть устроены проще, чем корневые полупростые элементы. Тем не менее использование в доказательствах корневых полупростых элементов обычно дает лучшие оценки на порядок поля, чем использование микровесовых элементов (см., в частности, [7, 11, 12, 89]).

Мы детально изучали длинные корневые полупростые элементы в работах [8–10, 27, 44]¹. В отличие от рассмотренного в работах [5, 6, 17] случая микровесовых элементов здесь уже совершенно неверно, что все элементы $xh_\alpha(\varepsilon)x^{-1}$, $\varepsilon \neq 0, 1$, обязаны лежать в одной и той же клетке Брюа. Однако все они лежат в клетках BwB , приходящих из какой-то подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$, являющейся подсистемой D_4 , или ее скручиванием.

Положим

$$Q_x = \{xh_\delta(\varepsilon)x^{-1} \mid \varepsilon \in K^*\},$$

где δ — максимальный корень системы Φ , а $x \in G(\Phi, K)$. Следующая редукционная теорема является основным инструментом при доказательстве остальных результатов настоящей работы и продолжающей ее работы первого автора и Владимира Нестерова [25], посвященной парам корневых торов.

Теорема 1. Пусть $G = G(\Phi, K)$ — группа Шевалле, Q_x , $x \in G$, — длинный корневой тор. Тогда найдется подсистема $\Delta \subset \Phi$, изоморфная скручиванию какой-то подсистемы в D_4 , и $u \in U(\Phi, K)$ такие, что

$$Q_x \leq uG(\Delta, K)u^{-1}.$$

¹В качестве наукометрического курьеза упомянем, что в английском переводе и, таким образом, во всех базах данных автором статьи [44] ошибочно указан А. В. Яковлев.

Заметим, что из теоремы 1 вытекает, в частности, что описание *редуктивных частей* подгрупп $\langle X, Y \rangle$, порожденных двумя длинными корневыми торами X, Y , сводится к случаю D_4 . Все возможности для Δ перечислены ниже:

$$\Delta = A_1, A_2, A_3, B_2, B_3, D_4, G_2.$$

Предварительную форму этой редукции на уровне индивидуальных элементов можно найти в работах первого автора [8, 10], а в наших совместных работах [27, 28, 83] сформулировано приведенное выше более точное утверждение, относящееся к длинным корневым торами. Чуть позже аналогичная редукция к D_4 была переоткрыта Герхардом Рерле [82]. Однако Рерле рассматривает орбиты самой подгруппы Леви, в то время как нам нужны орбиты ее борелевской подгруппы, а подробное доказательство теоремы 1 никогда не публиковалось. В работе [8] опубликовано доказательство несколько более слабого утверждения, но, к сожалению, она не переводилась на английский. С другой стороны, в работе [27] приведен лишь набросок доказательства.

Кроме того, сегодня изложение в [8, 27] можно улучшить в нескольких отношениях. Например, теперь мы можем заменить все фразы типа „случай ... был *фактически* разобран в ... “ и „изучая приведение на страницах ... работы ... можно заметить ... “ явными ссылками на соответствующие места статьи [17] и настоящей работы. Попутно мы исправляем пару мелких неточностей², в анализе случаев $\Phi = B_l, F_4$. Поэтому мы решили привести здесь все детали вычислений. В действительности, это доказательство можно было бы записать несколько короче, но доскональное понимание строения рассматриваемых унитарных радикалов интересно само по себе и играет важную роль в дальнейших работах первого автора и Владимира Нестерова, поэтому мы детально разбираем все случаи.

С технической точки зрения теорема 1 сводится к нахождению борелевских орбит фактора Леви L_Q параболической подгруппы Q с экстраспециальным унитарным радикалом U_Q при действии сопряжением на $U_Q/[U_Q, U_Q]$. Для встречающихся при этом представлений орбиты фактора Леви естественно возникают во многих вопросах и их классификация рассматривалась в большом количестве работ, начиная с [76, 65, 51, 66, 52, 79–81]. Однако наши результаты являются чуть более общими в

²Отсутствие оговорки, связанной с характеристикой 2, отсутствие в диаграмме корня β^* в случае, когда α короткий, а β длинный.

двух следующих отношениях: во-первых, мы определяем орбиты не самого фактора Леви L_Q , а его борелевской подгруппы B_Q , а во-вторых, мы не предполагаем поле K алгебраически замкнутым.

Заметим, что в последние годы интерес к орбитам в этих представлениях снова оживился в связи с различными вопросами, такими как высшие законы композиции, йордановы алгебры etc. (см., в частности, [58, 68, 69]). Среди прочего в работе Сергея Крутеlevича [69] изучаются орбиты действий

- $(\mathrm{SL}(6, \mathbb{Z}), \wedge^3(\mathbb{Z}^6))$,
- $(\mathrm{Spin}(12, \mathbb{Z}), \text{half-spin}_{\mathbb{Z}})$,
- $(\mathrm{G}(\mathrm{E}_7, \mathbb{Z}), V(\varpi_7)_{\mathbb{Z}})$.

Это в точности те случаи, которые возникают у нас при анализе длинных корневых торов в исключительных группах типов E_6 , E_7 и E_8 соответственно. Однако мы не пытаемся модернизировать наше изложение так, чтобы учесть методы этих недавних работ и возможные арифметические обобщения, а просто честно воспроизводим все детали наших элементарных доказательств, полученных 15–20 лет назад.

Теорема 4 работы [17] утверждает, что для любого веса $\omega \in P(\Phi^\vee)$ и любого $x \in G(\Phi, K)$ все весовые элементы $xh_\omega(\varepsilon)x^{-1}$, $\varepsilon \in K^*$, кроме конечного их числа, лежат в одной и той же клетке Брюа Bw_0B , причем w_0 является инволюцией. Теперь из теоремы 1 настоящей работы вытекает, в частности, что общий элемент длинного корневого тора попадает в клетку Брюа, отвечающую попарно строго ортогональным корням в какой-то системе, получающейся из системы типа D_4 .

Теорема 2. *При фиксированном $x \in G$ все элементы длинного корневого тора Q_x , за исключением конечного числа, лежат в одном и том же типичном классе*

$$Bw_0B = Bw_{\gamma_1} \dots w_{\gamma_{r+s}}B,$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_{r+s}$ — попарно различные строго ортогональные корни, причем если $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ длинные, а $\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_{r+s}$ короткие, то $r + 2s \leq m = m(\Phi)$.

Точные значения m для различных систем перечислены ниже:

$$\begin{aligned} m = 1 & \quad \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \\ m = 2 & \quad \mathrm{A}_l, \quad l \geq 3, \quad \mathrm{C}_l, \quad l \geq 2, \\ m = 3 & \quad \mathrm{G}_2, \\ m = 4 & \quad \mathrm{B}_l, \quad l \geq 3, \quad \mathrm{D}_l, \quad l \geq 4, \quad \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4. \end{aligned}$$

Отсюда отчетливо видно, что длинные корневые полупростые элементы в линейном и симплектическом случаях устроены *принципиально* проще, чем во всех остальных случаях. Именно поэтому, кстати, доказательства всех результатов настоящей работы для серий A_l и C_l *существенно* короче и были опубликованы уже в [9, 44]. С другой стороны, во всех остальных случаях начиная с ранга 4 сложность длинных корневых элементов одинакова и не отличается от случая $SO(8, K)$.

Полезно сравнить этот результат с уже цитировавшейся теоремой 1 работы [17], утверждающей, что *все* микровесовые элементы $xh_\omega(\varepsilon)x^{-1}$, $\varepsilon \neq 0, 1$, лежат в одной и той же клетке Брюа

$$Bw_0B = Bw_{\gamma_1} \dots w_{\gamma_{r+s}}B.$$

Конкретные значения m такие, что $r + 2s \leq m$, перечислены для различных микровесов в табл. 1 работы [17]. При этом для самых простых микровесовых элементов $m = 1$ для серии A_l , $m = 2$ для серий B_l и D_l , а также для E_6 и, наконец, $m = 3$ для E_7 .

Таким образом, относительно самых просто устроенных полупростых элементов A_l устроена проще, чем остальные классические серии, которые, в свою очередь, устроены проще, чем исключительные системы, самой маленькой из которых в этом смысле оказывается E_6 . В свою очередь, для самых просто устроенных полупростых элементов в E_6 , E_7 и E_8 оценка m принимает последовательные значения 2, 3, 4.

В действительности примерно в то же время в диссертации второго автора [45], выполненной под руководством первого автора (по которой Николай Леонидович Гордеев был официальным оппонентом!), были получены точные утверждения о количестве и *типах* возможных вырождений. Эти результаты чрезвычайно важны как для отождествления порождений пар торов, которое мы начинаем в работе [25], так и для получения точных оценок на мощность поля в результатах о надгруппах торов и многих других аналогичных вопросах [11]. Теорема о *количестве* вырождений в основном доказана в [27], где рассмотрен самый сложный случай, однако даже для этого результата полное доказательство никогда ранее не публиковалось.

В свою очередь, конкретная *классификация* вырождений анонсирована в [28] и, с чуть большим количеством деталей, в [83]. Однако, за исключением рассмотренного в [44] случая $\Phi = A_l$, детальные доказательства также никогда не публиковались. Одна из причин этого состояла в том, что доказательства в диссертации второго автора [45] опирались на прямые компьютерные вычисления. Другой причиной было то, что в то время нам так и не удалось завершить программу построения геометрии корневых

торов. Поэтому мы не публиковали доказательства того, что воспринималось как вспомогательные результаты по отношению к этой главной цели.

Теорема 1 работы [17] утверждает, в частности, что для микровесов вообще все элементы $h_\omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0, 1$ лежат в одной и той же клетке. Сейчас мы убедимся, что для корневых торов предыдущий результат также можно значительно усилить по сравнению с общим случаем. Оказывается, что вне типичной клетки кроме единичного элемента может лежать еще не более двух других элементов этого тора.

Теорема 3. *В обозначениях теоремы 2 имеется не более одного $\theta \neq 1$ такого, что*

$$xh_\alpha(\theta)x^{-1} \in BwB, \quad xh_\alpha(\theta^{-1})x^{-1} \in Bw^{-1}B$$

для некоторого $w = w_\theta \neq w_0$.

Кстати, как установлено в [44], для случая $\Phi = C_l$ единственная возможность для θ в этой теореме это $\theta = -1$. При этом в -1 действительно наступает кратное вырождение. Именно этот факт объясняет роль длинных корневых инволюций в вычислениях работы [18]. То же соображение было снова использовано в [16]. Лишь совсем недавно, за счет гораздо более сложной техники Елизавете Дыбковой [29, 30] удалось отказаться в этих результатах от предположения $\text{char}(K) \neq 2$.

С нашей точки зрения, в том, что касается количества вырождений, теорема 3 является несколько неожиданной, так как в минимальном представлении группы Шевалле у элемента $h_\alpha(\varepsilon)$ почти всегда три различных собственных значения, а в присоединенном представлении группы типа E_8 даже пять. Поэтому можно ожидать, что, поскольку в этом последнем случае отвечающие за вырождение многочлены имеют большую степень, для случая E_8 должно возникать больше вырождений, чем для остальных систем. Однако в действительности этого не происходит.

Следующий результат был анонсирован в [28] и [83] и доказан в диссертации второго автора [45]. Однако это доказательство также никогда не публиковалось, за исключением легких случаев A_l и C_l (см. [9] и [44]). В настоящей статье мы приведем полное доказательство для всех типов, которое в основном следует гл. 3 диссертации [45], но при этом несколько иначе организовано, что позволяет чуть сократить перебор случаев, полностью избавиться от ссылок на компьютерные вычисления, проделать все руками и восстановить несколько пропущенных там возможностей для кратного вырождения.

Теорема 4. *В качестве нетривиальных вейлевских множителей в разложении Брюа длинных корневых элементов могут встречаться только следующие элементы.*

- Все элементы Коксетера систем типов $A_1, \tilde{A}_1, 2A_1, A_1 + \tilde{A}_1, 2\tilde{A}_1 \subseteq \Phi$ и тех $3A_1, 4A_1$, которые фактически лежат в какой-то подсистеме типа D_4 .

- Все элементы Коксетера систем типов $A_2 \subseteq \Phi$.

- Некоторые элементы Коксетера систем типов $A_3, D_4, B_3, G_2 \subseteq \Phi$.

Элементы Коксетера систем типа B_2 не реализуются.

Заметим, что подсистемы $3A_1$ и $4A_1$, содержащиеся в D_4 , это в точности подсистемы $D_2 + A_1, D_2 + \tilde{A}_1$, и $2D_2$ в B_l и D_l , а также подсистемы $3A_1''$ и $4A_1''$ в E_7 и E_8 . Интересно, что реализуется ли какой-то элемент $w \in W$ в качестве вейлевского фактора какого-то длинного корневого элемента, зависит не только от класса сопряженности w .

Первоначально мы планировали ограничиться тем, чтобы воспроизвести из диссертации [45] разбор нескольких трудных случаев и табл. 3 и 4, в которых перечислены все возможные вырождения в D_4 . Однако в процессе работы мы заметили, что таблица кратных вырождений на с. 61–62 диссертации содержит несколько пробелов, некоторые из которых появились вследствие пропуска двух возможностей в статье [44], а остальные пропущенные там инволюции присутствуют в тексте доказательства на с. 44–59, но не были перенесены в упомянутую таблицу.

Поэтому мы решили повторить все вычисления заново, от руки, восстановив при этом все пропущенные случаи. Заметим, впрочем, что неполнота таблицы кратных вырождений в [45] никак не влияет на справедливость основных результатов этой работы и, в частности, на теорему 4, так как еще в [8] было замечено, что все разрешенные инволюции и так реализуются! Новые случаи в теореме 4 возникают только в случае простых вырождений, а таблица простых вырождений на с. 60–61 полная.

Отметим такое следствие теоремы 4, связанное с тем, что внешние автоморфизмы системы D_4 реализуются в $W(E_6)$. В качестве вейлевских множителей в разложении Брюа длинных корневых элементов групп Шевалле типов E_6, E_7, E_8 могут встретиться элементы из 8 классов сопряженности группы Вейля. Напомним, что всего в $W(E_6), W(E_7)$ и $W(E_8)$ имеется 25, 61 и 109 классов соответственно (см. [56]).

Сформулируем, наконец, теорему о глубине вырождений. Зафиксируем длинный корневой тор $Q = Q_x, x \in G(\Phi, K)$, и рассмотрим наименьшую систему корней $\Delta \subseteq \Phi$ такую, что $Q \leq uG(\Delta, K)u^{-1}$ для некоторого $u \in U(\Phi, K)$. Пусть J — система простых корней Δ , содержащаяся в Φ^+ .

Обозначим через $l_J(w)$ длину элемента группы Вейля $w \in W(\Delta)$ по отношению к этой системе.

Следующий результат также анонсирован в [28] и [83] и доказан в диссертации второго автора [45]. Он сразу вытекает из построенной в процессе доказательства теоремы 4 табл. 3 простых вырождений.

Теорема 5. *В случае простого вырождения, иными словами, когда $\theta \neq -1$, а также в случае, когда $\theta = -1$, а w_0 является либо фундаментальным отражением, либо инволюцией типа $4A_1$, выполняется равенство $l_J(w_\theta) = l_J(w_0) - 1$.*

Во всех остальных случаях для $\theta = -1$ наступает кратное вырождение, иными словами, выполняется неравенство $l_J(w_{-1}) \leq l_J(w_0) - 2$.

Вообще говоря, для кратного вырождения длина w_{-1} обычно падает на 2, но может падать и больше, чем на 2. Таким образом, нельзя исключить того, что $l_J(w_{-1}) < l_J(w_0) - 2$. В любом случае, конечно, w_{-1} является инволюцией.

Вся оставшаяся часть статьи посвящена доказательству сформулированных здесь результатов и организована следующим образом. В §1 совсем коротко напоминаются основные обозначения, относящиеся к группам Шевалле. В §2 обсуждаются общие факты, относящиеся с экстраспециальным унитарным радикалам, а в §3 классифицируются орбиты унитарных радикалов борелевских подгрупп на возникающих при этом внутренних модулях Шевалле. На основе этого в §4 доказываются сформулированные выше теоремы 1 и 2. После этого все дальнейшие вычисления производятся непосредственно в группе Шевалле типа D_4 , и в §5 мы напоминаем некоторые нужные нам факты об этой группе и ее группе Вейля. В §6 прямыми матричными вычислениями мы доказываем теорему 3 для группы Шевалле типа D_4 , а в §7 полностью описываем возникающие при этом вырождения. В §8 мы сводим воедино полученные в двух предыдущих параграфах результаты и составляем таблицы всех возможных вырождений, что доказывает теоремы 4 и 5. Наконец, в §9 формулируются некоторые дальнейшие нерешенные задачи.

Частично содержание настоящей работы анонсировано в [28, 83]. В наших работах [14, 17, 20, 26] можно найти более широкое обсуждение общего контекста, причины, по которым мы в настоящее время вернулись к рассмотрению этого типа задач, а также большое количество дальнейших ссылок. Упомянем две такие мотивации здесь.

- С одной стороны, это потребности недавних работ первого автора и Владимира Нестерова [21–25], в которых делаются первые шаги в направлении развития геометрии микровесовых и длинных корневых торов.

В частности, результаты настоящей работы инструментальны при описании орбит группы Шевалле, действующей одновременным сопряжением на парах длинных корневых торов (см. [25]).

• С другой стороны, как стало ясно в самое последнее время, наши результаты естественно включаются в грандиозную программу описания пересечений классов сопряженных элементов и клеток Брюа в группах Шевалле, начатую работами Эриха Эллерса и Николая Гордеева [61–63] и получившую для *унипотентных* элементов замечательное развитие в работах Джорджа Люстига [72–75].

Настоящая работа наряду с [17] является одним из весьма немногочисленных примеров, когда полный ответ получен для [простейших классов] *полупростых* элементов.

§1. Основные обозначения

В качестве общих ссылок по группам Шевалле можно назвать работы [1, 44, 55].

1°. **Основные обозначения.** Пусть Φ — приведенная неприводимая система корней в l -мерном евклидовом пространстве V , а $(\ , \)$ — скалярное произведение на V . Для двух корней $\alpha, \beta \in \Phi$ через $\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) = (\beta, \alpha^\vee)$ обозначается соответствующее число Картана, где $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ — двойственный корень. Через $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee, \alpha \in \Phi\}$ обозначается двойственная система корней. Далее, $Q(\Phi)$ — решетка корней, порожденная всеми $\alpha \in \Phi$, а $P(\Phi)$ — решетка весов, состоящая из всех $\omega \in V$ таких, что $(\alpha^\vee, \omega) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha^\vee \in \Phi^\vee$. Зафиксируем систему простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ в Φ . Пусть Φ^+ и Φ^- — соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Выбор Π задает на $P(\Phi)$ следующий частичный порядок: $\lambda \succeq \mu$, если $\lambda - \mu = \sum t_i \alpha_i$, где все $t_i \geq 0$.

Далее, пусть K — поле; P — решетка, лежащая между $Q(\Phi)$ и $P(\Phi)$; $G = G(\Phi, K)$ — группа Шевалле типа Φ , P над K ; $T = T(\Phi, K)$ — расщепимый максимальный тор в G . В случае, когда $P = P(\Phi)$, группа $G = G_{sc}$ называется односвязной, а в случае $P = Q(\Phi)$ группа $G = G_{ad}$ называется присоединенной. Обычно мы предполагаем, что группа G односвязна. Для корня $\alpha \in \Phi$ и элемента $\xi \in K$ через $x_\alpha(\xi)$ обозначается соответствующий элементарный корневой унипотент в G . Для фиксированного α множество всех $x_\alpha(\xi)$ образует элементарную корневую унипотентную подгруппу $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in K\}$.

2°. Весовые элементы. Пусть $\omega \in P(\Phi^\vee)$. Тогда по определению $(\alpha, \omega) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Phi$. Таким образом, для $\varepsilon \in K^*$ можно определить K -характер $\chi = \chi_{\omega, \varepsilon}$ решетки корней $Q(\Phi)$ посредством $\chi_{\omega, \varepsilon}(\alpha) = \varepsilon^{(\alpha, \omega)}$. Теперь можно рассмотреть диагональный автоморфизм, связанный с этим характером (см. [5, 11, 17]). Обозначим через $h_\omega(\varepsilon)$ элемент, сопряжение при помощи которого реализует этот диагональный автоморфизм. Иными словами, этот элемент коммутирует со всеми элементами T и удовлетворяет следующему коммутационному соотношению

$$h_\omega(\varepsilon)x_\alpha(\xi)h_\omega(\varepsilon)^{-1} = x_\alpha(\varepsilon^{(\alpha, \omega)}\xi)$$

для всех $\alpha \in \Phi$, $\xi \in K$. Эти элементы, вообще говоря, принадлежат не самой группе G , а ее диагональному расширению \overline{G} — *расширенной группе Шевалле*, которая соотносится с обычной группой Шевалле так же, как полная линейная группа $GL(n, K)$ соотносится со специальной линейной группой $SL(n, K)$ или полная симплектическая группа $GSp(2l, K)$ соотносится с обычной симплектической группой $Sp(2l, K)$. Мы называем элемент h группы \overline{G} *весовым элементом* типа ω , если он сопряжен с некоторым $h_\omega(\varepsilon)$.

Теорема 2 опирается на следующее утверждение, которое, по существу, представляет собой теорему 4 работы [17].

Лемма 1. Пусть $\omega \in P(\Phi^\vee)$ и $x \in G$. Тогда для всех $\varepsilon \in K^*$, кроме конечного их числа, все весовые элементы $xh_\omega(\varepsilon)x^{-1}$ лежат в одной и той же клетке Брюа $BwB = Bw_0B$. При этом w_0 является инволюцией.

В действительности, конечно, в [17] соответствующий результат доказан для расширенных групп Шевалле, но так как доказательство использует только существование подходящего вложения в $GL(n, K)$, то сам этот факт тем более справедлив для обычных групп Шевалле.

3°. Подсистемы корней. В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться классификацией подсистем в системах корней. Такая классификация была получена в конце 1940-х годов Борелем–де Зибенталем и Дынкиным. Мы не будем полностью воспроизводить получающийся ответ, который можно найти, например, в [56] или [64].

Сделаем, впрочем, следующее замечание, чрезвычайно важное с точки зрения наших целей. Почти всегда две изоморфные подсистемы корней сопряжены. Все возникающие исключения легко перечислить.

- Если в Φ есть корни двух разных длин, в то время как все корни Δ имеют одинаковую длину, то Δ , вообще говоря, можно вложить в Φ двумя существенно различными способами: на длинные корни и на короткие

корни. В этих случаях мы пишем $\tilde{\Delta} \leq \Phi$ для вложения на короткие корни и $\Delta \leq \Phi$ для вложения на длинные корни.

- В системах корней B_l и D_l нужно различать $2A_1 = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_3 - e_4)\}$ от $D_2 = \{\pm e_1 \pm e_2\}$, а $A_3 = \langle 2A_1, e_2 - e_3 \rangle$ от $D_3 = \langle D_2, e_2 - e_3 \rangle$.

- В системах корней D_l , E_7 и E_8 некоторые системы Δ типа $A_{l_1} + \dots + A_{l_r}$, где все l_i нечетны, распадаются на два класса сопряженности, которые обозначаются через Δ' и Δ'' соответственно. В случае D_l эти два класса сопряжены при помощи внешнего автоморфизма.

Таким образом, например, подсистемы D_2 и $2A_1$, как и подсистемы D_3 и A_3 не сопряжены, хотя и изоморфны. В дальнейшем, говоря о подсистемах какого-то типа, мы всегда понимаем их *с точностью до сопряженности*. Например, говоря о паре корней, что они порождают D_2 , мы имеем в виду не только то, что эти корни ортогональны, а и то, что они порождают именно подсистему типа D_2 , т.е. могут быть переведены в пару $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ элементом группы Вейля.

§2. Экстраспециальные унитарные радикалы

В этом и следующем параграфах мы изучаем борелевские орбиты для подгрупп Леви параболических подгрупп с экстраспециальным унитарным радикалом, при действии сопряжением на этих радикалах. Эти несложные результаты технического характера являются одним из ключевых шагов в доказательстве основных результатов настоящей статьи. Для подгрупп Леви параболических подгрупп с абелевым унитарным радикалом аналогичный анализ проведен в §10–12 работы [17].

Пусть δ — максимальный корень системы Φ . Во всех случаях, кроме $\Phi = A_l$, корень δ ортогонален ко всем простым корням, кроме единственного корня, обозначаемого в дальнейшем α_k . При этом $\alpha_k = \alpha_2$ для $\Phi = B_l, D_l, E_6$ и G_2 ; $\alpha_k = \alpha_1$ для $\Phi = C_l, F_4$ и E_7 ; и, наконец, $\alpha_k = \alpha_8$ для $\Phi = E_8$. Иными словами, α_k — это тот единственный простой корень, с которым δ соединен в расширенной диаграмме Дынкина. В исключительном случае $\Phi = A_l$, $l \geq 2$, корень δ соединен с двумя простыми корнями, α_1 и α_l . Кстати, это еще один повод относить систему A_1 к серии C_l , иными словами, считать группу SL_2 симплектической, а не линейной, как это обычно делается.

Обозначим через Σ множество тех положительных корней системы Φ , которые отличны от δ и не ортогональны δ . Иными словами, множество Σ состоит из тех корней, у которых коэффициент при α_k равен 1:

$$\Sigma = \left\{ \alpha = \sum m_i \alpha_i \in \Phi \mid m_k = 1 \right\},$$

а в исключительном случае $\Phi = A_l$ — из тех корней, у которых *либо* коэффициент при α_1 равен 1, *либо* коэффициент при α_l равен 1. Сам же корень δ является единственным корнем, у которого коэффициент при α_k равен 2 или соответственно *оба* коэффициента при α_1 и α_l равны 1.

Множество Σ имеет следующую структуру: сумма двух любых корней из Σ не является корнем, за исключением пар вида $(\alpha, \delta - \alpha)$. Иными словами, группа

$$E(\Sigma \cup \{\delta\}, K) = X_\delta \prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$$

изоморфна группе Гейзенберга. В частности, ее центр равен коммутанту и совпадает с корневой подгруппой X_δ .

Пусть, далее, Δ — замыкание множества $\Pi \setminus \{\alpha_k\}$ или в случае $\Phi = A_l$ множества $\Pi \setminus \{\alpha_1, \alpha_l\}$. Иными словами, $\Delta = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \delta) = 0\}$. Если разность двух корней из Σ является корнем, то она обязана принадлежать Δ . Тогда диаграмма множества Σ совпадает с весовой диаграммой некоторого представления группы Шевалле $G(\Delta, K)$ типа Δ (см. ссылки в [85, 78, 87, 90]).

Причина этого совершенно ясна. Действительно, множество Σ абелево, и, таким образом, по коммутационной формуле Шевалле группа $E(\Sigma)$ абелева. На самом деле, это в точности унитарный радикал максимальной параболической подгруппы $Q_i = \overline{G}(\Delta_\omega \cup \Sigma_\omega)$. В частности, он инвариантен относительно сопряжения при помощи элементов из подгруппы Леви Q_i . Группа $G(\Delta_\omega, K)$ является полупростой подгруппой этого фактора Леви и, таким образом, действует на $E(\Sigma_\omega)$ сопряжением:

$$y \mapsto xyx^{-1}, \quad x \in G(\Delta_\omega, K), \quad y \in E(\Sigma_\omega).$$

Для всех пар (Φ, ω) тип $\Delta = \Delta_\omega$, старший вес ρ и размерность n этого представления перечислены в табл. 1.

Мы рассматриваем это множество как частично упорядоченное множество по отношению к обычному порядку, определенному выбором системы простых корней. Иными словами, $\alpha \succeq \beta$, если и только если $\alpha - \beta = \sum t_i \alpha_i$, где $t_i \geq 0$ для всех $1 \leq i \leq l$. Рассмотрим *диаграмму Хассе* этого частично упорядоченного множества. Вершины этой диаграммы соответствуют корням из Σ_ω , причем две вершины α и β соединяются ребром в том и только том случае, когда их разность является простым корнем α_i . В этом случае мы помечаем это ребро меткой i . Как и во многих других работах, в которых используются диаграммы, мы читаем их *справа налево и снизу вверх*. Таким образом, ребро с меткой i , читаемое слева направо, выражает *вычитание*, а вовсе не *прибавление* корня α_i . Мы используем также обычное соглашение, состоящее в том, что метки

на противоположных сторонах параллелограмма совпадают и поэтому не ставятся.

Таблица 1
Представления в экстраспециальных радикалах

Φ	α_k	Δ	ρ	n
A_l	α_1, α_l	A_{l-2}	$\varpi_1 \oplus \varpi_{l-2}$	$2l - 2$
B_l	α_2	$B_{l-2} + A_1$	(ϖ_1, ϖ_1)	$4l - 6$
C_l	α_1	C_{l-1}	ϖ_1	$2l - 2$
D_l	α_2	$D_{l-2} + A_1$	(ϖ_1, ϖ_1)	$4l - 8$
E_6	α_2	A_5	ϖ_3	20
E_7	α_1	D_6	ϖ_6	32
E_8	α_8	E_7	ϖ_7	56
F_4	α_4	C_3	ϖ_3	14
G_2	α_2	A_1	$3\varpi_1$	4

§3. Орбиты унипотентного радикала борелевской подгруппы

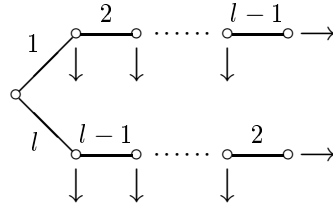
Теперь мы переходим непосредственно к изучению борелевских орбит в перечисленных в табл. 3 представлениях. Начнем с описания орбит унипотентного радикала $U(\Delta, K)$. Это в точности те случаи, которые нужны нам для доказательства теоремы 1.

Предложение. Пусть (V, ρ) — одно из представлений, перечисленных в табл. 1. Предположим, что $\text{char}K \neq 2$, если $\Phi = B_l, F_4$. Тогда каждая орбита $U = U(\Delta, K)$ на V содержит вектор $v = \sum a_\gamma v_\gamma$ такой, что его носитель $S(v) = \{\gamma \in \Sigma \mid a_\gamma \neq 0\}$ вместе с корнем δ порождает подсистему, содержащуюся в D_4 или ее скручивании.

Доказательство. Как и в работе [17] мы разберем все возникающие здесь возможности case by case. При этом как и в [17] для упрощения обозначений мы фактически изучаем орбиты унипотентного радикала *противоположной* борелевской подгруппы $U^- = U^-(\Delta, K)$, но симметрия по отношению к положительным и отрицательным корням гарантирует, что

полученный нами ответ сохраняется также и для унипотентного радикала стандартной борелевской подгруппы $U = U(\Delta, K)$.

• **Случай** $\Phi = A_l$. Для этого случая диаграмма множества $\Sigma \cup \{\delta\}$ выглядит следующим образом. Стрелки здесь обозначают ребра с номерами 1 или l , показывающие, как на самом деле Σ соединяется с Δ . При этом вертикальные стрелки, выходящие из верхней компоненты, имеют метку l , а из нижней — метку 1. Горизонтальные стрелки показывают соединение с нулевым весом.



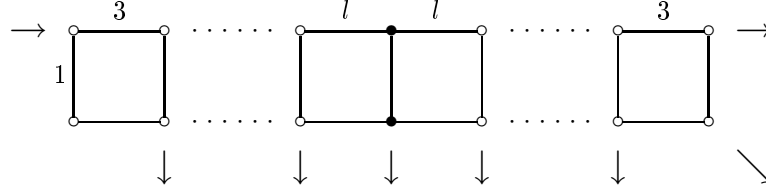
Рассмотрим вектор $v = \sum a_\gamma v_\gamma$, где $\gamma \in \Sigma$, $a_\gamma \in K$. Пусть α — наибольший номер корня в верхней цепочке такой, что $a_\alpha \neq 0$. Действуя на v матрицей из $U^-(A_{l-2}, K)$, а именно матрицей $u_1 = \prod x_{\gamma-\alpha} (\mp a_\gamma a_\alpha^{-1}) \in U^-(\Delta, K)$, где произведение берется по всем корням $\gamma \neq \alpha$ из верхней цепочки меньшим, чем α , мы можем сделать нулевыми все координаты с номерами из верхней цепочки, кроме a_α .

Замечание. С учетом разложения Брюа это вычисление эквивалентно утверждению, что в качестве первой строки матрицы из специальной линейной группы над полем может фигурировать любая ненулевая строка. Аналогичным образом истолковываются и рассмотренные далее случаи.

Теперь рассмотрим наибольший корень β в нижней цепочке, *отличный от $\delta - \alpha$* , такой, что в получившемся векторе $u_1 v$ координата с номером β отлична от 0. Проводя теперь с вектором $u_1 v$ такое же преобразование с матрицей $u_2 = \prod x_{\gamma-\beta} (\mp a_\gamma a_\beta^{-1}) \in U^-(\Delta, K)$, где произведение берется по всем корням $\gamma \neq \beta$ из нижней цепочки, меньшим, чем β , мы можем сделать нулевыми все координаты с номерами из верхней цепочки, кроме $a_{\delta-\alpha}$ и a_β . Так как по условию $\beta \neq \delta - \alpha$ и, значит, $\alpha + (\gamma - \beta)$ не является корнем для таких γ , никаких нетривиальных прибавлений в верхней цепочке при этом не произошло.

Это значит, что в векторе $u_2 u_1 v$ не более трех ненулевых координат, а именно a_α , $a_{\delta-\alpha}$ и a_β . Ясно, что вместе с δ корни α , β , $\delta - \alpha$ порождают подсистему $A_3 = \langle \alpha, \delta, \beta \rangle$, что завершает анализ случая A_l .

• **Случай** $\Phi = B_l$. Это самый сложный из классических случаев. Стрелки на приведенной ниже диаграмме множества Σ изображают ребра с меткой α_2 , причем вертикальные стрелки обозначают соединение Σ к B_{l-2} , левая горизонтальная стрелка приходит из δ , правая уходит в A_1 , а диагональная показывает соединение с нулевым весом в диаграмме присоединенного представления типа B_l .



Рассмотрим вектор $v = \sum a_\gamma v_\gamma$, где $\gamma \in \Sigma$, $a_\gamma \in K$. Пусть вначале наибольший номер ненулевой координаты a_α есть длинный корень $\alpha \in \Sigma$. Тогда корни Σ , ортогональные к α образуют следующую конфигурацию: сеть Ω длины $2l - 3$ и еще один корень α^* , порождающий вместе с α подсистему D_2 . Действуя на v матрицей

$$u_1 = \prod x_{\gamma-\alpha}(\mp a_\gamma a_\alpha^{-1}) \in U^-(\Delta, K),$$

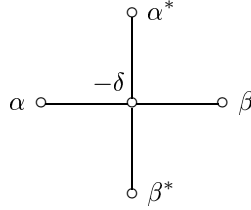
где произведение берется по всем корням меньшим, чем α , и не ортогональным к α , кроме корня $\delta - \alpha$, мы можем сделать нулевыми все координаты с номерами, не ортогональными к α , кроме, быть может, координаты с номером $\delta - \alpha$.

Рассмотрим теперь ненулевую координату a_β с наибольшим номером $\beta \in \Omega$. Пусть вначале β тоже длинный. Тогда в Ω есть ровно один длинный корень, не ортогональный к β , а именно β^* . Употребление здесь звездочки имеет тот же смысл, что и выше, а именно это единственный положительный корень, порождающий вместе с β подсистему типа D_2 . Умножая $u_1 v$ на матрицу

$$u_2 = \prod x_{\gamma-\beta}(\mp a_\gamma a_\beta^{-1}) \in U^-(\Delta, K),$$

где произведение берется по всем $\gamma \in \Omega$ меньшим, чем β , и отличным от β^* , мы можем считать, что у столбца $u_2 u_1 v$ все координаты, кроме, быть может, координат с номерами $\alpha, \alpha^*, \delta - \alpha, \beta, \beta^*$, нулевые.

Нам остается выяснить, какую подсистему корней эти корни порождают вместе с δ . Ясно, что $\delta - \alpha$ здесь можно отбросить, а остальные четыре корня вместе с $-\delta$ образуют следующую диаграмму:

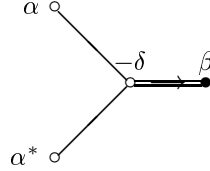


которая как раз и является расширенной диаграммой Дынкина типа D_4 .

Продолжим считать, что α длинный, но предположим теперь, что β короткий. В этом случае в Ω нет корней, ортогональных к β , и полагая

$$u_2 = \prod x_{\gamma-\beta}(\mp a_\gamma a_\beta^{-1}/2) \in U^-(\Delta, K),$$

мы можем считать, что все координаты v , кроме координат с номерами $\alpha, \alpha^*, \delta - \alpha, \beta$, нулевые. Снова добавляя $-\delta$ и отбрасывая корень $\delta - \alpha$, который линейно зависит от остальных, мы приходим к диаграмме



которая как раз и является расширенной диаграммой Дынкина типа B_3 .

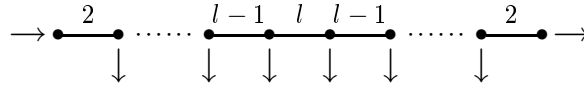
Нам остается еще рассмотреть случай, когда наибольший номер α ненулевой координаты вектора v короткий. Полагая

$$u_1 = \prod x_{\gamma-\alpha}(\mp a_\gamma a_\alpha^{-1}/2) \in U^-(\Delta, K),$$

где произведение берется по всем γ меньшим, чем α , таким, что $\gamma - \alpha$ является корнем, мы можем добиться того, чтобы все координаты с такими номерами γ в векторе $u_1 v$ стали равными 0.

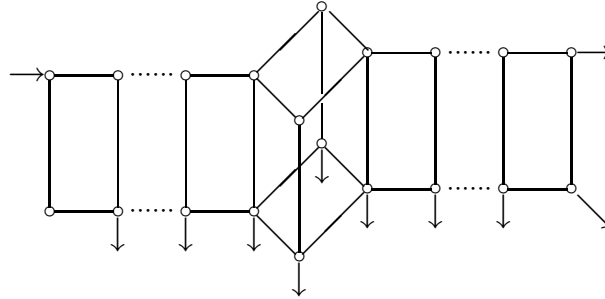
Пусть теперь $\beta \neq \alpha$ — наибольший среди оставшихся номеров ненулевых координат. Так как разность любых двух непропорциональных коротких корней является корнем, то β длинный. Умножая теперь $u_1 v$ на такой же элемент $u_2 \in U^-(\Delta, K)$, что и в случае, когда оба корня α, β длинные, мы видим, что можем сделать нулевыми все координаты, кроме координат с номерами α, β, β^* . Это значит, что мы снова приходим к точно такой же диаграмме Дынкина, как и в случае, когда α длинный, а β короткий, но с заменой α на β . Иными словами, мы снова получаем систему B_3 . Это завершает рассмотрение случая B_l в предположении $\text{char}(K) \neq 2$.

• **Случай** $\Phi = C_l$. Для этого случая диаграмма множества Σ является цепью, состоящей целиком из коротких корней, разность которых является корнем из Δ . Стрелки обозначают здесь корень α_1 , вертикальные показывают, как Σ приклеивается к Δ , а горизонтальные обозначают соответственно соединение с δ и с нулевым весом.



Тем самым действуя точно так же, как обычно, можно сделать нулевыми все координаты, кроме одной.

• **Случай** $\Phi = D_l$. Диаграмма множества Σ приведена на следующем рисунке. Стрелки здесь отвечают корню α_2 , причем их направление имеет тот же смысл, что и в случае B_l .

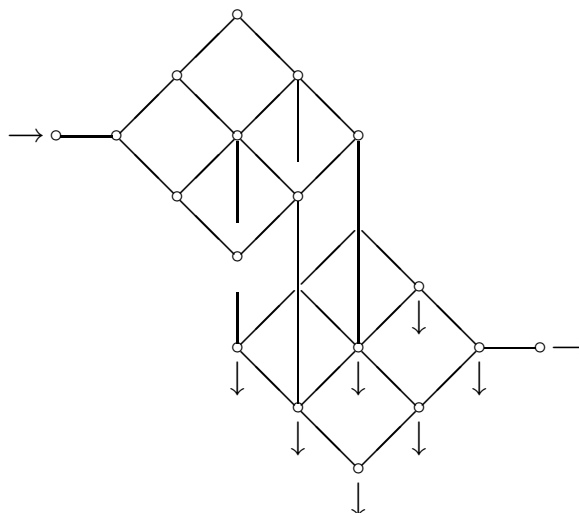


Корни $\gamma \in \Sigma$, ортогональные к одному корню $\alpha \in \Sigma$, это корень α^* , порождающий вместе с ним систему типа D_2 и множество Ω , имеющее ту же структуру, что представление группы типа $D_{l-3} = \langle \alpha_4, \dots, \alpha_l \rangle$ со старшим весом ϖ_4 .

Как и выше, пусть α — наибольший номер ненулевой координаты вектора $v = \sum a_\gamma v_\gamma$, где $\gamma \in \Sigma$, $a_\gamma \in K$. Умножая v на такую же матрицу, что и в случае, когда $\Phi = B_l$, а корень α длинный, можно добиться того, чтобы все координаты вектора $u_1 v$, кроме, быть может, координат с номерами $\alpha, \alpha^*, \delta - \alpha$ и координат с номерами из Ω , были нулевыми.

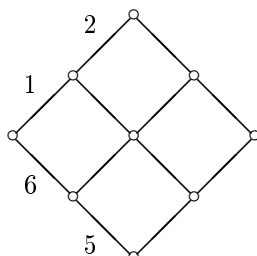
Заменим теперь v на $u_1 v$. Если $\beta \in \Omega$ — наибольший корень среди корней $\gamma \in \Omega$ таких, что $a_\gamma \neq 0$, то, умножая v на ту же матрицу u_2 , что и в случае, когда $\Phi = B_l$, а оба корня α и β длинные, можно считать, что у вектора $u_2 u_1 v$ все координаты, кроме координат с номерами $\alpha, \alpha^*, \delta - \alpha, \beta, \beta^*$, нулевые. Но как мы уже знаем из анализа случая B_l , эти корни вместе с корнем δ порождают подсистему типа D_4 , что и завершает описание этого случая.

- **Случай** $\Phi = E_6$. Диаграмма множества Σ приведена на следующем рисунке. Это в точности диаграмма фундаментального представления ϖ_4 системы типа $A_5 = \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \rangle$. Стрелка обозначает корень α_2 .



Пусть α — максимальный среди элементов Σ , для которых $a_\alpha \neq 0$. Как обычно, умножая v на элемент $u \in U^-(A_5, K)$, мы можем с самого начала считать, что все координаты a_γ , кроме, быть может, координат с номерами $\alpha, \delta - \alpha$ и координат с номерами, ортогональными α , нулевые.

Корни из Σ , ортогональные к одному из них, образуют множество Ω следующего вида:

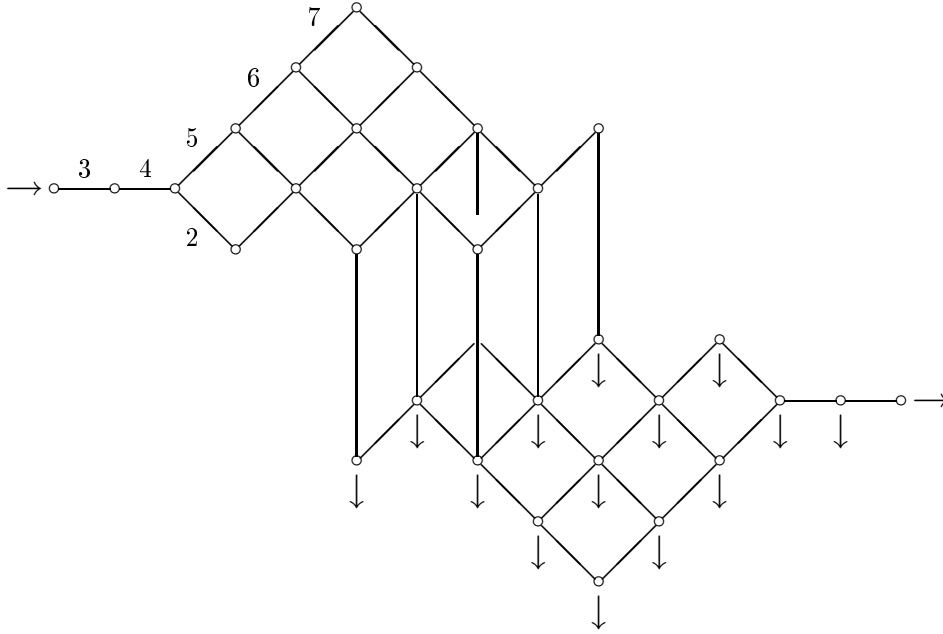


Нумерация здесь соответствует выбору $\alpha = \delta - \alpha_4$. Вспомним теперь, что орбиты унитарной группы типа $2A_2$ на множестве Ω уже изучены нами в работе [17] при рассмотрении микровесового элемента типа $h_{\varpi_3}(\varepsilon)$ для системы A_5 , нумерация обычная. При этом выяснилось, что в орбите каждого такого вектора $v = \sum a_\gamma c_\gamma, \gamma \in \Omega$, под действием $U^-(2A_2, K)$

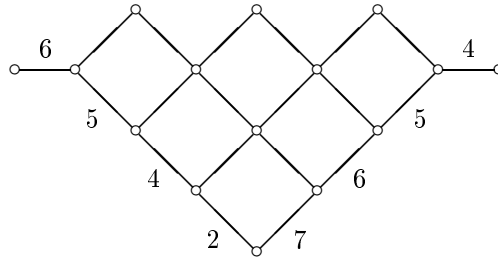
найдется вектор, у которого не более трех ненулевых координат, с номерами $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \Omega$, причем корни $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ попарно ортогональны.

Снова корни $\delta, \alpha, \delta - \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ порождают подсистему Дынкина типа D_4 , что и завершает анализ этого случая.

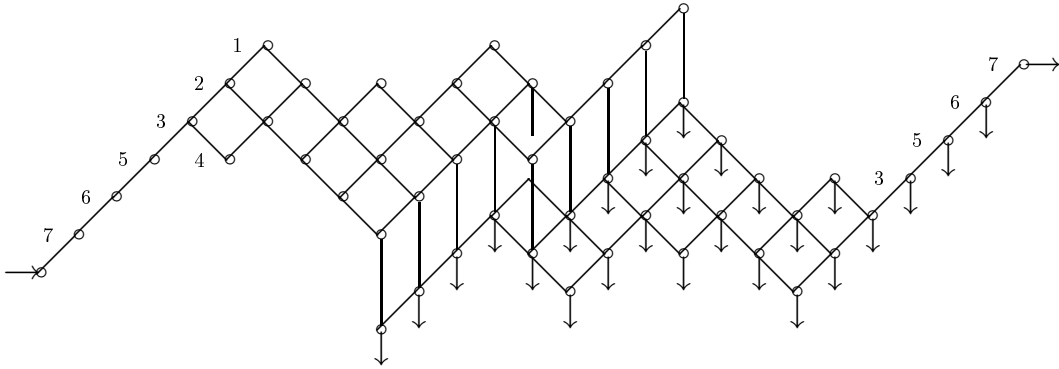
• **Случай $\Phi = E_7$.** Для группы типа E_7 множество Σ имеет диаграмму, изображенную на следующем рисунке. Стрелка здесь обозначает корень α_1 . Если убрать стрелки, то остается диаграмма полуспинорного представления группы типа D_6 .



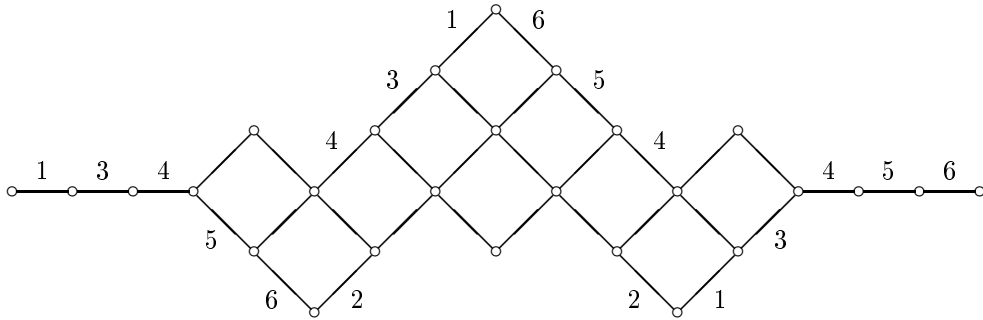
Корни из Σ , ортогональные к одному корню $\alpha \in \Sigma$, образуют множество Ω , которое имеет ту же диаграмму, что и представление со старшим весом ϖ_6 группы типа $A_5 = \langle \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \rangle$. Изобразим диаграмму этого множества с нумерацией, отвечающей выбору $\alpha = \delta - \alpha_2$:



• **Случай $\Phi = E_8$.** Для группы типа E_8 множество Σ имеет диаграмму, изображенную ниже. Это самый сложный случай в том смысле, что не только система Φ , но и система Δ исключительная. Стрелки здесь изображают корень α_8 , причем левая горизонтальная стрелка приходит из старшего корня δ , правая горизонтальная стрелка соединяет корень α_8 с нулевым весом, а 27 вертикальных стрелок соединяют унипотентный радикал параболической подгруппы P_8 с фактором Леви типа E_7 . Вертикальные линии отвечают корню α_7 и склеивают представления (E_6, ϖ_6) и (E_6, ϖ_1) по десятимерному представлению D_5 .

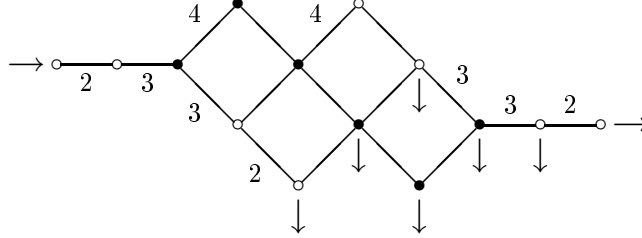


Корни $\gamma \in \Sigma$, образуют множество Ω , имеющее ту же структуру, что представление группы типа E_6 со старшим весом ϖ_1 . Диаграмма этого множества воспроизведена ниже, при этом нумерация соответствует выбору $\alpha = \delta - \alpha_8$.

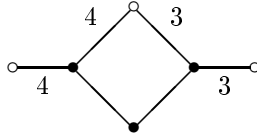


Этот случай также был разобран в доказательстве предложения 3 работы [17] и дает самое большое три попарно ортогональных корня $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, каждый из которых ортогонален α .

• **Случай** $\Phi = F_4$. Для группы типа F_4 множество Σ имеет диаграмму, изображенную ниже. Стрелки здесь соответствуют корню α_1 .



Если максимальный номер α ненулевой координаты вектора v длинный, то мы можем сделать нулевыми все координаты с неортогональными ему номерами, кроме, быть может, координаты с номером $\delta - \alpha$. Ортогональные к α корни образуют множество Ω со следующей диаграммой:



Нумерация здесь соответствует случаю $\alpha = \delta - \alpha_1$.

Если теперь координата, отвечающая старшему корню β множества Ω , ненулевая, то, умножая вектор v на подходящие корневые элементы $x_{\alpha_4}(\mp a_{\beta-\alpha_4} a_{\beta}^{-1})$ и $x_{\alpha_3+\alpha_4}(\mp a_{\beta-\alpha_3-\alpha_4} a_{\beta}^{-1})$, мы можем сделать нулевыми координаты при двух из трех входящих в Ω коротких корнях. Если в получившемся векторе координата при следующем по высоте длинном корне γ нулевая, то мы можем точно так же при помощи $x_{\alpha_3}(\mp a_{\gamma-\alpha_3} a_{\gamma}^{-1})$ сделать нулевой и последнюю координату с коротким номером. Это оставляет нам не более четырех ненулевых координат при попарно ортогональных длинных корнях плюс ненулевую координату при $\delta - \alpha$. Перечисленные корни порождают вместе с δ подсистему типа D_4 .

Если же координата a_{β} нулевая или если после следующего шага исключения мы получаем нулевую координату a_{γ} , то у нас каждый раз — при условии обратимости 2(!) — кроме координат с номерами α и $\delta - \alpha$ будут оставаться еще две ненулевых координаты, номер одной из которых длинный, а второй — короткий. Это значит, что в этом случае мы попадаем в B_3 . Случай, когда старший номер ненулевой координаты длинный, рассмотрен нами полностью.

Нам остается еще рассмотреть случай, когда старший номер ненулевой координаты короткий. Так как разность двух любых непропорциональных коротких корней является длинным корнем, мы можем, действуя на v корневыми элементами вида $x_{\beta-\alpha}(\mp a_\beta a_\alpha^{-1})$, сделать нулевыми все остальные координаты, номера которых короткие корни. Оставшиеся длинные корни, ортогональные к α , образуют множество с диаграммой

$$\circ \text{---} \overset{4}{\quad} \circ \text{---} \overset{3+3}{\quad} \circ \text{---} \overset{4}{\quad} \circ$$

которая в худшем случае даст нам еще два ортогональных длинных корня. Таким образом, мы опять получаем конфигурацию корней, которая уже встречалась нам в случае B_l , снова приводящую к B_3 .

• **Случай** $\Phi = G_2$. Группа типа G_2 сама является скручиванием D_4 , и поэтому доказывать здесь нечего. \square

§4. Доказательство теорем 1 и 2

Рассмотрим длинный корневой тор Q_x . Пусть $x = uwvd$, где $u \in U$, $w \in W$, $v \in U_w^-$, $d \in T$, — разложение Брюа элемента x . Пусть $v \in \prod x_\alpha(v_\alpha)$, где $v_\alpha \in K$, а произведение берется по всем положительным корням в следующем порядке: вначале идут все множители из $E(\Sigma \cup \{\delta\})$ в произвольном порядке, а потом все множители из $G(\Delta, K)$, также в произвольном порядке. Так как $v \in U_w^-$, v_α может быть отлично от 0 только для корней $\alpha \in \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-$.

Прежде всего, заметим, что d коммутирует с $h_\delta(\varepsilon)$ и не играет никакой роли в дальнейшем вычислении. Поэтому мы можем сразу положить $d = e$. Вспомним теперь, что $G(\Delta, K)$ коммутирует с $h_\delta(\varepsilon)$, а все $x_\gamma(*)$, $\gamma \in \Sigma$, коммутируют между собой по модулю X_δ . Таким образом, с учетом нашего соглашения о порядке корней в выражении для v из коммутационного соотношения вытекает, что

$$vh_\delta(\varepsilon)v^{-1} = \prod x_\gamma((1 - \varepsilon)v_\gamma)x_\delta(*)h_\delta(\varepsilon),$$

где произведение берется по всем $\gamma \in \Sigma$. Коэффициент в $x_\delta(*)$ зависит от ε квадратично и его тоже можно явно вычислить, если уточнить порядок множителей $x_\gamma(v_\gamma)$, $\gamma \in \Sigma$, но мы не будем здесь этого делать, так как он не играет никакой роли в доказательстве теоремы 1.

Положим теперь

$$z(\varepsilon) = wvh_\delta(\varepsilon)v^{-1}w^{-1} = \prod x_{w\gamma}(\pm(1 - \varepsilon)v_\gamma)x_{w\delta(*)}h_{w\delta}(\varepsilon).$$

Представляя элемент w в виде $w = w'w''$, где $w'' \in W(\Delta)$, а $w'(\Delta \cap \Pi) \subseteq \Phi^+$, мы видим, что w'' оставляет на месте δ и переставляет корни из Σ .

Таким образом, он не меняет вид $vh_\delta(\varepsilon)v^{-1}$, а лишь перенумеровывает коэффициенты при $x_\gamma(*)$ и, возможно, меняет их знаки. Таким образом, мы можем, не теряя общности, считать, что $w'' = e$, $w = w'$.

Далее, так как $uz(\varepsilon)u^{-1}$ лежит в том же классе Брюа, что и $z(\varepsilon)$, $u \in U(\Phi, K)$, а в теореме мы как раз и интересуемся только видом Q_x по модулю сопряжения при помощи элемента $u \in U(\Phi, K)$, множитель u также можно с самого начала отбросить, и, таким образом, считать, что $Q_x = \{z(\varepsilon), \varepsilon \in K^*\}$.

Множество корней $w\Sigma$ имеет ту же структуру, что и само множество Σ . В частности, для всех $\Phi \neq A_l$ в множестве $w\Sigma$ есть такой наименьший корень, что все остальные получаются из него цепочкой прибавлений корней $w(\alpha)$, где $\alpha \in \Delta \cap \Pi$. Эти корни больше не обязаны быть простыми, но по условию, наложенному нами на $w = w'$, все они положительны. Зафиксируем теперь изоморфизм $E(w\Sigma \cup \{w\delta\})/X_{w\delta}$ с V , переводящий $x_{w\gamma}(1)X_{w\delta}$ в v_γ .

Это означает, что, применяя предложение к образу вектора $z(\varepsilon)$ при этом изоморфизме, можно заключить, что для каждого $\varepsilon \in K^*$ существует такая матрица $g \in U(\Phi, K)$, что

$$gz(\varepsilon)g^{-1} = \prod x_{-\gamma}((\varepsilon - 1)a_\gamma)x_{w\delta}(*h_{w\delta}(\varepsilon)),$$

где произведение берется по некоторому множеству Θ положительных корней, содержащемуся в $-w\Sigma$, такому, что элементы Θ вместе с $w\delta$ порождают подсистему, получающуюся из D_4 .

Нам, однако, нужно показать, что такое приведение можно осуществить для всех $\varepsilon \in K^*$ одновременно. Заметим для этого, что при приведенном изоморфизме элементы $z(\varepsilon)$, отвечающие $\varepsilon \neq 0, 1$, переходят в пропорциональные векторы. Так как все преобразования в доказательстве предложения осуществлялись при помощи умножений на корневые унипотенты $x_{\beta-\alpha}(\mp a_\beta/a_\alpha)$, а в исключительном случае $\Phi = B_l$, кроме того, на $x_{\beta-\alpha}(\mp a_\beta/(2a_\alpha))$, все эти преобразования одни и те же для двух пропорциональных векторов.

Иными словами, убирая сопряжениями при помощи элемента $U(\Delta, K)$ ненулевые коэффициенты в корнях $\gamma \in w\Sigma$ для какого-то одного элемента $z(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0, 1$, мы одновременно убираем их во всех остальных таких элементах. Номера остающихся ненулевых коэффициентов не зависят от выбора $\varepsilon \neq 0, 1$ и, как утверждает предложение, вместе с $w\delta$ они порождают подсистему, получающуюся из D_4 . Это завершает доказательство теоремы 1.

В свою очередь, теорема 2 сразу вытекает из теоремы 1, леммы 1 \approx теорема 4 работы [17], и классически известного описания инволюций в группах Вейля [31, 56].

Замечание. Стоит сразу предостеречь читателя, что, несмотря на полный внешний параллелизм, это вычисление радикально отличается от вычисления, проведенного в §14 работы [17] при нахождении разложения Брюа микровесовых торов. Дело в том, что там векторному пространству V был изоморфен сам рассматриваемый унитарный радикал. Здесь же унитарный радикал неабелев, а V изоморфна его фактор-группа по коммутанту, равному X_δ . Таким образом, если принять во внимание коэффициент $z(\varepsilon)$ в корне δ , который зависит от ε не линейно, как остальные коэффициенты, а квадратично, то картина меняется. В частности, получающиеся в разложении Брюа $z(\varepsilon)$ элементы группы Вейля могут, вообще говоря, зависеть от выбора $\varepsilon \neq 0, 1$.

§5. Группа D_4

Теорема 1 фокусирует внимание на корневых торах в группе Шевалле типа D_4 . Все остальные вычисления в настоящей статье можно проводить в какой-то группе типа D_4 , например, в специальной ортогональной группе $SO(8, K)$, и сейчас мы совсем коротко напомним основные связанные с ней обозначения.

Как всегда, $G = GL(n, K)$ и $SL(n, K)$ обозначает полную и специальную линейные группы степени n над K соответственно. Как обычно, для матрицы $x \in G$ через x_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i, j) , так что $x = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$. Через $x^{-1} = (x'_{ij})$ обозначается обратная к x матрица, а через x^t — транспонированная. Как обычно, e — единичная матрица порядка n , а e_{ij} — стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой в позиции (i, j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях.

Мы интересуемся случаем $n = 2l$. Следуя [55], нам будет удобно занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \dots, l, -l, \dots, -1$. Обозначим через $f = f_n$ перьединичную матрицу степени n , у которой на побочной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0. Иными словами, элементы матрицы $f = (f_{ij})$ определяются условием $f_{ij} = \delta_{i, -j}$.

Расщепимая специальная ортогональная группа $SO(2l, R)$ состоит из тех матриц x из специальной линейной группы $SL(2l, R)$, которые сохраняют билинейную форму с матрицей Грама g , совпадающей с $f_{2\lambda}$. Иными словами, $SO(2l, R)$ состоит из тех матриц $x \in G$, для которых $\det x = 1$

и $xf_2\lambda x^t = f_{2l}$. Таким образом, $\mathrm{SO}(2l, R)$ сохраняет квадратичную форму $x_1x_{-1} + \dots + x_lx_{-l}$. Условие ортогональности матрицы $x = (x_{ij})$ проще всего использовать в следующей форме: $x'_{ij} = x_{-j, -i}$.

С точки зрения теории алгебраических групп эта форма ортогональной группы $\mathrm{SO}(2l, K)$ является (промежуточной) группой Шевалле типа D_l . Так как мы не будем использовать никаких других форм ортогональной группы, в дальнейшем мы опускаем слово „расщепимая“.

Преимуществом такой нумерации базиса является то, что при этом расщепимый максимальный тор в $\mathrm{SO}(2l, K)$ совпадает с группой содержащихся там диагональных матриц, стандартная борелевская подгруппа состоит из содержащихся в $\mathrm{SO}(2l, K)$ верхних треугольных матриц и т.д.

Элементарные корневые унитарные элементы $x_\alpha(\xi)$ в четной ортогональной группе $\mathrm{SO}(2l, K)$ — это в точности *элементарные ортогональные трансвекции*, т.е. матрицы вида

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j, -i}(-\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j, -i},$$

где $1 \leq i, j \leq -1$, $i \neq \pm j$, $\xi \in K$. В соответствии с этим (элементарные) корневые полупростые элементы $h_\alpha(\varepsilon)$ в $\mathrm{SO}(2l, K)$ имеют вид

$$D_{ij}(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj} + (\varepsilon - 1)e_{-j, -j} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i, -i}$$

для $i \neq \pm j$ и обратимого $\varepsilon \in K^*$. Например, корневой элемент в $\mathrm{SO}(8, K)$, отвечающий максимальному корню, равен

$$h_\delta(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, 1, 1, 1, 1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}),$$

именно этот элемент используется в вычислениях следующих параграфов.

Опишем теперь строение группы Вейля $W(D_l)$. Напомним, что она является подгруппой индекса 2 октаэдральной группы Oct_l , изоморфной группе Вейля $W(B_l) = W(C_l)$. Октаэдральную группу Oct_l проще всего описать как группу перестановок множества $\{1, \dots, l, -l, \dots, -1\}$, состоящую из всех перестановок $w \in S_{2l}$ таких, что $w(-i) = -w(i)$. Группа $W(D_l)$ состоит из перестановок, меняющих четное число знаков.

Иными словами, Oct_l представляет собой группу перестановок означенного³ ортонормированного базиса $\pm e_1, \dots, \pm e_l$ евклидова пространства \mathbb{R}^l , а $W(D_l)$ — ее подгруппа индекса 2, состоящая из перестановок, меняющих четное число знаков. Возьмем какой-то базисный вектор e_i и рассмотрим наименьшее r такое, что $w^r(e_i) = \pm e_i$. Здесь могут представиться две возможности.

³Здесь и далее *означенный* используется в качестве русского эквивалента английского термина *signed*.

• Либо $w^r(e_i) = e_i$ — в этом случае говорят, что e_i входит в означенный цикл *четного* типа r ; разумеется, вместе с циклом

$$\sigma = (e_i, w(e_i), \dots, w^{r-1}(e_i))$$

в перестановку w входит *противоположный* цикл

$$\bar{\sigma} = (-e_i, -w(e_i), \dots, -w^{r-1}(e_i)),$$

при этом циклы σ и $\bar{\sigma}$ независимы, а их произведение $\sigma\bar{\sigma}$ *четно*, независимо от четности r ,

• либо $w^r(e_i) = -e_i$. В этом случае говорят, что e_i входит в означенный цикл *нечетного* типа $-r$. Ясно, что цикл нечетного типа имеет вид

$$\sigma = (e_i, w(e_i), \dots, w^{r-1}(e_i), -e_i, -w(e_i), \dots, -w^{r-1}(e_i)),$$

так что его носитель симметричен относительно замены знака, а сам цикл σ *нечетен*, также независимо от четности r .

Каждый элемент $w \in \text{Oct}_l \leq S_{2l}$ можно разложить в произведение независимых циклов, при этом циклы четного типа входят парами, каждый цикл входит вместе со своим противоположным. Циклы нечетного типа входят индивидуально, но так как их носители симметричны относительно замены знака, длина цикла нечетного типа четна. Перестановке w сопоставляется ее *означенный цикленный тип*, в котором перечисляются:

- длина *одного* их каждой пары циклов четного типа,
- со знаком „-“ *половина* длины каждого цикла нечетного типа.

Например, $(1, -1)$ — цикл типа -1 , а $(1, 2)(-1, -2)$ — произведение двух противоположных циклов типа 2 , и даст таким образом вклад 2 в цикленный тип. В то же время $(1, 2, -1, -2)$ имеет цикленный тип -2 .

Ясно, что если $\nu = (n_1, \dots, n_s)$ — цикленный тип элемента из Oct_l , то $|n_1| + \dots + |n_s| = l$. При этом $w \in W(D_l)$ состоит в точности из тех перестановок, в цикленное разложение которых входит *четное* количество циклов нечетного типа.

Означенный цикленный тип *почти* однозначно описывает класс сопряженности элемента w . Единственный нюанс состоит в том, что перестановки цикленного типа (n_1, \dots, n_s) , где все $n_i > 0$ *четны*, причем $n_1 + \dots + n_s = l$, распадаются на *два* сопряженных класса в $W(D_l)$ — но, конечно, сопряжены в $W(B_l) = \text{Oct}_l$.

Кроме означенного цикленного типа, классы сопряженности групп Вейля часто описываются своими графами Картера. Для элемента Кокстера подсистемы $\Delta \subseteq \Phi$ — а никакие другие сопряженные классы и не встречаются в наших основных результатах — граф Картера совпадает с диаграммой Дынкина системы Δ . Так устроены все графы Картера без

циклов, общее определение можно найти в [56]. Во многих случаях граф Картера нагляднее, чем цикленный тип. Для удобства читателя в следующих таблицах мы указываем граф Картера возникающих элементов.

Кроме того, для сокращения записи в таблицах $-r$ часто заменяется на \bar{r} . В табл. 2 указаны цикленный тип ν перестановки $w \in W(D_4)$, граф Картера C ее класса сопряженности, порядок m перестановки w и количество n ее сопряженных.

Таблица 2
Классы сопряженности группы $W(D_4)$

ν	w	C	m	n
1111	e	\emptyset	1	1
11-1-1	$(1, -1)(2, -2)$	D_2	2	6
-1-1-1-1	$(1, -1)(2, -2)(3, -3)(4, -4)$	$2D_2$	2	1
211	$(12)(-2, -1)$	A_1	2	12
2-1-1	$(12)(-2, -1)(3, -3)(4, -4)$	$A_1 + D_2$	2	12
22	$(12)(-2, -1)(3, 4)(-4, -3)$	$(2A_1)'$	2	6
22	$(12)(-2, -1)(3, -4)(4, -3)$	$(2A_1)''$	2	6
31	$(123)(-3, -1, -2)$	A_2	3	32
-21-1	$(1, -2, -1, 2)(3, -3)$	D_3	4	24
4	$(1234)(-3, -4, -1, -2)$	A_3'	4	24
4	$(1, 2, 3, -4)(-3, 4, -1, -2)$	A_3''	4	24
-2-2	$(1, -2, -1, 2)(3, -4, -3, 4)$	$D_4(a_1)$	4	12
-3-1	$(1, 2, -3, -1, -2, 3)(4, -4)$	D_4	6	32

§6. Доказательство теоремы 3

Из теоремы 1 вытекает, что количество вырождений в группе Шевалле любого типа не превосходит количество вырождений в группе Шевалле типа D_4 . Так как, кроме того, количество вырождений не зависит от выбора группы в данном классе изогении, в дальнейшем мы можем интересоваться только разложением Брюа корневых торов в (расщепимой) специальной ортогональной группе $SO(8, K)$.

Рассмотрим некоторый элемент $xh_\delta(\varepsilon)x^{-1}$ длинного корневого тора Q_x . Пусть $x = uwd$, где $u \in U$, $w \in W$, $v \in U_w$, $d \in T$, — приведенное справа разложение Брюа. Тогда $xh_\delta(\varepsilon)x^{-1}$ лежит в той же клетке Брюа, что $wvh_\delta(\varepsilon)v^{-1}w^{-1}$. Кроме того, так как $h_\delta^{-1}(\varepsilon)w^{-1} = w^{-1}h_{w(\delta)}(\varepsilon)^{-1}$, в той же клетке лежит и элемент

$$z(\varepsilon) = w[v, h_\delta(\varepsilon)]w^{-1}.$$

Вычислим этот элемент.

Для этого вспомним, что элементы $v^{-1} = (v'_{ij})$ связаны с элементами $v = (v_{ij})$ равенством $v'_{ij} = -v_{-j, -i}$. Кроме того, в силу ортогональности v имеем $v_{ij} = -v_{-j, -i}$ при $i \neq j$, $(i, j) \neq (1, -2), (2, -1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} v(\varepsilon)_{ij} &= -v(\varepsilon)_{-j, -i} = -(\varepsilon - 1)v_{ij}, & i = 1, 2, & j = \pm 3, \pm 4, \\ v(\varepsilon)_{1, -2} &= (\varepsilon - 1)(\varepsilon v_{2, -1} - v_{1, -2}), \\ v(\varepsilon)_{2, -1} &= (\varepsilon - 1)(\varepsilon v_{1, -2} - v_{2, -1}), \\ v(\varepsilon)_{1, -1} &= (\varepsilon - 1)^2 v_{1, -1}, & v(\varepsilon)_{2, -2} &= (\varepsilon - 1)^2 v_{2, -2}, \end{aligned}$$

и $v(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij}$ во всех остальных случаях.

Обратим внимание на то, что, в то время как почти все элементы матрицы $v(\varepsilon)$ либо совпадают с элементами единичной матрицы, либо линейно зависят от ε и имеют единственный корень, $\varepsilon = 1$. В то же время следующие четыре элемента зависят от ε квадратично.

- Элементы $v(\varepsilon)_{1, -2}$ и $v(\varepsilon)_{2, -1}$, кроме корня $\varepsilon = 1$, могут иметь еще по одному корню, а именно $\theta = v_{1, -2}/v_{2, -1}$ и θ^{-1} соответственно. В дальнейшем эти элементы будут называться *сомнительными*.

- У элементов $v(\varepsilon)_{1, -1}$ и $v(\varepsilon)_{2, -2}$ корень $\varepsilon = 1$ кратный.

Введем еще одно используемое в доказательстве теоремы 3 обозначение. А именно обратимся к алгоритму вычисления разложения Брюа фиксированного элемента z . Этот алгоритм описан, например, в §13 работы [17] и связан с обращением или необращением в 0 миноров матрицы z , начиная с юго-западного угла.

Обозначим минор матрицы z , стоящий на пересечении строк с номерами i_1, \dots, i_2 и столбцов с номерами j_1, \dots, j_2 через $M_{i_1 \dots i_2}^{j_1 \dots j_2}(z)$. Напомним, что всюду в настоящем и следующем параграфах мы имеем дело только с матрицами из $SO(8, K)$, строки и столбцы которых занумерованы следующим образом: 1, 2, 3, 4, -4, -3, -2, -1.

Определим теперь последовательность горизонтальных опорных миноров матрицы z следующим образом.

- $\Delta^1(z) = M_{-1}^{j_1}(z)$, если $M_{-1}^{j_1}(z) = z_{-1, j_1} \neq 0$, в то время как $M_{-1}^j(z) = 0$ для всех j , предшествующих j_1 .

• $\Delta^2(z) = M_{-1,-2}^{j_1 j_2}(z)$, если $M_{-1,-2}^{j_1 j_2}(z) \neq 0$, в то время как $M_{-1,-2}^{j_1 j}(z) = 0$ для всех j , предшествующих j_2 .

• $\Delta^3(z) = M_{-1,-2,-3}^{j_1 j_2 j_3}(z)$, если $M_{-1,-2,-3}^{j_1 j_2 j_3}(z) \neq 0$, в то время как

$$M_{-1,-2,-3}^{j_1 j_2 j}(z) = 0$$

для всех j , предшествующих j_3 .

• $\Delta^4(z) = M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3 j_4}(z)$, если $M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3 j_4}(z) \neq 0$, в то время как

$$M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3 j}(z) = 0$$

для всех j , предшествующих j_4 .

Заметим, что в силу ортогональности матрицы z среди индексов j_1, j_2, j_3, j_4 не может быть противоположных.

Последовательность вертикальных опорных миноров

$$\Delta_1(z) = M_{i_1}^1(z), \quad \Delta_2(z) = M_{i_1 i_2}^{12}(z), \quad \Delta_3(z) = M_{i_1 i_2 i_3}^{123}(z), \quad \Delta_4(z) = M_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{1234}(z)$$

определяется совершенно аналогично.

Приступим теперь собственно к доказательству теоремы 3. Заметим, прежде всего, что нам вообще не нужно рассматривать случаи, когда образы сомнительных элементов под действием w лежат выше главной диагонали. В этом легко убедиться двумя способами.

• С одной стороны, в этих случаях опорные миноры вообще не зависят от сомнительных элементов, так что

$$\Delta^s(z(\varepsilon))/(\varepsilon - 1)^s = \Delta^s(z(\eta))/(\eta - 1)^s.$$

Следовательно, опорные миноры не обращаются в 0 ни для какого $\varepsilon \neq 1$.

• С другой стороны, в этих случаях $z(\varepsilon)$ содержится в регулярно вложенной подгруппе типа A_3 или D_3 , так что утверждение теоремы 3 было доказано уже в [9].

Сформулируем теперь еще одно общее соображение, резко упрощающее анализ вырождений.

Лемма. *Опорные миноры*

$$M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3 j_4}(z(\varepsilon)), \quad M_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{1234}(z(\varepsilon))$$

не имеют никаких корней, отличных от корней опорных миноров меньшего порядка.

Доказательство. В самом деле, пусть, например, η — корень опорного минора $M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3 j_4}(z(\varepsilon))$, не являющийся корнем опорных миноров $M_{-1}^{j_1}(z(\varepsilon))$, $M_{-1,-2}^{j_1 j_2}(z(\varepsilon))$, $M_{-1,-2,-3}^{j_1 j_2 j_3}(z(\varepsilon))$. Пусть w_0 — элемент группы

Вейля, фигурирующий в разложении Брюа элемента $z(\varepsilon)$ в общем положении. Тогда, так как $M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3 j_4}(z(\varepsilon))$ и $M_{-1,-2,-3,-4}^{j_1 j_2 j_3, -j_4}(z(\varepsilon))$ не могут обращаться в 0 одновременно, в нашем торе встречался бы элемент

$$z(\eta) \in Bw_0w_{j_4,-j_4}B.$$

Но это невозможно, так как этот элемент отличается от w_0 четностью и, следовательно, вообще не лежит в группе Вейля $W(D_4)$. \square

Перейдем теперь к анализу основных вариантов, когда образы сомнительных элементов под действием w лежат ниже главной диагонали. В разборе случаев $*$ изображает те элементы матрицы $z(\varepsilon)$, которые линейно зависят от ε , а \bullet — те ее элементы, которые зависят от ε квадратично и могут, следовательно, вызывать появление новых корней в содержащих их опорных минорах. Для наглядности нулевые элементы матриц заменяются точками.

• Начнем с двух младших вариантов, которые в процессе доказательства теорем 4 и 5 фигурируют как А и В:

$$z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & . & * & . & * & . & . & . \\ . & 1 & * & . & * & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ * & * & \bullet & 1 & \bullet & . & * & * \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ * & * & \bullet & . & \bullet & 1 & * & * \\ . & . & * & . & * & . & 1 & . \\ . & . & * & . & * & . & . & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & . & * & * & . & . & . & . \\ . & 1 & * & * & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ * & * & \bullet & \bullet & 1 & . & * & * \\ * & * & \bullet & \bullet & . & 1 & * & * \\ . & . & * & * & . & . & 1 & . \\ . & . & * & * & . & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Для примера детально разберем первый из этих вариантов, второй разбирается совершенно аналогично. В дальнейшем мы, как правило, не будем подробно перечислять все возникающие подварианты, а ограничимся указанием только на те из них, где фактически может возникать вырождение.

В первом из двух указанных вариантов могут представиться следующие возможности.

○ Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^3(z(\varepsilon))$, $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{3,-4}(z(\varepsilon))$, то третий опорный минор равен $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{3,-4,1}(z(\varepsilon))$.

○ Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^{-4}(z(\varepsilon))$, $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{-4,3}(z(\varepsilon))$, то третий опорный минор равен $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-4,3,2}(z(\varepsilon))$.

○ Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^{-1}(z(\varepsilon))$, $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{-1,3}(z(\varepsilon))$, то третий опорный минор равен $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-1,3,2}(z(\varepsilon))$.

◦ Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^{-1}(z(\varepsilon))$, $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{-1,-4}(z(\varepsilon))$, то третий опорный минор равен $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-1,-4,3}(z(\varepsilon))$ или $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-1,-4,-3}(z(\varepsilon))$.

Во всех этих подвариантах получающиеся опорные миноры третьего порядка не имеют неединичных корней, так что никаких вырождений не происходит. Остается еще следующий подвариант.

◦ Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^{-1}(z(\varepsilon))$, $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{-1,-2}(z(\varepsilon))$, то третий опорный минор равен $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-1,-2,-3}(z(\varepsilon))$ или $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-1,-2,-4}(z(\varepsilon))$.

Второй из получающихся миноров может иметь неединичный корень. Симметричным образом неединичный корень появится у вертикального опорного минора $\Delta_3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-4}^{123}(z(\varepsilon))$. Так как никаких других вырождений не происходит, эти корни должны быть взаимно обратны.

И во втором варианте среди всех возникающих возможностей только опорные миноры $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{-1,-2,-3}(z(\varepsilon))$ и $\Delta_3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{123}(z(\varepsilon))$ могут иметь неединичные корни, что снова дает не более двух вырождений.

• В следующих трех по высоте вариантах, которые в дальнейшем фигурируют как С, D и E соответственно, матрица $z(\varepsilon)$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & . & . & . & * & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ * & \bullet & 1 & * & * & \bullet & . & * \\ . & * & . & 1 & . & * & . & . \\ . & * & . & . & 1 & * & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ * & \bullet & . & * & * & \bullet & 1 & * \\ . & * & . & . & . & * & . & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & . & . & * & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & * & 1 & . & * & . & . & . \\ * & \bullet & * & 1 & \bullet & * & . & * \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & * & . & . & * & 1 & . & . \\ * & \bullet & * & . & \bullet & . & 1 & * \\ . & * & . & . & * & . & . & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & . & * & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & * & 1 & * & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ * & \bullet & * & \bullet & 1 & * & . & * \\ . & * & . & * & . & 1 & . & . \\ * & \bullet & * & \bullet & . & * & 1 & * \\ . & * & . & * & . & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Ни в одном из этих вариантов нетривиальных вырождений не происходит. Убедимся в этом, для примера, в первом из этих вариантов.

◦ Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^2(z(\varepsilon))$, то $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{21}(z(\varepsilon))$, так что ни один из опорных миноров третьего порядка $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{21j}(z(\varepsilon))$ не имеет неединичных корней.

◦ Если же $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^{-3}(z(\varepsilon))$, то имеет место одна из следующих возможностей:

$$\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{-3,4}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2}^{-3,-4}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2}^{-3,-2}(z(\varepsilon)).$$

Ни один из этих миноров, как и содержащие их опорные миноры третьего порядка, не имеют неединичных корней.

Во втором варианте если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^2(z(\varepsilon))$, то обязательно $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{21}(z(\varepsilon))$, но ни $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{21,-4}(z(\varepsilon))$, ни $\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{21,-4}(z(\varepsilon))$ не имеют неединичных корней. Третий вариант полностью аналогичен второму.

• В варианте F матрица $z(\varepsilon)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & * & * & 1 & . & . & . & . \\ . & * & * & . & 1 & . & . & . \\ * & \bullet & \bullet & * & * & 1 & . & * \\ * & \bullet & \bullet & * & * & . & 1 & * \\ . & * & * & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix},$$

никаких вырождений также не происходит. В этом можно убедиться следующим образом. Если $\Delta^1(z(\varepsilon)) = M_{-1}^2(z(\varepsilon))$, то $\Delta^2(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2}^{21}(z(\varepsilon))$. Ясно, что ни в одном из следующих подвариантов

$$\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{214}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2,-3}^{21,-4}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2,-3}^{21,-3}(z(\varepsilon))$$

неединичных корней нет. Нам остается еще рассмотреть подвариант, когда

$$\Delta^3(z(\varepsilon)) = M_{-1,-2,-3}^{213}(z(\varepsilon)).$$

Легкое вычисление показывает, что подозрительные элементы входят в этот опорный минор с противоположными коэффициентами, пропорциональными $(\varepsilon - 1)^3$. Таким образом, он снова имеет вид $(\varepsilon - 1)^4\lambda$, для некоторого $\lambda \in K^*$.

• В варианте G матрица $z(\varepsilon)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ \bullet & 1 & * & * & * & * & \bullet & . \\ * & . & 1 & . & . & . & * & . \\ * & . & . & 1 & . & . & * & . \\ * & . & . & . & 1 & . & * & . \\ * & . & . & . & . & 1 & * & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ \bullet & . & * & * & * & * & \bullet & 1 \end{pmatrix},$$

все вырождения видны на уровне обращения в 0 индивидуальных элементов. В самом деле, если $\Delta^1 = M_{-1}^k(z(\varepsilon))$, где k предшествует -2 , то как $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{k,-2}(z(\varepsilon))$, так и

$$\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{k,-2,1}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2,-3}^{k,-2,-3}(z(\varepsilon))$$

не имеют неединичных корней. С другой стороны, минор $\Delta^1 = M_{-1}^{-2}(z(\varepsilon))$ может иметь один неединичный корень — обратный корню $\Delta_1 = M_2^1(z(\varepsilon))$. Но тогда, конечно, ни $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{-2,-1}(z(\varepsilon))$, ни $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{-2,-1,-3}(z(\varepsilon))$ не имеют неединичных корней.

• Следующие три варианта, обозначаемые в дальнейшем H, I, J соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \bullet & * & 1 & * & * & \bullet & * & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & * & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & 1 & \cdot \\ \bullet & * & \cdot & * & * & \bullet & * & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & 1 & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & 1 & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & * & * & 1 & \bullet & * & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & * & 1 & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & 1 & \cdot \\ \bullet & * & * & \cdot & \bullet & * & * & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & 1 & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & 1 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & * & * & \bullet & 1 & * & * & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & * & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \bullet & * & * & \bullet & \cdot & * & * & 1 \end{pmatrix},$$

уже несколько сложнее.

Проиллюстрируем новое встречающееся здесь явление на примере первого из них. Минор $\Delta^1 = M_{-1}^{-3}(z(\varepsilon))$ может иметь неединичный корень. Ясно, что опорные миноры $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{-3,-1}(z(\varepsilon))$ и $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{-3,-1,-2}(z(\varepsilon))$ не имеют неединичных корней. Имеется еще одна возможность, которая представляется проблематичной. А именно опорный минор $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{-3,-2}(z(\varepsilon))$, на первый взгляд, может иметь неединичный корень η , отличный от корня опорного минора $\Delta^1 = M_{-1}^{-3}(z(\varepsilon))$. Однако несложное вычисление, использующее ортогональность матрицы $z(\varepsilon)$, показывает, что этот корень обязан совпадать с неединичным корнем $\Delta_1 = M_3^1(z(\varepsilon))$, так что мы снова получаем не более двух вырождений.

Анализ двух остальных вариантов совершенно аналогичен.

Нам остается еще рассмотреть два старших и самых трудных случая.

- В субдоминантном варианте К имеем

$$z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & 1 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & * & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & * & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & * & \bullet & * & * & 1 & * & \cdot \\ * & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \bullet & * & \bullet & * & * & \cdot & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Перечислим возникающие возможности.

◦ Если $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$, $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$, $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{123}(z(\varepsilon))$, то у первых двух миноров очевидно нет неединичных корней, а у третьего их нет потому, что сомнительные элементы входят в него с противоположными коэффициентами.

◦ Если $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$, $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$, а $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{124}(z(\varepsilon))$ или $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{12,-4}(z(\varepsilon))$, то опорный минор третьего порядка имеет не более одного неединичного корня, причем этот корень обратен корню вертикального опорного минора $\Delta_3 = M_{123}^{123}(z(\varepsilon))$ или $\Delta_3 = M_{124}^{123}(z(\varepsilon))$ соответственно. Таким образом, здесь снова происходит не более двух вырождений.

◦ Если $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$, $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$, а $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{12,-3}(z(\varepsilon))$, то нетривиальных вырождений нет.

◦ Если $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$, $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{13}(z(\varepsilon))$, то $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{142}(z(\varepsilon))$ и нетривиальных вырождений снова нет.

- Если $\Delta^1 = M_{-1}^2(z(\varepsilon))$, то $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{21}(z(\varepsilon))$. Ясно, что

$$\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{213}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2,-3}^{21,-3}(z(\varepsilon))$$

нетривиальных корней не имеют. С другой стороны, в подвариантах

$$\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{214}(z(\varepsilon)), M_{-1,-2,-3}^{21,-4}(z(\varepsilon)),$$

вырождений, как обычно, не больше двух.

◦ Пусть теперь $\Delta^1 = M_{-1}^3(z(\varepsilon))$, причем $\Delta^1(\eta) = 0$. Ясно, что тогда $\Delta_3(\eta^{-1}) = 0$. Легко видеть, что ни $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{34}(z(\varepsilon))$ ни $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{3,-4}(z(\varepsilon))$ не имеют неединичных корней. С другой стороны, $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{341}(z(\varepsilon))$ или соответственно $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{3,-4,1}(z(\varepsilon))$ может иметь нетривиальный корень. Однако снова непосредственное вычисление, использующее ортогональность матрицы $z(\varepsilon)$, показывает, что этот корень равен η^{-1} . Это значит, что и в этом подварианте возникает не больше двух нетривиальных вырождений.

○ Пусть, наконец, $\Delta^1 = M_{-1}^3(z(\varepsilon))$, а $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{3,-2}(z(\varepsilon))$, причем $\Delta^1(\eta) = 0$ и $\Delta^2(\zeta) = 0$. Легко видеть, что в этом случае $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{3,-2,1}(z(\varepsilon))$ не имеет новых корней. Кроме того, ненулевой минор матрицы $z(\zeta)$ в строках с номерами $-1, -2$ — это $M_{-1,-2}^{3,-1}(z(\zeta))$. Тем самым $M_{-1,-2,-3}^1(\zeta) = 0$, так что $\zeta = \eta^{-1}$, и снова возникает не более двух нетривиальных вырождений. Это и заканчивает анализ субдоминантного варианта.

• Нам остается еще рассмотреть вариант общего положения L, когда

$$z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & * & * & * & * & 1 & \cdot \\ \bullet & \bullet & * & * & * & * & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Фактически этот вариант, как самый сложный, был разобран уже в [27], где утверждалось, что все остальные варианты рассматриваются аналогично, но проще. Для полноты воспроизведем доказательство оттуда.

○ Пусть вначале $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$. Убедимся, что $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$ имеет не более двух неединичных корней. В самом деле,

$$M_{-1,-2}^{12}(\varepsilon) = \begin{vmatrix} (\varepsilon - 1)(\varepsilon v_{2,-1} - v_{1,-2}) & (\varepsilon - 1)^2 v_{2,-2} \\ (\varepsilon - 1)^2 v_{1,-1} & (\varepsilon - 1)(\varepsilon v_{1,-2} - v_{2,-1}) \end{vmatrix}.$$

Вычисление показывает, что $\Delta^{12}(\varepsilon) = (\varepsilon - 1)^2(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + a)$, так что неединичные корни этого минора взаимно обратны.

Если при этом $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{123}(z(\varepsilon))$, то, так как этот минор не имеет никаких новых корней, никаких других вырождений не возникает.

С другой стороны, если $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{124}(z(\varepsilon))$, то хотя бы один из элементов $z(\varepsilon)_{-3,1}$ или $z(\varepsilon)_{-3,2}$ отличен от 0. В самом деле, если $z(\varepsilon)_{-3,1} = 0$, то $M_{-1,-2,-3}^{123}(z(\varepsilon)) \neq 0$, поэтому мы можем считать, что $z(\varepsilon)_{-3,1} \neq 0$. В этом случае поступим следующим образом. Сопрягая $z(\varepsilon)$ при помощи элементарной ортогональной трансвекции $T_{12}(z(\varepsilon)_{-3,2}/z(\varepsilon)_{-3,1})$, что не меняет рассматриваемые миноры, мы получим в юго-западном углу

$$\begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot & * \\ \bullet & \bullet & * & * \end{pmatrix}.$$

Заметим, что наличие нуля в позиции $(-2, 2)$ вытекает из равенства $M_{-1,-2,-3}^{123} = 0$. Таким образом, опорный минор $M_{-1,-2,-3}^{124}(z(\varepsilon))$ не имеет никаких корней, кроме корней $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$.

◦ Подвариант $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$, $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$, $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{12,-4}(z(\varepsilon))$ рассматривается совершенно аналогично предыдущему.

◦ Пусть теперь $\Delta^1 = M_{-1}^1(z(\varepsilon))$, $\Delta^2 = M_{-1,-2}^{12}(z(\varepsilon))$, $\Delta^3 = M_{-1,-2,-3}^{12,-3}(z(\varepsilon))$. Если $\Delta^3(\zeta) = 0$, но при этом $\Delta^2(\zeta) \neq 0$, то в силу ортогональности ни один из миноров $M_{-1,-2,-3}^{12k}(z(\zeta))$, $k = 3, 4, -4, -3$, не может быть ненулевым, что противоречит обратимости матрицы $z(\zeta)$.

◦ Пусть, наконец, $\Delta^1 = M_{-1}^2(z(\varepsilon))$ имеет нетривиальный корень η . При этом автоматически $M_{-1}^1(z(\eta^{-1})) = 0$. Точно такие же рассуждения, как в предыдущем подварианте, показывают, что и здесь никаких нетривиальных вырождений, кроме $\varepsilon = \eta, \eta^{-1}$, не возникает.

Это завершает разбор старшего варианта и вместе с тем доказательство теоремы 3.

§7. Полное описание вырождений в D_4

Теорема 3 отвечает на вопрос, *сколько* двойных смежных классов BwB в разложении Брюа пересекает данный длинный корневой тор. Сейчас мы займемся выяснением того, *какие именно* классы он пересекает.

Для этого вспомним, что все нетривиальные элементы $y(\varepsilon) = xh_\delta(\varepsilon)x^{-1}$, кроме самое большее двух, лежат в одном и том же классе Bw_0B , $w_0^2 = e$. А именно в этом классе лежат все $y(\varepsilon)$, для которых ε не является корнем ни одного из опорных миноров. Нам остается только выяснить, что происходит при $\varepsilon = \theta, \theta^{-1}$, где θ и θ^{-1} — корни каких-то опорных миноров. А именно нужно снова пройти по доказательству теоремы 3 и проследить, какие еще миноры автоматически обращаются в 0 в корнях опорных миноров. Это и даст нам полную картину вырождений и послужит тем самым доказательством теорем 4 и 5.

Это проделано на с. 44–64 диссертации второго автора [42] с использованием таблиц на с. 73–115. Получающиеся при этом результаты суммированы в следующем параграфе в форме табл. 3 и 4, где перечислены все простые и кратные вырождения соответственно в группе Шевалле типа D_4 . Сейчас мы проведем полный анализ вырождений в D_4 , необходимый для построения этих таблиц. По существу этот анализ следует тому же плану, что и в [45], но организован чуть иначе, что позволяет нам сразу исключить те ситуации, когда вырождений заведомо не происходит.

Вернемся к обозначениям из доказательства теоремы 3. А именно пусть $x \in G(D_4, K)$ и $Q_x = \{xh_\delta(\varepsilon)x^{-1}, \varepsilon \in K^*\}$ — соответствующий длинный корневой тор. Далее, пусть $x = uwvd$, где $u \in U$, $w \in W$, $v \in U_w$, $d \in T$, — приведенное справа разложение Брюа элемента x . Как и при доказательстве теоремы 3 в дальнейшем мы будем смотреть не на сам

элемент $y(\varepsilon) = xh_\delta(\varepsilon)x^{-1}$, а на элемент $z = z(\varepsilon) = w[v, h_\delta(\varepsilon)]w^{-1}$, лежащий в той же клетке Брюа, что и y .

Предположим, что общий элемент тора Q_x лежит в классе Bw_0B . Для каких w он может образоваться? В действительности нас, конечно, интересует не сам элемент w , а только его класс по модулю $W(3A_1)$, для подсистемы $3A_1$, порожденной $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. Количество таких классов равно $192/8 = 24$. Однако половина из них, а именно те, для которых сомнительные элементы лежат выше главной диагонали, не представляют для нас никакого интереса, так как в этих случаях никаких дополнительных вырождений при $\varepsilon \neq 0, 1$ происходить не может.

Это оставляет нас с анализом $24/2 = 12$ возможностей для w , которые соответствуют 12 рассмотренным в доказательстве теоремы 3 возможностям A–L для образа унипотентного радикала U_2 . Сейчас мы пробежимся по всем 44 элементам w_0 группы $W(D_4)$ порядка ≤ 2 . Так как $w_0 = e$ вырождаться не может, в дальнейшем мы рассматриваем только инволюции.

В действительности вложение $A_3 \subseteq D_4$ показывает, что значительная часть этого анализа, а именно изучение вырождений, возникающих для инволюций типов A_1, D_2 и $2A_1$, фактически уже проведена нами в [9, 44]. Однако существование трех несопряженных вложений A_3 в D_4 , а именно D_3, A'_3 и A''_3 , требует довольно значительных усилий по переводу этих результатов на язык D_4 . Поэтому мы решили рассмотреть все инволюции в D_4 единообразно в контексте вычислений предыдущего параграфа. В то же время анализ случаев $A_1 + D_2$ и $2D_2$, которые как раз и приводят к появлению новых классов сопряженности в п. (3) теоремы 4, проведен только в [45] и ранее никогда не публиковался.

Инволюции класса A_1 . Имеется 12 инволюций вида $(ij)(-j, -i)$, где $j \neq \pm i$. Первые четыре случая, представляют собой фундаментальные отражения. Чтобы нумерация строк в табл. 3 и 4 совпадали, мы не включаем их в табл. 4.

- $w_0 = (34)(-4, -3)$ может получаться в вариантах A, D, F, I и K. Ясно, однако, что сомнительные элементы могут влиять на тип $z = z(\varepsilon)$ только в варианте A и внутри этого случая, только если все элементы y ниже и левее них равны 0. Отсюда вытекает, что $v_{1,-2} = -v_{2,-1}$, так что нетривиальные корни обоих сомнительных элементов равны -1 . Так как длина w_0 равна 1, то вырождение может происходить только в e , так что $z(-1) \in B$.

- $w_0 = (3, -4)(4, -3)$ может получаться в вариантах B, E, F, J и K. Точно такое же рассуждение, как в предыдущем случае, показывает, что вырождение происходит только в варианте B при $\varepsilon = -1$, при этом снова $z(-1) \in B$.

- $w_0 = (23)(-3, -2)$ может получаться в вариантах С, D, E, H, L. Снова точно такое же рассуждение, как в двух первых случаях, показывает, что вырождение происходит только в варианте С при $\varepsilon = -1$, при этом снова $z(-1) \in B$.

- $w_0 = (12)(-2, -1)$ может получаться в вариантах G, H, I, J, K. Снова точно такое же рассуждение показывает, что вырождение происходит только в варианте G при $\varepsilon = -1$, при этом снова $z(-1) \in B$.

До сих пор нам встречались только отсутствие вырождений либо кратные вырождения. Анализ следующего случая чуть тоньше, так как здесь в зависимости от равенства нулю некоторых элементов могут возникать как простые, так и кратные вырождения.

- $w_0 = (24)(-4, -2)$ может получаться в вариантах A, C, D, F, I, L. Ясно, что сомнительные элементы могут влиять на тип $z = z(\varepsilon)$ только в варианте D, и только если $z(\varepsilon)_{41} = 0$. Обозначим через η нетривиальный корень горизонтального опорного минора $\Delta^2(\varepsilon) = M_{-1,-2}^{-1,-4}(z)$. Как мы знаем из доказательства теоремы 3, в этом случае нетривиальный корень вертикального опорного минора $\Delta_2(\varepsilon) = M_{14}^{12}(z)$ автоматически равен η^{-1} . В дальнейшем мы обычно не будем явно ссылаться на такого рода очевидные факты.

- Если $z(\varepsilon)_{-2,-3} \neq 0$ и $z(\varepsilon)_{-3,-4} \neq 0$, то горизонтальными опорными минорами для $z = z(\eta)$ будут $M_{-1}^{-1}(z)$, $M_{-1,-2}^{-1,-3}(z)$, $M_{-1,-2,-3}^{-1,-3,-4}(z)$, так что $z \in BwB$, где $w = (243)(-4, -3, -2)$, а $z^{-1} = z(\eta^{-1})$ лежит в этом случае в классе $Bw^{-1}B$, где $w^{-1} = (234)(-4, -2, -3)$. Это дает нам строку 1 табл. 3.

- С другой стороны, если хотя бы один из элементов $z(\varepsilon)_{-2,-3}$ или $z(\varepsilon)_{-3,-4}$ равен 0, то из соображений ортогональности $\eta = \eta^{-1}$, так что вырождение будет кратным. Тип получающейся инволюции зависит от того, равен 0 только $z(\varepsilon)_{-2,-3}$ или только $z(\varepsilon)_{-3,-4}$, или оба они нулевые. Это дает нам три возможности, которые перечислены в строке 1 табл. 4.

- $w_0 = (2, -4)(4, -2)$ может получаться в вариантах B, C, E, F, J, L, однако вырождения могут происходить только в варианте E, причем их анализ полностью аналогичен анализу в предыдущем случае. Снова нетривиальные корни могут появляться только у опорных миноров $\Delta^2(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$.

- Если $z(\varepsilon)_{-4,3} \neq 0$ и $z(\varepsilon)_{-3,4} \neq 0$, то происходит простое вырождение, описанное в строке 2 табл. 3.

○ С другой стороны, равенство 0 какого-то одного из элементов $z(\varepsilon)_{-4,3}$ или $z(\varepsilon)_{-3,4}$, либо их обоих, дает нам три случая кратного вырождения, перечисленные в строке 2 табл. 4.

• $w_0 = (1, 3)(-3, -1)$ может получаться в вариантах С, G, H, I, J, L, однако вырождения могут происходить только в варианте H. Снова точно такой же анализ нулей опорных миноров показывает, что имеет место одна из двух следующих возможностей.

○ Если $\eta \neq \eta^{-1}$, то происходит простое вырождение, описанное в строке 3 табл. 3.

○ С другой стороны, если $\eta = \eta^{-1} = -1$, то в зависимости от обращения/необращения в 0 элементов $z(\varepsilon)_{-1,-2}$ или $z(\varepsilon)_{-2,-3}$ имеет место один из трех случаев кратного вырождения, перечисленных в строке 3 табл. 4.

Анализ следующего случая снова заметно сложнее, чем анализ предыдущих, так как здесь, в зависимости от равенства нулю некоторых элементов, могут возникать как *различные* простые вырождения, так и *шесть* разных вариантов кратного вырождения.

• $w_0 = (2, -3)(3, -2)$ может получаться в вариантах A, B, D, E, F, K, L, однако вырождения могут происходить только в варианте F. Как и выше, через η и η^{-1} обозначаются корни опорных миноров $\Delta^2(\varepsilon)$ и $\Delta_2(\varepsilon)$.

○ Если $\eta \neq \eta^{-1}$, то при $z(\eta)_{-2,4} \neq 0$, то имеет место первый подслучай в строке 4 табл. 3, а если $z(\eta)_{-2,4} = 0$, но $z(\eta)_{-2,-4} \neq 0$, то второй.

○ Если $\eta = \eta^{-1} = -1$, но хотя бы один из $z(\eta)_{-2,4}$ или $z(\eta)_{-2,-4} = 0$ отличен от нуля, то $z(\eta)_{-3,3} = 0$, так как иначе $\Delta_{-2,-3,-4}^{234}(z) \neq 0$ противоречило бы тому, что $w \in W(D_4)$. В зависимости от того, $z(\eta)_{-2,4} \neq 0$ или $z(\eta)_{-2,4} = 0$, мы получаем соответственно первый и второй подслучаи в строке 4 табл. 4.

○ С другой стороны, если $z(\eta)_{-2,4} = z(\eta)_{-2,-4} = 0$, то автоматически $\eta = \eta^{-1} = -1$, и теперь тип элемента $z(-1)$ зависит от первого из элементов $z_{-3,3}$, $z_{-3,4}$, $z_{-3,-4}$, который отличен от нуля, что и дает нам — в нужном порядке! — остальные четыре случая в строке 4 табл. 4. Последний из них, $w = e$, получается, разумеется, при $z_{-3,3} = z_{-3,4} = z_{-3,-4} = 0$.

• $w_0 = (14)(-4, -1)$ может получаться в вариантах A, D, G, H, I, K, L, однако вырождения могут происходить только в варианте I, при обращении в 0 сомнительных элементов $z(\varepsilon)_{-1,-4}$ и $z(\varepsilon)_{41}$. Пусть η и η^{-1} — соответствующие корни.

○ Пусть $\eta \neq \eta^{-1}$. В этом случае вырождение $z(\eta)$ — если оно фактически происходит! — контролируется обращением в 0 элементов $z(\varepsilon)_{-1,-3}$ и $z(\varepsilon)_{-2,-4}$. Ситуация, когда $z(\varepsilon)_{-2,-4} = 0$, а $z(\eta)_{-1,-3}, z(\eta)_{-3,-4} \neq 0$,

приводит к первому подслучаю, а ситуация, когда $z(\eta)_{-1,-3} \neq 0$, а $z(\eta)_{-2,-4}, z(\eta)_{-1,-2} \neq 0$, — ко второму подслучаю в строке 5 табл. 3.

○ С другой стороны, в случае, когда $\eta = \eta^{-1} = -1$, может представиться много возможностей, в зависимости от обращения в 0 элементов $z(-1)_{-1,-3}, z(-1)_{-2,-4}, z(-1)_{-3,-4}, z(-1)_{-1,-2}$. Все эти возможности перечислены в строке 5 табл. 4. Первые два подслучая отвечают ситуации, когда ровно один из элементов $z(-1)_{-1,-3}$ или $z(-1)_{-2,-4}$, отличен от нуля. Заметим, что так как $M_{-1,-2}^{-3,-4} = 0$, они не могут быть оба ненулевыми, что исключает вырождение в инволюцию $(13)(2, -4)(-4, 2)(-3, -1)$. В дальнейшем мы обычно не будем упоминать подобные очевидные соображения, исключаяющие те или иные возможности, и станем пояснять только менее тривиальные моменты. Следующие три подслучая отвечают ситуации, когда $z(-1)_{-1,-3} = z(-1)_{-2,-4} = 0$, но хотя бы один из элементов $z(-1)_{-3,-4}$ или $z(-1)_{-1,-2}$ отличен от нуля. Естественно, e получается в том случае, когда все эти элементы равны 0.

• $w_0 = (1, -4)(4, -1)$ может получаться в вариантах В, Е, G, H, J, K, L, однако вырождения могут происходить только в варианте J, при обращении в 0 сомнительных элементов $z(\varepsilon)_{-1,4}$ или $z(\varepsilon)_{-4,1}$. Пусть η и η^{-1} — соответствующие корни.

○ В случае $\eta \neq \eta^{-1}$ вырождение $z(\eta)$ контролируется обращением в 0 элементов $z(\varepsilon)_{-1,-3}$ и $z(\varepsilon)_{-2,4}$. Заметим, что эти элементы не могут обращаться в 0 одновременно, так как иначе в силу ортогональности $\eta = \eta^{-1} = \pm 1$. Теперь точно такое же вычисление, как в предыдущем случае, показывает, что мы получаем в точности случаи, перечисленные в строке 6 табл. 3.

○ Анализ кратного вырождения $\eta = \eta^{-1} = -1$ ничем не отличается от предыдущего случая. Получающиеся возможности перечислены в строке 6 табл. 4.

• $w_0 = (1, -3)(3, -1)$ может получаться в вариантах А, В, F, G, I, J, K, L, однако вырождения могут происходить только в варианте K, при обращении в 0 сомнительных элементов $z(\varepsilon)_{-1,3}$ или $z(\varepsilon)_{-3,1}$. Пусть η и η^{-1} — соответствующие корни.

○ В случае $\eta \neq \eta^{-1}$ тип вырождения определяется тем, который из элементов $z(\eta)_{-1,4}, z(\eta)_{-1,-4}, z(\eta)_{-1,-2}$ первым отличен от 0. В соответствии с этим мы получаем три подслучая, перечисленные в строке 10 табл. 3.

○ Как обычно, отражения относительно одного корня дают больше всего кратных вырождений. Несколько возможностей для w_{-1} исключаются

обращением в 0 определяющих миноров. Например,

$$w_{-1} = (1, -4)(2, -3)(3, -4)(4, -1)$$

отсекается равенством $\Delta_{-1,-2,-3,-4}^{1234}(z) = 0$ и т.д. Остающиеся возможности перечислены в строке 10 табл. 4.

Нам остается еще рассмотреть старший элемент класса A_1 . Как и следует ожидать, это самый трудный случай среди всех инволюций этого класса.

- $w_0 = (1, -2)(2, -1)$ может получаться в вариантах C, D, F, H, I, J, K, L, однако вырождения могут происходить только в варианте L, при равенстве нулю элемента $z(\varepsilon)_{-1,1}$ и обращении в 0 сомнительных элементов $z(\varepsilon)_{-1,2}$ или $z(\varepsilon)_{-2,1}$. Пусть η и η^{-1} — соответствующие корни.

- В случае $\eta \neq \eta^{-1}$ тип вырождения определяется тем, который из элементов $z(\eta)_{-1,3}$, $z(\eta)_{-1,4}$, $z(\eta)_{-1,-4}$, $z(\eta)_{-1,-3}$ первым отличен от 0. В случае простого вырождения все эти элементы не могут одновременно равняться 0, так как тогда в силу ортогональности первая строка матрицы $z(\eta)$ тоже должна быть пропорциональна первой строке единичной матрицы, так что, в частности, $z(\eta)_{-2,1} = 0$ вопреки предположению $\eta \neq \eta^{-1}$. Таким образом, мы получаем четыре возможности для простого вырождения, перечисленных в строке 14 табл. 3.

- Этот случай дает больше всего различных кратных вырождений, возникающие возможности определяются равенством 0 элементов $z(\varepsilon)_{-2,2}$, $z(\varepsilon)_{-1,3}$, $z(\varepsilon)_{-2,3}$, $z(\varepsilon)_{-1,4}$, $z(\varepsilon)_{-2,4}$, $z(\varepsilon)_{-1,-4}$, $z(\varepsilon)_{-2,-4}$, $z(\varepsilon)_{-1,-3}$, $z(\varepsilon)_{-2,-3}$. Как всегда, многие возможности для w_{-1} исключаются обращением в 0 подходящих определяющих миноров. Например,

$$w_{-1} = (1, -3)(2, -2)(3, -1)(4, -4)$$

отсекается равенством $\Delta_{-1,-2,-3}^{123}(z) = 0$, а

$$w_{-1} = (1, -4)(2, -3)(3, -2)(4, -1)$$

— равенством $\Delta_{-1,-2,-3}^{123}(z) = 0$ и т.д. Остающиеся 15 возможностей перечислены в строке 14 табл. 4.

Инволюции класса D_2 . Имеется 6 инволюций вида $(i, -i)(j, -j)$, где $j \neq \pm i$.

- $w_0 = (3, -3)(4, -4)$ может получаться в вариантах F, K, но никаких вырождений при этом не происходит. На первый взгляд кажется, что элемент w_0 мог бы возникать также и в варианте B, но это не так. В самом деле, если $z_{-3,1} = z_{-3,2} = 0$, то в силу ортогональности также $z_{-3,3} = 0$, так что y не может лежать в классе Bw_0B $z_{-3,1} = z_{-3,2} = 0$.

- $w_0 = (2, -2)(4, -4)$ может получаться в вариантах С, Е, F, однако в сомнительном варианте Е имеет место равенство $z(\varepsilon)_{-2,3} = 0$, так что никаких новых корней у опорных миноров порядка 2 и 3 не возникает, и тем самым никаких вырождений в этом случае нет.

В следующем случае вырождения возникают, и в связи с тем, что тип вырождения зависит от корней опорного минора *третьего* порядка, он потребует от нас гораздо более тщательного анализа.

- $w_0 = (2, -2)(3, -3)$ может получаться в вариантах D, E, F, L, однако вырождения могут происходить только в варианте F, причем их тип зависит от обращения в 0 опорного минора $M_{-1,-2,-3}^{2,3,-1}(z)$. Как мы знаем из доказательства теоремы 2, этот минор имеет самое большее два нетривиальных корня θ и θ^{-1} . Заметим, что так как в этом случае автоматически $z(\theta)_{-2,2} \neq 0$, имеется всего три возможности для вырождения, $(2, -2)(4, -4)$, $(2, -2)(3, -4, -3, 4)$ и $(2, -2)(3, 4, -3, -4)$, и нам остается только установить, когда они наступают.

- Если $\theta \neq \theta^{-1}$, то тип элемента $z = z(\theta)$ определяется обращением в 0 миноров $M_{-1,-2,-3}^{2,4,-1}(z)$ и $M_{1,-2,-4}^{123}(z)$. Несложное вычисление показывает, что при некоторых a, b, c, d, e эти миноры имеют вид

$$M_{-1,-2,-3}^{2,4,-1}(z) = M_{-2,-3}^{24}(z) = (\theta - 1)^2((ad - be)\theta + (-bd + ce)),$$

$$M_{-1,-2,-4}^{123}(z) = M_{24}^{-2,-3}(z) = (\theta - 1)^2((ce - bd)\theta + (ad - be)).$$

Заметим теперь, что так как $z(\theta)_{-2,2} \neq 0$, то в силу ортогональности также $d = z(\theta)_{-2,4} \neq 0$. Кроме того, так как минор $M_{-1,-2,-3}^{2,3,-1}(z)$ имеет нетривиальные корни, то $a, b \neq 0$ и $a \neq b$. Тогда оба рассматриваемых минора не могут одновременно обращаться в 0 при $\theta \neq -1$. Если один из них обращается в 0 при $\varepsilon = \theta$, то второй обращается в 0 при $\varepsilon = \theta^{-1}$. С другой стороны, так как $M_{-1,-2,-3}^{2,3,4}(z) = 0$, оба эти минора не могут быть одновременно отличны от 0. Это значит, что мы попадаем в ситуацию, описанную в строке 7 табл. 3.

- С другой стороны, если $\theta = \theta^{-1} = -1$, оба эти минора равны 0 или отличны от 0 одновременно. Если они оба равны 0, то мы попадаем в ситуацию, описанную в строке 7 табл. 4.

- $w_0 = (1, -1)(4, -4)$ может получаться в вариантах G, H, I, J, K, L. Однако, как легко видеть, это w_0 возникает только в случае, когда $z_{-1,1} \neq 0$, причем для первых трех конфигураций $M_{-1,-4}^{14}(z) \neq 0$, а для последних трех конфигураций $M_{-1,-2,-3,-4}^{1234}(z) \neq 0$, в то время как $M_{-1,-2}^{12}(z) = 0$ и $M_{-1,-2,-3}^{123}(z) = 0$. В первом случае опорный минор второго порядка вообще не зависит от сомнительных элементов. Во втором случае, глядя

на структуру приведенного выше опорного минора четвертого порядка, мы видим, что и он вообще не зависит от сомнительных элементов и тем самым не имеет никаких нетривиальных корней. Поэтому никаких вырождений в этом случае не происходит.

• $w_0 = (1, -1)(3, -3)$ может получаться в вариантах G, I, J, K, L, причем вырождения возникают лишь в варианте K, при обращении в 0 минора $M_{-1,-3}^{13}(z)$. Так как, очевидно, $w(1) = -1$ и $w(2) = 2$, в группе $W(D_4)$ остаются ровно три кандидата на роль w , а именно $(1, -1)(3, -4, -3, 4)$, $(1, -1)(3, 4, -3, -4)$ и $w = (1, -1)(4, -4)$, первые две из которых реализуются в случае простого вырождения, а третья — в случае кратного вырождения, что и дает нам строки 13 табл. 3 и 4 соответственно.

Как обычно, старший случай оказывается с большим отрывом самым трудным.

• $w_0 = (1, -1)(2, -2)$ может получаться в вариантах H, I, J, K, L, причем вырождения возникают лишь в варианте L, при обращении в 0 минора $M_{-1,-2}^{12}(z)$. Пусть η и η^{-1} — корни этого минора.

◦ Если элементы $z(\varepsilon)_{-1,3}$ и $z(\varepsilon)_{-2,3}$ не равны 0 одновременно, то равенства $M_{-1,-2,-3}^{12m}(z) = M_{-1,-2,-m}^{123}(z) = 0$, при $m = 3, 4, -4$, показывают, что фрагменты последних двух строк в позициях 3, 4, -4, пропорциональны. По той же причине пропорциональны, разумеется, и фрагменты двух первых столбцов в позициях 4, -4, -3. Следовательно, если $M_{-1,-2}^{13}(z(\eta)) = 0$, то и $M_{-1,-2}^{14}(z(\eta)) = M_{-1,-2}^{1,-4}(z(\eta)) = 0$. С другой стороны, так как $M_{-1,-2,-3}^{123}(z) = 0$, то миноры $M_{-1,-2}^{13}(z(\eta))$ и $M_{-1,-3}^{12}(z(\eta))$ не могут равняться 0 одновременно. Это дает нам первую возможность в строке 17 табл. 3 и первые две возможности в строке 17 табл. 4.

◦ С другой стороны, если $z(\varepsilon)_{-1,3} = z(\varepsilon)_{-2,3} = 0$, то $w(3) = 3$, что, как и в предыдущем случае, оставляет нам ровно три кандидата на роль w , а именно $(1, -1)(2, -4, -2, 4)$, $(1, -1)(2, 4, -2, -4)$ и $(1, -1)(4, -4)$, которые как раз и дают оставшиеся подслучаи в соответствующих строках.

Инволюции классов $(2A_1)'$ и $(2A_1)''$. Имеется 12 инволюций вида

$$(i, j)(h, k)(-k, -h)(-j, -i), \quad \{\pm i, \pm j, \pm h, \pm k\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\},$$

которые разбиваются на два класса сопряженности в группе $W(D_4)$, обозначаемые $(2A_1)'$ и $(2A_1)''$, в зависимости от четности.

• $w_0 = (12)(34)(-4, -3)(-2, -1)$ может получаться только в вариантах I, K, ясно, что никаких вырождений при этом нет.

• $w_0 = (12)(3, -4)(4, -3)(-2, -1)$ может получаться только в вариантах J, K, ясно, что никаких вырождений при этом нет.

- $w_0 = (13)(24)(-4, -2)(-3, -1)$ может получаться только в вариантах I, L, никаких вырождений при этом нет.

- $w_0 = (13)(2, -4)(4, -2)(-3, -1)$ может получаться только в вариантах J, L, никаких вырождений при этом нет.

- $w_0 = (14)(23)(-4, -1)(-3, -2)$ может получаться только в вариантах A, H, I, L, из которых только H может вести к вырождениям. Если нетривиальные корни $z(\varepsilon)_{-1,-4}$ и $z(\varepsilon)_{41}$ различны, то мы попадаем в ситуацию, описанную в строке 8 табл. 3, а если они совпадают и равны -1 , то в ситуацию, описанную в строке 8 табл. 4.

- $w_0 = (14)(2, -3)(3, -2)(-4, -1)$ может получаться только в вариантах A, D, K, L, никаких вырождений при этом нет.

- $w_0 = (1, -4)(23)(4, -1)(-3, -2)$ может получаться только в вариантах E, H, J, L, из которых только J может вести к вырождениям. Так как второй горизонтальный определяющий минор $z = z(\varepsilon)$ равен $M_{-1,-2}^{4,-3}(z)$, то автоматически $z(\varepsilon)_{-1,-3}z(\varepsilon)_{-2,4} \neq 0$. Поэтому если нетривиальные корни $z(\varepsilon)_{-1,-4}$ и $z(\varepsilon)_{41}$ различны, то мы попадаем в ситуацию, описанную в строке 9 табл. 3, а если они совпадают и равны -1 , то в ситуацию, описанную в строке 9 табл. 4.

- $w_0 = (1, -4)(2, -3)(3, -2)(4, -1)$ может получаться только в вариантах B, E, K, L, никаких вырождений при этом нет.

- $w_0 = (1, -3)(2, 4)(3, -1)(-4, -2)$ может получаться только в вариантах A, F, I, K, L, причем вырождения могут возникать только в варианте K и только при равенстве $z(\varepsilon)_{-1,4} = 0$. Ясно, что требуемый w_0 может получиться только если элементы $z(\varepsilon)_{-1,-4}$, $z(\varepsilon)_{-2,3}$, $z(\varepsilon)_{-3,2}$ и $z(\varepsilon)_{4,1}$ все отличны от 0. В этом случае единственное возможное простое вырождение состоит в обращении в 0 одного из элементов $z(\varepsilon)_{-1,3}$ или $z(\varepsilon)_{-3,1}$ и дает нам строку 11 табл. 3. Точно так же единственное возможное кратное вырождение состоит в обращении в 0 обоих этих элементов и дает нам строку 11 табл. 4.

- $w_0 = (1, -3)(2, -4)(3, -1)(4, -2)$ может получаться только в вариантах B, F, J, K, L, причем требуемый w_0 может получиться только, если элементы $z(\varepsilon)_{-1,4}$, $z(\varepsilon)_{-2,3}$, $z(\varepsilon)_{-3,2}$ и $z(\varepsilon)_{-4,1}$ все отличны от 0. Теперь точно такое же рассуждение, как в предыдущем случае, дает нам строку 12 табл. 3 и 4.

До сих пор все случаи в этом классе были совсем простыми. Нам остается еще рассмотреть два старших и самых трудных случая.

- $w_0 = (1, -2)(2, -1)(3, 4)(-4, -3)$ может получаться только в вариантах D, F, K, L, причем вырождения возможны только в варианте L, в корнях сомнительных элементов.

◦ Заметим, что элементы $z(\varepsilon)_{-1,3}$ и $z(\varepsilon)_{-2,3}$ не могут быть одновременно нулевыми. В самом деле, тогда в силу ортогональности $z(\varepsilon)_{-3,1} = z(\varepsilon)_{-3,2} = 0$, что невозможно, так как $M_{-1,-2,-3}^{1,2,-4} \neq 0$. С другой стороны, миноры $M_{-1,-2}^{34}(z)$ и $M_{-3,-4}^{12}(z)$ оба нулевые, потому что иначе $M_{-1,-2,-3,-4}^{1234}(z) \neq 0$, что для w_0 невозможно. Но тогда $M_{-1,-2,-3}^{124}(z) \neq 0$, что также противоречит нашему выбору w_0 . Таким образом, для простых вырождений имеет место ситуация, описанная в строке 15 табл. 3.

◦ Рассуждение, аналогичное тому, которое было проведено выше для случая простых вырождений, показывает, что в массовом случае элементы $z(\varepsilon)_{-1,3}$ и $z(\varepsilon)_{-1,4}$ не могут быть одновременно нулевыми. Это оставляет нам три возможности для простых вырождений, описанные в строке 15 табл. 4.

• $w_0 = (1, -2)(2, -1)(3, -4)(4, -3)$ может получаться только в вариантах E, F, K, L, причем снова вырождения возможны только в варианте L, в корнях сомнительных элементов. Так как опорный минор $M_{-1,-2,-3,-4}^{1234}(z)$ ненулевой, то автоматически $M_{-1,-2}^{34}(z) \neq 0$. Это значит, что в корне η элемента $z(\varepsilon)_{-2,1}$ у нас остается ровно две возможности в зависимости от того, отличен элемент $z(\varepsilon)_{-2,3}$ от 0 или равен 0, — как мы только что заметили, если он равен 0, то автоматически $z(\varepsilon)_{-2,4} \neq 0$. Это дает нам возможности, перечисленные в строке 16 табл. 3. Ясно, что возможности для кратных вырождений отличаются от тех, которые получаются в предыдущем случае, только заменой 4 на -4 .

Инволюции классов $A_1 + D_2$ и $2D_2$. Имеется 12 инволюций вида

$$(i, j)(h, -h)(k, -k)(-j, -i), \quad \{\pm i, \pm j, \pm h, \pm k\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$$

класса $A_1 + D_2$ и одна инволюция $(1, -1)(2, -2)(3, -3)(4, -4)$ класса $2D_2$.

Так как в следующих пяти случаях опорные миноры не зависят от сомнительных элементов, то вырождениям здесь взяться неоткуда.

• $w_0 = (12)(3, -3)(4, -4)(-2, -1)$ может получаться только в варианте K.

• $w_0 = (13)(2, -2)(4, -4)(-3, -1)$ может получаться только в вариантах C, K.

• $w_0 = (14)(2, -2)(3, -3)(-4, -1)$ может получаться только в вариантах D, K.

• $w_0 = (1, -4)(2, -2)(3, -3)(4, -1)$ может получаться только в вариантах E, L.

- $w_0 = (1, -3)(2, -2)(3, -1)(4, -4)$ может получаться только в вариантах F, L.

До сих пор никаких вырождений для инволюций этого класса не возникло, следующий случай — первый, когда появляются вырождения. Эти вырождения несложные, но *новые*, так как элементы Кокстера самой системы D_4 в качестве вейлевских множителей в разложении Брюа длинных корневых элементов нам ранее не встречались. Ясно, что они и не могли встречаться, так как все до сих пор рассмотренные инволюции w_0 приходили из подсистем типа A_3 в различных вложениях. Две старших инволюции этого класса также будут иметь простые вырождения этого нового типа.

- $w_0 = (1, -2)(2, -1)(3, -3)(4, -4)$ может получаться только в вариантах F, K, L, причем вырождения возможны, очевидно, только в варианте L. Элемент w_0 реализуется в ситуации, когда $z_{-1,1} = 0$, а $M_{-1,-2,-3}^{123}(z) \neq 0$. Так как этот минор третьего порядка не имеет корней, то единственные вырождения возникают при обращении в 0 элементов $z(\varepsilon)_{-1,2}$ и/или $z(\varepsilon)_{-2,1}$. При обращении в 0 одного из них мы получаем возможности, указанные в строке 18 табл. 3, а при обращении в 0 из обоих — возможность, указанную в строке 18 табл. 4.

В следующих четырех случаях опорные миноры также не зависят от сомнительных элементов, и никаких вырождений снова нет.

- $w_0 = (1, -1)(2, 3)(3, 2)(4, -4)$ может получаться только в вариантах H, L.

- $w_0 = (1, -1)(2, 4)(4, 2)(3, -3)$ может получаться только в вариантах I, L.

- $w_0 = (1, -1)(2, -4)(3, -3)(4, -2)$ может получаться только в вариантах J, L.

- $w_0 = (1, -1)(2, -3)(3, -2)(4, -4)$ может получаться только в вариантах K, L.

Для двух старших инволюций этого класса описать вырождения также совсем не сложно, их появление связано с обращением в 0 опорного минора $M_{-1,-2}^{12}(z)$ второго порядка. Фактически анализ этих двух случаев мало отличается от анализа вырождений инволюции $w_0 = (1, -1)(2, -2)$, старшей в классе типа D_2 . Более того, наличие дополнительных множителей $(3, 4)(-4, -3)$ или $(3, -4)(4, -3)$, подпирающих w снизу, делает ситуацию не сложнее, а проще, так как запрещают по одному значению m в этом рассуждении, $m = -4$, или $m = 4$ соответственно.

- $w_0 = (1, -1)(2, -2)(3, 4)(-4, -3)$ может получаться только в вариантах I, L, причем вырождения возникают только в варианте L. Ответ приведен в строке 19.

- $w_0 = (1, -1)(2, -2)(3, -4)(4, -3)$ может получаться только в J, K, L, причем вырождения возникают только в варианте L. Минор $M_{-1, -2}^{34}(z)$. Ответ приведен в строке 20.

Нам остается рассмотреть еще старший элемент группы Вейля, имеющий тип $2D_2$. В этом случае нам также встретится крайне интересное новое явление, а именно простое вырождение в клетку BwB , для которой w также является инволюцией.

Иными словами, значения параметра η и η^{-1} , при которых происходит вырождение, различны, но тем не менее $z(\eta)$ и $z(\eta^{-1})$ лежат в одной и той же клетке BwB . Это связано с тем, что для реализации рассматриваемого типичного w_0 необходимо, чтобы $z(\varepsilon)_{-1,1} \neq 0$, и тогда, конечно, вырождение может происходить только за счет обращения в 0 опорного минора второго порядка $M_{-1, -2}^{12}(z)$.

- $w_0 = (1, -1)(2, -2)(3, -3)(-4, -4)$ может получаться только в K, L, причем вырождение может возникать только в варианте L. Так как опорные миноры $M_{-1, -2, -3}^{123}(z)$ и $M_{-1, -2, -3}^{123}(z)$ порядков 3 и 4 ненулевые и не имеют корней, то при обращении в 0 минора $M_{-1, -2}^{12}(z(\eta))$ автоматически $M_{-1, -2}^{13}(z(\eta)) \neq 0$ и $M_{-1, -3}^{12}(z(\eta)) \neq 0$ независимо от того, имеет место равенство $\eta = \eta^{-1}$ или нет. Это и показывает, что все возможности вырождения перечислены в строке 21 табл. 3 и 4.

§8. Доказательство теорем 4 и 5

Сведем теперь воедино полученные в предыдущем параграфе результаты.

Табл. 3 перечисляет простые вырождения, которые, собственно, только и играют роль в доказательстве теоремы 4, а в табл. 4 перечислены возможные вырождения в $\varepsilon = -1$. Все вырождения в табл. 4, кроме последнего, фактически являются кратными, т.е. роняют длину множителя из группы Вейля по крайней мере на 2.

В табл. 3 указаны цикленный тип ν_0 перестановки $w_0 \in W(D_4)$, ее длина $l(w_0)$, граф Картера C_0 ее класса сопряженности, цикленный тип ν всех перестановок $w \in W(D_4)$, реализующихся в вырожденных случаях, и их графы Картера C . В табл. 4, кроме того, указана длина $l(w)$ — во всех перечисленных в табл. 3 случаях $l(w) = l(w_0) - 1$.

Таблица 3
Простые вырождения

N	w_0	$l(w_0)$	C_0	w	C
1	$(24)(\bar{4}\bar{2})$	3	A_1	$(243)(\bar{4}\bar{3}\bar{2}), (234)(\bar{4}\bar{2}\bar{3})$	A_2
2	$(2\bar{4})(4\bar{2})$	3	A_1	$(2\bar{4}3)(\bar{4}\bar{3}\bar{2}), (23\bar{4})(4\bar{2}\bar{3})$	A_2
3	$(13)(\bar{3}\bar{1})$	3	A_1	$(132)(\bar{3}\bar{2}\bar{1}), (123)(\bar{3}\bar{1}\bar{2})$	A_2
4	$(2\bar{3})(3\bar{2})$	5	A_1	$(2\bar{3}4)(3\bar{4}\bar{2}), (24\bar{3})(3\bar{2}\bar{4})$	A_2
				$(2\bar{3}\bar{4})(34\bar{2}), (2\bar{4}\bar{3})(3\bar{2}4)$	A_2
5	$(14)(\bar{4}\bar{1})$	5	A_1	$(143)(\bar{4}\bar{3}\bar{1}), (134)(\bar{4}\bar{1}\bar{3})$	A_2
				$(142)(\bar{4}\bar{2}\bar{1}), (124)(\bar{4}\bar{1}\bar{2})$	A_2
6	$(1\bar{4})(4\bar{1})$	5	A_1	$(1\bar{4}3)(\bar{4}\bar{3}\bar{1}), (13\bar{4})(4\bar{1}\bar{3})$	A_2
				$(1\bar{4}2)(\bar{4}\bar{2}\bar{1}), (12\bar{4})(4\bar{1}\bar{2})$	A_2
7	$(2\bar{2})(3\bar{3})$	6	D_2	$(2\bar{2})(3\bar{4}\bar{3}4), (2\bar{2})(34\bar{3}\bar{4})$	D_3
8	$(14)(23)(\bar{4}\bar{1})(\bar{3}\bar{2})$	6	$(2A_1)'$	$(1423)(\bar{4}\bar{2}\bar{3}\bar{1}), (1324)(\bar{4}\bar{1}\bar{3}\bar{2})$	$(A_3)'$
9	$(1\bar{4})(23)(4\bar{1})(\bar{3}\bar{2})$	6	$(2A_1)''$	$(1\bar{4}23)(4\bar{2}\bar{3}\bar{1}), (132\bar{4})(4\bar{1}\bar{3}\bar{2})$	$(A_3)''$
10	$(1\bar{3})(3\bar{1})$	7	A_1	$(1\bar{3}\bar{4})(34\bar{1}), (1\bar{4}\bar{3})(3\bar{1}4)$	A_2
				$(1\bar{3}4)(3\bar{4}\bar{1}), (14\bar{3})(3\bar{1}\bar{4})$	A_2
				$(1\bar{3}2)(3\bar{2}\bar{1}), (12\bar{3})(3\bar{1}\bar{2})$	A_2
11	$(1\bar{3})(24)(3\bar{1})(\bar{4}\bar{2})$	8	$(2A_1)''$	$(1\bar{3}24)(3\bar{2}\bar{4}\bar{1}), (142\bar{3})(3\bar{1}\bar{4}\bar{2})$	$(A_3)''$
12	$(1\bar{3})(2\bar{4})(3\bar{1})(4\bar{2})$	8	$(2A_1)'$	$(1\bar{3}2\bar{4})(3\bar{2}4\bar{1}), (1\bar{4}2\bar{3})(3\bar{1}4\bar{2})$	$(A_3)'$
13	$(1\bar{1})(3\bar{3})$	8	D_2	$(1\bar{1})(3\bar{4}\bar{3}4), (1\bar{1})(34\bar{3}\bar{4})$	D_3
14	$(1\bar{2})(2\bar{1})$	9	A_1	$(1\bar{2}\bar{3})(23\bar{1}), (1\bar{3}\bar{2})(3\bar{1}3)$	A_2
				$(1\bar{2}\bar{4})(24\bar{1}), (1\bar{4}\bar{2})(3\bar{1}4)$	A_2
				$(1\bar{2}4)(2\bar{4}\bar{1}), (14\bar{2})(2\bar{1}\bar{4})$	A_2
				$(1\bar{2}3)(2\bar{3}\bar{1}), (13\bar{2})(2\bar{1}\bar{3})$	A_2

15	$(\overline{12})(\overline{21})(34)(\overline{43})$	10	$(2A_1)''$	$(\overline{12}\overline{43})(243\overline{1}), (\overline{13}\overline{42})(\overline{21}34)$	$(A_3)''$
				$(\overline{1234})(\overline{23}\overline{41}), (143\overline{2})(\overline{21}\overline{43})$	$(A_3)''$
16	$(\overline{12})(\overline{21})(\overline{34})(\overline{43})$	10	$(2A_1)'$	$(\overline{1243})(243\overline{1}), (\overline{1342})(\overline{21}34)$	$(A_3)'$
				$(\overline{1234})(\overline{2341}), (143\overline{2})(\overline{21}43)$	$(A_3)'$
17	$(\overline{11})(\overline{22})$	10	D_2	$(\overline{11})(\overline{23}\overline{23}), (\overline{11})(\overline{232}\overline{3})$	D_3
				$(\overline{11})(\overline{24}\overline{24}), (\overline{11})(\overline{242}\overline{4})$	D_3
18	$(\overline{12})(\overline{21})(\overline{33})(\overline{44})$	11	$A_1 + D_2$	$(\overline{123123})(\overline{44}), (\overline{132132})(\overline{44})$	D_4
19	$(\overline{11})(\overline{22})(34)(\overline{43})$	11	$A_1 + D_2$	$(\overline{11})(\overline{23}\overline{42}34), (\overline{11})(243\overline{2}\overline{43})$	D_4
20	$(\overline{11})(\overline{22})(\overline{34})(\overline{43})$	11	$A_1 + D_2$	$(\overline{11})(\overline{234234}), (\overline{11})(\overline{243243})$	D_4
21	$(\overline{11})(\overline{22})(\overline{33})(\overline{44})$	12	$2D_2$	$(\overline{11})(\overline{23})(\overline{32})(\overline{44}),$	$A_1 + D_2$

С тем, чтобы нумерация строк следующей таблицы совпадала с нумерацией строк в табл. 3, в ней опущены 4 вырождения, отвечающие фундаментальным отражениям в $W(D_4)$, а именно строки, отвечающие вырождению $(34)(\overline{43}), (\overline{34})(\overline{43}), (23)(\overline{32})$ и $(12)(\overline{21})$ до e .

Таблица 4
Кратные вырождения

N	w_0	$l(w_0)$	C_0	w	$l(w)$	C
1	$(24)(\overline{42})$	3	A_1	$(34)(\overline{43})$	1	A_1
				$(23)(\overline{32})$	1	A_1
				e	0	\emptyset
2	$(\overline{24})(\overline{42})$	3	A_1	$(\overline{34})(\overline{43})$	1	A_1
				$(23)(\overline{32})$	1	A_1
				e	0	\emptyset
3	$(13)(\overline{31})$	3	A_1	$(23)(\overline{32})$	1	A_1
				$(12)(\overline{21})$	1	A_1
				e	0	\emptyset

4	$(\overline{2\overline{3}})(\overline{3\overline{2}})$	5	A_1	$(2\overline{4})(\overline{4\overline{2}})$	3	A_1
				$(\overline{2\overline{4}})(\overline{4\overline{2}})$	3	A_1
				$(\overline{3\overline{3}})(\overline{4\overline{4}})$	2	D_2
				$(\overline{3\overline{4}})(\overline{4\overline{2}})$	1	A_1
				$(\overline{3\overline{4}})(\overline{4\overline{3}})$	1	A_1
				e	0	\emptyset
5	$(1\overline{4})(\overline{4\overline{1}})$	5	A_1	$(1\overline{3})(\overline{3\overline{1}})$	3	A_1
				$(2\overline{4})(\overline{2\overline{1}})$	3	A_1
				$(1\overline{2})(\overline{3\overline{4}})(\overline{4\overline{2}})(\overline{2\overline{1}})$	2	$(2A_1)'$
				$(1\overline{2})(\overline{2\overline{1}})$	1	A_1
				$(\overline{3\overline{4}})(\overline{2\overline{1}})$	1	A_1
				e	0	\emptyset
6	$(1\overline{4})(\overline{4\overline{1}})$	5	A_1	$(1\overline{3})(\overline{3\overline{1}})$	3	A_1
				$(\overline{2\overline{4}})(\overline{4\overline{2}})$	3	A_1
				$(1\overline{2})(\overline{3\overline{4}})(\overline{4\overline{3}})(\overline{2\overline{1}})$	2	$(2A_1)''$
				$(1\overline{2})(\overline{2\overline{1}})$	1	A_1
				$(\overline{3\overline{4}})(\overline{2\overline{1}})$	1	A_1
				e	0	\emptyset
7	$(\overline{2\overline{2}})(\overline{3\overline{3}})$	6	D_2	$(\overline{2\overline{2}})(\overline{4\overline{4}})$	4	D_2
8	$(1\overline{4})(\overline{2\overline{3}})(\overline{4\overline{1}})(\overline{3\overline{2}})$	6	$(2A_1)'$	$(1\overline{3})(\overline{2\overline{4}})(\overline{4\overline{2}})(\overline{3\overline{1}})$	4	$(2A_1)'$
9	$(1\overline{4})(\overline{2\overline{3}})(\overline{4\overline{1}})(\overline{3\overline{2}})$	6	$(2A_1)''$	$(1\overline{3})(\overline{2\overline{4}})(\overline{4\overline{2}})(\overline{3\overline{1}})$	4	$(2A_1)''$
10	$(1\overline{3})(\overline{3\overline{1}})$	7	A_1	$(1\overline{4})(\overline{4\overline{1}})$	5	A_1
				$(1\overline{4})(\overline{4\overline{1}})$	5	A_1
				$(\overline{2\overline{3}})(\overline{3\overline{2}})$	5	A_1
				$(1\overline{2})(\overline{3\overline{4}})(\overline{4\overline{3}})(\overline{2\overline{1}})$	2	$(2A_1)'$

					$(12)(3\bar{4})(4\bar{3})(\bar{2}\bar{1})$	2	$(2A_1)''$
					$(3\bar{3})(4\bar{4})$	2	D_2
					$(12)(\bar{2}\bar{1})$	1	A_1
					$(34)(\bar{4}\bar{3})$	1	A_1
					$(3\bar{4})(4\bar{3})$	1	A_1
					e	0	\emptyset
11	$(1\bar{3})(24)(3\bar{1})(\bar{4}\bar{2})$	8	$(2A_1)''$	$(14)(2\bar{3})(3\bar{2})(\bar{4}\bar{1})$	6	$(2A_1)''$	
12	$(1\bar{3})(2\bar{4})(3\bar{1})(4\bar{2})$	8	$(2A_1)'$	$(1\bar{4})(2\bar{3})(3\bar{2})(4\bar{1})$	6	$(2A_1)'$	
13	$(1\bar{1})(3\bar{3})$	8	D_2	$(1\bar{1})(4\bar{4})$	6	D_2	
14	$(1\bar{2})(2\bar{1})$	9	A_1	$(1\bar{3})(3\bar{1})$	7	A_1	
					$(1\bar{4})(23)(4\bar{1})(\bar{3}\bar{2})$	6	$(2A_1)''$
					$(14)(23)(\bar{4}\bar{1})(\bar{3}\bar{2})$	6	$(2A_1)'$
					$(2\bar{2})(3\bar{3})$	6	D_2
					$(14)(\bar{4}\bar{1})$	5	A_1
					$(1\bar{4})(4\bar{1})$	5	A_1
					$(2\bar{3})(3\bar{2})$	5	A_1
					$(13)(24)(\bar{4}\bar{2})(\bar{3}\bar{1})$	4	$(2A_1)'$
					$(13)(2\bar{4})(4\bar{2})(\bar{3}\bar{1})$	4	$(2A_1)''$
					$(2\bar{2})(4\bar{4})$	4	D_2
					$(24)(\bar{4}\bar{2})$	3	A_1
					$(2\bar{4})(4\bar{2})$	3	A_1
					$(13)(\bar{3}\bar{1})$	3	A_1
					$(23)(\bar{3}\bar{2})$	1	A_1
					e	0	\emptyset
15	$(1\bar{2})(2\bar{1})(34)(\bar{4}\bar{3})$	10	$(2A_1)''$	$(1\bar{3})(24)(3\bar{1})(\bar{4}\bar{2})$	8	$(2A_1)''$	

					$(14)(2\bar{2})(3\bar{3})(\bar{4}\bar{1})$	7	$A_1 + D_2$
					$(14)(2\bar{3})(3\bar{2})(\bar{4}\bar{1})$	6	$(2A_1)''$
16	$(1\bar{2})(2\bar{1})(3\bar{4})(4\bar{3})$	10	$(2A_1)'$		$(1\bar{3})(2\bar{4})(3\bar{1})(4\bar{2})$	8	$(2A_1)'$
					$(1\bar{4})(2\bar{2})(3\bar{3})(4\bar{1})$	7	$A_1 + D_2$
					$(1\bar{4})(2\bar{3})(3\bar{2})(4\bar{1})$	6	$(2A_1)'$
17	$(1\bar{1})(2\bar{2})$	10	D_2		$(1\bar{1})(3\bar{3})$	8	D_2
					$(1\bar{1})(2\bar{3})(4\bar{4})(\bar{3}\bar{2})$	7	$A_1 + D_2$
					$(1\bar{1})(4\bar{4})$	6	D_2
18	$(1\bar{2})(2\bar{1})(3\bar{3})(4\bar{4})$	11	$A_1 + D_2$		$(1\bar{3})(2\bar{2})(3\bar{1})(4\bar{4})$	9	$A_1 + D_2$
19	$(1\bar{1})(2\bar{2})(3\bar{4})(\bar{4}\bar{3})$	11	$A_1 + D_2$		$(1\bar{1})(2\bar{4})(3\bar{3})(\bar{4}\bar{2})$	9	$A_1 + D_2$
20	$(1\bar{1})(2\bar{2})(3\bar{4})(4\bar{3})$	11	$A_1 + D_2$		$(1\bar{1})(2\bar{4})(3\bar{3})(4\bar{2})$	9	$A_1 + D_2$
21	$(1\bar{1})(2\bar{2})(3\bar{3})(4\bar{4})$	12	$2D_2$		$(1\bar{1})(2\bar{3})(3\bar{2})(4\bar{4})$	11	$A_1 + D_2$

Заметим, что эти таблицы, как и следовало ожидать, имеют внутреннюю структуру, согласованную с тройственностью. Если где-то в них встречается строка, отвечающая какому-то из классов D_2 , $(2A_1)'$, $(2A_1)''$, то встречаются и две другие строки, отвечающие двум другим классам, причем входящие в них инволюции должны иметь одинаковую длину. То же, разумеется, относится к появлению этих классов, а также классов D_3 , A_3' , A_3'' в качестве части ответа. Согласованность получающихся таблиц с тройственностью, при том что их строки были вычислены независимо, является косвенным подтверждением их правильности.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теорем 4 и 5. Теорема 5 сразу вытекает из сравнения длин массового и вырожденного элементов группы Вейля в табл. 3 и 4. Для доказательства теоремы 4 заметим следующее.

- Очевидно, что все инволюции описанных типов реализуются в разложении Брюа длинных корневых торов уже в массовом случае, это отмечено еще в [8].

- Из табл. 3 видно, что элементы Коксетера *всех* 16 подсистем типа A_2 в D_4 появляются в табл. 3.

- Из табл. 3 видно, что 4 из 24 элементов Коксетера каждого из трех классов сопряженности подсистем типа A_3 в D_4 , а именно D_3 , A'_3 и A''_3 появляются в табл. 3.

- Из табл. 3 видно, что некоторые элементы Коксетера самой системы D_4 появляются в табл. 3. Элементы Коксетера подсистем типа B_3 и G_2 появляются при скручивании D_4 .

- Система $B_2 = C_2$ могла бы появляться только при кратном вырождении. Но это невозможно, так как система типа A_3 , скручиванием которой является B_2 , появляется только в табл. 3, но не в табл. 4.

Теорема 4 полностью доказана.

§9. Заключительные замечания

Основные результаты настоящей работы возникли в контексте следующей задачи, которая до сих пор полностью не решена.

Проблема 1. Понизить, в несимплектическом случае, в результатах работ [11, 12] о надгруппах расщепимых торов в группах Шевалле, оценку на количество элементов основного поля до $|K| \geq 7$.

Однако в настоящее время мы вернулись к этой теме в связи со следующей задачей.

Проблема 2. Описать орбиты группы Шевалле $G(\Phi, K)$, действующей сопряжениями на парах длинных корневых торов

$$X, Y \sim \{h_\alpha(\varepsilon) \mid \varepsilon \in K^*\}, \quad \alpha \in \Phi_l,$$

и соответствующие порождения.

Как видно из работ [14, 59, 20–24], где аналогичные результаты получены для значительно более простых случаев микровесовых торов, полное решение этой задачи потребует *огромной* работы.

В действительности, для большинства обычных приложений не обязательно знать полный ответ на эту задачу. Обычно достаточно уметь сводить описание подгрупп $\langle X, Y \rangle$, порожденных двумя длинными корневыми торами X и Y , к случаю меньшего ранга и уметь отвечать на следующий вопрос, который позволяет сводить большинство задач к хорошо изученному случаю унитарных элементов.

Проблема 3. Доказать, что если поле K не слишком маленькое, в подгруппе $\langle X, Y \rangle$, порожденной двумя некоммутирующими корневыми торами X, Y в группе Шевалле $G(\Phi, K)$, содержатся малоранговые унитарные элементы.

Из основных результатов настоящей работы видно, что длинные корневые торы в линейных и симплектических группах устроены *значительно* проще, чем во всех остальных группах. Поэтому решение проблемы 2 естественно начать со следующего частного случая.

Проблема 4. Описать орбиты группы $SL(n, K)$, действующей сопряжениями на парах длинных корневых торов и соответствующие порождения.

Однако мы уверены, что даже в этом частном случае получение полного ответа будет *чрезвычайно* сложным. В самом деле, уже анализ более простого случая 2-торов, состоящих из матриц с *одним* неединичным собственным значением кратности два, потребовал драматических технических усилий [21].

Доказательства всех основных результатов настоящей работы носят переборный характер, иными словами, являются не теми математическими доказательствами, что вскрывают суть дела, а *проверками*, мало отличающимися по своему стилю и характеру от первоначальных компьютерных вычислений.

Мы могли бы предложить иное, минимизирующее перебор случаев, концептуальное доказательство теоремы 1 в духе Ричардсона, Рерле и Стейнберга [79] или Крутелевича [69], но не сделали этого совершенно сознательно, так как детали вычислений в §2 понадобятся нам с Владимиром Нестеровым [25] при изучении унипотентных частей подгрупп, порожденных двумя длинными корневыми торами.

В то же время для теорем 3–5 мы не только не знаем никакого концептуального доказательства, но и не представляем себе, как такое доказательство могло бы в принципе выглядеть. Получение такого концептуального доказательства было бы серьезным продвижением в направлении решения следующей задачи, систематическое изучение которой начали Эрих Эллерс и Николай Гордеев [61–63].

Проблема 5. Изучить пересечения классов сопряженности группы Шевалле с клетками Брюа.

Чтобы показать, насколько сложна эта задача, отметим, что пока ни для одной группы, кроме $SL(n, K)$ не решена даже следующая очень специальная подзадача.

Проблема 6. Для данного $x \in G(\Phi, K)$ найти все $w \in W(\Phi)$, для которых $x^G \cap BwB \neq \emptyset$.

До совсем недавнего времени ответ на эту задачу был известен лишь для некоторых очень специальных классов и клеток, обычно либо *очень*

больших, таких как регулярные классы и большая клетка Брюа, либо совсем маленьких, таких как классы микровесовых элементов или квадратных унипотентных элементов и классы малоранговых инволюций или элементов Коксетера. Причем, насколько нам известно, даже в некоторых из этих случаев ответы известны только для случая $SL(n, K)$ и/или до сих пор не опубликованы.

Упомянем два типичных классических результата в этом направлении. Нориаки Каванака [67] вычислил количество *унипотентных* элементов в данной клетке Брюа BwB и, в частности, доказал, что регулярный унипотентный класс в группе Шевалле пересекает *все* клетки Брюа BwB , $w \in W$. С другой стороны, Роберт Стейнберг [86] доказал, что среди всех унипотентных классов *только* регулярные классы пересекают клетки BwB , где w — элемент Коксетера. Недавно Джордж Люстиг получил важные продвижения в этом направлении для произвольных унипотентных элементов [72–75].

Дело в том, что для *индивидуального* элемента вопрос о том, какие клетки Брюа пересекает его класс сопряженности — и тем более вопрос описания этих пересечений — *чрезвычайно* сложен. Ровно поэтому в большинстве приложений рассматриваются *общие* элементы, например, в нашей ситуации, элементы однопараметрических подгрупп в общем положении.

Значительная часть этой сложности проистекает из того, что вопрос о том, пересекает ли класс C клетку Брюа BwB , зависит *не только* от класса сопряженности w в группе Вейля. Собственно говоря, это выяснилось уже при изучении двумерных преобразований в $SL(n, K)$, для которых в качестве w могут фигурировать некоторые — но не все! — 4-циклы [9, 44]. В начале 1990-х годов авторы получили аналогичные результаты и для некоторых других типов преобразований в $SL(n, K)$, над произвольным полем.

Недавно Эрих Эллерс и Николай Гордеев предложили *алгоритм*, который в случае алгебраически замкнутого поля позволяет для каждого класса сопряженных элементов группы $SL(n, K)$ по жордановой форме вычислить клетки Брюа, которые он пересекает [62]. Для полупростых элементов получается явный ответ, который дается в терминах кратностей собственных значений.

Пересечения классов сопряженных элементов с клетками Брюа и другие близкие вопросы изучаются также в недавних работах Николетты Кантарини, Джованни Карновале и Мауро Костантини [53, 54, 60]. В частности, в работе [51] пересечения $C \cap BwB$ полностью изучены для *сферических* классов сопряженности. Обозначим через W_C множество тех

$w \in W$, для которых $C \cap BwB \neq \emptyset$. В предположении, что характеристика основного поля отлична от 2 и плохих простых для G , класс C в том и только том случае является сферическим, когда W_C целиком состоит из инволюций. Таким образом, результаты Карновале [54] обобщают, в частности, результаты первого автора [17], но не результаты настоящей работы.

С другой стороны, в работе Чан Кей Юэна, Лу Дзянг-Хуа и То Кай-Минга [57] изучаются пересечения классов сопряженных элементов с клетками Биркгофа $C \cap BwB^-$. Типичный результат этой работы состоит в том, что для каждого класса C существует наибольший элемент $w_C \in W$ такой, что $C \cap Bw_C B^- \neq \emptyset$. Иными словами, если $C \cap BwB^- \neq \emptyset$ для какого-то $w \in W$, то $w \leq w_C$, относительно порядка Брюа.

Вот еще одна подзадача проблемы 4, несколько более трудная, чем проблема 5. Эта задача рассматривается в недавней работе Джорджа Люстига [73].

Проблема 7. Для данных $x \in G(\Phi, K)$ и $w \in W(\Phi)$ вычислить размерность пересечения $x^G \cap BwB$.

Авторы посвящают эту статью Николаю Гордееву, с которым нас связывает многолетняя дружба, профессиональная и личная. Эта тематика с самого начала возникла на стыке наших интересов, и последние 25 лет мы постоянно обсуждали с ним все возникающие здесь вопросы.

Кроме того, мы благодарны многим коллегам, в первую очередь Эрнесту Борисовичу Винбергу, Александру Ефимовичу Залесскому, Гэри Зайтцу и Роджеру Картеру за многолетние стимулирующие обсуждения. На начальном этапе одним из важнейших вызовов для нас было желание придать окончательную форму результатам, содержавшимся в замечательном препринте Залесского [32], который, к сожалению, так и остался неопубликованным. Залесский и Зайтц независимо предложили более простой подход к доказательству результатов [11], частью которого и является настоящая работа.

Основная часть работы была выполнена в конце 1980-х — начале 1990-х годов, когда второй автор некоторое время работал в Берлине, а Николай Гордеев и первый автор — в Билефельде. Мы благодарны нашим немецким коллегам, в первую очередь Герберту Абельсу, Энтони Баку, Ульфру Реманну и Герноту Штроту за неизменную дружескую поддержку.

К сожалению, в то время мы так и не смогли завершить доказательства результатов о парах микровесовых торов и парах длинных корневых торов и поэтому не опубликовали полные доказательства вспомогательных результатов. Это удалось сделать лишь совсем недавно в сотрудничестве

с Владимиром Нестеровым [20–25], при помощи предложенной им в [36–40] новой техники описания орбит.

Список литературы

- [1] Борель А., *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973, с. 9–59.
- [2] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*. Гл. IV–VI, Мир, М., 1972.
- [3] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*. Гл. VII, VIII, Мир, М., 1978.
- [4] Вавилов Н. А., *О подгруппах специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц*. I–V, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1 **1985**, вып. 4, 3–7; **1986**, вып. 1, 10–15; **1987**, вып. 2, 3–8; **1988**, вып. 3, 10–15; **1993**, вып. 2, 10–15.
- [5] Вавилов Н. А., *Разложение Брюа одномерных преобразований*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1 **1986**, вып. 3, 14–20.
- [6] Вавилов Н. А., *Весовые элементы групп Шевалле*, Докл. АН СССР **298** (1988), №3, 524–527.
- [7] Вавилов Н. А., *Теоремы сопряженности для подгрупп расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор*, Докл. АН СССР **299** (1988), №2, 269–272.
- [8] Вавилов Н. А., *Разложение Брюа длинных корневых полупростых элементов в группах Шевалле*, Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей, вып. 2, ЛГУ, Л., 1988, с. 18–39.
- [9] Вавилов Н. А., *Разложение Брюа двумерных преобразований*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1, **1989**, вып. 3, 3–7.
- [10] Вавилов Н. А., *Полупростые корневые элементы и тройки унипотентных корневых подгрупп в группах Шевалле*, Вопросы алгебры, вып. 4, Университетское, Минск, 1989, с. 162–173.
- [11] Вавилов Н. А., *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор*, Тр. Ленингр. мат. о-ва **1** (1990), 64–109.
- [12] Вавилов Н. А., *Унипотентные элементы в подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор*, Докл. РАН **328** (1993), №5, 536–539.
- [13] Вавилов Н. А., *Подгруппы группы SL_n над полулокальным кольцом*, Зап. науч. семин. ПОМИ **343** (2007), 33–53.
- [14] Вавилов Н. А., *Геометрия 1-торов в GL_n* , Алгебра и анализ **19** (2007), №3, 119–150.
- [15] Вавилов Н. А., *Как увидеть знаки структурных констант?* Алгебра и анализ **19** (2007), №4, 34–68.
- [16] Вавилов Н. А., *О подгруппах симплектической группы, содержащих subsystem subgroup*, Зап. науч. семин. ПОМИ **349** (2007), 5–29.

- [17] Вавилов Н. А., *Весовые элементы групп Шевалле*, Алгебра и анализ **20** (2008), №1, 34–85.
- [18] Вавилов Н. А., Дыбкова Е. В., *Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц*. I, II, Зап. науч. семин. ЛОМИ **103** (1980), 31–47; **132** (1983), 44–56.
- [19] Вавилов Н. А., Митрофанов М. Ю., *Пересечения двух клеток Брюа*, Докл. РАН **377** (2001), №1, 7–10.
- [20] Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Геометрия микровесовых торов*, Владикавказ. мат. ж. **10** (2008), №1, 10–23.
- [21] Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Геометрия 2-торов в GL_n* (в печати).
- [22] Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Геометрия ϖ_1 -торов в SO_{2l}* (в печати).
- [23] Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Пары микровесовых торов в группе Шевалле типа E_6* (в печати).
- [24] Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Пары микровесовых торов в группе Шевалле типа E_7* (в печати).
- [25] Вавилов Н. А., Нестеров В. В., *Пары длинных корневых торов в группах Шевалле* (в печати).
- [26] Вавилов Н. А., Певзнер И. М., *Тройки длинных корневых подгрупп*, Зап. науч. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
- [27] Вавилов Н. А., Семенов А. А., *Разложение Брюа длинных корневых торов в группах Шевалле*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **175** (1989), 12–23.
- [28] Вавилов Н. А., Семенов А. А., *Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле*, Докл. РАН **338** (1994), №6, 725–727.
- [29] Дыбкова Е. В., *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем характеристики 2*, Алгебра и анализ **10** (1998), №4, 113–129.
- [30] Дыбкова Е. В., *Подгруппы гиперболических унитарных групп*, Докт. дис., СПбГУ, СПб., 2006, с. 1–182.
- [31] Дынкин Е. Б., *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли*, Мат. сб. **30** (1952), №2, 349–462.
- [32] Залесский А. Е., *Полупростые корневые элементы алгебраических групп*, Препринт Ин-та мат. АН БССР, №13, Минск, 1980, с. 1–24.
- [33] Залесский А. Е., *Линейные группы*, Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, вып. 21, ВИНТИ, М., 1983, с. 135–182.
- [34] Кашин В. В., *Орбиты присоединенного и коприсоединенного действий борелевской подгруппы полупростых алгебраических групп*, Проблемы теории групп и гомологической алгебры, Ярослав. гос. ун-т, Ярославль, 1990, с. 141–159.

- [35] Кондратьев А. С., *Подгруппы конечных групп Шевалле*, Успехи мат. наук **41** (1986), №1, 57–96.
- [36] Нестеров В. В., *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле*, Канд. дис., СПбГУ, СПб., 1995, с. 1–72.
- [37] Нестеров В. В., *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле*, Докл. РАН **357** (1997), №3, 302–305.
- [38] Нестеров В. В., *Расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2* , Зап. науч. семин. ПОМИ **272** (2000), 273–285.
- [39] Нестеров В. В., *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2* , Зап. науч. семин. ПОМИ **281** (2001), 253–273.
- [40] Нестеров В. В., *Порождение пар коротких корневых подгрупп в группе Шевалле*, Алгебра и анализ **16** (2004), №6, 172–208.
- [41] Певзнер И. М., *Геометрия корневых элементов в группах типа E_6* , Алгебра и анализ **23** (2011), №3, 261–309.
- [42] Певзнер И. М., *Ширина групп типа E_6 относительно множества корневых элементов. I*, Алгебра и анализ **23** (2011), №5, 155–198.
- [43] Певзнер И. М., *Ширина групп типа E_6 относительно множества корневых элементов. II*, Зап. науч. семин. ПОМИ **386** (2011), 242–264.
- [44] Семенов А. А., *Разложение Брюа корневых полупростых подгрупп в специальной линейной группе*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **160** (1987), 239–246.
- [45] Семенов А. А., *Разложение Брюа длинных корневых тором в группах Шевалле*, Канд. дис., СПбГУ, СПб., 1991, с. 1–143.
- [46] Спрингер Т. А., Штейнберг Р., *Классы сопряженных элементов*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973, с. 162–262.
- [47] Штейнберг Р., *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.
- [48] Хамфри Дж., *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
- [49] Шевалле К., *О некоторых простых группах*, Математика. Период сб. перев. ин. статей **2** (1958), №1, 3–58.
- [50] Azad H., Barry M., Seitz G. M., *On the structure of parabolic subgroups*, Comm. Algebra **18** (1990), 551–562.
- [51] Brion M., *Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985), 345–387.
- [52] Bürgstein H., Hesselink W. H., *Algorithmic orbit classification for some Borel group actions*, Compositio Math. **61** (1987), no. 1, 3–41.
- [53] Cantarini N., Carnovale G., Costantini M., *Spherical orbits and representations of $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathfrak{g})$* , Transform. Groups **10** (2005), no. 1, 29–62.

-
- [54] Carnovale G., *Spherical conjugacy classes and the Bruhat decomposition*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 6, 2329–2357.
- [55] Carter R. W., *Simple groups of Lie type*, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., London etc., 1989.
- [56] Carter R. W., *Conjugacy classes in the Weyl group*, Compositio Math. **25** (1972), no. 1, 1–59.
- [57] Chan Kei Yuen, Lu Jiang-Hua, To Kai-Ming, *On intersections of conjugacy classes and Bruhat cells*, Transform. Groups **15** (2010), no. 2, 243–260.
- [58] Clerc J.-L., *Special prehomogeneous vector spaces associated to F_4 , E_6 , E_7 , E_8 and simple Jordan algebras of rank 3*, J. Algebra **264** (2003), no. 1, 98–128.
- [59] Cohen A. M., Cuypers H., Sterk H., *Linear groups generated by reflection tori*, Canad. J. Math. **51** (1999), no. 6, 1149–1174.
- [60] Costantini M., *On the coordinate ring of spherical conjugacy classes*, Math. Z. **264** (2010), 327–359.
- [61] Ellers E. W., Gordeev N. L., *Intersection of conjugacy classes with Bruhat cells in Chevalley groups*, Pacific J. Math. **214** (2004), no. 2, 245–261.
- [62] Ellers E. W., Gordeev N. L., *Intersection of conjugacy classes with Bruhat cells in Chevalley groups: the cases $SL_n(K)$, $GL_n(K)$* , J. Pure Appl. Algebra **209** (2007), 703–723.
- [63] Gordeev N. L., Ellers E. W., *Big and small elements in Chevalley groups*, Зап. науч. семин. ПОМИ **386** (2011), 203–226.
- [64] Harebov A. L., Vavilov N. A., *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus*, Comm. Algebra **24** (1996), no. 1, 109–133.
- [65] Haris S., *Some irreducible representations of exceptional algebraic groups*, Amer. J. Math. **93** (1971), no. 1, 75–106.
- [66] Hesselink W., *A classification of the nilpotent triangular matrices*, Compositio Math. **55** (1985), no. 1, 89–133.
- [67] Kawanaka N., *Unipotent elements and characters of finite Chevalley groups*, Osaka J. Math. **12** (1975), no. 2, 523–554.
- [68] Krutelevich S., *On a canonical form of a 3×3 Hermitian matrix over the ring of integral split octonions*, J. Algebra **253** (2002), no. 2, 276–295.
- [69] Krutelevich S., *Jordan algebras, exceptional groups, and Bhargava composition*, J. Algebra **314** (2007), 924–977.
- [70] Liebeck M. W., Seitz G. M., *Subgroups generated by root elements in groups of Lie type*, Ann. of Math.(2) **139** (1994), no. 2, 293–361.

- [71] Liebeck M. W., Seitz G. M., *Subgroups of simple algebraic groups containing elements of fundamental subgroups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **126** (1999), 461–479.
- [72] Lusztig G., *From conjugacy classes in the Weyl group to unipotent classes. I–III* arXiv:1003.0412v5 [math.RT] (23 Aug. 2010), 1–41; arXiv:1104.0196v2 [math.RT] (30 Apr. 2011), 1–26; arXiv:1104.3112v1 [math.RT] (15 Apr. 2011), 1–22.
- [73] Lusztig G., *On C -small conjugacy classes in a reductive group*, arXiv:1005.4313v2 [math.RT] (10 Dec. 2010), 1–19.
- [74] Lusztig G., *Bruhat decomposition and applications*, arXiv:1006.5004v1 [math.RT] (25 Jun. 2010), 1–4.
- [75] Lusztig G., *From unipotent classes to conjugacy classes in the Weyl group*, arXiv:1008.2692v1 [math.RT] (16 Aug. 2010), 1–10.
- [76] Mars J. G. M., *Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 97–140.
- [77] Matsumoto H., *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) **2** (1969), 1–62.
- [78] Plotkin E. B., Semenov A. A., Vavilov N. A., *Visual basic representations: an atlas*, Internat. J. Algebra Comput. **8** (1998), 61–95.
- [79] Richardson R., Röhrle G. E., Steinberg R., *Parabolic subgroups with abelian unipotent radical*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 649–671.
- [80] Röhrle G. E., *Orbits in internal Chevalley modules*, Groups, Combinatorics and Geometry (Durham, 1990), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 165, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, pp. 311–315.
- [81] Röhrle G. E., *On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups*, J. Algebra **157** (1993), no. 1, 80–115.
- [82] Röhrle G. E., *On extraspecial parabolic subgroups*, Linear Algebraic Groups and their Representations (Los angeles, CA, 1992), Contemp. Math., vol. 153, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 143–155.
- [83] Semenov A. A., Vavilov N. A., *Halbeinfache Wurzelemente in Chevalley-Gruppen*, Preprint Universität Bielefeld, 1994, no. 2, 1–11.
- [84] Springer T. A., *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Progr. in Math., vol. 9, Birkhäuser, Boston, 1981.
- [85] Stein M. R., *Stability theorems for K_1 , K_2 and related functors modeled on Chevalley groups*, Japan J. Math. (N.S.) **4** (1978), no. 1, 77–108.
- [86] Steinberg R., *Regular elements of semi-simple algebraic groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No 25 (1965), 49–80.
- [87] Vavilov N. A., *Structure of Chevalley groups over commutative rings*, Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., Singapore etc., 1991, pp. 219–335.

-
- [88] Vavilov N. A., *Intermediate subgroups in Chevalley groups*, Groups of Lie Type and their Geometries (Como, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 207, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 233–280.
- [89] Vavilov N. A., *Unipotent elements in subgroups which contain a split maximal torus*, J. Algebra **176** (1995), 356–367.
- [90] Vavilov N. A., *A third look at weight diagrams*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
- [91] Vavilov N. A., Plotkin E. B., *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations*, Acta Appl. Math. **45** (1996), 73–113.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 9 сентября 2011 г.

E-mail: semenov@math.spbu.ru