Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 11

Издание выходит с 2006 года

С. А. Теляковский

Курс лекций по математическому анализу

Семестр I

Издание 2-е, доработанное

МИАН

Москва
2009

УДК 517
ББК (В)22.16
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ**/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2009. Вып. 11: Курс лекций по математическому анализу. Семестр I / Теляковский С. А. – 212 с.

ISBN 5-98419-030-3

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит “Курс лекций по математическому анализу” С. А. Теляковского, читавшийся студентам первого курса механико-математического факультета МГУ в 1996–2006 годах.

ISBN 5-98419-030-3

Оглавление

Введение

Более 15 лет автор читал лекции по математическому анализу в МФТИ. Тогда при разработке курса за основу был взят учебник С. М. Никольского “Курс математического анализа”. Разумеется, использовались и другие источники. В первую очередь “Курс дифференциального и интегрального исчисления” Г. М. Фихтенгольца и “Курс математического анализа” Л. Д. Кудрявцева.

В 1996–2006 г.г. автор читал курс математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. Значительное по сравнению с курсом на физтехе увеличение числа лекционных часов, изменение программы и её акцентов привели к существенным изменениям содержания курса. Большую помощь при этой переработке оказал Т. П. Лукашенко, ознакомивший автора с записями своих лекций.

Настоящий курс написан на основе лекций, читавшихся автором в МГУ.

Для сокращения записи используются следующие обозначения.

$\forall$ – “для каждого”, “для любого”, “для всех” (это перевернутая начальная буква английского All),

$\exists$ – “существует”, “найдётся” (это перевернутая начальная буква английского Exist),

$:$ – “такой, что”, “такие, что”,

$:=$ – “обозначим”.

В математике часто используются термины “достаточное условие”, “необходимое условие”. При этом слова достаточность и необходимость имеют обычный смысл: если из утверждения A следует утверждение B, то условие A называют достаточным, для того чтобы имело место B, а B необходимым для выполнения A.

К сожалению, в разговорной речи, особенно в последнее время, слово достаточно часто употребляется также вместо слова очень. В результате возникают такие нелепые высказывания как: “При аварии пострадало достаточно много людей” или “Фотоаппарат работает достаточно плохо”. Обе эти фразы автор не придумал специально, а действительно слышал их.

Два замечания о содержания курса.

В первом семестре рассматриваются только действительные числа. Комплексные числа упоминаются всего один раз, да и то вскользь в седьмой главе. Мы исходим из того, что в университетах комплексные числа вводятся в читаемом одновременно курсе высшей алгебры.

Подробнее, чем обычно в курсах анализа, говорится о выпуклых функциях.

В 2002–2004 годы в издательстве Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ вышли выпуски курса, содержащие последовательно материал I, II, III и IV семестров.

Настоящий выпуск представляет собой второе издание курса лекций I семестра. При подготовке второго издания материал был дополнен и заново отредактирован.

При работе над вторым изданием автор воспользовался большим количеством полезных замечаний и конструктивных предложений по улучшению текста, которые он получил от О. В. Бесова, Л. А. Леонтьевой и Д. С. Теляковского. Автор приносит им свою глубокую благодарность.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить также лиц, высказавших свои замечания по первому изданию или по ходу чтения лекций. Это – Е. А. Волков, В. И. Гаврилов, А. И. Галочкин, Е. П. Долженко, А. В. Домрина, Е. В. Майков, И. Х. Сабитов, А. М. Седлецкий, Т. Х. Яковлева.

Автор глубоко благодарен своим слушателям – студентам, вопросы и замечания которых подсказывали, какие моменты рассуждения следует привести более подробно или уточнить.

Декабрь 2008 г. С. А. Теляковский

Глава 1. Действительные числа

§ 1.1. Бесконечные десятичные дроби

Рациональные (в частности, целые) числа и их свойства считаются известными из школы. Рациональные числа можно сравнивать (т. е. для них введены понятия “равно”, “больше” и “меньше”), определены арифметические действия над рациональными числами – сложение, вычитание, умножение и деление.

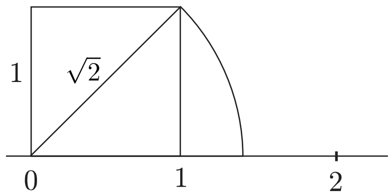
Но рациональных чисел недостаточно даже для задач элементарной математики. Так, длина диагонали квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$, а это число иррациональное, т. е. не рациональное. Не является рациональным и число π, выражающее длину окружности диаметра 1.

Напомним, что такое числовая прямая. На горизонтально расположенной прямой выбирают начальную точку O и единичный отрезок OE, отложенный вправо от точки O. Точке O ставится в соответствие число 0, точке E – число 1. Откладывая вправо от точки E шаг за шагом единичный отрезок, получают точки, соответствующие натуральным числам $2, 3, \dots$, а откладывая единичный отрезок влево от точки O, – точки, соответствующие целым отрицательным числам $-1, -2, \dots$.

Затем строятся точки, соответствующие рациональным числам. При $n = 2, 3, \dots$ отрезок OE делят на n равных частей и чтобы получить точку, соответствующую положительному рациональному числу m/n, вправо от точки O откладывают m раз отрезок длины $1/n$. Точно также для отрицательных рациональных чисел находят соответствующие им точки слева от точки O.

Таким образом, каждому рациональному числу поставлена в соответствие точка на числовой прямой. Но при этом не каждой точке числовой прямой соответствует рациональное число. Например, нет рационального числа, соответствующего точке, расположенной справа от O на расстоянии $\sqrt{2}$.

В этой главе рациональные числа будут пополнены до множества действительных чисел, в результате каждой точке числовой



прямой будет соответствовать число, а каждому числу – точка на прямой.

Такое пополнение рациональных чисел можно осуществить разными способами. Мы сделаем это, используя бесконечные десятичные дроби. Такой способ был намечен в школе, но сейчас все рассуждения будут проведены заново.

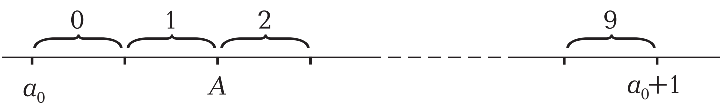
Отметим, что определение действительных чисел как бесконечных десятичных дробей восходит к К. Вейерштрассу.

Построим десятичную дробь, соответствующую произвольной точке A числовой прямой.

Пусть точка A расположена справа от точки O и не отвечает натуральному числу. Найдём целые числа a_0 и a_0+1, между которыми лежит точка A. В качестве целой части десятичной дроби, соответствующей точке A, берём a_0.

Далее отрезок между точками a_0 и a_0+1 делим на 10 равных частей и приписываем этим частям слева направо цифры от 0 до 9. Среди полученных промежутков длины $1/10$ находим тот, внутри которого находится точка A (случай, когда A оказывается одной из точек деления, обсудим позднее) и в качестве первого десятичного знака искомой дроби берём цифру, приписанную этому промежутку. Продолжая этот процесс, получим (при условии, что A не оказывается точкой деления) бесконечную десятичную дробь, соответствующую точке A.

Рассмотрим теперь случай, когда точка A оказалась одной из точек деления. Пусть, например, A расположена как на рисунке:



Точкам на промежутке, примыкающем к A справа, в качестве первого десятичного знака мы приписали цифру 2, а на промежутке, примыкающем слева, – цифру 1. По поводу самих точек деления нужно решить, к какому промежутку их относить: лежащему справа или лежащему слева. Если точки деления относить к правым промежуткам, то для точки A на рисунке получим $a_0, 2$, а все остальные десятичные знаки – ноли, т. е. получим $a_0, 2000\ldots$. Если точки деления относить к левым промежуткам, то для точки A получим $a_0, 1$, а все остальные десятичные знаки – девятки, т. е. получим $a_0, 1999\ldots = a_0, 1(9)$.

В зависимости от договоренности, относить точки деления к правым или к левым промежуткам, для точек, соответствующих натуральным числам, также получим две бесконечные десятичные дроби. У одной из них все десятичные знаки ноли, а у другой целая часть на единицу меньше, а все десятичные знаки – девятки.

Для точек числовой прямой слева от точки O пишем перед дробью знак минус, а затем подобным образом находим числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$, определяющие соответствующую бесконечную десятичную дробь $-a_0, a_1a_2\ldots$.

Таким образом, для всех точек числовой прямой (кроме начальной точки O), которые оказываются точками деления, возможны две записи – с нолем в периоде (т. е. в виде целого числа или конечной десятичной дроби) или с девяткой в периоде. Для остальных точек бесконечная десятичная дробь определяется однозначно.

Чтобы каждой точке числовой прямой соответствовала единственная бесконечная десятичная дробь, уславливаются не различать получающиеся при указанном построении дроби с 0 и с 9 в периоде. Обычно в каждом рассуждении используют дроби только с нолем или только с девяткой в периоде.

Поставим обратную задачу – для заданной бесконечной десятичной дроби $\pm a_0, a_1a_2\ldots$ найти соответствующую ей точку числовой прямой.

По знаку дроби и числу a_0 находим два идущих подряд целых числа, между которыми должна располагаться искомая точка. Затем, разбив промежуток между этими точками на 10 равных частей, по числу a_1 находим тот из полученных промежутков длины $1/10$, которому должна принадлежать наша точка.

Продолжая шаг за шагом это построение, получим последовательность промежутков, каждый из которых содержится в предыдущем, а длина его в 10 раз меньше. Искомая точка должна принадлежать всем этим промежуткам.

Но обязательно ли существует такая точка, мы сейчас не знаем. В дальнейшем на этот вопрос будет получен положительный ответ.

Всё сказанное о бесконечных десятичных дробях следует рассматривать как наводящие соображения к тому, чтобы назвать числами бесконечные десятичные дроби.

Определение. *Действительными* (вещественными) *числами* называют бесконечные десятичные дроби $\pm a_0, a_1 a_2 \ldots$, где выбран определённый знак: "$+$" или "$-$", a_0 – натуральное число или нуль, а все десятичные знаки $a_1, a_2, \ldots$ – цифры от 0 до 9. При этом дробь $\pm a_0, a_1 \ldots a_m(9)$, где $a_m \neq 9$, определяет то же число, что и дробь $\pm a_0, a_1 \ldots a_{m-1} d000 \ldots$, у которой m-й десятичный знак d равен $a_m + 1$.

Действительные числа будем обозначать буквами и писать $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$, опуская обычно при этом знак $+$. Число 0 записывают как бесконечную дробь $0,000\ldots$, которую можно снабдить и знаком $+$ и знаком $-$, но как правило этой дроби знак не приписывают.

При записи чисел $a, b, c, \ldots$ в виде бесконечных десятичных дробей для обозначения десятичных знаков будем использовать эти же буквы с индексами:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots; \qquad b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots; \qquad c = \pm c_0, c_1 c_2 \ldots.$$

Для каждого числа $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$ вводится число $-a$, которое отличается от a только знаком, т. е. $-a := \mp a_0, a_1 a_2 \ldots$. На числовой прямой точки, соответствующие числам a и $-a$, расположены симметрично относительно начальной точки O.

Выясним, как соотносятся рациональные и действительные числа.

Рациональные числа представимы в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное.

Будем для определённости считать, что $m > 0$. Разделив m на n "уголком", получим либо конечную десятичную дробь, которую можно записать в виде бесконечной дроби с 0 в периоде, либо бесконечную десятичную дробь, которая обязательно будет периодической.

В самом деле, остатками при делении на n могут быть только числа $1, 2, \ldots, n-1$. Рассмотрим остатки, которые получаются при делении m на n после того, как все значащие цифры числа m

уже снесены. Рано или поздно какой-то остаток повторится, после чего следующие остатки также будут повторяться, значит, будут повторяться и десятичные знаки.

Таким образом, каждое рациональное число представимо бесконечной десятичной периодической дробью.

Верно и обратное утверждение: каждая бесконечная десятичная периодическая дробь равна отношению $\frac{m}{n}$ целого числа m к натуральному числу n. В этом можно убедиться, например, с помощью формулы суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Впрочем, доказательство этой формулы в школьных учебниках нельзя признать полным, так как оно опиралось на наивно-интуитивные представления о пределах. Во второй главе будет дано аккуратное доказательство указанной формулы.

Итак, рациональные числа и только они представимы бесконечными десятичными периодическими дробями. Иррациональные числа записываются бесконечными десятичными непериодическими дробями. Примерами таких дробей может служить дробь $0,1010010001\ldots$ (количество нолей между цифрами 1 каждый раз увеличивается на один) или дробь, выражающая $\sqrt{2}$.

Теперь нам предстоит определить сравнение действительных чисел и арифметические действия над ними. Эти определения должны быть такими, чтобы результаты для рациональных чисел сохранялись.

Будем использовать свойства сравнения рациональных чисел и арифметических действий над ними.

В дальнейшем там, где это не может вызвать недоразумений, действительные числа будем называть просто числами.

§ 1.2. Сравнение чисел

Рассмотрим число $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$. Если все числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ равны нулю, то не имеет значения, какой знак стоит перед дробью, число a называют нулём и пишут $a = 0$.

Пусть теперь среди чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть хотя бы одно, отличное от нуля. Тогда, если перед дробью стоит знак $+$, число a называют положительным и пишут $a > 0$. А если перед дробью стоит знак $-$, число a называют отрицательным и пишут $a < 0$.

Таким образом, определено сравнение действительных чисел с нулём.

Определение. *Модулем* (или абсолютной величиной) числа

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$$

называется число

$$|a| := a_0, a_1 a_2 \ldots .$$

Модуль каждого числа либо положителен, либо равен нулю. Если $a > 0$, то $|a| = a$, а если $a < 0$, то $|a| = -a$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что при записи бесконечных десятичных дробей используется какая-либо одна форма записи – или с 0, или с 9 в периоде.

Определим сравнение произвольных чисел.

Определение. Числа $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$ и $b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots$ называют *равными*, если они имеют одинаковые знаки и $a_k = b_k$ при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В этом случае пишут $a = b$, в противном случае пишут $a \neq b$.

Определим теперь для произвольных действительных чисел неравенства. Напомним, что если одно из чисел равно нулю, неравенства уже введены.

Определение. Пусть числа a и b не равны между собой. Тогда

1^0. О положительных числах a и b говорят, что a меньше b, и пишут $a < b$, если существует индекс $k = 0, 1, 2, \ldots$ такой, что $a_k < b_k$, а при всех i, меньших k, справедливы равенства $a_i = b_i$.

2^0. Если одно из чисел положительно, а второе отрицательно, то отрицательное число меньше положительного.

3^0. Если числа a и b отрицательны и $|b| < |a|$, то $a < b$.

Если $a < b$, то говорят также, что b больше a и пишут $b > a$. Неравенства $a < b$ и $b > a$ считаются равносильными.

На числовой прямой точка, соответствующая меньшему числу, расположена слева от точки, соответствующей большему числу.

Из определения следует, что *если* $a < b$, *то* $-a > -b$, и что неравенство $|a| < b$ равносильно двойному неравенству $-b < a < b$.

Не будем останавливаться на доказательстве того, что для рациональных чисел данное определение равносильно прежнему, когда для положительных дробей m/n и p/q неравенство $m/n < p/q$ означало $mq < np$.

Наряду со строгими неравенствами $<$ и $>$ используются нестрогие неравенства $\leqslant$ и $\geqslant$. Запись $a \leqslant b$ означает, что или $a < b$ или $a = b$. С помощью знака нестрогого неравенства, легко строится отрицание строгого неравенства. Так, отрицанием неравенства $a < b$ является $a \geqslant b$.

Рассмотрим свойства неравенств. Они составляют первую группу свойств действительных чисел.

I.1. *Для любых чисел a и b имеет место одно и притом только одно из соотношений*: $a < b$, $a = b$ *или* $a > b$.

Иначе говоря: если числа различны, то одно из них меньше другого. Это вытекает сразу из определения сравнения чисел.

Свойство I.1 называют *упорядоченностью* действительных чисел.

I.2. *Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.*

Эти свойства называют *транзитивностью* знаков $<$ и $=$ соответственно.

Транзитивность знака $=$ следует из определения равенства чисел.

Докажем транзитивность знака $<$.

Если $a \geqslant 0$, то числа b и c положительны. Представим числа a, b, c бесконечными десятичными дробями

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots; \quad b = b_0, b_1 b_2 \ldots; \quad c = c_0, c_1 c_2 \ldots .$$

Напомним, что используется какая-либо одна форма записи: или с 0 или с 9 в периоде.

Так как $a < b$, то существует индекс k такой, что $a_k < b_k$ и $a_i = b_i$ для $i = 0, 1, \ldots, k - 1$. Точно также существует индекс l такой, что $b_l < c_l$ и $b_j = c_j$ для $j = 0, 1, \ldots, l - 1$.

Пусть $m := \min\{k, l\}$, т. е. m – меньшее из чисел k и l. Тогда $a_i = b_i = c_i$ при $i = 0, 1, \ldots, m - 1$ и выполняются неравенства $a_m \leqslant b_m$ и $b_m \leqslant c_m$, причём по крайней мере одно из них является строгим. Так как числа a_m, b_m и c_m – целые, то, пользуясь транзитивностью знака $<$ для целых чисел, видим, что $a_m < c_m$, значит, $a < c$.

Пусть теперь $a < 0$. Если $c > 0$, то $a < c$ по определению. А если $c \leqslant 0$, то $b < 0$, и для модулей чисел a, b и c имеем $|a| > |b|$ и $|b| > |c|$. Значит, по уже доказанному $|a| > |c|$, откуда $a < c$.

Этим заканчивается доказательство свойства I.2.

Знак $\leqslant$ также обладает свойством транзитивности: *если* $a \leqslant b$ *и* $b \leqslant c$, *то* $a \leqslant c$. Это следует из транзитивности знаков $<$ и $=$.

I.3. *Для каждого числа a существует натуральное число n такое, что $n > a$.*

Это свойство называют архимедовым. При определении действительных чисел как бесконечных десятичных дробей свойство I.3 очевидно: если $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots$, то в качестве n можно взять $a_0 + 2$. Вместе с тем, архимедово свойство играет важную роль при аксиоматическом определении действительных чисел, о котором будет говориться в § 1.9.

Приведём утверждения о сравнении действительных чисел с рациональными.

Теорема 1.2.1. *Пусть a и b – произвольные числа и $a < b$. Тогда существует рациональное число α такое, что $a < \alpha < b$.*

Доказательство. Пусть сначала $a \geqslant 0$, $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$, $b = b_0, b_1 b_2 \ldots$ и в этих представлениях не используется цифра 9 в периоде.

Найдём наименьший индекс k такой, что $a_k < b_k$, и индекс $m > k$ такой, что $a_m < 9$. В качестве α можно взять конечную десятичную дробь $a_0, a_1 \ldots a_{m-1} d$, у которой m-й десятичный знак d равен $a_m + 1$.

Если a и b имеют разные знаки, берём $\alpha = 0$. А если $b \leqslant 0$, то находим рациональное число β такое, что $|b| < \beta < |a|$, и полагаем $\alpha := -\beta$.

Теорема доказана.

Теорема 1.2.2. *Для произвольного числа a при каждом натуральном n существует конечная десятичная дробь α_n с n знаками после запятой такая, что*

$$\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство. Если $a \geqslant 0$, то при каждом натуральном n

$$a_0, a_1 \ldots a_n \leqslant a \leqslant a_0, a_1 \ldots a_n + 10^{-n}$$

и полагаем $\alpha_n := a_0, a_1 \ldots a_n$.

Если a отрицательно и $a = -a_0, a_1 a_2 \ldots$, то $a_0, a_1 \ldots a_n \leqslant |a| \leqslant a_0, a_1 \ldots a_n + 10^{-n}$. Поэтому $-a_0, a_1 \ldots a_n - 10^{-n} \leqslant a \leqslant$

$-a_0, a_1 \dots a_n$ и полагаем $\alpha_n := -a_0, a_1 \dots a_n - 10^{-n}$. Заметим, что в этом случае $\alpha_n + 10^{-n} \leqslant 0$.

Теорема доказана.

Определение. Дроби α_n и $\alpha_n + 10^{-n}$ с n десятичными знаками после запятой, для которых справедливы неравенства (1.2.1), называют *n-ми десятичными приближениями числа a* соответственно *с недостатком* и *с избытком.*

Десятичные приближения чисел будут использоваться только в первой главе. Для сокращения записи будем называть n-ми десятичными приближениями приближения с недостатком.

Лемма 1.2.3. *Пусть $a < b$ и α_n и β_n – n-е десятичные приближения чисел a и b. Тогда существует натуральное число m такое, что при всех $n \geqslant m$ выполняется неравенство*

$$\beta_n - \alpha_n > 10^{-m}. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Будем считать, что в представлении чисел бесконечными десятичными дробями не используется запись с 9 в периоде.

Пусть сначала $a \geqslant 0$. Если k – такое число, что $a_i = b_i$ для $i = 0, 1, \dots, k-1$ и $a_k < b_k$, то $\alpha_n < \beta_n$ при всех $n \geqslant k$. Покажем, что если $m > k$ и $a_m < 9$, то имеет место оценка (1.2.2).

Рассмотрим число c такое, что $c_i = a_i$ при всех $i \neq m$ и $c_m = a_m + 1$. Тогда $c < b$. Если γ_n – n-е десятичные приближения c, то $\gamma_n < \beta_n$ для $n \geqslant k$. При $n \geqslant m$ имеем $\gamma_n = \alpha_n + 10^{-m}$ и, значит, $\beta_n > \alpha_n + 10^{-m}$. Таким образом, выполняется неравенство (1.2.2) и для $a \geqslant 0$ лемма доказана.

Если $a < 0$ и $b \geqslant 0$, то все $\beta_n \geqslant 0$ и для любого m такого, что $-a > 10^{-m}$, при всех n имеем

$$\beta_n - \alpha_n \geqslant -\alpha_n \geqslant -a > 10^{-m}.$$

Наконец, если $a < 0$ и $b < 0$, то n-ми десятичными приближениями чисел $|a|$ и $|b|$ являются соответственно дроби $|\alpha_n + 10^{-n}|$ и $|\beta_n + 10^{-n}|$. Из условия $a < b$ следует, что $|a| > |b| > 0$. Для положительных чисел лемма уже доказана, поэтому существует такое m, что $|\alpha_n + 10^{-n}| - |\beta_n + 10^{-n}| > 10^{-m}$ при всех $n \geqslant m$. По свойствам модулей чисел $|\alpha_n + 10^{-n}| - |\beta_n + 10^{-n}| = -(\alpha_n + 10^{-n}) + (\beta_n + 10^{-n}) = \beta_n - \alpha_n$ и мы пришли к оценке (1.2.2).

Лемма доказана.

Лемма 1.2.4. *Если для числа a существует такое натуральное число p, что*

$$|a| \leqslant p \cdot 10^{-n} \tag{1.2.3}$$

при всех натуральных n, то $a = 0$.

Доказательство. Предположим, что $a \neq 0$. Тогда при некотором k число a_k в представлении a в виде бесконечной десятичной дроби отлично от нуля.

Найдём натуральное m, для которого

$$10^{-k} > p \cdot 10^{-m}.$$

Таким образом,

$$|a| \geqslant a_k \cdot 10^{-k} \geqslant 10^{-k} > p \cdot 10^{-m},$$

что противоречит условию леммы.

Поэтому лемма доказана.

Заметим, что в условии леммы достаточно предполагать, что неравенство (1.2.3) имеет место для всех достаточно больших n.

§ 1.3. Точная верхняя и точная нижняя грани числового множества

Сделаем предварительно несколько замечаний о множествах.

Множество является одним из исходных понятий математики, оно не определяется. Вместо слова “множество” можно говорить о наборе, совокупности, собрании, коллекции. Но эти слова не могут служить определением, они только поясняют понятие множества.

Множество может содержать или не содержать те или иные объекты, которые называют *элементами*. Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут $x \in A$, а если x не принадлежит множеству A, пишут $x \notin A$. Множество задаётся набором своих элементов.

Общеприняты следующие стандартные обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел,

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Наряду с множествами, содержащими какие-либо элементы, рассматривают множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называют *пустым* и обозначают $\varnothing$. Если множество содержит хотя бы один элемент, его называют *непустым*.

Определение. Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то A называют *подмножеством* множества B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

Например, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Так как пустое множество $\varnothing$ не имеет элементов, то считают, что $\varnothing \subset A$ для любого множества A.

Определение. Если $A \subset B$ и $B \subset A$ (т. е. каждый элемент множества A принадлежит B и каждый элемент B принадлежит A), то множества A и B называют *равными* и пишут $A = B$. В противном случае пишут $A \neq B$.

Таким образом, условие $A \subset B$ не исключает равенства $A = B$.

Переходим к теме настоящего параграфа о верхних и нижних гранях числовых множеств. Далее будем рассматривать только числовые множества и говорить просто о множествах, подразумевая, что это множества чисел.

Определение. Непустое множество A называют *ограниченным сверху*, если существует такое число K, что $x \leqslant K$ для всех $x \in A$.

Непустое множество A называют *ограниченным снизу*, если существует такое число k, что $x \geqslant k$ для всех $x \in A$.

Определение. Если множество ограничено и сверху и снизу, его называют *ограниченным*.

Иначе можно сказать так: непустое множество A называется ограниченным, если существует такое число K, что для всех $x \in A$ справедливо неравенство $|x| \leqslant K$. В самом деле, неравенство $|x| \leqslant K$ равносильно двойному неравенству $-K \leqslant x \leqslant K$.

Определение. Число M называется *точной верхней гранью* непустого множества A, если

1) для любого числа $x \in A$ справедливо неравенство $x \leqslant M$;

2) для каждого числа $M' < M$ существует число $x' \in A$ такое, что $M' < x'$.

Условие 2) показывает, что M является наименьшим из чисел, ограничивающих сверху все числа множества A.

Множество может иметь только одну точную верхнюю грань. Действительно, допустим, что числа M и M^* различны и оба являются точными верхними гранями непустого множества A. Пусть для определённости $M^* < M$. Так как M – точная верхняя грань, то в силу условия 2) существует число $x^* \in A$ такое, что $M^* < x^*$. Значит, M^* не может быть точной верхней гранью множества A.

Определение. Число m называется *точной нижней гранью* непустого множества A, если

1) для любого числа $x \in A$ имеем $m \leqslant x$;

2) для каждого числа $m' > m$ существует число $x' \in A$ такое, что $x' < m'$.

Точная нижняя грань множества (если она существует) также определяется единственным образом.

Обозначения точной верхней грани

$$M = \sup_{x \in A} x = \sup A$$

(sup от латинского *supremum* – "высшее") и точной нижней грани

$$m = \inf_{x \in A} x = \inf A$$

(inf от латинского *infimum* – "низшее").

Если множество представляет собой конечный набор чисел, то его точная верхняя грань равна наибольшему, а точная нижняя грань – наименьшему из этих чисел.

Если множество имеет точную верхнюю грань, то оно ограничено сверху, а если имеет точную нижнюю грань, оно ограничено снизу. Покажем, что в этих утверждениях ограниченность множества сверху, соответственно, снизу является не только необходимым, но и достаточным условием существования точных граней.

Теорема 1.3.1. *Если непустое множество A ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Представим числа из A в виде бесконечных десятичных дробей, запретив запись с 0 в периоде.

Если среди чисел множества A есть неотрицательные, то задача о существовании точной верхней грани всего множества A

эквивалентна такой задаче для неотрицательных чисел из A. Поэтому мы вправе исключить из множества A все отрицательные числа.

Так как числа из A ограничены сверху, то ограничены сверху целые части этих чисел. Значит, существует наибольшее число среди этих целых частей. Обозначим его M_0.

Выберем те числа из A, у которых целая часть равна M_0, и рассмотрим первые десятичные знаки таких чисел. Пусть M_1 – наибольший из этих первых десятичных знаков.

Будем далее рассматривать только те числа из A, десятичная запись которых начинается с M_0, M_1. Наибольший второй десятичный знак этих чисел обозначим M_2. Снова оставляем только такие числа из A, десятичная запись которых начинается с $M_0, M_1 M_2$, и проводим аналогичные рассуждения с третьим десятичным знаком.

Продолжив неограниченно этот процесс, получим бесконечную десятичную дробь

$$M_0, M_1 M_2 \dots .$$

Положим $M := M_0, M_1 M_2 \dots$ и покажем, что $M = \sup A$.

По построению $M \geqslant x$ для любого $x \in A$. С другой стороны, взяв произвольное число $M' := M'_0, M'_1 M'_2 \dots$, меньшее M, находим среди чисел $0, 1, 2, \dots$ наименьший индекс k такой, что $M'_k < M_k$. Но среди чисел множества A есть число x', десятичное разложение которого начинается с $M_0, M_1 \dots M_k$. Значит, $M' < x'$ и M является точной верхней гранью множества A.

Пусть теперь множество A содержит только отрицательные числа.

В представлении чисел $x \in A$ в виде бесконечных десятичных дробей $x = -x_0, x_1 x_2 \dots$ находим наименьшее из чисел x_0. Обозначим это наименьшее число M_0.

Оставим только те числа из A, представление которых в виде бесконечной десятичной дроби начинается с $-M_0$.

Найдём у этих чисел наименьший первый десятичный знак. Обозначим его M_1. Далее рассматриваем только те числа, десятичное представление которых начинается с $-M_0, M_1$. Находим у таких чисел наименьший второй десятичный знак, обозначаем его M_2 и т. д.

Тогда число $M := -M_0, M_1 M_2 \ldots$ является точной верхней гранью множества A. В самом деле, неравенство $x \leqslant M$ выполняется для всех $x \in A$ по построению. А для любого $M' < M$ находим число $x' \in A$ такое, что $x' > M'$, с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше.

Теорема доказана.

Теорема 1.3.2. *Если непустое множество A ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань.*

Доказательство. Введём множество B, состоящее из чисел $-x$, где $x \in A$.

Из ограниченности множества A снизу следует ограниченность множества B сверху. Значит, согласно теореме 1.3.1 множество B имеет точную верхнюю грань. Но $-\sup B = \inf A$ и, таким образом, множество A имеет точную нижнюю грань.

Теорема 1.3.3. *Пусть множество A непусто.*

Если $\forall\, x \in A$ справедливо неравенство $x \leqslant K$, то $\sup A \leqslant K$.

Если $\forall\, x \in A$ справедливо неравенство $x \geqslant k$, то $\inf A \geqslant k$.

Доказательство. Так как $x \leqslant K$ для всех $x \in A$, то согласно теореме 1.3.1 $\sup A$ существует. А неравенство $\sup A \leqslant K$ следует из условия 2) определения точной верхней грани.

Для точной нижней грани рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Теорема 1.3.4. *Для каждого числа a справедливо равенство $a = \sup \alpha$, где точная верхняя грань берётся по всем рациональным числам $\alpha \leqslant a$.*

Достаточно проверить, что для любого числа $a' < a$ найдётся рациональное число α такое, что $a' < \alpha \leqslant a$. А это следует из теоремы 1.2.1.

Точная верхняя и точная нижняя грани множества могут как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему. Например, число 1, которое является точной нижней гранью множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, принадлежит $\mathbb{N}$. А если A – множество всех положительных чисел, то число $0 = \inf A$ не принадлежит A.

Если $\sup A \in A$, то вместо $\sup A$ обычно пишут $\max A$ и говорят, что точная верхняя грань множества достигается. Если $\inf A \in A$, вместо $\inf A$ пишут $\min A$. Если же точные грани не принадлежат множеству или их принадлежность множеству неизвестна или не обсуждается, пишут $\sup A$ и $\inf A$.

§ 1.4. Сложение чисел

Определим сложение действительных чисел и установим свойства сложения.

Определение. *Суммой* чисел a и b называется число

$$a + b := \sup(\alpha + \beta),$$

где точная верхняя грань берётся по всем рациональным числам α и β таким, что $\alpha \leqslant a$ и $\beta \leqslant b$.

Сумма определена для любых чисел a и b, так как при всех рассматриваемых α и β суммы $\alpha + \beta$ ограничены сверху. В самом деле, если $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots$ и $b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots$, то $a \leqslant a_0 + 1$ и $b \leqslant b_0 + 1$. Значит, $\alpha \leqslant a_0 + 1$, $\beta \leqslant b_0 + 1$ и $\alpha + \beta \leqslant a_0 + b_0 + 2$.

Понятно, что приведенное определение сложения действительных чисел согласовано со сложением рациональных чисел – для них получаем тот же результат, что и ранее.

Свойства сложения чисел составляют вторую группу свойств действительных чисел.

II.1. *Для любых чисел a и b справедливо равенство $a + b = b + a$ (коммутативность или переместительное свойство сложения).*

Это вытекает из коммутативности сложения рациональных чисел.

II.2. *Если $a < b$, то для любого числа c справедливо неравенство $a + c < b + c$.*

Докажем сначала аналогичное свойство для нестрогих неравенств: *если $a \leqslant b$, то для любого числа c имеем $a + c \leqslant b + c$.*

Если α и γ обозначают рациональные числа, то

$$a + c = \sup_{\alpha \leqslant a,\, \gamma \leqslant c} (\alpha + \gamma).$$

При замене условия $\alpha \leqslant a$ на $\alpha \leqslant b$ точная верхняя грань значений сумм $\alpha + \gamma$ не может уменьшится. Поэтому

$$a + c \leqslant \sup_{\alpha \leqslant b,\, \gamma \leqslant c} (\alpha + \gamma) = b + c.$$

Отсюда вытекает правило сложения одноимённых нестрогих неравенств:

Если $a \leqslant b$ *и* $c \leqslant d$, *то* $a + c \leqslant b + d$.

В самом деле, согласно доказанному $a+c \leqslant b+c$ и $b+c \leqslant b+d$. Значит, в силу транзитивности знака $\leqslant$

$$a + c \leqslant b + d.$$

Докажем теперь само свойство II.2.

Опираясь на теорему 1.2.1, найдём рациональные числа ξ и η, для которых имеют место неравенства $a < \xi < \eta < b$.

Пользуясь свойствами рациональных чисел, выберем натуральное число k такое, что $\eta - \xi > 10^{-k}$. Тогда

$$\xi < \eta - 10^{-k}. \tag{1.4.1}$$

Пусть γ_k – k-е десятичное приближение числа c, т. е. $\gamma_k \leqslant c \leqslant \gamma_k + 10^{-k}$. Сложив неравенства $a < \xi$ и $c \leqslant \gamma_k + 10^{-k}$ по правилу сложения нестрогих неравенств, получаем с помощью оценки (1.4.1)

$$a + c \leqslant \xi + \gamma_k + 10^{-k} < \eta - 10^{-k} + \gamma_k + 10^{-k} = \eta + \gamma_k \leqslant b + c.$$

Таким образом, свойство II.2 доказано.

Из II.2 следует правило сложения одноимённых строгих неравенств:

Если $a < b$ *и* $c < d$, *то* $a + c < b + d$.

Заметим, что если даже заменить здесь одно из неравенств $a < b$ или $c < d$ на нестрогое, всё равно получим строгое неравенство $a + c < b + d$.

II.3. *Для любых чисел* a, b *и* c *имеет место равенство* $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность или сочетательное свойство сложения*).

Рассуждаем от противного. Обозначим $u := (a + b) + c$, $v := a + (b + c)$ и предположим, что $u \neq v$. Пусть для определённости $u < v$.

Пользуясь теоремой 1.2.1, возьмём рациональные числа ξ и η такие, что $u < \xi < \eta < v$, а затем выберем натуральное n, для которого

$$\eta - \xi > 3 \cdot 10^{-n}. \tag{1.4.2}$$

Рассмотрим n-е десятичные приближения чисел a, b и c:

$$\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}, \quad \beta_n \leqslant b \leqslant \beta_n + 10^{-n}, \quad \gamma_n \leqslant c \leqslant \gamma_n + 10^{-n}.$$

Складывая неравенства, находим $\alpha_n + \beta_n \leqslant a + b \leqslant \alpha_n + \beta_n + 2 \cdot 10^{-n}$ и

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \leqslant (a + b) + c \leqslant \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + 3 \cdot 10^{-n}.$$

Положим $w_n := \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$, тогда $w_n \leqslant u \leqslant w_n + 3 \cdot 10^{-n}$.

Аналогично доказывается неравенство $v \leqslant w_n + 3 \cdot 10^{-n}$.

Таким образом, в силу выбора чисел ξ и η имеем

$$w_n < \xi < \eta < w_n + 3 \cdot 10^{-n}.$$

Поскольку здесь все числа рациональные, отсюда находим $\eta - \xi < 3 \cdot 10^{-n}$, что противоречит неравенству (1.4.2).

Сложение чисел было определено для двух слагаемых. Но в силу ассоциативности сложения можно писать сумму трёх и более слагаемых без скобок, указывающих порядок действий.

Вместе с коммутативностью сложения это показывает, что при сложении действительных чисел, как и при сложении рациональных чисел, можно произвольным образом переставлять и группировать слагаемые.

II.4. *Для каждого числа a справедливо равенство $a + 0 = a$.*

Действительно,

$$a + 0 = \sup_{\alpha \leqslant a,\, \beta \leqslant 0;\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}} (\alpha + \beta) = \sup_{\alpha \leqslant a;\, \alpha \in \mathbb{Q}} \alpha = a,$$

где последнее равенство имеет место в силу теоремы 1.3.4.

Отметим, что свойство II.4 выполняется только для числа 0. Действительно, если $0'$ – такое число, что $\forall\, a$ имеем $a + 0' = a$, то $0' = 0' + 0 = 0$.

II.5. *Для каждого числа a существует такое число a', что $a + a' = 0$.*

Покажем, что равенство $a + a' = 0$ выполняется, если в качестве a' взять $-a$, т. е. число a с противоположным знаком.

Пусть α_n – n-е десятичные приближения числа a, т. е. $\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}$. Тогда для $-a$ имеем $-\alpha_n - 10^{-n} \leqslant -a \leqslant -\alpha_n$.

Сложив почленно эти неравенства, находим $-10^{-n} \leqslant a + (-a) \leqslant 10^{-n}$, т. е. $|a + (-a)| \leqslant 10^{-n}$. Так как полученное неравенство выполняется при всех n, отсюда согласно лемме 1.2.4 следует равенство $a + (-a) = 0$.

Число a', для которого $a + a' = 0$, называют числом, *противоположным* a.

Нетрудно показать, что для каждого a противоположное число определяется однозначно. Действительно, если наряду с $a + a' = 0$ имеем $a + a'' = 0$, то

$$a'' = a'' + 0 = a'' + (a + a') = (a'' + a) + a' = 0 + a' = a'.$$

Вычитание чисел вводится как действие, обратное сложению.

Определение. *Разностью* чисел a и b называется число $a + (-b)$, его обозначают $a - b$.

Для любых a и b имеем

$$(a + b) - b = (a + b) + (-b) = a + (b + (-b)) = a.$$

Аналогично устанавливается равенство $(a - b) + b = a$.

Так как сложение и вычитание чисел являются взаимно обратными действиями, слагаемые из одной части равенств и неравенств можно переносить с противоположным знаком в другую их часть.

Отметим, что $-(a + b) = -a - b$. Для доказательства записываем равенство $-(a + b) + a + b = 0$ и переносим числа a и b в его правую часть.

Теорема 1.4.1. *Для любых чисел a и b справедливо неравенство*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1.4.3}$$

Доказательство. Сложив неравенства $a \leqslant |a|$ и $b \leqslant |b|$, получим $a + b \leqslant |a| + |b|$. Аналогично, $-(a + b) = -a - b \leqslant |a| + |b|$. Но модуль $|a + b|$ равен или $a + b$ или $-(a + b)$, поэтому теорема доказана.

Неравенство (1.4.3) называют *неравенством треугольника*, так как если считать a и b векторами, а $|a|$ и $|b|$ их длинами, то (1.4.3) означает, что в треугольнике (в том числе и вырожденном) длина каждой стороны меньше или равна суммы длин двух других сторон.

Из неравенства треугольника следует, что для любых чисел a и b
$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|.$$
В самом деле, $|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$, откуда $|a|-|b| \leqslant |a-b|$. Аналогично $|b| - |a| \leqslant |a - b|$.

Множества, в которых определена некоторая операция, обладающая свойствами II.3–II.5 сложения чисел, встречаются довольно часто. Для их изучения вводится специальное понятие – понятие группы.

Определение. Множество G элементов произвольной природы называется *группой*, если

1) в G определена операция $\circ$, ставящая в соответствие каждой паре элементов x и y из G некоторый элемент z из G, его обозначают $z := x \circ y$;

2) операция $\circ$ ассоциативна, т. е. $\forall\, x, y, z \in G$ имеем $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;

3) $\exists\, \theta \in G$: $\forall\, x \in G$ имеем $x \circ \theta = \theta \circ x = x$;

4) $\forall\, x \in G\ \exists\, x' \in G$: $x \circ x' = x' \circ x = \theta$.

В аксиомах 3) и 4) требуется выполнение двух равенств, так как коммутативность операции $\circ$ в общем случае не предполагается. В этих аксиомах не говорится о единственности элементов θ и x', но её легко доказать аналогично тому, как это было сделано для сложения чисел.

Определение. Если операция $\circ$ в группе G коммутативна, т. е. $\forall\, x, y \in G$ имеем $x \circ y = y \circ x$, группу называют *коммутативной* или *абелевой*.

Таким образом, действительные числа образуют коммутативную группу относительно операции сложения. Коммутативные группы относительно сложения образуют также множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и множество целых чисел $\mathbb{Z}$.

§ 1.5. Умножение чисел

Определение. Если числа a и b неотрицательны, то *произведением* a на b называется число
$$ab := \sup(\alpha\beta),$$

где верхняя грань берётся по всем неотрицательным рациональным числам α и β таким, что $\alpha \leqslant a$ и $\beta \leqslant b$.

Если оба числа a и b отрицательны, то $ab := |a|\,|b|$.

Если одно из чисел a и b отрицательно, а другое неотрицательно, то $ab := -(|a|\,|b|)$.

Верхняя грань в определении произведения существует для любой пары чисел.

Достаточно убедиться в этом для неотрицательных множителей a и b. Если $\alpha \leqslant a = a_0,a_1a_2\ldots$ и $\beta \leqslant b = b_0,b_1b_2\ldots$, то $\alpha \leqslant a_0 + 1$, $\beta \leqslant b_0 + 1$. Значит, $\alpha\beta \leqslant (a_0 + 1)(b_0 + 1)$ и остаётся только сослаться на теорему 1.3.1.

Ясно, что для рациональных a и b получаем тот же результат, что и ранее.

Из определения умножения следует, что если хотя бы один из множителей a и b равен нулю, то $ab = 0$.

Свойства умножения чисел, составляют третью группу свойств действительных чисел.

III.1. *Для любых чисел a и b справедливо равенство $ab = ba$ (коммутативность или переместительное свойство умножения).*

Это вытекает из коммутативности умножения рациональных чисел.

III.2. *Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.*

Доказательство. Утверждение очевидно, если a или b равно нулю. Поэтому будем считать, что оба числа a и b отличны от нуля.

Пусть сначала число a (а значит, и b) положительно.

Начнём с доказательства аналогичного свойства для нестрогих неравенств:

Если $a \leqslant b$ и $c > 0$, то $ac \leqslant bc$.

Действительно, если α и γ – неотрицательные рациональные числа, то

$$ac = \sup_{\alpha \leqslant a;\, \gamma \leqslant c} \alpha\gamma \leqslant \sup_{\alpha \leqslant b;\, \gamma \leqslant c} \alpha\gamma = bc.$$

Отсюда вытекает правило умножения одноимённых нестрогих неравенств:

Если числа a, b, c, d неотрицательны, то из $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$ следует $ac \leqslant bd$.

В самом деле, если хотя бы одно из чисел a и c равно нулю, то утверждение очевидно. А если все числа a, b, c, d положительны, то применив два раза правило умножения нестрогих неравенств на положительное число, получим

$$ac \leqslant bc \leqslant bd.$$

Переходим к доказательству свойства III.2 (по-прежнему считая $a > 0$). Обозначим n-е десятичные приближения чисел a и c соответственно α_n и γ_n. Перемножив неравенства $a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}$ и $c \leqslant \gamma_n + 10^{-n}$, получим

$$ac \leqslant (\alpha_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}).$$

В этом неравенстве множители справа – рациональные числа. Пользуясь свойствами действий над ними, получаем

$$ac \leqslant \alpha_n\gamma_n + (\alpha_n + \gamma_n + 10^{-n})10^{-n}.$$

Положим $p := a_0 + c_0 + 3$, где a_0 и c_0 – целые части чисел a и c. Заметим, что число p не зависит от n. Кроме того, при всех n справедлива оценка $\alpha_n + \gamma_n + 10^{-n} \leqslant p$. Поэтому

$$ac \leqslant \alpha_n\gamma_n + p \cdot 10^{-n}. \tag{1.5.1}$$

Пусть β_n – n-е десятичные приближения числа b. Согласно лемме 1.2.3 из $a < b$ следует, что существует натуральное число m такое, что при всех $n \geqslant m$

$$\beta_n - \alpha_n > 10^{-m}. \tag{1.5.2}$$

Так как $c > 0$, то найдётся число k, при котором $c_k > 0$, и, значит, для $n \geqslant k$ имеем

$$\gamma_n \geqslant 10^{-k}. \tag{1.5.3}$$

Из (1.5.2) и (1.5.3), пользуясь правилом умножения неравенств с положительными рациональными числами, находим, что при всех достаточно больших n справедливо неравенство $(\beta_n - \alpha_n)\gamma_n > 10^{-m-k}$.

Числа p и 10^{-m-k} не зависят от n. Поэтому для достаточно больших n имеем $p \cdot 10^{-n} < 10^{-m-k}$ и, значит, $p \cdot 10^{-n} < (\beta_n - \alpha_n)\gamma_n$. Подставив это неравенство в (1.5.1), находим

$$ac < \alpha_n\gamma_n + (\beta_n - \alpha_n)\gamma_n = \beta_n\gamma_n.$$

Перемножив неравенства $\beta_n \leqslant b$ и $\gamma_n \leqslant c$, получаем $\beta_n\gamma_n \leqslant bc$. Значит, $ac < bc$ и для $a > 0$ свойство III.2 доказано.

Если $a < 0$, а $b > 0$, то в силу положительности числа c имеем $ac < 0$, $bc > 0$ и свойство III.2 выполнено.

Наконец, если $a < b < 0$, то $|b| < |a|$ и по уже доказанному $|b|c < |a|c$. Отсюда следует, что $|bc| < |ac|$, и так как числа bc и ac отрицательны, то $ac < bc$. Этим завершается доказательство свойства III.2.

Из III.2 вытекает правило умножения одноимённых строгих неравенств:

Если все числа a, b, c, d неотрицательны, то из $a < b$, $c < d$ следует $ac < bd$.

Действительно, $ac < bc < bd$.

Нетрудно видеть, что это правило (как и правило умножения нестрогих неравенств) верно и в том случае, когда одно из чисел a или c отрицательно. Но если отрицательны какие-либо два числа из a, b, c, d, то полученное при почленном умножении неравенство может оказаться неверным.

В дополнение к свойству III.2 заметим, что

Если $c < 0$, то из $a < b$ следует $ac > bc$.

В самом деле, в силу свойства III.2 имеем $a|c| < b|c|$, откуда $-b|c| < -a|c|$. Но $-|c| = c$, так как $c < 0$. Значит, $bc < ac$ и мы получили нужное неравенство.

III.3. *Для любых чисел a, b и c справедливо равенство $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность или сочетательное свойство умножения).*

Достаточно рассмотреть случай, когда все числа a, b, c положительны. В самом деле, если среди этих чисел хотя бы одно равно нулю, то обе части равенства в III.3 равны нулю. А если среди чисел a, b, c есть отрицательные, то доказательство сводится к проверке равенства для модулей и подсчёту количества положительных и отрицательных множителей.

Пусть числа a, b, c положительны. Введём обозначения $u := (ab)c$, $v := a(bc)$. Возьмём для a, b и c их n-е десятичные приближения:

$$\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}, \quad \beta_n \leqslant b \leqslant \beta_n + 10^{-n}, \quad \gamma_n \leqslant c \leqslant \gamma_n + 10^{-n}.$$

Перемножив эти неравенства, в силу ассоциативности умножения рациональных чисел получаем

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n \leqslant (ab)c = u \leqslant (\alpha_n + 10^{-n})(\beta_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}).$$

Из правого неравенства следует, что существует такое не зависящее от n натуральное число p, что $u \leqslant \alpha_n\beta_n\gamma_n + p \cdot 10^{-n}$. Мы не приводим доказательство этого, так как подобное рассуждение было проведено при обосновании свойства III.2.

Итак, для некоторого не зависящего от n числа p справедливы оценки

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n \leqslant u \leqslant \alpha_n\beta_n\gamma_n + p \cdot 10^{-n}. \tag{1.5.4}$$

Точно так же доказывается, что

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n \leqslant v \leqslant \alpha_n\beta_n\gamma_n + p \cdot 10^{-n}.$$

Отсюда

$$-\alpha_n\beta_n\gamma_n - p \cdot 10^{-n} \leqslant -v \leqslant -\alpha_n\beta_n\gamma_n. \tag{1.5.5}$$

Сложив почленно неравенства (1.5.4) и (1.5.5), получим $-p \cdot 10^{-n} \leqslant u - v \leqslant p \cdot 10^{-n}$, т. е. $|u - v| \leqslant p \cdot 10^{-n}$. Отсюда согласно лемме 1.2.4 следует, что $u - v = 0$, т. е. $u = v$, и свойство III.3 доказано.

Ассоциативность умножения позволяет записывать произведение трёх и более множителей без скобок, указывающих порядок действий, а вместе с коммутативностью – произвольным образом переставлять и группировать множители.

III.4. *Для каждого числа a справедливо равенство $a \cdot 1 = a$.*

В самом деле, если $a \geqslant 0$ и α, β – неотрицательные рациональные числа, то

$$a \cdot 1 = \sup_{\alpha \leqslant a;\, \beta \leqslant 1} \alpha\beta = \sup_{\alpha \leqslant a} \alpha = a.$$

А если $a < 0$, то по определению $a \cdot 1 = -(|a| \cdot |1|) = -|a| = a$.

Покажем ещё, что для каждого числа a справедливо равенство $a \cdot (-1) = -a$. В самом деле, если $a \geqslant 0$, то $a \cdot (-1) = -(|a| \cdot |-1|) = -|a| = -a$. А если $a < 0$, то $a \cdot (-1) = |a| \cdot |-1| = |a| = -a$.

III.5. *Если $a \neq 0$, то существует число a' такое, что $a \cdot a' = 1$.*

Пусть сначала $a > 0$. Введём число

$$\frac{1}{a} := \sup_{\alpha\in\mathbb{Q};\,\alpha\geqslant a} \frac{1}{\alpha}. \tag{1.5.6}$$

Эта верхняя грань существует, так как из условия $\alpha \geqslant a > 0$ следует, что числа $1/\alpha$ ограничены сверху. Действительно, если у a отличен от нуля k-й десятичный знак, то $a \geqslant 10^{-k}$ и из $\alpha \geqslant a$ получаем $\alpha \geqslant 10^{-k}$. Отсюда по свойствам рациональных чисел $1/\alpha \leqslant 10^k$.

Покажем, что

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, \tag{1.5.7}$$

т. е. что числом a' в III.5 является число, заданное равенством (1.5.6).

Если α_n – n-е десятичные приближения числа a, то

$$\frac{1}{\alpha_n + 10^{-n}} \leqslant \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{\alpha_n}. \tag{1.5.8}$$

Левое неравенство вытекает сразу из определения (1.5.6), а правое нетрудно доказать, рассуждая от противного. В самом деле, если бы число $1/\alpha_n$ было меньше точной верхней грани из (1.5.6), то существовало бы рациональное β такое, что $\beta \geqslant a$ и $1/\alpha_n < 1/\beta$. Отсюда $\beta < \alpha_n$ и так как $\alpha_n \leqslant a$, то $\beta < a$ и мы пришли к противоречию с неравенством $\beta \geqslant a$.

Перемножив почленно неравенства (1.5.8) и $\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}$, получим

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_n + 10^{-n}} \leqslant a \cdot \frac{1}{a} \leqslant \frac{\alpha_n + 10^{-n}}{\alpha_n}.$$

Так как левая и правая дроби в этом двойном неравенстве – рациональные числа, то

$$1 - \frac{10^{-n}}{\alpha_n + 10^{-n}} \leqslant a \cdot \frac{1}{a} \leqslant 1 + \frac{10^{-n}}{\alpha_n}$$

и значит,

$$\left| a \cdot \frac{1}{a} - 1 \right| \leqslant \frac{10^{-n}}{\alpha_n}.$$

Если у a отличен от нуля k-й десятичный знак, то для n-х десятичных приближений числа a при $n \geqslant k$ выполняются неравенства $10^{-k} \leqslant \alpha_n$.

Таким образом,

$$\left|a \cdot \frac{1}{a} - 1\right| \leqslant 10^{-n+k}.$$

Отсюда в силу леммы 1.2.4 следует равенство (1.5.7).

Для $a < 0$ полагаем по определению

$$\frac{1}{a} := -\frac{1}{|a|}.$$

Тогда

$$a \cdot \frac{1}{a} = |a| \cdot \frac{1}{|a|} = 1.$$

Итак, свойство III.5 доказано.

Введём деление чисел. Назовём частным от деления числа a на неравное нулю число b произведение $a \cdot \frac{1}{b}$, которое будем обозначать $\frac{a}{b}$, a/b или $a : b$. Легко видеть, что деление обратно умножению, т. е. умножив a на b, а затем разделив произведение на b, получим a:

$$(ab)\frac{1}{b} = a\left(b\frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

Аналогично

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \cdot \frac{1}{b} \cdot b = a.$$

Значит, число $\frac{1}{a}$ можно считать дробью. Это число называют *обратным* числу a.

Поставим вопрос, образуют ли действительные числа группу относительно операции умножения.

Первые три аксиомы группы выполняются, так как умножение определено для каждой пары чисел, умножение ассоциативно и существует число 1, умножение любого числа на которое оставляет исходное число без изменений.

Но четвертая аксиома на множестве всех действительных чисел не выполняется, так как обратное число существует только у чисел, отличных от нуля.

Таким образом, все действительные числа не являются группой относительно умножения. А все неравные нулю действительные числа образуют коммутативную группу относительно умножения.

Отсюда, в частности, следует, что свойством, указанным в III.4, обладает только число 1 и единственность обратных чисел.

Коммутативные группы относительно умножения образуют также все положительные числа, все рациональные числа без нуля, все положительные рациональные числа.

Продолжим изучение арифметических действий над действительными числами.

III.6. *Для любых чисел a, b и c справедливо равенство $(a+b)c = ac+bc$ (дистрибутивность или распределительное свойство).*

Будем считать, что все числа a, b, c отличны от нуля, так как если хотя бы одно из них равно нулю, равенство очевидно.

Пусть сначала $c > 0$ и $a+b \geqslant 0$. Запишем неравенства для n-х десятичных приближений чисел a, b, c:

$$\alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_n + 10^{-n}, \quad \beta_n \leqslant b \leqslant \beta_n + 10^{-n}, \quad \gamma_n \leqslant c \leqslant \gamma_n + 10^{-n}.$$

Отсюда $\alpha_n + \beta_n \leqslant a+b \leqslant \alpha_n + \beta_n + 2\cdot 10^{-n}$ и согласно правилу умножения неравенств

$$(\alpha_n + \beta_n)\gamma_n \leqslant (a+b)c \leqslant (\alpha_n + \beta_n + 2\cdot 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}). \quad (1.5.9)$$

Предположим, что оба числа a и b положительны. Тогда

$$\alpha_n\gamma_n \leqslant ac \leqslant (\alpha_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}) \quad (1.5.10)$$

и

$$\beta_n\gamma_n \leqslant bc \leqslant (\beta_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}). \quad (1.5.11)$$

Сложив эти неравенства, получаем

$$\alpha_n\gamma_n + \beta_n\gamma_n \leqslant ac + bc \leqslant \\ \leqslant (\alpha_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}) + (\beta_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}). \quad (1.5.12)$$

Правые части неравенств (1.5.9) и (1.5.12) равны и их можно оценить сверху выражением вида $(\alpha_n + \beta_n)\gamma_n + p\cdot 10^{-n}$, где p – некоторое натуральное число, не зависящее от n (подобные рассуждения уже проводились).

Итак, существует натуральное p такое, что при всех n

$$(\alpha_n + \beta_n)\gamma_n \leqslant (a+b)c \leqslant (\alpha_n + \beta_n)\gamma_n + p\cdot 10^{-n} \quad (1.5.13)$$

и
$$\alpha_n\gamma_n + \beta_n\gamma_n \leqslant ac + bc \leqslant \alpha_n\gamma_n + \beta_n\gamma_n + p\cdot 10^{-n}.$$
Из последнего двойного неравенства следует, что
$$-\alpha_n\gamma_n - \beta_n\gamma_n - p\cdot 10^{-n} \leqslant -ac - bc \leqslant -\alpha_n\gamma_n - \beta_n\gamma_n.$$
Сложив почленно эти неравенства с (1.5.13), находим
$$-p\cdot 10^{-n} \leqslant (a+b)c - (ac+bc) \leqslant p\cdot 10^{-n},$$
т. е.
$$|(a+b)c - (ac+bc)| \leqslant p\cdot 10^{-n},$$
что в силу леммы 1.2.4 даёт $(a+b)c = ac+bc$.

Считая по-прежнему $c > 0$ и $a+b \geqslant 0$, рассмотрим теперь случай, когда одно из чисел a или b отрицательно. Пусть для определённости $a > 0$ и $b < 0$. В этом случае неравенства (1.5.9) и (1.5.10) остаются справедливыми, а неравенства (1.5.11) могут не выполняться.

Поступим следующим образом. При произвольном натуральном n перемножим почленно неравенства
$$-\beta_n - 10^{-n} \leqslant -b \leqslant -\beta_n$$
и
$$\gamma_n \leqslant c \leqslant \gamma_n + 10^{-n},$$
пользуясь тем, что в них все числа неотрицательны. Тогда получим
$$-\beta_n\gamma_n - \gamma_n 10^{-n} \leqslant -bc \leqslant -\beta_n\gamma_n - \beta_n 10^{-n}. \tag{1.5.14}$$

Сложив почленно неравенства, вытекающие из (1.5.10)
$$-(\alpha_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}) \leqslant -ac \leqslant -\alpha_n\gamma_n,$$
с неравенствами (1.5.14), находим
$$\begin{aligned} -(\alpha_n + 10^{-n})(\gamma_n + 10^{-n}) - \beta_n\gamma_n - \gamma_n 10^{-n} &\leqslant \\ \leqslant -ac - bc \leqslant -\alpha_n\gamma_n - \beta_n\gamma_n - \beta_n 10^{-n}&. \end{aligned}$$

Эти неравенства сложим почленно с (1.5.9):
$$-10^{-n}(\alpha_n + 2\gamma_n + 10^{-n}) \leqslant (a+b)c - ac - bc \leqslant 10^{-n}(\alpha_n + 2\gamma_n + 2\cdot 10^{-n}).$$

Поэтому если натуральное число p не зависит от n и для него $\alpha_n + 2\gamma_n + 2 \cdot 10^{-n} \leqslant p$ (понятно, что такие числа существуют), то для всех натуральных n

$$|(a+b)c - ac - bc| \leqslant p \cdot 10^{-n}.$$

Отсюда в силу леммы 1.2.4 следует, что

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Итак, при условиях $c > 0$ и $a + b \geqslant 0$ свойство III.6 доказано.

Пусть теперь $c < 0$ и $a + b \geqslant 0$. Тогда по доказанному выше $(a+b)|c| = a|c| + b|c|$. Так как в этом случае $|c| = -c$, приведенное равенство означает, что $-(a+b)c = -ac - bc$. Переносим каждое слагаемое из одной части равенства в другую и получаем дистрибутивность при условиях $c < 0$, $a + b \geqslant 0$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $c < 0$ и $a + b < 0$.

Так как $-(a+b) = -a - b > 0$, то по уже доказанному $-(a+b)c = (-a-b)c = -ac - bc$ и остаётся только перенести каждое слагаемое из одной части полученного равенства в другую.

§ 1.6. Непрерывность множества действительных чисел

В предыдущих параграфах для действительных чисел были доказаны три группы свойств, касающиеся сравнения чисел, сложения и умножения. Все эти свойства формулируются точно так же, как для рациональных чисел.

Таким образом, мы расширили множество рациональных чисел до множества действительных чисел, сохранив указанные свойства, что позволяет оперировать с действительными числами по тем же правилам, что и с рациональными числами. В школьном курсе это считалось само собою разумеющимся, теперь такой вывод получил обоснование.

Но действительные числа обладают ещё одним свойством, которое для рациональных чисел не имеет места. Это свойство *непрерывности* (его называют также *полнотой*) множества действительных чисел. Оно формулируется в виде теоремы 1.3.1 о точной верхней грани.

IV. *Для каждого непустого ограниченного сверху множества существует число, являющееся его точной верхней гранью.*

Свойство непрерывности можно выразить и в других терминах. Мы приведём ещё две формулировки: в терминах последовательностей вложенных отрезков и в терминах дедекиндовых сечений.

§ 1.7. Последовательности вложенных отрезков

Напомним определения числовых промежутков.

Если $a < b$, то множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называют отрезком (сегментом) и обозначают $[a, b]$. Точки a и b называют концами отрезка, число $b-a$ называют длиной этого отрезка.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называют интервалом (с концами в точках a и b) и обозначают (a, b). Число $b - a$ называют длиной интервала. Встречающееся иногда обозначение для интервала $]a, b[$ не прижилось.

Рассматривают также полуотрезки $[a, b)$, когда $a \leqslant x < b$, и $(a, b]$, когда $a < x \leqslant b$. Полуотрезки называют также полуинтервалами.

Таким образом, квадратную скобку пишут, если соответствующая концевая точка принадлежит промежутку. Иначе пишут круглую скобку.

Обозначения для бесконечных промежутков: множество чисел x, для которых $x \geqslant a$, обозначают $[a, +\infty)$; для которых $x > a$, обозначают $(a, +\infty)$; для которых $x \leqslant a$, обозначают $(-\infty, a]$; для которых $x < a$, обозначают $(-\infty, a)$. Наконец, все числа образуют интервал $(-\infty, +\infty)$.

Отрезки, интервалы и полуотрезки (конечные и бесконечные) будем называть *промежутками*.

Если $[a, b] \subset [c, d]$, то говорят, что отрезок $[a, b]$ *вложен* в отрезок $[c, d]$.

Дадим теперь определение последовательности.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлен в соответствие некоторый элемент заданного множества A, который будем обозначать x_n, то говорят, что элементы

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

образуют *последовательность*.

Такую последовательность обозначают $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или просто $\{x_n\}$.

Элементы x_n, из которых составлена последовательность, называют *членами* последовательности.

В этом определении нумерация членов последовательности x_n была начата с $n = 1$. Это не обязательно, иногда удобно начинать нумерацию с нуля или вообще с произвольного целого числа.

Отметим, что последовательности мы считаем, как правило, бесконечными.

Члены последовательности x_n и x_m при $n \neq m$ не обязательно должны быть разными элементами множества A. Более того, все члены последовательности могут быть одним и тем же элементом. Такие последовательности называют стационарными.

Последовательности, членами которых являются числа, называют *числовыми.*

Определение. Числовую последовательность $x_1, x_2, \ldots$ называют *сходящейся к нулю*, если для каждого положительного числа ε существует такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что для всех индексов $n > N$ справедливо неравенство

$$|x_n| < \varepsilon. \tag{1.7.1}$$

Иначе говоря, для каждого $\varepsilon > 0$ неравенство (1.7.1) должно выполняться при всех достаточно больших n, т. е. начиная с некоторого n.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю, то говорят, что члены этой последовательности (числа x_n) *стремятся* к нулю.

Покажем, например, что для любого числа a последовательность $\{a/n\}$ сходится к нулю. Зададим произвольное положительное ε и рассмотрим число $|a|/\varepsilon$. Согласно свойству Архимеда I.3 существует натуральное N такое, что $|a|/\varepsilon < N$. Значит, $|a|/N < \varepsilon$ и при всех $n > N$ справедлива оценка

$$\frac{|a|}{n} < \varepsilon. \tag{1.7.2}$$

Отсюда, в частности, следует, поскольку $2^n > n$ при всех натуральных n, что для любого числа a последовательность $\{a/2^n\}$ сходится к нулю.

Теорема 1.7.1. *Пусть в последовательности отрезков* $\{[a_n, b_n]\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *каждый следующий отрезок вложен в предыдущий. Если последовательность длин этих отрезков сходится к нулю, то существует и притом только одно число, принадлежащее всем отрезкам* $[a_n, b_n]$.

Доказательство. Так как все отрезки $[a_n, b_n]$ содержатся в $[a_1, b_1]$, то последовательность $\{a_n\}$ левых концов отрезков ограничена сверху числом b_1.

Рассмотрим число $c := \sup_n a_n$. Докажем сначала, что c принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$, а затем убедимся, что указанным свойством обладает только одно это число.

По определению точной верхней грани $\forall\, n$ имеем $a_n \leqslant c$. С другой стороны, $c \leqslant b_n$ при всех n, так как если бы для некоторого k было $b_k < c$, то нашлось бы число a_m такое, что $b_k < a_m$. Тогда отрезки $[a_k, b_k]$ и $[a_m, b_m]$ не имели бы общих точек вопреки условию, что отрезки вложены. Итак, $\forall\, n$ имеем $c \leqslant b_n$ и, значит, $c \in [a_n, b_n]$.

Докажем единственность. Пусть существуют неравные числа c и d, принадлежащие всем отрезкам $[a_n, b_n]$, и для определённости $c < d$. Тогда из условий $a_n \leqslant c$ и $d \leqslant b_n$ находим $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. длины отрезков не стремятся к нулю. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Отметим, что в этой теореме нельзя заменить отрезки $[a_n, b_n]$ на интервалы (a_n, b_n). В самом деле, в последовательности интервалов $\{(0, 2^{-n})\}$ каждый следующий интервал вложен в предыдущий, длины этих интервалов равны 2^{-n} и стремятся к нулю. Но никакое число не может принадлежать всем интервалам $(0, 2^{-n})$.

Теорема 1.7.1 позволяет закончить исследование связи действительных чисел и точек числовой прямой.

В § 1.1 было показано, как по точке на числовой прямой найти соответствующую ей бесконечную десятичную дробь. При рассмотрении обратной задачи о существовании точки, соответствующей заданной бесконечной десятичной дроби, мы выяснили, что искомая точка должна принадлежать всем отрезкам некоторой последовательности вложенных отрезков, длина каждого из которых в 10 раз меньше длины предыдущего. Но вопрос о существовании такой точки оставался открытым. Теперь мы знаем, что общая всем этим отрезкам точка существует. Значит, каждому действительному числу соответствует и притом только одна точка числовой прямой.

Поэтому обычно не различают точки числовой прямой и действительные числа.

Эта связь между числами и точками числовой прямой является примером взаимно однозначного соответствия между множествами.

Определение. Говорят, что между множествами A и A' установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие некоторый элемент $x' \in A'$, при этом каждый элемент множества A' соответствует и притом только одному элементу из множества A.

Соответствие элементов x и x' будем обозначать $x \leftrightarrow x'$.

Взаимно однозначное соответствие называют также *биекцией*.

Мы получили теорему 1.7.1 о вложенных отрезках как следствие теоремы 1.3.1 о точной верхней грани.

Покажем, что и наоборот, из теоремы о вложенных отрезках можно вывести теорему о точной верхней грани.

Пусть A – непустое ограниченное сверху множество. Значит, существует число L такое, что $\forall\, x \in A$ имеем $x < L$. Возьмём произвольное число $x_0 \in A$ и рассмотрим отрезок $[a_1, b_1] := [x_0, L]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ содержит точки из A, а правее этого отрезка на числовой прямой точек множества A нет.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на две равные по длине части и обозначим $[a_2, b_2]$ тот из полученных отрезков, который сам содержит точки из A, а правее его точек A нет. По построению $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$.

На следующем шаге делим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и выбираем такой из полученных отрезков, что сам он содержит точки из A, а правее его точек A нет.

Продолжив этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, каждый из которых содержит точки из A, а правее его точек A нет. По построению $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$, значит, последовательность длин отрезков сходится к нулю. По теореме о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

Покажем, что точка c является точной верхней гранью множества A.

1) Сначала проверим, что $x \leqslant c$ для всех $x \in A$. В самом деле, иначе существовала бы точка $x^* \in A$ такая, что $x^* > c$. Возьмём отрезок $[a_n, b_n]$, длина которого меньше $x^* - c$. Из неравенства $x^* - c > b_n - a_n$ следует, что $x^* > b_n - a_n + c$. Так как отрезок $[a_n, b_n]$ содержит точку c, то $a_n \leqslant c$, значит, $x^* > b_n$. А точек множества A, лежащих правее отрезков $[a_n, b_n]$, по построению нет.

2) Рассмотрим произвольное число $c' < c$ и покажем, что правее точки c' есть точки из A. Для этого найдём отрезок $[a_n, b_n]$, длина которого меньше $c - c'$. Так как этот отрезок содержит точку c, он не может содержать c' (здесь, как и ранее, рассуждение на геометрическом языке легко записать в виде неравенств). Значит, отрезок $[a_n, b_n]$ лежит правее точки c'. Но в $[a_n, b_n]$ есть точки множества A, поэтому правее точки c' есть хотя бы одна точка из A.

Итак, доказано, что $c = \sup A$.

Таким образом, теоремы о точной верхней грани и о вложенных отрезках эквивалентны.

§ 1.8. Дедекиндовы сечения

Если непустые множества A и B таковы, что каждое число принадлежит одному из этих множеств и не принадлежит другому, то говорят, что множества A и B образуют разбиение множества действительных чисел.

Разбиение множества действительных чисел на множества A и B называют *дедекиндовым сечением*, если для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $a < b$. Обозначать такое сечение будем $A|B$.

Теорема 1.8.1. *Если разбиение множества действительных чисел на непустые множества A и B является дедекиндовым сечением $A|B$, то либо в A есть наибольшее число, либо в B есть наименьшее число.*

Доказательство. Так как $A|B$ – дедекиндово сечение, то множество A ограничено сверху любым числом из B. Значит, A

Дедекиндовы сечения в настоящем курсе не используются, здесь о них говорится только для ознакомления. При желании § 1.8 можно пропустить.

имеет точную верхнюю грань и при этом в силу теоремы 1.3.3 $\sup A \leqslant b$ для каждого числа $b \in B$. Обозначим $c := \sup A$. Тогда для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$ имеем $a \leqslant c \leqslant b$. Так как число c должно принадлежать или A или B, то теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 1.8.1 можно сформулировать так: существует число c такое, что для всех $a \in A$ и всех $b \in B$ имеем $a \leqslant c \leqslant b$.

Выведем теперь из теоремы о дедекиндовых сечениях теорему о точной верхней грани.

Пусть D – непустое ограниченное сверху множество. Докажем, что оно имеет точную верхнюю грань.

Построим разбиение множества действительных чисел следующим образом. Число x отнесём к A, если $\exists\, d \in D$ такое, что $x \leqslant d$. В противном случае отнесём x множеству B. По построению множество D содержится в A.

Полученное разбиение является дедекиндовым сечением $A|B$. В самом деле, предположим противное: пусть нашлись числа $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$ такие, что $b_0 \leqslant a_0$. Так как $a_0 \in A$, то существует число $d_0 \in D$ такое, что $a_0 \leqslant d_0$. Но тогда и $b_0 \leqslant d_0$, что противоречит условию $b_0 \in B$. Итак, множества A и B образуют дедекиндово сечение $A|B$.

Значит, согласно теореме 1.8.1 существует число c такое, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и всех $b \in B$.

Покажем, что $c = \sup D$. 1) Так как $D \subset A$ и $a \leqslant c$ для всех $a \in A$, то для любого числа $d \in D$ имеем $d \leqslant c$. 2) Если $c' < c$, то возьмём произвольное число x, удовлетворяющее неравенствам $c' < x < c$. Число x не может принадлежать B, так как для всех $b \in B$ справедливо неравенство $c \leqslant b$. Значит, $x \in A$. Но тогда существует число $d \in D$ такое, что $x \leqslant d$, поэтому $c' < d$.

Таким образом, число c является точной верхней гранью множества D.

Следовательно, теорема о дедекиндовых сечениях также равносильна теореме о точной верхней грани.

Непрерывность действительных чисел, можно выразить и в других терминах, используя, например, последовательности рациональных чисел. Мы не будем на этом останавливаться.

Основными формулировками свойства непрерывности множества действительных чисел являются теорема 1.3.1 о точной верхней грани и теорема 1.7.1 о вложенных отрезках.

§ 1.9. Об аксиоматическом определении действительных чисел

Иногда множество действительных чисел определяют аксиоматически, называя так множество элементов произвольной природы, в котором введены сравнение элементов и две операции – сложение и умножение, удовлетворяющее аксиомам, которые выше были названы свойствами действительных чисел из групп I–IV. Аксиому IV при этом обычно формулируют в терминах дедекиндовых сечений.

При аксиоматических определениях естественно возникают вопросы, существуют ли объекты, удовлетворяющие заданному списку аксиом, и как такие объекты можно себе представить. С этой точки зрения проведенное выше изучение бесконечных десятичных дробей можно рассматривать как доказательство существования множества, элементы которого обладают требуемыми свойствами. Было видно, какими элементами мы пополнили рациональных числа, чтобы получить множество действительных чисел. Кроме того, было выяснено, что на действительные числа можно смотреть как на точки числовой прямой.

Поставим следующие вопросы:

1^0. существуют ли другие отличающиеся по существу от бесконечных десятичных дробей множества, обладающие свойствами из групп I–IV;

2^0. нельзя ли к бесконечным десятичным дробям добавить ещё какие-либо объекты (подобно тому, как мы добавили к рациональным числам бесконечные десятичные непериодические дроби) так, чтобы в этом новом более широком множестве выполнялись все свойства действительных чисел?

Отрицательный ответ на оба эти вопроса вытекает из следующего утверждения, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 1.9.1. *Пусть A и A' – произвольные множества, в каждом из которых введены сравнение элементов и операции “сложения” и “умножения”, обладающие свойствами* I–IV *множества действительных чисел. Тогда множества A и A' изоморфны.*

Изоморфизм множеств A и A' означает, что можно установить такое взаимно однозначное соответствие элементов множеств A и A' (т. е. $a \leftrightarrow a'$, где $a \in A$ и $a' \in A'$), что

1) если $a < b$, то $a' < b'$;
2) $a + b \leftrightarrow a' + b'$;
3) $ab \leftrightarrow a'b'$.

Отрицательный ответ на вопрос 2^0 называют полнотой множества действительных чисел. Как уже отмечалось, термин полнота используется и как другое название свойства непрерывности действительных чисел.

§ 1.10. Счётные и несчётные множества

Рассмотрим вопросы о сравнении множеств по количеству содержащихся в них элементов.

Для конечных непустых множеств (т. е. множеств из конечного набора элементов) задача решается просто, так как количество их элементов выражается натуральным числом.

Когда не имеет значения, сколько именно элементов содержат конечные множества, а нужно знать только, в каком из них элементов больше, удобно следующее соображение. Если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и элементами некоторого подмножества множества B, то число элементов множества A меньше или равно числу элементов B.

Такой подход со взаимно однозначными соответствиями кладётся в основу сравнения количества элементов бесконечных (т. е. не являющихся конечными) множеств.

Определение. Множества называют имеющими одинаковую *мощность* (или равномощными), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Если множество A имеет одинаковую мощность с некоторым подмножеством множества B, то говорят, что мощность множества A меньше или равна мощности множества B.

Для конечных множеств одинаковая мощность означает, что множества имеют одинаковое количество элементов.

Понятно, что мощность подмножества не может быть больше мощности самого множества.

Можно показать (но не будем на этом останавливаться), что для каждого множества A существует множество, мощность которого больше мощности множества A. Таково, например, множество всех подмножеств множества A.

Определение. Множество называется *счётным*, если оно имеет одинаковую мощность со множеством натуральных чисел.

Счётность множества эквивалентна возможности представить все его элементы в виде бесконечной последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, \tag{1.10.1}$$

в которой каждый элемент участвует один раз.

В самом деле, если множество A счётно, т. е. существует взаимно однозначное соответствие элементов A и $\mathbb{N}$, то все элементы множества A можно представить в виде последовательности, записав сначала элемент, соответствующий числу 1, затем элемент, соответствующий числу 2, и т. д.

Наоборот, если все элементы множества A записаны без повторений в виде последовательности (1.10.1), то поставив элемент a_k в соответствие числу k, получим взаимно однозначное соответствие множеств A и $\mathbb{N}$.

Покажем, что каждое бесконечное множество содержит счётное подмножество. Пусть множество A бесконечно. Возьмём некоторый элемент из A, обозначаем его a_1 (т. е. ставим его в соответствие числу 1). В A в силу его бесконечности, кроме a_1, есть другие элементы. Выбираем какой-либо из них и обозначаем его a_2 (т. е. ставим в соответствие числу 2). Продолжив неограниченно этот процесс, получим счётное подмножество множества A. Таким образом, счётные множества – самые "маленькие" среди бесконечных множеств.

Приведём примеры счётных множеств.

Почти очевидный пример – счётность множества $\mathbb{Z}$. Действительно, все целые числа можно представить в виде последовательности

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots .$$

Теорема 1.10.1. *Множество рациональных чисел счётно.*

Доказательство. Построим последовательность, содержащую все рациональные числа (каждое рациональное число должно присутствовать в этой последовательности только один раз).

Для этого в виде строк бесконечной таблицы запишем последовательности, содержащие все отличные от нуля рациональные числа с фиксированными знаменателями:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{-2}{1}, & \dots \\
\frac{1}{2}, & \frac{-1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{-2}{2}, & \dots \\
\frac{1}{3}, & \frac{-1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{-2}{3}, & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

В этой таблице содержатся все рациональные числа, кроме нуля.

Теперь пишем число 0, а затем записываем числа из построенной бесконечной таблицы, двигаясь, например, как показано на рисунке стрелками. Перед тем, как написать очередное число, проверяем, нет ли его среди уже записанных. Если это число встречалось, второй раз его не пишем.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \dots \\
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Так получаем нужную последовательность и теорема доказана.

Определение. Бесконечное множество называется *несчётным*, если оно имеет мощность, бóльшую, чем счётное множество.

Теорема 1.10.2. *Множество действительных чисел несчётно.*

Доказательство. Достаточно показать, что несчётно множество действительных чисел из интервала $(0, 1)$.

Предположим, что это утверждение неверно и существует последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \dots, \tag{1.10.2}$$

содержащая все числа из $(0, 1)$. Пусть $x_n = 0, x_{n1}x_{n2}\ldots$ – представление числа x_n, $n = 1, 2, \ldots$, в виде бесконечной десятичной дроби.

Укажем число из интервала $(0, 1)$, которого в последовательности (1.10.2) нет.

Положим $a := 0, a_1a_2\ldots$, где каждый десятичный знак a_i выбран из цифр $1, 2, \ldots, 8$ так, чтобы выполнялись неравенства $a_1 \neq x_{11}$, $a_2 \neq x_{22}, \ldots$. Тогда в записи числа a в виде бесконечной десятичной дроби цифры 0 и 9 не участвуют, и число a не может равняться ни одному из чисел x_n, так как $a_n \neq x_{nn}$ для каждого n.

Теорема доказана.

Определение. Множества, имеющие мощность, одинаковую с мощностью отрезка $[0, 1]$, называют множествами мощности *континуум*.

В этом определении можно было говорить об одинаковой мощности с интервалом $(0, 1)$, так как можно установить взаимно однозначное соответствие точек отрезка $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$.

Например, так. Выделим произвольное счётное множество $A \subset (0, 1)$. Запишем элементы A в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots$ (все элементы которой различны) и рассмотрим последовательность B, имеющую вид $0, 1, a_1, a_2, \ldots$.

Всем числам из $(0, 1)$, не входящим в A, ставим в соответствие их самих как элементы из $[0, 1]$. А последовательности A и B записываем одну под другой

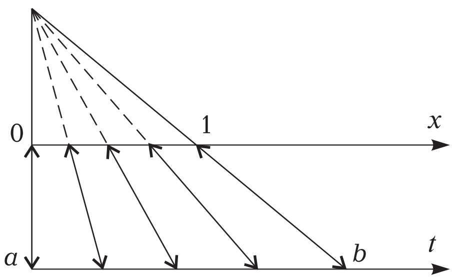
$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots \\ 0, & 1, & a_1, & a_2, & \ldots \end{array}$$

и ставим в соответствие друг другу элементы из одного столбца.

В определении множеств мощности континуум вместо отрезка $[0, 1]$ можно брать любой отрезок $[a, b]$, так как взаимно однозначное соответствие между отрезками $[0, 1]$ и $[a, b]$ легко установить с помощью формулы $t = a + (b - a)x$, $x \in [0, 1]$, или геометрически:

Нетрудно убедиться, что множество всех действительных чисел также имеет мощность континуум.

Рассмотрим теперь операции над множествами.



Определение. *Объединением* множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$.

Точно также вводится объединение произвольного набора множеств B_α, когда индексы α принадлежат некоторому множеству $\mathcal{A}$.

Определение. *Объединением* множеств B_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств B_α. Объединение множеств B_α обозначают

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha.$$

Объединение конечного набора множеств $B_1, \ldots, B_n$ и бесконечной последовательности множеств $B_1, B_2, \ldots$ обозначают соответственно

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Из определения объединения множеств сразу следует коммутативность и ассоциативность объединений: $A \cup B = B \cup A$ и $\bigl(A \cup B\bigr) \cup C = A \cup \bigl(B \cup C\bigr)$.

Определение. *Пересечением* множеств B_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, называется множество всех элементов, принадлежащих каждому из множеств B_α. Пересечение множеств B_α обозначают

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha.$$

Другими словами, пересечение множеств – это их общая часть.

Пересечение двух множеств A и B, конечного набора множеств $B_1, \dots, B_n$ и бесконечной последовательности множеств $B_1, B_2, \dots$ обозначают соответственно

$$A \cap B, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} B_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Понятно, что операция пересечения множеств коммутативна $A \cap B = B \cap A$ и ассоциативна $\big(A \cap B\big) \cap C = A \cap \big(B \cap C\big)$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, т. е. $A \cap B = \varnothing$, эти множества называют *непересекающимися.*

Операции объединения и пересечения обладают свойствами дистрибутивности: для любых множеств A, B, C справедливы равенства

$$\big(A \cup B\big) \cap C = \big(A \cap C\big) \cup \big(B \cap C\big), \quad \big(A \cap B\big) \cup C = \big(A \cup C\big) \cap \big(B \cup C\big).$$

Для доказательства этих и других подобных равенств (как и включений множеств) предполагаем, что некоторый элемент принадлежит множеству из левой части равенства, и показываем, что он принадлежит и множеству в правой части. Затем проверяем, что каждый элемент множества из правой части принадлежат множеству в левой части.

Например, для доказательства первого равенства предполагаем, что $x \in \big(A \cup B\big) \cap C$. Значит, x принадлежит и множеству $A \cup B$ и множеству C. Так как $x \in A \cup B$, то x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B. Если $x \in A$, то $x \in A \cap C$ и, значит, $x \in \big(A \cap C\big) \cup \big(B \cap C\big)$.

Затем проверяем, что если $x \in \big(A \cap C\big) \cup \big(B \cap C\big)$, то $x \in \big(A \cup B\big) \cap C$.

Легко показать, что свойства дистрибутивности имеют место и для объединения и пересечения произвольных наборов множеств

$$\Bigg(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\Bigg) \cap C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \big(B_\alpha \cap C\big); \qquad \Bigg(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} B_\alpha\Bigg) \cup C = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \big(B_\alpha \cup C\big).$$

Определение. *Разностью* множеств A и B называется множество всех элементов A, которые не принадлежат B. Обозначают разность

$$A \setminus B.$$

Отметим, что разность множеств не является операцией, обратной объединению. Нетрудно убедиться, что $\big(A \cup B\big) \setminus B = A$ в том и только том случае, когда множества A и B не пересекаются, а равенство $\big(A \setminus B\big) \cup B = A$ равносильно включению $B \subset A$.

Справедливы следующие равенства, связывающие операции объединения и пересечения множеств с разностью:

$$A \setminus \big(B \cup C\big) = \big(A \setminus B\big) \cap \big(A \setminus C\big), \qquad A \setminus \big(B \cap C\big) = \big(A \setminus B\big) \cup \big(A \setminus C\big).$$

Эти равенства являются частными случаями соотношений, которые называют законами де Моргана

$$A \setminus \left(\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta \right) = \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} (A \setminus B_\beta), \qquad A \setminus \left(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta \right) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} (A \setminus B_\beta).$$

Покажем, что для объединений счётных множеств справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.10.3. *Счётное объединение счётных множеств счётно.*

Доказательство. Проведём рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1.10.1.

Пусть каждое из множеств A_k, $k = 1, 2, \ldots$, счётно. Представим все элементы множества A_k в виде последовательности

$$a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots .$$

Запишем бесконечную таблицу, первой строкой которой является последовательность элементов множества A_1, второй строкой – последовательность элементов множества A_2 и т. д.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & \ldots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

Теперь, двигаясь в построенной бесконечной таблице по стрелкам, составим последовательность, содержащую все элементы объединения
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$
Чтобы каждый элемент объединения попал в эту последовательность только один раз, перед тем, как записать очередной элемент, проверяем, что его нет среди уже написанных.

Доказательство теоремы 1.10.3 можно повторить и в случае, когда некоторые или все множества A_k конечны. Сам набор множеств A_k также может быть конечным.

Если множество конечно или счётно, говорят, что оно *не более чем счётно*. Таким образом, *не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.*

Глава 2. Предел последовательности

§ 2.1. Определение предела последовательности

Напомним определение последовательности элементов произвольного множества A, данное в § 1.7. Если каждому натуральному числу n поставлен в соответствие некоторый элемент x_n из множества A, то говорят, что элементы

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

образуют последовательность $\{x_n\}$.

В этой главе рассматриваются в основном числовые последовательности. Для краткости будем называть их просто последовательностями.

Определение. Число a называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого положительного числа ε существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

В этом случае пишут

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_n x_n = \lim x_n$$

или

$$x_n \to a, \quad n \to \infty.$$

Для $a = 0$ это определение было дано в § 1.7, когда говорилось о последовательностях, сходящихся к нулю.

Неравенство (2.1.1) равносильно двойному неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, а значит, и двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которое показывает, что

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Определение. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называют *ε-окрестностью* точки a.

С помощью ε-окрестностей, определение предела можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности, если для каждого положительного числа ε все члены последовательности, начиная с некоторого, принадлежат ε-окрестности точки a.

Определение. Если последовательность имеет предел, её называют *сходящейся*. Последовательности, не имеющие предела, называют *расходящимися*.

Если a является пределом последовательности $\{x_n\}$, то говорят, что последовательность сходится к a. О членах последовательности (числах x_n) говорят, что они сходятся или стремятся к a.

Согласно определению условие (2.1.1) должно выполняться для достаточно больших n. Таким образом, *сходимость или расходимость последовательности и значение предела*, *если последовательность сходится*, *не зависят от её начальных членов.*

Теорема 2.1.1. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим противное – пусть числа a и b являются пределами последовательности $\{x_n\}$ и $a \neq b$, для определённости $a < b$. Возьмём $\varepsilon := (b-a)/2$. Это число положительное.

Пользуясь сходимостью последовательности к a, находим число N_1 такое, что для всех $n > N_1$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Точно также в силу сходимости последовательности к b существует число N_2 такое, что для всех $n > N_2$

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon. \tag{2.1.3}$$

При $n > N := \max(N_1, N_2)$ выполняются оба неравенства – и (2.1.2), и (2.1.3). Но

$$a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}, \qquad b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

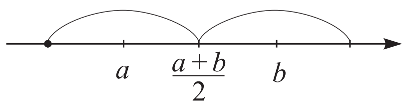
поэтому из правого неравенства (2.1.2) и левого неравенства (2.1.3) следует, что для $n > N$

$$x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < x_n,$$

и мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Приведенное доказательство иллюстрирует рисунок:



Мы брали непересекающиеся ε-окрестности точек a и b и получили противоречие за счёт того, что все члены последовательности с достаточно большими номерами должны принадлежать каждой из этих окрестностей.

В доказательстве теоремы использовались неравенства (2.1.2) и (2.1.3), из которых первое имело место при $n > N_1$, второе при $n > N_2$. Чтобы выполнялись оба эти неравенства, мы брали $n > N = \max(N_1, N_2)$. Такой приём будет часто использоваться в дальнейшем без пояснений.

§ 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема 2.2.1. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a. Взяв $\varepsilon = 1$, находим N такое, что $|x_n - a| < 1$ для всех $n > N$. Тогда при этих n

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Поэтому, положив $L := \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |a|)$, получим $|x_n| \leqslant L$ при всех n, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Теорема 2.2.2. *Если* $\lim_n x_n = a \neq 0$, *то существует* N *такое, что при всех* $n > N$

$$|x_n| > \frac{1}{2}\,|a|.$$

При этом, если $a > 0$, *то* $x_n > a/2$, *а если* $a < 0$, *то* $x_n < a/2$.

Доказательство. Найдём для $\varepsilon := |a|/2$ такое N, что при всех $n > N$
$$|x_n - a| < \frac{1}{2}\,|a|.$$
Тогда
$$a - \frac{1}{2}\,|a| < x_n < a + \frac{1}{2}\,|a|. \tag{2.2.1}$$

Если $a > 0$, то $|a| = a$ и пользуемся левым неравенством (2.2.1). А если $a < 0$, то $|a| = -a$ и пользуемся правым неравенством (2.2.1).

Теорема доказана.

В частности, все члены сходящейся последовательности с достаточно большими номерами положительны, если её предел положителен, и отрицательны, если предел отрицателен.

Теорема 2.2.3. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $x_n \leqslant y_n$ при всех n, то*
$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $a := \lim x_n$ и $b := \lim y_n$. Нужно доказать, что $a \leqslant b$.

Предположим, что это неравенство неверно и $a > b$. Возьмём $\varepsilon := (a-b)/2$. Так как $\varepsilon > 0$, то существует N такое, что при всех $n > N$
$$x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$
и одновременно
$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$
Таким образом,
$$y_n < \frac{a+b}{2} < x_n,$$
что противоречит условию. Теорема доказана.

В этой теореме неравенство $x_n \leqslant y_n$ можно требовать не при всех n, а только для всех достаточно больших n, поскольку предел последовательности не зависит от её начальных членов. Подобное замечание можно будет сделать и к некоторым последующим теоремам, но не будем заострять на этом внимание.

Более существенное замечание состоит в следующем. Если в теореме 2.2.3 вместо нестрогих неравенств $x_n \leqslant y_n$ предположить выполнение строгих неравенств $x_n < y_n$, то для пределов всё равно будет справедливо только нестрогое неравенство $\lim x_n \leqslant \lim y_n$. Это видно на примере последовательностей $x_n := 0$ и $y_n := 1/n$, для которых $x_n < y_n$ и $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Поэтому при переходе к пределу в неравенствах необходимо соблюдать следующее правило:

Если существуют пределы выражений в левой и правой частях строгого неравенства, то при переходе к пределу в этом неравенстве строгое неравенство нужно заменить на нестрогое.

Теорема 2.2.4. *Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу и $x_n \leqslant y_n$ при всех n. Тогда любая последовательность $\{z_n\}$, для которой $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ при всех n, сходится к тому же пределу.*

Доказательство. Обозначим $a := \lim x_n = \lim y_n$. Для каждого $\varepsilon > 0$ находим N такое, что при всех $n > N$ выполняются неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Тогда для таких n

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

т. е. $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и теорема доказана.

Теорема 2.2.5. *Если $x_n \to a$, $n \to \infty$, то $|x_n| \to |a|$, $n \to \infty$.*

Доказательство основывается на неравенстве

$$\big| |x_n| - |a| \big| \leqslant |x_n - a|,$$

вытекающем, как отмечалось в § 1.4, из неравенства треугольника (1.4.3).

§ 2.3. Арифметические свойства пределов

Теорема 2.3.1. *Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся. Тогда*

1^0. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$;
2^0. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$;
3^0. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$;

4^0. *Если* $y_n \neq 0$ *при всех* n *и* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Здесь в каждом из случаев 1^0–4^0 содержатся два утверждения: во-первых, существование предела в левой части равенства, а во-вторых, равенство этого предела выражению из правой части.

Словами эту теорему обычно формулируют так: предел суммы равен сумме пределов; предел разности равен разности пределов; предел произведения равен произведению пределов; предел частного равен частному пределов. В последнем случае, разумеется, имеется в виду, что ни члены последовательности делителей, ни её предел не равны нулю.

Доказательство теоремы. Пусть $a := \lim x_n$ и $b := \lim y_n$.

1^0, 2^0. По $\varepsilon > 0$ выбираем N так, чтобы при всех $n > N$ выполнялись неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для этих n

$$\big|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)\big| = \big|(x_n - a) \pm (y_n - b)\big| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следуют утверждения 1^0 и 2^0.

3^0. Сначала установим вспомогательное неравенство:

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n y_n - a y_n) + (a y_n - ab)| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - a|\,|y_n| + |a|\,|y_n - b|. \tag{2.3.1}$$

В силу сходимости последовательности $\{y_n\}$ она ограничена, поэтому можно выбрать число L такое, что $|a| < L$ и $|y_n| < L$ при всех n. Тогда из (2.3.1) вытекает, что

$$|x_n y_n - ab| \leqslant L|x_n - a| + L|y_n - b|. \tag{2.3.2}$$

Теперь задав $\varepsilon > 0$, находим N такое, что при $n > N$ выполняются оценки

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Пользуясь этими оценками, из (2.3.2) находим, что для всех $n > N$

$$|x_n y_n - ab| < L\frac{\varepsilon}{2L} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

и утверждение 3^0 доказано.

4^0. Начнём также со вспомогательного неравенства:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - y_n a|}{|y_n b|} = \frac{|x_n(b - y_n) + y_n(x_n - a)|}{|y_n b|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x_n|}{|y_n|\,|b|}|b - y_n| + \frac{1}{|b|}|x_n - a|. \qquad (2.3.3)$$

По условию $b \neq 0$, значит, согласно теореме 2.2.2 существует число N_1 такое, что $|y_n| > |b|/2$ для всех $n > N_1$. Последовательность $\{x_n\}$ в силу её сходимости ограничена, пусть $|x_n| < L$ при всех n.

Поэтому при $n > N_1$ согласно (2.3.3) справедлива оценка

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{2L}{b^2}|b - y_n| + \frac{1}{|b|}|x_n - a|. \qquad (2.3.4)$$

Теперь для произвольного положительного ε выбираем $N > N_1$ такое, что при всех $n > N$ имеют место оценки

$$|x_n - a| < \varepsilon\,\frac{|b|}{2}, \qquad |b - y_n| < \varepsilon\,\frac{b^2}{4L}.$$

Тогда из (2.3.4) следует, что для всех $n > N$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность называется *бесконечно малой*, если она сходится к нулю.

Обозначение для бесконечно малой последовательности $\{a_n\}$:

$$a_n = o(1), \quad n \to \infty.$$

Символ $o(1)$ читается “o-малое от единицы”.

Бесконечно малые последовательности называют также исчезающими.

Определение. Последовательность $\{b_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для каждого числа L существует такое $N = N(L)$, что при всех $n > N$ выполняется оценка $|b_n| > L$.

В этом случае пишут $\lim b_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{b_n\}$ имеет пределом ∞.

Если при этом для всех достаточно больших n имеем $b_n > 0$, то пишут $\lim b_n = +\infty$, а если $b_n < 0$, – пишут $\lim b_n = -\infty$. Эти определения можно сформулировать иначе.

Определение. Если для каждого числа L существует такое $N(L)$, что при всех $n > N$ выполняется оценка $b_n > L$, то говорят, что последовательность $\{b_n\}$ имеет пределом $+\infty$ и пишут $\lim b_n = +\infty$.

Если для каждого числа L существует такое $N(L)$, что при всех $n > N$ выполняется оценка $b_n < L$, то говорят, что последовательность $\{b_n\}$ имеет пределом $-\infty$ и пишут $\lim b_n = -\infty$.

В соответствии со сказанным в § 2.1 последовательности, имеющие бесконечные пределы, следует называть расходящимися. Но нередко от этого правила отступают и называют такие последовательности сходящимися к соответствующему бесконечному пределу. В настоящем курсе, когда говорится о сходимости последовательности, это всегда будет означать, что она имеет конечный предел. В тех случаях, когда последовательность может иметь и бесконечный предел, это будет специально оговариваться.

Заметим, что последовательность может сходиться к ∞, но не сходиться при этом ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. Такова, например, последовательность $\{(-1)^n n\}$.

Отметим простейшие свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, причём $x_n \neq 0$ при всех n, то $\{1/x_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $L := 1/\varepsilon$. Теперь по L находим N такое, что $|x_n| > L$ при всех $n > N$. Тогда для этих n имеем $|1/x_n| = 1/|x_n| < 1/L = \varepsilon$ и наше утверждение доказано.

Аналогично доказывается, что если $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$ при всех n, то $\{1/x_n\}$ – бесконечно большая последовательность.

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то бесконечно малыми являются и последовательности $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n - b_n\}$. Это следует из свойств пределов сходящихся последовательностей.

Если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}$ ограниченная, то последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ бесконечно малая. Действительно, по условию существует такое число L, что $|b_n| < L$ при всех n. Поэтому $|a_n\, b_n| \leqslant L\,|a_n|$, отсюда высказанное утверждение легко выводится. Заметим, что его нельзя получить из свойств пределов сходящихся последовательностей, так как сходимость последовательности $\{b_n\}$ не предполагается.

Для обозначения ограниченности последовательности $\{b_n\}$ пишут

$$b_n = O(1), \quad \forall\, n.$$

Символ $O(1)$ читается “O-большое от единицы”.

§ 2.5. Предел монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ при всех n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ при всех n.

Таким образом, возрастание и убывание последовательности не обязательно являются строгими. Если же $x_n < x_{n+1}$, соответственно, $x_n > x_{n+1}$ для всех n, то будем говорить о *строгом возрастании* и *строгом убывании* последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если она возрастает или убывает.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго монотонной*, если она строго возрастает или строго убывает.

Теорема 2.5.1. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Тогда*

1^0. *если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом B, то она сходится и* $\lim_n x_n \leqslant B$;

2^0. *если последовательность* $\{x_n\}$ *не ограничена сверху, то* $\lim_n x_n = +\infty$.

Доказательство. 1^0. Так как $x_n \leqslant B$ при всех n, то существует точная верхняя грань $M := \sup_n x_n$ и $M \leqslant B$. Покажем, что M является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Поскольку M – точная верхняя грань, то $x_n \leqslant M$ при всех n и для каждого $\varepsilon > 0$ существует член последовательности x_p такой, что $x_p > M - \varepsilon$. Но тогда для всех $n > p$ имеем $M - \varepsilon < x_p \leqslant x_n$. Таким образом, при всех $n > p$ выполняются неравенства $M - \varepsilon < x_n \leqslant M$. Значит, $M = \lim_n x_n$.

2^0. Если последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной сверху, то для любого L существует число q такое, что $x_q > L$. В силу возрастания последовательности отсюда следует, что при всех $n > q$ выполняются неравенства $x_n \geqslant x_q > L$, а это и означает, что $\lim_n x_n = +\infty$.

Теорема доказана.

Справедлива и аналогичная теорема о пределе убывающей последовательности.

Отметим, что теорема о существовании предела монотонной последовательности наряду с теоремами о точной верхней грани и о вложенных отрезках также могла бы служить формулировкой свойства полноты множества действительных чисел.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Докажем, что если $|q| < 1$, то

$$\lim_n q^n = 0. \tag{2.5.1}$$

Пусть сначала $0 < q < 1$. Тогда $\{q^n\}$ – убывающая ограниченная снизу последовательность. Значит, она имеет предел, обозначим его a.

Последовательность $\{q^{n+1}\}$ имеет этот же предел: $\lim_n q^{n+1} = a$ и по теореме о пределе произведения последовательностей

$$\lim_n q^{n+1} = \lim_n (q^n \cdot q) = (\lim_n q^n) \cdot q = aq.$$

Таким образом, $a = aq$, отсюда $a = 0$, поскольку $q \neq 1$, и мы доказали, что $\lim_n q^n = 0$ для положительных q.

Для отрицательных q пользуемся тем, что $|q^n| = |q|^n$.

Любопытно отметить, что при вычислении предела (2.5.1) было использовано заранее установленное существование этого предела.

С помощью равенства (2.5.1) легко обосновать формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии.

Для суммы n первых членов геометрической прогрессии b, bq, $bq^2, \ldots$ при $q \neq 1$ справедливо равенство

$$b + bq + \cdots + bq^{n-1} = \frac{b - b\,q^n}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{b}{1-q}\,q^n.$$

Поэтому, если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(b + bq + \cdots + bq^{n-1}\bigr) = \frac{b}{1-q}.$$

Пример 2. Покажем, что для произвольного числа a

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad (2.5.2)$$

где, напомним, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Поскольку

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!},$$

то как и в примере 1, достаточно рассмотреть только положительные a.

Пусть $a > 0$ и m – натуральное число такое, что $m + 1 > a$. Для $n > m$ имеем

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{1}{m!} \cdot \frac{a^n}{(m+1)\cdot\cdots\cdot n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m!} \cdot \frac{a^n}{(m+1)^{n-m}} = \frac{(m+1)^m}{m!} \cdot \left(\frac{a}{m+1}\right)^n.$$

Из неравенства $a/(m+1) < 1$, как показано в примере 1, следует, что

$$\left(\frac{a}{m+1}\right)^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

что приводит к (2.5.2).

§ 2.6. Число e

Нам будет нужна следующая оценка, которую называют неравенством Я. Бернулли.

Лемма 2.6.1. *Если $m \geqslant 2$ – натуральное число, $x > -1$ и $x \neq 0$, то справедливо неравенство*

$$(1+x)^m > 1 + mx. \tag{2.6.1}$$

Доказательство. При $m = 2$ доказательство элементарно:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Дальнейшие рассуждения проведём методом математической индукции.

Предположим, что для показателя m неравенство (2.6.1) уже установлено, и докажем его для показателя $m+1$. Имеем

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} &= (1+x)^m(1+x) > \\ &> (1+mx)(1+x) = 1 + (m+1)x + mx^2 > \\ &> 1 + (m+1)x.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2.6.2. *Последовательность чисел*

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.6.2}$$

сходится.

Доказательство. Докажем сходимость последовательности $\{y_n\}$, где

$$y_n := x_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отсюда, сославшись на теорему о пределе частного, получим сходимость последовательности $\{x_n\}$ и равенство обоих пределов.

Последовательность $\{y_n\}$ ограничена снизу числом 1. Покажем, что числа y_n монотонно убывают. Для этого рассмотрим частное

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

В силу неравенства Бернулли (2.6.1) имеем

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} > \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким образом, $y_n > y_{n+1}$ при всех n. Поэтому согласно теореме о пределе монотонной последовательности предел $\lim y_n$ существует и теорема доказана.

Аналогично доказательству убывания последовательности $\{y_n\}$ можно установить возрастание последовательности $\{x_n\}$.

Следуя Л. Эйлеру, предел последовательности (2.6.2) обозначают буквой e. Наряду с π число e является одной из наиболее важных констант в математике. Десятичное представление числа e имеет вид

$$e = 2,718\ldots$$

В § 6.5 будет показано, что e – иррациональное число.

§ 2.7. Частичные пределы

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$ и $n_1 < n_2 < \cdots$ – некоторая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\} = \{x_{n_k}\}$ называют *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Таким образом, каждое число x_{n_k} является членом последовательности $\{x_n\}$ и в последовательности $\{x_{n_k}\}$ сохранен тот же порядок следования элементов, какой они имели в исходной последовательности. Можно сказать, что мы записываем подряд все члены последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ "вычеркиваем" некоторые её элементы, сохранив при этом бесконечно много элементов, и полученную последовательность называем подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Понятно, что если последовательность сходится к конечному или бесконечному пределу, то любая её подпоследовательность сходится к тому же самому пределу.

Определение. Предел подпоследовательности называется *частичным пределом* последовательности.

Здесь также имеются в виду как конечные, так и бесконечные пределы.

Частичный предел последовательности может не быть её пределом. Например, частичными пределами последовательности $\{(-1)^n\}$, являются числа $+1$ и -1, а предела у этой последовательности нет.

Нетрудно убедиться, что число a является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда каждая ε-окрестность a содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 2.7.1 (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность и отрезок $[a, b]$, содержит все члены последовательности $\{x_n\}$.

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. По крайней мере один из полученных отрезков содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $[a_1, b_1]$ тот из этих отрезков, который содержит бесконечно много членов последовательности, а если таковы оба отрезка, то – любой из них. Возьмём произвольный элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_1, b_1]$. Пусть это будет x_{n_1}.

Разделим теперь пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и обозначим $[a_2, b_2]$ один из получившихся отрезков, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем элемент последовательности $\{x_n\}$, принадлежащий отрезку $[a_2, b_2]$, такой, что его индекс n_2 больше, чем n_1. Так выбран элемент x_{n_2}.

На следующем шаге делим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам, берём отрезок $[a_3, b_3]$, содержащий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, и выбираем в $[a_3, b_3]$ элемент x_{n_3} такой, что $n_3 > n_2$.

Продолжив этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}$, каждый из которых содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, а длины отрезков $[a_k, b_k]$ стремятся к нулю, и кроме того, последовательность чисел $\{x_{n_k}\}$ со строго возрастающими индексами.

Согласно теореме 1.7.1 о вложенных отрезках существует точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_k, b_k]$. Обозначим эту точку c и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

Пусть ε – произвольное положительное число. Так как длины отрезков $[a_k, b_k]$ стремятся к нулю, то все эти отрезки, начиная с некоторого, содержатся в ε-окрестности точки c, а вместе с ними в эту окрестность попадут и соответствующие члены последовательности $\{x_{n_k}\}$. Значит, при $k \to \infty$ числа x_{n_k} сходятся к c.

Теорема доказана.

Таким образом, каждая ограниченная последовательность имеет по крайней мере один частичный предел.

Заметим, что если члены последовательности принадлежат некоторому отрезку, то все её частичные пределы также принадлежат этому отрезку. А для интервалов такое утверждение не верно.

Теорема Больцано–Вейерштрасса относилась к ограниченным последовательностям. Её аналог для произвольных последовательностей формулируется следующим образом.

Теорема 2.7.2. *Из каждой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую предел, конечный или бесконечный.*

В самом деле, если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$. Сначала выбираем число x_{n_1} такое, что $x_{n_1} > 1$. Затем, пользуясь неограниченностью сверху последовательности, находим такой номер $n_2 > n_1$, что для x_{n_2} выполняется неравенство $x_{n_2} > 2$, и т. д. В результате получим $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

§ 2.8. Верхний и нижний пределы последовательности

Рассмотрим вопрос о наибольшем и наименьшем частичных пределах последовательности.

Теорема 2.8.1. *Если у ограниченной сверху последовательности существуют конечные частичные пределы, то точная верхняя грань множества её частичных пределов сама является частичным пределом.*

Доказательство. Пусть a – точная верхняя грань множества частичных пределов ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что в каждой окрестности числа a содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Согласно определению точной верхней грани для каждого положительного ε в ε-окрестности числа a найдётся частичный предел последовательности $\{x_n\}$. Обозначим его a_ε и возьмём настолько малую окрестность точки a_ε, чтобы она целиком содержалась в рассматриваемой ε-окрестности точки a. Этой окрестности точки a_ε принадлежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, которые, таким образом, лежат в указанной ε-окрестности точки a.

Теорема доказана.

Определение. Точную верхнюю грань множества частичных пределов ограниченной сверху последовательности называют *верхним пределом* этой последовательности.

Если последовательность не ограничена сверху, то из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$, и верхним пределом последовательности называют $+\infty$.

Остаётся ещё случай, когда $\lim x_n = -\infty$. Тогда $-\infty$ называют верхним пределом последовательности $\{x_n\}$.

Таким образом, верхний предел определён для любой последовательности.

Аналогичное теореме 2.8.1 утверждение имеет место для точной нижней грани множества частичных пределов ограниченной снизу последовательности. Соответствующим образом вводится определение нижнего предела произвольной последовательности.

Верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$ обозначают соответственно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,$$

или

$$\limsup_{n\to\infty} x_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Отметим свойства верхних пределов, связанные с арифметическими действиями над последовательностями (аналогичными свойствами обладают и нижние пределы).

Нетрудно построить последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых не выполняется равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

Но если одна из этих последовательностей имеет конечный предел, такое равенство справедливо. При этом, чтобы не предполагать конечность верхнего предела второй последовательности, положим, что сумма числа и бесконечного символа по определению равна этому бесконечному символу.

Теорема 2.8.2. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то для произвольной последовательности $\{y_n\}$ справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n. \tag{2.8.1}$$

Доказательство. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как она имеет конечный предел. Если верхний предел последовательности $\{y_n\}$ бесконечен, то равенство (2.8.1) вытекает из ограниченности последовательности $\{x_n\}$ и определения бесконечных пределов.

Будем далее считать верхний предел $\overline{\lim}\, y_n$ конечным.

Пусть $a := \lim_n x_n$. Если число b является частичным пределом последовательности $\{y_n\}$, т. е. $b = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ для некоторой возрастающей последовательности индексов $\{n_k\}$, то в силу теоремы о пределе суммы число $a+b$ является частичным пределом последовательности $\{x_n+y_n\}$, так как $\lim_{k\to\infty}\bigl(x_{n_k}+y_{n_k}\bigr) = a+b$.

Аналогично, если из частичного предела последовательности $\{x_n + y_n\}$ вычесть a, то получим частичный предел для $\{y_n\}$.

Поэтому точная верхняя грань частичных пределов $\{x_n + y_n\}$ равна сумме числа a и точной верхней грани частичных пределов $\{y_n\}$, а в этом и состоит утверждение теоремы.

Теорема 2.8.3. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный положительный предел, то для произвольной последовательности $\{y_n\}$ справедливо равенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n. \tag{2.8.2}$$

Доказательство. Здесь также конечность верхнего предела последовательности $\{y_n\}$ не предполагается, а произведение положительного числа и бесконечного символа считается равным этому бесконечному символу.

Пусть $a := \lim x_n$. Если $\varlimsup y_n = +\infty$, т. е. для некоторой последовательности индексов $\{n_k\}$

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = +\infty,$$

то для достаточно больших n_k имеем $y_{n_k} > 0$ и согласно теореме 2.2.2 $x_{n_k} > a/2$. Отсюда

$$x_{n_k} y_{n_k} > \frac{a}{2}\, y_{n_k},$$

что и приводит к (2.8.2).

Если же $\varlimsup y_n = -\infty$, то для всех достаточно больших n имеем $y_n < 0$ и $x_n > a/2$. Значит,

$$x_n y_n < \frac{a}{2}\, y_n.$$

Поэтому $\varlimsup x_n y_n = -\infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда верхний предел $\varlimsup y_n$ конечен.

Пусть число b является частичным пределом последовательности $\{y_n\}$, т. е. $b = \lim_k y_{n_k}$ для некоторой возрастающей последовательности индексов $\{n_k\}$.

Тогда в силу теоремы о пределе произведения

$$\lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k} y_{n_k}\right) = ab,$$

т. е. ab является частичным пределом последовательности $\{x_n y_n\}$.

Аналогично, если c – частичный предел последовательности $\{x_n y_n\}$, то c/a – частичный предел последовательности $\{y_n\}$.

Итак, частичные пределы последовательности $\{x_n y_n\}$ являются частичными пределами последовательности $\{y_n\}$, умноженными на a.

Значит, так же связаны и точные верхние грани множеств частичных пределов, т. е. справедливо равенство (2.8.2).

Теорема доказана.

§ 2.9. Критерий Коши

Словом “критерий” обычно называют необходимые и достаточные условия. В этом параграфе будет установлен критерий существования у последовательности конечного предела.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к числу a. Сравним члены последовательности $\{x_n\}$ с большими индексами.

В силу сходимости последовательности для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Поэтому, если $n > N$ и $m > N$, то

$$|x_n - x_m| = \big|(x_n - a) + (a - x_m)\big| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши* (является *фундаментальной*, является последовательностью Коши), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех n и m, превосходящих N, справедливо неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что условие Коши является необходимым для сходимости последовательности к конечному пределу. Покажем, что это условие является также и достаточным.

Теорема 2.9.1 (Критерий Коши). *Условие Коши необходимо и достаточно для сходимости последовательности к конечному пределу.*

Доказательство. Сначала установим, что последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющие условию Коши, ограничены.

Для $\varepsilon = 1$ найдём натуральное N такое, что при всех $n, m > N$ справедлива оценка $|x_n - x_m| < 1$. Положив $m = N + 1$, имеем

$|x_n - x_{N+1}| < 1$ для $n > N$ и, значит,

$$|x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|.$$

Поэтому, если $L := \max\bigl(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\bigr)$, то $|x_n| \leqslant L$ при всех n.

Ограниченная последовательность $\{x_n\}$ согласно теореме Больцано–Вейерштрасса имеет конечный частичный предел. Обозначим его a и покажем, что a является пределом всей последовательности $\{x_n\}$.

Пусть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность, для которой $\lim_k x_{n_k} = a$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём N_1 такое, что $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ для всех $n, m > N_1$, и N_2 такое, что $|a - x_{n_k}| < \varepsilon/2$ для всех $n_k > N_2$. Оценим разность $x_n - a$ при $n > N := \max(N_1, N_2)$.

Если $n_k > N$, то при всех $n > N$ имеем

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Теорема доказана.

Приведём примеры на применение критерия Коши. Но сначала введём следующее обозначение.

Сумму n слагаемых $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ коротко записывают так:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2.9.1}$$

Это общепринятое удобное обозначение было предложено Ж. Фурье. Читают символ (2.9.1) “сумма a_k по k от 1 до n”.

Не имеет значения, как обозначен “индекс суммирования”: в (2.9.1) он обозначен k, но можно писать

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

и т. д.

Вообще при $m \leqslant n$ символом

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

обозначают сумму $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$. В частности, при $m = n$ такая сумма равна a_n. Если $m > n$, то считают, что

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0,$$

т. е. что в этом случае сумма не имеет ни одного слагаемого.

Пример 1. Докажем расходимость последовательности

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Чтобы воспользоваться критерием Коши, оценим сумму

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Имеем

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Значит, какое бы положительное N мы ни взяли, для каждого $n > N$ получим

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, последовательность (2.9.2) расходится. Поскольку эта последовательность возрастающая, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Пример 2. Докажем сходимость последовательности

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.9.2}$$

Оценим при $n \geqslant m > 1$ сумму

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2}. \tag{2.9.3}$$

Имеем

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m-1}.$$

Поэтому, выбрав для произвольного $\varepsilon > 0$ натуральное число N так, чтобы выполнялось неравенство $1/N < \varepsilon$, получим, что при всех $n \geqslant m > N$

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{m-1} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Значит, последовательность (2.9.2) сходится.

На этом примере хорошо видно, что для доказательства сходимости последовательностей удобнее пользоваться критерием Коши, чем определением предела. Дело в том, что предел последовательности (2.9.2), как мы увидим в главе 19, равен $\pi^2/6$. Трудно догадаться, что это так, но даже если заранее это знать, установить сходимость к нулю разности

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

намного труднее, чем оценить сумму (2.9.3).

Глава 3. Предел функции

§ 3.1. Понятие функции

Пусть D – некоторое множество чисел или (что то же самое) точек числовой прямой.

Определение. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое число y, то говорят, что на D задана функция. Обозначив эту функцию f, пишут $y = f(x)$.

При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y – *зависимой переменной* или *функцией*.

Термины независимая переменная и зависимая переменная подчёркивают, что x можно выбирать произвольно, а значения y определяются этими x.

Для обозначения функции используют и одну букву f и символ $f(x)$. Таким образом, $f(x)$ может обозначать и саму функцию f и значение f, когда аргумент равен x.

Множество D называют *множеством определения* или *областью определения* функции f.

Множество чисел y, которое получается, когда x пробегает все числа из D, называют *множеством* (или *областью*) *значений* функции f. Обозначим это множество E. Говорят, что функция f осуществляет *отображение* множества D на множество E. Иногда пишут $E = f(D)$. Множество E называют *образом* множества D при этом отображении, а D – *прообразом* множества E.

Когда даётся определение функции не нужно знать, что представляет собой множество E. Важно только указать, какому множеству принадлежат значения функции. В приведенном определении это были числа. Но значениями функции могут быть и другие объекты, например, векторы, матрицы и т. д.

Функция – одно из основных понятий математики, оно имеет очень общий характер. Не только область значений, но и область определения могут быть не обязательно числовыми. Но сейчас мы будем рассматривать функции в том виде, как они определены выше, когда и область определения D и область значений E являются числовыми множествами.

Понятие функции вырабатывалось постепенно. Зависимость одних переменных величин от других рассматривали давно. Термин “функция” ввёл Г. Лейбниц в XVII веке.

В XVIII веке под функцией понимали в основном зависимость между переменными, заданную формулой. Но уже тогда у И. Бернулли и Л. Эйлера встречается определение функции, не отличающееся от приведенного выше современного определения (нужно только иметь в виду, что в те годы теоретико-множественная терминология ещё не была выработана).

Так, в монографии “Дифференциальное исчисление” (1755 г.) Эйлер писал:

“Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер, оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, если x обозначает постоянное количество, то все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями.”

Чтобы показать, что на множестве D задана функция f, значениями которой являются числа, используют запись

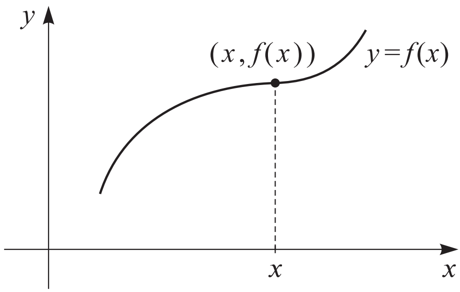
$$f\colon D \to \mathbb{R}.$$

В подобном обозначении указываются область определения функции и множество, которому принадлежат значения функции. Такая запись не предполагает, что все числа из $\mathbb{R}$ являются значениями функции.

Иногда функцию, заданную на D, нужно рассматривать только на некоторой части множества D, обозначим эту часть D_1, т. е. $D_1 \subset D$. Тогда говорят, что функция $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ является *следом функции* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *на множестве* D_1 или *сужением функции* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *на множество* D_1.

С функциями мы фактически уже встречались, когда давалось определение числовой последовательности. Тогда речь шла о числовых функциях, заданных на множестве натуральных чисел, т. е. функциях вида $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

При изучении числовых функций числового аргумента удобно использовать их графики. График функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ – это множество точек плоскости, которые в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеют координаты $(x, y) = (x, f(x))$. То есть для каждой точки $x \in D$ на прямой, проходящей через эту точку параллельно оси OY, берётся точка, ордината которой равна $f(x)$. Множество всех таких точек образует график функции $f(x)$.



Возможен и другой подход, когда график используется для определения функции. Тогда исходным является множество точек (x, y) плоскости, такое, что каждому числу $x \in D$ соответствует одна точка вида (x, y), и полагают $f(x) := y$.

Функции могут быть заданы разными способами. Одним из основных является задание функции формулой. Если при этом область определения функции не указана, считают, что область определения составляют все значения аргумента, при которых формула имеет смысл.

§ 3.2. Определение предела функции

Окрестностью точки x называют произвольный интервал (c, d), содержащий эту точку, т. е. выполняются условия $c < x < d$. Таким образом, ε-окрестности являются частным случаем окрестностей.

Приведём два варианта определения предела функции, формулируемые в разных терминах. Затем покажем, что эти определения эквивалентны.

Определение предела функции по Коши. Число a называется *пределом функции* f *в точке* x_0, если

1^0. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки;

2^0. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

В этом случае пишут

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

или

$$f(x) \to a, \quad x \to x_0.$$

Вместо "предел функции в точке x_0" говорят также "предел функции при $x \to x_0$".

В приведенном определении не имеет значения, задана функция в точке x_0 или нет, а если задана, то чему равно её значение.

И в условии 1^0 и в условии 2^0 говорится о точках из окрестности точки x_0, за исключением самой этой точки. В связи с этим вводится понятие *"проколотой окрестности точки"* – это окрестность, из которой исключена сама эта точка.

Тогда условие 1^0 можно сформулировать так: функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, а в условии 2^0 можно говорить о выполнении неравенства (3.2.1) в проколотой δ-окрестности точки x_0.

Определение предела функции по Коши называют также определением в терминах ε-δ или на языке окрестностей.

Определение предела функции по Гейне. Число a называется пределом функции f в точке x_0, если

1^0. функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки;

2^0. для каждой последовательности точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ из области определения функции f, сходящихся к x_0 и отличных от x_0, последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ сходится к a, т. е.

$$a = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Таким образом, в обоих определениях требования на область задания функции одинаковы. Разница состоит в формулировке условий 2^0.

Определение предела функции по Гейне называют также определением в терминах последовательностей.

Говоря о пределе функции в точке x_0, не нужно добавлять, что функция задана в некоторой проколотой окрестности точки x_0, так как это требование входит в определение предела.

Теорема 3.2.1. *Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть a – предел функции f в точке x_0 по Коши. Покажем, что a является пределом и по Гейне.

Возьмём произвольную последовательность $\{x_n\}$, все точки которой лежат в области определения функции f, $x_n \neq x_0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Так как $x_n \to x_0$, то существует число N, зависящее от этого δ, а в конечном счёте зависящее от ε, такое, что $\forall\, n > N$ справедлива оценка $|x_n - x_0| < \delta$. Тогда для этих n имеем $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, т. е. $a = \lim_n f(x_n)$. Таким образом, a является пределом функции f по Гейне.

Пусть теперь, наоборот, a – предел функции f в точке x_0 по Гейне. Нужно показать, что a – предел по Коши. Будем рассуждать от противного: предположим, что a не является пределом по Коши.

Значит, существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдётся точка x', для которой $0 < |x' - x_0| < \delta$ и $|f(x') - a| \geqslant \varepsilon_0$.

Будем брать в качестве δ числа $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого n получим точку $x_n \neq x_0$, в которой функция f определена, $|x_n - x_0| < 1/n$ и $|f(x_n) - a| \geqslant \varepsilon_0$. Эта последовательность $\{x_n\}$ относится к числу тех, какие рассматриваются в определении предела по Гейне, но для неё $|f(x_n) - a| \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит условию, что a – предел функции f по Гейне.

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет говорить о пределе функции в точке, не указывая, в каком смысле понимается предел, а каждый раз пользоваться тем вариантом определения, который в этом случае более удобен.

Заметим, что если предел функции в точке существует, то он определяется однозначно.

Всё, что было сказано о пределе функции, относилось к случаю, когда x_0 – число (точка числовой прямой). Но рассматриваются также пределы функций, когда x стремится к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞.

Познакомимся с некоторыми понятиями, которые покажут, что все эти случаи не имеют принципиальных различий.

Наряду с числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ рассматривается расширенная числовая прямая.

Здесь возможны два варианта. В одном случае к $(-\infty, +\infty)$ добавляются две "бесконечно удалённые точки" $-\infty$ и $+\infty$. Тогда все элементы расширенной таким образом числовой прямой остаются упорядоченным множеством (т. е. для любого числа x имеем $-\infty < x < +\infty$), но арифметические действия определены не для любой пары элементов. Например, имеют смысл выражения $x + (+\infty)$, $(+\infty) + (+\infty)$, но выражения вида $(+\infty) + (-\infty)$ или $0 \cdot (+\infty)$ не имеют смысла. Окрестности символа $+\infty$ определяются как множества точек x, удовлетворяющих неравенствам $x > L$, где L – произвольное число. А для $-\infty$ окрестности задаются неравенствами вида $x < L$.

Другой вариант расширенной числовой прямой получим, если к $(-\infty, +\infty)$ добавить один символ ∞ (без знака). Здесь упорядоченности нет и арифметические действия также определены не во всех случаях. Окрестности символа ∞ определяются как множества точек, лежащих вне произвольных отрезков $[L, M]$.

Теперь понятно, как должно выглядеть определение предела функции при $x \to +\infty$.

Определение. Число a называется пределом функции f при $x \to +\infty$, если

1^0. существует число L такое, что функция f определена при всех $x > L$;

2^0. (определение по Коши) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M(\varepsilon)$, что при всех $x > M$ выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon;$$

2^0. (определение по Гейне) для каждой последовательности $\{x_n\}$, все числа x_n которой принадлежат области определения функции f и $x_n \to +\infty$, справедливо равенство

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Эквивалентность приведенных определений по Коши и по Гейне доказывается аналогично теореме 3.2.1. Отметим, что если в определении предела по Коши вместо записи неравенств, говорить об окрестностях, то никакой разницы между случаями, когда предел – конечное число и бесконечный символ не будет.

Определения пределов при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ аналогичны.

Наконец, даются определения, когда пределом является не число, а бесконечный символ. Например, по определению $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, если (помимо требования на область определения функции f) для любого числа M существует такое $\delta = \delta(M) > 0$, что при всех $x \neq x_0$, для которых $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x)| > M$.

Подобным образом можно говорить о случаях, когда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ (или } -\infty),$$

а также об определениях, когда в качестве x_0 берется какой-либо бесконечный символ.

Как и для пределов последовательностей, будем говорить, что функция имеет предел, если этот предел конечен. А если предел может быть и бесконечным, это будет специально отмечаться.

§ 3.3. Свойства предела функции

Свойства пределов функций имеют много общего со свойствами пределов последовательностей. В ряде случаев доказательства будут опираться на результаты, полученные для последовательностей.

Теорема 3.3.1. *Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Пусть $a := \lim_{x\to x_0} f(x)$. Взяв $\varepsilon = 1$, находим $\delta > 0$, при котором для всех $x \neq x_0$ и таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - a| < 1$. Для этих x имеет место неравенство

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|$$

и теорема доказана.

Теорема 3.3.2. *Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ и $a \neq 0$, то существует такая проколотая окрестность точки x_0, что для всех x из* *этой окрестности справедливо неравенство*

$$|f(x)| > \frac{1}{2}\,|a|.$$

При этом $f(x) > a/2$, *если* $a > 0$, *и* $f(x) < a/2$, *если* $a < 0$.

Доказательство. Полагаем $\varepsilon := |a|/2$ и находим $\delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется оценка

$$|f(x) - a| < \frac{1}{2}\,|a|.$$

Эта оценка равносильна двойному неравенству

$$a - \frac{1}{2}\,|a| < f(x) < a + \frac{1}{2}\,|a|. \tag{3.3.1}$$

Теперь при $a > 0$ пользуемся левым неравенством (3.3.1):

$$a - \frac{1}{2}\,|a| = \frac{1}{2}\,a < f(x),$$

а при $a < 0$ – правым неравенством (3.3.1):

$$f(x) < a + \frac{1}{2}\,|a| = a - \frac{1}{2}\,a = \frac{1}{2}\,a.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3. *Если функции* f *и* g *имеют пределы при* $x \to x_0$ *и в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Доказательство. В проколотой окрестности точки x_0, в которой определены обе функции f и g, возьмём произвольную последовательность точек $\{x_n\}$, принадлежащих этой окрестности и сходящихся к x_0.

Так как $x_n \to x_0$, то все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера n, попадут в ту окрестность точки x_0, в которой $f(x) \leqslant g(x)$. Значит, $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ при всех достаточно больших n. Отсюда по теореме 2.2.3 о пределах последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

и осталось только заметить, что согласно определению предела функции по Гейне $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3.3.3 следует, что *если предел* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *существует и* $f(x) \geqslant \alpha$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0, *то* $\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \alpha$.

Теорема 3.3.4. *Пусть в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *для функций* $f(x)$, $g(x)$ *и* $h(x)$ *выполняются неравенства*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x). \tag{3.3.2}$$

Если пределы $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim_{x\to x_0} h(x)$ *существуют и равны, то предел* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *существует и равен общему значению пределов функций* $f(x)$ *и* $h(x)$.

Доказательство. В проколотой окрестности точки x_0, в которой выполняются неравенства (3.3.2), возьмём произвольную сходящуюся к x_0 последовательность точек $\{x_n\}$. Тогда $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$ и пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ существуют и равны. Значит, по теореме 2.2.4

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Отсюда согласно определению предела функции по Гейне вытекает утверждение теоремы.

Теорема 3.3.5. *Если существует предел* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, *то существует предел* $\lim_{x\to x_0} |f(x)|$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0} \bigl|f(x)\bigr| = \Bigl|\lim_{x\to x_0} f(x)\Bigr|.$$

Доказательство. Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ при всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$. Но тогда и $\bigl|\,|f(x)| - |a|\,\bigr| \leqslant |f(x) - a| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Рассмотрим арифметические действия над функциями, имеющими пределы в точке.

Теорема 3.3.6. *Пусть для функций f и g существуют пределы $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Тогда существуют указанные ниже пределы и справедливы равенства*:

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x);$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x);$$

если, кроме того, $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Из условия $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ согласно теореме 3.3.2 следует, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $g(x)\neq 0$. Значит, в этой окрестности имеет смысл частное $f(x)/g(x)$.

Для доказательства каждого из утверждений теоремы выбираем произвольную сходящуюся к x_0 последовательность точек $\{x_n\}$ из проколотой окрестности точки x_0, в которой определены функции f и g. Для последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ соответствующие свойства известны (когда говорится о частном, учитываем, что $g(x_n)\neq 0$ для достаточно больших n). При этом для любой такой последовательности $\{x_n\}$ в левой части равенств каждого из утверждений получаем одинаковые значения пределов, так как пределы в правых частях не зависят от выбора последовательности.

До сих пор всюду имелись в виду конечные пределы функций. Но можно говорить и о свойствах бесконечных пределов.

Нетрудно показать, что если $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, а функция $g(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)=+\infty.$$

Но не все свойства конечных пределов переносятся на бесконечные пределы. Например, в правых частях равенств теоремы 3.3.6 могут появиться выражения, не имеющие смысла.

§ 3.4. Критерий Коши

Определение. Функция f удовлетворяет в точке x_0 *условию Коши*, если f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой пары точек x' и x'' из проколотой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Теорема 3.4.1 (Критерий Коши). *Для того чтобы функция f имела в некоторой точке конечный предел, необходимо и достаточно выполнения для f в этой точке условия Коши.*

Доказательство. Пусть предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$ равен a. Для каждого положительного ε существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon/2$. Взяв произвольные точки x' и x'' из проколотой δ-окрестности точки x_0, находим

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - a| + |a - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, необходимость условия Коши установлена.

Пусть теперь выполнено условие Коши. По $\varepsilon > 0$ находим такое $\delta > 0$, что для любых точек x' и x'' из проколотой δ-окрестности точки x_0 справедливо неравенство (3.4.1).

Рассмотрим произвольную последовательность точек $\{x_n\}$ из области определения функции f такую, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и $x_n \neq x_0$ для всех n. Тогда существует число N, зависящее от δ, а в конечном счёте зависящее от ε, такое, что при всех $n > N$ для точек x_n справедливо неравенство $|x_n - x_0| < \delta$.

Значит, если n и m превосходят N, то $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ и для последовательности $\{f(x_n)\}$ выполняется условие Коши. Итак, для любой такой последовательности точек $\{x_n\}$ существует конечный предел последовательности $\{f(x_n)\}$.

Но нужно ещё показать, что для разных последовательностей $\{x_n\}$ пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ одинаковы.

Рассмотрим две последовательности указанного вида $\{x_n\}$ и $\{t_n\}$.

Пусть $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = b$. Составим новую последовательность

$$x_1,\, t_1,\, x_2,\, t_2,\, x_3,\, t_3,\, \ldots, \tag{3.4.2}$$

включая в неё попеременно члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{t_n\}$. Все точки последовательности (3.4.2) принадлежат области определения функции f, отличны от x_0 и последовательность (3.4.2) сходится к x_0. Значит, по уже доказанному последовательность значений функции f в точках (3.4.2) имеет предел. Числа a и b являются частичными пределами этой сходящейся последовательности. Отсюда следует, что $a = b$.

Теорема доказана.

§ 3.5. Предел сложной функции

Сначала определим термин “сложная функция”.

Определение. Пусть на множестве D задана функция f и E – множество значений $f(x)$, когда $x \in D$. Если на E определена функция φ, то при всех $x \in D$ имеет смысл выражение

$$\varphi\,(f(x)).$$

Так заданную функцию называют *сложной функцией.*

Сложную функцию называют также функцией от функции, суперпозицией функций или композицией функций.

Выясним, при каких условиях из существования пределов функций f и φ следует, что имеет предел сложная функция $\varphi(f)$.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *и для* x *из некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполнено условие*

$$f(x) \neq y_0. \tag{3.5.1}$$

Пусть, далее, $\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = z_0$. *Тогда предел*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi\,\bigl(f(x)\bigr)$$

существует и равен z_0.

Доказательство. Отметим, что нужно проверить и то, что функция $\varphi(f(x))$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Это будет установлено в ходе доказательства.

Так как предел функции φ в точке y_0 равен z_0, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y, удовлетворяющих условию $0 < |y - y_0| < \sigma$, справедлива оценка $|\varphi(y) - z_0| < \varepsilon$.

Далее по σ находим $\delta > 0$ такое, что при всех x, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - y_0| < \sigma$. Уменьшив в случае необходимости значение δ, получим, что в проколотой δ-окрестности точки x_0 выполняется условие (3.5.1). Тогда для x из этой δ-окрестности значения функции f принадлежат проколотой σ-окрестности точки y_0. Значит, при этих x выражение $\varphi(f(x))$ имеет смысл и

$$|\varphi(f(x)) - z_0| < \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку δ выбиралось по σ, а σ по ε, т. е. в конце концов выбор δ зависел от ε.

Условие (3.5.1) существенно для справедливости теоремы 3.5.1. В самом деле, из существования предела $\lim_{y\to y_0} \varphi(y)$ не следует, что функция $\varphi(y)$ определена в точке y_0, а если она и определена, то никаких условий на её значение в этой точке не накладывается.

Поэтому, если условие (3.5.1) не выполнено, то в как угодно малой окрестности точки x_0 могут существовать точки x, для которых выражение $\varphi(f(x))$ или не определено или имеет значения, никак не связанные со значениями φ в проколотой окрестности точки y_0.

Вместе с тем, из доказательства теоремы 3.5.1 видно, что от условия (3.5.1) можно отказаться, если функция φ при $y = y_0$ определена и $\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5.2. *Если* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *и* $\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$, *то*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = \varphi\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big) = \varphi(y_0).$$

§ 3.6. Односторонние пределы

Наряду с окрестностями точки, когда точка лежит в некотором интервале, рассматривают промежутки, которые называют *односторонними окрестностями* точек. Полуинтервалы вида $(c, x_0]$ называют *левыми окрестностями* точки x_0, а полуинтервалы вида $[x_0, d)$ – *правыми окрестностями* точки x_0.

С помощью левых и правых окрестностей вводятся *односторонние пределы* функции. Приведём определение предела функции в точке справа.

Определение. Пусть функция f задана в некоторой правой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Число a называют *пределом функции f в точке x_0 справа*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, справедлива оценка

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$a = \lim_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Это – определение предела по Коши. Можно дать определение одностороннего предела по Гейне и доказать эквивалентность этих определений. Не будем входить в подробности ввиду очевидности изменений по сравнению с обычными пределами.

Аналогично формулируется определение предела функции в точке слева. Такой предел обозначают $f(x_0 - 0)$.

Правый и левый пределы в точке 0 обозначают $f(+0)$ и $f(-0)$. Вместо $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ иногда пишут $f(x_0+)$ и $f(x_0-)$.

Заметим, что существование предела $\lim_{x \to x_0} f(x)$ равносильно существованию и равенству односторонних пределов $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 промежутка из $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если для всех таких пар точек выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, функцию f называют *строго возрастающей* на этом промежутке.

Аналогично определяют убывающие и строго убывающие на промежутке функции.

Возрастающие и убывающие функции называют *монотонными*. Строго возрастающие и строго убывающие функции называют *строго монотонными*.

Теорема 3.6.1. *Пусть функция f возрастает на интервале (a, b). Тогда если значения f на (a, b) ограничены сверху числом B, то предел $f(b - 0)$ существует и $f(b - 0) \leqslant B$. Если f на (a, b) не ограничена сверху, то $f(b - 0) = +\infty$.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству соответствующей теоремы для последовательностей.

Если $f(x) \leqslant B$ при $x \in (a,b)$, то существует конечная точная верхняя грань $M := \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ и $M \leqslant B$. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся точка $x_\varepsilon \in (a,b)$, в которой $f(x_\varepsilon) > M-\varepsilon$. Но тогда в силу возрастания f при всех $x \in (x_\varepsilon, b)$ имеем

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Значит, $f(b-0) = M$.

Если f не ограничена сверху, то для каждого числа L существует точка $x_L \in (a,b)$ такая, что $f(x_L) > L$. Отсюда в силу возрастания f на (x_L, b) имеем $f(x) \geqslant f(x_L) > L$. Это показывает, что $f(b-0) = +\infty$.

Теорема доказана.

Подобное утверждение справедливо и для убывающих функций.

Теорема 3.6.2. *Если функция f монотонна на интервале, то в каждой точке x этого интервала существуют односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$. При этом, если f возрастает, то $f(x-0) \leqslant f(x+0)$, а если f убывает, то $f(x-0) \geqslant f(x+0)$.*

Доказательство. Пусть f возрастает на (a,b). Для произвольной точки x из (a,b) рассмотрим функцию f на промежутке $(a,x]$.

Так как все значения f на $(a,x]$ ограничены сверху числом $f(x)$, то согласно теореме 3.6.1 существует предел $f(x-0)$ и справедливо неравенство $f(x-0) \leqslant f(x)$. Точно так же из возрастания f на $[x,b)$ следуют существование предела $f(x+0)$ и неравенство $f(x) \leqslant f(x+0)$.

Таким образом, для возрастающих функций теорема доказана.

Для убывающих функций рассуждения аналогичны.

Заметим, что пределы функций при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ можно рассматривать, как односторонние пределы при $x \to \infty$.

§ 3.7. Сравнение функций

Пусть на множестве D заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Если существует такое число C, что при всех $x \in D$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)|,$$

то говорят, что функция f есть *O-большое от* φ *на* D и пишут

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad \text{на} \quad D.$$

Рассмотрим теперь функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, заданные в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если существуют число C и такая проколотая окрестность точки x_0, что при всех x из этой окрестности

$$|f(x)| \leqslant C|\varphi(x)|,$$

то говорят, что f есть *O-большое от* φ *при* $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.7.1}$$

Хотя в (3.7.1) написано $x \to x_0$, здесь нет предельного перехода. Такая запись означает только, что речь идёт о достаточно малой проколотой окрестности точки x_0.

Если на D или при $x \to x_0$ имеем и $f(x) = O(\varphi(x))$ и $\varphi(x) = O(f(x))$, то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют *одинаковый порядок*, соответственно, на D или при $x \to x_0$.

Обозначать это будем так:

$$f(x) \sim \varphi(x), \tag{3.7.2}$$

обязательно добавляя, что это соотношение имеет место на D или при $x \to x_0$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не обращаются в нуль (соответственно, на D или в некоторой проколотой окрестности точки x_0), то определение одинакового порядка этих функций можно сформулировать так: существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \leqslant \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leqslant C_2$$

на D или соответственно в достаточно малой проколотой окрестности точки x_0.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ есть *o-малое от* $\varphi(x)$ *при* $x \to x_0$, и пишут

$$f(x) = o(\varphi(x)), \quad x \to x_0. \tag{3.7.3}$$

Здесь предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Определение o-малого можно распространить на случай, когда функция $\varphi(x)$ может иметь нули в как угодно малой проколотой окрестности точки x_0. Тогда запись (3.7.3) означает, что

$$f(x) = \varepsilon(x) \cdot \varphi(x),$$

где

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Если $f(x) = o(1)$, $x \to x_0$, то функцию f называют бесконечно малой при $x \to x_0$.

Подчеркнём, что хотя в формулах (3.7.1) и (3.7.3) присутствует знак равенства, в этих случаях мы имеем дело не с равенствами, а с оценками, сравнивающими поведение функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to x_0$.

Ясно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \to x_0$, то $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, а обратное утверждение неверно.

Понятно также, что если $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, и $\varphi(x) = O(\psi(x))$, $x \to x_0$, то $f(x) = O(\psi(x))$, $x \to x_0$. При этом, если хотя бы в одном из этих соотношений O-большое заменить на o-малое, получим $f(x) = o(\psi(x))$, $x \to x_0$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ *при $x \to x_0$ асимптотически равны* или эквивалентны. В таком случае будем писать

$$f(x) \approx \varphi(x), \quad x \to x_0. \tag{3.7.4}$$

Асимптотическое равенство функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно определить ещё так: $f(x) \approx \varphi(x)$, $x \to x_0$, если

$$f(x) = \alpha(x) \cdot \varphi(x),$$

где

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 1.$$

Такое определение является несколько более общим, поскольку теперь нули функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут накапливаться в окрестности точки x_0.

К сожалению, для порядкового и асимптотического равенств нет общепринятых обозначений и наряду с (3.7.2) и (3.7.4) используются и другие варианты записи, означающие одинаковый порядок или асимптотическое равенство функций.

Теорема 3.7.1. *Если* $f(x) \approx \varphi(x)$, $x \to x_0$, *и для некоторой функции* $\lambda(x)$ *существует предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\,\lambda(x),$$

то существует также предел

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\,\lambda(x)$$

и значения этих пределов равны.

Доказательство. По условию $\varphi(x) = \alpha(x)\,f(x)$ в достаточно малой окрестности точки x_0, где $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. Значит, $\varphi(x)\,\lambda(x) = \alpha(x) \cdot f(x)\,\lambda(x)$ и пользуемся тем, что предел каждого их полученных двух множителей существует, причём предел первого из них равен 1. Теорема доказана.

Отметим, что символы O, o, $\sim$, $\approx$ могут относиться не ко всем, а только к односторонним окрестностям точки x_0.

Напомним, что обозначения $o(1)$ и $O(1)$ были введены в § 2.4, когда говорилось о бесконечно малых и об ограниченных последовательностях.

Глава 4. Непрерывные функции

§ 4.1. Непрерывность функции в точке

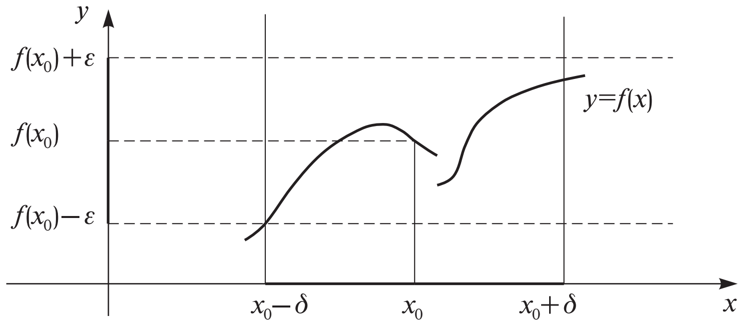
Определение. Функцию f называют *непрерывной в точке* x_0, если f определена в некоторой окрестности этой точки и для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Эквивалентную формулировку получим, используя предел функции в точке: функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Графически непрерывность f в точке x_0 означает следующее. По заданному положительному ε строится полоса, параллельная оси OX, заключённая между прямыми $y = f(x_0)+\varepsilon$ и $y = f(x_0)-\varepsilon$. Требуется, чтобы существовало такое число $\delta > 0$, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 точки графика функции $f(x)$ лежат в указанной полосе.



Приведём ещё определение непрерывности в терминах пределов последовательностей. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если f определена в некоторой окрестности этой точки и для любой сходящейся к x_0 последовательности точек $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, из области определения f, справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Это равенство можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Заметим, что когда говорят, что функция f непрерывна в точке, нет необходимости добавлять, что f определена в некоторой окрестности этой точки, поскольку такое требование входит в определение непрерывности.

При изучении вопросов, связанных с непрерывностью функций, полезны понятия приращения аргумента и приращения функции. Пусть x_0 и x – два значения аргумента функции f, положим $\Delta x := x - x_0$. Тогда $x = x_0 + \Delta x$ и говорят, что точка x получена из x_0 за счёт *приращения аргумента* Δx. Разность значений функции

$$\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называют *приращением функции* f в точке x_0, когда аргумент получил приращение Δx. При этом Δx может быть как положительным, так и отрицательным.

Непрерывность функции f в точке x_0 означает, что $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Следующие свойства непрерывных функций вытекают из свойств предела функции в точке.

Непрерывная в точке функция ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, что $|f(x)| > |f(x_0)|/2$ для всех x из этой окрестности. При этом $f(x) > f(x_0)/2$, если $f(x_0) > 0$, и $f(x) < f(x_0)/2$, если $f(x_0) < 0$.

В частности, *если функция* f *непрерывна в точке* x_0 *и* $f(x_0) \neq 0$, *то* f *сохраняет знак в некоторой окрестности точки* x_0.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то непрерывна и функция $f(x)/g(x)$.

Отсюда получаем непрерывность многочленов на всей оси. В самом деле, непрерывность функций $f(x) = C$ (т. е. функций, принимающих одно и то же значение C при всех значениях аргумента) и $f(x) = x$ очевидна. Далее по индукции, легко убедиться, что для каждого натурального n функция $f(x) = x^n$ непрерывна. Так получаем непрерывность любого многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Рациональная дробь, т. е. отношение двух многочленов, непрерывна во всех точках, в которых знаменатель дроби не обращается в нуль.

Из теоремы 3.5.2 о пределе сложной функции вытекает следующее утверждение о непрерывности сложной функции.

Теорема 4.1.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 := f(x_0)$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Наряду с непрерывностью функции в точке рассматривают одностороннюю непрерывность.

Определение. Функция f называется *непрерывной справа в точке* x_0, если $f(x_0+0) = f(x_0)$. Функция f называется *непрерывной слева в точке* x_0, если $f(x_0-0) = f(x_0)$.

Непрерывность функции в точке равносильна её непрерывности в этой точке и справа и слева.

Отметим, что приведенные выше свойства функций, непрерывных в точке, распространяются на функции, непрерывные справа или слева.

§ 4.2. Классификация точек разрыва

Точки, в которых функция не является непрерывной, называют *точками разрыва* функции.

Чтобы можно было говорить о пределе функции в точке разрыва, будем далее считать, что функция определена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

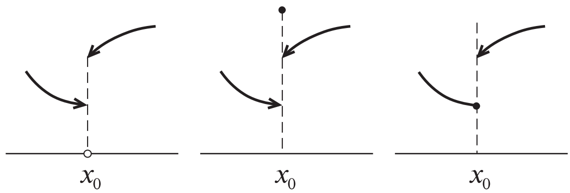
Если x_0 является точкой разрыва функции f и существуют конечные пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, то x_0 называют *точкой разрыва первого рода.*

Если f имеет в точке x_0 разрыв первого рода и $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, то либо f не определена в точке x_0, либо f определена в этой точке, но $f(x_0) \neq f(x_0+0)$. Положив $f(x_0) := f(x_0 +$

0), т. е. доопределив или переопределив f в точке x_0, получим непрерывную функцию. Такие разрывы называют *устранимыми*.

Разрыв первого рода называют *неустранимым*, если $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$. В этом случае нельзя получить непрерывную функцию, доопределив или переопределив f в точке x_0.

На рисунке показаны неустранимые разрывы первого рода.



Если функция f имеет в точке x_0 неустранимый разрыв первого рода, то существует $\delta > 0$, такое, что при отображении, осуществляемом функцией f, образ δ-окрестности точки x_0 содержит не все точки интервала на оси OY с концами в точках $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Если функция f задана в односторонней окрестности точки x_0 и соответствующий односторонний предел f в этой точке существует, но не равен $f(x_0)$, то x_0 также называют точкой разрыва первого рода функции f.

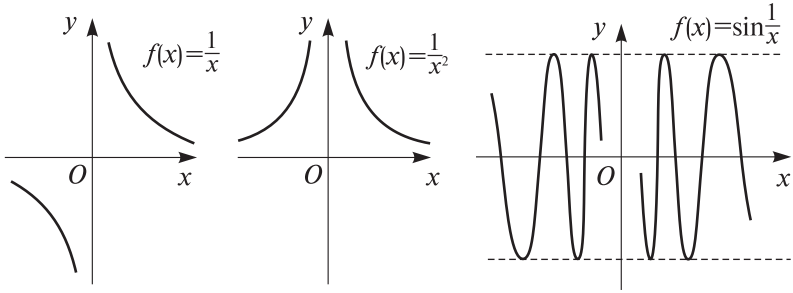
Если функция $f(x)$ монотонна на некотором промежутке, то согласно теореме 3.6.2 в каждой внутренней точке x_0 этого промежутка существуют пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Значит, все точки разрыва монотонной функции являются точками разрыва первого рода.

Если множество точек разрыва монотонной функции бесконечно, то оно обязательно счётно. В самом деле, каждой точке разрыва x_0 поставим в соответствие какое-либо рациональное число, заключённое между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Тогда получим взаимно однозначное соответствие точек разрыва и некоторого множества рациональных чисел, а каждое бесконечное подмножество рациональных чисел счётно.

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Теорема 4.2.1. *Монотонная функция может иметь точки разрыва только первого рода и множество её точек разрыва не более чем счётно.*

Если разрыв функции в точке не является разрывом первого рода, его называют *разрывом второго рода.* На следующем рисунке изображены некоторые характерные примеры точек разрыва второго рода.



§ 4.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках интервала (a, b), т. е. во внутренних точках отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций обозначают $C[a, b]$ и, если f непрерывна на $[a, b]$, пишут $f \in C[a, b]$.

Наряду с непрерывностью на отрезке рассматривают непрерывность функций на интервале, на полуотрезке, полуоси и всей оси. Множество функций, непрерывных на интервале (a, b), обозначают $C(a, b)$. Обозначения в остальных случаях аналогичны.

Когда ясно, о непрерывности на каком промежутке идёт речь, пишут $f \in C$.

Понятно, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$, то на $[a, b]$ непрерывны функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а если $g(x)$ не обращается в нуль на этом промежутке, то непрерывна и функция $f(x)/g(x)$.

Теорема 4.3.1. *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Ограниченность функции f на отрезке $[a, b]$ означает существование такого числа L, что $|f(x)| \leqslant L$ при всех $x \in [a, b]$.

Докажем теорему от противного. Предположим, что функция $f \in C[a, b]$, но не является ограниченной на $[a, b]$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что $|f(x_n)| > n$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена, так как все они принадлежат отрезку $[a, b]$. Значит, по теореме Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\xi := \lim_k x_{n_k}$, тогда $\xi \in [a, b]$.

В силу непрерывности функции f в точке ξ (если ξ – один из концов отрезка, имеется в виду односторонняя непрерывность) для любой сходящейся к ξ последовательности точек $\{t_k\}$ из $[a, b]$ имеем $\lim_k f(t_k) = f(\xi)$.

Значит, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$. Но из $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ следует равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ и мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Отметим, что для функций, непрерывных на интервале, утверждение, подобное теореме 4.3.1, не верно. Это видно на примере функции $1/x$, которая на интервале $(0, 1)$ непрерывна, но неограничена.

Теорема 4.3.2 (Теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то в некоторых точках этого отрезка она достигает точную верхнюю и точную нижнюю грани своих значений на* $[a, b]$.

Доказательство. Докажем достижимость точной верхней грани. Заметим, что точная верхняя грань значений функции существует, так как согласно теореме 4.3.1 из непрерывности функции на отрезке следует её ограниченность.

Пусть $f \in C[a, b]$ и $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Для каждого натурального n существует точка $x_n \in [a, b]$ такая, что $f(x_n) > M - 1/n$. Так как $f(x_n) \leqslant M$ при всех n, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M. \tag{4.3.1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ согласно теореме Больцано–Вейерштрасса имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\xi := \lim_k x_{n_k}$, тогда $\xi \in [a, b]$.

Так как f непрерывна в точке ξ, то $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$. А из (4.3.1) следует, что $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Значит, $M = f(\xi)$.

Для точной нижней грани рассуждения аналогичны.

Теорема доказана.

Таким образом, можно говорить о максимальном значении функции, непрерывной на отрезке, и писать в этом случае не $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ а $\max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Для функций, непрерывных на интервале, утверждение, подобное теореме 4.3.2, не имеет места, даже если дополнительно предполагать ограниченность функции.

Теорема 4.3.3 (Теорема Коши о промежуточных значениях). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа c, заключённого между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $c = f(\xi)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки и $c = 0$.

Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в точке деления значение функции равно нулю, то в качестве ξ можно взять эту точку деления.

А если в точке деления значение функции f отлично от нуля, то в концах одного из получившихся отрезков значения f имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Заметим, что $b_1 - a_1 = (b-a)/2$.

Делим теперь отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и повторяем предыдущее рассуждение. То есть если в точке деления функция обращается в нуль, то нужная точка уже найдена. В противном случае выбираем тот из полученных отрезков, в концах которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим этот отрезок $[a_2, b_2]$, его длина в два раза меньше длины отрезка $[a_1, b_1]$.

Продолжим этот процесс. Если мы не встретим нуль функции на каком-то шаге, то получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, длины которых $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ стремятся к нулю. Значит, согласно теореме 1.7.1 существует точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам.

Покажем, что $f(\xi) = 0$. Если бы это было не так, то функция f сохраняла бы знак в некоторой окрестности точки ξ. При достаточно больших n отрезки $[a_n, b_n]$ целиком содержатся в этой окрестности, так как она содержит точку ξ, а длины отрезков стремятся к нулю. Поскольку в концах отрезков $[a_n, b_n]$ значения функции f имеют разные знаки, мы пришли к противоречию с тем, что функция сохраняет знак в указанной окрестности точки ξ.

Чтобы доказать теорему Коши в общем случае, введём функцию $g(x) := f(x) - c$. Функция g непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в его концах принимает значения разных знаков. Значит, по уже доказанному существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой $g(\xi) = 0$. Таким образом, $f(\xi) - c = 0$ и $f(\xi) = c$.

Теорема доказана.

Следствие 4.3.4. *Пусть $[a, b]$ – некоторый промежуток, т. е. отрезок, интервал или полуотрезок, и функция f непрерывна на этом промежутке. Положим*

$$M := \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

если значения f на $[a, b]$ ограничены сверху, и $M := +\infty$ в противном случае. Аналогично

$$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

или $m := -\infty$.

Тогда для каждого числа $c \in (m, M)$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $c = f(\xi)$.

Доказательство. Согласно определению точной верхней грани в промежутке $[a, b]$ имеется точка x^* такая, что $c < f(x^*) \leqslant M$.

Точно также имеется такая точка x_*, что $m \leqslant f(x_*) < c$.

Рассмотрим след функции f на отрезке с концами в точках x^* и x_*. Так как f непрерывна на этом отрезке, а в его концах имеет значения, между которыми лежит c, то согласно теореме 4.3.3 в некоторой точке отрезка функция f принимает значение c, что и требовалось доказать.

Следовательно, для функции f, непрерывной на произвольном промежутке, образом этого промежутка при отображении, осуществляемом функцией f, является некоторый промежуток.

Если в следствии 4.3.4 промежуток $[a, b]$ является отрезком, то в силу теоремы 4.3.1 величины m и M конечны, а согласно теореме 4.3.2 они являются значениями функции f. Значит, в этом случае значения f целиком заполняют отрезок $[m, M]$.

Наряду с функциями, непрерывными на промежутке, рассматривают кусочно непрерывные функции.

Определение. Функция называется *кусочно непрерывной* на промежутке, если она непрерывна во всех точках промежутка, за исключением конечного множества точек, которые являются её точками разрыва первого рода.

Другими словами, промежуток, на котором функция кусочно непрерывна, можно разбить на конечное число интервалов, на которых функция непрерывна, а в концах этих интервалов имеет конечные односторонние пределы.

Отметим, что теорема 4.3.1 верна и для функций, кусочно непрерывных на отрезке, а в теоремах 4.3.2 и 4.3.3 заменить непрерывность функции на кусочную непрерывность нельзя.

§ 4.4. Равномерная непрерывность функций

Если функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$, то для каждой точки $x_0 \in [a, b]$ и произвольного положительного ε существует такое положительное число δ, что при всех x из области определения функции f таких, что $|x - x_0| < \delta$, имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

При этом для каждой точки промежутка при одном и том же ε имеем, вообще говоря, своё δ. Таким образом, δ зависит не только от ε, но и от x_0. Если же δ можно выбрать зависящим только от ε, говорят о равномерной непрерывности функции.

Определение. Функцию f, заданную на промежутке $[a, b]$, называют *равномерно непрерывной* на этом промежутке, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек x' и x'' из $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$, справедливо неравенство
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Промежуток, о котором говорится в этом определении, может быть отрезком, интервалом или полуотрезком, в том числе и неограниченным.

Теорема 4.4.1 (Теорема Кантора). *Если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим противное: пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной. Тогда $\exists\,\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\,\delta > 0$ найдутся такие точки x' и x'' из $[a, b]$, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$.

Выбирая δ, равные $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, находим для каждого n пару точек x'_n и x''_n из $[a, b]$ такую, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$. Пусть $\xi := \lim_k x'_{n_k}$, тогда $\xi \in [a, b]$. Так как

$$|x''_{n_k} - \xi| \leqslant |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - \xi|,$$

то и $\lim_k x''_{n_k} = \xi$.

Из непрерывности f в точке ξ следует, что $\lim_k f(x'_{n_k}) = f(\xi)$ и $\lim_k f(x''_{n_k}) = f(\xi)$, а это противоречит неравенству $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$.

Теорема доказана.

Отметим, что функции, непрерывные на интервале, подобным свойством не обладают.

Для характеризации равномерной непрерывности функции удобно использовать её модуль непрерывности.

Определение. Пусть функция f ограничена на некотором промежутке. *Модулем непрерывности* f называется функция

$$\omega(f, \delta) := \sup \bigl|f(x') - f(x'')\bigr|, \quad \delta \geqslant 0,$$

где точная верхняя грань берётся по всем точкам x' и x'' из указанного промежутка таким, что $|x' - x''| \leqslant \delta$.

Модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ определён при δ, для которых в рассматриваемом промежутке имеются точки x' и x'', для которых $|x' - x''| \leqslant \delta$.

В обозначении $\omega(f, \delta)$ символ f можно опустить, если ясно, о модуле непрерывности какой функции идет речь.

Очевидны следующие свойства модуля непрерывности:

1^0. $\omega(\delta) \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$;

2^0. $\omega(\delta)$ убывает при убывании δ.

Поэтому, в частности, предел $\omega(+0)$ существует и $\omega(+0) \geqslant 0$.

Теорема 4.4.2. *Пусть $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности функции f. Тогда для любых положительных δ_1 и δ_2 справедлива оценка*

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2). \tag{4.4.1}$$

В частности, $\omega(n\delta) \leqslant n\,\omega(\delta)$ *для каждого натурального числа* n.

Доказательство. Пусть x' и x'' – произвольные точки промежутка, на котором рассматривается функция f, и $|x' - x''| \leqslant \delta_1 + \delta_2$. Возьмём между x' и x'' точку t, для которой $|x' - t| \leqslant \delta_1$ и $|t - x''| \leqslant \delta_2$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(t)| + |f(t) - f(x'')| \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

Так как здесь правая часть не зависит от точек x' и x'', выражение в левой части можно заменить на точную верхнюю грань его значений, взятую по всем рассматриваемым x' и x'', а это даёт оценку (4.4.1).

Неравенство $\omega(n\delta) \leqslant n\,\omega(\delta)$, $n \in \mathbb{N}$, легко устанавливается по индукции.

Теорема доказана.

Свойство, выраженное неравенством (4.4.1), называют *полуаддитивностью* функции $\omega(\delta)$.

Теорема 4.4.3. *Для модуля непрерывности* $\omega(\delta)$ *при любом положительном* λ *справедлива оценка*

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta). \tag{4.4.2}$$

Доказательство. Для натуральных λ согласно теореме 4.4.2 $\omega(\lambda\delta) \leqslant \lambda\,\omega(\delta)$.

Если $[\lambda]$ – наибольшее целое число, меньшее или равное λ, то $[\lambda] \leqslant \lambda < [\lambda] + 1$. Для произвольного $\lambda > 0$ в силу возрастания модуля непрерывности имеем

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant \omega(([\lambda] + 1)\,\delta) \leqslant ([\lambda] + 1)\,\omega(\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4.4. *Условие* $\omega(f, +0) = 0$ *необходимо и достаточно для равномерной непрерывности функции* f.

Доказательство. Если $\omega(f, +0) = 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\omega(f, \delta) < \varepsilon$. Значит, для любых точек x', x'', принадлежащих области определения функции f, из $|x' - x''| < \delta$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. А это означает равномерную непрерывность функции f и достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть функция f равномерно непрерывна. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек x', x'' из области определения f, для которых $|x' - x''| \leqslant \delta$, имеем

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2.$$

Так как правая часть в этом неравенстве не зависит от x' и x'', выражение в левой части можно заменить на его точную верхнюю грань по всем x' и x'', для которых $|x' - x''| \leqslant \delta$. Значит, $\omega(\delta) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, что приводит к равенству $\omega(f, +0) = 0$.

Теорема доказана.

§ 4.5. Непрерывность обратной функции

Пусть на множестве D задана функция f и E – образ D при отображении, осуществляемом функцией f, т. е. E – множество всех чисел $y = f(x)$, когда x пробегает множество D.

По значению $y \in E$ указать x не всегда можно, так как для $y \in E$ может быть, вообще говоря, много точек $x \in D$ таких, что $y = f(x)$.

Прежде, чем двигаться дальше, познакомимся с терминологией, относящейся к данному кругу вопросов. Будем говорить не о функциях, а о произвольных отображениях множеств.

Пусть X и Y – произвольные множества. Если задано отображение (функция) $f\colon X \to Y$, то говорят, что f является отображением множества X **“во”** множество Y. При этом не каждый элемент из Y обязательно является образом какого-либо элемента множества X. Если же Y представляет собой множество значений отображения f, то это отображение называют отображением X **“на”** множество Y.

Отображение “на” называют также *сюръективным.*

Если отображение $f\colon X \to Y$ является отображением на и каждый элемент множества Y является образом только одного элемента множества X, т. е. из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$, то говорят, что отображение f *обратимо* или *инъективно.*

Обратимость отображения означает, что это отображение взаимно однозначно. Мы уже говорили, что взаимно однозначные отображения называют *биективными* или *биекциями.*

Далее будем рассматривать числовые функции числового аргумента.

Если функция f осуществляет взаимно однозначное отображение множества D на E, то на E можно задать функцию, поставив в соответствие каждому $y \in E$ то единственное число $x \in D$, для которого $y = f(x)$. Такую функцию называют функцией, *обратной* f, и обозначают $x = f^{-1}(y)$.

С этим обозначением связано неудобство, поскольку так иногда записывают число $1/f(y)$, хотя в этом случае точнее было бы писать $f(y)^{-1}$.

Если функция f на D строго монотонна (т. е. строго возрастает или строго убывает), то отображение $f\colon D \to E$ обратимо. В этом случае обратная функция также строго монотонна, причём она является строго возрастающей, если функция f возрастала, и строго убывающей, если f убывала.

Теорема 4.5.1. *Пусть функция f на отрезке $[a, b]$ строго возрастает и непрерывна, $c := f(a)$ и $d := f(b)$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. О строгом возрастании обратной функции было уже сказано. В соответствии со следствием 4.3.4 множество значений непрерывной функции $f(x)$ целиком заполняет отрезок $[c, d]$. Остаётся доказать только непрерывность обратной функции на $[c, d]$.

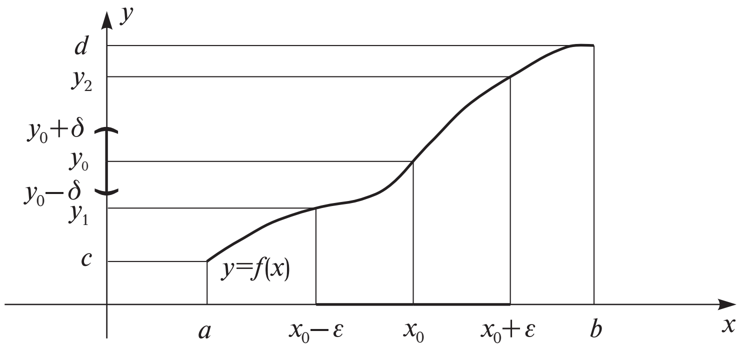
Зафиксируем точку $y_0 \in (c, d)$ и докажем непрерывность функции $f^{-1}(y)$ в этой точке. Пусть x_0 – та точка интервала (a, b), в которой $f(x_0) = y_0$. Возьмём произвольное положительное число ε такое, что ε-окрестность точки x_0 принадлежит интервалу (a, b). Тогда точки $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$ и $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$ попадают в интервал (c, d).

В силу строгого возрастания функция $f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие интервала $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ на оси OX и интервала (y_1, y_2) на оси OY.

Возьмём положительное число δ такое, что δ-окрестность точки y_0 принадлежит (y_1, y_2). Тогда вся δ-окрестность точки y_0 при отображении $x = f^{-1}(y)$ попадёт в ε-окрестность точки x_0. А это означает непрерывность функции f^{-1} в точке y_0.

При доказательстве односторонней непрерывности функции $f^{-1}(y)$ в концах отрезка c и d рассуждения аналогичны. Нужно только брать соответствующие односторонние окрестности.

Теорема доказана.



Приведём теорему о непрерывности обратной функции, когда исходная функция строго монотонна не на отрезке, а на интервале.

Теорема 4.5.2. *Пусть функция f строго возрастает и непрерывна на интервале (a, b). Обозначим $c := \inf_{x\in(a,b)} f(x)$ и $d := \sup_{x\in(a,b)} f(x)$. Тогда образом интервала (a, b) при отображении $y = f(x)$ является интервал (c, d) и функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на (c, d).*

Доказательство. Здесь интервал (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным. Если функция f не ограничена сверху на (a, b), то считаем $d = +\infty$. Аналогично $c = -\infty$, если f не является ограниченной снизу. Таким образом, интервал (c, d) также может быть бесконечным.

Если $d < +\infty$, то никакое число $y \geqslant d$ не может быть значением функции $f(x)$. Для $y > d$ это следует из определения точной верхней грани. А если бы d было значением функции f при некотором $x_0 \in (a, b)$, то для $x > x_0$ в силу строгого возрастания f имелись бы значения, превышающие d. Аналогичное утверждение справедливо и для левого конца интервала (c, d). Таким образом, при всех $x \in (a, b)$ имеем $f(x) \in (c, d)$.

Согласно следствию 4.3.4 каждое число $y_0 \in (c, d)$ является значением функции f в некоторой точке из (a, b).

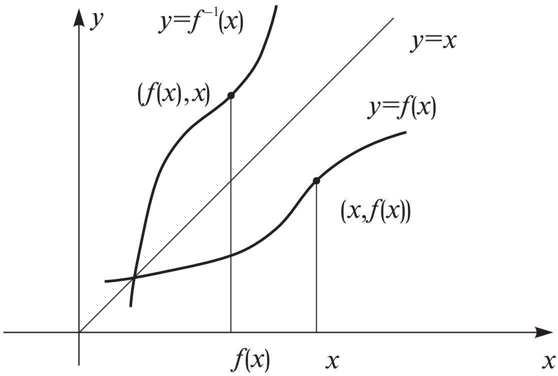
Таким образом, значения функции f целиком заполняют интервал (c, d).

Возьмём точки y_1 и y_2 такие, что $c < y_1 < y_0 < y_2 < d$ и рассмотрим след функции $f^{-1}(y)$ на отрезке $[y_1, y_2]$. Согласно теореме 4.5.1 функция $f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $[y_1, y_2]$. Следовательно, функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в каждой точке интервала (c, d).

Теорема доказана.

Ясно, как выглядят аналоги теорем 4.5.1 и 4.5.2 для строго убывающих функций.

Рассмотрим график обратной функции. Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна. Будем обозначать аргумент обратной функции f^{-1} через x, как обычно обозначают независимую переменную, а зависимую переменную обозначим y. Тогда график функции $y = f^{-1}(x)$ можно получить с помощью зеркального отражения графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$. В самом деле, точки графика функции $y = f(x)$ имеют координаты $(x, f(x))$, а координаты точек, полученных при их зеркальном отражении, равны $(f(x), x)$.



§ 4.6. Показательная функция

Степень a^x для рациональных значений показателя x определена в школьном курсе. Введём степень a^x для иррациональных x.

Будем далее считать, что основание степени – число a, удовлетворяет естественным требованиям $a > 0$ и $a \neq 1$.

Напомним определение степени a^x для рациональных показателей x.

По определению $a^1 := a$ и при натуральных $n \geqslant 2$

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n}.$$

Пусть теперь число x имеет вид $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим при фиксированном натуральном n функцию $u = v^n$, когда $v \in [0, +\infty)$. Эта функция строго возрастает и непрерывна, область её значений $[0, +\infty)$. Значит, согласно теоремам предыдущего параграфа обратная функция $v = \sqrt[n]{u} = u^{1/n}$ непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$.

В школьном курсе существование арифметического корня n-ой степени из положительного числа считалось само собой разумеющимся. Сейчас это доказано.

Так степень a^x определена для чисел x вида $1/n$. Если $x = p/q$, где p и q – натуральные числа, то по определению полагают

$$a^{p/q} := (a^p)^{1/q}.$$

Здесь можно было взять и $(a^{1/q})^p$, но равенство $(a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p$ нуждается в обосновании.

По определению, если $x = 0$, то $a^0 := 1$, а если $x = -p/q$, где p и q – натуральные числа, то $a^{-p/q} := 1/a^{p/q}$.

Таким образом, степень a^x определена при всех рациональных x. При этом имеют место следующие свойства (буквы r обозначают произвольные рациональные числа):

$$a^r > 0;$$
$$a^{r_1 + r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2};$$
$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2};$$
$$(ab)^r = a^r b^r, \quad a > 0, \ b > 0;$$

если $a > 1$, то на множестве рациональных чисел a^r строго возрастает, т. е. $a^{r_1} < a^{r_2}$, если $r_1 < r_2$, (в частности, $a^r > 1$ при $a > 1$ и $r > 0$) и $\lim_{r \to +\infty} a^r = +\infty$, $\lim_{r \to -\infty} a^r = 0$;

если $a < 1$, то a^r строго убывает на множестве рациональных чисел.

Мы не приводим обоснование этих свойств, так как оно аккуратно проведено в школьном курсе, где не было доказано только существование арифметического корня n-й степени из положительного числа.

Нам понадобится ещё следующее утверждение о степенях с рациональными показателями.

Лемма 4.6.1 (Неравенство Я. Бернулли). *Если* $a > 1$ *и* $h \in (0, 1]$ – *рациональное число, то*

$$0 < a^h - 1 \leqslant 2(a-1)h. \tag{4.6.1}$$

Доказательство. Так как $a > 1$, левое неравенство (4.6.1) очевидно. Докажем правое. Пусть сначала $h = 1/n$, где n – натуральное число. Тогда $a^{1/n} = 1 + \lambda$, где $\lambda \geqslant 0$ в силу строгого возрастания a^r на множестве рациональных чисел. Поэтому согласно неравенству Бернулли (2.6.1)

$$a = (1+\lambda)^n \geqslant 1 + \lambda n.$$

Поскольку $\lambda = a^{1/n} - 1$, отсюда следует, что

$$a^h - 1 = a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n} = (a-1)h. \tag{4.6.2}$$

Таким образом, при $h = 1/n$ получено неравенство (4.6.1) даже без множителя 2 в правой части.

Пусть теперь h – произвольное рациональное число из $(0, 1)$. Возьмём натуральное n такое, что $1/(n+1) < h \leqslant 1/n$. С помощью неравенства (4.6.2) находим

$$a^h - 1 \leqslant a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{a-1}{n+1} < \frac{n+1}{n}(a-1)h \leqslant 2(a-1)h.$$

Лемма доказана.

Будем по-прежнему считать $a > 1$. Для рациональных x в силу возрастания функции a^r, $r \in \mathbb{Q}$, имеем

$$a^x = \sup_{r \leqslant x,\, r \in \mathbb{Q}} a^r. \tag{4.6.3}$$

Примем формулу (4.6.3) в качестве определения a^x для иррациональных x при $a > 1$. Теперь степень a^x при $a > 1$ определена для всех действительных значений x.

Функция $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, называется *показательной*. Установим свойства показательной функции при $a > 1$, в частности, докажем её непрерывность.

1^0. $a^x > 0$. Это – простое следствие из (4.6.3).

2^0. Функция a^x строго возрастает, т. е. если $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Для доказательства берём рациональные числа α и β такие, что $x_1 < \alpha < \beta < x_2$. В силу возрастания функции a^x для рациональных показателей получаем

$$a^{x_1} \leqslant a^{\alpha} < a^{\beta} \leqslant a^{x_2}$$

и мы установили нужное неравенство.

3^0. $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$; $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.

Это вытекает из свойств степени с целым показателем и возрастания функции a^x.

4^0. Функция a^x непрерывна.

В качестве вспомогательного результата оценим разность $a^v - a^u$ при $u < v$. Возьмём рациональные числа α и β такие, что $\alpha < u < v < \beta$ и $\beta - \alpha < 2(v-u)$. Пользуясь возрастанием функции a^x и неравенством Бернулли (4.6.1), находим

$$\begin{aligned} 0 < a^v - a^u < a^{\beta} - a^{\alpha} = a^{\alpha}(a^{\beta-\alpha} - 1) \leqslant \\ \leqslant a^{\alpha} \cdot 2(a-1)(\beta-\alpha) < 4a^u(a-1)(v-u). \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

Теперь, чтобы доказать непрерывность a^x в точке x_0, полагаем для $\varepsilon > 0$

$$\delta := \frac{\varepsilon}{4a^{x_0}(a-1)}.$$

Тогда при $|x - x_0| < \delta$ согласно (4.6.4) имеем

$$\begin{aligned} |a^x - a^{x_0}| < 4a^{\min(x,x_0)}(a-1)|x-x_0| < \\ < 4a^{\min(x,x_0)}(a-1)\frac{\varepsilon}{4a^{x_0}(a-1)} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Это доказывает непрерывность функции a^x в точке x_0.

5^0. Основное свойство степени: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ для любых чисел x и y.

Выберем последовательности рациональных чисел $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, для которых $\alpha_n \to x$ и $\beta_n \to y$ при $n \to \infty$. Тогда $\alpha_n + \beta_n \to x + y$ и в силу основного свойства степени для рациональных показателей

$$a^{\alpha_n + \beta_n} = a^{\alpha_n} \cdot a^{\beta_n}.$$

Пользуясь непрерывностью показательной функции, переходим в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ и получаем нужное утверждение.

Прежде чем говорить о других свойствах показательной функции при $a > 1$, определим её при $a < 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и положим

$$a^x := \frac{1}{(1/a)^x}.$$

Тогда свойства $1^0 - 5^0$ показательной функции при $a > 1$ переносятся на случай $0 < a < 1$, но теперь функция a^x строго убывает.

Продолжим изучение свойств показательной функции a^x. Теперь основание степени a – любое положительное число.

6^0. Для произвольных чисел x и y справедливо равенство

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Для рациональных α и β равенство $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\,\beta}$ известно. Пусть последовательность рациональных чисел $\{\beta_n\}$ сходится к y. Перейдём в равенстве $(a^\alpha)^{\beta_n} = a^{\alpha\,\beta_n}$ к пределу при $n \to \infty$. Тогда получим

$$(a^\alpha)^y = a^{\alpha\,y}$$

для произвольного числа y и любого рационального α.

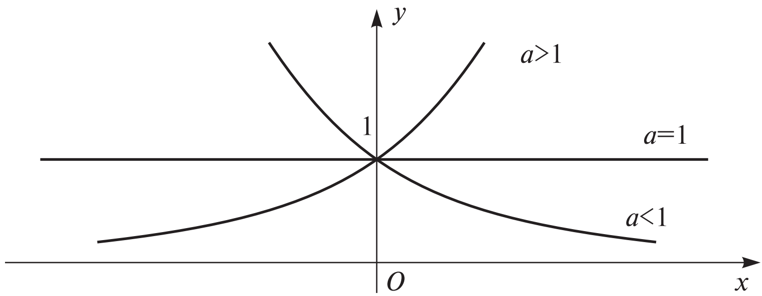
Возьмём теперь последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}$, сходящуюся к x. Тогда $(a^{\alpha_n})^y = a^{\alpha_n\,y}$. Пользуясь непрерывностью показательной функции и теоремой 4.1.1 о непрерывности сложной функции, переходим в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ и получаем свойство 6^0 в полном объеме.

7^0. $(ab)^x = a^x\,b^x$ для произвольных положительных a и b и любого x.

Для доказательства берём последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}$, сходящуюся к x, и переходим к пределу в равенстве $(ab)^{\alpha_n} = a^{\alpha_n}\,b^{\alpha_n}$.

Таким образом, степень a^x, $a > 0$, определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и показательная функция a^x обладает всеми свойствами, известными из школьного курса для рациональных x. Кроме того, показательная функция непрерывна на всей оси.

На рисунке изображены графики функции a^x при $a > 1$, $a < 1$, а также при $a = 1$.



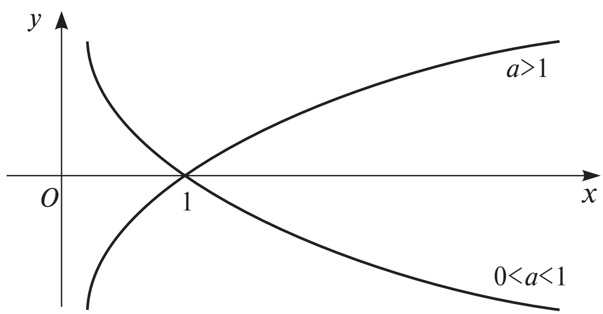
Показательную функцию, у которой в качестве основания взято число e, называют *экспоненциальной*. Вместо e^x пишут также $\exp x$. Это обозначение удобно, например, когда x является дробью.

§ 4.7. Элементарные функции

Логарифмическая функция. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, строго монотонна и непрерывна на всей оси, а область её значений – полуось $(0, +\infty)$. Поэтому на $(0, +\infty)$ существует обратная функция, которую называют *логарифмической функцией по основанию* a и обозначают $x = \log_a y$.

Далее независимую переменную будем, как обычно, обозначать x, а зависимую y, т. е. будем говорить о функции $y = \log_a x$.

Учитывая характер монотонности функции a^x, видим, что при $a > 1$ функция $\log_a x$ строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, а при $0 < a < 1$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$. График логарифмической функции имеет вид:



Поскольку показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, справедливы тождества

$$a^{\log_a x} = x, \quad x > 0; \qquad \log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Выведем с помощью этих тождеств свойства логарифмов.

1^0. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ для любых положительных чисел x и y.

В самом деле,

$$a^{\log_a(xy)} = x\,y = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Так как показательная функция принимает каждое свое значение только один раз, то в полученном равенстве можно приравнять показатели степени, что приводит к требуемому результату.

2^0. Из 1^0 для положительных x и y получаем

$$\log_a x = \log_a\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y.$$

Таким образом, для любых положительных чисел x и y

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

3^0. Если $x > 0$, то при каждом y справедливо равенство

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

В самом деле,

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}$$

и нужное равенство получим, приравняв показатели степени.

4^0. Если числа a и b положительны и не равны 1, то

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Действительно,

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$$

и опять приравниваем показатели.

Если в качестве основания логарифма взято число e, то логарифм называют *натуральным.* Поэтому число e называют основанием натуральных логарифмов. Натуральный логарифм числа x обозначают $\ln x$ или $\log x$.

Степенная функция. Функцию $y = x^a$, где $x > 0$ и a – произвольное число, называют *степенно́й функцией.*

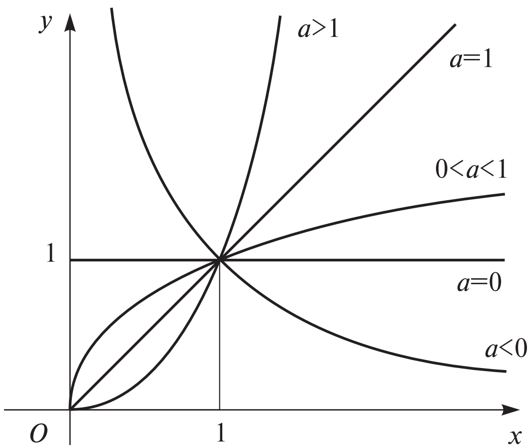
Степенную функцию можно представить как сложную функцию

$$x^a = \left(e^{\ln x}\right)^a = e^{a \ln x}. \tag{4.7.1}$$

Из (4.7.1) в силу теоремы о непрерывности сложной функции вытекает непрерывность степенной функции.

Для положительных a степенную функцию x^a доопределяют в нуле, положив $0^a := 0$. Тогда функция $y = x^a$ становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

На рисунке изображены графики степенной функции при различных значениях показателя a.



В случае, когда a – целое число, функцию x^a рассматривают при любых x. При этом по определению считают $x^0 \equiv 1$ при всех x, в том числе и при $x = 0$. Для целых значений показателя a функция x^a является чётной или нечётной в зависимости от чётности или нечётности a.

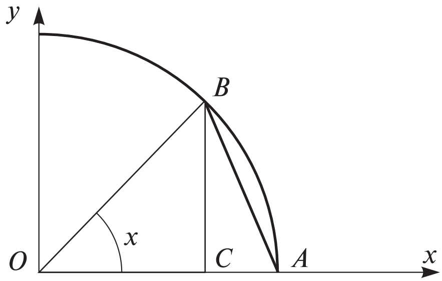
Если a – нечётное число, то для положительных a функция x^a обратима при всех x и для отрицательных a она обратима при всех $x \neq 0$.

Тригонометрические функции. Будем пользоваться определениями тригонометрических функций из школьного курса. Докажем их непрерывность.

Теорема 4.7.1. *При любом $x \neq 0$ справедливо неравенство*

$$|\sin x| < |x|. \tag{4.7.2}$$

Доказательство. Пусть сначала $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим окружность радиуса 1.



Рассмотрим угол $\angle AOB$, радианная мера которого равна x. Длина дуги $\smile AB$ равна x, а $\sin x = BC$. Но длина дуги $\smile AB$ больше, чем длина хорды AB, а длина отрезка AB как гипотенузы прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ больше длины катета BC. Этим неравенство (4.7.2) доказано для $0 < x < \pi/2$.

Так как функции в левой и правой частях неравенства (4.7.2) чётные, то (4.7.2) справедливо и при $-\pi/2 < x < 0$. А если $|x| \geqslant \pi/2$, то (4.7.2) следует из того, что $|\sin x| \leqslant 1$.

Теорема доказана.

Теорема 4.7.2. *Каждая из функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна в своей области определения.*

Доказательство. Начнём с функции $y = \sin x$. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\,\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Значит, в силу (4.7.2)

$$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|.$$

Поэтому $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что доказывает непрерывность синуса.

Непрерывность косинуса можно доказать аналогично, а можно воспользоваться равенством $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ и теоремой о непрерывности сложной функции.

Непрерывность тангенса и котангенса получаем, сославшись на теорему о непрерывности частного.

Функция $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Согласно теореме 4.5.2 значениями этой функции являются все действительные числа. Таким образом, функция $y = \operatorname{tg} x$ устанавливает взаимно однозначное соответствие интервалов $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(-\infty, +\infty)$.

В § 1.10 показано, что любой конечный интервал имеет мощность континуум. Теперь мы видим, что множество всех действительных чисел также имеет мощность континуум (об этом было сказано в § 1.10).

Гиперболические функции. Функции

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

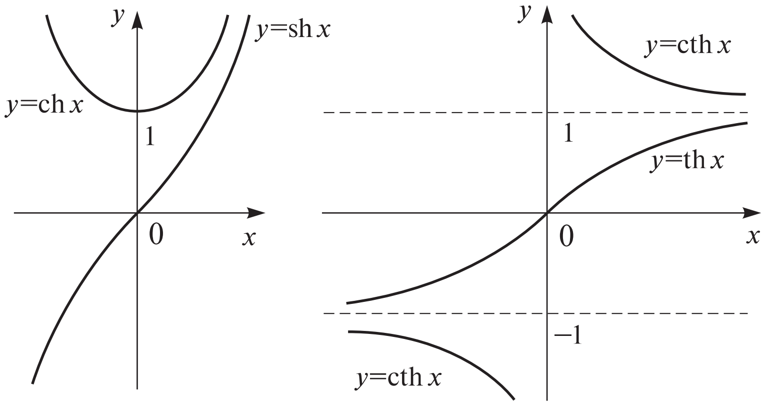
называют соответственно *гиперболическим синусом*, *гиперболическим косинусом*, *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом.*

Они определены при всех x, исключение составляет гиперболический котангенс, который не определен в точке $x = 0$. Все гиперболические функции непрерывны в своей области определения. Это вытекает из теоремы о непрерывности сложной функции.

Графики гиперболических функций изображены на рисунке.

Связь гиперболических функций с тригонометрическими, объясняющая, в частности, их названия, будет выяснена в дальнейшем.

Определение. Показательную, логарифмическую, степенную, основные и обратные тригонометрические функции, основные и обратные гиперболические функции и все функции, которые могут быть получены из перечисленных с помощью конечного числа арифметических действий и построения сложных функций, называют *элементарными функциями.*



В силу доказанных теорем каждая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

§ 4.8. Примеры вычисления пределов

Рассматриваемые здесь пределы играют важную роль при изучении элементарных функций. В учебной и научно-популярной литературе эти пределы нередко называют “замечательными пределами”.

Пример 1. Найдём предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

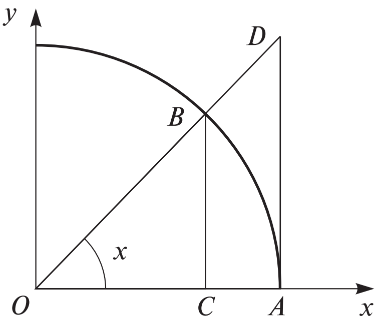
Здесь нельзя воспользоваться теоремой 3.3.1 о пределе частного, так как предел знаменателя равен нулю.

Поскольку речь идёт о пределе чётной функции, достаточно рассмотреть $x \in (0, \pi/2)$.

Будем опираться на геометрические соображения. Рассмотрим часть окружности радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в первом квадранте.

Пусть радианная мера угла AOB равна x. Из подобия прямоугольных треугольников AOD и COB находим

$$\frac{AD}{\sin x} = \frac{1}{\cos x},$$



т. е. $AD = \operatorname{tg} x$. Значит, площадь треугольника AOD равна

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Площадь кругового сектора AOB равна $x/2$, поэтому

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Отсюда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

Согласно (4.7.2) $\sin x < x$. Следовательно,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функция $\cos x$ непрерывна, то $\cos x \to 1$ при $x \to 0$. Поэтому согласно теореме 3.3.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4.8.1}$$

Пример 2. Покажем, что

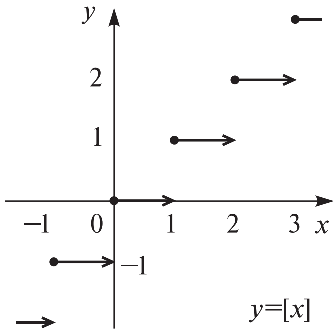
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{4.8.2}$$

В § 2.6 доказано, что для $x = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, такой предел при $n \to \infty$ существует. Он был взят в качестве определения числа e.

При доказательстве равенства (4.8.2) будет использована функция, которую называют *целой частью числа*. Обычно эту функцию обозначают $[x]$. По определению

$$[x] := \max_{n\leqslant x;\, n\in\mathbb{Z}} n.$$

Таким образом, $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x, т. е. $[x] \leqslant x < [x]+1$. График функции $[x]$ имеет вид



Если $x > 0$, то

$$(1+x)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{1/x} < \left(1+\frac{1}{[1/x]}\right)^{[1/x]+1} = \\ = \left(1+\frac{1}{[1/x]}\right)^{[1/x]} \cdot \left(1+\frac{1}{[1/x]}\right).$$

Предел полученного выражения при $x \to +0$ равен e. С другой стороны,

$$(1+x)^{1/x} > \left(1+\frac{1}{[1/x]+1}\right)^{[1/x]} = \\ = \left(1+\frac{1}{[1/x]+1}\right)^{[1/x]+1} \left(1+\frac{1}{[1/x]+1}\right)^{-1}.$$

Предел этого выражения при $x \to +0$ также равен e. Таким образом, в силу теоремы 3.3.4 равенство (4.8.2) доказано для $x \to +0$.

Пусть теперь $x < 0$. Будем считать, что $x \in (-1, 0)$. Имеем

$$(1+x)^{1/x} = (1-|x|)^{-1/|x|} = \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{1/|x|} = \left(1+\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{1/|x|} = \\ = \left(1+\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{\frac{1-|x|}{|x|}} \left(1+\frac{|x|}{1-|x|}\right).$$

Но если $x \to 0$, то дробь

$$\frac{|x|}{1-|x|} \to 0.$$

При $x \in (-1, 0)$ эта дробь положительна, поэтому в силу доказанного уже для $x > 0$ равенства (4.8.2) получаем его и при $x < 0$.

Пример 3. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Найдём предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Пользуясь непрерывностью логарифмической функции и равенством (4.8.2), имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{1/x} =$$
$$= \log_a\bigl(\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\bigr) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \tag{4.8.3}$$

в частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{4.8.4}$$

Пример 4. Вычислим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x},$$

считая $a > 0$ и $a \neq 1$.

Положим $t := a^x - 1$. Тогда $a^x = 1 + t$ и $x = \log_a(1+t)$. Значит,

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{t}{\log_a(1+t)}.$$

При $x \to 0$ в силу непрерывности показательной функции имеем $t \to 0$. Поэтому с помощью (4.8.3) находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a. \tag{4.8.5}$$

В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{4.8.6}$$

Глава 5. Производные и дифференциалы

§ 5.1. Производная

Эта глава посвящена вопросам, связанным со скоростью изменения функций.

Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 приращение Δx такое, что точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит этой окрестности, и рассмотрим приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\Delta y = \Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента и поставим вопрос о существовании предела этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Определение. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную, если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{5.1.1}$$

Значение этого предела обозначают $f'(x_0)$ и называют *производной функции f в точке x_0*.

Обозначение $f'(x)$ для производной функции f в точке x ввёл Ж. Лагранж. Употребляется также обозначение $Df(x)$, которым пользовался О. Коши.

Теорема 5.1.1. *Если функция f имеет производную в некоторой точке, то f непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Из существования предела (5.1.1) следует, что в достаточно малой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \tag{5.1.2}$$

где $\varepsilon(\Delta x)$ – функция аргумента Δx такая, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0. \tag{5.1.3}$$

Согласно (5.1.2)

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ выражение в правой части этого равенства стремится к нулю, т. е. $\Delta y \to 0$, а это и означает непрерывность функции f в точке x_0.

Теорема доказана.

Таким образом, для существования производной в точке необходима непрерывность функции в этой точке. Но это условие не является достаточным.

В самом деле, для приращения функции $y := |x|$ в нуле имеем $\Delta y = |\Delta x|$. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Значит, функция $|x|$ не имеет производной в нуле, хотя эта функция и непрерывна всюду.

Заметим, что односторонние пределы отношения приращения функции к приращению аргумента (5.1.4) при $\Delta x \to 0$ существуют. В таких случаях говорят об односторонних производных.

Определение. Если функция f определена в некоторой правой окрестности точки x_0 и существует односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{5.1.5}$$

то этот предел называют *правой односторонней производной функции f в точке x_0* и обозначают $f'_+(x_0)$.

Если функция f определена в некоторой левой окрестности точки x_0 и существует односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{5.1.6}$$

то этот предел называют *левой односторонней производной функции f в точке x_0* и обозначают $f'_-(x_0)$.

Слово “односторонней” при этом часто опускают и говорят о правой производной или производной справа, соответственно, о левой производной или производной слева.

Таким образом, для функции $f(x) = |x|$ имеем $f'_+(0) = 1$ и $f'_-(0) = -1$.

Приведём пример функции, непрерывной всюду, но не имеющей в некоторой точке даже односторонних производных.

Пусть

$$f_0(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Так как $|f_0(x)| \leqslant |x|$, то функция f_0 непрерывна в нуле, а её непрерывность в остальных точках очевидна. Для приращения f_0 в нуле имеем

$$\Delta f_0 = \Delta x \, \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta f_0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Следовательно, f_0 не имеет в нуле и односторонних производных.

Выведем правила вычисления производных.

Пусть функции u и v имеют производные в точке x, поставим вопрос о существовании производных функций, полученных в результате арифметических действий над функциями u и v.

Теорема 5.1.2. *Пусть функции u и v имеют производные в точке x. Тогда существуют следующие производные и для них справедливы равенства*:

1^0. $\big(u(x) + v(x)\big)' = u'(x) + v'(x)$.

2^0. $\big(u(x) - v(x)\big)' = u'(x) - v'(x)$.

3^0. $\big(u(x)\, v(x)\big)' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$.

4^0. *Если $v(x) \neq 0$, то*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. 1^0. Имеем

$$\Delta(u + v) = \big(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big) = \Delta u + \Delta v.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Дроби в правой части этого равенства при $\Delta x \to 0$ имеют пределы, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Доказательство свойства 2^0 аналогично.

3^0. Имеем

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x).$$

Так как $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, то $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$. Поэтому

$$\Delta(u\,v) = \big(u(x) + \Delta u\big)\big(v(x) + \Delta v\big) - u(x)\,v(x) = \\ = \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Значит,

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции v имеем $\Delta v \to 0$. Поэтому каждое слагаемое в правой части полученного равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u\,v)}{\Delta x} = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

4^0. Сначала рассмотрим случай, когда $u(x) \equiv 1$, т. е. найдём производную дроби $1/v(x)$.

Так как функция v в точке x непрерывна и $v(x) \neq 0$, то v не обращается в нуль в некоторой окрестности точки x. Поэтому при достаточно малых приращениях Δx имеем

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = \frac{v(x) - v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\,v(x)} = \frac{-\Delta v}{v(x+\Delta x)\,v(x)}.$$

Отсюда

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) : \Delta x = -\frac{1}{v(x+\Delta x)\,v(x)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Выражение в правой части этого равенства имеет предел при $\Delta x \to 0$. Значит, существует предел выражения в левой части и, таким образом,

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теперь с помощью формулы производной произведения находим производную частного в общем случае:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)} - u(x)\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \\ = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что представление дроби

$$\frac{u(x)}{v(x)}$$

в виде произведения

$$u(x)\cdot\frac{1}{v(x)},$$

нередко используется, когда нужно найти производную дроби.

Применим теорему 5.1.2 для вычисления производных элементарных функций.

1). Если функция f равна константе, т. е. при всех x принимает одно и то же значение C, то $\Delta f = 0$ и, таким образом, $C' = 0$.

Для произвольной функции u, имеющей в точке x производную, с помощью формулы производной произведения получаем

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

Конечно, это равенство легко доказать и непосредственно, рассмотрев приращения функции $Cu(x)$.

2). Найдём производную степенной функции с целым показателем, т. е. функции $y = x^n$, когда n – целое число. Покажем, что

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{5.1.7}$$

где x – любое при $n \geqslant 1$ и x – любое неравное нулю число, если $n < 0$.

Сначала докажем равенство (5.1.7) для натуральных n, проведя индукцию по n.

При $n = 1$ имеем $\Delta y = \Delta x$ и, значит, $x' = 1$.

Будем теперь считать равенство (5.1.7) доказанным для показателя n и установим его для показателя $n + 1$.

По формуле производной произведения

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Таким образом, равенство (5.1.7) справедливо при всех натуральных n.

Пусть теперь n – целое отрицательное число. Тогда $-n > 0$ и, используя формулу производной частного, получаем для $x \neq 0$

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{-nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1},$$

т. е. равенство (5.1.7) доказано для целых отрицательных показателей.

Так как по определению степенной функции с нулевым показателем $x^0 \equiv 1$, то $(x^0)' = 0$. Поэтому формула (5.1.7) имеет место и при $n = 0$, если считать, что в этом случае правая часть (5.1.7) равна нулю при всех x.

В дальнейшем будет показано, что при $x > 0$ формула (5.1.7) справедлива для произвольных показателей n.

3). Найдём производную показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Так как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \, \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

то согласно (4.8.5) имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Таким образом, при всех x

$$(a^x)' = a^x \, \ln a. \tag{5.1.8}$$

В частности, если $a = e$, то

$$(e^x)' = e^x. \tag{5.1.9}$$

Заметим, что при любой константе C справедливо равенство $(Ce^x)' = Ce^x$, т.е. $y' = y$, если $y = Ce^x$. В курсе дифференциальных уравнений будет показано, что равенство $y' = y$ имеет место только для функций вида $y = Ce^x$.

4). Найдём производную логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Так как

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(\Delta x)/x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Согласно (4.8.3) отсюда находим

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}. \tag{5.1.10}$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{5.1.11}$$

Равенства (5.1.10) и (5.1.11) имеют место при всех $x > 0$.

5). Производные тригонометрических функций.

Для $y = \sin x$ имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

В силу равенства (4.8.1) и непрерывности функции $\cos x$ получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{5.1.12}$$

Аналогично вычисляется производная функции $y = \cos x$:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

значит,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\Delta x}\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x.$$

Следовательно,

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5.1.13}$$

Равенства (5.1.12) и (5.1.13) имеют место при всех x.

Производные тангенса и котангенса находим, применяя формулу производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{5.1.14}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{5.1.15}$$

Равенства (5.1.14) и (5.1.15) справедливы при всех x из области определения тангенса и, соответственно, котангенса.

Для вычисления производных других элементарных функций нужны свойства производных, которые будут установлены позднее.

В определении производной предел (5.1.1) считают конечным. Иногда рассматривают также случаи, когда этот предел равен $+\infty$ или $-\infty$. Тогда говорят о соответствующей бесконечной производной.

Как и для пределов функций, будем считать, что производная конечна, если не сказано, что она может быть бесконечной.

§ 5.2. Дифференциал функции

Определение. Пусть функция $y = f$ определена в окрестности точки x. Если приращение f в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = A\,\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{5.2.1}$$

где A – некоторое число, функцию f называют *дифференцируемой в точке x*.

Иногда приращение Δy нужно рассматривать и при $\Delta x = 0$. Тогда считают, что при $\Delta x = 0$ слагаемое $o(\Delta x)$ в формуле (5.2.1) равно нулю.

Теорема 5.2.1. *Функция $y = f$ дифференцируема в точке x_0 в том и только том случае, когда f имеет в этой точке производную. Если f дифференцируема, то*

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{5.2.2}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 5.1.1 мы видели, что из существования производной функции f в точке x_0 следует оценка (5.1.2), которую согласно (5.1.3) можно записать в виде (5.2.2). Отсюда следует достаточность в теореме 5.2.1.

Чтобы доказать необходимость, разделим обе части (5.2.1) на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1), \quad \Delta x \to 0.$$

Эта оценка показывает, что функция f имеет в точке x производную, равную A, т. е. из (5.2.1) следует (5.2.2).

Теорема доказана.

Таким образом, равносильны утверждения, что функция имеет в точке производную и что функция дифференцируема в этой точке. Вычисление производной называют дифференцированием функции.

Определение. Функцию, производная которой непрерывна в точке или на промежутке, называют *непрерывно дифференцируемой*, соответственно, в точке или на промежутке.

Говорят также о кусочно непрерывно дифференцируемых функциях.

Если для приращения функции f справедливо представление (5.2.1), то слагаемое $A\,\Delta x$ называют *линейной частью* приращения f.

Определение. Если функция f дифференцируема в точке x, то линейную часть приращения f называют *дифференциалом функции* f в этой точке и обозначают df или $df(x)$.

Таким образом, $df(x) := f'(x)\Delta x$.

В общем случае $dy \neq \Delta y$, так как в (5.2.2) приращение Δy имеет ещё слагаемое $o(\Delta x)$.

Наряду с дифференциалом функции вводят дифференциал независимой переменной, полагая его по определению равным приращению. Тогда вместо Δx пишут dx.

Используя дифференциал независимой переменной дифференциал функции dy можно записать так:

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{5.2.3}$$

Отсюда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{5.2.4}$$

Следовательно, производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Выражение dy/dx рассматривают также как другое обозначение производной.

Для дифференциалов справедливы следующие формулы:

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \tag{5.2.5}$$

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du \tag{5.2.6}$$

и, если $v(x) \neq 0$, то

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{5.2.7}$$

В каждом из этих равенств предполагается, что функции u и v дифференцируемы в некоторой точке, утверждается существование в этой точке дифференциалов функций, полученных с помощью арифметических действий над u и v, и даются выражения этих дифференциалов.

Равенства (5.2.5)–(5.2.7) доказываются однотипно. Например, (5.2.6) получаем с помощью (5.2.3) и теоремы 5.1.2:

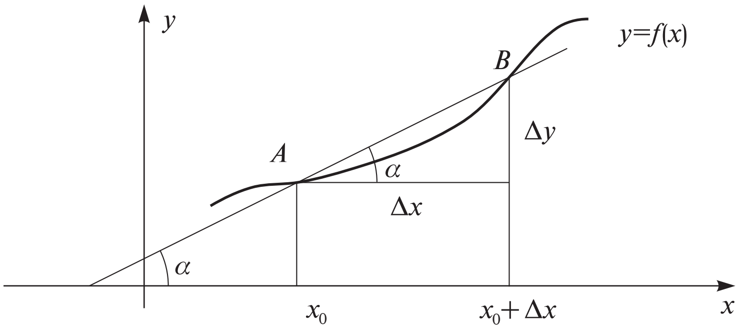
$$d(u\,v) = (u\,v)'dx = u'\,vdx + u\,v'dx = v\,du + u\,dv.$$

Выясним свойства графика функции, соответствующие существование производной.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Будем придавать аргументу f в точке x_0 малые приращения Δx, чтобы точки $x_0 + \Delta x$ не выходили из области определения функции.

Отметим на графике функции f точки $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ и проведём через эти точки прямую AB.

Эту прямую называют *секущей.* Пусть α – угол, который прямая AB образует с осью абсцисс OX. Угол α считаем положительным, если прямая AB правее точки пересечения с осью OX лежит выше оси, в противном случае α считаем отрицательным. Если прямая AB параллельна оси OX, полагаем $\alpha = 0$.



Так как $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{5.2.8}$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 точка B при $\Delta x \to 0$ приближается к точке A. При этом значение угла α зависит от Δx.

Равенство (5.2.8) показывает, что существование производной $f'(x_0)$ равносильно существованию предела $\operatorname{tg}\alpha$ при $\Delta x \to 0$. Так как на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ тангенс является непрерывной строго монотонной функцией, существование предела $\operatorname{tg}\alpha$ равносильно существованию предельного значения угла α, обозначим его α_0. Значит, при $\Delta x \to 0$ секущая AB занимает предельное положение, соответствующее углу наклона α_0. Прямую, являющуюся предельным положением секущей, называют *касательной* к графику функции $f(x)$ в точке x_0. При этом

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$$

и касательная не параллельна оси OY, её называют наклонной.

Таким образом, справедливое следующее утверждение.

Теорема 5.2.2. *Для существования наклонной касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ необходимо и достаточно существование производной $f'(x_0)$. При этом тангенс угла наклона касательной равен значению производной.*

В этой теореме можно иметь в виду и односторонние производные.

Уравнение касательной, обозначим её L, к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Расстояние точки $M(x, f(x))$, принадлежащей графику функции f, до касательной L равно

$$\rho(M, L) = \frac{\bigl|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\bigr|}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}}.$$

В силу существования производной $f'(x_0)$ имеем

$$\rho(M, L) = o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Пусть теперь L_1 – произвольная невертикальная прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, и

$$y = f(x_0) + k(x - x_0)$$

– её уравнение.

Покажем, что если для точек M графика функции $y = f(x)$ справедлива оценка

$$\rho(M, L_1) = o(x - x_0), \quad x \to x_0, \tag{5.2.9}$$

то L_1 является касательной. В самом деле,

$$\rho(M, L_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}\bigl|f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)\bigr|$$

и из (5.2.9) следует, что

$$f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Значит,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + o(1), \quad x \to x_0.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) = k$.

Таким образом, наклонную касательную можно определить как прямую L_1, для которой справедлива оценка (5.2.9).

Отметим, что существование у функции f в точке x_0 бесконечной производной равносильно существованию в точке $(x_0, f(x_0))$ вертикальной касательной к графику функции f.

Физический смысл производной: производная – это скорость изменения зависимой переменной y как функции независимой переменной x.

Отношение приращения функции $f(x+\Delta x)-f(x)$ к приращению аргумента Δx равно средней скорости за промежуток времени от x до $x+\Delta x$. В физике производную называют мгновенной скоростью.

Если y – путь, пройденный точкой при движении по прямой, а x – время, то производная – это скорость движения точки. Если y – количество электричества, проходящего по проводнику, как функция времени x, то производная – это сила тока.

Вообще, если функция описывает некоторый процесс, то производная характеризует скорость протекания этого процесса в данный момент.

Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной при заданном Δx. Таким образом, дифференциал – это линейная функция, графиком которой является касательная. Дифференциал показывает, как менялась бы функция (в приведенных выше примерах это путь или количество электричества), если бы в течение всего времени изменение функции проходило с той же скоростью, что и в данный момент.

Применение дифференциалов основано на том, что “в малом”, т. е. при достаточно малых Δx, приращение дифференцируемой функции незначительно отличается от дифференциала и, таким образом, при малых Δx дифференциал дает хорошее приближение для приращения функции.

§ 5.3. Производная обратной функции

Если функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) непрерывна и строго монотонна и (A, B) – образ интервала (a, b) при отображении, осуществляемом функцией f, то согласно теореме 4.5.2 на (A, B) существует функция $x = \varphi(y)$, которая является обратной f. Эта функция также непрерывна и строго монотонна.

Рассмотрим, как связаны дифференцируемость функции f в точке $x_0 \in (a, b)$ и дифференцируемость обратной функции φ в точке $y_0 = f(x_0)$.

Непрерывность функции f в точке x_0 означает, что из $\Delta x \to 0$ следует, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$. А непрерывность функции φ означает, что из $\Delta y \to 0$ следует $\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) \to 0$.

Таким образом, условия $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ равносильны.

Предположим, что производная $f'(x_0)$ существует и выясним, существует ли производная $\varphi'(y_0)$, т. е. существует ли предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}\,?$$

Так как функция φ строго монотонна, то из $\Delta y \neq 0$ следует $\Delta x \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right). \tag{5.3.1}$$

Если $f'(x_0) \neq 0$, то пользуясь равносильностью условий $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$, из (5.3.1) находим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 1 : \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3.1. *Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 непрерывна и строго монотонна и имеет неравную нулю производную $f'(x_0)$, то обратная функция $\varphi(y)$ имеет в точке $y_0 := f(x_0)$ производную и справедливо равенство*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5.3.2}$$

Если $f'(x_0) = 0$, формула (5.3.2) не имеет смысла. Выясним, что можно сказать о производной обратной функции в этом случае.

Если функция f строго возрастает, то приращения Δy и Δx имеют одинаковые знаки. Поэтому их отношение положительно и, переходя в (5.3.1) к пределу при $\Delta y \to 0$ (или, что то же самое, при $\Delta x \to 0$), видим, что

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = +\infty.$$

А если f строго убывает, то отношение приращений Δy и Δx отрицательно. Значит, в этом случае

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\infty.$$

Таким образом, можно считать, что формула (5.3.2) справедлива и при $f'(x_0) = 0$, если договориться, что в этом случае она означает существование бесконечной производной $\varphi'(y_0)$, равной $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция f.

В соответствии с этим соглашением считают, что если существует одна из производных $f'(x_0)$ или $\varphi'(y_0)$, конечная или бесконечная, то существует и другая производная и их значения связаны соотношением (5.3.2).

Формулу (5.3.2) можно записать и как отношение дифференциалов:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Используем формулу производной обратной функции для вычисления производных элементарных функций.

Сначала заметим, что так как показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, то зная производную одной их этих функций, можно получить производную другой функции.

Выведем, например, из равенства $(a^x)' = a^x \ln a$ производную логарифмической функции. Если $y = \log_a x$, то $x = a^y$. Поэтому согласно (5.3.2) имеем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

и мы заново получили (5.1.9).

Найдём теперь производные обратных тригонометрических функций.

1^0. Пусть $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$. Тогда $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Значит,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{5.3.3}$$

2^0. Аналогично находим производную функции $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$. Имеем $x = \cos y$, $y \in [0, \pi]$, и

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5.3.4}$$

Равенства (5.3.3) и (5.3.4) справедливы при всех $x \in [-1, 1]$. Они показывают, что при $x = \pm 1$ существуют бесконечные односторонние производные.

Заметим, что равенство (5.3.4) можно получить из (5.3.3), если воспользоваться тождеством

$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

3^0. Если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$ и согласно (5.3.2)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{5.3.5}$$

4^0. Аналогично для $y = \operatorname{arcctg} x$ находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{5.3.6}$$

Равенства (5.3.5) и (5.3.6) имеют место при всех x. Здесь также можно было использовать тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \equiv \frac{\pi}{2}.$$

§ 5.4. Производная сложной функции

Теорема 5.4.1. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, $f(x_0) = y_0$ и функция $z = \varphi(y)$ имеет производную в точке y_0. Тогда сложная функция $z = \psi(x) := \varphi(f(x))$ имеет производную в точке x_0 и справедливо равенство*

$$\psi'(x_0) = \varphi'(y_0)\, f'(x_0). \tag{5.4.1}$$

Доказательство. Согласно теореме 4.1.1 из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 и функции $\varphi(y)$ в точке y_0 следует существование сложной функции $\psi(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Для приращений функций f и φ в силу их дифференцируемости в точках x_0 и y_0, соответственно, справедливы равенства

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \tag{5.4.2}$$

и

$$\Delta z = \varphi'(y_0)\Delta y + \Delta y \cdot \varepsilon_1(\Delta y), \tag{5.4.3}$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\varepsilon_1(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$.

Чтобы выразить приращение Δz через Δx, подставим в первое слагаемое из правой части формулы (5.4.3) вместо Δy его представление (5.4.2). Если значение Δy по формуле (5.4.2) равно нулю, то как было сказано в § 5.2, считаем $\varepsilon_1(0) = 0$.

После подстановки получим

$$\begin{aligned} \Delta z &= \varphi'(y_0)\left(f'(x_0)\Delta x + \Delta x\, \varepsilon(\Delta x)\right) + \Delta y\, \varepsilon_1(\Delta y) = \\ &= \varphi'(y_0)\, f'(x_0)\, \Delta x + \varphi'\,(y_0)\, \Delta x\, \varepsilon(\Delta x) + \Delta y\, \varepsilon_1(\Delta y). \end{aligned}$$

Разделим обе части этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'(y_0)\, f'(x_0) + \varphi'(y_0)\, \varepsilon(\Delta x) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\, \varepsilon_1(\Delta y). \tag{5.4.4}$$

При $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta y \to 0$, значит, $\varepsilon_1(\Delta y) \to 0$ и предел выражения в правой части (5.4.4) существует и равен $\varphi'(y_0) f'(x_0)$. Таким образом,

$$\psi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \varphi'(y_0)\, f'(x_0).$$

Теорема доказана.

Понятно, что теорема 4.5.1 справедлива и для односторонних производных.

Представив производные как отношения дифференциалов, формулу (5.4.1) можно записать следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Для производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 используется также запись $y'_x(x_0)$. В этих обозначениях формула производной сложной функции имеет вид

$$z'_x(x_0) = z'_y(y_0) \cdot y'_x(x_0). \tag{5.4.5}$$

Применим формулу производной сложной функции для вычисления производных элементарных функций.

1^0. Найдём производную степенной функции $y = x^a$, $x > 0$, когда показатель a – произвольное число. В § 5.1 производная степенной функции была найдена в случае, когда a – целое число. Тогда при $a \geqslant 0$ аргумент x мог быть любым, а при $a < 0$ – любым не равным нулю числом.

При произвольном a имеем

$$y = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

Положим $u = a \ln x$. Тогда $y = e^u$ и согласно (5.4.5)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \, \frac{a}{x} = e^{a \ln x} \, \frac{a}{x} = x^a \, \frac{a}{x} = a x^{a-1}. \tag{5.4.6}$$

При $x > 0$ это равенство имеет место для произвольных a. Если $a > 0$, оно справедливо и при $x = 0$ для правой производной. Заметим, что при $0 < a < 1$ правая производная функции $y = x^a$ в нуле равна $+\infty$.

Приведенное доказательство формулы (5.4.6) не позволяет найти производную $(x^a)'$ для целых a при отрицательных x.

2^0. Найдём производную функции $y = \log_a |x|$, $x \neq 0$.

Чтобы воспользоваться формулой производной сложной функции, положим $u = |x|$. Тогда $y = \log_a u$.

Введём функцию

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

называемую сигнум x (по латыни *signum* – знак).

Пользуясь этим обозначением, можем написать $u = |x| = x \cdot \operatorname{sign} x$. Поэтому, если $x \neq 0$, то $|x|' = \operatorname{sign} x$. Значит, при $x \neq 0$ согласно (5.4.5) имеем

$$y'_x = y'_u \, u'_x = \frac{1}{u \ln a} \, \operatorname{sign} x = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Следовательно,

$$\bigl(\log_a |x|\bigr)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0, \tag{5.4.7}$$

в частности,

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \tag{5.4.8}$$

Разумеется, производную $(\log_a|x|)'$ можно было найти, не используя формулу производной сложной функции.

3^0. Покажем, как можно получить производную косинуса, зная производную синуса. Так как

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

4^0. Вычислим производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x; \tag{5.4.9}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \tag{5.4.10}$$

Поэтому

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$

$$= \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{e^x e^{-x}}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \tag{5.4.11}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{5.4.12}$$

Таким образом, теперь найдены производные всех основных элементарных функций.

В некоторых случаях проще вычислить производную логарифма функции, чем производную самой функции. Производную $\big(\ln f(x)\big)'$ называют *логарифмической производной* функции $f(x)$.

Пусть, например,

$$f(x) = \big(u(x)\big)^{v(x)},$$

где $u(x) > 0$. Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то

$$\Bigl(\ln\bigl(u(x)\bigr)^{v(x)}\Bigr)' = \bigl(v(x)\ln u(x)\bigr)' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Вместе с тем,

$$\bigl(\ln u(x)^{v(x)}\bigr)' = \bigl(u(x)^{v(x)}\bigr)' : \bigl(u(x)^{v(x)}\bigr),$$

значит,

$$\bigl(u(x)^{v(x)}\bigr)' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

§ 5.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Если производная $f'(x)$ существует во всех точках из некоторой окрестности точки x_0, можно ставить вопрос о существовании в точке x_0 производной функции $f'(x)$.

Если функция $f'(x)$ имеет производную в точке x_0, эту производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Производная третьего порядка $f'''(x)$ вводится как первая производная производной второго порядка $f''(x)$ и т. д.

Определение. *Производной порядка* n, $n = 2, 3, \ldots,$ функции $f(x)$ называется первая производная производной порядка $n-1$. Значение производной порядка n в точке x_0 обозначают $f^{(n)}(x_0)$.

Таким образом, по определению

$$f^{(n)}(x) := \bigl(f^{(n-1)}(x)\bigr)'.$$

Функция может иметь производную первого порядка, но не иметь производной второго порядка. Например, если $y = x|x|$, то $y' = 2|x|$. Значит, функция $x|x|$ не имеет производной второго порядка в нуле.

Можно указать функции, имеющие в точке производную порядка $n > 1$, у которых в этой точке нет производной порядка $n+1$.

Основные элементарные функции имеют производные любого порядка в своей естественной области определения. Например,

$$(a^x)^{(n)} = a^x\,(\ln a)^n;$$
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$
$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}.$$

О производных степенной функции отметим, что если положительное число a не целое, то функция x^a имеет в нуле производные справа до порядка $[a]$ включительно, но не имеет конечной производной порядка $[a]+1$.

Если в некоторой точке или в каждой точке некоторого промежутка функция имеет производную второго порядка, функцию называют *дважды дифференцируемой* соответственно в точке или на промежутке. Если при этом производная второго порядка непрерывна, то говорят, что функция *дважды непрерывно дифференцируема.*

Аналогично определяются трижды дифференцируемые, трижды непрерывно дифференцируемые функции и т. д.

Функции, имеющие производные любого порядка, называют *бесконечно дифференцируемыми* соответственно в точке или на промежутке. Заметим, что бесконечно дифференцируемая в точке функция является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности этой точки.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке производные порядка n, то сумма и разность этих функций имеют в указанной точке производные порядка n и справедливы равенства

$$\big(u(x) \pm v(x)\big)^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x).$$

Рассуждения по индукции показывают, что в этом случае существует производная порядка n произведения $u(x)\,v(x)$.

Выразим производные высших порядков произведения функций через производные самих этих функций.

Здесь будут нужны числа

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad 0! := 1, \tag{5.5.1}$$

которые называют *биномиальными коэффициентами*, так как эти числа участвуют в формуле бинома Ньютона, о чём будет сказано позднее. Для биномиальных коэффициентов наряду с C_n^k используется обозначение

$$\binom{n}{k}.$$

Число C_n^k называют числом сочетаний из n по k, так как оно показывает, сколько различных подмножеств из k элементов имеет множество из n элементов. Но это комбинаторное свойство биномиальных коэффициентов не будет сейчас нужно.

Теорема 5.5.1 (Формула Лейбница). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x_0 производные порядка n, $n = 1, 2, \dots$, то в этой точке существует производная порядка n произведения $u(x)\, v(x)$ и справедливо равенство*

$$\big(u(x_0)\, v(x_0)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)}(x_0)\, v^{(n-k)}(x_0), \tag{5.5.2}$$

где производная нулевого порядка функции обозначает саму эту функцию.

Доказательство. Для краткости не будем писать аргументы у производных.

Докажем формулу Лейбница по индукции. При $n = 1$ формула (5.5.2) имеет вид

$$(u\, v)' = \sum_{k=0}^{1} C_1^k\, u^{(k)}\, v^{(1-k)} = u\, v' + u'\, v,$$

т. е. это – выражение первой производной произведения двух функций.

Теперь, пользуясь равенством (5.5.2) для $n = m$, $m = 1, 2, \dots$, докажем его при $n = m + 1$.

Имеем

$$
\begin{aligned}
(u\,v)^{(m+1)} &= \big((u\,v)^{(m)}\big)' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)}\,v^{(m-k)}\right)' = \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \big(u^{(k)}\,v^{(m-k)}\big)' = \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \big(u^{(k+1)} v^{(m-k)} + u^{(k)}\,v^{(m-k+1)}\big) = \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} C_m^{i-1} u^{(i)}\,v^{(m-(i-1))} + \sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(i)}\,v^{(m+1-i)} = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(C_m^{i-1} + C_m^i\big) u^{(i)}\,v^{(m+1-i)} + \\
&\qquad + C_m^m u^{(m+1)}\,v^{(0)} + C_m^0 u^{(0)}\,v^{(m+1)}.
\end{aligned}
$$

Для $i = 1, \ldots, m$ согласно определению биномиальных коэффициентов

$$
\begin{aligned}
C_m^{i-1} + C_m^i &= \frac{m!}{(i-1)!\,(m-(i-1))!} + \frac{m!}{i!\,(m-i)!} = \\
&= \frac{m!}{i!\,(m-i+1)!}(i + m - i + 1) = \\
&= \frac{(m+1)!}{i!(m-i+1)!} = C_{m+1}^i.
\end{aligned}
$$

Имеем также

$$
C_m^m = 1 = C_{m+1}^{m+1}, \qquad C_m^0 = 1 = C_{m+1}^0.
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
(u\,v)^{(m+1)} &= C_{m+1}^0 u^{(0)}\,v^{(m+1)} + \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{m} C_{m+1}^i u^{(i)}\,v^{(m+1-i)} + C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)}\,v^{(0)} = \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i u^{(i)}\,v^{(m+1-i)}
\end{aligned}
$$

и мы получили формулу (5.5.2) для $n = m + 1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков.

Если x – независимая переменная и функция $y = f(x)$ дифференцируема, то $dy = f'(x)\,dx$. Таким образом, дифференциал dy зависит от x и от dx.

Поставим вопрос, является ли дифференциал dy как функция от x дифференцируемой функцией?

Чтобы выяснить это, придадим аргументу x приращение dx и рассмотрим приращение дифференциала dy:

$$f'(x+dx)\,dx - f'(x)\,dx = \big(f'(x+dx) - f'(x)\big)\,dx.$$

Если существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f'(x+dx) - f'(x) = f''(x)\,dx + o(dx), \quad dx \to 0.$$

Таким образом, линейная часть приращения произведения $f'(x)\,dx$, когда x получает приращение dx, равна $f''(x)\,dx \cdot dx = f''(x)\,(dx)^2$.

Квадрат дифференциала независимой переменной $(dx)^2$ принято обозначать dx^2, т. е. dx считается единым символом, который возводится в квадрат.

Поэтому, полагая по определению $d^2y := d(dy)$, получаем

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \tag{5.5.3}$$

Так как дифференцируемость функции равносильна существованию производной, то существование второго дифференциала d^2y равносильно существованию второй производной $f''(x)$.

Поскольку дифференциал независимой переменной dx от x не зависит, то $d(dx) = d^2x = 0$.

Далее, для $n > 2$ полагаем

$$d^ny := d\,(d^{n-1}y)$$

и с помощью аналогичных рассуждений находим, что

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n, \tag{5.5.4}$$

где dx^n обозначает n-ю степень дифференциала dx.

Таким образом,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}\,(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.5.5}$$

т. е. производная порядка n функции равна отношению дифференциала порядка n этой функции к n-й степени дифференциала независимой переменной.

Напомним, что формулы (5.5.3)–(5.5.5) относятся к случаю, когда x является независимой переменной.

Рассмотрим дифференциалы сложной функции.

Сначала найдём выражение дифференциала первого порядка. Пусть $y = \psi(x) = \varphi(f(x))$, где функции $y = \varphi(u)$ и $u = f(x)$ имеют производные первого порядка. Тогда $dy = \psi'(x)\,dx$, а согласно (5.4.1) $\psi'(x) = \varphi'(u)f'(x)$.

Поэтому

$$dy = \varphi'(u)f'(x)\,dx.$$

С другой стороны, $f'(x)\,dx = du$, значит, $dy = \varphi'(u)\,du$.

Таким образом, для первого дифференциала dy сложной функции справедливы формулы

$$dy = \psi'(x)\,dx \tag{5.5.6}$$

и

$$dy = \varphi'(u)\,du. \tag{5.5.7}$$

Эти формулы выглядят одинаково, но их принципиальная разница состоит в том, что dx в (5.5.6) является дифференциалом независимой переменной, а du в (5.5.7) является дифференциалом зависимой переменной.

Свойство первого дифференциала иметь одинаковое выражение через дифференциалы независимой и зависимой переменной называют *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков сложной функции.

Пусть по-прежнему $y = \varphi(u)$, $u = f(x)$, где x – независимая переменная, и $\psi(x) := \varphi(f(x))$.

Согласно (5.5.7) и (5.2.6) имеем

$$\begin{aligned} d^2y = d\big(\varphi'(u)\,du\big) &= d(\varphi'(u))\,du + \varphi'(u)\,d(du) = \\ &= \varphi''(u)\,du\,du + \varphi'(u)\,d^2u = \varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2u. \end{aligned}$$

Итак,

$$d^2y = \varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2u. \tag{5.5.8}$$

Здесь $d^2u = f''(x)\,dx^2$.

Сравнение формул (5.5.8) и (5.5.3) показывает, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности – его представление зависит от того, выражен он через дифференциалы независимой переменной или через дифференциалы зависимой переменной.

Найдём ещё выражение третьего дифференциала через дифференциалы зависимой переменной. Имеем

$$\begin{aligned} d^3y = d(d^2y) = d\big(\varphi''(u)\,du^2 + \varphi'(u)\,d^2u\big) = \\ = \varphi'''(u)\,du\cdot du^2 + \varphi''(u)\,d(du^2) + \\ + \varphi''(u)\,du\cdot d^2u + \varphi'(u)\,d(d^2u) = \\ = \varphi'''(u)\,du^3 + \varphi''(u)\,2\,du\,d^2u + \varphi''(u)\,du\,d^2u + \varphi'(u)\,d^3u = \\ = \varphi'''(u)\,du^3 + 3\varphi''(u)\,d^2u\,du + \varphi'(u)\,d^3u. \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Запоминать формулы (5.5.8) и (5.5.9) нет необходимости, рекомендуется выводить их заново каждый раз, когда они нужны.

Рассмотрим теперь производные функций, заданных параметрически.

Простейший пример параметрического задания функции даёт параметрическое уравнение прямой на плоскости

$$x = at + b, \quad y = ct + d, \tag{5.5.10}$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$. Если $a \neq 0$, то $t = (x - b)/a$ и, подставив это значение t во второе уравнение (5.5.10), получим

$$y = \frac{c}{a}(x - b) + d.$$

Таким образом, исключив из (5.5.10) параметр t, мы нашли явное выражение y через x.

Сложнее обстоит дело с параметрическим уравнением эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \tag{5.5.11}$$

$a, b > 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Исключив в уравнении (5.5.11) параметр t, получим

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Отсюда

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{5.5.12}$$

Поскольку для каждого x знак перед корнем можно брать произвольно, формула (5.5.12) задаёт бесконечно много функций y аргумента x. Если потребовать непрерывность функций на $[-a, a]$, таких функций будет две.

Понятно, что в общем случае, когда на некотором промежутке изменения параметра t заданы функции

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{5.5.13}$$

исключить из (5.5.13) параметр t и получить явное выражение y через x далеко не всегда возможно и совсем не просто.

Покажем, что при некоторых естественных условиях на функции (5.5.13) можно найти параметрическое представление производной y'_x через производные функций $x(t)$ и $y(t)$.

Если в некоторой окрестности точки t_0 функция $x(t)$ строго монотонна, то как было сказано в § 4.5, в некоторой окрестности точки $x_0 := x(t_0)$ существует функция $t = t(x)$, обратная $x(t)$, и формулы (5.5.13) параметрически задают функцию $y(x) := y(t(x))$.

Предположим, что в точке t_0 существуют производные x'_t, y'_t и, кроме того, $x'_t(t_0) \neq 0$.

В силу (5.4.1) и (5.3.2) имеем

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5.5.14}$$

Мы получили y'_x как функцию от t, функции $x(t)$ и $y'_x(t)$ задают параметрически производную y'_x.

Если функция y'_t/x'_t имеет производную по t (так будет во всяком случае, когда существуют вторые производные $x''_{t\,t}(t)$ и $y''_{t\,t}(t)$), то вторую производную y''_{xx} можно найти так:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}\,x'_t - y'_t\,x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \tag{5.5.15}$$

Подобным образом можно находить производные функции $y(x)$ и более высокого порядка.

Запоминать формулу (5.5.15) не нужно. Рекомендуется каждый раз выводить её заново. К тому же, если дробь в правой части равенства (5.5.14) удастся упростить, вторую производную $y''_{xx}(t)$ получим с помощью более простых вычислений, чем из формулы (5.5.15).

Глава 6. Свойства дифференцируемых функций

§ 6.1. Локальные экстремумы функции

Наряду с возрастанием и убыванием функций на промежутке рассматривается возрастание и убывание функции в точке.

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для x из этой окрестности, лежащих слева от x_0, справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, а для x справа от x_0 – неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Если в этих неравенствах знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ заменены на соответственно $<$ и $>$, функцию f называют *строго возрастающей в точке* x_0.

Подобным образом определяют убывание и строгое убывание функции в точке. Вводят также одностороннее возрастание и убывание функции в точке.

Теорема 6.1.1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную. Если* $f'(x_0) > 0$, *то* f *строго возрастает в точке* x_0, *а если* $f'(x_0) < 0$, *то* f *строго убывает в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $f'(x_0) > 0$. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то при достаточно малых Δx имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$$

Значит, если $\Delta x > 0$, то $\Delta y > 0$, а если $\Delta x < 0$, то $\Delta y < 0$. Эти неравенства означают строгое возрастание функции f в точке x_0.

Случай $f'(x_0) < 0$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 6.1.1 справедлива и для односторонних производных и соответствующего одностороннего строгого возрастания или строгого убывания функций.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если при всех x из некоторой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. А если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, говорят, что $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум.*

Аналогично, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если при всех x из некоторой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. А если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, говорят, что $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный минимум.*

Точки локального максимума и минимума функции называют точками её *локального экстремума*, а точки строгого локального максимума и минимума – точками *строгого локального экстремума.*

Здесь слово "локальный" показывает, что с $f(x_0)$ сравниваются значения функции только в некоторой малой окрестности точки x_0 в отличие от "глобального" максимума или минимума, которые относятся ко всей области определения функции.

Теорема 6.1.2 (Теорема Ферма). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то x_0 может быть точкой локального экстремума функции f только в том случае, когда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Если $f'(x_0) > 0$, то функция f строго возрастает в точке x_0, а из $f'(x_0) < 0$ следует строгое убывание f в точке x_0. Значит, локальный экстремум возможен только при условии $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, условие $f'(x_0) = 0$ необходимо для локального экстремума, но оно не является достаточным. Действительно, функция $y = x^3$ строго возрастает на всей оси, а её производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю, называют *стационарными точками* функции f. Согласно теореме Ферма дифференцируемые функции могут иметь локальный экстремум только в стационарных точках.

Следующее утверждение является обобщением теоремы Коши 4.3.3 о промежуточных значениях.

Теорема 6.1.3 (Теорема Дарбу о промежуточных значениях). *Пусть функция* $f(x)$ *задана на отрезке* $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ *и* $f(x)$ *при всех* $x \in [a, b]$ *является производной некоторой функции* $F(x)$. *Тогда для каждого числа* c, *расположенного строго между* $f(a)$ *и* $f(b)$, *существует точка* $\xi \in (a, b)$ *такая, что* $f(\xi) = c$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки и c равно нулю.

Пусть, например, $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$. Поскольку функция $F(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производную, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и, значит, согласно теореме 4.3.2 принимает в некоторой точке $\xi \in [a, b]$ своё максимальное на $[a, b]$ значение. Так как $F'(a) = f(a) > 0$, то a является точкой одностороннего строгого возрастания функции $F(x)$, поэтому ξ не может быть точкой a. Точно также ξ не может совпадать с точкой b, так как из условия $F'(b) = f(b) < 0$ следует, что $F(x)$ строго убывает в точке b.

Следовательно, ξ – внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Тогда по теореме Ферма $F'(\xi) = 0$. Но $F'(\xi) = f(\xi)$, значит, $f(\xi) = 0$.

Если же $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то берём точку ξ, в которой $F(x)$ принимает минимальное на $[a, b]$ значение, и аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $f(\xi) = 0$.

Таким образом, в рассмотренном частном случае теорема доказана.

Переход к общему случаю осуществляется как и при доказательстве теоремы Коши 4.3.3 о промежуточных значениях. Вводим функцию $\varphi(x) := f(x) - c$. Так как число c заключено между $f(a)$ и $f(b)$, функция $\varphi(x)$ принимает в точках a и b значения разных знаков. Если положить $\Phi(x) := F(x) - cx$, то $\Phi'(x) = (F(x) - cx)' = \varphi(x)$. Значит, в силу уже доказанного существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\varphi(\xi) = 0$. Отсюда $f(\xi) - c = 0$ и $f(\xi) = c$.

Теорема доказана.

Сравним теоремы Дарбу и Коши о промежуточных значениях. Заключение в этих теоремах одинаковы, разными являются условия на функцию f. В теореме Коши требовалась непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а в теореме Дарбу предполагается существование функции $F(x)$ такой, что $F'(x) = f(x)$ во всех точках $x \in [a, b]$.

В главе 9 будет установлено, что для каждой непрерывной на $[a, b]$ функции f существует функция F такая, что $F'(x) =$

$f(x)$ при всех $x \in [a,b]$. Это покажет, что теорема Коши является следствием теоремы Дарбу.

Вместе с тем, теорема Дарбу не вытекает из теоремы Коши, так как производная функции может существовать в каждой точке, но не быть непрерывной. Например, если

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

то

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и $F'(x)$ имеет разрыв в точке 0.

Теорему 6.1.3 можно сформулировать иначе:

Теорема 6.1.4. *Если функция $F(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $F'(a) \neq F'(b)$, то для каждого числа c, лежащего строго между $F'(a)$ и $F'(b)$, существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $F'(\xi) = c$.*

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.1.5. *Производная функции, дифференцируемой на интервале, не может иметь точек разрыва первого рода.*

§ 6.2. Теоремы о среднем

Будем рассматривать функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемые на интервале (a,b), т. е. во всех внутренних точках отрезка.

Теорема 6.2.1 (Теорема Ролля). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a,b)$, в которой $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Из непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$ согласно теореме 4.3.2 следует, что f принимает в некоторых точках отрезка свои максимальное M и минимальное m значения. Если $M = m$, то f имеет это значение во всех точках отрезка $[a,b]$ и производная $f'(x)$ всюду на нём равна нулю.

А если $M \neq m$, то по крайней мере одно из этих значений f принимает во внутренней точке отрезка $[a, b]$. По теореме Ферма в этой точке производная f' равна нулю и теорема доказана.

Теорема Ролля показывает, что в некоторой точке интервала (a, b) касательная к графику функции f параллельна оси OX.

Теорема 6.2.2 (Теорема Лагранжа о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{6.2.1}$$

Доказательство. Подберём число λ так, чтобы для функции $\varphi(x) := f(x) - \lambda x$ выполнялось равенство $\varphi(a) = \varphi(b)$. Решив уравнение $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$, видим, что нужно взять

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Поэтому согласно теореме Ролля существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\varphi'(\xi) = 0.$$

Значит, $f'(\xi) - \lambda = 0$ и

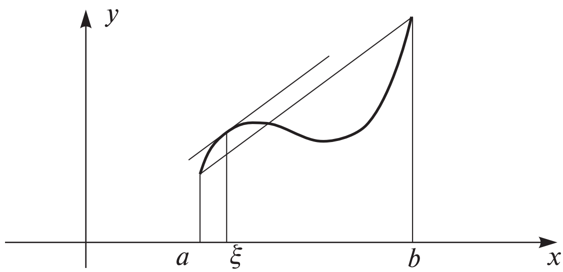
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{6.2.2}$$

Отсюда следует равенство (6.2.1) и теорема доказана.

Равенство (6.2.1) называют *формулой конечных приращений Лагранжа.* Она является одним из основных результатов дифференциального исчисления.

Используем равенство (6.2.2), чтобы выяснить геометрический смысл формулы конечных приращений Лагранжа.

Левая часть в (6.2.2) равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке ξ, а правая часть – тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции. Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что существует точка $\xi \in (a, b)$, касательная в которой параллельна прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.



Формулу конечных приращений Лагранжа часто записывают так:

$$f(b) - f(a) = f'\bigl(a + \theta(b-a)\bigr)(b-a), \tag{6.2.3}$$

где θ – некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \theta < 1$.

В формуле (6.2.3) не обязательно $a < b$, она имеет место и при $a > b$.

Теорема 6.2.3 (Теорема Коши о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, причём $g(a) \neq g(b)$. Если f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ не обращаются на (a,b) в нуль одновременно, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6.2.4}$$

Доказательство. В случае $g(x) = x$ теорема 6.2.3 совпадает с теоремой 6.2.2. Доказательство теоремы 6.2.3 будет идти по той же схеме.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) := f(x) - \lambda g(x)$. Она непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Чтобы к $\varphi(x)$ можно было применить теорему Ролля, составим уравнение $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$, решив которое, получим

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Для этого λ имеем $\varphi(a) = \varphi(b)$, значит, существует точка $\xi \in (a,b)$, в которой $\varphi'(\xi) = 0$. Таким образом,

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0. \tag{6.2.5}$$

При этом $g'(\xi) \neq 0$, иначе из (6.2.5) следовало бы $f'(\xi) = 0$, а по условию производные функций f и g не могут обращаться в нуль одновременно. Значит, обе части равенства (6.2.5) можно разделить на $g'(\xi)$, что даёт (6.2.4).

Теорема доказана.

Получим следствия из теоремы Лагранжа о среднем.

Теорема 6.2.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ во всех точках интервала (a, b), то функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Для каждой пары точек x^* и x^{**} из $[a, b]$ согласно формуле конечных приращений Лагранжа между x^* и x^{**} имеется точка ξ такая, что

$$f(x^*) - f(x^{**}) = f'(\xi)(x^* - x^{**}).$$

Так как ξ принадлежит интервалу (a, b), то $f'(\xi) = 0$ и, значит, $f(x^*) = f(x^{**})$. Теорема доказана, так как x^* и x^{**} – произвольные точки отрезка $[a, b]$.

Покажем, что условия этой теоремы можно немного ослабить.

Теорема 6.2.5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ во всех точках интервала (a, b) за исключением конечного числа точек, существование производной в которых не предполагается. Тогда функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – те точки отрезка $[a, b]$, выполнение равенства $f'(x) = 0$ в которых не предполагается.

Применив теорему 6.2.4 к отрезкам $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, видим, что функция $f(x)$ постоянна на каждом таком отрезке. Точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, принадлежат интервалу (a, b) и являются концами двух отрезков постоянства непрерывной функции $f(x)$. Значит, f постоянна на всём отрезке $[a, b]$.

Условия этой теоремы можно ещё ослабить и не предполагать существование производной на некоторых бесконечных множествах точек, например, на произвольных счётных множествах. Но доказательство подобных утверждений сложно. Мы докажем только следующее простое предложение.

Теорема 6.2.6. *Пусть точки* $x_1, x_2, \ldots$ *отрезка* $[a,b]$ *образуют возрастающую последовательность, сходящуюся к точке* b. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и во всех точках интервала* (a,b), *кроме точек* $x_1, x_2, \ldots$, *имеет производную, равную нулю, то* $f(x)$ *постоянна на* $[a,b]$.

Доказательство. Согласно теореме 6.2.5 функция $f(x)$ является постоянной на каждом отрезке вида $[a, x_n]$. Таким образом, $f(x) = C$ при всех $x \in [a,b)$, где C – некоторое число. В силу непрерывности f в точке b из $f(x_n) = C$ и $x_n \to b$, $n \to \infty$, вытекает равенство $f(b) = C$, т. е. $f(x) = C$ на всём отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

Теорема 6.2.7. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и в каждой точке этого отрезка, за исключением конечного множества точек, имеет производную, для которой выполнено условие*

$$|f'(x)| \leqslant M.$$

Тогда для любых точек x^*, x^{**}, *принадлежащих* $[a,b]$, *справедлива оценка*

$$|f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant M|x^* - x^{**}|. \tag{6.2.6}$$

Доказательство. Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ – те точки из $[a,b]$, о производной в которых ничего неизвестно.

Если точки x^*, x^{**} принадлежат какому-либо одному из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, то пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, видим, что для некоторой точки ξ, расположенной между x^* и x^{**},

$$|f(x^*) - f(x^{**})| = |f'(\xi)|\,|x^* - x^{**}| \leqslant M\,|x^* - x^{**}|.$$

Если же $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$ и $x^{**} \in [x_{j-1}, x_j]$, где $i < j$, то

$$\begin{aligned}
&\bigl|f(x^*) - f(x^{**})\bigr| = \\
&\quad = \left|f(x^*) - f(x_i) + \sum_{k=i+1}^{j-1} \bigl(f(x_{k-1}) - f(x_k)\bigr) + f(x_{j-1}) - f(x^{**})\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \bigl|f(x^*) - f(x_i)\bigr| + \sum_{k=i+1}^{j-1} \bigl|f(x_{k-1}) - f(x_k)\bigr| + \bigl|f(x_{j-1}) - f(x^{**})\bigr|.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу уже доказанного находим

$$
\begin{aligned}
&|f(x^*) - f(x^{**})| \leqslant \\
&\qquad \leqslant M|x^* - x_i| + M\sum_{k=i+1}^{j-1}|x_{k-1} - x_k| + M|x_{j-1} - x^{**}| = \\
&\qquad = M|x^* - x^{**}|.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Функции, удовлетворяющие условию вида (6.2.6), часто встречаются в разных вопросах. В связи с этим вводится следующее понятие.

Определение. Функция f удовлетворяет на промежутке *условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, если существует такое число M, что для любой пары точек x^*, x^{**} из этого промежутка справедлива оценка

$$\big|f(x^*) - f(x^{**})\big| \leqslant M\big|x^* - x^{**}\big|^{\alpha}. \tag{6.2.7}$$

В терминах модуля непрерывности условие (6.2.7) записывается так:

$$\omega(f,\delta) \leqslant M\delta^{\alpha}.$$

Условию (6.2.7) при $\alpha > 1$ удовлетворяют только функции, принимающие постоянное значение. В самом деле, в этом случае $\alpha - 1 > 0$ и из оценки

$$\left|\frac{f(x^*) - f(x^{**})}{x^* - x^{**}}\right| \leqslant \frac{M|x^* - x^{**}|^{\alpha}}{|x^* - x^{**}|} = M|x^* - x^{**}|^{\alpha-1}$$

при $x^{**} \to x^*$ получаем $f'(x^*) = 0$. Значит, согласно теореме 6.2.4 f постоянна.

Поэтому условие Липшица рассматривают только при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Иногда условие Липшица при $\alpha < 1$ называют условием Гёльдера, но это исторически не оправдано.

Покажем, что монотонность дифференцируемых функций можно охарактеризовать в терминах свойств производной.

Теорема 6.2.8. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то для возрастания f на $[a,b]$ необходимо и достаточно условие: $f'(x) \geqslant 0$ на (a,b).*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$ и x – произвольная точка интервала (a, b). Тогда из $\Delta x > 0$ следует $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \geqslant 0$, а из $\Delta x < 0$ следует $\Delta y \leqslant 0$. Таким образом, всегда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Значит, предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

который по условию существует, не может быть отрицательным.

Наоборот, если $f'(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b), то для любой пары точек x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, принадлежащих промежутку $[a, b]$, согласно формуле конечных приращений Лагранжа для некоторой точки ξ из (x_1, x_2) имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Значит, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ и теорема доказана.

В формулировке критерия строгой монотонности дифференцируемых функций используется следующее понятие.

Определение. Если множество A лежит в промежутке $[a, b]$ и в каждом интервале, принадлежащем $[a, b]$, имеются точки множества A, то множество A называют *всюду плотным на* $[a, b]$.

Теорема 6.2.9. *Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Для того чтобы f строго возрастала на $[a, b]$, необходимо и достаточно условие: $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b) и множество точек, в которых $f'(x) > 0$, всюду плотно на (a, b).*

В частности, f строго возрастает, если $f'(x) > 0$ на (a, b).

Доказательство. Согласно теореме 6.2.8 условие $f'(x) \geqslant 0$ необходимо и достаточно для возрастания f на $[a, b]$. Но возрастающая на промежутке $[a, b]$ функция f не является на нём строго возрастающей в том и только том случае, когда f принимает постоянное значение на некотором отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, т. е. когда на $[\alpha, \beta]$ справедливо равенство $f'(x) = 0$.

Всюду плотность точек, в которых $f'(x) > 0$, равносильна тому, что равенство $f'(x) = 0$ не может иметь место ни на каком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ и теорема доказана.

Отметим, что в теоремах 6.2.8 и 6.2.9 промежуток $[a, b]$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Понятно, как утверждения, аналогичные теоремам 6.2.8 и 6.2.9, формулируются для убывающих функций.

Теорема 6.2.10. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, то f строго монотонна на $[a, b]$.*

Доказательство. В силу теоремы Дарбу 6.1.3 о промежуточных значениях, если производная $f'(x)$ принимает в некоторых точках интервала (a, b) значения разных знаков, то она обращается в нуль в некоторой точке из (a, b), что по условию невозможно.

Значит, всюду на (a, b) либо $f'(x) > 0$, либо $f'(x) < 0$. А тогда согласно теореме 6.2.9 функция $f(x)$ на $[a, b]$ или строго возрастает, или строго убывает.

Теорема доказана.

Теорема 6.2.11. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0+\delta]$, $\delta > 0$, и дифференцируема на интервале $(x_0, x_0+\delta)$. Если существует конечный или бесконечный предел $f'(x_0 + 0)$, то функция f имеет в точке x_0 правую производную, соответственно конечную или бесконечную, и*

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

Доказательство. В силу формулы конечных приращений Лагранжа при достаточно малых положительных h имеем

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h), \tag{6.2.8}$$

где θ – некоторое число, заключённое между 0 и 1.

По условию выражение в правой части равенства (6.2.8) при $h \to +0$ имеет предел $f'(x_0 + 0)$. Значит, существует равный ему предел выражения из левой части.

Это доказывает утверждение теоремы.

Точно также, если f непрерывна на некотором отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$, $\delta > 0$, дифференцируема на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и существует конечный или бесконечный предел $f'(x_0 - 0)$, то функция f имеет в точке x_0 левую производную, равную этому пределу.

Из теоремы 6.2.11 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.2.12. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и существует предел $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, то f дифференцируема в точке x_0 и*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x),$$

т. е. производная $f'(x)$ непрерывна в точке x_0.

§ 6.3. Раскрытие неопределённостей

Мы уже встречались с пределами дробей

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6.3.1}$$

когда $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Например, в § 4.8 был вычислен предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

В таких случаях нельзя переходить к пределу отдельно в числителе и в знаменателе дроби.

Если $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, то предел (6.3.1) бесконечен. Поэтому интересен случай, когда $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Если предел при $x \to a$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ равен нулю, то предел (6.3.1) называют *неопределённостью вида* $0/0$, так как такое выражение получается при формальном переходе к пределу.

Нахождение подобных пределов называют *раскрытием неопределённостей.*

Покажем, как применяются производные для раскрытия неопределённости $0/0$, а также неопределённостей других типов.

Теорема 6.3.1. *Пусть в точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ равны нулю и имеют производные, причём $g'(a) \neq 0$. Тогда предел* (6.3.1) *существует и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{6.3.2}$$

Доказательство. Из условия $g'(a) \neq 0$ согласно теореме 6.1.1 следует, что функция g строго монотонна в точке a и, так как $g(x) = 0$, то $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки a. Поэтому вблизи точки a дробь $f(x)/g(x)$ имеет смысл.

Для $x \neq a$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} : \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{6.3.3}$$

Каждая дробь в полученном выражении имеет предел при $x \to a$, причём предел делителя, равный $g'(a)$, отличен от нуля. Поэтому в частном из правой части (6.3.3) можно перейти к пределу при $x \to a$ отдельно в делимом и в делителе. Так получим равенство (6.3.2).

Теорема доказана.

В этой теореме можно говорить об односторонних производных функций f и g и соответствующем одностороннем пределе в (6.3.2).

В следующих далее теоремах 6.3.2 и 6.3.3 имеются в виду односторонние пределы.

Теорема 6.3.2 (Правило Лопиталя для раскрытия неопределённости 0/0). *Пусть a – число или бесконечность определённого знака, функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в некоторой проколотой односторонней окрестности a, причём $g'(x)$ не обращается в этой окрестности в нуль, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.3.4}$$

то существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6.3.5}$$

также конечный или бесконечный, и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В проколотой окрестности a, в которой $g'(x)$ не обращается в нуль, согласно теореме 6.2.10 функция $g(x)$ строго монотонна и не имеет нулей, поскольку её предел при

$x \to a$ равен нулю. Поэтому при x, близких к a, дробь из (6.3.5) имеет смысл.

Будем сначала считать a конечным. Положим $f(a) := 0$, $g(a) := 0$, т. е. доопределим (или переопределим) функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a. Тогда эти функции становятся непрерывными в соответствующей окрестности точки a.

Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Дробь в правой части этого равенства при x, близких к a, удовлетворяет условиям теоремы Коши 6.2.3 о среднем. Значит, при некотором $\theta \in (0, 1)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'\big(a + \theta(x-a)\big)}{g'\big(a + \theta(x-a)\big)}. \tag{6.3.6}$$

По условию предел дроби из правой части (6.3.6) при $x \to a$ существует. Поэтому из (6.3.6) вытекает утверждение теоремы для конечных a.

Пусть теперь a – бесконечный символ, для определённости $a = +\infty$. Рассмотрим функции $\varphi(t) := f(1/t)$ и $\psi(t) := g(1/t)$.

При достаточно малых положительных t функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы и

$$\varphi'(t) = f'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right), \qquad \psi'(t) = g'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right) \neq 0.$$

Поэтому

$$\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = f'(1/t)/g'(1/t)$$

и существует предел

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Так как $\varphi(t) \to 0$, $\psi(t) \to 0$ при $t \to +0$, то по уже доказанному имеем

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось только заметить, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}.$$

Отметим, что существование предела (6.3.4) является достаточным условием существования предела (6.3.5), но не является необходимым. Например, если $f(x) = x^2 \sin 1/x$ и $g(x) = x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Вместе с тем, дробь

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

при $x \to 0$ предела не имеет.

Теорема 6.3.3 (Правило Лопиталя для раскрытия неопределённости ∞/∞). *Пусть a – число или бесконечность определённого знака, в некоторой проколотой односторонней окрестности a функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные, $g'(x)$ не обращается в нуль и $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Если существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.3.7}$$

то существует равный ему предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

т. е.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.3.8}$$

Доказательство. Пусть для определённости a – число и $x \to a+0$. Необходимые изменения, если a – бесконечный символ, касаются только формы записи.

Всюду далее будем иметь в виду ту окрестность, где $f(x)$, $g(x)$ и $g'(x)$ не имеют нулей и производная $f'(x)$ существует.

Введём обозначение

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Сначала рассмотрим случай, когда предел K конечен.

Для произвольного положительного ε существует точка $x_0 > a$ такая, что при всех $x \in (a, x_0)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - K\right| < \varepsilon. \tag{6.3.9}$$

Для x, достаточно близких к a, имеем $|f(x_0)| < |f(x)|$ и $|g(x_0)| < |g(x)|$, поскольку пределы $f(x)$ и $g(x)$ бесконечны. Полагая для таких x

$$h(x) := \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) : \left(1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}\right),$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)} : \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\, h(x).\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

Согласно теореме Коши о среднем для каждой точки $x \in (a, x_0)$ существует точка $\xi_x \in (x, x_0)$, для которой

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}. \tag{6.3.11}$$

Из (6.3.9)–(6.3.11) следует, что при x, близких к a,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| &= \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} h(x) - K\right| = \\ &= \left|\left(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - K\right) h(x) + K\big(h(x) - 1\big)\right| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\,|h(x)| + |K| \cdot |h(x) - 1|.\end{aligned}$$

Но $\lim_{x\to a+0} h(x) = 1$, поэтому

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

и для случая, когда предел K конечен, теорема доказана.

Если предел K бесконечен, то K равно или $+\infty$ или $-\infty$. В самом деле, согласно теореме 6.2.10 функция $g(x)$ строго монотонна, поскольку её производная не обращается в нуль. Значит, производная $g'(x)$ или положительна или отрицательна. Из бесконечности предела (6.3.7) следует, что производная $f'(x)$ не имеет нулей вблизи точки a. Следовательно, эта производная также имеет определённый знак и K равно или $+\infty$ или $-\infty$.

Так как $f'(x)$ вблизи точки a не имеет нулей, можно говорить о пределе обратного отношения

$$\lim_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}. \tag{6.3.12}$$

Этот предел равен нулю, причём дробь из (6.3.12) вблизи a либо положительна, либо отрицательна.

Согласно уже рассмотренному случаю конечного K имеем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

А в силу аналогов для этого случая равенств (6.3.10) и (6.3.11) дробь $g(x)/f(x)$ имеет тот же знак, что и $g'(x)/f'(x)$.

Таким образом, равенство (6.3.8) выполняется и для бесконечных K.

Теперь теорема доказана полностью.

Отметим, что в теореме 6.3.2, также как и в теореме 6.3.3, если предел отношения производных (6.3.4) бесконечен, то он является бесконечностью определённого знака.

Покажем теперь, как можно раскрывать неопределённости других типов, когда формальный переход к пределу приводит к выражениям вида

$$0\cdot\infty,\quad +\infty-(+\infty),\quad (+0)^0,\quad (+\infty)^0,\quad 1^\infty.$$

Если $\lim f(x)=0$ и $\lim g(x)=\infty$, то вместо

$$\lim f(x)g(x)$$

можно рассмотреть предел

$$\lim\frac{f(x)}{1/g(x)},$$

который является неопределённостью вида $0/0$.

Если $\lim f(x) = +\infty$ и $\lim g(x) = +\infty$, то запись разности этих функций в виде произведения

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) \cdot f(x)g(x)$$

даёт неопределённость вида $0 \cdot \infty$.

Неопределённости $(+0)^0$, $(+\infty)^0$, 1^∞ обычно раскрывают, пользуясь представлением

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

(при естественном условии $f(x) > 0$). Полученное произведение в показателе степени в этих случаях представляет собой неопределённость вида $0 \cdot \infty$ или $\infty \cdot 0$.

Правило Лопиталя удобно использовать при доказательстве существования бесконечно дифференцируемой (т. е. имеющей производные любого порядка) функции, которая обращается в нуль только в одной точке, а все её производные в этой точке равны нулю.

Покажем, что этими свойствами обладает функция

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2},$$

а каждая следующая производная функции $\varphi(x)$ равна произведению e^{-1/x^2} на некоторую линейную комбинацию дробей вида $1/x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Докажем для произвольного натурального числа k равенство

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = 0. \tag{6.3.13}$$

Сделаем замену $1/x^2 = t$, тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{k/2}}{e^t}.$$

Эта запись является условной: она означает, что пределы равны, если они существуют.

Правило Лопиталя позволяет легко установить равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{k/2}}{e^t} = 0. \tag{6.3.14}$$

Действительно, при каждом дифференцировании знаменатель дроби из (6.3.14) остается без изменений, а показатель степени в числителе уменьшается на единицу. Поэтому после достаточного числа дифференцирований числитель станет ограниченным и мы получим (6.3.14).

С помощью (6.3.13) и теоремы 6.2.11 получаем равенства $\varphi^{(m)}(0) = 0$ при всех $m = 1, 2, \ldots$. Таким образом, функция $\varphi(x)$ обладает требуемыми свойствами.

§ 6.4. Формула Тейлора

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть $Q(x)$ – многочлен степени m относительно переменной x. Запишем его как многочлен по степеням $x - a$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (x-a)^k$$

и покажем, что коэффициенты α_k можно выразить через значения производных многочлена $Q(x)$ в точке a.

Так как производная $Q(x)$ порядка k при $k = 0, 1, \ldots, m$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q^{(k)}(x) = k!\alpha_k + (k+1)k \cdot \ldots \cdot 2\,\alpha_{k+1}(x-a) + \\ + (k+2)(k+1) \cdot \ldots \cdot 3\,\alpha_{k+2}(x-a)^2 + \cdots , \end{aligned}$$

то

$$Q^{(k)}(a) = k!\alpha_k$$

и значит,

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Для произвольной функции $f(x)$, имеющей в точке a производные до порядка m включительно, построим многочлен

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{6.4.1}$$

Легко видеть, что в точке a разность $f(x) - P(x)$ и все её производные до порядка m обращаются в нуль.

Многочлен $P(x)$, заданный формулой (6.4.1), называют *многочленом Тейлора порядка m функции f в точке a.*

Составим разность функции $f(x)$, имеющей в точке a производные до порядка $n-1$ включительно, и её многочлена Тейлора порядка $n-1$:

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Определение. Равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \tag{6.4.2}$$

называют *формулой Тейлора порядка $n-1$ функции f в точке a.* Функцию $R_n(x)$ называют *остаточным членом формулы Тейлора.*

Термин “формула Тейлора” исторически не вполне оправдан. По справедливости следовало бы говорить о формуле Бернулли в честь И. Бернулли, который впервые использовал многочлены (6.4.1), или о формуле Бернулли–Тейлора. Но по устоявшейся традиции будем называть формулу (6.4.2) формулой Тейлора.

Формулу Тейлора при $a = 0$ нередко называют формулой Маклорена. Мы не будем употреблять это название, так как оно исторически неоправдано.

Покажем, что многочлен Тейлора (6.4.1) даёт в определённом смысле хорошее представление функции $f(x)$.

Следующее утверждение является аналогом теоремы Коши 6.2.3 о среднем для старших производных.

Лемма 6.4.1. *Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке с концами в точках a и x, во всех внутренних точках этого отрезка имеют производные до порядка m, причём функция ψ и все её производные до порядка m не обращаются в нуль. Пусть, далее, функции φ и ψ имеют в точке a односторонние (со стороны точки x) производные до порядка $m-1$ и $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(m-1)}(a) = 0$ и $\psi(a) = \psi'(a) = \cdots = \psi^{(m-1)}(a) = 0$.*

Тогда существует точка ξ, *расположенная между* a *и* x, *такая, что*
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{\psi^{(m)}(\xi)}. \tag{6.4.3}$$

Доказательство. Так как $\varphi(a) = 0$ и $\psi(a) = 0$, то
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)}.$$

Согласно теореме Коши о среднем существует точка x_1, расположенная между a и x, для которой
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}.$$

В силу того, что $\varphi'(a) = 0$ и $\psi'(a) = 0$, имеем
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x_1) - \varphi'(a)}{\psi'(x_1) - \psi'(a)}$$
и, вновь применив теорему Коши о среднем, находим точку x_2 между a и x_1, а значит, между точками a и x, такую, что
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)}.$$

Продолжив эти рассуждения, находим точку x_m между точками a и x, для которой
$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(m)}(x_m)}{\psi^{(m)}(x_m)}.$$

При $\xi = x_m$ получаем формулу (6.4.3).
Лемма доказана.

Теорема 6.4.2 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция* $f(t)$ *непрерывна на отрезке с концами в точках* a *и* x, *имеет на интервале с концами в этих точках производную порядка* $n \geqslant 1$ *и одностороннюю (со стороны точки* x*) производную порядка* $n-1$ *в точке* a. *Тогда при некотором* θ, $0 < \theta < 1$, *справедливо равенство*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \tag{6.4.4}$$

которое называют формулой Тейлора порядка $n-1$ в точке a с остаточным членом в форме Лагранжа.

Доказательство. Пусть R_n – остаточный член формулы Тейлора (6.4.2) функции f. Функции $\varphi(t) := R_n(t)$ и $\psi(t) := (t-a)^n$ удовлетворяют условиям леммы 6.4.1 при $m = n$. Поэтому между a и x существует точка ξ, такая, что

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{R_n^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Так как производная порядка n многочлена степени не выше $n-1$ равна нулю, то $R_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$. Поэтому, записав ξ в виде $a+\theta(x-a)$, где $0<\theta<1$, получим

$$R_n(x) = f^{(n)}\bigl(a+\theta(x-a)\bigr)\,\frac{1}{n!}(x-a)^n$$

и из (6.4.2) вытекает равенство (6.4.4).

Теорема доказана.

Отметим, что число θ в формуле (6.4.4) для каждого n и каждого x своё.

При $n=1$ формула (6.4.4) имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'\bigl(a+\theta(x-a)\bigr)\,(x-a),$$

что равносильно формуле конечных приращений Лагранжа.

Из теоремы 6.4.2 следует, что если на некотором промежутке $f^{(n)}(x) \equiv 0$, где n – натуральное число, то функция $f(x)$ является на этом промежутке многочленом степени не выше $n-1$. При $n=1$ это утверждение составляло теорему 6.2.4.

Теорема 6.4.3 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a производную порядка $n \geqslant 1$. Тогда при $x \to a$ справедлива оценка*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n), \tag{6.4.5}$$

которую называют формулой Тейлора порядка n в точке a с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Из существования производной $f^{(n)}(a)$ следует, что все производные до порядка $n-1$ остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора (6.4.2) в точке a равны нулю, а его производная порядка n существует и $R_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. Кроме того, производная $f^{(n-1)}(x)$ существует в некоторой окрестности точки a.

Поэтому для функций $\varphi(t) := R_n(x)$ и $\psi(t) := (t-a)^n$ выполнены условия леммы 6.4.1 при $m = n-1$. Значит, между точками a и x имеется точка ξ такая, что

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi)}{n!(\xi-a)} = \frac{1}{n!}\frac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi - a}.$$

Мы получили отношение приращения функции $R_n^{(n-1)}$ в точке a к приращению аргумента. Отсюда, так как $\xi \to a$ при $x \to a$, в силу существования производной $R_n^{(n)}(a)$ находим

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}R_n^{(n)}(a) + o(1) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) + o(1), \quad x \to a.$$

Умножив обе части этой оценки на $(x-a)^n$, приходим к (6.4.5). Теорема доказана.

В теореме 6.4.3 производные можно понимать как односторонние. Тогда оценка (6.4.5) имеет место для x из соответствующей односторонней окрестности точки a.

При $n = 1$ формула (6.4.5) имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \quad x \to a,$$

что равносильно выражению приращения функции через дифференциал.

Заметим, что если производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке a, то остаточный член в форме Пеано можно вывести из остаточного члена в форме Лагранжа. В самом деле, в силу непрерывности $f^{(n)}(x)$ в точке a при $x \to a$ имеем

$$f^{(n)}(a + \theta(x-a)) = f^{(n)}(a) + o(1).$$

Поэтому из (6.4.4) следует (6.4.5).

Отметим ещё, что если производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[A, B]$, то существует функция $g(t)$ такая, что

$\lim_{t\to 0} g(t) = 0$ и для всех точек a отрезка $[A, B]$ остаточный член формулы (6.4.5) не превосходит $g((x-a)^n)$.

В самом деле, в этом случае производная $f^{(n)}(x)$ равномерно непрерывна на $[A, B]$. Значит, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x-a| < \delta$, то при всех $\theta \in (0,1)$

$$\left|f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^{(n)}(a)\right| < \varepsilon.$$

Поэтому наше утверждение вытекает из (6.4.4).

Указанное свойство называют *равномерностью* оценки (6.4.5) относительно точек a из $[A, B]$.

В главе 9 будут получены другие представления остаточного члена формулы Тейлора.

Остаточный член формулы Тейлора зависит от n и от $x-a$. Обычно формулой Тейлора пользуются, когда x фиксировано, а $n \to \infty$, или когда n фиксировано и $x - a \to 0$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано представляет собой оценку вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big), \quad x \to a, \tag{6.4.6}$$

при соответствующих значениях коэффициентов α_k.

Покажем, что если для некоторой функции справедлива оценка (6.4.6), то коэффициенты α_k в ней определяются единственным образом.

Действительно, если наряду с (6.4.6) имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big), \quad x \to a,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \beta_k)\,(x-a)^k = o\big((x-a)^n\big), \quad x \to a. \tag{6.4.7}$$

Так как согласно определению степенной функции $(x-a)^0 \equiv 1$, то при переходе в (6.4.7) к пределу при $x \to a$, получим $\alpha_0 = \beta_0$. Поэтому в (6.4.7) можно опустить слагаемое, соответствующее $k = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)\,(x-a)^k = o\big((x-a)^n\big), \quad x \to a.$$

Если $n \geqslant 1$, то разделив левую и правую части на $x - a$, находим

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \beta_k)\,(x-a)^{k-1} = o\big((x-a)^{n-1}\big), \quad x \to a.$$

Вновь переходим к пределу при $x \to a$ и получаем $\alpha_1 = \beta_1$.

Продолжив этот процесс, видим, что $\alpha_k = \beta_k$ при всех $k \leqslant n$. Таким образом, если для функции выполняется оценка (6.4.6), то коэффициенты α_k в этом представлении определяется однозначно.

Выясним, какие производные имеет функция, если для неё имеет место оценка (6.4.6) при $n \geqslant 1$.

Переходя в (6.4.6) к пределу при $x \to a$, находим $\alpha_0 = f(a)$. Таким образом, из (6.4.6) следует, что

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big), \quad x \to a.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-a)^{k-1} + o\big((x-a)^{n-1}\big), \quad x \to a.$$

Переход к пределу при $x \to a$ показывает, что $f'(a) = \alpha_1$. Значит,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big), \quad x \to a.$$

Таким образом, если для функции f справедлива оценка (6.4.6) при $n \geqslant 1$, то f имеет в точке a первую производную.

Но при $n \geqslant 2$ вторая производная функции f в точке a может не существовать. Действительно, для функции

$$f_0(x) := \begin{cases} x^3, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

имеем $f_0(x) = o(x^2)$, $x \to 0$. Вместе с тем, первая производная f_0' существует только при $x = 0$ и функция f_0 не имеет вторую производную.

Оценку (6.4.6) можно записать в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k}{k!}(x-a)^k+o\big((x-a)^k\big),\quad x\to a. \tag{6.4.8}$$

Если для f справедлива оценка (6.4.8), то числа γ_k называют *производными* функции f порядка k в точке a *в смысле Пеано.*

§ 6.5. Формула Тейлора для элементарных функций

Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для основных элементарных функций и будем следить за поведением остаточного члена при $n\to\infty$ и фиксированном x.

Для простоты записи и по традиции будем рассматривать формулу Тейлора в нуле.

1^0. Показательная функция $f(x)=e^x$. Так как $f^{(k)}(x)=e^x$, то $f^{(k)}(0)=1$ при всех k. Значит,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1. \tag{6.5.1}$$

При каждом x имеем $e^{\theta x}\leqslant e^{|x|}$. Поэтому для остаточного члена формулы (6.5.1) справедлива оценка

$$\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|},$$

которая согласно (2.5.1) показывает, что для любого x остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, для каждого x справедливо равенство

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

При $x=1$ из (6.5.1) получаем

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1. \tag{6.5.2}$$

В частности, при $n = 2$ справедлива оценка

$$e = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{3!} < \frac{5}{2} + \frac{e}{6}.$$

Отсюда следует, что $e < 3$.

Таким образом, согласно (6.5.2) при любом n имеем

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{6.5.3}$$

Дробь в правой части (6.5.3) при $n \to \infty$ стремится к нулю очень быстро. Поэтому формулу (6.5.2), в отличие от определения числа e, можно использовать для практического нахождения приближенного значения e.

Например, так как $8! = 40320$, то формула (6.5.2) при $n = 7$ даёт значение e с точностью до 0,0001. Удобство этой формулы состоит ещё в том, что при переходе для получения бóльшей точности от одного n к следующему используются проделанные ранее вычисления.

С помощью (6.5.3) легко доказать иррациональность числа e.

Будем рассуждать от противного. Предположим, что e рационально и

$$e = \frac{m}{n},$$

где $n \geqslant 2$, так как e заведомо не является натуральным числом.

Умножив двойное неравенство (6.5.3) на $n!$, получим

$$0 < n!\, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leqslant 1.$$

Таким образом, число

$$n!\, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = (n-1)!\, m - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

лежит в интервале $(0, 1)$. Вместе с тем, это число целое. Полученное противоречие доказывает иррациональность e.

Рациональные числа являются корнями уравнений первого порядка $ax + b = 0$ с целыми коэффициентами. Корни уравнений

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad n \geqslant 1,$$

с целыми коэффициентами называют *алгебраическими числами.* Нетрудно убедиться, что множество алгебраических чисел счётно. Если число не алгебраическое, его называют *трансцендентным.*

Можно доказать (это доказательство сложно и выходит за рамки курса), что число e не только иррационально, но и трансцендентно. Число π также является трансцендентным.

2^0. Функция $\sin x$. Имеем

$$\sin^{(k)} x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Значит,

$$\sin^{(k)} 0 = \sin\frac{k\pi}{2}$$

и в нуле производная порядка k при чётных k равна нулю, а при нечётных k равна попеременно $+1$ и -1.

Поэтому формула Тейлора порядка $2n+2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, функции $\sin x$ имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x), \tag{6.5.4}$$

а для остаточного члена справедливо представление

$$R_{2n+3}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}\theta x}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\left|R_{2n+3}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

из которой следует, что остаточный член для каждого x стремится к нулю при $n \to \infty$ и

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3⁰. Функция $\cos x$. Рассуждения аналогичны предыдущим. Так как

$$\cos^{(k)} x = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right),$$

то

$$\cos^{(k)} 0 = \cos \frac{k\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x) \tag{6.5.5}$$

и для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{2n+2}(x)| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Значит, остаточный член для каждого x при $n \to \infty$ стремится к нулю и

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4⁰. Функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Так как $\operatorname{sh}^{(k)} x = \operatorname{sh} x$ при чётных k и $\operatorname{sh}^{(k)} x = \operatorname{ch} x$ при нечётных k, то $\operatorname{sh}^{(k)} 0 = 0$ для чётных k и $\operatorname{sh}^{(k)} 0 = 1$ для нечётных k. Поэтому

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x), \tag{6.5.6}$$

и, так как $|\operatorname{sh}^{(k)}(x)| \leqslant e^{|x|}$, для $R_{2n+3}(x)$ справедлива оценка

$$\bigl|R_{2n+3}(x)\bigr| \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x), \tag{6.5.7}$$

где

$$\bigl|R_{2n+2}(x)\bigr| \leqslant e^{|x|} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

В обоих случаях для каждого фиксированного x остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Поэтому функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ при каждом x можно представить в виде пределов

$$\operatorname{sh} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Заметим, что формулы вида (6.5.6) и (6.5.7) можно вывести и из (6.5.1).

5^0. Логарифмическая функция $\ln(1+x)$. В отличие от предыдущих примеров здесь функция определена не при всех x, а только для $x > -1$.

Найдём производные функции $f(x) = \ln(1+x)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

и при $k \geqslant 2$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)(-2)\ldots(-(k-1))}{(1+x)^k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Поэтому формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x), \tag{6.5.8}$$

где

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{6.5.9}$$

Оценим остаточный член (6.5.9). Если $x \in [0,1]$, то

$$\bigl|R_{n+1}(x)\bigr| < \frac{1}{n+1}. \tag{6.5.10}$$

Таким образом, $R_{n+1}(x)$ для этих x стремится к нулю при $n \to \infty$ и

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}. \tag{6.5.11}$$

Равенство (6.5.11) справедливо и при $x \in (-1, 0)$, но для отрицательных x остаточный член в форме Лагранжа (6.5.9) даёт возможность сделать такой вывод, только если $x \in [-1/2, 0)$. Действительно, в этом случае

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| = \left|\frac{x}{1+\theta x}\right|^{n+1} < \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \leqslant 1$$

и, значит, справедлива оценка (6.5.10).

В главе 16 с помощью других представлений остаточного члена формулы Тейлора будет показано, что $R_{n+1}(x)$ в (6.5.8) стремится к нулю при $n \to \infty$ для всех $x \in (-1, 1]$, а для остальных x это не так.

6^0. Степенная функция $f(x) = (1 + x)^m$. Пусть сначала m – натуральное число.

Если $k \leqslant m$, то

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$$

и, значит,

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

А если $k > m$, то $f^{(k)}(x) \equiv 0$.

Поэтому остаточный член формулы Тейлора порядка $n > m$ равен нулю и

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \frac{x^k}{k!}.$$

Таким образом, при всех x справедливо равенство

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6.5.12}$$

где коэффициенты C_m^k уже встречались нам в формуле Лейбница для старших производных произведения двух функций.

Из (6.5.12) легко вывести формулу *бинома Ньютона*

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6.5.13}$$

справедливую для произвольных чисел a и b. В самом деле, достаточно рассмотреть $b \neq 0$, а в этом случае

$$(a+b)^m = b^m\left(1+\frac{a}{b}\right)^m = b^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k}.$$

Поскольку числа C_m^k являются коэффициентами в равенстве (6.5.13), их называют *биномиальными коэффициентами.*

Если m не является натуральным числом, то при всех k

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1)$$

и формула Тейлора порядка n имеет вид

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\,x + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}\,x^n + R_{n+1}(x), \tag{6.5.14}$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\,x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1},$$

$0 < \theta < 1$.

В 16 главе будет показано, что при $n \to \infty$ остаточный член формулы Тейлора (6.5.14) для $|x| < 1$ стремится к нулю, для $|x| > 1$ это не так, а для x, равных $+1$ и -1, ответ на этот вопрос зависит от значения m.

Простой вид многочлены Тейлора имеют также для функции $\operatorname{arctg} x$, об этом будет сказано в 16 главе.

Многочлены Тейлора других элементарных функций записываются более сложно и мы не будем о них говорить.

Отметим, что формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано можно использовать для раскрытия неопределённостей. Например, предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

легко найти с помощью правила Лопиталя. Но можно воспользоваться формулой Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

Тогда получим

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x\right) = -\frac{1}{6} + o(x) \to -\frac{1}{6}, \quad x \to 0.$$

§ 6.6. Исследование функций с помощью старших производных

В § 6.2 свойства функций изучались с помощью производных первого порядка. Сейчас будем использовать производные высших порядков.

Сначала рассмотрим вопросы о локальных экстремумах и о монотонности функции в точке.

Теорема 6.6.1. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 отличную от нуля производную порядка $n \geqslant 1$, а все её производные меньшего порядка в этой точке равны нулю. Тогда*

1^0. *если n чётно, то f имеет в точке x_0 строгий локальный экстремум: максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$;*

2^0. *если n нечётно, то f строго монотонна в точке x_0: строго возрастает, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строго убывает, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Доказательство. В этом случае формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет вид

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{6.6.1}$$

Так как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то в достаточно малой проколотой окрестности точки x_0 знак выражения в правой части оценки (6.6.1) определяется первым слагаемым. Сейчас нас интересует только знак этого выражения при x, близких к x_0, поэтому слагаемое $o((x - x_0)^n)$ можно не учитывать.

Если n чётно, то $(x - x_0)^n > 0$ при всех $x \neq x_0$. Значит, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ для x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_0, т. е. f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Если же $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ для x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_0 и f имеет в точке x_0 строгий локальный максимум.

Если n нечётно, то $(x - x_0)^n > 0$ для $x > x_0$ и $(x - x_0)^n < 0$ для $x < x_0$. Поэтому при $f^{(n)}(x_0) > 0$ для x из достаточно малой проколотой окрестности точки x_0 имеем $f(x) > f(x_0)$, если $x > x_0$, и $f(x) < f(x_0)$, если $x < x_0$. Значит, функция f строго возрастает в точке x_0. Аналогично рассматривается случай, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Теорема доказана.

При $n = 1$ теорема 6.6.1 совпадает с теоремой 6.1.1. Новым является случай $n \geqslant 2$.

Согласно теореме 6.6.1, если в некоторой точке у функции есть неравная нулю производная какого-либо порядка, то в этой точке функция или имеет строгий локальный экстремум или является строго монотонной. Остаётся случай, когда функция не имеет в точке отличных от нуля производных, т. е. когда либо все производные до некоторого порядка равны нулю, а производные более высокого порядка не существуют, либо производные любого порядка существуют, но все они равны нулю.

Теорема 6.6.1 даёт достаточные условия существования строгого локального экстремума. Опираясь на эту теорему, можно получить необходимые условия существования нестрогого локального экстремума, частным случаем которых является теорема Ферма 6.1.2.

Теорема 6.6.2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка $n \geqslant 1$, причём все производные меньшего порядка в этой точке равны нулю, т. е. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда*

1^0. *если n чётно, то для того чтобы f имела в точке x_0 локальный максимум, необходимо условие $f^{(n)}(x_0) \leqslant 0$, а чтобы f имела локальный минимум, необходимо условие $f^{(n)}(x_0) \geqslant 0$;*

2^0. *если n нечётно, то для того чтобы f имела в точке x_0 локальный экстремум, необходимо условие $f^{(n)}(x_0) = 0$.*

Доказательство. Если n чётно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то согласно теореме 6.6.1 f имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Значит, локальный максимум возможен только при условии $f^{(n)}(x_0) \leqslant 0$. Аналогично получаем необходимое условие локального минимума.

Если n нечётно и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то согласно теореме 6.6.1 f строго монотонна в точке x_0. Значит, f может иметь локальный экстремум в точке x_0 только в случае, когда $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

Рассмотрим свойства графиков функций, имеющих производные. В § 5.2 было доказано, что существование первой производной функции $f(x)$ в точке x_0 равносильно существованию у графика функции f касательной в точке $(x_0, f(x_0))$. Для краткости говорят о касательной в точке x_0.

Сейчас будем изучать свойства функций, связанные с положением их графика относительно касательной.

Определение. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Говорят, что f *выпукла в точке* x_0, если для x из некоторой окрестности точки x_0 точки графика функции лежат или выше касательной в точке x_0, или на этой касательной (т. е. нет точек ниже касательной).

Если для x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 точки графика функции лежат выше касательной, функцию называют *строго выпуклой в точке* x_0.

Определение. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Говорят, что f *вогнута в точке* x_0, если для x из некоторой окрестности точки x_0 точки графика функции лежат или ниже касательной в точке x_0, или на этой касательной (т. е. нет точек выше касательной).

Если для x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 точки графика функции лежат ниже касательной, функцию называют *строго вогнутой в точке* x_0.

Определение. Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Говорят, что x_0 является *точкой перегиба* функции f, если для x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 точки графика функции при $x < x_0$ лежат строго по одну сторону касательной в точке x_0, а при $x > x_0$ – строго по другую сторону этой касательной.

Точки, в которых производная равна $+\infty$ или $-\infty$, также называют точками перегиба.

Иногда дают другое определение точек перегиба и требуют, чтобы эта точка с одной стороны от неё была точкой выпуклости, а с другой от неё стороны – точкой вогнутости функции.

Теорема 6.6.3. *Пусть в точке x_0 функция f имеет отличную от нуля производную порядка $n \geqslant 2$ и, если $n > 2$, то $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда*

1^0. *при чётном n функция f в точке x_0 строго выпукла, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строго вогнута, если $f^{(n)}(x_0) < 0$;*

2^0. *если n нечётно, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

Доказательство. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид $u(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) := f(x) - u(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Для $\varphi(x)$ выполняются равенства

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

В точке x_0 производные порядка n функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ равны. Поэтому при чётном n согласно теореме 6.6.1 $\varphi(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строгий локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$. А так как

$$f(x) = \varphi(x) + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

функция $f(x)$ в точке x_0 строго выпукла, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строго вогнута, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Если n нечётно, то функция $\varphi(x)$ строго монотонна в точке x_0, поэтому точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Таким образом, в каждой точке, в которой функция имеет отличную от нуля вторую производную, эта функция является строго выпуклой или строго вогнутой и по знаку второй производной можно сказать, какой именно случай имеет место. Если же вторая производная равна нулю, а третья производная отлична от нуля, то такая точка является точкой перегиба.

Разумеется, функция может иметь точки, которые не являются точками выпуклости, вогнутости или точками перегиба. Но в таких точках у функции нет отличных от нуля производных порядка $n \geqslant 2$.

§ 6.7. Функции, выпуклые на промежутке

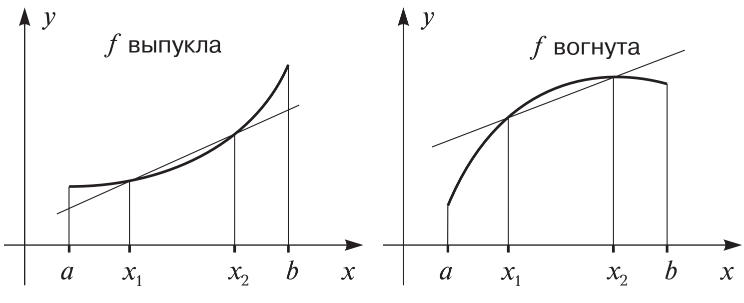
Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой на промежутке* $[a, b]$, если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, все точки графика f, соответствующие $x \in [x_1, x_2]$, расположены ниже отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, или на этом отрезке.

Функция $f(x)$ называется *строго выпуклой на промежутке* $[a, b]$, если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, все точки графика f, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, расположены ниже отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.

Здесь, как всегда в подобных случаях, концевые точки a и b могут принадлежать или не принадлежать промежутку $[a, b]$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *вогнутой на промежутке* $[a, b]$, если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, все точки графика f, соответствующие $x \in [x_1, x_2]$, расположены выше отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, или на этом отрезке.

Функция $f(x)$ называется *строго вогнутой на промежутке* $[a, b]$, если для каждого отрезка $[x_1, x_2]$, принадлежащего $[a, b]$, все точки графика f, соответствующие $x \in (x_1, x_2)$, расположены выше отрезка с концами в $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.



Наряду с этой терминологией используется и другая, когда выпуклые функции называют выпуклыми вниз, а вогнутые – выпуклыми вверх.

Определение выпуклых и вогнутых функций с помощью свойств их графика даёт наглядное представление о таких функциях, но пользоваться этими определениями не всегда удобно.

Выясним, как выпуклые и вогнутые функции можно охарактеризовать аналитически.

Вогнутость функции $f(x)$ равносильна выпуклости функции $-f(x)$. Это позволяет рассматривать сейчас только выпуклые функции.

Заметим, что функции, выпуклые на промежутке, не обязательно имеют производную во всех точках этого промежутка. Например, выпуклой является функция $|x|$.

Теорема 6.7.1. *Для того чтобы функция f была выпуклой на промежутке $[a,b]$, необходимо и достаточно каждое из следующих трёх условий: для произвольных точек x_1, x, x_2 из $[a,b]$ таких, что $x_1 < x < x_2$*

1^0. *справедливо неравенство*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}; \tag{6.7.1}$$

2^0. *справедливо неравенство*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}; \tag{6.7.2}$$

3^0. *справедливо неравенство*

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{6.7.3}$$

Если в (6.7.1)–(6.7.3) заменить знак $\leqslant$ на $<$, то каждое из полученных условий необходимо и достаточно для строгой выпуклости f на $[a,b]$.

Доказательство. Так как уравнение отрезка с концами в точках $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика функции f, имеет вид

$$y(t) = \frac{x_2-t}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{t-x_1}{x_2-x_1} f(x_2), \quad x_1 \leqslant t \leqslant x_2,$$

то выпуклость f на $[a,b]$ означает, что для любых точек x_1, x, x_2 из $[a,b]$, удовлетворяющих условию $x_1 < x < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2),$$

т. е.

$$(x_2 - x_1)f(x) \leqslant (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2). \tag{6.7.4}$$

Запишем $x_2 - x_1$ как сумму $(x_2 - x) + (x - x_1)$ и приведём подобные члены:

$$(x_2 - x)\big(f(x) - f(x_1)\big) \leqslant (x - x_1)\big(f(x_2) - f(x)\big).$$

Это неравенство равносильно (6.7.1).

Аналогично, чтобы доказать (6.7.2), используем в (6.7.4) представление $x_2 - x = (x_2 - x_1) - (x - x_1)$ и после приведения подобных членов получим

$$(x_2 - x_1)\big(f(x) - f(x_1)\big) \leqslant (x - x_1)\big(f(x_2) - f(x_1)\big),$$

что равносильно (6.7.2).

Наконец, с помощью представления $x - x_1 = (x_2 - x_1) - (x_2 - x)$ из (6.7.4) находим

$$(x_2 - x)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leqslant (x_2 - x_1)\big(f(x_2) - f(x)\big).$$

Это неравенство равносильно (6.7.3).

Таким образом, доказаны утверждения теоремы о выпуклых функциях.

Строгая выпуклость f равносильна тому, что для любых трёх точек $x_1 < x < x_2$ справедливо неравенство (6.7.4), в котором знак $\leqslant$ заменен на $<$. Поэтому повторив те же рассуждения, получим утверждения о строго выпуклых функциях.

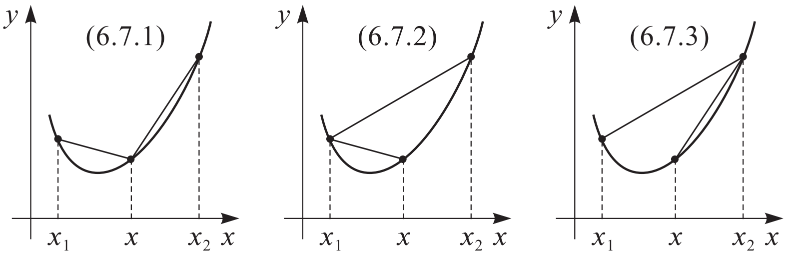
Теорема доказана.

Дробь

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad x < t, \tag{6.7.5}$$

равна угловому коэффициенту отрезка с концами в точках $(x, f(x))$ и $(t, f(t))$ графика функции. Таким образом, неравенства (6.7.1)–(6.7.3) сравнивают углы наклона отрезков, изображённых на рисунках

Оценка (6.7.2) показывает, что при убывании t дробь (6.7.5) убывает, а согласно (6.7.3) эта дробь возрастает при возрастании x. Это позволяет установить одностороннюю дифференцируемость выпуклых функций.



Теорема 6.7.2. *Если функция f выпукла на промежутке $[a, b]$, то она непрерывна на интервале (a, b) и в каждой точке x_0 этого интервала существуют односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, для которых справедливо неравенство $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.*

При этом, если $a < x_1 < x_2 < b$, то $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$, а для строго выпуклых функций $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$.

Доказательство. Для каждой точки $x_0 \in (a, b)$ при достаточно малых положительных h точки $x_0 - h$ и $x_0 + h$ принадлежат (a, b).

В силу (6.7.1) для таких h

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \leqslant \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \qquad (6.7.6)$$

При $h \to +0$ согласно сказанному выше дробь из правой части неравенства (6.7.6) убывает, а дробь из левой части возрастает. Отсюда следует, что каждая из этих дробей имеет предел при $h \to +0$. Следовательно, односторонние производные существуют и выполняется неравенство $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.

Из существования в каждой точке интервала (a, b) обеих односторонних производных вытекает непрерывность функции f на (a, b). Таким образом, точками разрыва выпуклой функции могут быть только концы промежутка выпуклости.

Пусть теперь $a < x_1 < x_2 < b$. Для произвольной точки $x \in (x_1, x_2)$ справедливо неравенство (6.7.2) .

Мы уже знаем, что односторонняя производная $f'_+(x_1)$ существует. Переходя в (6.7.2) к пределу при $x \to x_1 + 0$, получаем

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (6.7.7)$$

Рассуждая аналогично и переходя к пределу при $x \to x_2 - 0$ в (6.7.3), находим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'_-(x_2). \tag{6.7.8}$$

Таким образом, $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$.

Наконец, если функция f строго выпукла, то в (6.7.2) имеем строгое неравенство. Так как при убывании x дробь из левой части (6.7.2) убывает, то вместо (6.7.7) получим

$$f'_+(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Отсюда и из (6.7.8) вытекает оценка $f'_+(x_1) < f'_-(x_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 6.7.3. *Если функция выпукла на промежутке, то она дифференцируема во всех внутренних точках этого промежутка, за исключением не более чем счётного множества точек.*

Доказательство. Из теоремы 6.7.2 следует, что левая односторонняя производная $f'_-(x)$, которая существует в каждой внутренней точке промежутка выпуклости функции $f(x)$, является возрастающей функцией. Значит, согласно теореме 4.2.1 $f'_-(x)$ может иметь не более чем счётное множество точек разрыва и эти точки являются точками разрыва первого рода.

Покажем, что в точках непрерывности производной $f'_-(x)$ функция f дифференцируема. В самом деле, согласно теореме 6.7.2, если $x_0 < x^*$, то $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0) \leqslant f'_-(x^*)$, откуда

$$0 \leqslant f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leqslant f'_-(x^*) - f'_-(x_0).$$

Если $f'_-(x)$ непрерывна в точке x_0, то разность $f'_-(x^*) - f'_-(x_0)$ можно сделать как угодно малой, выбрав точку x^* достаточно близко к x_0, Поэтому $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Теорема доказана.

Выпуклость дифференцируемых функций характеризуется в терминах монотонности производной.

Теорема 6.7.4. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то для выпуклости $f(x)$ на (a, b) необходимо и* *достаточно возрастание производной* $f'(x)$, *а для строгой выпуклости* $f(x)$ *необходимо и достаточно строгое возрастание производной* $f'(x)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 6.7.2.

Докажем достаточность, т. е. что из возрастания производной $f'(x)$ следует выпуклость $f(x)$.

Рассмотрим произвольные три точки x_1, x, x_2, такие, что $a < x_1 < x < x_2 < b$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа, существуют точки $\xi_1 \in (x_1, x)$ и $\xi_2 \in (x, x_2)$, для которых выполняются равенства

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Из $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

а из $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Отсюда согласно теореме 6.7.1 следует выпуклость и, соответственно, строгая выпуклость функции $f(x)$ на (a, b).

Теорема доказана.

Если функция имеет вторую производную, то из теоремы 6.7.4, опираясь на теоремы 6.2.8 и 6.2.9, получаем следующее утверждение.

Следствие 6.7.5. *Если функция* $f(x)$ *имеет вторую производную на интервале* (a, b), *то*

1^0. *для выпуклости функции* f *на* (a, b) *необходимо и достаточно условие* $f''(x) \geqslant 0$;

2^0. *для строгой выпуклости* f *на* (a, b) *необходимо и достаточно условие*: $f''(x) \geqslant 0$ *на* (a, b) *и точки, в которых* $f''(x) > 0$, *всюду плотны на* (a, b). *В частности,* f *строго выпукла на* (a, b), *если* $f''(x) > 0$.

Отметим ещё одно свойство выпуклых функций. Пусть функция f выпукла на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Проведём через точку

$(x_0, f(x_0))$ графика функции f прямую $y(x) = f'_+(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$ и рассмотрим разность

$$f(x) - y(x) = (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'_+(x_0)\right).$$

При $x \to x_0 + 0$ дробь

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

убывает и её предел равен $f'_+(x_0)$. Поэтому $f(x) - y(x) \geqslant 0$ для $x > x_0$.

Точно также, если $z(x) = f'_-(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$, то при $x < x_0$ имеем $f(x) - z(x) \geqslant 0$.

Значит, для каждого числа $\alpha \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ при всех $x \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$f(x) \geqslant \alpha(x - x_0) + f(x_0). \tag{6.7.9}$$

Иначе говоря, ниже прямой $y = \alpha(x - x_0) + f(x_0)$ нет точек графика функции $f(x)$. Прямую, обладающую таким свойством, называют *опорной прямой функции f в точке x_0*. Таким образом, выпуклая функция имеет опорную прямую в каждой точке интервала выпуклости. В точках, в которых выпуклая функция имеет касательную, опорной прямой является эта касательная.

Поскольку никакая часть графика строго выпуклой функции не может быть отрезком прямой, для строго выпуклых функций в (6.7.9) при $x \neq x_0$ имеем строгое неравенство.

Приведём рекомендации по построению графиков функций, имеющих вторую производную.

Сначала ищут нули первой производной и промежутки, в которых $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. Так получают точки, в которых функция может иметь локальные экстремумы и промежутки монотонности. По второй производной находят промежутки выпуклости и вогнутости и точки, которые могут быть точками перегиба. Глобальные экстремумы находят, сравнивая значения локальных экстремумов между собой и со значениями функции в концах промежутка.

При построении графиков функций возникает вопрос об асимптотах, как об одном из свойств графика.

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке вида $(a, +\infty)$. Прямую $y = kx + b$ называют *асимптотой* (наклонной при $k \neq 0$ и горизонтальной при $k = 0$) функции f при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0.$$

Чтобы найти асимптоты, сначала выясняют, существует ли предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Если этот предел существует и равен k, то рассматривают вопрос о существовании предела

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$$

и, если он существует и равен b, то прямая $y = kx + b$ является асимптотой.

Аналогично определяют и находят асимптоты при $x \to -\infty$.

Рассматриваются также вертикальные асимптоты: если для конечного a существует бесконечный предел $\lim_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim_{x\to a-0} f(x)$, то прямую $x = a$ называют вертикальной асимптотой.

Например, прямые $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, являются вертикальными асимптотами функции $y = \operatorname{tg} x$.

§ 6.8. Некоторые классические неравенства

Теорема 6.8.1 (Неравенство Янга). *Пусть $p > 1$ и q – сопряжённое с p число, т. е.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{6.8.1}$$

Тогда для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство

$$x\,y \leqslant \frac{1}{p}\,x^p + \frac{1}{q}\,y^q, \tag{6.8.2}$$

называемое неравенством Янга.

Доказательство. Достаточно рассмотреть только положительные x и y.

Введём функцию

$$\varphi(x) := \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy, \qquad x > 0,$$

считая y фиксированным положительным параметром, и покажем, что φ принимает только неотрицательные значения. Это и будет означать справедливость неравенства Янга.

По знаку первой производной

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = x^{p-1} - y$$

находим, что функция $\varphi(x)$ строго убывает при $x \leqslant y^{1/(p-1)}$, а при $x \geqslant y^{1/(p-1)}$ строго возрастает. Значит, минимальное значение $\varphi(x)$ имеет при $x = y^{1/(p-1)}$.

Так как $q = p/(p-1)$, то при всех $x > 0$

$$\varphi(x) \geqslant \varphi\big(y^{1/(p-1)}\big) = \frac{1}{p}y^{p/(p-1)} + \frac{1}{q}y^q - y^{1/(p-1)+1} = 0.$$

Теорема доказана.

Функция φ обращается в нуль только при $x = y^{1/(p-1)}$, т. е. когда $x^p = y^q$. Поэтому знак равенства в (6.8.2) имеет место в том и только том случае, когда $x^p = y^q$.

Отметим, что число, сопряжённое с p, часто обозначают p'.

Теорема 6.8.2 (Неравенство Гёльдера). *Пусть $p > 1$ и q – сопряжённое с p число. Тогда для любых двух наборов по n неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}, \tag{6.8.3}$$

называемое неравенством Гёльдера.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда и среди a_k и среди b_k есть числа, отличные от нуля.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ положим

$$x_k := a_k \Big/ \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^p\right)^{1/p}; \qquad y_k := b_k \Big/ \left(\sum_{m=1}^{n} b_m^q\right)^{1/q}$$

и запишем для этих чисел оценку (6.8.2):

$$x_k\, y_k \leqslant \frac{1}{p}\, a_k^p \Big/ \sum_{m=1}^{n} a_m^p + \frac{1}{q}\, b_k^q \Big/ \sum_{m=1}^{n} b_m^q.$$

Сложим полученные неравенства по k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Согласно определению чисел x_k и y_k отсюда следует (6.8.3).

Теорема доказана.

Отметим важный частный случай неравенства Гёльдера, соответствующий $p = 2$, $q = 2$.

Теорема 6.8.3 (Неравенство Коши–Буняковского). *Для любых $2n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}, \tag{6.8.4}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского.

Здесь опущено условие неотрицательности чисел a_k, b_k. Конечно, от этого требования можно было отказаться и в неравенстве Гёльдера (6.8.3), если заменить в правой его части a_k на $|a_k|$ и b_k на $|b_k|$.

Неравенство (6.8.4) впервые доказал О. Коши, позднее В. Я. Буняковский установил интегральный аналог этого неравенства (он будет приведен в § 9.8). В русскоязычной литературе сложилась традиция оценку (6.8.4), упомянутое неравенство для интегралов и другие подобные им оценки называть неравенствами Коши–Буняковского.

Теорема 6.8.4 (Неравенство Минковского). *Пусть $p > 1$ и числа $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ неотрицательны. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}, \tag{6.8.5}$$

называемое неравенством Минковского.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда сумма в левой части (6.8.5) положительна. Запишем тождество

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

и к каждой из сумм в его правой части применим неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'}+$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)p'}\right)^{1/p'}=$$
$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p'}.$$

Разделив обе части полученной оценки на

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p'},$$

приходим к (6.8.5).

Теорема доказана.

Отметим частный случай неравенства (6.8.5), когда $p=2$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}. \qquad (6.8.6)$$

Если при $n=3$ тройки чисел (a_1,a_2,a_3) и (b_1,b_2,b_3) считать компонентами векторов в ортонормированном базисе, то неравенство Коши–Буняковского даст оценку модуля скалярного произведения векторов через длины этих векторов. А неравенство (6.8.6) даст оценку длины суммы векторов через длины этих векторов. Поэтому неравенство (6.8.6), как и неравенство Минковского (6.8.5), называют также *неравенством треугольника.*

Теорема 6.8.5 (Неравенство Иенсена). *Пусть функция $f(x)$ выпукла на промежутке $[a,b]$. Тогда для любых n точек x_1,*

$x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 2$, *из* $[a, b]$ *и любых положительных чисел* α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *таких, что* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, *справедливо неравенство*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k), \tag{6.8.7}$$

называемое неравенством Иенсена.

Доказательство. Положим

$$s := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Тогда $s \in (a, b)$. Пусть

$$y = L(x - s) + f(s)$$

– опорная прямая функции $f(x)$ в точке s. При всех $x \in [a, b]$ имеем

$$f(x) \geqslant L(x - s) + f(s). \tag{6.8.8}$$

В частности, для каждого $k = 1, \ldots, n$

$$f(x_k) \geqslant L(x_k - s) + f(s).$$

Умножим эти оценки на α_k и сложим полученные неравенства по k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \geqslant L \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x_k - s) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(s) =$$
$$= L \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - Ls \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + f(s) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = f(s).$$

Отсюда вытекает (6.8.7).

Теорема доказана.

Если функция f строго выпукла, то неравенство (6.8.8) при $x \neq s$ является строгим. Значит, в этом случае строгим является и неравенство (6.8.7).

Если функция $f(x)$ вогнута на промежутке $[a, b]$, то при тех же условиях на точки x_k и числа α_k неравенство Иенсена имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \leqslant f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right). \tag{6.8.9}$$

Сравним с помощью неравенства Иенсена среднее арифметическое и среднее геометрического произвольного набора положительных чисел. При этом будет использована вогнутость функции $\ln x$, в которой легко убедиться по знаку второй производной: $(\ln x)'' = -1/x^2 < 0$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные числа. Средним арифметическим этих чисел называется выражение

$$\frac{1}{n}\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

а средним геометрическим, если эти числа положительны, – выражение

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}.$$

Имеем

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = \exp\bigl(\ln(x_1 \ldots x_n)^{1/n}\bigr) = \exp\biggl(\frac{1}{n}\,(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n)\biggr).$$

Согласно (6.8.9)

$$\frac{1}{n}(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n) \leqslant \ln\biggl(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\biggr).$$

Поэтому в силу возрастания показательной функции e^x

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \exp\biggl(\ln\biggl(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\biggr)\biggr) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Таким образом, установлено следующее утверждение.

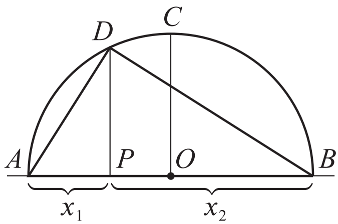
Теорема 6.8.6. *Для любых положительных чисел* $x_1, \ldots, x_n$ *справедливо неравенство*

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \tag{6.8.10}$$

т. е. среднее геометрическое положительных чисел не превосходит их среднего арифметического.

Формула (6.8.10) при $n = 2$

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad x_1, x_2 > 0, \tag{6.8.11}$$



допускает простую геометрическую интерпретацию. Построим на отрезке AB длины x_1+x_2 как на диаметре полуокружность, обозначим её центр O.

Пусть радиус $OC \perp AB$, длина OC равна $(x_1+x_2)/2$. Если $DP \perp AB$, то из подобия прямоугольных треугольников $\triangle\, ADP$ и $\triangle\, DBP$ следует, что длина отрезка DP равна $\sqrt{x_1x_2}$.

Таким образом, неравенство (6.8.11) означает, что длина перпендикуляра, опущенного из произвольной точки рассматриваемой полуокружности на диаметр AB, не превосходит длины радиуса OC.

Теорема 6.8.7 (Неравенство Чебышева). *Если числа $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ удовлетворяют условиям*

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n; \qquad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, \tag{6.8.12}$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{m=1}^{n} b_m \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \tag{6.8.13}$$

которое называют неравенством Чебышева.

Доказательство. Имеем

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{m=1}^{n} b_m = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k b_m =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \bigl(a_k b_k - a_k b_m\bigr) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k (b_k - b_m).$$

Если в полученной двойной сумме поменять индексы k и m, значение суммы не изменится. Значит,

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{m=1}^{n} b_m =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \big[a_k(b_k - b_m) + a_m(b_m - b_k)\big] =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} (a_k - a_m)(b_k - b_m). \tag{6.8.14}$$

В силу (6.8.12) для любых индексов k и m имеем $(a_k - a_m) \times (b_k - b_m) \geqslant 0$. Поэтому (6.8.13) вытекает из (6.8.14).

Легко убедиться, что если одна из последовательностей $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ возрастает, а другая убывает, то в (6.8.13) нужно заменить знак неравенства $\leqslant$ на $\geqslant$.

Если все числа b_k равны между собой, то при любых a_k в (6.8.13) имеет место знак равенства. Это показывает, в частности, что множитель n в правой части неравенства (6.8.13) нельзя заменить на меньший.

Установленные в этом параграфе неравенства можно значительно обобщить. С некоторыми такими обобщениями мы познакомимся в дальнейшем.

Глава 7. Кривые в трёхмерном пространстве

§ 7.1. Векторнозначные функции

До сих пор изучались функции, значениями которых были действительные числа, хотя во многих случаях (но не всегда) значениями могли бы быть и комплексные числа. Так, для функций, значениями которых являются комплексные числа, не справедливы, например, теорема Ролля и теоремы 6.3.2 и 6.3.3 (правила Лопиталя).

Мы уже говорили, что понятие функции имеет очень общий характер и значениями функций (как и их аргументами) могут быть элементы произвольных множеств.

При изучении кривых будут использоваться векторнозначные функции числового аргумента, т. е. функции, аргументами которых являются числа, а значениями – векторы трёхмерного пространства. Такие функции называют векторными функциями или вектор-функциями.

Когда рассматриваются как функции, значениями которых являются векторы, так и функции, значениями которых являются числа, первые называют векторными, а вторые – скалярными.

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ зафиксирована некоторая декартова прямоугольная система координат.

Тогда между векторами $\overline{r}$ и упорядоченными тройками чисел (x, y, z) – компонентами векторов – имеет место взаимнооднозначное соответствие. Задание на промежутке числовой прямой векторной функции $\overline{r}(t)$ эквивалентно заданию на этом промежутке трёх скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ аргумента t.

Для вектор-функций по аналогии со скалярным случаем даются определения предела, непрерывности, производной. При этом близость значений функции $\overline{r}(t_1)$ и $\overline{r}(t_2)$ понимается как близость точек с радиусами-векторами $\overline{r}(t_1)$ и $\overline{r}(t_2)$, т. е. как малость длины вектора $\overline{r}(t_1) - \overline{r}(t_2)$.

Приведём определение предела по Коши векторной функции.

Определение. Вектор $\overline{r}_0$ называют *пределом* векторной функции $\overline{r}(t)$ в точке t_0, если функция $\overline{r}(t)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки t_0 и для каждого положительного числа ε существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек t из проколотой δ-окрестности точки t_0 выполняется неравенство

$$|\overline{r}(t) - \overline{r}_0| < \varepsilon.$$

Пределы векторных функций записывают как и пределы скалярных функций:

$$\overline{r}_0 = \lim_{t\to t_0} \overline{r}(t).$$

Если $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\overline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, то

$$|\overline{r}(t) - \overline{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}.$$

Поэтому существование предела $\lim \overline{r}(t) = \overline{r}_0$ равносильно существованию трёх пределов $\lim x(t) = x_0$, $\lim y(t) = y_0$, $\lim z(t) = z_0$.

Пределы векторных функций обладают многими свойствами пределов скалярных функций и доказательство по существу остаётся таким же.

Так, если функция $\overline{r}(t)$ имеет предел в точке t_0, то в некоторой проколотой окрестности точки t_0 функция $\overline{r}(t)$ ограничена, что означает ограниченность длин векторов $\overline{r}(t)$.

Перечислим свойства пределов, связанные с действиями над вектор-функциями. Пусть векторные функции $\overline{r}_1(t)$, $\overline{r}_2(t)$, $\overline{r}(t)$ и скалярная функция $f(t)$ имеют предел при $t \to t_0$. Тогда при $t \to t_0$ существуют следующие пределы и для них выполняются равенства:

$$\lim(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t)) = \lim \overline{r}_1(t) \pm \lim \overline{r}_2(t);$$
$$\lim f(t) \cdot \overline{r}(t) = \lim f(t) \cdot \lim \overline{r}(t);$$
$$\lim\big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big) = \big(\lim \overline{r}_1(t), \lim \overline{r}_2(t)\big);$$
$$\lim\big[\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big] = \big[\lim \overline{r}_1(t), \lim \overline{r}_2(t)\big].$$

Эти свойства легко вывести из свойств пределов скалярных функций, рассмотрев компоненты векторов. Но можно провести рассуждения и непосредственно для векторных функций.

Докажем, например, утверждение о переходе к пределу в скалярном произведении. Пусть $\overline{r}_1^* := \lim_{t\to t_0} \overline{r}_1(t)$ и $\overline{r}_2^* := \lim_{t\to t_0} \overline{r}_2(t)$. Тогда

$$\big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big) - \big(\overline{r}_1^*, \overline{r}_2^*\big) = \big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t) - \overline{r}_2^*\big) + \big(\overline{r}_1(t) - \overline{r}_1^*, \overline{r}_2^*\big).$$

Поэтому

$$\left|\big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big) - \big(\overline{r}_1^*, \overline{r}_2^*\big)\right| \leqslant \left|\overline{r}_1(t)\right| \left|\overline{r}_2(t) - \overline{r}_2^*\right| + \left|\overline{r}_1(t) - \overline{r}_1^*\right| \left|\overline{r}_2^*\right|.$$

Отсюда в силу ограниченности функции $\overline{r}_1(t)$ в достаточно малой проколотой окрестности точки t_0 вытекает равенство пределов.

Определение. Функцию $\overline{r}(t)$ называют *непрерывной в точке* t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \overline{r}(t) = \overline{r}(t_0).$$

Непрерывность векторной функции равносильна непрерывности трёх скалярных функций – компонент векторов. А операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число, скалярного и векторного умножения, произведённые над непрерывными вектор-функциями, дают в результате непрерывные функции.

Производная векторной функции $\overline{r}(t)$ определяется как предел

$$\overline{r}'(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t + \Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Существование производной $\overline{r}'(t)$ равносильно существованию трёх производных $x'(t), y'(t)$ и $z'(t)$. При этом $\overline{r}'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$.

Аналогично даются определения односторонних пределов, односторонней непрерывности и односторонних производных для векторных функций.

Функцию $\overline{r}(t)$ называют *дифференцируемой* в точке t_0, если для приращения функции $\overline{r}(t)$ в точке t_0 при $\Delta t \to 0$ справедливо представление

$$\Delta\overline{r} := \overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0) = \overline{A}\Delta t + \overline{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t,$$

где $\overline{A}$ – некоторый вектор и $\lim_{\Delta t \to 0} \overline{\varepsilon}(\Delta t) = \overline{0}$.

Как и для скалярных функций устанавливается, что дифференцируемость функции $\overline{r}(t)$ в точке t_0 равносильна существованию производной $\overline{r}'(t_0)$ и в этом случае $\overline{A} = \overline{r}'(t_0)$.

Если функция $\overline{r}(t)$ имеет производную в точке или на промежутке, говорят, что эта функция дифференцируема соответственно в точке или на промежутке. При этом если производная непрерывна, функцию называют *непрерывно дифференцируемой*.

Приведём формулу производной сложной функции.

Пусть на промежутке $[\alpha, \beta]$ задана дифференцируемая скалярная функция $t = \lambda(\tau)$, значения которой принадлежат промежутку $[a, b]$, и на $[a, b]$ задана дифференцируемая векторная функция $\overline{r}(t)$. Тогда сложная функция $\overline{R}(\tau) := \overline{r}(\lambda(\tau))$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и справедливо равенство

$$\overline{R}'_\tau = \overline{r}'_t \cdot \lambda'_\tau.$$

Доказать это проще всего, рассматривая компоненты векторных функций.

Многие свойства производных скалярных функций легко переносятся на производные векторных функций. Например, из существования производной в точке следует непрерывность функции в этой точке.

Кроме того, выполняются равенства:

$$\begin{gathered}
\big(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t)\big)' = \overline{r}'_1(t) \pm \overline{r}'_2(t);\\
\big(f(t) \cdot \overline{r}(t)\big)' = f'(t)\,\overline{r}(t) + f(t)\,\overline{r}'(t);\\
\big(\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big)' = \big(\overline{r}'_1(t), \overline{r}_2(t)\big) + \big(\overline{r}_1(t), \overline{r}'_2(t)\big);\\
\big[\overline{r}_1(t), \overline{r}_2(t)\big]' = \big[\overline{r}'_1(t), \overline{r}_2(t)\big] + \big[\overline{r}_1(t), \overline{r}'_2(t)\big].
\end{gathered}$$

Здесь, как и в скалярном случае, предполагается, что существуют производные в правых частях, а утверждается существование производных в левых частях и справедливость равенств.

Вместе с тем, такое важное свойство дифференцируемых скалярных функций, как формула конечных приращений Лагранжа, прямого аналога в векторном случае не имеет.

В самом деле, рассмотрим функцию $\overline{r}(t) := (\cos t, \sin t)$, значениями которой являются двумерные векторы.

Тогда $\overline{r}(2\pi) - \overline{r}(0) = \overline{0}$. Но $\overline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, следовательно, $|\overline{r}'(t)| = 1$. Значит, равенство

$$\overline{r}(2\pi) - \overline{r}(0) = \overline{r}'(\xi)(2\pi - 0).$$

не может выполняться ни при каком ξ.

Тем не менее, для векторных функций справедливо одно из основных следствий формулы конечных приращений Лагранжа.

Теорема 7.1.1. *Пусть функция $\overline{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет производную на интервале (a,b). Тогда существует такое число $\xi \in (a,b)$, что*

$$\left|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)\right| \leqslant \left|\overline{r}'(\xi)\right| (b-a).$$

Доказательство. Будем считать, что $\overline{r}(b) - \overline{r}(a) \neq \overline{0}$, так как при $\overline{r}(b) = \overline{r}(a)$ утверждение теоремы очевидно.

Положим

$$\overline{e} := \frac{\overline{r}(b) - \overline{r}(a)}{|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)|}.$$

Тогда $|\overline{e}| = 1$ и

$$\left|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)\right| = \big(\overline{r}(b) - \overline{r}(a), \overline{e}\big) = \big(\overline{r}(b), \overline{e}\big) - \big(\overline{r}(a), \overline{e}\big).$$

Введём скалярную функцию

$$f(t) := \big(\overline{r}(t), \overline{e}\big).$$

Эта функция непрерывна на $[a,b]$ и имеет производную на (a,b). Значит, согласно формуле конечных приращений Лагранжа существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Но

$$|f'(\xi)| = \left|(\overline{r}'(\xi), \overline{e})\right| \leqslant |\overline{r}'(\xi)|.$$

Поэтому

$$\left|\overline{r}(b) - \overline{r}(a)\right| = f(b) - f(a) \leqslant |\overline{r}'(\xi)|\,(b-a)$$

и теорема доказана.

§ 7.2. Определение кривой. Длина кривой

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана непрерывная функция $\overline{r}(t)$, значениями которой являются векторы трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^3$. Будем считать, что в $\mathbb{E}^3$ зафиксирована декартова прямоугольная система координат и $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Множество точек $M(t) := (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$, радиусами-векторами которых являются векторы $\overline{r}(t)$, обозначим Γ. Будем писать

$$\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a,b]\}. \tag{7.2.1}$$

Множество Γ называют *непрерывной кривой* (*жордановой кривой*) в пространстве $\mathbb{E}^3$.

Каждому значению параметра t соответствует точка $M(t)$ кривой Γ. Когда t пробегает $[a,b]$, возрастая от a к b, кривая Γ служит траекторией движения точки $M(t)$ и возрастание t определяет некоторое направление движения по кривой. Говорят, что этим на кривой Γ задаётся *ориентация*.

При убывании t от b к a получим ту же кривую Γ, но с противоположным направлением движения (с противоположной ориентацией).

В механике кривую (7.2.1), заданную вектор-функцией $\overline{r}(t)$, называют *годографом* этой функции.

Если некоторые точки, соответствующие разным значениям t из интервала (a,b), совпадают, их называют точками самопересечения (кратными точками) кривой.

Непрерывную кривую без точек самопересечения называют *простой дугой*.

Непрерывную кривую (7.2.1) называют замкнутой кривой (замкнутым контуром), если $M(a) = M(b)$, а при всех остальных t точки $M(t)$ различны.

Простая дуга является *гомеоморфным* образом отрезка, т. е. она может быть получена из отрезка с помощью взаимнооднозначного непрерывного отображения, обратное к которому также непрерывно. Простой замкнутый контур является гомеоморфным образом окружности.

Непрерывная кривая может быть задана разными вектор-функциями. Например, если сделать замену аргумента $t = \lambda(\tau)$, где $\lambda(\tau)$ – непрерывная строго возрастающая функция, отображающая промежуток $[\alpha,\beta]$ на $[a,b]$, то получим ту же кривую (7.2.1), заданную теперь формулой

$$\Gamma = \{\overline{r}(\lambda(\tau)),\ \tau \in [\alpha,\beta]\}.$$

При этом в силу возрастания функции λ ориентация на кривой Γ сохранится. Если же функция $\lambda(\tau)$ строго убывает, то получим кривую Γ с противоположной ориентацией.

Длину кривой определяют, используя ломаные.

Пусть в $\mathbb{E}^3$ заданы точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Соединив последовательно отрезками точку M_0 с M_1, затем M_1 с $M_2, \ldots, M_{k-1}$ с M_k и т. д., получим ломаную, которая является непрерывной кривой. Длину ломаной определяют как сумму длин составляющих её отрезков $M_{k-1}M_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть непрерывная функция $\overline{r}(t)$ задана на промежутке $[a, b]$ и $\Gamma := \{\overline{r}(t),\, t \in [a, b]\}$. Рассмотрим разбиение T промежутка $[a, b]$ точками t_k:

$$a \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_n \leqslant b.$$

Построим ломаную с вершинами в точках $M_k := M(\overline{r}(t_k))$, соединив отрезками точки M_{k-1} и M_k, $k = 1, \dots, n$. Такую ломаную называют *вписанной* в кривую Γ. Длину полученной ломаной обозначим σ_T.

Определение. *Длиной* S_Γ непрерывной кривой (7.2.1), не имеющей кратных точек, называют верхнюю грань длин вписанных в неё ломаных:

$$S_\Gamma := \sup_T \sigma_T, \tag{7.2.2}$$

где sup обозначает точную верхнюю грань по всем разбиениям T промежутка $[a, b]$, если эта верхняя грань существует, и sup обозначает $+\infty$, если длины ломаных σ_T не ограничены.

Длина кривой не зависит от функции $\overline{r}(t)$, с помощью которой кривая задана, так как в определении длины участвуют только ломаные, вписанные в кривую.

Ясно, что всегда $0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty$. Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривую Γ называют *спрямляемой*. Если $S_\Gamma = +\infty$, кривую называют *неспрямляемой*.

Теорема 7.2.1. *Пусть* $\Gamma := \{\overline{r}(t),\, t \in [a, b]\}$ *– непрерывная кривая без кратных точек и* $c \in (a, b)$. *Положим*

$$\Gamma_1 := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, c]\}, \quad \Gamma_2 := \{\overline{r}(t),\ t \in [c, b]\}.$$

Тогда

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}. \tag{7.2.3}$$

Доказательство. Заметим, что здесь спрямляемость кривых не предполагается, а сумма числа и $+\infty$, как обычно, считается равной $+\infty$.

Для произвольного разбиения T промежутка $[a, b]$ построим разбиение T^*, добавив к T точку c, если среди точек разбиения её не было. Ясно, что при этом длина вписанной в Γ ломаной не может уменьшится, т.е. $\sigma_T \leqslant \sigma_{T^*}$.

Пусть T_1 и T_2 – те разбиения промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$, которые порождаются разбиением T^*. Длины ломаных σ_{T^*}, σ_{T_1} и σ_{T_2}, вписанных соответственно в кривые Γ, Γ_1 и Γ_2, связаны равенством $\sigma_{T^*} = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}$. Поэтому

$$\sigma_T \leqslant \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}.$$

Заменив в правой части этого неравенства длины ломаных на длины соответствующих кривых, получим

$$\sigma_T \leqslant S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}.$$

Поэтому

$$S_\Gamma = \sup_T \sigma_T \leqslant S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}. \tag{7.2.4}$$

Оценим теперь S_Γ снизу.

Пусть T_1 и T_2 – произвольные разбиения соответственно промежутков $[a, c]$ и $[c, b]$ и T – порождённое ими разбиение промежутка $[a, b]$. Тогда

$$\sigma_{T_1} + \sigma_{T_2} = \sigma_T$$

и значит,

$$\sigma_{T_1} + \sigma_{T_2} \leqslant S_\Gamma.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от разбиений T_1 и T_2, поэтому в левой части можно перейти к верхним граням по разбиениям T_1 и T_2:

$$S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2} \leqslant S_\Gamma. \tag{7.2.5}$$

Из (7.2.4) и (7.2.5) вытекает равенство (7.2.3).

Теорема доказана.

Свойство длины кривой, выраженное равенством (7.2.3), называют *аддитивностью*.

§ 7.3. Гладкие кривые

Можно показать, но не будем на этом останавливаться, что если в определении кривой предполагать только непрерывность функции $\overline{r}(t)$, то в качестве непрерывных кривых появятся и множества точек, не соответствующие интуитивному представлению о кривой как о “тонкой нити”. Например, точки непрерывной кривой могут целиком заполнять квадрат. Первый пример подобной непрерывной кривой построил Д. Пеано, такие кривые называют кривыми Пеано.

Поэтому рассматривают более узкие классы кривых, когда на функцию $\overline{r}(t)$ накладываются дополнительные условия.

Определение. Кривая Γ называется *непрерывно дифференцируемой*, если её можно представить в виде

$$\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a,b]\} \tag{7.3.1}$$

с непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функцией $\overline{r}(t)$.

Если функция $\overline{r}(t)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную, кривую (7.3.1) называют *кусочно непрерывно дифференцируемой.*

Теорема 7.3.1. *Непрерывно дифференцируемая кривая* (7.3.1) *спрямляема и для её длины справедливы оценки*

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}\,(b-a) \leqslant S_\Gamma \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,(b-a), \tag{7.3.2}$$

где $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ *и*

$$m_x := \min_{t\in[a,b]} |x'(t)|, \qquad M_x := \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$

а величины m_y, M_y, m_z, M_z *определяются аналогично.*

Доказательство. Для каждого разбиения T отрезка $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_T &= \sum_{k=1}^{n} \big|\overline{r}(t_k) - \overline{r}(t_{k-1})\big| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big\{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 \\
&\qquad + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2\big\}^{1/2} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big\{[x'(\xi_k)\,(t_k - t_{k-1})]^2 + [y'(\eta_k)\,(t_k - t_{k-1})]^2 \\
&\qquad + [z'(\zeta_k)\,(t_k - t_{k-1})]^2\big\}^{1/2},
\end{aligned}$$

где согласно формуле конечных приращений Лагранжа ξ_k, η_k, ζ_k – некоторые точки из (t_{k-1}, t_k). Таким образом,

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{[x'(\xi_k)]^2 + [y'(\eta_k)]^2 + [z'(\zeta_k)]^2}.$$

Переходя к минимальным и максимальным на $[a, b]$ значениям модулей производных, получим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}\,(b - a) \leqslant \sigma_T \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,(b - a).$$

Из этих оценок вытекает двойное неравенство (7.3.2).

Теорема доказана.

Теорема 7.3.1 справедлива и для кусочно непрерывно дифференцируемых кривых. Доказательство остается тем же, поскольку в определении длины кривой (7.2.2) можно рассматривать только те разбиения T, которые содержат все точки, где у функции $\overline{r}(t)$ нет производной.

Определение. Пусть кривая

$$\Gamma := \{\overline{r}(\tau),\ \tau \in [a, b]\} \tag{7.3.3}$$

спрямляема и

$$\Gamma(t) := \{\overline{r}(\tau),\ \tau \in [a, t]\}$$

– часть кривой Γ, соответствующая изменению параметра τ от a до t, $t \leqslant b$. Функцию

$$s(t) := S_{\Gamma(t)}, \quad t \in [a, b],$$

называют *длиной дуги* кривой Γ.

Теорема 7.3.2. *Если кривая* (7.3.3) *непрерывно дифференцируема, то длина её дуги* $s(t)$ *монотонно возрастает, имеет непрерывную производную и справедливо равенство*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \left|\frac{d\overline{r}(t)}{dt}\right|. \tag{7.3.4}$$

Доказательство. Из определения длины дуги следует, что функция $s(t)$ возрастает для любой непрерывной спрямляемой кривой.

Рассмотрим отношение приращения функции $s(t)$ к приращению аргумента $\Delta s/\Delta t$. В силу возрастания $s(t)$ имеем при всех Δt

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0. \tag{7.3.5}$$

Для произвольной точки $t_0 \in [a, b]$ рассмотрим при достаточно малых Δt часть кривой, соответствующую изменению t в пределах от t_0 до $t_0 + \Delta t$, если $\Delta t > 0$, и от $t_0 + \Delta t$ до t_0, если $\Delta t < 0$.

В силу теоремы 7.3.1 для приращений функции $s(t)$, соответствующих таким приращениям Δt, справедливы оценки

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}\,|\Delta t| \leqslant |\Delta s| \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,|\Delta t|, \tag{7.3.6}$$

где m_x, M_x и другие подобные величины – это минимумы и максимумы модулей компонент вектора $\overline{r}'(t)$ на указанных отрезках изменения t.

Из (7.3.6), учитывая (7.3.5), находим

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \tag{7.3.7}$$

При $\Delta t \to 0$ в силу непрерывности производной $x'(t)$ имеем $M_x \to |x'(t_0)|$ и $m_x \to |x'(t_0)|$ и аналогично для величин M_y, m_y, M_z и m_z. Поэтому из (7.3.7) при $\Delta t \to 0$ вытекает равенство (7.3.4).

Теорема доказана.

Определение. Кривая

$$\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}$$

называется *гладкой*, если функция $\overline{r}(t)$ непрерывно дифференцируема и $\overline{r}'(t) \neq \overline{0}$ для всех $t \in [a, b]$.

Кривая называется *кусочно гладкой*, если она непрерывна и является объединением конечного числа гладких кривых.

Можно сказать иначе: множество точек из $\mathbb{E}^3$ называется гладкой кривой, если существует непрерывно дифференцируемая функция $\overline{r}(t)$ с неравной нулю производной такая, что это множество можно представить как $\{\overline{r}(t),\, t \in [a, b]\}$.

Для гладкой кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t),\, t \in [a, b]\}$ при каждом $t_0 \in [a, b]$ отлична от нуля по крайней мере одна из производных $x'(t_0)$,

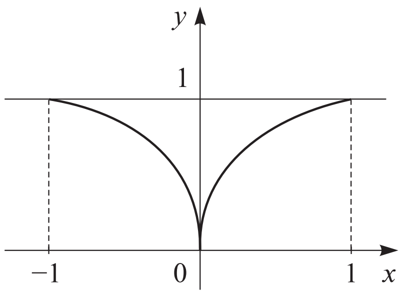
$y'(t_0)$, $z'(t_0)$. Если, например, $x'(t_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности t_0 производная $x'(t)$ сохраняет знак и, следовательно, функция $x(t)$ строго монотонна.

Значит, $x(t)$ в этой окрестности имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $t = t(x)$. Таким образом, гладкую кривую в некоторой окрестности каждой её точки можно задать уравнениями $y = y(t(x))$, $z = z(t(x))$, т. е. уравнениями вида $y = g(x)$, $z = h(x)$.

Особенно просто это выглядит для плоских кривых. В этом случае $z \equiv 0$ и уравнение соответствующей части гладкой кривой имеет вид $y = g(x)$ с непрерывно дифференцируемой функцией $g(x)$.

Итак, плоская гладкая кривая в некоторой окрестности каждой своей точки является графиком непрерывно дифференцируемой функции.

Заметим, что в отличие от гладких кривых непрерывно дифференцируемые кривые могут иметь особенности. Например, если $\overline{r}(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, то кривая является графиком функции $y = |x|^{2/3}$, изображённым на рисунке



Рассмотрим гладкую кривую $\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a, b]\}$. Вектор

$$\frac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t}$$

лежит на секущей, проходящей через точки кривой, соответствующие значениям t, равным $t_0 + \Delta t$ и t_0. При каждом Δt этот вектор направлен в сторону возрастания параметра t. Так как существует ненулевой предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t},$$

то вектор $\overline{r}'(t_0)$ определяет предельное положение секущей, которое называют касательным направлением. Прямую, проходящую через точку с радиусом-вектором $\overline{r}(t_0)$, параллельную вектору $\overline{r}'(t_0)$, называют касательной к кривой Γ в точке $\overline{r}(t_0)$.

Для кривых, являющихся графиками непрерывно дифференцируемых функций, это определение касательной совпадает с тем, которое было дано в § 5.2.

Если кривая $\Gamma := \{\overline{r}(t),\ t \in [a,b]\}$ является гладкой, то $|\overline{r}'(t)| > 0$ и согласно теореме 7.3.2 для функции длины дуги $s(t)$ имеем $s'(t) > 0$. Поэтому функция $s(t)$ является строго возрастающей и в определении кривой в качестве параметра можно взять длину дуги.

Таким образом, Γ можно рассматривать как кривую, заданную векторной функцией $\overline{r}(t(s))$. Изменив обозначения, получим

$$\Gamma := \{\overline{r}(s),\ s \in [0, S_\Gamma]\},$$

причём в этом случае

$$\left|\frac{d\overline{r}(s)}{ds}\right| = 1.$$

При $\Delta s \to 0$ имеем

$$\left|\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}\right| \to 1,$$

т. е. длина хорды, соединяющей две достаточно близкие точки гладкой кривой, мало отличается от длины части кривой, ограниченной этими точками.

Краткие сведения об ученых, упоминаемых в тексте

А́бель Нильс Хенрик (Abel Niels Henrik, 1802–1829) – норвежский математик.

Архиме́д (ок. 287–212 до н.э.) – древнегреческий математик и механик.

Берну́лли Иоганн (Bernulli Johann, 1667–1748) – швейцарский математик, брат Я. Бернулли.

Берну́лли Якоб (Bernulli Jacob, 1654–1705) – швейцарский математик.

Больца́но Бернард (Bolzano Bernhard, 1781–1848) – чешский математик.

Буняко́вский Виктор Яковлевич (1804–1889) – русский математик, академик Петербургской Академии наук.

Ве́йерштрасс Карл (Weierstrass Karl, 1815–1897) – немецкий математик.

Ге́йне Генрих Эдуард (Heine Heinrich Eduard (1821–1881) – немецкий математик.

Гёльдер Отто (Hölder Otto, 1859–1937) – немецкий математик.

Дарбу́ Гастон (Darboux Gaston, 1842–1917) – французский математик.

Де́декинд Рихард (Dedekind Richard, 1831–1916) – немецкий математик.

Дека́рт Рене (Descartes René, 1596–1650) – французский философ и математик.

Евкли́д (по некоторым данным 335–270 до н.э.) – дренегреческий математик.

Ие́нсен Иоганн Людвиг (Jensen Johann Ludwig, 1859–1925) – датский математик.

Ка́нтор Георг (Cantor Georg, 1845–1918) – немецкий математик.

Коши́ Огюстен Луи (Cauchy Augustin Louis, 1789–1857) – французский математик.

Лагра́нж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis, 1736–1813) – французский математик и механик.

Ле́йбниц Готфрид Вильгельм фон (Leibniz Gottfried Wilhelm von, 1646–1716) – немецкий ученый широкого профиля (философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед), дипломат.

Ли́пшиц Рудольф Отто (Lipschitz Rudolf Otto, 1832 –1903) – немецкий математик.

Лопита́ль Антуан де (L'Hopital Antoine de, 1661–1704) – французский математик.

Макло́рен Колин (Maclaurin Colin, 1698–1746) – шотландский математик.

Минко́вский Герман (Minkowski Hermann, 1864–1909) – немецкий математик и физик.

Нью́тон Исаак (Newton Isaac, 1643–1727) – английский физик и математик.

Пеа́но Джузеппе (Peano Giuseppe, 1858–1932) – итальянский математик.

Ролль Мишель (Rolle Michel, 1652–1719) – французский математик.

Те́йлор Брук (Taylor Brook, 1685–1731) – английский математик.

Ферма́ Пьер де (Fermat Pierre de, 1601–1665) – французский математик.

Фурье́ Жозеф (Fourier Jojeph, 1768–1830) – французский математик.

Чебыше́в (произносится Чебышо́в) Пафнутий Львович (1821–1894) – русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук.

Э́йлер Леонард (Euler Leonhard, 1707–1783) – уроженец Швейцарии, в 1727–1741 и 1766–1783 годы работал в Петербурге, академик Петербургской Академии наук.

Янг (часто пишут Юнг) Вильям Генри (Young William Henry, 1863–1946) – английский математик.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 11

Сергей Александрович Теляковский

Курс лекций по по математическому анализу
Семестр I

Сдано в набор 20.12.2008. Подписано в печать 12.03.2009.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pavlov@mi.ras.ru`