Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

# Лекционные курсы НОЦ

***Выпуск 10***

Издание выходит с 2006 года

А. Г. Сергеев

# Гармонические отображения

МИАН

Москва
2008

УДК 514.76+514.8
ББК (В)22.15
Л43



Л43 **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 10: Гармонические отображения / Сергеев А. Г. – 118 с.

ISBN 5-98419-029-X

Серия "Лекционные курсы НОЦ" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии "Лекционные курсы НОЦ" публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит полугодовой курс А. Г. Сергеева "Гармонические отображения", прочитанный в 2008 году.

ISBN 5-98419-029-X

# Оглавление

# Предисловие

Эта книга представляет собой запись курса лекций, прочитанных автором в Научно-образовательном центре Математического института им. В. А. Стеклова весной 2008 года, дополненного главой, посвященной гармоническим отображениям в пространства петель компактных групп Ли.

Главной целью курса являлось изложение твисторного подхода к построению гармонических отображений из римановых поверхностей в римановы многообразия. Гармонические отображения в римановы многообразия (в отличие от гармонических функций) начали изучать в середине прошлого века, но настоящий бум теория гармонических отображений пережила в 90-х годах именно благодаря появлению твисторного подхода. Развитие этого направления связано в первую очередь с трудами британской школы математиков. Одним из основных результатов их усилий явилось полное описание гармонических отображений из римановых поверхностей в комплексные грассмановы многообразия, представленное в главе 4 данного курса.

Новый подъем теория гармонических отображений испытала благодаря осознанию ее связи с общей теорией интегрируемых систем. Указанная связь была установлена Уленбек в известной работе [22], результатом которой явилось проникновение методов теории интегрируемых систем в теорию гармонических отображений. На их основе было получено полное описание гармонических отображений в унитарную группу ([22], [24]). Это направление в теории гармонических отображений, представленное в главе 5, было в значительной степени мотивировано работами физиков по изучению классических решений т.н. $\sigma$-моделей. Именно физиками были получены первые результаты по описанию гармонических отображений из римановых поверхностей в комплексные проективные пространства, завершенному затем математиками (физический “взгляд” на теорию гармонических отображений представлен в обзоре Переломова [15]).

В работе Атьи [1] была установлена связь между голоморфными отображениями римановой сферы в пространства петель компактных групп Ли и инстантонами на евклидовом 4-мерном пространстве (т.е. решениями уравнений дуальности Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$). Основываясь на этом наблюдении, можно предположить, что гармонические отображения римановой сферы в пространства петель компактных групп Ли аналогичным образом связаны с решениями полных уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$. Указанная гипотеза остается пока не доказанной, но она мотивирует изучение гармонических отображений из римановых поверхностей в пространства петель. Это новое направление теории гармонических отображений, связанное с изучением гармонических отображений в бесконечномерные кэлеровы многообразия, представлено в заключительной главе 6 данного курса.

Однако, помимо главной цели изложения твисторной теории гармонических отображений, мы рассматривали наш курс и как возможность ознакомить слушателей с методами современной (в первую очередь, комплексной) дифференциальной геометрии. По этой причине книга изобилует отступлениями, в которых излагаются необходимые, а иногда просто интересные, с нашей точки зрения, сведения из дифференциальной геометрии. Мы не ставили себе целью излагать их максимально подробно и с полными доказательствами. Скорее, наши отступления направлены на то, чтобы дать читателю "первый толчок" к самостоятельному изучению литературы, относящейся к рассматриваемому вопросу. Поэтому все они снабжены ссылками на наиболее доступные, по нашему мнению, учебники, имеющиеся на русском языке. (Есть ссылки и другого рода: в тех случаях, когда мы опускаем доказательство какого-либо из важных результатов, дается ссылка на источник, в котором это доказательство можно найти.)

Задачи, приведенные в тексте, предлагались слушателям курса и выносились на экзамен, где предлагалось решить любые две на "отличную оценку". В основном они предназначены для самостоятельного закрепления пройденного материала, однако есть несколько задач, помеченных "звездочкой", решение которых, возможно, потребует обращения к литературе за сведениями, не излагавшимися в курсе.

В заключение хочу принести свою благодарность всем слушателям курса за внимание, многочисленные вопросы и решения предложенных задач. Все это несомненно способствовало улучшению предлагаемого текста.

А. Г. Сергеев Москва, 31 октября 2008 года

# Глава 1. Общие свойства гармонических отображений

В этой главе определяются гармонические отображения римановых многообразий и выводятся уравнения, которым эти отображения удовлетворяют. Затем мы обращаемся к гармоническим отображениям комплексных и почти комплексных многообразий, являющимся главным объектом исследования в данном курсе. Начинается глава с разбора простого, но содержательного примера гармонических отображений римановой сферы в себя.

## 1.1. Гармонические отображения римановой сферы в себя

Рассмотрим следующую задачу, возникающую в теории ферромагнетизма. Предположим, что в каждой точке $x = (x_1, x_2)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ задан вектор $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ единичной длины, гладко зависящий от точки $x$. Иными словами, задано гладкое

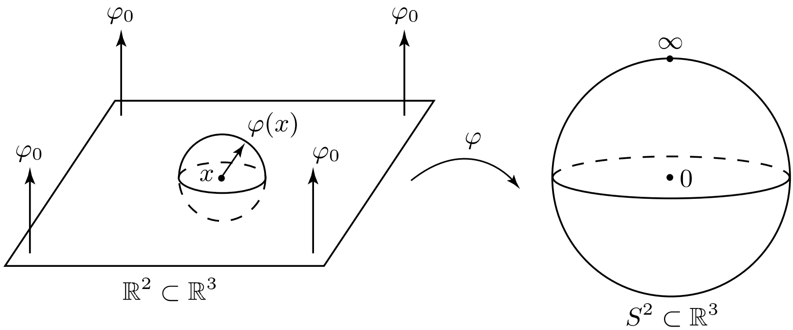



Рис. 1.1.

отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$, $x \mapsto \varphi(x)$, плоскости $\mathbb{R}^2$ в единичную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Определим *энергию* отображения $\varphi$ посредством интеграла Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |d\varphi|^2\, dx_1\, dx_2,$$

где $|d\varphi|^2 = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|^2$.

**Задача:** *Найти все гладкие отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$, обладающие конечной энергией и задающие экстремумы функционала $E(\varphi)$.*

Ввиду условия конечности энергии, естественно наложить на рассматриваемые отображения $\varphi$ следующее *асимптотическое условие*:

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi_0 \quad \text{равномерно при} \quad |x| \to \infty,$$

где $\varphi_0$ – некоторая фиксированная точка $S^2$. При этом условии отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ будут продолжаться до непрерывных отображений

$$\varphi\colon S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2.$$

Хорошо известно, что непрерывные отображения $\varphi\colon S^2 \to S^2$ обладают топологическим инвариантом, называемым *степенью отображения*. Этот целочисленный инвариант измеряет, сколько раз (с учетом ориентации) отображение $\varphi$ "покрывает" сферу в образе. Его можно вычислить по формуле

$$\deg\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^*\omega, \tag{1.1}$$

где $\omega$ – нормированная форма объема на сфере: $\int_{S^2}\omega = 1$, а $\varphi^*\omega$ – прообраз $\omega$ при отображении $\varphi$.

Задача 1. Покажите, что формула (1.1) действительно задает топологический инвариант, т.е. правая часть (1.1) не изменяется при гладких деформациях $\varphi$ в классе гладких отображений с конечной энергией, удовлетворяющих асимптотическому условию: $\varphi(x) \to \varphi_0$ равномерно при $|x| \to \infty$, в то время как первые и вторые производные $\varphi$ равномерно стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Учитывая наличие в рассматриваемой задаче описания гармонических отображений $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ топологического инварианта, мы можем уточнить ее формулировку следующим образом.

**Задача:** *Найти все экстремали функционала $E(\varphi)$ в классе гладких отображений $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2$ с конечной энергией и заданной степени $k := \deg\varphi$.*

Для решения указанной задачи удобно перейти к комплексным координатам. А именно, обозначим через $z = x_1 + ix_2$ комплексную координату в области определения $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ и введем комплексную координату $w$ в образе $S^2 \setminus \{\infty\}$ с помощью стереографической проекции. В этих координатах выражение для энергии отображения $\varphi = w(z)$ принимает вид

$$E(\varphi) = 2\int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w/\partial z|^2 + |\partial w/\partial \bar z|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|dz\wedge d\bar z|,$$

а формула для степени $\varphi$ преобразуется в

$$\deg\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{|\partial w/\partial z|^2 - |\partial w/\partial \bar z|^2}{(1+|w|^2)^2}\,|dz\wedge d\bar z|.$$

Сравнивая две последние формулы, мы видим, что

$$E(\varphi) \geqslant 4\pi|\deg\varphi|. \tag{1.2}$$

При этом равенство в формуле (1.2) может достигаться только в следующих случаях:

- ⋆ если $k = \deg\varphi \geqslant 0$, то равенство в (1.2) достигается при $\partial w/\partial\bar z \equiv 0$, т.е. на голоморфных функциях $\varphi = w(z)$;
- ⋆ если $k = \deg\varphi < 0$, то оно достигается при $\partial w/\partial z \equiv 0$, т.е. на антиголоморфных функциях $\varphi = w(z)$.

Следовательно, *голоморфные отображения $\varphi = w(z)$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в топологических классах с $k = \deg\varphi \geqslant 0$, в то время как антиголоморфные отображения $\varphi = w(z)$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в топологических классах с $k = \deg\varphi < 0$. Значение энергии $E(\varphi)$ на минимизирующих отображениях равно $4\pi|\deg\varphi| = 4\pi|k|$.*

Отметим, что минимальные значения энергии целочисленны по модулю $4\pi$. Это так называемое "квантование энергии", которое зачастую возникает не только в квантовых, но и классических нелинейных моделях, изучаемых в теоретической физике.

Найдем конкретное выражение для минимизирующих отображений. Предположим, для определенности, что $k = \deg\varphi \geqslant 0$ и заметим, что функционал $E(\varphi)$ не изменяется при вращениях сферы $S^2$ в образе ( по этой причине рассматриваемую модель часто называют SO(3)-моделью). Поэтому мы можем выбрать в качестве асимптотического значения $\varphi_0$ любую точку на сфере $S^2$, например, ту, которая отвечает значению $w_0 = 1$. Нам нужно описать голоморфные отображения римановой сферы $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ степени $k$, равные 1 на бесконечности. Любое такое отображение рационально, а поскольку оно имеет степень $k$, то представляется в виде

$$\varphi = w(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - a_j}{z - b_j}, \tag{1.3}$$

где $a_j$, $b_j$ – произвольные комплексные числа (для которых выписанная дробь несократима). Аналогичное описание допускают антиголоморфные отображения, минимизирующие $E(\varphi)$ при $k < 0$.

Заметим, что пространство решений нашей задачи, задаваемых формулой (1.3), зависит от $4k$ вещественных параметров (или от $4k + 2$ вещественных параметров, если добавить вращения сферы $S^2$ в образе).

Мы описали все локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$. Оказывается, что других экстремалей у $E(\varphi)$ нет (это эффект двумерности образа рассматриваемых отображений $\varphi$).

Задача 2*. Покажите, что все гладкие отображения $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, где $\mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – риманова сфера, являющиеся экстремалями функционала энергии $E(\varphi)$ (с конечной энергией) исчерпываются голоморфными и антиголоморфными отображениями.

## 1.2. Определение гармонических отображений

Отступление (тензорные поля; см. [11], пп. 16–19).

Определение 1. *Тензорным полем* или просто *тензором* $T$ ранга $(p, q)$ на гладком многообразии $M$ называется гладкое сечение расслоения

$$\underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{p} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M}_{q} \longrightarrow M,$$

где $TM$ – касательное расслоение (расслоение векторов), $T^*M$ – кокасательное расслоение (расслоение ковекторов или 1-форм).

*Локальное описание.* Обозначим через $(x^1, \ldots, x^n)$ локальные координаты в окрестности точки $p \in M$. Векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n},$$

задают локальный базис расслоения $TM$, а формы $dx^1, \ldots, dx^n$ – локальный базис расслоения $T^*M$. В этих координатах локальное выражение тензора $T$ имеет вид:

$$T \sim \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \sum_{j_1,\ldots,j_q=1}^{n} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}. \tag{1.4}$$

Особое значение имеют для нас тензоры $(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q})$, симметричные по верхним индексам и кососимметричные по нижним, которые принято записывать в виде

$$T \sim \sum_{i_1,\ldots,i_p} \sum_{j_1,\ldots,j_q} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}.$$

Связь между тензорным полем $T$ и его локальными представлениями $(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q})$ устанавливается следующим образом. Выберем покрытие $M$ координатными окрестностями $\{U_\alpha\}$, в которых тензорное поле $T$ имеет локальное представление $(\overset{\alpha}{T}{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q})$. На пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ локальные представления $(\overset{\alpha}{T})$ и $(\overset{\beta}{T})$ связаны формулами замены переменных, диктуемыми видом представлений (1.4) (явные выражения для указанных формул можно найти в [11]). Набор локальных представителей $\{\overset{\alpha}{T}\}$ определяет гладкое сечение $T$ расслоения $(TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}$.

Пример 1. Тензор ранга $(1, 0)$ – это векторное поле, которое имеет локальное представление вида

$$\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тензор ранга $(0, 1)$ – ковекторное поле или 1-форма, имеющее локальное представление вида

$$\sum_j b_j dx^j.$$

Тензор ранга $(0,2)$ допускает локальное представление вида

$$\sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Симметричные тензоры такого вида называются *метрическими*. Если матрица $(g_{ij})$ положительно определена, то указанный тензор задает риманову метрику на $M$. Тензор ранга $(1,1)$ – это линейное операторное поле, имеющее локальное представление вида

$$\sum_{i,j} a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j.$$

Значение этого тензора в точке $p \in M$ является линейным оператором $A_p\colon T_pM \to T_pM$.

Тензоры можно тензорно умножать друг на друга, сворачивать по повторяющимся индексам, поднимать и опускать у них индексы с помощью метрического тензора. Обо всех этих операциях можно прочитать в книге [11], п. 17. $\square$

Пусть заданы римановы многообразия $M^n$ и $N^m$, иначе говоря, $M$ есть гладкое многообразие размерности $n$ с римановой метрикой $g \sim (g_{ij})$, $N$ – гладкое многообразие размерности $m$ с римановой метрикой $h \sim (h_{\alpha\beta})$.

Определение 2. Пусть $\varphi\colon M \to N$ есть гладкое отображение. Его *энергией* называется функционал вида

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi(p)|^2 \,\mathrm{vol}, \tag{1.5}$$

где $d\varphi$ – дифференциал отображения $\varphi$, $\mathrm{vol} = \mathrm{vol}_g$ – элемент объема метрики $g$.

*Локальное описание подынтегрального выражения.* Выберем в точке $p \in M$ локальные координаты $(x^i)$, а в ее образе $q = \varphi(p) \in N$ – локальные координаты $(u^\alpha)$. В этих координатах локальное выражение для квадрата нормы дифференциала будет иметь вид

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta}, \tag{1.6}$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ – компоненты отображения $\varphi$, $(g^{ij})$ – тензор ранга $(2,0)$, матрица которого является обратной к матрице $(g_{ij})$ метрического тензора: $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Элемент объема $\mathrm{vol}_g$ задается в выбранных локальных координатах выражением вида

$$\mathrm{vol}_g \sim \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

которое ведет себя как тензор ранга $(0,n)$ относительно замен координат с положительным детерминантом.

*Инвариантное определение дифференциала.* Порождаемое $\varphi\colon M \to N$ касательное отображение $\varphi_*\colon TM \to TN$ можно отождествить с сечением $d\varphi$ расслоения

$$T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN) \longrightarrow M,$$

где $\varphi^{-1}(TN)$ – обратный образ касательного расслоения $TN$ при отображении $\varphi$: его слой в точке $p \in M$ совпадает со слоем $T_qN$ в точке $q = \varphi(p)$. Действительно, отображение $\varphi_*\colon TM \to TN$ можно рассматривать как морфизм $TM \to \varphi^{-1}TN$ расслоений над $M$, который отождествляется с сечением расслоения $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$.

Расслоение $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$ наделяется естественной римановой метрикой, индуцированной римановыми метриками $g$ и $h$. (Локальное выражение для этой метрики извлекается из правой части формулы (1.6).)

Пример 2. В случае, когда $M$ и $N$ являются открытыми подмножествами евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, норма дифференциала отображения $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)\colon M \to N$ задается выражением

$$|d\varphi(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|^2,$$

а энергия определяется интегралом Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \sum_i \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|^2 dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Экстремумы этого функционала задаются отображениями $\varphi = (\varphi^\alpha)$, компоненты $\varphi^\alpha$ которых являются гармоническими функциями.

Понятие гармонического отображения есть естественное обобщение отображений, описанных в примере 2, на случай общих римановых многообразий $M$, $N$.

Определение 3. Гладкое отображение $\varphi\colon M \to N$ римановых многообразий называется *гармоническим*, если оно является экстремальным для функционала энергии $E(\varphi)$ по отношению к гладким вариациям $\varphi$ с компактными носителями.

## 1.3. Уравнения Эйлера–Лагранжа

Отступление (ковариантное дифференцирование и римановы связности; см. [11], пп. 28, 29). Введем на тензорных полях операцию ковариантного дифференцирования, которая переводит тензоры снова в тензоры. Сначала определим ковариантную производную векторов и 1-форм в терминах локальных представлений.

На векторных полях операция ковариантного дифференцирования задается посредством

$$\nabla_j\colon \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \longmapsto \sum_i \nabla_j a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \sum_k \Gamma^i_{kj} a^k.$$

На 1-формах определим операцию ковариантного дифференцирования по формуле

$$\nabla_j\colon \sum_i b_i dx^i \longmapsto \sum_i \nabla_j b_i dx^i,$$

где

$$\nabla_j b_i = \frac{\partial b_i}{\partial x^j} - \sum_k \Gamma^k_{ij} b_k.$$

Для того, чтобы указанная операция переводила векторные поля снова в векторные поля, а 1-формы в 1-формы, необходимо, чтобы символы $\Gamma^i_{kj}$ при замене координат $x^i = x^i(x')$ преобразовывались по закону:

$$\Gamma^i_{kj} \longmapsto \Gamma^{i'}_{k'j'} = \sum_{i,k,j} \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}. \quad (1.7)$$

Из приведенной формулы, в частности, видно, что символы $\Gamma^i_{kj}$ ведут себя как тензоры только относительно линейных замен координат.

Функции $(\Gamma^i_{kj})$, преобразующиеся по формуле (1.7) при замене координат, называются *символами Кристоффеля*, а операция ковариантного дифференцирования $\nabla_j$ – *связностью*. Связность $\nabla_j$ *симметрична*, если $\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$.

Продолжим теперь операцию ковариантного дифференцирования на тензорные поля произвольного ранга, пользуясь следующими правилами:

1) ковариантное дифференцирование есть линейная операция, совпадающая на функциях с обычной производной:
$$\nabla_j f = \frac{\partial f}{\partial x^j};$$
2) ковариантная производная векторных полей и 1-форм задается приведенными выше формулами;
3) ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница, т.е. ковариантная производная тензорного произведения $S \otimes T$ тензоров $\left(S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\right)$ и $\left(T^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}\right)$ равна
$$\nabla_j\big(S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} T^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}\big) = \big(\nabla_j S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\big) T^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s} + S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\big(\nabla_j T^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}\big).$$

Этими свойствами операция ковариантного дифференцирования определяется однозначно. Например, ковариантная производная произвольного тензора ранга $(2,0)$ равна
$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \sum_l \Gamma^i_{lk} T^{lj} + \sum_l \Gamma^j_{lk} T^{il}.$$

*Геометрический смысл связности* (*параллельный перенос*). Если $X$ – векторное поле на многообразии $M$, имеющее локальное представление
$$X \sim \sum_k X^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$
то можно определить ковариантную производную тензора вдоль $X$, полагая
$$\nabla_X T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \sum_k X^k \nabla_k T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$
На функциях $f$ эта операция совпадает с операцией дифференцирования по направлению векторного поля $X$.

Определение 4. Пусть $x = x(t)$ есть гладкая кривая на многообразии $M$ с началом в точке $p = x(0)$ и концом в точке $q = x(1)$. Обозначим через $\dot{x}$ векторное поле скорости кривой $x(t)$ с локальным представлением вида

$$\dot{x} \sim \sum_k \frac{dx^k}{dt}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Тензорное поле $T$ *ковариантно постоянно* или *параллельно* вдоль $x(t)$, если

$$\nabla_{\dot{x}(t)} T = 0$$

в точках $x = x(t)$. *Параллельным переносом* вектора $X(p) \in T_pM$ вдоль кривой $x(t)$ называется векторное поле

$$X \sim \sum_k X^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

определенное в точках $x = x(t)$, которое параллельно вдоль $x(t)$ и при $t = 0$ совпадает с $X(p)$. Вектор $X(q) = X\left(x(t)\right)|_{t=1}$ есть *результат* параллельного переноса вектора $X(p)$ вдоль кривой $x(t)$.

*Локальное условие параллельности* имеет вид

$$\sum_k \frac{dx^k}{dt}\nabla_k X^i = \frac{dX^i}{dt} + \sum_{k,j}\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{jk}X^j = 0 \tag{1.8}$$

при всех $t$, т.е. параллельный перенос вектора $X(p)$ вдоль кривой $x(t)$ определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.8) с начальным условием: $X^i|_{t=0} = X^i(p)$.

Связность $\Gamma^k_{ij}$ называется *согласованной с римановой метрикой* $g_{ij}$, если ковариантная производная от $g_{ij}$ равна нулю:

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \text{ при всех } k, i, j.$$

Симметричная связность такого типа существует и определяется единственным образом по метрике $g_{ij}$. Ее символы Кристоффеля вычисляются по формуле

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

Эта связность называется *римановой* или *связностью Леви-Чивита*.

Из приведенной формулы для символов Кристоффеля римановой связности вытекает, что они тождественно равны нулю для обычной евклидовой связности на пространстве $\mathbb{R}^n$, согласованной с евклидовой метрикой.

Мы определили связности на тензорных полях, которые позволяют их дифференцировать. Позже будут введены связности на векторных расслоениях, которые позволяют дифференцировать гладкие сечения этих расслоений. $\square$

Вернемся к уравнениям Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$ гладких отображений $\varphi\colon M \to N$ римановых многообразий. Приведем сначала их вид в локальных координатах.

В локальных координатах $(x^i)$ в точке $p \in M$ и $(u^\alpha)$ в точке $q = \varphi(p) \in N$ римановы связности ${}^M\nabla$ многообразия $M$ и ${}^N\nabla$ многообразия $N$ задаются символами Кристоффеля

$$ {}^M\nabla \sim {}^M\Gamma^k_{ij} \quad \text{и} \quad {}^N\nabla \sim {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} $$

соответственно. В этих координатах уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$ отображения $\varphi\colon M \to N$ имеют вид

$$ \begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j} \right\} = \\ = \Delta_M \varphi^\gamma + \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j} = 0, \quad \gamma = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1.9} $$

Оператор

$$ \Delta_M \varphi^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} \left( \frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k} \right) $$

называется *оператором Лапласа–Бельтрами* многообразия $M$, определяемым римановой метрикой $g$. Это <u>линейный</u> дифференциальный оператор 2-го порядка по $\varphi^\gamma$. Второе слагаемое во второй строке формулы (1.9) зависит от геометрии многообразия $N$, т.е. от геометрии образа отображения $\varphi$, и задается выражением, <u>квадратичным</u> по производным отображения $\varphi^\gamma$.

Пример 3. При $N = \mathbb{R}^m$ каждое из уравнений (1.9) превращается в уравнение Лапласа–Бельтрами на компоненту $\varphi^\gamma$ отображения $\varphi$, решениями которого являются гармонические функции на $M$. Если $n = \dim M = 1$, то гармонические отображения $\varphi\colon M \to N$ – это просто геодезические на $N$, параметризованные длиной дуги.

Задача 3. Выведите уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$ гладких отображений $\varphi\colon M \to N$ римановых многообразий.

*Инвариантная форма уравнений Эйлера–Лагранжа*. Напомним (см. п. 1.2), что дифференциал $d\varphi$ можно рассматривать как сечение расслоения
$$T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN).$$
Римановы связности ${}^M\nabla$ и ${}^N\nabla$ порождают естественную связность $\nabla$ на этом расслоении (найдите выражение для этой связности в локальных координатах!). В ее терминах уравнение Эйлера–Лагранжа может быть записано в виде
$$\operatorname{tr}(\nabla\, d\varphi) = 0,$$
или в локальных координатах
$$\sum_k \nabla_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0.$$
Векторное поле $\tau_\varphi := \operatorname{tr}(\nabla\, d\varphi)$ называется иначе *полем напряжений* отображения $\varphi$.

## 1.4. Гармонические отображения комплексных многообразий

Отступление (комплексные и почти комплексные многообразия; см. [21], гл. I, п. 3).

Определение 5. Пусть $M$ – гладкое многообразие размерности $2n$. *Почти комплексной структурой* на $M$ называется гладкое сечение $J$ расслоения $\operatorname{End}(TM)$, удовлетворяющее соотношению
$$J^2 = -I.$$

Указанное сечение можно рассматривать как тензорное поле ранга $(1,1)$, сопоставляющее каждой точке $p \in M$ линейный оператор $J_p$ в пространстве $T_pM$, квадрат которого равен $-I$.

Обозначим через $T^{\mathbb{C}}M$ *комплексифицированное касательное расслоение* многообразия $M$, определяемое как

$$T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

В терминах локальных координат $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$ в окрестности точки $p \in M$ это расслоение можно описать следующим образом. Базис касательного расслоения $TM$ в окрестности $p$ образуют векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}; \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n},$$

так что любое гладкое векторное поле $X$ в окрестности $p$ представляется в виде линейной комбинации

$$X = \sum_j \left( a^j \frac{\partial}{\partial x^j} + b^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) \tag{1.10}$$

с коэффициентами $a^j$, $b^j$, являющимися гладкими $\mathbb{R}$-значными функциями в окрестности $p$. Сечения расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ в окрестности $p$ задаются той же формулой (1.10), в которой коэффициенты $a^j$, $b^j$ являются произвольными гладкими $\mathbb{C}$-значными функциями в окрестности $p$.

Удобнее однако перейти к комплексному локальному базису расслоения $T^{\mathbb{C}}M$, задаваемому векторными полями вида

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}; \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial}{\partial x^j} + i\frac{\partial}{\partial y^j} \right).$$

Тогда любое гладкое комплексное векторное поле (или, что то же самое, локальное сечение расслоения $T^{\mathbb{C}}M$) в окрестности точки $p$ будет записываться в виде

$$X = \sum_j \big( X^j \frac{\partial}{\partial z^j} + X^{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \big),$$

где $X^j, X^{\bar{j}}$ – произвольные гладкие $\mathbb{C}$-значные функции в окрестности $p$.

Аналогичным образом, локальный базис *кокасательного комплексифицированного расслоения* $T^{*,\mathbb{C}}M$ в окрестности точки $p \in M$ составляют 1-формы

$$dz^j = dx^j + idy^j, \quad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j,$$

так что любая гладкая 1-форма в окрестности $p$ представляется в виде

$$\omega = \sum_j (\omega_j dz^j + \omega_{\bar{j}} d\bar{z}^j)$$

с гладкими $\mathbb{C}$-значными коэффициентами $\omega_j, \omega_{\bar{j}}$.

Выбранные локальные базисы векторных и ковекторных полей можно использовать для представления произвольных комплексных тензорных полей, т.е. сечений расслоений вида

$$\underbrace{T^{\mathbb{C}}M \otimes \cdots \otimes T^{\mathbb{C}}M}_{p} \otimes \underbrace{T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \cdots \otimes T^{*,\mathbb{C}}M}_{q}.$$

В частности, любая комплексная $r$-форма $\omega$, являющаяся гладким сечением расслоения

$$\Omega^r_{\mathbb{C}}M := \underbrace{T^{*,\mathbb{C}}M \wedge \cdots \wedge T^{*,\mathbb{C}}M}_{r},$$

записывается в виде

$$\omega = \omega^{r,0} + \omega^{r-1,1} + \cdots + \omega^{1,r-1} + \omega^{0,r},$$

где форма $\omega^{p,q}$ имеет вид

$$\omega^{p,q} = \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{j_1,\dots,j_q} a_{i_1\dots i_p\bar{j}_1\dots\bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

и называется *формой типа* $(p,q)$. Расслоение форм типа $(p,q)$ обозначается через $\Omega^{p,q}M$.

Вернемся к почти комплексным структурам. Пусть $J$ – почти комплексная структура на $M$, задаваемая гладким сечением расслоения $\mathrm{End}(TM)$. Продолжим ее комплексно-линейным образом до сечения расслоения $\mathrm{End}(T^{\mathbb{C}}M)$. Значение продолженного линейного оператора $J_p \in \mathrm{End}(T^{\mathbb{C}}_pM)$ в произвольной точке $p \in M$

в заданном локальном базисе задается той же матрицей, что и значение исходного линейного оператора $J_p \in \mathrm{End}(T_pM)$ в точке $p$ (по этой причине оба оператора обозначаются одним и тем же символом). Обозначим через $T_p^{1,0}M$ (соответственно $T_p^{0,1}M$) собственное подпространство оператора $J_p \in \mathrm{End}(T_p^{\mathbb{C}}M)$, отвечающее собственному значению $i$ (соответственно $-i$). Тогда для комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ получим следующее разложение

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M,$$

где $T^{1,0}M$ (соответственно $T^{0,1}M$) – подрасслоение $T^{\mathbb{C}}M$, слоями которого являются собственные подпространства $T_p^{1,0}M$ (соответственно $T_p^{0,1}M$).

Если взять в качестве локального базиса расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ в окрестности точки $p \in M$ базис, образованный векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}; \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n},$$

то локальный базис подрасслоения $T^{1,0}M$ будут составлять поля

$$\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n},$$

а локальный базис подрасслоения $T^{0,1}M$ – поля

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}.$$

Гладкие сечения подрасслоения $T^{1,0}M$ (соответственно $T^{0,1}M$) называются иначе *векторными полями типа* $(1,0)$ (соответственно *векторными полями типа* $(0,1)$. По аналогии с формами типа $(p,q)$ можно ввести и векторные поля произвольного типа $(p,q)$.

Определение 6. Почти комплексная структура $J$ на гладком многообразии $M$ называется *интегрируемой*, если оператор внешнего дифференцирования форм

$$d\colon \Omega^r_{\mathbb{C}}M \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathbb{C}}M$$

можно представить в виде суммы двух операторов

$$d = d' + d'',$$

где оператор $d'$ переводит формы типа $(p,q)$, $p+q=r$, в формы типа $(p+1,q)$:

$$d'\colon \Omega^{p,q}M \longrightarrow \Omega^{p+1,q}M,$$

а оператор $d''$ – формы типа $(p,q)$ в формы типа $(p,q+1)$:

$$d''\colon \Omega^{p,q}M \longrightarrow \Omega^{p,q+1}M.$$

Поясним приведенное определение на простом примере. В случае форм типа $(1,0)$ оператор $d$ отображает расслоение $\Omega^{1,0}M$ в расслоение

$$\Omega^2_{\mathbb{C}}M = \Omega^{2,0}M \oplus \Omega^{1,1}M \oplus \Omega^{0,2}M.$$

Выполнение условия интегрируемости означает в этом случае, что компонента оператора $d$, действующая из расслоения $\Omega^{1,0}M$ в расслоение $\Omega^{0,2}M$ (называемая иначе тензором Нийенхейса), должна быть равна нулю.

Для интегрируемой почти комплексной структуры $J$ выполняются соотношения

$$d'^{\,2} = d'd'' + d''d' = d''^{\,2} = 0,$$

каждое из которых можно взять за определение интегрируемости $J$.

Эквивалентная формулировка условия интегрируемости почти комплексной структуры $J$ в терминах векторных полей звучит так: скобка любых векторных полей типа $(1,0)$, т.е. гладких сечений расслоения $T^{1,0}M$, должна быть снова векторным полем типа $(1,0)$.

Задача 4. Докажите эквивалентность всех приведенных определений интегрируемости почти комплексной структуры $J$ на почти комплексном многообразии $M$. А именно, $J$ интегрируема $\Leftrightarrow d = d' + d'' \Leftrightarrow d'^{\,2} = d'd'' + d''d' = d''^{\,2} = 0 \Leftrightarrow$ скобка векторных полей типа $(1,0)$ есть снова векторное поле типа $(1,0)$.

Замечание 1 (теорема Ньюлендера–Ниренберга, см. [14], п. 2.12). Если почти комплексная структура $J$ на гладком многообразии $M$ интегрируема, то такое многообразие на самом деле является комплексным. Иначе говоря, на нем можно построить атлас из локальных комплексных координат, в которых оператор $J$ будет задаваться умножением на $i$. В частности, почти комплексное многообразие $(M, J)$ с интегрируемой почти комплексной структурой $J$ обладает большим запасом локальных голоморфных функций. Напротив, на многообразии $(M, J)$ с неинтегрируемой почти комплексной структурой $J$ таких функций может не быть вовсе. $\square$

Предположим теперь, что почти комплексное многообразие $(M, J)$ является также римановым, т.е. наделено римановой метрикой $g$. Будем называть эту метрику *эрмитовой*, если она совместима с $J$ в том смысле, что

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

для любых векторных полей $X$, $Y$ на $M$. В этом случае многообразие $(M, g, J)$ называется *почти эрмитовым* или *эрмитовым* в случае, когда почти комплексная структура $J$ интегрируема.

Пусть $(M, g, J)$ – почти эрмитово многообразие. Рассмотрим на нем 2-форму

$$\omega(X, Y) := g(X, JY).$$

Если эта 2-форма замкнута, т.е. $d\omega = 0$, будем называть такое многообразие $(M, g, J, \omega)$ *почти кэлеровым*. Если форма $\omega$ к тому же невырождена (в этом случае $\omega$ задает симплектическую структуру на $M$), а почти комплексная структура $J$ интегрируема, то форма $w$ называется *кэлеровой*, а само многообразие $(M, g, J, \omega)$ – *кэлеровым*.

Задача 5. На гладком многообразии $M$ заданы три совместимые друг с другом структуры: почти комплексная структура $J$, риманова метрика $g$ и симплектическая форма $\omega$. Покажите, что любые две из этих структур однозначно определяют третью.

Обратимся к гармоническим отображениям комплексных многообразий.

Определение 7. Пусть $\varphi\colon M \to N$ есть гладкое отображение почти комплексных многообразий. Оно называется *почти голоморфным* или *псевдоголоморфным*, если касательное к нему отображение $\varphi_*\colon TM \to TN$ коммутирует с почти комплексными структурами, т.е.

$$\varphi_* \circ {}^M J = {}^N J \circ \varphi_*,$$

где ${}^{M}J$ (соответственно ${}^{N}J$) есть почти комплексная структура на $M$ (соответственно на $N$). Отображение $\varphi$ называется *почти антиголоморфным*, если $\varphi_*$ антикоммутирует с почти комплексными структурами:

$$\varphi_* \circ {}^{M}J = -{}^{N}J \circ \varphi_*.$$

Удобно также называть почти голоморфные отображения $+$*псевдоголоморфными*, а почти антиголоморфные отображения $-$*псевдоголоморфными*, так что оба понятия объединяются единым термином $\pm$*псевдоголоморфных отображений*.

Пусть $\varphi\colon M \to N$ есть гладкое отображение почти комплексных многообразий. Продолжим касательное отображение $\varphi_*\colon TM \to TN$ комплексно-линейным образом до отображения $\varphi_*\colon T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}N$ комплексифицированных касательных расслоений. Полученное отображение, в соответствии с разложениями

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \quad T^{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N,$$

можно представить в блочном виде, где блоки задаются следующими четырьмя операторами

$$\begin{aligned} \partial'\varphi\colon T^{1,0}M &\longrightarrow T^{1,0}N, & \partial''\varphi\colon T^{0,1}M &\longrightarrow T^{1,0}N, \\ \partial'\bar\varphi = \overline{\partial''\varphi}\colon T^{1,0}M &\longrightarrow T^{0,1}N, & \partial''\bar\varphi = \overline{\partial'\varphi}\colon T^{0,1}M &\longrightarrow T^{0,1}N. \end{aligned}$$

Если отождествить $\varphi_*$ с дифференциалом $d\varphi$, рассматриваемым как сечение расслоения

$$T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N),$$

то введенные операторы получат аналогичную интерпретацию как сечения соответствующих подрасслоений указанного расслоения. Например, оператор $\partial'\varphi$ можно отождествить с сечением расслоения

$$\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N).$$

В терминах введенных операторов отображение $\varphi$ *почти голоморфно* (соответственно *почти антиголоморфно*), если

$$\partial''\varphi = 0 \quad (\text{соответственно } \partial'\varphi = 0).$$

В случае, когда оба многообразия $M$ и $N$ почти эрмитовы, энергию гладкого отображения $\varphi\colon M \to N$ можно представить в виде

$$E(\varphi) = E'(\varphi) + E''(\varphi),$$

где
$$E'(\varphi) = \int_M |\partial'\varphi|^2 \operatorname{vol}, \quad E''(\varphi) = \int_M |\partial''\varphi|^2 \operatorname{vol}.$$
Отображение $\varphi$ почти голоморфно (соответственно почти антиголоморфно) тогда и только тогда, когда $E''(\varphi) = 0$ (соответственно $E'(\varphi) = 0$).

Пусть $\varphi\colon M \to N$ есть гладкое отображение компактных почти кэлеровых многообразий. Положим
$$k(\varphi) := E'(\varphi) - E''(\varphi).$$

Задача 6. Пусть $\varphi\colon M \to N$ есть гладкое отображение компактных почти кэлеровых многообразий. Покажите, что число
$$k(\varphi) := E'(\varphi) - E''(\varphi).$$
является топологическим инвариантом, т.е. зависит только от гомотопического класса отображения $\varphi$.

Поскольку
$$E(\varphi) = 2E'(\varphi) - k(\varphi) = 2E''(\varphi) + k(\varphi),$$
то экстремали у всех трех функционалов совпадают и всегда
$$E(\varphi) \geqslant |k(\varphi)|.$$

Следовательно, *почти голоморфные и почти антиголоморфные отображения $\varphi$ задают минимумы энергии $E(\varphi)$ в заданном топологическом классе*: *при $k(\varphi) \geqslant 0$ минимумы реализуются на почти голоморфных отображениях с $E''(\varphi) = 0$, при $k(\varphi) < 0$ – на почти антиголоморфных отображениях с $E'(\varphi) = 0$.*

Тем самым, в случае почти кэлеровых многоообразий локальные минимумы функционала энергии описываются также, как в случае отображений римановой сферы в себя.

В заключение остановимся более подробно на наиболее интересном для нас случае гармонических отображений римановых поверхностей в римановы многообразия. Пусть $\varphi\colon M \to N$ – гладкое отображение из римановой поверхности $M$ в риманово многообразие $N$. Как было отмечено выше, касательное отображение $\varphi_*\colon TM \to TN$ можно продолжить комплексно-линейным образом до отображения $\varphi_*\colon T^{\mathbb{C}}M \to T^{\mathbb{C}}N$ комплексифицированных касательных расслоений и отождествить с сечением $d\varphi$ расслоения

$$T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N).$$

Поэтому дифференциал $d\varphi$ можно представить в виде суммы

$$d\varphi = \delta\varphi + \bar{\delta}\varphi, \tag{1.11}$$

где $\delta\varphi$ есть сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, а $\bar{\delta}\varphi$ – сечение расслоения $\Omega^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$.

Обозначим, как и ранее, через $\nabla$ естественную связность на расслоении $T^*M \otimes \varphi^{-1}(TN)$, порожденную римановыми связностями ${}^M\nabla$ и ${}^N\nabla$, и продолжим ее комплексно-линейно на комплексифицированное расслоение $T^{*,\mathbb{C}}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. Введем операторы, действующие на сечениях указанного расслоения, которые в терминах локальной координаты $z$ на $M$ определяются следующим образом

$$\delta := \nabla_{\partial/\partial z}, \quad \bar{\delta} := \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}$$

(заметим, что это определение согласуется с формулой (1.11)). Тогда условие гармоничности отображения $\varphi\colon M \to N$ будет записываться в виде

$$\bar{\delta}\delta\varphi = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}(\delta\varphi) = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}(\nabla_{\partial/\partial z}\varphi) = 0 \tag{1.12}$$

или в эквивалентной форме

$$\delta\bar{\delta}\varphi = \nabla_{\partial/\partial z}(\bar{\delta}\varphi) = \nabla_{\partial/\partial z}(\nabla_{\partial/\partial \bar{z}}\varphi) = 0. \tag{1.13}$$

В случае, когда многообразие $N$ является кэлеровым, полученные условия можно упростить и далее, воспользовавшись соотношениями

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi}, \quad \bar{\delta}\varphi = \partial''\varphi + \overline{\partial'\varphi}. \tag{1.14}$$

Так как для кэлерова многообразия $N$ связность ${}^N\nabla$ сохраняет разложение $T^{\mathbb{C}}N = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N$ (см. задачу ниже), то условие гармоничности можно переписать в виде

$$\bar{\delta}\partial'\varphi = 0 \Longleftrightarrow \delta\partial''\varphi = 0. \tag{1.15}$$

Задача 7. Докажите, что риманова связность ${}^N\nabla$ на кэлеровом многообразии $N$ сохраняет пространства $\Omega^{p,q}M$ форм типа $(p,q)$.

Еще одна интерпретация условия гармоничности будет дана после того, как мы сформулируем следующую теорему.

Теорема 1 (теорема Кошуля–Мальгранжа, см. [13], а также [2], гл. IV, п. 1). *Пусть $E \to M$ – комплексное векторное расслоение над римановой поверхностью $M$, снабженное связностью $\nabla$. Тогда на $E$ существует единственная комплексная структура, согласованная со связностью $\nabla$, относительно которой $E \to M$ является голоморфным векторным расслоением. Согласованность комплексной структуры с $\nabla$ означает, что $\bar\partial$-оператор, отвечающий этой структуре, совпадает с $\nabla^{0,1}$.*

Будем называть комплексную структуру на $E$, существование которой утвердается в сформулированной теореме, *структурой Кошуля–Мальгранжа*, индуцированной связностью $\nabla$, или коротко, *KM-структурой*. Заметим, что векторное подрасслоение $F \subset E$ голоморфно относительно введенной KM-структуры тогда и только тогда, когда выполняется условие $\nabla^{0,1}C^\infty(M,F) \subset C^\infty(M,F)$, где через $C^\infty(M,F)$ обозначено пространство гладких сечений расслоения $E \to M$.

В терминах KM-структуры на $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированной связностью $\nabla$, условие гармоничности $\varphi$, даваемое формулой (1.12), означает, что $\delta\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. В случае, если $N$ кэлерово, условие гармоничности $\varphi$, даваемое формулой (1.15), означает, что $\partial'\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}N)$.

# Глава 2. Твисторный подход

Эта глава посвящена твисторному подходу к построению гармонических отображений. Она начинается с эвристической формулировки так называемой твисторной программы Пенроуза. Затем мы разбираем наиболее известный пример твисторного расслоения над 4-мерной сферой, даваемый хопфовским расслоением, и приводим общую конструкцию твисторного расслоения над римановыми многообразиями, восходящую к пионерской работе Атьи–Хитчина–Зингера. Завершается глава изложением твисторной конструкции гармонических отображений, предложенной Иллсом и Саламоном.

## 2.1. Твисторная программа Пенроуза

Основной целью курса является построение гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в компактные кэлеровы многообразия. Точнее, мы описываем метод, который позволяет свести эту общую проблему к решению более узкой (и более исследованной) задачи: построению голоморфных отображений из компактных римановых поверхностей в компактные кэлеровы многообразия. Образы голоморфных отображений компактных римановых поверхностей в комплексные многообразия часто называются просто *голоморфными кривыми*. Таким образом, речь идет о следующей редукции:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{гармонические отображе-}\\ \text{ния компактных римановых}\\ \text{поверхностей в компактные}\\ \text{кэлеровы многообразия}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{голоморфные кривые}\\ \text{в компактных кэлеровых}\\ \text{многообразиях}\end{array}\right\}.$$

В случае успеха нам удалось бы свести исходную “вещественную” задачу построения гармонических отображений к ”комплексной” задаче построения голоморфных кривых.

В дифференциальной геометрии имеется общий подход к такого рода редукциям, который носит название *твисторного мето-*

*да Пенроуза*. Сначала поясним идею Пенроуза на эвристическом уровне, приспособив ее к рассматриваемой задаче.

**Твисторная программа Пенроуза**. *Построить для заданного риманова многообразия $N$ так называемое твисторное расслоение $\pi\colon Z \to N$, где $Z$ – почти комплексное многообразие, а $\pi$ – гладкая субмерсия* (т.е. гладкое отображение $Z \to N$ с касательным отображением максимального ранга). *Это расслоение должно обладать следующим нетривиальным свойством*: *оно должно устанавливать взаимно-однозначное соответствие между*:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{объекты римановой гео-}\\ \text{метрии на } N\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{объекты голоморфной гео-}\\ \text{метрии на } Z\end{array}\right\}$$

Таким образом, твисторный подход позволяет изучать вещественную геометрию риманова многообразия $N$ через комплексную геометрию его твисторного пространства $Z$.

Приведенная формулировка твисторной программы Пенроуза дана в работе Атьи–Хитчина–Зингера [4], где одновременно предложена конкретная конструкция твисторного расслоения $\pi\colon Z \to N$ для произвольного четномерного риманова многообразия $N$. Прежде, чем переходить к изложению этой конструкции в общей ситуации, разберем ее на простом, но содержательном примере $N = S^4$.

## 2.2. Хопфовское расслоение над $S^4$

Мы будем рассматривать евклидову сферу $S^4$ как кватернионную проективную прямую. Эта интерпретация аналогична представлению римановой сферы в виде комплексной проективной прямой.

Отступление (кватернионы). Пространство кватернионов $\mathbb{H}$ состоит из элементов вида

$$q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4,$$

где $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ – вещественные числа, $i$, $j$, $k$ – мнимые единицы, т.е.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Сложение и умножение кватернионов на вещественные числа определяются покомпонентно, закон умножения кватернионов вводится с помощью соотношений

$$ij = -ji = k$$

и их циклических перестановок.

Как вещественное векторное пространство $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, а с алгебраической точки зрения является телом (т.е. некоммутативным полем). В частности, любой ненулевой элемент $\mathbb{H}$ обладает обратным (проверьте это!).

Кватернионы $q \in \mathbb{H}$ можно записывать также в комплексной форме

$$q = z_1 + z_2 j,$$

где $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$ – комплексные числа. Как комплексное векторное пространство, $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$.

Удобно реализовать кватернионы в виде комплексных $2 \times 2$-матриц, сопоставляя

$$q = z_1 + z_2 j \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix},$$

при этом умножению кватернионов будет отвечать умножение матриц (проверьте!).

Роль единичной окружности в $\mathbb{H}$ играет сфера $S^3$, отождествляемая с группой

$$\mathrm{Sp}(1) = \{q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \colon |q|^2 := q\bar{q} = 1\},$$

где $\bar{q} := x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4$. В матричной реализации этой группе будет соответствовать группа $\mathrm{SU}(2)$ унитарных $2 \times 2$-матриц с единичным детерминантом.

Задача 8. Группа $\mathrm{SO}(4)$ не является простой (в отличие от групп $\mathrm{SO}(n)$ с $n > 4$). Если обозначить через $\mathrm{Spin}(4)$ универсальную (иначе говоря, односвязную) накрывающую группы $\mathrm{SO}(4)$, то эта группа, называемая *спинорной*, будет двукратно накрывать группу $\mathrm{SO}(4)$. При этом

$$\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Докажите этот факт, пользуясь кватернионной интерпретацией $\mathbb{R}^4$. $\square$

Вернемся к построению хопфовского расслоения над $S^4$. Для этого отождествим евклидову сферу $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ с кватернионной проективной прямой $\mathbb{HP}^1$. Точками $\mathbb{HP}^1$ являются пары $[q, q']$ кватернионов, не равных нулю одновременно, которые заданы с точностью до умножения справа на ненулевой кватернион. (Строго говоря, определенное таким образом множество нужно называть правой кватернионной прямой. Аналогичным образом можно определить и левую кватернионную прямую. Поскольку в этом курсе используется только правая кватернионная прямая, мы опускаем термин “правая” в ее названии.)

Хопфовское расслоение над $S^4 \cong \mathbb{HP}^1$ имеет вид

$$\pi\colon \mathbb{CP}^3 \xrightarrow{\mathbb{CP}^1} \mathbb{HP}^1$$

и задается тавтологической формулой

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \longmapsto [z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j].$$

Здесь, четверка комплексных чисел $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ рассматривается как точка 3-мерного комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^3$, т.е. определена с точностью до умножения на ненулевое комплексное число (общее определение $n$-мерного комплексного проективного пространства будет дано ниже в п. 3.1), а пара кватернионов $[z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j] \in \mathbb{HP}^1$ определена с точностью до умножения на ненулевой кватернион. Слой расслоения $\pi$ совпадает с комплексной проективной прямой $\mathbb{CP}^1$, инвариантной относительно умножения справа на $j$, т.е. инвариантной относительно отображения

$$j\colon [z_1, z_2, z_3, z_4] \longmapsto [-z_2, z_1, -z_4, z_3].$$

Для того, чтобы усмотреть связь построенного расслоения со стандартным хопфовским расслоением над $S^4$, поднимем отображение $\pi$ на сферу $S^7 \subset \mathbb{C}^4$, пользуясь расслоением

$$\mathbb{C}^4 \xrightarrow{\mathbb{C}^1} \mathbb{CP}^3,$$

сопоставляющим точке пространства $\mathbb{C}^4$ проходящую через нее комплексную прямую. Получим расслоение

$$\pi\colon S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$$

со слоем $S^3$ – кватернионный аналог хопфовского расслоения

$$\pi\colon S^3 \xrightarrow{S^1} S^2,$$

которое также можно построить из комплексного расслоения

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\mathbb{C}^1} \mathbb{CP}^1.$$

Построенное расслоение $\pi\colon \mathbb{CP}^3 \to S^4$ имеет красивую интерпретацию в терминах комплексных структур на $\mathbb{R}^4$, предложенную в работе [4]. Рассмотрим ограничение хопфовского расслоения $\pi$ на евклидово пространство $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, имеющее вид

$$\pi\colon \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

где выброшенная комплексная проективная прямая $\mathbb{CP}^1$ отождествляется со слоем $\pi^{-1}(\infty)$ хопфовского расслоения над $\infty \in S^4$.

Пространство $\mathbb{R}^4$ можно отождествить с $\mathbb{C}^2$ многими способами, среди которых нет канонического. Опишем пространство всех почти комплексных структур на $\mathbb{R}^4$, совместимых с евклидовой метрикой и ориентацией $\mathbb{R}^4$. Они задаются гладкими сечениями $J = \{J_q\}$ расслоения $\mathrm{End}(T\mathbb{R}^4)$, такими что значение $J_q$ в точке $q \in \mathbb{R}^4$ является линейным оператором на $T_q\mathbb{R}^4 \sim \mathbb{R}^4$, квадрат которого равен $-I$ и совместимым с евклидовой метрикой и ориентацией $\mathbb{R}^4$. Последнее означает, что операторы $J_q$ задаются кососимметричными матрицами с нулевым следом (почему?). Иначе говоря, все они получаются из фиксированного оператора $J_q^0$ действием преобразований из группы $\mathrm{SO}(4)$. При этом комплексные структуры с операторами $J_q$, полученными из $J_q^0$ действием преобразований из подгруппы $\mathrm{U}(2) \subset \mathrm{SO}(4)$, эквивалентны исходной (т.е. получаются из нее с помощью комплексной замены базиса). Таким образом, пространство комплексных структур на $T_q\mathbb{R}^4$, совместимых с метрикой и ориентацией, можно отождествить с

$$\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2).$$

Указанное однородное пространство совпадает с

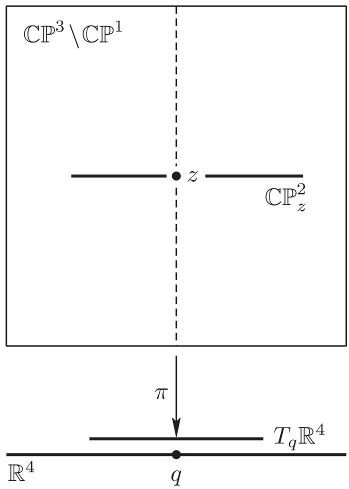
$$\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \cong S^3/S^1 \cong S^2.$$

Задача 9. Докажите этот факт.

Тем самым, слой расслоения комплексных структур над $\mathbb{R}^4$ в произвольной точке $q$, состоящий из различных комплексных структур на $T_x\mathbb{R}^4 \sim \mathbb{R}^4$, совпадает с $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$, а само расслоение совпадает с расслоением

$$\pi\colon \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^4.$$

Последний факт можно пояснить еще таким образом.




Пространство $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1$ расслаивается на параллельные проективные плоскости $\mathbb{CP}^2$, которые пересекаются в $\mathbb{CP}^3$ на выброшенной проективной прямой $\mathbb{CP}^1_\infty = \pi^{-1}(\infty)$. Через каждую точку $z$ слоя над точкой $q \in \mathbb{R}^4$ проходит единственная проективная плоскость $\mathbb{CP}^2_z$ из этого семейства. Касательное отображение $\pi_*$ отождествляет эту проективную плоскость с пространством $T_q\mathbb{R}^4$ и, тем самым, наделяет $T_q\mathbb{R}^4$ индуцированной комплексной структурой. Это и есть комплексная структура $J_{\pi(z)}$, отвечающая точке $z$ расслоения $\pi\colon \mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{R}^4$.

Еще одну интерпретацию хопфовского расслоения можно получить, пользуясь следующей задачей.

Задача 10. Пусть $M$ есть ориентированное риманово 4-мерное многообразие. Тогда расслоение 2-форм $\Omega^2 M$ на $M$ является прямой суммой расслоений автодуальных и антиавтодуальных форм

$$\Omega^2 M \cong \Omega^2_+ M \oplus \Omega^2_- M.$$

Формы $\omega \in \Omega^2_\pm M$ удовлетворяют соотношению: $*\omega = \pm\omega$, где $*$ – оператор Ходжа, определяемый метрикой $M$. Покажите, что сферическое подрасслоение $S(\Omega^2_- M)$ можно каноническим образом отождествить с твисторным расслоением комплексных структур на $M$, совместимых с метрикой и ориентацией.

Отметим важное свойство построенного расслоения $\pi\colon \mathbb{CP}^3 \to S^4$. Твисторное пространство совпадает в этом случае с $\mathbb{CP}^3$ и, следовательно, обладает канонической комплексной структурой.

В следующем параграфе мы увидим, что многие из отмеченных нами свойств хопфовского расслоения распространяются на твисторные расслоения общих римановых многообразий.

## 2.3. Твисторное расслоение риманова многообразия

Начнем с описания пространства *эрмитовых структур* на четномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемых кососимметричными линейными операторами $J$, квадрат которых равен $-I$. Пространство таких структур, обозначаемое через $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$, отождествляется с однородным пространством

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n).$$

Оно является объединением двух копий однородного пространства $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$, параметризующего комплексные структуры на $\mathbb{R}^{2n}$, совместимые с метрикой и ориентацией (в случае $n = 2$ это пространство, рассмотренное в предыдущем параграфе, совпадает с $S^2$).

Пространство $\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$ является комплексным многообразием. Комплексную структуру на $\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$ можно построить, вкладывая его в комплексное грассманово многообразие $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, состоящее из $n$-мерных подпространств в $\mathbb{C}^{2n}$. (Общее определение грассмановых многообразий дается ниже в п. 3.1.) Указанное вложение сопоставляет комплексной структуре $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ касательное пространство $T^{1,0}_J(\mathbb{R}^{2n})$ векторов типа $(1,0)$ относительно этой структуры:

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \ni J \longmapsto T^{1,0}_J(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathbb{C}^{2n}. \tag{2.1}$$

Образ этого вложения является комплексным подмногообразием в $G_n(\mathbb{C}^{2n})$ с комплексной структурой, индуцированной из $G_n(\mathbb{C}^{2n})$. (Образ вложения (2.1) можно описать явным образом. Если продолжить евклидову метрику $h_0$ комплексно-линейным образом с $\mathbb{R}^{2n}$ на $\mathbb{C}^{2n}$, то образ (2.1) будет состоять из $n$-мерных подпространств в $\mathbb{C}^{2n}$, изотропных относительно $h_0$. Иначе говоря, этот образ совпадает с квадрикой в $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, задаваемой уравнением: $h_0(z,z)=0$ в естественных комплексных координатах на $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, см. п. 3.1.)

Можно ввести комплексную структуру на пространстве $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$ и не обращаясь к вложению в $G_n(\mathbb{C}^{2n})$, если воспользоваться общей конструкцией инвариантных комплексных структур на орбитах присоединенного представления, излагаемой в следующем отступлении.

Отступление (инвариантные комплексные структуры на орбитах присоединенного представления; см. [17], п. 3). Пусть $G$ есть компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и $C \subset \mathfrak{g}$ – орбита присоединенного представления (см. п. 5.1) группы $G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (иначе говоря, $C$ есть класс сопряженности). Тогда на $C$ имеется инвариантная комплексная структура, которую можно ввести следующим образом. Фиксируем произвольную точку $\xi \in C$ и обозначим через

$$H_\xi = \{g \in G\colon \ \mathrm{Ad}\, g(\xi) = \xi\}$$

подгруппу изотропии точки $\xi$, алгебра Ли которой совпадает с

$$\mathfrak{h}_\xi = \{\eta \in \mathfrak{g}\colon \ \mathrm{ad}\,\xi(\eta) = [\xi,\eta] = 0\}.$$

При этом орбита $C$ отождествляется с фактором $G/H_\xi$, а ее касательное пространство в точке $\xi$ – с фактором $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_\xi$. Фиксируем на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ скалярное произведение, инвариантное относительно присоединенного действия группы $G$. Оператор $\mathrm{ad}\,\xi$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ кососимметричен и имеет ядро, совпадающее с $\mathfrak{h}_\xi$. Поэтому образ $\mathfrak{m}_\xi$ этого оператора является прямым дополнением к $\mathfrak{h}_\xi$, так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\xi \oplus \mathfrak{m}_\xi$ и $T_\xi C \cong \mathfrak{m}_\xi$.

Для того, чтобы определить $G$-инвариантную комплексную структуру на орбите $C$, достаточно построить $H_\xi$-инвариантное разложение комплексифицированного касательного пространства $T^{\mathbb{C}}_\xi C \cong \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}_\xi$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{m}^+_\xi$ векторов типа $(1,0)$ и $\mathfrak{m}_\xi^-$ векторов типа $(1,0)$, а затем разнести его в другие точки орбиты $C$ с помощью действия группы $G$.

Продолжение оператора $\operatorname{ad}\xi$ на $T_\xi^{\mathbb{C}}C$ является косоэрмитовым оператором с ненулевыми собственными значениями, поэтому мы можем взять за $\mathfrak{m}_\xi^+$ прямую сумму собственных подпространств $\operatorname{ad}\xi$ с собственными значениями $\lambda$, имеющими положительную мнимую часть: $\operatorname{Im}\lambda > 0$, а за $\mathfrak{m}_\xi^-$ – прямую сумму собственных подпространств с собственными значениями $\lambda$: $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Тогда

$$\mathfrak{m}_\xi^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_\xi^+ \oplus \mathfrak{m}_\xi^-, \quad \mathfrak{m}_\xi^- = \overline{\mathfrak{m}_\xi^+}, \quad \mathfrak{m}_\xi^+ \cap \mathfrak{m}_\xi^- = 0.$$

Очевидно, что разложение $\mathfrak{m}_\xi^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_\xi^+ \oplus \mathfrak{m}_\xi^-$ является $H_\xi$-инвариантным, поэтому оно определяет на $C$ инвариантную почти комплексную структуру, для которой подпространство касательных векторов типа $(1,0)$ в точке $\xi$ совпадает с $\mathfrak{m}_\xi^+$. Указанная почти комплексная структура интегрируема, поскольку $[\mathfrak{m}_\xi^+, \mathfrak{m}_\xi^+] \subset \mathfrak{m}_\xi^+$. $\square$

В рассматриваемой нами ситуации $G = \mathrm{O}(2n)$, $\mathfrak{g} = \mathrm{o}(2n)$, $C = \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathrm{o}(2n)$. Роль $\xi$ играет комплексная структура $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$, задающая разложение

$$T_J^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^{2n} = T_J^{1,0} \oplus T_J^{0,1}.$$

В этом случае собственное подпространство $\mathfrak{m}_J^+$ допускает следующее описание

$$\mathfrak{m}_J^+ = \{A \in \mathrm{o}(2n,\mathbb{C})\colon AT_J^{1,0} = 0,\ \ AT_J^{0,1} \subset T_J^{1,0}\}. \qquad (2.2)$$

Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно (см. также [17], пред. 3.3).

Пусть, теперь, $N$ – четномерное риманово многообразие размерности $2n$. Рассмотрим расслоение $\pi\colon \mathcal{J}(N) \to N$ эрмитовых структур на $N$, слоем которого в точке $q \in N$ является пространство $\mathcal{J}(T_qN) \cong \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ эрмитовых структур на касательном пространстве $T_qN$. Это расслоение ассоциировано с главным расслоением

$$\mathcal{O}(N) \longrightarrow N$$

ортонормированных реперов на $N$, слой которого в точке $q \in N$ совпадает с множеством $\mathcal{O}(T_qN)$ всех ортонормированных реперов в $T_qN$ и отождествляется с группой $\mathrm{O}(2n)$.

Иначе говоря, расслоение $\mathcal{J}(N)$ можно можно отождествить с расслоением

$$\mathcal{J}(N) = \mathcal{O}(N) \times_{\mathrm{O}(2n)} \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$$

(смысл этого обозначения проясняется в нижеследующем отступлении).

Отступление (ассоциированные расслоения и косые произведения; см. [23], гл. 4, п. 5). Пусть на многообразии $E$ действует справа группа Ли $G$ и это действие не имеет неподвижных точек. Пусть, далее, $F$ – другое многообразие, на котором та же группа действует слева. Тогда прямое произведение $E \times F$ можно снабдить правым действием группы $G$ по правилу:

$$(e, f)g := (eg, g^{-1}f) \;\text{ для }\; e \in E,\; f \in F,\; g \in G.$$

Проекция на первый сомножитель порождает отображение

$$\pi\colon E \times F \longrightarrow E \longrightarrow E/G$$

на пространство орбит группы $G$ в $E$. Обозначим через

$$E \times_G F$$

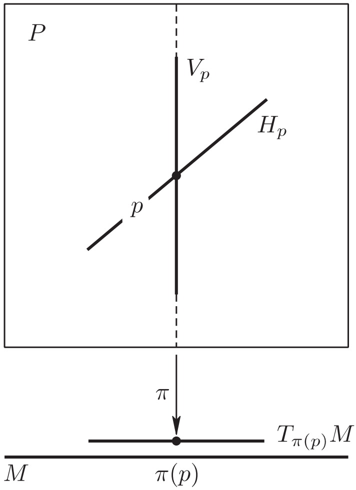
пространство орбит группы $G$ в $E \times F$. Указанное выше отображение порождает отображение

$$\pi\colon E \times_G F \longrightarrow E/G,$$

которое является расслоением со структурной группой $G$ и слоем $F$. В случае, когда $E$ есть главное $G$-расслоение над многообразием $M$, эта конструкция дает расслоение над $M$, ассоциированное с $E \to M$, которое имеет слоем пространство $F$. $\square$

В рассматриваемом нами случае роль $G$ играет группа $\mathrm{O}(2n)$, которая действует справа на $\mathcal{O}(N)$ заменой реперов, и действует левыми сдвигами на пространстве $\mathcal{J}(N)$.

Расслоение $\mathcal{J}(N) \to N$ будет играть роль твисторного расслоения над $N$. Покажем, прежде всего, что $\mathcal{J}(N)$ обладает естественной почти комплексной структурой. Для этого нам понадобится определение связности на расслоении.




Отступление (связности и вертикально-горизонтальные разложения; см. [5], гл. 5, пп. 5.1, 5.2, 5.4). Пусть $P \to M$ – главное расслоение над $n$-мерным многообразием $M$, слоем которого является группа Ли $G$.

Рассмотрим распределение плоскостей $V \subset TP$, слой которого в точке $p \in P$ состоит из векторов, касательных к слою $P_{\pi(p)}$ расслоения $P$, проходящему через точку $p$. Иными словами,

$$V_p = \{v \in T_pP \colon \pi_* v = 0\}.$$

*Связностью на расслоении* $P \to M$ называется гладкое распределение $H \subset TP$ $n$-мерных плоскостей, для которого выполняются следующие условия:

(1) $T_pP = V_p \oplus H_p$ в каждой точке $p \in P$;
(2) группа $G$, действующая на $TP$ с помощью присоединенного представления, отображает $H_p$ в $H_{pg}$ для любого $g \in G$.

Распределение $V$ называется *вертикальным*, а $H$ – *горизонтальным распределением* на расслоении $P$.

Из приведенного определения связности вытекает, что касательное отображение $\pi_*$ устанавливает изоморфизм

$$\pi_* \colon H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$

для любого $p \in P$. Поэтому любое векторное поле $X$ на $M$ допускает однозначный подъем до сечения $\tilde{X}$ расслоения $H$, называемого *горизонтальным подъемом* векторного поля $X$. Это позволяет, в частности, определить *параллельный перенос* слоя $P_{\pi(p)}$ вдоль произвольного пути $\gamma\colon [0,1] \to M$ на $M$ с началом в точке $\pi(p)$: $\gamma(0) = \pi(p)$. Для этого нужно рассмотреть горизонтальный подъем $\gamma$ до пути $\tilde{\gamma}$ на расслоении $P$ с началом в точке $p$ и выбрать в качестве образа точки $p$ при параллельном переносе вдоль $\gamma$ значение $\tilde{\gamma}(1)$. Указанная конструкция связывает данное определение связности с ее определением в терминах параллельного переноса (см. п. 1.3).

Для того, чтобы установить соответствие приведенного определения с определением связности в терминах ковариантного дифференцирования (символов Кристоффеля–Шварца), введем *форму связности*, которая является 1-формой $\theta$ на расслоении $P$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$. Эта форма задается следующим образом: значение $\theta$ в точке $p \in P$ на векторе $v \in T_pP$ равно проекции $\mathrm{pr}_V(v)$ этого вектора на вертикальное подпространство $V_p \subset T_pP$, рассматриваемой как элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что форма связности однозначно определяет саму связность $H$, а именно, слой $H_p$ отождествляется с ядром формы $\theta_p$.

Построим теперь вертикально-горизонтальное разложение на расслоении, которое ассоциировано с главным расслоением $P \to M$, снабженным связностью ${}^PH$. Пусть $E \to M$ – такое расслоение со слоем $F$ и структурной группой $G$, действующей на $F$ слева. Рассмотрим отображение

$$\rho\colon P \times F \longrightarrow E, \quad (p,f) \longmapsto e = \rho(p)f,$$

задаваемое действием элемента $p \in G$ на элемент $f \in F$. Касательное к нему отображение

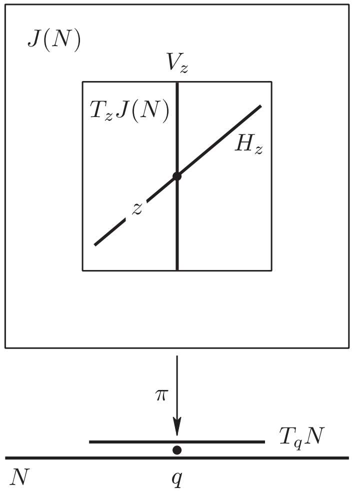
$$\rho_*\colon T_{(p,f)}(P \times F) \longrightarrow T_eE$$

позволяет определить горизонтальное распределение ${}^EH$ на $E \to M$, полагая

$${}^EH_e := \rho_*({}^PH_p). \qquad \square$$

Вернемся к твисторному расслоению $\mathcal{J}(N) \to N$. Риманова связность ${}^N\nabla$ порождает естественную связность на главном $\mathrm{O}(2n)$-расслоении $\mathcal{O}(N) \to N$, которая определяет вертикально-горизонтальное разложение ассоциированного расслоения $\mathcal{J}(N)$:

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H.$$




Введем почти комплексную структуру $\mathcal{J}^1$ на $\mathcal{J}(N)$, полагая

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^v \oplus \mathcal{J}^h.$$

Значение вертикальной компоненты $\mathcal{J}^v_z \in \mathrm{End}(V_z)$ в точке $z \in \mathcal{J}(N)$ совпадает с канонической комплексной структурой на пространстве

$$V_z \cong \mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n),$$

введенной в начале этого параграфа. Значение горизонтальной компоненты $\mathcal{J}^h_z \in \mathrm{End}(H_z)$ в точке $z$ совпадает с комплексной структурой $J(z) \leftrightarrow z$ на пространстве $H_z$, отождествляемом с $T_{\pi(z)}N$ посредством $\pi_*$. Напомним, что слой $\pi^{-1}(q)$ расслоения $\mathcal{J}(N) \to N$ над точкой $q = \pi(z) \in N$ состоит из эрмитовых структур на $T_qN$ и мы обозначаем через $J(z)$ эрмитову структуру на $T_qN$, отвечающую точке $z \in \pi^{-1}(q)$.

Построенная почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на $\mathcal{J}(N)$ превращает пространство $\mathcal{J}(N)$ в почти комплексное многообразие.

## 2.4. Твисторная конструкция гармонических отображений в римановы многообразия

В предыдущем параграфе мы построили для произвольного четномерного риманова многообразия $N$ твисторное расслоение

$$\pi \colon Z = \mathcal{J}(N) \longrightarrow N$$

и наделили твисторное пространство $Z$ почти комплексной структурой $\mathcal{J}^1$. В этом параграфе мы покажем, каким образом можно использовать указанное твисторное расслоение для решения нашей исходной задачи – построения гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в римановы многообразия.

Начнем с эвристических соображений. Напомним, что согласно твисторной программе Пенроуза можно свести любую задачу римановой геометрии на рассматриваемом нами римановом многообразии $N$ к некоторой задаче комплексной геометрии на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$. Поверив в этот тезис Пенроуза, следует предположить, что гармонические отображения $\varphi\colon M \to N$ из компактной римановой поверхности $M$ в многообразие $N$ должны возникать из псевдоголоморфных отображений $\psi\colon M \to (Z, \mathcal{J}^1)$ как проекции этих отображений на $N$, т.е. $\varphi = \pi \circ \psi$:

$$\begin{tikzcd} & (Z,\mathcal{J}^1) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

И это почти верно. Оказывается, что проекции псевдоголоморфных отображений $\psi\colon M \to Z$ на $N$ действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям 2-го порядка на $N$, но это не гармонические уравнения, а *ультрагиперболические*, т.е. гармонические уравнения с "неправильной" сигнатурой $(n, n)$ вместо нужной нам сигнатуры $(2n, 0)$. Поэтому, если мы хотим, оправдывая тезис Пенроуза, строить гармонические отображения $\varphi\colon M \to N$ как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi\colon M \to Z$, то должны поменять определение почти комплексной структуры на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$. А именно, в терминах вертикально-горизонтального разложения

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H,$$

искомая почти комплексная структура $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{J}(N)$ должна задаваться как

$$\mathcal{J}^2 = (-\mathcal{J}^v) \oplus \mathcal{J}^h.$$

Указанная почти комплексная структура на $\mathcal{J}(N)$ была введена Иллсом и Саламоном и, как мы увидим, именно она отвечает за твисторную интерпретацию гармонических отображений.

Переходя к строгому доказательству этого утверждения, определим сначала более формально понятие твисторного расслоения риманова многообразия.

Определение 8. Гладкое расслоение $\pi\colon Z \to N$, где $Z = (Z, \mathcal{J}^2)$ есть почти комплексное многообразие, называется *твисторным расслоением* риманова многообразия $N$, если проекция $\varphi := \pi \circ \psi$ любого псевдоголоморфного отображения $\psi\colon M \to Z$ произвольной компактной римановой поверхности $M$ в твисторное пространство $Z$ является гармоническим отображением $\varphi\colon M \to N$.

Замечание 2. Поясним, почему в приведенном определении и, вообще, в этом курсе мы ограничиваемся отображениями из римановых поверхностей $M$, а не рассматриваем, скажем, отображения из произвольных комплексных (или почти комплексных) многообразий $M$. Можно показать, что проекции почти голоморфных отображений $\psi\colon M \to (\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2)$ на риманово многообразие $N$ при $\dim_{\mathbb{C}} M > 1$ являются не только гармоническими, но и плюригармоническими отображениями (т.е. удовлетворяют гармоническому уравнению при ограничении на любую комплексную кривую в $M$), что накладывает на них очень сильные ограничения. Поэтому, в надежде получить все гармонические отображения $\varphi\colon M \to N$ с помощью твисторной конструкции, мы ограничиваемся случаем $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$.

Пусть $N$ – риманово многообразие размерности $2n$ и $\pi\colon Z = \mathcal{J}(N) \to N$ – его твисторное расслоение эрмитовых структур. Риманова связность ${}^N\nabla$ определяет разложение

$$T\mathcal{J}(N) = V \oplus H,$$

в терминах которого введенные почти комплексные структуры задаются как

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^v \oplus \mathcal{J}^h, \quad \mathcal{J}^2 = (-\mathcal{J}^v) \oplus \mathcal{J}^h.$$

Рассмотрим вопрос об их интегрируемости.

Теорема 2 (Ронсли, см. [17]). *Почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на расслоении $\mathcal{J}(N)$ интегрируема $\Longleftrightarrow$ $N$ конформно плоско, т.е. $N$ конформно эквивалентно плоскому пространству.*

Напомним, что отображение $\varphi\colon (M,g) \to (N,h)$ римановых многообразий называется *конформным*, если индуцируемая им метрика $\varphi^*h$ на $M$ конформно эквивалентна римановой метрике $g$ многообразия $M$, т.е.

$$\varphi^*h = \lambda g$$

для некоторой положительной гладкой функции $\lambda$ на $M$.

Что касается почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{J}(N)$, то она никогда не интегрируема (см. [18]). Пояснить последнее утверждение можно следующим образом. Нетрудно показать, исходя из определения почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, что при условии ее интегрируемости локальные $\mathcal{J}^2$-голоморфные кривые $f : U \to \mathcal{J}(N)$ могут быть только горизонтальными, т.е. касательные к ним пространства должны принадлежать горизонтальному распределению $H$. С другой стороны, если бы $(\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2)$ было комплексным многообразием, то локальную голоморфную кривую на нем можно было выпустить в любом комплексном касательном направлении.

На первый взгляд, приведенные результаты о неинтегрируемости почти комплексных структур $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ выглядят разочаровывающими, поскольку неинтегрируемые почти комплексные структуры могут быть "дикими" – например, они могут не иметь даже локальных голоморфных функций. Однако в рассматриваемой задаче мы имеем дело, к счастью, не с голоморфными функциями на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$ (т.е. с голоморфными отображениями $f\colon Z \to \mathbb{C}$), а с двойственным объектом – голоморфными отображениями $\psi\colon M \to Z$ из римановых поверхностей $M$ в $Z$. Такое отображение $\psi$ голоморфно относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на $Z \iff$ оно удовлетворяет уравнению Коши–Римана $\bar\partial_J\psi = 0$ относительно индуцированной почти комплексной структуры $J := \varphi^*(\mathcal{J}^2)$ на $M$. А на римановой поверхности любая почти комплексная структура интегрируема. Поэтому свойства интегрируемости почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на твисторном пространстве $Z = \mathcal{J}(N)$ прямого отношения к нашей задаче не имеют. Мы упомянули о них для того, чтобы дать представление об устройстве введенных почти комплексных структур.

Вернемся к задаче построения гармонических отображений $\varphi\colon M \to N$ из компактных римановых поверхностей $M$ в заданное риманово многообразие $N$. Допустим, что $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ есть гладкое отображение, проекция которого на $N$ совпадает с заданным отображением $\varphi\colon M \to N$: $\varphi = \pi \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{J}(N) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

По определению горизонтального распределения $H$, индуцированное расслоение $\varphi^{-1}(TN)$ изоморфно обратному образу $\psi^{-1}H$, поэтому расслоение $\varphi^{-1}(TN)$ наследует почти комплексную структуру $\mathcal{J}^h$ из $H$. Значение этой почти комплексной структуры на слое $\varphi^{-1}(TN)_p = T_{\varphi(p)}N$ равно $\mathcal{J}^h_{\psi(p)} \in \mathcal{J}(N)_{\varphi(p)}$. Обратно, для любого гладкого отображения $\varphi\colon M \to N$ задание почти комплексной структуры на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$ порождает естественным образом отображение $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ со свойством: $\varphi = \pi \circ \psi$.

Следовательно, *построение отображения $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ такого, что $\varphi = \pi \circ \psi$, эквивалентно введению почти комплексной структуры на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$.*

Обозначим почти комплексную структуру на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$, индуцируемую отображением $\psi$, через $J_\psi$. Ее можно представить в виде $J_\psi = \psi^{-1}J$, где $J$ – почти комплексная структура на $N$ (совпадающая с образом отображения $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$). Почти комплексная структура $J_\psi$ порождает разложение комплексифицированного расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ в прямую сумму собственных подрасслоений этой структуры, отвечающих собственным значениям $\pm i$. Чтобы подчеркнуть их зависимость от отображения $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$, обозначим эти собственные подрасслоения через $\underline{\psi}^{\pm}$. Тем самым, введение почти комплексной структуры на расслоении $\varphi^{-1}(TN)$, отвечающей отображению $\psi$, эквивалентно представлению комплексифицированного расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ в виде

$$\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N) = \underline{\psi}^{+} \oplus \underline{\psi}^{-}.$$

Обозначим через $\varphi^{-1}\nabla$ связность на расслоении $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированную римановой связностью ${}^N\nabla$. Дифференциал $d\psi$ отображения $\psi$ отождествляется с сечением расслоения $T^*M \otimes \psi^{-1}TZ$, где $Z = \mathcal{J}(N)$. Как было указано ранее, связность ${}^N\nabla$

порождает вертикально-горизонтальное разложение касательного расслоения $TZ$:

$$TZ = V \oplus H, \tag{2.3}$$

и, в соответствии с этим разложением, мы можем представить дифференциал $d\psi$ в виде суммы его вертикальной и горизонтальной составляющих. Горизонтальная составляющая совпадает с $d\varphi$, поскольку $H \cong \pi^{-1}(TN)$, а вертикальная составляющая совпадает с $\psi^*(\theta)$, где $\theta$ – 1-форма связности на $Z$, определяемой разложением (2.3). Таким образом,

$$d\psi = \psi^*(\theta) \oplus d\varphi$$

в соответствии с разложением (2.3).

Вертикальную компоненту дифференциала можно охарактеризовать еще и следующим утверждением, которое понадобится нам ниже.

Лемма 1 (Ронсли, см. [17], пред. 5.2). *Для любого вектора $X \in TM$ имеет место соотношение*

$$[\psi^*(\theta)X, J_\psi] = \left(\varphi^{-1}\nabla\right)_X J_\psi.$$

Следующее предложение дает критерий $\mathcal{J}^1$- и $\mathcal{J}^2$-голоморфности отображения $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ в терминах введенных понятий.

Предложение 1 (Ронсли [17]). *Отображение $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ является $\mathcal{J}^1$-голоморфным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1a) $d\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}^+$;

(1b) $(\varphi^{-1}\nabla)_Z\colon C^\infty(\underline{\psi}^+) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}^+)$ *для любого вектора* $Z \in T^{1,0}M$.

*Эти условия можно записать в другой, эквивалентной форме:*

(2a) $d\varphi \circ {}^M J = J_\psi \circ d\varphi$;

(2b) $(\varphi^{-1}\nabla)_Z(J_\psi)\underline{\psi}^+ = 0$ *для любого вектора* $Z \in T^{1,0}M$.

*Отображение $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ является $\mathcal{J}^2$-голоморфным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(3a) $d\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}^+$;

(3b) $(\varphi^{-1}\nabla)_{\overline{Z}}\colon C^\infty(\underline{\psi}^+) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}^+)$ *для любого вектора* $\overline{Z} \in T^{0,1}M$.

*Эти условия можно записать в эквивалентной форме*:
(4a) $d\varphi \circ {}^M J = J_\psi \circ d\varphi$;
(4b) $(\varphi^{-1}\nabla)_{\overline{Z}}(J_\psi)\underline{\psi}^+ = 0$ *для любого вектора* $\overline{Z} \in T^{0,1}M$.

Замечание 3. Напомним, что почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ определяются в терминах вертикально-горизонтального разложения (2.3) и отличаются только знаком вертикальной компоненты $\mathcal{J}^v$. Приведенное предложение дает критерий почти голоморфности отображений $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ отдельно для горизонтальной и вертикальной составляющих структур $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$. Горизонтальная голоморфность отображения $\psi$ обеспечивается условием (1a)=(3a), совпадающим для обеих структур. Вертикальная голоморфность $\psi$ гарантируется условиями (1b) и (3b), которые, как и следовало ожидать, отличаются знаком. Заметим, что условие (3b) означает голоморфность подрасслоения $\underline{\psi}^+ \subset \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ относительно КМ-структуры на $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированной связностью $\varphi^{-1}\nabla$.

Доказательство. Мы докажем только критерий $\mathcal{J}^2$-голоморфности отображения $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$, утверждение, касающееся его $\mathcal{J}^1$-голоморфности, доказывается аналогично. Для доказательства $\mathcal{J}^2$-голоморфности $\psi$ нужно проверить, что

$$d\psi \circ {}^M J = \psi^{-1}\mathcal{J}^2 \circ d\psi. \tag{2.4}$$

Горизонтальная составляющая этого соотношения имеет вид

$$d\varphi \circ {}^M J = \psi^{-1} J \circ d\varphi,$$

что совпадает с условием (4a). Вертикальная составляющая (2.4) имеет вид

$$\psi^*(\theta) \circ {}^M J = -\psi^{-1}\mathcal{J}^v \circ \psi^*(\theta).$$

Вычислим значения обеих частей последнего равенства на векторе $X \in TM$ и возьмем скобку полученных значений с оператором $J_\psi$. Пользуясь леммой 1, получим

$$(\varphi^{-1}\nabla)_{{}^M JX} J_\psi = -\psi^{-1}\mathcal{J}^v(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi.$$

В случае, когда вектор $X$ имеет тип $(0,1)$, левая часть равна $-i(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi$ и последнее соотношение превращается в

$$\psi^{-1}\mathcal{J}^v(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi = i(\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi.$$

Обозначая $A := (\varphi^{-1}\nabla)_X J_\psi$, мы можем переписать его в виде $\psi^{-1}\mathcal{J}^v A = iA$. Иными словами, $A \in \psi^{-1}(T^{1,0}V)$. Из формулы (2.2) (см. п. 2.3) вытекает, что последнее условие эквивалентно тому, что

$$A\underline{\psi}^+ = 0, \quad A\underline{\psi}^- \subset \underline{\psi}^+.$$

Первое из этих соотношений совпадает с (4b). Второе вытекает из следующего утверждения, проверку которого мы оставляем читателю.

*Пусть* $(\mathcal{M}, \mathcal{J})$ *– почти эрмитово комплексное многообразие и* $\nabla$ *– риманова связность на* $\mathcal{M}$. *Тогда оператор* $\nabla_X\mathcal{J}$ *отображает каждое из собственных подрасслоений оператора* $\mathcal{J}$ *в его ортогональное дополнение, т.е.* $\nabla_X\mathcal{J}\colon T^{1,0}_{\mathcal{J}}\mathcal{M} \to T^{0,1}_{\mathcal{J}}\mathcal{M}$ *и* $\nabla_X\mathcal{J}\colon T^{0,1}_{\mathcal{J}}\mathcal{M} \to T^{1,0}_{\mathcal{J}}\mathcal{M}$.

Условия (3a), (3b) являются просто переформулировками условий (4a), (4b).

Замечание 4. В приведенном предложении не использовался тот факт, что $M$ является римановой поверхностью. Оно справедливо для произвольных гладких отображений $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ почти комплексных многообразий $M$ в пространство $\mathcal{J}(N)$.

Имея критерий $\mathcal{J}^2$-голоморфности, даваемый предложением Ронсли, мы можем доказать, что расслоение эрмитовых структур $\mathcal{J}(M) \to N$ является твисторным в смысле определения 8.

Теорема 3. *Расслоение эрмитовых структур*

$$\pi\colon (\mathcal{J}(N), \mathcal{J}^2) \longrightarrow N$$

*является твисторным, т.е. проекция* $\varphi = \pi \circ \psi$ *произвольного* $\mathcal{J}^2$*-голоморфного отображения* $\psi\colon M \to \mathcal{J}(N)$ *произвольной римановой поверхности* $M$ *в пространство* $\mathcal{J}(N)$ *является гармоническим отображением.*

Доказательство. Мы должны показать, что

$$\tau_\varphi = \mathrm{tr}(\nabla d\varphi) = \nabla d\varphi(Z, \overline{Z}) = 0,$$

где $Z = \partial/\partial z \in T^{1,0}M$. Но

$$\nabla d\varphi(Z, \overline{Z}) = \left(\varphi^{-1}\, {}^N\nabla\right)_{\overline{Z}} d\varphi(Z) - d\varphi({}^M\nabla_{\overline{Z}} Z).$$

Заметим, что векторное поле ${}^M\nabla_{\overline{Z}}Z \in T^{1,0}M$, поскольку ${}^M\nabla_{\overline{Z}}\,{}^M\nabla_{\overline{Z}}Z = 0$ (это одна из формулировок условия интегрируемости комплексной структуры на $M$). Поэтому по условию (3a) из предложения 1

$$d\varphi({}^M\nabla_{\overline{Z}}Z) \subset \underline{\psi}^+.$$

С другой стороны,

$$\left(\varphi^{-1}\,{}^N\nabla\right)_{\overline{Z}}\, d\varphi(Z) \subset \underline{\psi}^+,$$

поскольку $d\varphi(Z) \subset \underline{\psi}^+$ по условию (3a), а

$$\left(\varphi^{-1}\,{}^N\nabla\right)_{\overline{Z}} : C^\infty(\underline{\psi}^+) \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}^+)$$

по условию (3b) из предложения 1. Поэтому

$$\tau_\varphi = \nabla d\varphi(Z, \overline{Z}) \subset \underline{\psi}^+.$$

Но $\tau_\varphi$ вещественно, следовательно,

$$\tau_\varphi \subset \underline{\psi}^+ \cap \overline{\underline{\psi}^+} = \underline{\psi}^+ \cap \underline{\psi}^- = \{0\}.$$

Тем самым, $\tau_\varphi = 0$, т.е. отображение $\varphi$ гармонично.

Замечание 5. Доказанная теорема немедленно переносится на случай, когда $M$ есть произвольное кэлерово многообразие (проверьте это самостоятельно).

Мы показали, что проекция любой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi\colon M \to \mathcal{J}(M)$ является гармоническим отображением. Спрашивается, когда верно обратное, иными словами, когда указанное гармоническое отображение $\varphi\colon M \to N$ является проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi\colon M \to \mathcal{J}(M)$? Оказывается, “воспоминанием” отображения $\varphi\colon M \to N$ о том, что оно было получено как проекция $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой в $\mathcal{J}(M)$, служит, помимо его гармоничности, еще и конформность отображения $\varphi$.

Общее определение конформного отображения $\varphi\colon M \to N$ римановых многообразий, данное выше при обсуждении интегрируемости почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, в случае римановой поверхности $M$ можно переформулировать следующим образом. Отображение $\varphi\colon M \to N$ римановой поверхности $M$ в риманово многообразие $(N, h)$ *конформно*, если

$$h(\varphi_*(\partial/\partial z), \varphi_*(\partial/\partial z)) = 0 \tag{2.5}$$

(в этом равенстве подразумевается, что риманова метрика $h$ продолжена комплексно-линейным образом на $T^{\mathbb{C}}N$). Указанное условие означает, что образ пространства $T^{1,0}M$ при касательном отображении $\varphi$ является изотропным подпространством относительно метрики $h$, иначе говоря, конформность отображения $\varphi$ эквивалентна его изотропности. В случае, когда $N$ является кэлеровым, условие (2.5) можно переписать в виде

$$h(\partial'\varphi, \overline{\partial''\varphi}) = 0.$$

Возвращаясь к поставленному нами вопросу, можно показать (см. [17]), что любое гармоническое конформное отображение $\varphi\colon M \to N$ из компактной римановой поверхности $M$ в ориентированное риманово многообразие $N$ локально является проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi\colon M \to \mathcal{J}(M)$.

Рассмотренное нами расслоение эрмитовых структур $\mathcal{J}(M) \to N$ является далеко не единственным твисторным расслоением, с помощью которого можно строить гармонические отображения. Исходя из расслоения $\mathcal{J}(M) \to N$, можно строить и другие твисторные расслоения $Z \to N$, пользуясь следующим методом, предложенным Ронсли.

Пусть задано гладкое расслоение $p\colon Z \to N$, слои которого являются комплексными многообразиями с комплексной структурой, гладко зависящей от точки $q \in N$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "p"'] & & J(N) \arrow[dl, "\pi"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Допустим, что имеется послойное отображение $j\colon Z \to \mathcal{J}(N)$, которое голоморфно на слоях. Предположим, далее, что на расслоении $p\colon Z \to N$ имеется гладкое горизонтальное распределение ${}^{Z}H$, которое переводится отображением $j_*$ в горизонтальное распределение $H$ на $\mathcal{J}(N)$. Тогда на ${}^{Z}H$ возникает почти комплексная структура ${}^{Z}\mathcal{J}^h$, задаваемая прообразом почти комплексной структуры $\mathcal{J}^h$ на $H$ при отображении $j$. Используя эту горизонтальную почти комплексную структуру ${}^{Z}\mathcal{J}^h$ на ${}^{Z}H$ и заданную вертикальную комплексную структуру на слоях расслоения $p\colon Z \to N$, мы можем ввести на $Z$ почти комплексные структуры ${}^{Z}\mathcal{J}^1$ и ${}^{Z}\mathcal{J}^2$ также, как в случае расслоения $\pi\colon \mathcal{J}(N) \to N$.

Ясно, что отображение $j$ является почти голоморфным по отношению к обеим введенным структурам, поэтому $p\colon Z \to N$ есть твисторное расслоение над $N$ также, как и $\pi\colon \mathcal{J}(N) \to N$.

Продемонстрируем на конкретных примерах, как действует метод Ронсли “на практике”.

Пример 4 (расслоение эрмитовых структур, совместимых с ориентацией). Обозначим через $\mathcal{J}^+(N) \to N$ *расслоение эрмитовых структур, совместимых с ориентацией*. Слоем этого расслоения в точке $q \in N$ является пространство $\mathcal{J}^+(T_qN)$, которое отождествляется с однородным пространством $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$. Также, как в случае расслоения $\mathcal{J}(N)$, риманова связность ${}^N\nabla$ порождает вертикально-горизонтальное разложение

$$T\mathcal{J}^+(N) = V \oplus H,$$

а естественное вложение $j\colon \mathcal{J}^+(N) \hookrightarrow \mathcal{J}(N)$ превращает $\mathcal{J}^+(N) \to N$ в твисторное расслоение, наделенное почти комплексной структурой $\mathcal{J}^2$.

Пример 5 (комплексное грассманово расслоение). Пусть $N$ есть кэлерово многообразие размерности $m$. Обозначим через

$$Z := G_r(T^{1,0}N) \longrightarrow N$$

*комплексное грассманово расслоение*, слоем которого в точке $q \in N$ является грассманово многообразие $G_r(T_q^{1,0}N)$ комплексных подпространств размерности $r$ в комплексном векторном пространстве $T_q^{1,0}N$. Если обозначить через $\mathcal{U}(N) \to N$ главное $\mathrm{U}(m)$-расслоение унитарных реперов на $N$, то

$$Z = \mathcal{U}(N) \otimes_{\mathrm{U}(m)} G_r(\mathbb{C}^m).$$

В случае кэлерова многообразия $N$ риманова связность ${}^N\nabla$ определяет связность на расслоении $\mathcal{U}(N)$ и потому задает горизонтальное распределение на пространстве $Z$. Комплексная структура на слоях $Z \to N$ индуцируется естественной комплексной структурой на грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^m)$ (см. п. 3.1). Построим теперь отображение

$$j\colon Z \longrightarrow \mathcal{J}(N),$$

полагая для подпространства $W \in G_r(T_q^{1,0}N)$:

$$j(W) = \begin{cases} {}^NJ & \text{на } (W \oplus \overline{W}) \cap T_qN, \\ -{}^NJ & \text{на } \big[(W \oplus \overline{W}) \cap T_qN\big]^\perp. \end{cases}$$

Построенное отображение $j\colon Z \to \mathcal{J}(N)$ удовлетворяет условиям метода Ронсли (проверьте это!), откуда следует, что грассманово расслоение $G_r(T^{1,0}N) \to N$ является твисторным, иными словами, проекция любого $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi\colon M \to G_r(T^{1,0}N)$ из компактной римановой поверхности $M$ на многообразие $N$ является гармоническим отображением $\varphi\colon M \to N$. Как было указано выше, такое отображение обязательно конформно. В случае $r = 1$ можно построить и обращение приведенной твисторной конструкции, иными словами, построить для произвольного конформного гармонического отображения $\varphi\colon M \to N$ его твисторное поднятие до $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi\colon M \to G_1(T^{1,0}N)$. Заметим, что грассманово расслоение $G_1(T^{1,0}N) \to N$ совпадает с проективизацией $\mathbb{P}(T^{1,0}N) \to N$ расслоения $T^{1,0}N \to N$.

Предположим, что задано конформное гармоническое отображение $\varphi\colon M \to N$, не являющееся антиголоморфным (для антиголоморфных, как и голоморфных, отображений задача о построении их твисторных поднятий не стоит). Его дифференциал $\delta\varphi$ записывается в виде (см. формулу (1.14) в п. 1.4)

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi}.$$

Если отображение $\varphi$ не является антиголоморфным, то $\partial'\varphi(\partial/\partial z)$ задает не равное тождественно нулю сечение расслоения $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, которое голоморфно относительно КМ-структуры на этом расслоении, индуцированной римановой связностью ${}^N\nabla$. Это сечение может иметь только изолированные нули, вне которых твисторное поднятие $\psi\colon M \to \mathbb{P}(T^{1,0}N)$ задается, по определению, посредством

$$\psi = [\partial'\varphi(\partial/\partial z)]\,.$$

Иными словами, значение $\psi(p)$ отображения $\psi$ в точке $p \in M$ совпадает с комплексной прямой в $T^{1,0}_{\varphi(p)}N$, порождаемой $(1,0)$-компонентой вектора $\varphi_*(\partial/\partial z)$. Пользуясь голоморфностью построенного линейного подрасслоения в расслоении $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$, можно продолжить его на изолированные нули сечения $\partial'\varphi(\partial/\partial z)$ (вариант теоремы Римана о стирании изолированных особенностей голоморфных функций), получив, тем самым, искомое отображение

$$\psi\colon M \to \mathbb{P}(T^{1,0}N).$$

Построенное отображение $\psi$ является $\mathcal{J}^2$-голоморфным, если $\varphi$ конформно.

Задача 11. Докажите последнее утверждение, пользуясь критерием $\mathcal{J}^2$-голоморфности из предложения 1.

Мы рассмотрели примеры различных твисторных пространств над римановыми многообразиями $N$. Сужая класс допустимых римановых многообразий (как в последнем примере, где мы ограничились классом кэлеровых многообразий $N$), можно с помощью метода Ронсли строить новые примеры твисторных пространств. Руководящая идея состоит в том, чтобы для каждого класса римановых многообразий $N$ выбирать в качестве адекватного твисторного расслоения расслоение комплексных структур, так или иначе связанных с геометрией многообразий изучаемого класса. В следующих главах мы приведем конструкцию твисторных расслоений над комплексными проективными и грассмановыми многообразиями. Ее можно рассматривать как частный случай более общей конструкции твисторных расслоений над однородными пространствами вида $G/H$. В этой общей конструкции, которая также может быть получена методом Ронсли, в качестве твисторного расслоения выбирается расслоение $G$-инвариантных комплексных структур на $G/H$.

# Глава 3. Гармонические отображения в комплексные проективные пространства

В этой главе будет дано описание гармонических отображений $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ из компактных римановых поверхностей $M$ в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$. В п. 3.1 приводится конструкция гармонических отображений в терминах голоморфных кривых, не использующая твисторного подхода. Ее твисторная интерпретация в терминах флагового расслоения над $\mathbb{CP}^n$ дается в п. 3.2.

## 3.1. Гармонические отображения и голоморфные кривые

Отступление (комплексное проективное пространство и комплексное грассманово многообразие; см. [9], гл. I, п. 5).

*Комплексное проективное пространство* $\mathbb{CP}^n$ есть множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Поскольку такая прямая полностью определяется любой своей точкой $z \neq 0$, то элементы $\mathbb{CP}^n$ можно отождествить с классами эквивалентности $[z]$, $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, заданными с точностью до умножения на ненулевое комплексное число. Тем самым имеется естественное отображение

$$\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\mathbb{C}^*} \mathbb{CP}^n,$$

сопоставляющее точке $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ее класс эквивалентности $[z] \in \mathbb{CP}^n$. Слой этого отображения совпадает с $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Наделим $\mathbb{CP}^n$ топологией, индуцируемой проекцией $\pi$, и рассмотрим открытые подмножества

$$U_i = \{[z_0, \dots, z_n]\colon z_i \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^n,$$

состоящие из комплексных прямых, не лежащих в гиперплоскости $\{z_i = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Введем отображение

$$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{C}^n, \quad [z_0, \dots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

("шляпка" над выражением $\frac{z_i}{z_i}$ означает, что оно должно быть пропущено).

Открытые множества $\{U_i\}$ вместе с гомеоморфизмами $\{\varphi_i\}$ образуют атлас комплексных координатных окрестностей и локальных карт на многообразии $\mathbb{CP}^n$, поскольку на пересечениях $U_i \cap U_j$ отображения

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

задаваемые посредством

$$(w_1, \ldots, w_n) \longmapsto \left(\frac{w_1}{w_j}, \ldots, \frac{\widehat{w_j}}{w_j}, \ldots, \frac{1}{w_j}, \ldots, \frac{w_n}{w_j}\right),$$

голоморфны (в последней формуле предполагается, что $j < i$ и дробь $\frac{1}{w_j}$ стоит на $i$-м месте). Это задает на $\mathbb{CP}^n$ структуру комплексного многообразия размерности $n$. Оно компактно, поскольку совпадает с непрерывным образом отображения

$$\pi \colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \supset S^{2n+1} \xrightarrow{S^1} \mathbb{CP}^n,$$

где $S^{2n+1}$ – единичная сфера в $\mathbb{C}^{n+1}$. Координаты $[z_0, \ldots, z_n]$, заданные с точностью до пропорциональности, называются *однородными координатами* в $\mathbb{CP}^n$.

По-другому, можно представлять себе $\mathbb{CP}^n$ как компактификацию $\mathbb{C}^n$, получаемую добавлением к $\mathbb{C}^n$ гиперплоскости $H$ на бесконечности. В координатах вложение $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$ можно задать отображением

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto [1, z_1, \ldots, z_n],$$

при этом $H$ отождествляется с гиперплоскостью $\{z_0 = 0\} \subset \mathbb{CP}^n$.

Построим эрмитову метрику на $\mathbb{CP}^n$. Для этого рассмотрим форму $\widetilde{\omega}$ на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, задаваемую выражением

$$\widetilde{\omega} = \frac{i}{2} \cdot \frac{|z|^2 \sum_{j=0}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j - \sum_{j,k=0, j\neq k}^n \bar{z}_j z_k \, dz_j \wedge d\bar{z}_k}{|z|^4},$$

где $|z|^2 = |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2$. Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\widetilde{\omega} = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial} \log |z|^2,$$

где

$$\partial = \sum \frac{\partial}{\partial z_j}\, dz_j, \quad \bar\partial = \sum \frac{\partial}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_j.$$

Форма $\widetilde{\omega}$ является $d$-замкнутой (т.е. $d\widetilde{\omega} = 0$) однородной формой на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, поэтому она спускается до замкнутой формы $\omega$ типа $(1,1)$ на $\mathbb{CP}^n$. Ее ограничение на координатную окрестность $U_0$ можно записать в виде

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \frac{i}{2} \cdot \frac{(1+|w|^2)\sum\limits_j dw_j \wedge d\overline{w}_j - \sum\limits_{j\neq k} \overline{w}_j w_k\, dw_j \wedge d\overline{w}_k}{(1+|w|^2)^2},$$

где $w_j = z_j/z_0$. Определяемый этой формулой тензор

$$h(w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{(1+|w|^2)^2} \sum_{j,k} h_{jk}(w)\, dw_j \otimes d\overline{w}_k$$

имеет коэффициенты $h_{jk}(w) = (1+|w|^2)^2 \delta_{jk} - \overline{w}_j w_k$, составляющие положительно определенную эрмитову матрицу. То же самое рассуждение применимо к любой координатной окрестности $U_i$. Тем самым, $h$ является метрическим тензором некоторой эрмитовой метрики на $\mathbb{CP}^n$, называемой *метрикой Фубини–Штуди*. Эта метрика вместе с замкнутой формой $\omega$ задает на $\mathbb{CP}^n$ структуру кэлерова многообразия.

*Комплексное грассманово многообразие* $G_k(\mathbb{C}^n)$ есть множество $k$-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Любое такое подпространство $V$ задается набором из $k$ векторов-строк $(v_1, \dots, v_k)$ в $\mathbb{C}^n$, порождающих подпространство $V$, иначе говоря, $V$ задается $(k \times n)$-матрицей

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}.$$

Две такие матрицы $A$, $A'$ задают одно и то же подпространство $V$ тогда и только тогда, когда $A' = gA$ для некоторой $(k \times k)$-матрицы $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$.

Фиксируем ортонормированный базис $\{e_i\}$ в $\mathbb{C}^n$. Для произвольного набора

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$$

индексов из $k$ элементов обозначим через

$$V_I = \{k\text{-мерное подпространство в } \mathbb{C}^n, \\ \text{порожденное векторами } e_i \text{ с } i \in I\},$$

и через $V_I^{\perp}$ его ортогональное дополнение, т.е.

$$V_I^{\perp} = \{(n-k)\text{-мерное подпространство в } \mathbb{C}^n, \\ \text{порожденное векторами } e_i \text{ с } i \notin I\}.$$

Введем множества $U_I$, которые будут играть роль координатных окрестностей на $G_k(\mathbb{C}^n)$:

$$U_I = \{V \in G_k(\mathbb{C}^n)\colon V \cap V_I^{\perp} = 0\}.$$

Иначе говоря, $U_I$ состоит из $k$-мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$, трансверсальных $V_I^{\perp}$. Для любого подпространства $V \in U_I$ можно найти матричное представление, в котором $(k \times k)$-минор с индексами из $I$ будет единичным. Например, любое подпространство $V \in U_{I^0}$ с $I^0 = \{1, \ldots, k\}$ можно однозначно задать $(k \times n)$-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \star & \ldots & \star \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \star & \ldots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \star & \ldots & \star \end{pmatrix},$$

вектор-строки которой отвечают точкам пересечения $V$ с аффинными плоскостями $V_I^{\perp} + e_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Обратно, любая такая матрица задает некоторое подпространство $V \in U_{I^0}$. Тем самым, имеется взаимно-однозначное отображение

$$\varphi_{I^0}\colon U_{I^0} \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)}.$$

С помощью аналогичных рассуждений строятся взаимно-однозначные отображения

$$\varphi_I\colon U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{k(n-k)},$$

для любого множества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ из $k$ индексов. Наделим множество $G_k(\mathbb{C}^n)$ слабейшей топологией, индуцированной отображениями $\{\varphi_I\}$, в которой все отображения $\varphi_I$ непрерывны. Тогда атлас $\{U_I\}$ вместе с координатными отображениями $\{\varphi_I\}$ будет задавать на $G_k(\mathbb{C}^n)$ структуру комплексного многообразия размерности $k(n-k)$. (Для того, чтобы убедиться в этом, нужно еще проверить, что отображения $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1} \colon \varphi_J(U_I \cap U_J) \to \varphi_J(U_I \cap U_J)$ голоморфны. Проделайте это самостоятельно.)

Унитарная группа $\mathrm{U}(n)$ транзитивно действует на $G_k(\mathbb{C}^n)$ посредством замены базиса $\{e_i\}$. Подгруппа изотропии подпространства $V_{I^0}$ совпадает, очевидно, с группой $\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k)$, поэтому многообразие $G_k(\mathbb{C}^n)$ допускает однородное представление вида

$$G_k(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k),$$

из которого вытекает, что $G_k(\mathbb{C}^n)$ компактно.

При $k=1$ грассманово многообразие $G_1(\mathbb{C}^n)$ совпадает с комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^n$. При $k>1$ его также можно реализовать в виде подмногообразия комплексного проективного пространства с помощью *плюккерова вложения*:

$$\pi \colon G_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{n_k},$$

где $n_k := \binom{n}{k} - 1$. Это отображение сопоставляет $k$-мерному подпространству $V \subset \mathbb{C}^n$, порождаемому векторами $v_1, \dots, v_k$, $k$-вектор $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. В базисе $\{e_I\}$, $e_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, пространства $\wedge^k \mathbb{C}^n$, однородные координаты подпространства $V$ в пространстве $\mathbb{CP}^{n_k}$ будут иметь вид

$$[\dots, |\Lambda_I|, \dots]\,,$$

где $\Lambda_I$ – $(k \times k)$-минор $(k \times n)$-матрицы, задающей $V$, со столбцами, занумерованными индексами из $I$. Отображение $\pi$ является голоморфным вложением $G_k(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{CP}^{n_k}$. Его образ совпадает с проективным подмногообразием в $\mathbb{CP}^{n_k}$, выделяемым условием разложимости $k$-вектора $v \in \wedge^k \mathbb{C}^n$ (т.е. представимости $v$ в виде $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$). Это условие записывается в виде системы квадратичных соотношений на компоненты $k$-вектора $v$, тем самым, образ $\pi$ совпадает с пересечением квадрик в $\mathbb{CP}^{n_k}$.

Задача 12. Опишите образ плюккерова вложения грассманиана $G_2(\mathbb{C}^4)$ в проективное пространство $\mathbb{CP}^5$.

Плюккерово вложение $\pi \colon G_k(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{CP}^{n_k}$ позволяет наделить $G_k(\mathbb{C}^n)$ естественной эрмитовой метрикой, индуцированной метрикой Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^{n_k}$. $\square$

Перейдем к описанию гармонических отображений $\varphi\colon M \to \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ и вначале изложим метод их построения, который формально не апеллирует к теории твисторов (его твисторная интерпретация будет дана в п. 3.2). Указанный метод позволяет строить гармонические отображения $M \to \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, исходя из голоморфных кривых в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Пусть $f\colon M \to \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ – голоморфная кривая в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, т.е. голоморфное отображение компактной римановой поверхности $M$ в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Кривая $f$ называется *полной*, если ее образ не содержится ни в каком собственном проективном подпространстве в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Сопоставим $f$ ассоциированную с ней кривую $f_r\colon M \to G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ в грассмановом многообразии $G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ с $0 \leqslant r \leqslant n$.

Для этого выберем локальную карту $(U, z)$ в точке $p \in M$ с локальной координатой $z$ и рассмотрим локальный подъем $f_U$ отображения $f$ над окрестностью $U$. Иными словами, $f_U$ есть отображение $U \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, накрывающее $f$ над $U$, так что $f(z) = \pi(f_U(z))$ для $z \in U$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, dashed, "f_U"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Обозначим $\partial^\alpha := \partial^\alpha / \partial z^\alpha$ для $\alpha = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим подпространство в $\mathbb{C}^{n+1}$ вида

$$\theta_r(p) := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\partial^\alpha f_U(p)\colon 0 \leqslant \alpha \leqslant r\}, \quad p \in M,$$

натянутое на векторы $f_U(p), \partial f_U(p), \ldots, \partial^r f_U(p)$. Указанное подпространство не зависит от выбора локальной карты в точке $p$ и локального подъема $f_U$ кривой $f$. Оно называется *примыкающим* к $f$ *пространством порядка* $r$. При изменении $p$ размерность примыкающего пространства может меняться, но для полной кривой размерность $\dim \theta_n(p)$ должна быть равна $n + 1$ хотя бы в одной точке $p \in M$ (а значит, и в некоторой ее окрестности).

Введем особое множество

$$S = \{p \in M\colon \dim \theta_n(p) < n + 1\}$$

и определим голоморфное отображение $f_r\colon M \setminus S \to G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})$, полагая

$$f_r(p) := \theta_r(p).$$

Множество $S$ для полной голоморфной кривой $f$ состоит из изолированных точек, поэтому отображение $f_r$ можно продолжить до голоморфного отображения

$$f_r\colon M \to G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1}),$$

которое называется *$r$-й ассоциированной кривой* отображения $f$. Очевидно, $f_0 = f$ и мы полагаем для удобства $f_{-1}\colon M \to G_0(\mathbb{C}^{n+1})$ равным 0.

Определим для полной голоморфной кривой $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ ее *поляру* как отображение

$$g := f_{n-1}^{\perp}\colon M \xrightarrow{f_{n-1}} G_n(\mathbb{C}^{n+1}) \xrightarrow{\perp} G_1(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{CP}^n,$$

где второе отображение $\perp$ сопоставляет подпространству $V \in G_n(\mathbb{C}^{n+1})$ его ортогональное дополнение $V^{\perp}$. Поляра $g\colon M \to \mathbb{CP}^n$ является антиголоморфной кривой в $\mathbb{CP}^n$, которая связана с $f$ соотношениями ортогональности:

$$f_\alpha \perp g_\beta \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leqslant n-1,$$

или в терминах локальных подъемов:

$$\langle \partial^\alpha f_U, \partial^\beta g_U \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \alpha + \beta \leqslant n-1$$

(проверьте это утверждение самостоятельно!).

Теорема 4 (Иллс–Вуд [12]). *Пусть $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ – полная голоморфная кривая. Для заданного $r$, $0 \leqslant r \leqslant n$, определим отображение $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$, полагая*

$$\varphi(p) = f_{r-1}(p)^{\perp} \cap f_r(p), \tag{3.1}$$

*т.е. $\varphi(p)$ есть ортогональное дополнение к $f_{r-1}(p)$ в $f_r(p)$. Эквивалентное определение:*

$$\varphi(p) = [f_{r-1}(p) \oplus g_{s-1}(p)]^{\perp}, \quad s := n - r,$$

*где $g$ – поляра $f$. Построенное таким образом отображение $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ является полным и гармоническим.*

Кроме того, построенное отображение $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ обладает свойством комплексной изотропности, обобщающим конформность. Напомним (см. п. 2.4), что отображение $\varphi\colon M \to N$ из римановой поверхности $M$ в кэлерово многообразие $(N, h)$ конформно, если

$$h(\partial'\varphi, \overline{\partial''\varphi}) = 0.$$

Будем называть это отображение *комплексно изотропным*, если

$$h(\delta^\alpha \partial'\varphi, \delta^\beta \overline{\partial''\varphi}) = 0$$

для всех $\alpha, \beta$ с $\alpha + \beta \geqslant 1$, где $\delta$ – оператор, введенный в п. 1.4. Отображения $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$, построенные в теореме Иллса–Вуда, являются комплексно изотропными.

Теорема Иллса–Вуда позволяет строить комплексно изотропные отображения $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$, исходя из полных голоморфных кривых $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$. Более того, как следует из [12], построенное в этой теореме соответствие

$$\left\{\begin{array}{l}\text{полная голоморфная}\\ \text{кривая } f\colon M \to \mathbb{CP}^n;\\ \text{число } r,\ 0 \leqslant r \leqslant n\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{полное комплексно изо-}\\ \text{тропное гармоническое}\\ \text{отображение } \varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n\end{array}\right\}$$

является взаимно-однозначным. Более подробно, в [12] предложена конструкция, которая сопоставляет каждому полному комплексно изотропному гармоническому отображению некоторую полную голоморфную кривую $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ и число $r$ такие, что построенное по формуле (3.1) отображение $\varphi$ совпадает с исходным гармоническим отображением. Мы опускаем доказательство теоремы (которое можно найти в [12]), поскольку нас в первую очередь интересует твисторная интерпретация теоремы Иллса–Вуда, которая будет приведена в следующем параграфе. Прежде, однако, остановимся более подробно на применениях сформулированной теоремы и, в частности, проанализируем, насколько ограничительным является условие комплексной изотропности. Следующие ниже примеры заимствованы из цитированной выше статьи Иллса–Вуда.

Пример 6 (сфера $M = S^2 = \mathbb{CP}^1$). Любое гармоническое отображение $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^n$ комплексно изотропно, поэтому в случае $M = \mathbb{CP}^1$ имеется взаимно-однозначное соответствие между полными гармоническими отображениями $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^n$ и парами $(f, r)$, где $f\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^n$ – полная голоморфная кривая. При $n \geqslant 2$ имеются гармонические отображения любой степени, не являющиеся $\pm$голоморфными.

Пример 7 (тор $M = T^2$). Любое гармоническое отображение ненулевой степени комплексно изотропно. При $n \geqslant 2$ существуют гармонические отображения любой степени, не являющиеся $\pm$ голоморфными.

Пример 8 ($M$ – компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 2$). Любое конформное гармоническое отображение $\varphi$ степени $|\deg\varphi| \geqslant 2g+1$ комплексно изотропно. При $n \geqslant 3$ существуют гармонические отображения степени$\geqslant g+1$, не являющиеся $\pm$ голоморфными.

## 3.2. Твисторная интерпретация

Твисторная интерпретация гармонических отображений $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ связана со следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} & G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

в которой отображение

$$\pi\colon G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

является твисторным расслоением.

Обозначим для краткости $T' := T^{1,0}\mathbb{CP}^n$ и $G_r := G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)$. Сопоставим отображению $\psi\colon M \to G_r$ подрасслоение

$$\underline{\psi}' \subset \varphi^{-1}T',$$

слой которого в точке $p \in M$ совпадает с $r$-мерным подпространством $\psi(p)$ в $T'$.

Пусть $D$ есть риманова связность на $\mathbb{CP}^n$. Она согласована с комплексной структурой $\mathbb{CP}^n$ (поскольку $\mathbb{CP}^n$ кэлерово) и потому порождает естественную связность на расслоении $T' = T^{1,0}\mathbb{CP}^n$ и грассмановом расслоении $G_r(T') \to \mathbb{CP}^n$. Обозначим через $\nabla = \varphi^{-1}D$ индуцированную связность на расслоении $\underline{T}' := \varphi^{-1}T'$.

Если обозначить через $\underline{\psi}'^{\perp}$ ортогональное дополнение к $\underline{\psi}'$ в $\underline{T}'$, то будем иметь ортогональные разложения

$$\underline{T}' = \varphi^{-1}T' = \underline{\psi}' \oplus \underline{\psi}'^{\perp}, \quad \underline{T}'' = \varphi^{-1}T'' = \underline{\psi}'' \oplus \underline{\psi}''^{\perp},$$

где $T'' := T^{0,1}\mathbb{CP}^n$, $\underline{\psi}'' = \overline{(\underline{\psi}')}$, $\underline{\psi}''^{\perp} = \overline{(\underline{\psi}'^{\perp})}$. Введенные ранее расслоения $\underline{\psi}^+$ и $\underline{\psi}^-$, задающие ортогональное разложение $\varphi^{-1}T^{\mathbb{C}}M = \underline{\psi}^+ \oplus \underline{\psi}^-$, связаны с расслоениями $\underline{\psi}'$ и $\underline{\psi}''$ соотношениями

$$\underline{\psi}^+ = \underline{\psi}' \oplus \underline{\psi}''^{\perp}, \quad \underline{\psi}^- = \underline{\psi}'' \oplus \underline{\psi}'^{\perp}.$$

Назовем отображение $\psi\colon M \to G_r$ *горизонтальным*, если образ $\psi_*(p)$, $p \in M$, лежит в горизонтальном подпространстве $H_{\psi(p)} \subset T_{\psi(p)}G_r$ относительно связности $D$ на $G_r$. Ясно, что для горизонтального отображения понятия $\mathcal{J}^1$- и $\mathcal{J}^2$-голоморфности совпадают.

Предложение Ронсли (см. предложение 1 в п. 2.4), характеризующее $\mathcal{J}^2$-голоморфные отображения $\psi$ в терминах подрасслоений $\underline{\psi}^+$ и $\underline{\psi}^-$, может быть в рассматриваемой ситуации переформулировано следующим образом (доказательство этого варианта предложения 1 оставляем читателю).

Предложение 2 (Ронсли, [17], п. 8). *Отображение* $\psi\colon M \to G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)$

(1) *горизонтально тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X\colon C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

*для любого векторного поля $X$ на $M$;*

(2) *$\mathcal{J}^2$-голоморфно тогда и только тогда, когда $\underline{\psi}'$ является голоморфным подрасслоением в $\underline{T}' = \varphi^{-1}T'$ и*

$$\partial'\varphi\,(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}', \quad \partial''\varphi\,(T^{0,1}M) \subset \underline{\psi}'^{\perp};$$

(3) *горизонтально и голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X\colon C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

*и*

$$\partial'\varphi\,(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}', \quad \partial''\varphi\,(T^{0,1}M) \subset \underline{\psi}'^{\perp}.$$

*(В двух последних утверждениях $\partial'\varphi$ рассматривается как сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}T'$, а $\partial''\varphi$ – как сечение расслоения $\Omega^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}T'$.)*

Заметим, что голоморфность подрасслоения $\underline{\psi}'$ расслоения $\underline{T}'$ эквивалентна следующему условию

$$\nabla_{\overline{Z}}\colon C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

для любого вектора $\overline{Z} \in T^{0,1}M$.

Введем обозначение

$$\nabla' := (\varphi^{-1}D)_{\partial/\partial z}, \nabla'' := (\varphi^{-1}D)_{\partial/\partial \bar{z}}.$$

Тогда

$$\nabla'\varphi = \partial'\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \nabla''\varphi = \partial''\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

Определим высшие ковариантные производные отображения $\varphi$ по индукции

$$\nabla'^{(k+1)}\varphi = \nabla'(\nabla'^{k}\varphi), \quad \nabla''^{(k+1)}\varphi = \nabla''(\nabla''^{k}\varphi).$$

Из предложения 2 вытекает, что для горизонтального голоморфного отображения $\psi$ выполняются условия

$$\nabla'^{k}\varphi \subset \underline{\psi}', \quad \nabla''^{k}\varphi \subset \underline{\psi}'^{\perp}$$

для всех $k$, поэтому

$$\nabla'^{k}\varphi \perp \nabla''^{l}\varphi$$

для всех $k, l \geqslant 1$. Иначе говоря, отображение $\varphi$ комплексно изотропно. Тем самым, показано, что *проекция $\varphi$ горизонтального голоморфного отображения $\psi\colon M \to G_r$ является комплексно изотропным гармоническим отображением.*

Справедливо также обратное утверждение, к формулировке которого мы переходим. Введем по аналогии с примыкающим пространством голоморфной кривой, $\nabla'$-*примыкающее пространство*

$$\theta'(p) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\nabla'^{\alpha}\varphi(p), \ \ \alpha = 0, 1, \dots\}.$$

Его размерность может меняться при изменении $p$. По определению, максимум $r$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} \theta'(p)$ по $p \in M$ называется $\nabla'$-*порядком* отображения $\varphi$. В этом случае в неособых точках

$$\theta'(p) =: \theta'_r(p) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\nabla'^{\alpha}\varphi(p), \ \ \alpha = 0, 1, \dots, r\}.$$

Обещанная обратная конструкция является прямым обобщением конструкции твисторного поднятия для расслоения $G_1(T^{1,0}N) \to N$ (см. п. 2.4) на грассманово расслоение $G_r(T^{1,0}N) \to N$.

Предложение 3 (Ронсли). *Если $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ – полное гармоническое комплексно изотропное отображение, имеющее $\nabla'$-порядок $r$, то существует его твисторное поднятие $\psi\colon M \to G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)$.*

Доказательство. На дополнении к особому множеству

$$S' = \{p \in M\colon\ \dim_{\mathbb{C}} \theta'(p) < r\},$$

которое состоит из изолированных точек, положим: $\psi(p) = \theta'_r(p)$. Это определяет голоморфное отображение $\psi\colon M \setminus S' \to G_r(T')$, продолжающееся в изолированные точки $S'$ до голоморфного отображения

$$\psi\colon M \longrightarrow G_r(T').$$

Заметим, что вне точек $S'$ имеет место включение: $\nabla'\theta'_r \subset \theta' = \theta'_r$, поскольку $\nabla'$-порядок $\varphi$ равен $r$. Отсюда и из голоморфности $\psi$ вытекает, что

$$\nabla_X\colon C^\infty(\underline{\psi}') \longrightarrow C^\infty(\underline{\psi}')$$

для любого векторного поля $X$ на $M$. Следовательно, $\psi$ горизонтально вне $S'$, откуда следует, что и $\psi\colon M \to G_r(T')$ горизонтально. Кроме того, из условия $\nabla'\theta'_r \subset \theta'_r$ вытекает, что $\partial'\varphi(T^{1,0}M) \subset \underline{\psi}'$, а из условия комплексной изотропности следует, что

$$\partial''\varphi(T^{0,1}M) \perp \theta'_r \Longrightarrow \partial''\varphi(T^{0,1}M) \perp \underline{\psi}',$$

т.е. $\partial''\varphi(T^{0,1}M) \subset \underline{\psi}'^{\perp}$.

Из приведенных утверждений вытекает, что имеет место следующая диаграмма (см. с. 67), все отображения в которой являются взаимно-однозначными соответствиями (подразумевается, что отображения $f$, $\varphi$ и $\psi$ в “ящиках” диаграммы являются полными; при этом полнота отображения $\psi\colon M \to G_r(T')$ означает, что его проекция $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ полна).

Построим явное отображение, сопоставляющее паре $(f, r)$, где $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ есть полная голоморфная кривая, отображение $\psi\colon M \to G_r(T')$. Для этого нам потребуется новая интерпретация расслоения $G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \to \mathbb{CP}^n$.

Определим для $0 \leqslant r \leqslant n$ *флаговое многообразие*

$$F_r := \{(V, W) \in G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_{r+1}(\mathbb{C}^{n+1})\colon V \subset W\},$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{пары } (f,r)\text{, где}\\ f \text{ – голоморфная}\\ \text{кривая } M\to\mathbb{CP}^n,\\ 0\leqslant r\leqslant n\end{array}} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Иллс-Вуд}"'] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{горизонтальные}\\ \text{голоморфные}\\ \text{отображения}\\ \Psi\colon M\to G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)\end{array}} \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{Ронсли}"] \\
& \boxed{\begin{array}{c}\text{гармонические}\\ \text{комплексно-}\\ \text{изотропные}\\ \text{отображения}\\ \varphi\colon M\to\mathbb{CP}^n\\ \nabla'\text{-порядка } r\end{array}} &
\end{tikzcd}$$

которое является расслоением над $\mathbb{CP}^n$ вида

$$\pi\colon F_r \longrightarrow \mathbb{CP}^n, \quad (V,W)\longmapsto V^\perp\cap W.$$

Покажем, что *это расслоение изоморфно грассманову расслоению* $G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)\to\mathbb{CP}^n$. Действительно, касательное пространство $T^{1,0}_w(\mathbb{CP}^n)$ в точке $w\in\mathbb{CP}^n$ изоморфно пространству линейных отображений $\operatorname{Hom}(w,w^\perp)$ (почему?). Сопоставим $r$-мерному комплексному подпространству $H$ в $T^{1,0}_w(\mathbb{CP}^n)$ $r$-мерное комплексное подпространство в $w^\perp$, натянутое на образы $L(w)$ линейных отображений $L\in H\subset\operatorname{Hom}(w,w^\perp)$. Тем самым, мы отождествляем

$$G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n)\longleftrightarrow G_r(T^\perp),$$

где $T^\perp\to\mathbb{CP}^n$ – расслоение, получающееся из тавтологического расслоения $T\to\mathbb{CP}^n$ послойным ортогональным дополнением. Но $G_r(T^\perp)$ можно отождествить с $F_r$ с помощью соответствия

$$\begin{tikzcd}
F_r \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & G_r(T^\perp) \arrow[dl] \\
& \mathbb{CP}^n &
\end{tikzcd}
\quad\Longleftrightarrow\quad
\begin{tikzcd}
(V,W) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\
& w\in V^\perp\cap W &
\end{tikzcd}$$

Иначе говоря, паре $V \subset W$ из $F_r$ мы сопоставляем подпространство $V \subset G_r(\mathbb{C}^{n+1})$, которое рассматривается как подпространство из $[w]^\perp$. Подпространство $W$ восстанавливается по $V \in G_r(T^\perp)_{[w]}$ по формуле: $W = \mathrm{span}\{w, V\}$.

Итак, мы показали, что *твисторное расслоение*

$$G_r(T^{1,0}\mathbb{CP}^n) \to \mathbb{CP}^n$$

*совпадает с флаговым расслоением* $F_r \to \mathbb{CP}^n$.

Опишем теперь отображение

$$\left\{\begin{array}{l}(f,r),\ \text{где}\ f\colon M \to \mathbb{CP}^n\\ \text{– полная голоморфная}\\ \text{кривая}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{горизонтальное голо-}\\ \text{морфное отображение}\\ \psi\colon M \to F_r\end{array}\right\}.$$

Пусть $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ – полная голоморфная кривая. Сопоставим ей отображение

$$\psi := (f_{r-1}, f_r)\colon M \longrightarrow F_r,$$

задаваемое кривыми $f_{r-1}$, $f_r$, ассоциированными с $f$. Проверьте самостоятельно, что $\psi$ является полным горизонтальным голоморфным отображением.

Задача 13*. Пусть $f, g$ – мероморфные функции на римановой поверхности $M$, причем $g \not\equiv \mathrm{const}$. Определим отображение $\Phi\colon M \to \mathbb{CP}^3$ по формуле

$$\Phi \equiv \Phi(f,g) := \left[1, f - \frac{g}{2}\frac{df}{dg}, g, \frac{1}{2}\frac{df}{dg}\right].$$

Покажите, что $\Phi$ голоморфно и горизонтально для твисторного расслоения $\pi\colon \mathbb{CP}^3 \to S^4$. Обратно, если $\Phi\colon M \to \mathbb{CP}^3$ – полное горизонтальное голоморфное отображение, то $\Phi = \Phi(f,g)$ для некоторых (однозначно определенных) мероморфных функций $f$, $g$ на $M$.

# Глава 4. Гармонические отображения в комплексные грассмановы многообразия

В этой главе будет дано описание гармонических отображений $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ из компактных римановых поверхностей $M$ в комплексное грассманово многообразие $G_r(\mathbb{C}^n)$. Такие отображения, как утверждает теорема Вуда, допускают факторизацию в виде произведения конечного числа гармонических отображений, каждое из которых получается из предыдущего с помощью операции замещения (начальное гармоническое отображение полагается равным нулю). Ключевое для этого результата понятие замещения вводится и подробно разбирается в п. 4.1 данной главы. В п. 4.2 дается твисторная интерпретация теоремы Вуда.

## 4.1. Гауссовы расслоения и замещения

Отступление (эрмитовы связности; см. [21], гл. III, пп. 1, 2). Пусть $E \to M$ – комплексное векторное расслоение над комплексным многообразием $M$, снабженное эрмитовой метрикой $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Иначе говоря, в каждом слое $E_p$ задана эрмитова метрика $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_p$, гладко зависящая от $p \in M$. Такие расслоения называются *эрмитовыми*. Связность $D$ на эрмитовом расслоении $E \to M$ называется *эрмитовой*, если она согласована с эрмитовой метрикой на $E$ в том смысле, что

$$\langle D\sigma, \tau\rangle + \langle \sigma, D\tau\rangle = d\langle \sigma, \tau\rangle$$

для любых сечений $\sigma, \tau$ расслоения $E$. Если, в частности, расслоение $E$ совпадает с касательным расслоением $TM$, то, выбирая в качестве сечений векторные поля $e_i$, образующие унитарный репер в окрестности точки $p \in M$, получим справа 0, и в этом случае понятие эрмитовой связности сводится к понятию унитарной связности на главном расслоении унитарных реперов.

Если расслоение $E \to M$ голоморфно, то на $E$ существует единственная эрмитова связность $D$, совместимая с голоморфной структурой, т.е. такая что

$$\bar{\partial}_E = D^{0,1},$$

где $\bar{\partial}_E$ – оператор Коши-Римана на $E$ (иначе говоря, голоморфными сечениями $E \to M$ являются сечения $\sigma$ этого расслоения, удовлетворяющие уравнению $\bar{\partial}_E \sigma = 0$), а $D^{0,1}$ – $(0,1)$-компонента связности $D$.

Любое комплексное подрасслоение $F$ эрмитова расслоения $E \to M$, наделенного эрмитовой связностью ${}^E D$, наследует эрмитову метрику и эрмитову связность из $E$. Например, эрмитова связность ${}^F D$ на $F$ задается ортогональным проектированием связности ${}^E D$ на подрасслоение $F$:

$${}^F D\sigma := {}^F P({}^E D\sigma),$$

где ${}^F P\colon E \to F$ – оператор ортогонального проектирования на $F$. Если расслоение $E$ голоморфно, а $F$ – его голоморфное подрасслоение, то эрмитова связность ${}^E D$, совместимая с голоморфной структурой, индуцирует на $F$ связность ${}^F D$, также совместимую с голоморфной структурой. $\square$

Пусть $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ – гладкое отображение. Обозначим через $T \to G_r(\mathbb{C}^n)$ тавтологическое расслоение, слой которого в точке $W \in G_r(\mathbb{C}^n)$ совпадает с $r$-мерным подпространством $W \subset \mathbb{C}^n$. Сопоставим $\varphi$ векторное расслоение $\underline{\varphi} := \varphi^{-1}T$, являющееся подрасслоением ранга $r$ тривиального расслоения $\underline{\mathbb{C}}^n := M \times \mathbb{C}^n \to M$:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\varphi} = \varphi^{-1}T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[\varphi]{} & G_r(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

Обратно, любое подрасслоение $E$ ранга $r$ в $\underline{\mathbb{C}}^n$ определяет гладкое отображение $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ по формуле: $\varphi(p) = E_p \subset \mathbb{C}^n$. Будем называть подрасслоение $E$ в $\underline{\mathbb{C}}^n$ *гармоническим*, если ему отвечает гармоническое отображение $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$.

Задача 14. Покажите, что расслоение $\underline{\varphi} := \varphi^{-1}T$, построенное по гладкому отображению $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$, гармонично тогда и только тогда, когда гармонично расслоение $\underline{\varphi}^{\perp}$.

Обозначим через $D$ плоскую связность на тривиальном расслоении $\mathbb{C}^n \times G_r(\mathbb{C}^n) \to G_r(\mathbb{C}^n)$. Тавтологическое расслоение $T$, будучи подрасслоением тривиального расслоения, наследует эрмитову метрику и эрмитову связность из этого расслоения. Тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{C}}^n$ и его подрасслоение $\underline{\varphi}$ снабжаются индуцированными метрикой и связностью. Обозначим последнюю через $\nabla := \varphi^{-1}D$ и наделим $\underline{\varphi}$ комплексной КМ-структурой, индуцированной $\nabla$.

Касательное расслоение $T^{1,0}G_r(\mathbb{C}^n)$ можно (также, как в случае $\mathbb{CP}^n$) отождествить с расслоением послойно-линейных отображений $\mathrm{Hom}(T, T^\perp)$, сопоставляя вектору $Z \in T^{1,0}G_r$ линейное отображение

$$A_Z \colon T \longrightarrow T^\perp, \quad A_Z\sigma = \pi_T^\perp(Z\sigma),$$

где $\pi_T^\perp \colon G_r \times \mathbb{C}^n \to T^\perp$ – ортогональная проекция.

Форме $d\varphi$ при отождествлении $\varphi$ с подрасслоением $\underline{\varphi} \subset \underline{\mathbb{C}}^n$ будет отвечать форма, коэффициенты которой являются сечениями расслоения $\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$ следующего вида

$$d\varphi = dz \otimes A'_\varphi + d\bar{z} \otimes A''_\varphi, \tag{4.1}$$

где коэффициенты $A'_\varphi, A''_\varphi$ равны

$$A'_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial', \quad A''_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial'',$$

или, если рассматривать их как сечения расслоения $\mathrm{Hom}(\underline{\mathbb{C}}^n, \underline{\mathbb{C}}^n)$, то

$$A'_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial' \circ \pi_\varphi, \quad A''_\varphi = \pi_\varphi^\perp \circ \partial'' \circ \pi_\varphi.$$

В этих формулах $\pi_\varphi \colon \underline{\mathbb{C}}^n \to \underline{\varphi}$ и $\pi_\varphi^\perp \colon \underline{\mathbb{C}}^n \to \underline{\varphi}^\perp$ обозначают ортогональные проекции.

Из формулы (4.1) следует, что дифференциал $\partial'\varphi$, рассматриваемый как сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}G_r)$, отождествляется с формой $dz \otimes A'_\varphi$, а дифференциал $\partial''\varphi$, рассматриваемый как сечение расслоения $\Omega^{0,1}M \otimes \varphi^{-1}(T^{1,0}G_r)$, отождествляется с формой $d\bar{z} \otimes A''_\varphi$.

Условия голоморфности и гармоничности отображения $\varphi$ переписываются в терминах форм $A'_\varphi$, $A''_\varphi$ следующим образом:

(1) отображение $\varphi \colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ голоморфно тогда и только тогда, когда $A''_\varphi = 0$;

(2) отображение $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ гармонично тогда и только тогда, когда
$$A'_\varphi \circ \partial''_\varphi = \partial''_{\varphi^\perp} \circ A'_\varphi,$$
где $\partial''_\varphi := \pi_\varphi \circ \partial'' \circ \pi_\varphi$, $\partial''_{\varphi^\perp} := \pi^\perp_\varphi \circ \partial'' \circ \pi^\perp_\varphi$. Приведенное условие гармоничности означает, иными словами, что $dz \otimes A'_\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\Omega^{1,0}M \otimes \mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$.

Пусть $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ есть гармоническое отображение. Тогда $A'_\varphi$ есть голоморфное сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$. Рассмотрим пространство
$$\mathrm{Im}\, A'_{\varphi,p}, \quad p \in M.$$
Заметим, что оно не зависит от выбора локальной комплексной координаты $z$ в точке $p$, но его размерность может меняться при изменении $p$. Обозначим через $s'$ максимальную размерность $\mathrm{Im}\, A'_{\varphi,p}$ по всем $p \in M$. Тогда множество
$$S' := \{p \in M\colon\ \dim(\mathrm{Im}\, A'_{\varphi,p}) < s'\}$$
состоит из изолированных точек. Продолжим голоморфное расслоение $\mathrm{Im}\, A'_\varphi \subset \underline{\varphi}^\perp$, заданное над $M \setminus S'$, до голоморфного расслоения над $M$. Полученное голоморфное расслоение называется *гауссовым $\partial'$-расслоением* отображения $\varphi$ и обозначается через $G'(\varphi)$.

Аналогичным образом, обозначим через $s''$ максимальную размерность пространства $\mathrm{Im}\, A''_{\varphi,p}$ по всем $p \in M$. Голоморфное расслоение $\mathrm{Im}\, A''_\varphi$, первоначально определенное вне точек особого множества
$$S'' := \{p \in M\colon\ \dim(\mathrm{Im}\, A''_{\varphi,p}) < s''\},$$
продолжается до голоморфного расслоения над $M$, которое обозначается через $G''(\varphi)$ и называется *гауссовым $\partial''$-расслоением.*

Гауссовы расслоения играют ключевую роль в описании гармонических отображений в грассмановы многообразия, поэтому мы остановимся более подробно на их свойствах.

**Свойства гауссовых расслоений**.

Свойство 1 (см. [7]). Если $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ – гармоническое отображение, то гауссовы расслоения $G'(\varphi), G''(\varphi)$ определяют гармонические отображения
$$G'(\varphi)\colon M \longrightarrow G_{s'}(\mathbb{C}^n), \quad G''(\varphi)\colon M \longrightarrow G_{s''}(\mathbb{C}^n).$$

В соответствии с этим свойством мы можем итерировать процесс построения гауссовых расслоений. Именно, положим $G^0(\varphi):=\underline{\varphi}$ и определим по индукции

$$G^i(\varphi) = G'(G^{i-1}(\varphi)) \text{ при } i = 1, 2, \dots,$$
$$G^{-i}(\varphi) = G''(G^{-i+1}(\varphi)) \text{ при } i = 1, 2, \dots .$$

Отметим еще одно интересное свойство гауссовых расслоений.

Свойство 2:

$$G'(G''(\varphi)) \subset G^0(\varphi) = \underline{\varphi}, \quad G''(G'(\varphi)) \subset G^0(\varphi) = \underline{\varphi}.$$

Условие комплексной изотропности также допускает естественную интерпретацию в терминах гауссовых расслоений.

Свойство 3. Если отображение $\varphi$ комплексно изотропно, то и все гауссовы отображения $G^i(\varphi)$ комплексно изотропны. Более того, $\varphi$ комплексно изотропно, если

$$G^i(\varphi) \perp G^j(\varphi) \text{ для всех } i \neq j.$$

Еще одно важное свойство гауссовых расслоений.

Свойство 4. Если $G^{-i-1}(\varphi) = 0$ при некотором $i \geqslant 0$, то отображение $G^{-i}(\varphi)$ голоморфно, поскольку в неособых точках

$$G^{-i-1}(\varphi) = \operatorname{Im} A''_{G^{-i}(\varphi)} = 0,$$

откуда следует равенство $A''_{G^{-i}(\varphi)} = 0$, означающее голоморфность $G^{-i}(\varphi)$.

Замечание 6. Пользуясь последним свойством, мы можем дать другое доказательство теоремы Иллса–Вуда о соответствии между комплексно изотропными гармоническими отображениями $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ и голоморфными кривыми в $\mathbb{CP}^n$. Именно, так как ранг расслоения $\underline{\varphi}$ для отображений $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ указанного вида равен 1, то ранг $G^{\pm}(\varphi)$ также не превосходит 1 и то же самое верно для всех расслоений $G^i(\varphi)$. Но для комплексно изотропного отображения $\varphi$ все $G^i(\varphi)$ попарно ортогональны друг другу и содержатся в расслоении $\underline{\varphi}^{\perp}$. Поэтому они должны обращаться в нуль при достаточно больших $|i|$. Пусть $k$ – наименьшее неотрицательное число, для которого $G^{-k-1}(\varphi) = 0$. Тогда отображение $G^{-k}(\varphi)$ голоморфно и расслоение $\underline{\varphi}$ получается из него как

$$\underline{\varphi} = G^k\left(G^{-k}(\varphi)\right).$$

Таким образом, процедура размножения гармонических отображений с помощью гауссовых расслоений позволяет построить произвольные комплексно изотропные гармонические отображения, исходя из голоморфных кривых в $\mathbb{CP}^n$.

Задача 15*. Попробуйте доказать справедливость приведенных свойств гауссовых расслоений самостоятельно.

Рассуждение из замечания 6 мотивирует следующее

Определение 9. Будем говорить, что гармоническое отображение $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ имеет *конечный $\partial''$-порядок* (соответственно *конечный $\partial'$-порядок*), если для некоторого $k \geqslant 0$ выполняется соотношение

$$G^{-k}(\varphi) = 0 \quad (\text{соответственно } G^k(\varphi) = 0).$$

Наименьшее число $k$, для которого $G^{-k}(\varphi) = 0$, но $G^{-k+1}(\varphi) \neq 0$, называется *$\partial''$-порядком* отображения $\varphi$. Аналогично определяется *$\partial'$-порядок* отображения $\varphi$.

Согласно приведенному замечанию, гауссовы расслоения позволяют полностью решить задачу об описании комплексно изотропных гармонических отображений римановых поверхностей в комплексные проективные пространства. Однако для описания гармонических отображений в комплексные грассмановы многообразия их оказывается недостаточно и нам придется ввести еще одну общую конструкцию, называемую замещением. Эта конструкция была впервые предложена Уленбек для построения отображений в унитарную группу $\mathrm{U}(n)$ и названа ею “добавлением унитона”.

**Замещения**. Пусть $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ есть гармоническое отображение. Предположим, что заданы голоморфные подрасслоения $\alpha \subset \underline{\varphi}$ и $\beta \subset \underline{\varphi}^\perp$, которые двойственны друг другу в том смысле, что

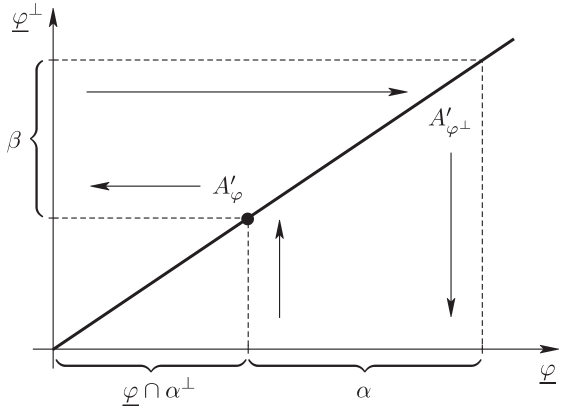
$$A'_\varphi(\alpha) \subset \beta \quad \text{и} \quad A'_{\varphi^\perp}(\beta) \subset \alpha.$$

В этом случае мы можем образовать новое расслоение

$$\underline{\varphi}' := (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \beta.$$

Преобразование

$$\underline{\varphi} = (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \alpha \longmapsto \underline{\varphi}' = (\underline{\varphi} \cap \alpha^\perp) \oplus \beta$$




называется *$\partial'$-замещением $\alpha \to \beta$ расслоения $\alpha$ расслоением $\beta$.*

Аналогичным образом, если имеются антиголоморфные подрасслоения $\alpha \subset \underline{\varphi}$ и $\beta \subset \underline{\varphi}^{\perp}$, такие что

$$A''_{\varphi}(\alpha) \subset \beta \quad \text{и} \quad A''_{\varphi^{\perp}}(\beta) \subset \alpha,$$

можно образовать расслоение

$$\underline{\varphi}'' := (\underline{\varphi} \cap \alpha^{\perp}) \oplus \beta,$$

которое называется *$\partial''$-замещением $\alpha \to \beta$ расслоения $\alpha$ расслоением $\beta$.*

Задача 16. Покажите, что $\partial'$-замещение $\underline{\varphi}'$ и $\partial''$-замещение $\underline{\varphi}''$ являются гармоническими расслоениями, если отображение $\varphi$ гармонично.

**Примеры замещений**.

Пример 9 (тривиальное замещение). Возьмем в качестве $\alpha$, $\beta$ расслоения

$$\alpha = \underline{\varphi}, \quad \beta = \underline{\varphi}^{\perp}.$$

Тогда $\partial'$-замещение $\alpha \to \beta$ задается преобразованием

$$\underline{\varphi} \longmapsto \underline{\varphi}' = \underline{\varphi}^{\perp},$$

аналогично, $\partial''$-замещение $\alpha \to \beta$ задается преобразованием

$$\underline{\varphi} \longmapsto \underline{\varphi}'' = \underline{\varphi}^{\perp}.$$

При помощи указанного тривиального замещения можно представить любое $\partial''$-замещение

$$\underline{\varphi}^{\perp} \longmapsto (\underline{\varphi}^{\perp} \cap \beta^{\perp}) \oplus \alpha$$

в виде композиции двух $\partial'$-замещений:

$$\underline{\varphi}^{\perp} \longmapsto \underline{\varphi} \quad \text{и} \quad \underline{\varphi} = (\underline{\varphi} \cap \alpha^{\perp}) \oplus \alpha \longmapsto (\underline{\varphi} \cap \beta^{\perp}) \oplus \alpha$$

(аналогично любое $\partial'$-замещение можно представить в виде композиции двух $\partial''$-замещений).

Пример 10 (связь с гауссовыми расслоениями). Положим $\alpha = \underline{\varphi}$, $\beta = G'(\varphi)$. Тогда $\partial'$-замещение $\alpha \to \beta$ совпадает с гауссовым расслоением $G'(\varphi)$.

Пример 11 (голоморфное продолжение). Пусть $\beta$ есть голоморфное подрасслоение расслоения $\underline{\varphi}^{\perp}$, содержащее $G'(\varphi)$ (например, $\beta = G'(\varphi)$ или $\beta = \underline{\varphi}^{\perp}$):

$$G'(\varphi) \subset \beta \subset \underline{\varphi}^{\perp}.$$

Тогда $\partial'$-замещение $\alpha = \underline{\varphi} \to \beta$ совпадает с расслоением

$$\underline{\varphi}' = \beta \supset \underline{\varphi},$$

которое называется *голоморфным продолжением* $G'(\varphi)$. Вольфсон [25] показал, что любое гармоническое отображение $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to G_r(\mathbb{C}^n)$ может быть построено из голоморфных и антиголоморфных отображений с помощью гауссовых расслоений и их голоморфных продолжений.

Определение 10. Гармоническое отображение $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ называется *факторизуемым*, если существует конечная последовательность гармонических отображений $\varphi_i\colon M \to G_{r_i}(\mathbb{C}^n)$, $i = 0, 1, \dots, k$, такая что:

1. $\varphi_0\colon M \to G_0(\mathbb{C}^n)$ – нулевое отображение, $\varphi_k = \varphi$;
2. $\underline{\varphi}_i$ получается из $\underline{\varphi}_{i-1}$ посредством $\partial'$- или $\partial''$-замещения.

Пример 12. Пусть $\varphi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ – гармоническое отображение $\partial''$-порядка $k$ (см. определение 9). Тогда последовательность отображений

$$\varphi_i := G^{-k+i}(\varphi), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

задает факторизацию $\varphi$.

Теорема 5 (Вуд [26]). *Любое гармоническое отображение $\varphi\colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$ конечного $\partial''$-порядка $k$ допускает факторизацию, задаваемую последовательностью $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi$ гармонических отображений, в которой $\underline{\varphi}_i$ получается из $\underline{\varphi}_{i-1}$ посредством $\partial'$-замещения.*

Отступление (флаговые многообразия; см. [19], пп. 4.1–4.3). Фиксируем произвольное разложение числа $n$ в сумму натуральных чисел

$$n = r_1 + \dots + r_k$$

и определим *флаговое многообразие типа* $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_k)$ как

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \bigl\{\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_k)\colon V_i \text{ -- подпространства в } \mathbb{C}^n \\ \text{размерности } r_1 + \dots + r_i, \text{ такие} \\ \text{что } V_1 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{C}^n\bigr\}.$$

В частности, при $\mathbf{r} = (r, n-r)$

$$F_{(r,d-r)}(\mathbb{C}^n) = \{\text{подпространства } V \text{ размерности } r \text{ в } \mathbb{C}^n\} \\ = G_r(\mathbb{C}^n),$$

т.е. совпадает с грассмановым многообразием $G_r(\mathbb{C}^n)$. При $\mathbf{r} = (1, 1, \dots, 1)$ многообразие

$$F(\mathbb{C}^n) := F_{(1,1,\dots,1)}(\mathbb{C}^n) \\ = \{V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n\colon \dim V_i = i\}$$

называется *полным флаговым многообразием*.

Для нас более удобно эквивалентное определение флаговых многообразий как

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \bigl\{\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k)\colon E_i \text{ -- попарно ортогональные} \\ \text{подпространства в } \mathbb{C}^n \text{ размерности } r_i, \\ \text{такие, что } E_1 \oplus \dots \oplus E_k = \mathbb{C}^n\bigr\}.$$

Для того, чтобы перейти от первого определения ко второму, достаточно сопоставить

$$\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_k) \longmapsto \mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k), \ \text{ где } \ E_i = V_{i-1}^{\perp} \cap V_i,$$

и обратно

$$\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k) \longmapsto \mathcal{V} = (V_1, \dots, V_k), \ \text{ где } \ V_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_i.$$

Фиксируем эрмитов базис $\{e_i\}$ в $\mathbb{C}^n$ и обозначим через $\mathcal{E}^0$ стандартный флаг типа $\mathbf{r}$ в $\mathbb{C}^n$, определяемый посредством

$$\mathcal{E}^0 = (E_1^0, \dots, E_k^0),$$

где подпространство $E_1^0$ порождается векторами $e_1, \dots, e_{r_1}$, подпространство $E_2^0$ порождается векторами $e_{r_1+1}, \dots, e_{r_1+r_2}$ и т.д.

Унитарная группа $\mathrm{U}(n)$ транзитивно действует на флаговом многообразии $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ заменой эрмитова базиса $\{e_i\}$. При этом подгруппа изотропии стандартного флага $\mathcal{E}^0$ совпадает с произведением $\mathrm{U}(r_1) \times \dots \times \mathrm{U}(r_n)$, так что

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(r_1) \times \dots \times \mathrm{U}(r_n).$$

С другой стороны, группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ также транзитивно действует на $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, переводя базис $\{e_i\}$ в произвольный комплексный базис в $\mathbb{C}^n$. Подгруппа изотропии стандартного флага $\mathcal{E}^0$ совпадает при этом с группой $P_{\mathbf{r}}$ верхних блочно-треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} \underset{r_1}{*} & {\scriptstyle r_1}\; * & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{*}\;{\scriptstyle r_2} & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & {\scriptstyle r_n}\; \overset{r_n}{*} \end{pmatrix}$$

Это дает нам еще одно, комплексное однородное представление флагового многообразия

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/P_{\mathbf{r}}.$$

В частном случае $\mathbf{r} = (r, n-r)$ получаем известные однородные представления для грассманова многообразия

$$G_r(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(n-r) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/P_{(r,n-r)},$$

а в случае $\mathbf{r} = (1, 1, \dots, 1)$ – однородные представления для полного многообразия флагов

$$F(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/T^n = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/B_+,$$

где $T^n = \mathrm{U}(1) \times \cdots \times \mathrm{U}(1)$ ($n$ раз) – $n$-мерный тор, а $B_+$ – борелевская группа верхне-треугольных матриц.

Из двух приведенных однородных представлений флагового многообразия

$$F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(r_1) \times \cdots \times \mathrm{U}(r_n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/P_{\mathbf{r}}$$

вытекает, что $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ является компактным комплексным многообразием, обладающим $\mathrm{U}(n)$-инвариантной комплексной структурой.

Вообще, любое абстрактное флаговое многообразие $F$ компактной группы Ли $G$ допускает два различных однородных представления

$$F = G/H = G^{\mathbb{C}}/P, \tag{4.2}$$

где $H$ – замкнутая подгруппа $G$, $G^{\mathbb{C}}$ – комплексификация $G$, а $P$ – замкнутая комплексная подгруппа в $G^{\mathbb{C}}$. Такое многообразие обязательно компактно и может быть наделено $G$-инвариантной почти комплексной структурой. Для ее определения достаточно выбрать соответствующее этой структуре подпространство $T_o^{1,0}F$ в начале $o := [eH]$. В терминах разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, отвечающего комплексному представлению (4.2):

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{n}}, \tag{4.3}$$

указанное подпространство $T_0^{1,0}F$ совпадает с $\mathfrak{n}$. $\square$

В рассматриваемом нами случае разложение (4.3) алгебры Ли $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(n) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cong \overline{\mathbb{C}}^n \otimes \mathbb{C}^n \cong \ &(\text{отождествление с } T^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)) \cong \\ &\cong (\overline{E}^0_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}^0_k) \otimes (E^0_1 \oplus \cdots \oplus E^0_k) \cong \\ &\cong \left[\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_k)\right] \oplus \left[\bigoplus_{i<j} (\overline{E}^0_i E^0_j \oplus E^0_i \overline{E}^0_j)\right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь $\overline{E}^0_i E^0_j$ обозначает $\overline{E}^0_i \otimes E^0_j$ и аналогично $E^0_i \overline{E}^0_j := E^0_i \otimes \overline{E}^0_j$. Из этого разложения вытекает, что комплексифицированное касательное пространство $T^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ можно в рассматриваемом случае отождествить с пространством

$$T^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{i<j} (\overline{E}^0_i E^0_j \oplus E^0_i \overline{E}^0_j)$$

и выбор $\mathrm{U}(n)$-инвариантной почти комплексной структуры $J$ на $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ целиком определяется выбором одного из подпространств $\overline{E}_i^0 E_j^0$ или $E_i^0 \overline{E}_j^0$ в качестве собственного подпространства оператора $J$, отвечающего собственному значению $\sqrt{-1}$. Почти комплексную структуру $\mathcal{J}^1$, для которой

$$T^{1,0}_{\mathcal{E}^0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{i<j} (\overline{E}_i^0 E_j^0),$$

будем называть *канонической*.

Задача 17. Покажите, что каноническая почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$ на флаговом многобразии $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ интегрируема.

## 4.2. Твисторная интерпретация

В этом параграфе мы построим флаговые расслоения над грассмановым многообразием $G_r(\mathbb{C}^n)$ и покажем, что они являются твисторными расслоениями над $G_r(\mathbb{C}^n)$.

Для этого фиксируем упорядоченное подмножество $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ и обозначим через $\sigma^c$ его дополнение в множестве $\{1, \ldots, n\}$. Положим

$$r := \sum_{i \in \sigma} r_i.$$

*Флаговым расслоением* называется отображение

$$\pi = \pi_\sigma \colon F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = \frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(r_1) \times \ldots \times \mathrm{U}(r_n)} \longrightarrow \\ \longrightarrow \frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(n-r)} = G_r(\mathbb{C}^n),$$

которое сопоставляет

$$\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n) \longmapsto E := \bigoplus_{i \in \sigma} E_i.$$

Это расслоение обладает канонической $\mathrm{U}(n)$-инвариантной связностью, которая целиком определяется вертикально-горизонтальным разложением касательного пространства $T^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ в начале $\mathcal{E}^0$. Указанное разложение имеет вид

$$T^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) = V^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} \oplus H^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0}, \tag{4.5}$$

где

$$V^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} = \bigoplus_{i<j} (\overline{E}^0_i E^0_j \oplus E^0_i \overline{E}^0_j), \quad \text{где } i, j \in \sigma, \text{ либо } i, j \in \sigma^c,$$

$$H^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}^0} = \bigoplus_{i<j} (\overline{E}^0_i E^0_j \oplus E^0_i \overline{E}^0_j), \quad \text{где } i \in \sigma, j \in \sigma^c, \text{ либо } i \in \sigma^c, j \in \sigma.$$

Пользуясь разложением (4.5), определим почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ на $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ также, как в случае твисторного расслоения $Z = \mathcal{J}(N)$, а именно, вертикальная составляющая канонической структуры $\mathcal{J}^1$ задается формулой

$$\mathcal{J}^1_v = \begin{cases} i & \text{на } \overline{E}^0_i E^0_j, \\ -i & \text{на } E^0_i \overline{E}^0_j, \end{cases}$$

где $i < j$ и $i, j \in \sigma$, либо $i, j \in \sigma^c$. Горизонтальная составляющая $\mathcal{J}^1$ задается той же формулой

$$\mathcal{J}^1_h = \begin{cases} i & \text{на } \overline{E}^0_i E^0_j, \\ -i & \text{на } E^0_i \overline{E}^0_j, \end{cases}$$

при $i < j$ и $i \in \sigma, j \in \sigma^c$, либо $i \in \sigma^c$, $j \in \sigma$. Составляющие почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ имеют вид

$$\mathcal{J}^2_v = -\mathcal{J}^1_v, \quad \mathcal{J}^2_h = \mathcal{J}^1_h.$$

Мы собираемся доказать, что построенные расслоения

$$\pi_\sigma \colon F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$$

являются твисторными. Можно было бы сделать это, пользуясь методом Ронсли, т.е. построив вложение многообразия $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ в расслоение комплексных структур $\mathcal{J}(G_r(\mathbb{C}^n))$ (такой подход излагается в статье [6]), но мы предпочитаем более прямой метод.

Заметим, что любое гладкое отображение $\psi \colon M \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ из римановой поверхности $M$ в флаговое многообразие $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ порождает разложение тривиального расслоения $\underline{\mathbb{C}}^n = M \times \mathbb{C}^n$ в прямую ортогональную сумму подрасслоений

$$\underline{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \underline{E}_i. \tag{4.6}$$

Действительно, обозначим через $T_i \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ тавтологическое расслоение, слоем которого в точке $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_k)$ является подпространство $E_i \subset \mathbb{C}^n$ размерности $r_i$. Тогда в качестве подрасслоений $\underline{E}_i$, фигурирующих в формуле (4.6), нужно взять

$$\underline{E}_i := \psi^{-1} T_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Обратно, любое разложение $\underline{\mathbb{C}}^n$ в прямую сумму подрасслоений вида (4.6) порождает отображение $\psi_{\mathcal{E}} \colon M \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, сопоставляющее точке $p \in M$ флаг $(\underline{E}_{1,p}, \dots, \underline{E}_{k,p})$. Набор $\underline{\mathcal{E}} = (\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k)$ подрасслоений $\underline{\mathbb{C}}^n$ указанного вида будем называть *движущимся флагом*.

По аналогии с отображениями $\psi \colon M \to G_r(\mathbb{C}^n)$, дифференциал отображения $\psi_{\mathcal{E}} \colon M \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$ является суммой компонент вида $dz \otimes A'_{ij}$, $d\bar{z} \otimes A''_{ij}$ с

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \partial' \circ \pi_j, \quad A''_{ij} = \pi_i \circ \partial'' \circ \pi_j,$$

где $\pi_j \colon \underline{\mathbb{C}}^n \to \underline{E}_j$ – ортогональная проекция.

Предложение 4 (Берстол–Саламон). *Построенные флаговые расслоения*

$$\pi_\sigma \colon (F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n), \mathcal{J}^2) \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^n)$$

*являются твисторными.*

Доказательство. Нужно показать, что для $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi_{\mathcal{E}} \colon M \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, отвечающего движущемуся флагу $\underline{\mathcal{E}} = (\underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k)$, расслоение $E := \oplus_{i \in \sigma} \underline{E}_i$ является гармоническим, т.е.

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E.$$

Условие $\mathcal{J}^2$-голоморфности отображения $\psi_{\mathcal{E}}$ означает выполнение следующих соотношений:

$$A'_{ij} = 0 = A''_{ji}, \text{ если } \begin{cases} i < j & \text{и } i, j \in \sigma, \text{ либо } i, j \in \sigma^c; \\ i < j & \text{и } i \in \sigma,\ j \in \sigma^c, \text{ либо } i \in \sigma^c,\ j \in \sigma. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $m < l$, $m \in \sigma$, $l \in \sigma^c$ справедлива следующая цепочка равенств

$$
\begin{aligned}
0 &= \pi_l \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{\partial}{\partial \bar z} \pi_i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \pi_i \frac{\partial}{\partial \bar z} \right) \pi_m = \\
&= \sum_{i=1}^{k} (A''_{li} A'_{im} - A'_{li} A''_{im}) = \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} A'_{im} - \sum_{i \in \sigma} A'_{li} A''_{im} = \\
&= \Big( \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} \Big) \Big( \sum_{j \in \sigma^c} A'_{jm} \Big) - \Big( \sum_{i \in \sigma} A'_{li} \Big) \Big( \sum_{j \in \sigma} A''_{jm} \Big) = \\
&= \pi_l (\partial''_{E^\perp} \circ A'_E - \partial''_{E^\perp} \circ A'_E) \pi_m. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Поясним, откуда следуют отдельные равенства в этой цепочке. Первое равенство вытекает из того, что $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = I$. Равенство во второй строке обосновывается следующей выкладкой

$$
\begin{aligned}
\sum_i A''_{li} A'_{im} &= \sum_{i<m} A''_{li} A'_{im} + \sum_{i>m} A''_{li} A'_{im} \\
&= \sum_{\substack{i \in \sigma \\ i<m}} A''_{li} A'_{im} + \sum_{\substack{i \in \sigma^c \\ i>m}} A''_{li} A'_{im} = \\
&= \sum_{\substack{i \in \sigma \\ i<m<l}} A''_{li} A'_{im} + \sum_{\substack{i \in \sigma^c \\ i>m}} A''_{li} A'_{im} \\
&= 0 + \sum_{\substack{i \in \sigma^c \\ i>m}} A''_{li} A'_{im} = \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} A'_{im} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

и аналогичной выкладкой для суммы $\sum_i A'_{li} A''_{im}$. При переходе от второй строки к третьей в (4.7) мы добавляем члены вида $A''_{li} A'_{jm}$ с $i \neq m$, содержащие произведения вида $\pi_i \pi_j = 0$. Для обоснования последнего равенства в цепочке (4.7) заметим, что

$$
\begin{aligned}
\Big( \sum_{i \in \sigma^c} A''_{li} \Big) \Big( \sum_{j \in \sigma^c} A'_{jm} \Big) &= \Big( \sum_{i \in \sigma^c} \pi_l \partial'' \pi_i \Big) \Big( \sum_{j \in \sigma^c} \pi_j \partial' \pi_m \Big) = \\
&= \pi_l \Big( \partial'' \sum_{i \in \sigma^c} \pi_i \Big) \Big( \sum_{j \in \sigma^c} \pi_j \partial' \Big) \pi_k = \pi_l (\partial''_{E^\perp} \circ A'_E) \pi_m \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

и аналогично для члена $\big( \sum_{i \in \sigma} A'_{li} \big) \big( \sum_{j \in \sigma} A''_{jm} \big)$.

При $m > l$ имеет место цепочка равенств, аналогичная (4.7). Из этих двух цепочек вытекает, что

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E,$$

т.е. расслоение $E$ гармонично.

В случае, когда риманова поверхность $M$ совпадает с римановой сферой $\mathbb{CP}^1$ справедливо и обращение приведенного предложения. А именно, мы покажем, что любое гармоническое отображение $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to G_r(\mathbb{C}^n)$ может быть получено проекцией некоторой $\mathcal{J}^2$-голоморфной кривой $\psi\colon \mathbb{CP}^1 \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$, лежащей в некотором флаговом многообразии $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$. Доказательство этого результата основано на теореме Биркгофа–Гротендика, дающей классификацию голоморфных векторных расслоений над римановой сферой.

Отступление (теорема Биркгофа–Гротендика; см. [16], пп. 8.2).

Теорема 6 (Биркгоф–Гротендик). *Любое голоморфное векторное расслоение $E \to \mathbb{CP}^1$ изоморфно прямой сумме голоморфных линейных расслоений. Иными словами, если $E$ имеет ранг $r$, то*

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{r} L^{\gamma_i},$$

*где $L \to \mathbb{CP}^1$ – тавтологическое расслоение, а $\gamma_i$ – целочисленные индексы.*

В терминах стандартного покрытия римановой сферы $\mathbb{CP}^1$ открытыми множествами

$$U_0 = \{[z_0, z_1]\colon z_1 \neq 0\} \quad \text{и} \quad U_\infty = \{[z_0, z_1]\colon z_0 \neq 0\},$$

любое голоморфное векторное расслоение ранга $r$ над $\mathbb{CP}^1$ задается функцией перехода $F \equiv F_{0\infty}$, которая является голоморфной матричной функцией

$$F\colon U_0 \cap U_\infty \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}).$$

Для этой функции утверждение теоремы означает, что она допускает факторизацию вида

$$F(z) = H_0(z) D(z) H_\infty(z),$$

где функция $H_0$ (соответственно $H_\infty$) продолжается до голоморфной функции

$$H_0\colon U_0 \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}) \quad (\text{соответственно } H_\infty\colon U_\infty \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}))\,,$$

а $D$ – диагональная матричная функция вида

$$D(z) = \mathrm{diag}(z^{\gamma_1},\dots,z^{\gamma_r}),$$

где числа $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r$ называются *частными индексами* матричной функции $F(z)$.

По-другому, теорему Биркгофа–Гротендика можно переформулировать следующим образом: существует фильтрация расслоения $E$ голоморфными подрасслоениями вида

$$0 = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_m = E, \tag{4.10}$$

где

$$\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\beta_i} \oplus \cdots \oplus L^{\beta_i}}_{p_i}$$

и $\beta_1 > \cdots > \beta_m$. Расслоение $\mathcal{B}_i$ можно охарактеризовать как наименьшее голоморфное подрасслоение $E$, которое содержит образы всех мероморфных сечений $E$ с дивизорами степени$\geqslant \beta_i$. Иначе говоря, $\mathcal{B}_i$ порождается образами мероморфных сечений $E$ с дивизорами степени$\geqslant \beta_i$. Число $\beta_1 - \beta_m$ называется *высотой*, а сама фильтрация называется *фильтрацией Хардера–Нарасимхана*. □

Применим теорему Биркгофа–Гротендика в форме Хардера–Нарасимхана к расслоению $E$, отвечающему гармоническому отображению $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to G_r(\mathbb{C}^n)$. Для этого снабдим $E$ голоморфной структурой, задаваемой $\bar\partial$-оператором $\bar\partial_E := \pi_E \circ \partial'' \circ \pi_E$. Фильтрация Хардера–Нарасимхана для расслоения $E$ имеет вид (4.10), в котором фактор $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1}$ можно отождествить с ортогональным дополнением $B_i$ расслоения $\mathcal{B}_{i-1}$ в $\mathcal{B}_i$, пользуясь эрмитовой метрикой на $\underline{\mathbb{C}}^n$. Аналогичным образом, для расслоения $E^\perp$ получается фильтрация

$$0 = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{C}_l = E^\perp,$$

где

$$\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\gamma_i} \oplus \cdots \oplus L^{\gamma_i}}_{q_i}$$

и $\gamma_1 > \cdots > \gamma_l$. Расслоение $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i-1}$ отождествляется с ортогональным дополнением $C_i$ расслоения $\mathcal{C}_{i-1}$ в $\mathcal{C}_i$. Соберем теперь полученные расслоения $B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_l$ вместе и переобозначим их через $\underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k$, так что $k = m + l$ и

$$\underline{E}_i \cong \underbrace{L^{\delta_i} \oplus \cdots \oplus L^{\delta_i}}_{r_i}$$

с $\delta_1 \leqslant \ldots \leqslant \delta_k$. (Знаки равенства в этой цепочке неравенств могут возникать из-за того, что какое-либо из чисел $\beta_i$ может совпасть с каким-либо числом $\gamma_j$. В этом случае будем считать для определенности, что соответствующее расслоение $B_i$ в наборе $\underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k$ стоит раньше расслоения $C_j$, т.е. если $B_i = \underline{E}_s$, то $C_j = \underline{E}_{s+1}$.)

Расслоения $\underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k$ образуют движущийся флаг, задающий искомое отображение $\psi\colon \mathbb{CP}^1 \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$. Действительно, обозначим через $\sigma$ множество индексов $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, таких, что

$$E = \oplus_{i\in\sigma}\underline{E}_i \Longrightarrow E^\perp = \oplus_{i\in\sigma^c}\underline{E}_i.$$

Предложение 5 (Берстол–Саламон). *Если расслоение $E$ гармонично, то движущийся флаг $\mathcal{E} = (\underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k)$ задает $\mathcal{J}^2$-голоморфное отображение $\psi_{\mathcal{E}}\colon \mathbb{CP}^1 \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^n)$.*

Доказательство. Мы должны показать, что

$$A'_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} i > j, & \text{если } i, j \in \sigma, \text{ либо } i, j \in \sigma^c; \\ i < j & \text{если } i \in \sigma,\ j \in \sigma^c, \text{ либо } i \in \sigma^c,\ j \in \sigma. \end{cases}$$

Предположим вначале, что $i, j \in \sigma$. Условие $i > j$ означает, что $\delta_i > \delta_j$ и расслоение $\underline{E}_i$ содержится в некотором голоморфном подрасслоении $\mathcal{B}_s \subset E$, ортогональном $E_j$. Поэтому

$$A''_{ji} = \pi_j \circ \partial'' \circ \pi_i \subset \pi^\perp_{\mathcal{B}_s} \circ \partial'' \circ \pi_{\mathcal{B}_s} = 0$$

в силу голоморфности $\mathcal{B}_s$ (см. условия голоморфности, выписанные после формулы (4.1)). Так как $A'_{ij} = -(A''_{ji})^*$ (проверьте!), то $A'_{ij} = 0$. Случай $i, j \in \sigma^c$ разбирается аналогично.

Предположим далее, что $i < j$ и $i \in \sigma^c$, $j \in \sigma$, причем $\underline{E}_j = B_s \subset \mathcal{B}_s \subset E$. Так как расслоение $E$ гармонично, то сечение $dz \otimes A'_E$ расслоения $\Omega^{1,0}(M) \otimes \mathrm{Hom}(E, E^\perp)$ голоморфно и расслоение $\mathcal{B}_s$ порождается мероморфными сечениями $E^\perp$, имеющими дивизоры степени$\geqslant \delta_j$. Заметим, что

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \partial' \circ \pi_j = \pi_i \circ \partial'(\underline{E}_j) = \pi_i \circ \partial'(B_s) \subset \pi_i \circ \partial'(\mathcal{B}_s).$$

Расслоение $\partial'(\mathcal{B}_s)$ порождается образами мероморфных сечений $E^\perp$, имеющими дивизоры степени$\geqslant \delta_j + 1$, т.е. содержится в объединении

$$\widetilde{E} := \oplus \underline{E}_t$$

подрасслоений $\underline{E}_t$ с $t > j$, $t \in \sigma^c$. Так как $i < j$, то отсюда следует, что $\pi_i(\widetilde{E}) = 0$, т.е. $A'_{ij} = 0$ при $i < j$, $i \in \sigma^c$, $j \in \sigma$.

Аналогично рассматривается случай $i \in \sigma$, $j \in \sigma^c$, пользуясь гармоничностью расслоения $E^\perp$.

Теорема о факторизации гармонических отображений может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 7 (Берстол–Саламон). *Для заданного гармонического расслоения $E \subset \underline{\mathbb{C}}^n$ над $\mathbb{CP}^1$ найдется конечная последовательность $\underline{E}_0, \underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k = E$ гармонических подрасслоений $\underline{\mathbb{C}}^n$ таких, что*:

1) $0 =$ *высота*$(\underline{E}_0) <$ *высота*$(\underline{E}_1) < \ldots$ *высота*$(\underline{E}_k) = \beta_1 - \beta_k$ ;
2) $\underline{E}_i$ *получается из* $\underline{E}_{i-1}$ *или* $\underline{E}_{i-1}^\perp$ *с помощью* $\partial'$- *или* $\partial''$-*замещения*;
3) *любое гармоническое расслоение высоты* 0 *имеет вид*

$$\underline{E}_0 = F_1 \ominus F_2,$$

*где* $F_1$, $F_2$ *– голоморфные подрасслоения* $\underline{\mathbb{C}}^n$, *удовлетворяющие условию* $\partial'\mathcal{O}(F_2) \subset \mathcal{O}(F_1)$ (*через* $\mathcal{O}(F)$ *обозначается пространство голоморфных сечений расслоения* $F$).

# Глава 5. Гармонические отображения в компактные группы Ли

В этой главе приводится конструкция Уленбек гармонических отображений $\varphi\colon M \to G$ из компактной римановой поверхности $M$ в компактную группу Ли $G$. Построение таких отображений сводится к решению систем уравнений типа Захарова–Шабата. В твисторных терминах гармонические отображения $\varphi\colon M \to G$, получаемые с помощью конструкции Уленбек, возникают как проекции отображений $\psi\colon M \to \Omega G$ в пространство петель группы $G$, которые голоморфны относительно обеих почти комплексных структур $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$ на $\Omega G$.

## 5.1. Конструкция Уленбек

Отступление (инвариантные метрики на группах Ли; см. [8], гл. I, п. 2.4). Пусть $G$ – компактная группа Ли (например, $G = \mathrm{U}(n)$). Инвариантная риманова метрика на $G$ определяется своим ограничением на касательное пространство в единице $T_eG$, т.е. на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$. Другими словами, указанная метрика на $G$ полностью определяется заданием инвариантной положительно определенной симметричной билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Под инвариантностью указанной формы понимается ее инвариантность относительно присоединенного действия $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$, определяемого следующим образом. Группа $G$ действует на самой себе посредством сопряжений:

$$G \ni g\colon h \in G \longmapsto ghg^{-1} \in G.$$

Это действие оставляет единицу $e \in G$ на месте и потому порождает действие $G$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_eG$, которое и называется *присоединенным действием* $\mathrm{Ad}\,g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Касательное к этому действию отображение называется *присоединенным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ и задается формулой

$$\mathrm{ad}\,\xi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \eta \longmapsto [\xi,\eta].$$

Форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$ *инвариантна*, если

$$\langle(\operatorname{Ad} g)\eta, (\operatorname{Ad} g)\zeta\rangle = \langle\eta, \zeta\rangle \text{ для всех } \eta, \zeta \in \mathfrak{g},\ \ g \in G.$$

Если группа $G$ связна, то это условие равносильно следующему соотношению на уровне алгебр Ли:

$$\langle(\operatorname{ad}\xi)\eta, \zeta\rangle + \langle\eta, (\operatorname{ad}\xi)\zeta\rangle = 0,$$

или

$$\langle[\xi,\eta],\zeta\rangle + \langle\eta,[\xi,\zeta]\rangle = 0.$$

На любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует инвариантная симметричная билинейная форма, называемая *формой Киллинга*, которая задается посредством

$$\langle\xi,\eta\rangle := \operatorname{tr}(\operatorname{ad}\xi\cdot\operatorname{ad}\eta), \quad \xi,\eta\in\mathfrak{g}.$$

В частности, для полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ алгебра Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ комплексных $(n\times n)$-матриц и форма Киллинга принимает вид

$$\langle\xi,\eta\rangle = \operatorname{tr}(\xi\eta),$$

где в правой части стоит след произведения матриц $\xi\eta$. На компактной группе $G$ форма Киллинга $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отрицательно определена, поэтому в качестве инвариантной положительной определенной формы на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно взять $-\langle\cdot,\cdot\rangle$. $\square$

Обозначим через $\mu$ *форму Картана–Маурера* на $G$, т.е. тавтологическую 1-форму на $G$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задаваемую посредством равенства

$$\mu(\xi) := \xi \text{ для любого } \xi\in\mathfrak{g},$$

где $\xi$ в левой части формулы рассматривается как левоинвариантное векторное поле на $G$. Справедливо следующее *уравнение Картана–Маурера*

$$d\mu + \frac{1}{2}\mu\wedge\mu = 0,$$

в котором форма $\frac{1}{2}\mu\wedge\mu$ совпадает с коммутатором в алгебре Ли

$$\frac{1}{2}\mu\wedge\mu(\xi,\eta) = [\mu(\xi),\mu(\eta)] \text{ для } \xi,\eta\in\mathfrak{g}.$$

Иными словами, уравнение Картана–Маурера означает, что $\mu$ является формой плоской связности на $G$ (называемой также *связностью Картана–Маурера*).

Рассмотрим теперь гладкое отображение $\varphi\colon M \to G$ римановой поверхности $M$ в группу Ли $G$. Обозначим через $\alpha := \varphi^*\mu$ 1-форму на $M$, индуцированную формой Картана–Маурера на $G$ при отображении $\varphi$. Эта форма удовлетворяет уравнению

$$d\alpha + \frac{1}{2}\alpha \wedge \alpha = 0,$$

т.е. задает плоскую связность на расслоении $\varphi^{-1}(TG)$. Ее продолжение на комплексифицированное расслоение $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$ может быть записано в виде

$$\alpha = A_z\, dz + A_{\bar z}\, d\bar z$$

относительно локальной координаты $z$ на $M$. Условие нулевой кривизны переписывается в терминах коэффициентов $A_z$, $A_{\bar z}$ в виде

$$\bar\partial A_z - \partial A_{\bar z} + 2[A_{\bar z}, A_z] = 0, \tag{5.1}$$

а условие гармоничности $\varphi$ принимает вид

$$\bar\partial A_z + \partial A_{\bar z} = 0.$$

Два последних уравнения можно объединить в следующую систему, выглядящую более симметрично:

$$\bar\partial A_z + [A_{\bar z}, A_z] = 0, \quad \partial A_{\bar z} - [A_{\bar z}, A_z] = 0. \tag{5.2}$$

Сопоставим форме $\alpha$ семейство форм $\alpha_\lambda$, зависящих от комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$\alpha_\lambda := \frac{1-\lambda^{-1}}{2} A_z\, dz + \frac{1-\lambda}{2} A_{\bar z}\, d\bar z,$$

которое включает исходную форму $\alpha$ (при $\lambda = -1$).

Предложение 6 (Уленбек). *Отображение $\varphi\colon M \to G$ гармонично тогда и только тогда, когда связность на расслоении $\varphi^{-1}(TG)$, задаваемая формой $\alpha_\lambda$, является плоской при всех $\lambda \in \mathbb{C}^*$, другими словами, когда выполняются соотношения*

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0 \ \text{ для всех } \lambda \in \mathbb{C}^*. \tag{5.3}$$

Доказательство. Выпишем уравнение (5.3) в терминах коэффициентов $A_z$, $A_{\bar z}$, пользуясь формулой (5.1):

$$\begin{aligned} 2\Big(d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda\wedge\alpha_\lambda\Big) &= \\ &= (1-\lambda^{-1})\bar\partial A_z - (1-\lambda)\partial A_{\bar z} + [(1-\lambda^{-1})A_{\bar z}, (1-\lambda)A_z] = \\ &= \lambda(\partial A_{\bar z} - [A_{\bar z}, A_z]) + \lambda^0(\bar\partial A_z - \partial A_{\bar z} + 2[A_{\bar z}, A_z]) \\ &\qquad - \lambda^{-1}(\bar\partial A_z + [A_{\bar z}, A_z]). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Мы видим, что коэффициенты при $\lambda$ и $\lambda^{-1}$ зануляются ввиду уравнений (5.2), а коэффициент при $\lambda^0$ – ввиду условия (5.1).

Сопоставим семейству форм $\alpha_\lambda$ систему линейных уравнений типа *Захарова–Шабата* на алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$dE_\lambda = E_\lambda\cdot\alpha_\lambda \Longleftrightarrow E_\lambda^{-1}dE_\lambda = \alpha_\lambda \ \text{ при любом } \ \lambda\in\mathbb{C}^*.$$

Отображение $E_\lambda\colon M\to G^{\mathbb{C}}$ принимает значения в комплексификации $G^{\mathbb{C}}$ группы $G$, а операция $E_\lambda\cdot$ означает действие $\mathrm{Ad}\,E_\lambda$ группы $G^{\mathbb{C}}$ на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Относительно локальной координаты $z$ на $M$ указанная система принимает вид

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial z} = (1-\lambda^{-1})E_\lambda A_z, \quad \frac{\partial E_\lambda}{\partial\bar z} = (1-\lambda)E_\lambda A_{\bar z}. \tag{5.5}$$

Уравнение нулевой кривизны $d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}\alpha_\lambda\wedge\alpha_\lambda = 0$ является условием совместности для выписанной системы (проверьте!). Поэтому получаем следующий результат.

Теорема 8 (Уленбек). *Пусть $\varphi\colon M\to G$ – гармоническое отображение односвязной (не обязательно компактной) римановой поверхности $M$ в компактную группу $G$, которое центрировано в том смысле, что $\varphi$ переводит заданную точку $p_0\in M$ в единицу группы $e\in G$.*

*Тогда существует единственное решение $E\colon M\times\mathbb{C}^*\to G^{\mathbb{C}}$ системы уравнений Захарова–Шабата такое, что*

$$E_1\equiv e, \quad E_{-1}=\varphi, \quad E_\lambda(p_0)\equiv e \ \textit{ при любом } \ \lambda\in\mathbb{C}^*.$$

*Более того, $E_\lambda$ зависит голоморфно от $\lambda\in\mathbb{C}^*$ и $E_\lambda\in G$ при $\lambda\in S^1$.*

Замечание 7 (геометрический смысл уравнений Захарова–Шабата). Семейство $E_\lambda$ решений системы уравнений (5.5) задает при любом $\lambda \in \mathbb{C}^*$ голоморфную тривиализацию расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, голоморфная КМ-структура которого индуцирована формой Картана–Маурера $\alpha_\lambda$.

Справедлива и теорема, обратная к теореме 8.

Теорема 9 (Уленбек). *Пусть* $E\colon M \times \mathbb{C}^* \to G^{\mathbb{C}}$ *есть семейство голоморфных сечений расслоения* $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}G)$, *которое голоморфно зависит от* $\lambda \in \mathbb{C}^*$. *Предположим, что* $E_1 \equiv e$ *и формы*

$$A_z := \frac{1}{1-\lambda^{-1}} E_\lambda^{-1} \partial' E_\lambda, \quad A_{\bar z} := \frac{1}{1-\lambda} E_\lambda^{-1} \partial'' E_\lambda$$

*не зависят от* $\lambda$. *Тогда отображение* $\varphi := E_{-1}$ *гармонично.*

Доказательство. Положим $\alpha := A_z\,dz + A_{\bar z}\,d\bar z$. По условию, $\alpha$ не зависит от $\lambda$ и при $\lambda = -1$ совпадает с $\frac{1}{2}\varphi^{-1}\,d\varphi$. Отображение $E_\lambda$ удовлетворяет системе уравнений Захарова–Шабата

$$\partial' E_\lambda = (1-\lambda^{-1}) E_\lambda A_z, \quad \partial'' E_\lambda = (1-\lambda) E_\lambda A_{\bar z}.$$

Так как указанная система имеет решение, должно выполняться условие совместности, совпадающее с уравнением нулевой кривизны для связности

$$\alpha_\lambda := \frac{1-\lambda^{-1}}{2} A_z\,dz + \frac{1-\lambda}{2} A_{\bar z}\,d\bar z$$

при любом $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Согласно предложению 6, это означает, что отображение $\varphi$ гармонично.

Задача 18. Сопоставим форме

$$\alpha := \varphi^* \mu = A_z\,dz + A_{\bar z}\,d\bar z,$$

порожденной гармоническим отображением $\varphi\colon M \to G$, операторы

$$L = \partial_z + (1-\lambda^{-1}) A_z, \quad N = -(1-\lambda) A_{\bar z}.$$

Покажите, что они образуют *пару Лакса*, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial \bar z} = [N, L].$$

Обратимся теперь к случаю унитарной группы $G = \mathrm{U}(n)$. Обозначим через

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{r=0}^{n} G_r(\mathbb{C}^n)$$

полный грассманиан пространства $\mathbb{C}^n$. Точки $\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n)$ можно отождествить с эрмитовыми проекторами $P$: $P^* = P$, $P^2 = P$, в пространстве $\mathbb{C}^n$, сопоставляя проектору $P$ его образ $\mathrm{Im}\, P \subset \mathbb{C}^n$. Пользуясь этим отождествлением, мы можем вложить $\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n)$ в унитарную группу посредством отображения

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n) \ni P \longmapsto P - P^{\perp} = V \in \mathrm{U}(n).$$

С учетом этого замечания мы можем перенести теорему о факторизации гармонических отображений $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to G_r(\mathbb{C}^n)$ на гармонические отображения $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathrm{U}(n)$ в следующей форме.

Теорема 10 (Уленбек–Валли, см. [24]). *Для любого гармонического отображения $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathrm{U}(n)$ найдется последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ гармонических отображений $\mathbb{CP}^1 \to \mathrm{U}(n)$ такая, что*:

1) $\varphi_0 \equiv \mathrm{const}, \varphi_k = \varphi$;
2) *каждое отображение $\varphi_j$ получается из предыдущего $\varphi_{j-1}$ по формуле*

$$\varphi_j = \varphi_{j-1} \cdot (P_j - P_j^{\perp}) \quad (\textit{добавление унитона}),$$

*так что для исходного отображения $\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathrm{U}(n)$ получается факторизация вида*

$$\varphi = \varphi_0 \cdot (P_1 - P_1^{\perp}) \cdot \ldots \cdot (P_k - P_k^{\perp}); \tag{5.6}$$

3) *добавление унитона повышает энергию на $4\pi$, так что исходное отображение, допускающее факторизацию вида* (5.6), *имеет энергию $4\pi k$.*

## 5.2. Твисторная интерпретация

Отступление (пространство петель группы Ли; см. [19], гл. 3). Пусть $G$ – компактная группа Ли. Обозначим через

$$LG = C^{\infty}(S^1, G)$$

группу петель группы $G$, т.е. пространство гладких отображений $S^1 \to G$, где $S^1$ отождествляется единичной окружностью в $\mathbb{C}$. Это бесконечномерная группа Ли относительно операции поточечного умножения, в которой роль единицы играет отображение $S^1 \to e$ в единицу $e$ группы $G$.

Пространством петель группы $G$ называется однородное пространство группы петель $LG$ вида

$$\Omega G = LG/G,$$

где группа $G$ в знаменателе отождествляется с подгруппой постоянных отображений вида $S^1 \to g_0 \in G$. Группа петель $LG$ действует на $\Omega G$ левыми сдвигами. Начало $o \in \Omega G$ отождествляется с классом $[G]$ постоянных отображений. Касательное пространство к $\Omega G$ в начале совпадает с

$$T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g} := L\mathfrak{g}/\mathfrak{g},$$

где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы $G$, а $L\mathfrak{g}$ – алгебра петель, определяемая как

$$L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g}).$$

Это бесконечномерная алгебра Ли, наделенная скобкой, задаваемой поточечно.

Элементы пространства петель $\Omega G$ удобно представлять рядами Фурье, а именно, произвольный вектор $\xi \in T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ задается рядом

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta}, \quad \text{где } \xi_k \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}.$$

Этот вектор принадлежит $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\xi_{-k} = \bar{\xi}_k$.

Пространство петель $\Omega G$ обладает естественной симплектической формой, инвариантной относительно действия группы $LG$ на $\Omega G$. Ввиду инвариантности достаточно определить сужение этой формы на касательное пространство $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$ в начале. Фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и зададим 2-форму на $L\mathfrak{g}$ посредством

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta) \rangle \, d\theta \quad \text{для } \xi, \eta \in L\mathfrak{g}. \qquad (5.7)$$

Это кососимметричная замкнутая 2-форма на $L\mathfrak{g}$, которая инвариантна относительно присоединенного действия группы $LG$ на $L\mathfrak{g}$. Заметим, что $\omega_0(\xi, \eta) = 0$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одно из отображений $\xi, \eta$ постоянно. Поэтому форма $\omega_0$ спускается до замкнутой невырожденной 2-формы $\omega$ на $\Omega\mathfrak{g}$, которая разносится с помощью левых сдвигов группы $LG$ в остальные точки $\Omega G$.

Задача 19. Покажите, что форма $\omega_0$ на алгебре петель $L\mathfrak{g}$, задаваемая формулой (5.7), действительно обладает указанными выше свойствами, т.е. что она порождает инвариантную симлектическую форму $\omega$ на пространстве петель $\Omega G$.

Инвариантную комплексную структуру на пространстве петель $\Omega G$ можно ввести, пользуясь комплексным однородным представлением для $\Omega G$, имеющим вид (см. [16], пп. 8.1, 8.2)

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}}/L_+G^{\mathbb{C}}, \tag{5.8}$$

где $LG^{\mathbb{C}} = C^\infty(S^1, G^{\mathbb{C}})$ – комплексифицированная группа петель, а $L_+G^{\mathbb{C}} = \mathrm{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$ – ее подгруппа, состоящая из отображений, продолжающихся до голоморфных отображений единичного круга $\Delta$ в комплексифицированную группу $G^{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в случае унитарной группы $G = \mathrm{U}(n)$ представление (5.8) означает, что любую гладкую матричную функцию $T(\theta)\colon S^1 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на окружности можно представить в виде

$$T(\theta) = U(\theta)H_+(\theta),$$

где $U(\theta)\colon S^1 \to \mathrm{U}(n)$ – унитарная матричная функция, а $H_+$ продолжается внутрь единичного круга $\Delta$ до голоморфной матричной функции $H_+(z)\colon \Delta \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Это представление является параметрическим аналогом представления матрицы в виде произведения унитарной и верхне-треугольной матриц.

Задача 20. Покажите, что любую гладкую функцию $f(\theta)$ на единичной окружности $S^1$, не имеющую нулей, можно представить в виде

$$f = u \cdot h_+,$$

где $u, h_+$ – гладкие функции на $S^1$, причем $|u(\theta)| \equiv 1$, а функция $h_+$ голоморфно продолжается внутрь единичного круга.

Опишем сужение инвариантной комплексной структуры $\mathcal{J}^1$, индуцируемой на $\Omega G$ представлением (5.8), на касательное пространство $T_o(\Omega G)$. В терминах рядов Фурье оно задается следующим образом

$$\mathcal{J}^1\colon \xi = \sum_{k\neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \longmapsto \mathcal{J}^1\xi = -i\sum_{k>0} \xi_k e^{ik\theta} + i\sum_{k<0} \xi_k e^{ik\theta}. \tag{5.9}$$

Задача 21. Докажите это утверждение, т.е. покажите, что сужение комплексной структуры $\mathcal{J}^1$ на $\Omega G$, определяемой представлением (5.8), на касательное пространство $T_o(\Omega G)$ задается в терминах рядов Фурье формулой (5.9).

Симплектическая и комплексная структуры порождают инвариантную риманову метрику на $\Omega G$, задаваемую в начале посредством:

$$g^1(\xi,\eta) = \omega(\xi, \mathcal{J}^1\eta) \ \text{ для } \ \xi,\eta \in \Omega\mathfrak{g} = T_o(\Omega G).$$

В терминах рядов Фурье эта метрика вычисляется по формуле

$$g^1(\xi,\eta) = 2\operatorname{Re}\sum_{k>0} k\langle \xi_k, \bar{\eta}_k\rangle = \sum_{k\neq 0} |k|\langle \xi_k, \bar{\eta}_k\rangle.$$

Существование двух однородных представлений для пространства петель $\Omega G$:

$$\Omega G = LG/G = LG^{\mathbb{C}}/L_+G^{\mathbb{C}}$$

роднит это пространство с флаговыми многообразиями группы $G$, допускающими представления вида

$$F = G/H = G^{\mathbb{C}}/P.$$

На самом деле можно показать, что $\Omega G$ является универсальным флаговым многообразием группы $G$ в том смысле, что все флаговые многообразия $F$ группы $G$ вкладываются в $\Omega G$ в виде комплексных подмногообразий (см. задачу 22* в конце этого параграфа). $\square$

Вернемся к твисторной конструкции гармонических отображений $\varphi\colon M \to G$ римановых поверхностей $M$ в компактную группу Ли $G$. Рассмотрим отображение

$$\pi\colon \Omega G \longrightarrow G, \quad \gamma \longmapsto \gamma(-1).$$

Как мы увидим ниже, это отображение является твисторным расслоением над $G$.

Конструкция Уленбек сопоставляет гармоническому отображению $\varphi\colon M \to G$ семейство отображений

$$E_\lambda\colon M \longrightarrow G^{\mathbb{C}},$$

которое голоморфно зависит от параметра $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и удовлетворяет условиям

$$E_1 \equiv e, \quad E_{-1} = \varphi.$$

Для $\lambda \in S^1$ получаем семейство отображений $E_\lambda\colon M \to G$, которое можно рассматривать как отображение

$$E\colon S^1 \times M \longrightarrow G \Longleftrightarrow E\colon M \longrightarrow \Omega G.$$

Тем самым мы сопоставили гармоническому отображению $\varphi\colon M \to G$ отображение $E\colon M \to \Omega G$, дифференциал которого имеет вид

$$E_\lambda^{-1}\, dE_\lambda = \alpha_\lambda = \frac{1-\lambda^{-1}}{2} A_z\, dz + \frac{1-\lambda}{2} A_{\bar z}\, d\bar z.$$

Напомним, что на $\Omega G$ имеется комплексная структура $\mathcal{J}^1$, ограничение которой на касательное пространство $T_o(\Omega G) = \Omega\mathfrak{g}$ задается формулой

$$\xi = \sum_{k\neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \longmapsto \mathcal{J}^1\xi = -i\sum_{k>0} \xi_k e^{ik\theta} + i\sum_{k<0} \xi_k e^{ik\theta}.$$

Рассмотрим, наряду с этой комплексной структурой, инвариантную почти комплексную структуру $\mathcal{J}^2$, ограничение которой на $T_o(\Omega G) = \Omega\mathfrak{g}$ задается формулой

$$\xi = \sum_{k\neq 0} \xi_k e^{ik\theta} \longmapsto \mathcal{J}^2\xi = -i\sum_{k\neq 0} (-1)^{k+1} \operatorname{sgn} k\, \xi_k e^{ik\theta}.$$

В частности, $(\mathcal{J}^2\xi)_k = (\mathcal{J}^1\xi)_k$ при нечетных $k$ и $(\mathcal{J}^2\xi)_k = -(\mathcal{J}^1\xi)_k$ при четных $k$.

Отображение $E\colon M \to \Omega G$, построенное по гармоническому отображению $\varphi\colon M \to G$, обладает тем свойством, что его дифференциал $E_\lambda^{-1} dE_\lambda$ содержит только члены, линейные по $\lambda$ и $\lambda^{-1}$. Иначе говоря, его образ лежит в горизонтальном подпространстве $\Omega G$, натянутом на $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$. Такие отображения называются *супергоризонтальными*. По построению, отображение $E\colon M \to \Omega G$ голоморфно относительно комплексной структуры $\mathcal{J}^1$ на $\Omega G$, поэтому оно голоморфно и относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$. Тем самым, справедливо

Предложение 7. *Пусть $\varphi\colon M \to G$ – центрированное гармоническое отображение, т.е. $\varphi$ переводит отмеченную точку $p_0 \in M$ в единицу $e$ группы $G$. Тогда оно допускает твисторное поднятие $E\colon M \to \Omega G$, которое супергоризонтально и голоморфно относительно обеих почти комплексных структур $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$ на $\Omega G$.*

Из теоремы Уленбек 9 вытекает, что справедливо и обратное утверждение: проекция $E_{-1} = \varphi$ любого супергоризонтального голоморфного отображения $E\colon M \to \Omega G$ является гармоническим отображением. На самом деле верно и более общее утверждение, доказательство которого мы оставляем в качестве задачи.

Предложение 8 (Берстол). *Отображение $\pi\colon (\Omega G, \mathcal{J}^2) \to G$ является твисторным расслоением, т.е. проекция $\varphi = \pi \circ \psi$ любого $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi\colon M \to \Omega G$ компактной римановой поверхности $M$ в пространство петель $\Omega G$ является гармоническим отображением.*

Задача 22*. Определим действие группы окружности $S^1 = \mathrm{U}(1)$ на пространстве петель $\Omega G$ по формуле

$$\lambda \cdot \gamma(z) := \gamma(\lambda)^{-1}\gamma(\lambda z),$$

где $\lambda \in \mathrm{U}(1)$, $z = e^{i\theta} \in S^1$. Неподвижными точками этого действия являются гомоморфизмы $\gamma\colon S^1 = \mathrm{U}(1) \to G$. Пользуясь этим фактом, постройте вложение флаговых многообразий $F = G/H$ группы $G$ в пространство петель $\Omega G$.

С другой стороны, неподвижные точки $S^1$-действия на $\Omega G$ являются критическими точками функционала *энергии*

$$E(\gamma) := \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \langle \gamma(e^{i\theta})^{-1}\gamma'(e^{i\theta}), \gamma(e^{i\theta})^{-1}\gamma'(e^{i\theta})\rangle\, d\theta.$$

Иными словами, $S^1$-действие на $\Omega G$ порождается гамильтоновым векторным полем, отвечающим функционалу $E(\gamma)$.

# Глава 6. Гармонические отображения в пространства петель и поля Янга–Миллса

В этой главе приводится конструкция гармонических отображений $\varphi\colon M \to \Omega G$ из компактной римановой поверхности $M$ в пространство петель $\Omega G$ компактной группы Ли $G$. Используя изометрическое вложение пространства $\Omega G$ в бесконечномерный грассманиан Гильберта–Шмидта, мы сводим эту задачу к построению гармонических отображений в указанный грассманиан. Оказывается, гармонические отображения в грассманиан Гильберта–Шмидта можно строить, также как в случае конечномерного грассманова многообразия, с помощью твисторного подхода. Именно, по аналогии с конечномерным случаем вводятся т.н. виртуальные флаговые расслоения над грассманианом Гильберта–Шмидта, которые играют роль твисторных расслоений. Пользуясь указанными расслоениями, гармонические отображения в грассманиан Гильберта–Шмидта можно строить, как и в конечномерном случае, проектируя $\mathcal{J}^2$-голоморфные кривые в виртуальных флаговых расслоениях на грассманиан.

Значение гармонических отображений римановых поверхностей в пространства петель $\Omega G$ объясняется их гипотетической связью с полями Янга–Миллса на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Именно, теорема Атьи–Дональдсона утверждает, что имеется взаимнооднозначное соответствие между $G$-инстантонами на $\mathbb{R}^4$ и голоморфными отображениями римановой сферы в пространство петель $\Omega G$. Предполагается, что верна и "реалификация" этой теоремы, утверждающая, что имеется взаимнооднозначное соответствие между $G$-полями Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ и гармоническими отображениями римановой сферы в пространство петель $\Omega G$.

## 6.1. Теорема Атьи–Дональдсона

Отступление (поля Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$; см. [2], гл. I, II). Пусть $G$ – компактная группа Ли, называемая также *калибровоч-*

*ной группой. Калибровочным $G$-потенциалом* на $\mathbb{R}^4$ называется связность в главном $G$-расслоении над $\mathbb{R}^4$, которую мы отождествляем с 1-формой $A$ на $\mathbb{R}^4$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$. В случае, когда калибровочная группа $G$ совпадает с группой $\mathrm{U}(n)$ унитарных $(n \times n)$-матриц, форма $A$ имеет вид

$$A = \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu(x)\, dx_\mu,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – координаты на $\mathbb{R}^4$, а $A_\mu(x)$ – гладкие функции на $\mathbb{R}^4$ со значениями в пространстве косоэрмитовых $(n \times n)$-матриц. В частном случае $G = \mathrm{U}(1)$ калибровочный потенциал совпадает с евклидовым аналогом обычного электромагнитного 4-потенциала.

Кривизна связности $A$ называется *калибровочным $G$-полем.* Она задается 2-формой $F$ на $\mathbb{R}^4$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ вида

$$F = DA = dA + \frac{1}{2}[A, A],$$

где $D\colon \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g}) \to \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ есть оператор ковариантного внешнего дифференцирования, порожденный связностью $A$. В частном случае $G = \mathrm{U}(n)$ форма $F$ имеет вид

$$F = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}(x)\, dx_\mu \wedge dx_\nu,$$

где

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad \partial_\mu := \partial/\partial x_\mu.$$

В случае $G = \mathrm{U}(1)$ набор функций $\{F_{\mu\nu}\}$ задает евклидов аналог тензора Максвелла электромагнитного поля.

*Калибровочным преобразованием* называется гладкое отображение

$$g\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow G,$$

которое действует на калибровочные потенциалы и поля следующим образом:

$$g\colon A \longmapsto A_g := g^{-1}dg + g^{-1}Ag, \quad g\colon F \longmapsto F_g := g^{-1}Fg$$

(группа $G$ действует на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ посредством присоединенного представления). В случае $G = \mathrm{U}(1)$ калибровочное преобразование совпадает с умножением на фазовый множитель

$g(x) = e^{i\theta(x)}$, действие которого на потенциал $A$ сводится к градиентному преобразованию $A \mapsto A - id\theta$, поле $F$ при этом не изменяется.

Функционал *действия Янга–Миллса* задается формулой

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \|F\|^2 \, d^4x, \tag{6.1}$$

где

$$\|F\|^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \|F_{\mu\nu}\|^2,$$

а $\|F_{\mu\nu}\|$ вычисляется с помощью инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В случае $G = \mathrm{U}(n)$ в качестве такого произведения можно взять $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XY)$. Формулу (6.1) можно при этом переписать в виде

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{tr}(F \wedge *F),$$

где $*$ есть оператор Ходжа.

Калибровочные поля $F$, на которых реализуются экстремумы функционала Янга–Миллса, называются *полями Янга–Миллса*, а отвечающие им калибровочные потенциалы $A$ – *связностями Янга–Миллса*. Они являются решениями (с конечным действием Янга–Миллса) уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала Янга–Миллса, которое имеет вид

$$D^*F = 0, \tag{6.2}$$

где $D^*\colon \Omega^2(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g}) \to \Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ – оператор, формально сопряженный к оператору ковариантного дифференцирования $D$. Он равен $D^* = - * D*$, так что уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$D * F = 0. \tag{6.3}$$

Последнее уравнение принято называть *уравнением Янга–Миллса*. К этому уравнению часто добавляют *тождество Бьянки*

$$DF = 0,$$

которое выполняется автоматически для калибровочных полей $F$.

Калибровочное поле $F$ называется *автодуальным* (соответственно *анти-автодуальным*), если

$$* F = F \quad (\text{соответственно} \quad * F = -F). \tag{6.4}$$

Из тождества Бьянки немедленно следует, что решения *уравнений дуальности*

$$*F = \pm F,$$

обладающие конечным действием Янга–Миллса, автоматически являются решениями уравнений Янга–Миллса (6.3).

Представим калибровочное поле $F$ в виде суммы

$$F = F_+ + F_-,$$

где $F_\pm = \frac{1}{2}(*F \pm F)$. В терминах компонент $F_\pm$ выражение (6.1) для функционала Янга–Миллса можно переписать в виде

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} (\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2)\, d^4x.$$

Для калибровочных полей $F$, обладающих конечным действием Янга–Миллса, число

$$k(A) := \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} (-\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2)\, d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{tr}(F \wedge F)$$

является целочисленным топологическим инвариантом, называемым иначе *топологическим зарядом* поля $F$. Очевидно, всегда

$$S(A) \geqslant 4\pi^2 |k(A)|. \tag{6.5}$$

Выделим топологический класс калибровочных полей, фиксируя значение инварианта $k(A)$, иначе говоря, ограничиваясь полями с конечным действием Янга–Миллса и топологическим зарядом $k(A) = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из неравенства (6.5) следует, что минимум $S(A)$ на рассматриваемом классе может достигаться при $k > 0$ только на анти-автодуальных полях, а при $k < 0$ – только на автодуальных полях. Анти-автодуальные поля с конечным действием Янга–Миллса называются *инстантонами*, а автодуальные поля с конечным действием Янга–Миллса – *анти-инстантонами*.

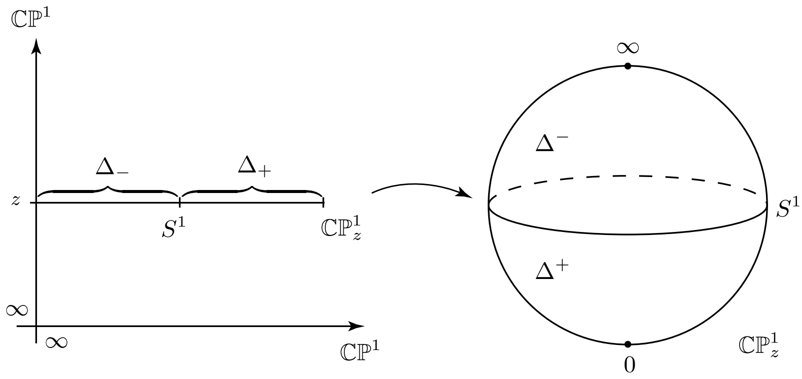
Основной объект изучения в теории Янга–Миллса – это *пространство модулей полей Янга–Миллса*, являющееся фактором пространства всех полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ по модулю калибровочной эквивалентности. Отметим, что задача описания указанного пространства модулей еще далека от окончательного решения. В то же время более узкую задачу описания пространства модулей инстантонов, т.е. пространства всех инстантонов на $\mathbb{R}^4$ по модулю калибровочной эквивалентности, удалось решить полностью. Указанное решение было дано в известной работе Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина [3] на основе твисторного подхода. В твисторных терминах пространство модулей $G$-инстантонов (т.е. инстантонов, отвечающих калибровочной группе $G$) на $\mathbb{R}^4$ интерпретируется как пространство голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений (т.е. голоморфных расслоений со структурной группой $G^{\mathbb{C}}$) на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{CP}^3$, голоморфно тривиальных на проективных прямых в $\mathbb{CP}^3$, являющихся слоями хопфовского расслоения $\mathbb{CP}^3 \setminus \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{R}^4$. $\square$

Другая интерпретация пространства модулей инстантонов на $\mathbb{R}^4$ дана Дональдсоном в работе [10]. Теорема Дональдсона утверждает, что существует естественное взаимно-однозначное соответствие между пространством модулей $G$-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ и множеством классов центрированной эквивалентности голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений на $\mathbb{CP}^2$, голоморфно тривиальных на “бесконечно удаленной” проективной прямой $\mathbb{CP}^1_\infty$. Центрированная эквивалентность означает, что допускаются только изоморфизмы голоморфных расслоений, которые тождественны в отмеченной точке на $\mathbb{CP}^1_\infty$. Можно рассматривать приведенный результат как редукцию ADHM-конструкции из [3] на 2-мерное проективное пространство $\mathbb{CP}^2$.

Для нас удобнее другая формулировка теоремы Дональдсона, данная в работе [1]. В этой формулировке пространство модулей $G$-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ отождествляется с множеством классов центрированной эквивалентности голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений на произведении $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, голоморфно тривиальных на объединении $\mathbb{CP}^1_\infty \cup \mathbb{CP}^1_\infty$ “бесконечно удаленных” проективных прямых:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство модулей}\\ G\text{-инстантонов на } \mathbb{R}^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{классы эквивалентности го-}\\ \text{ломорфных } G^{\mathbb{C}}\text{-расслоений}\\ \text{на } \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1\text{, тривиальных}\\ \text{на } \mathbb{CP}^1_\infty \cup \mathbb{CP}^1_\infty\end{array}\right\}.$$

Множество классов эквивалентности голоморфных расслоений в правой части этого соответствия можно, в свою очередь, отождествить с пространством центрированных голоморфных отображений $f\colon \mathbb{CP}^1 \to \Omega G$, переводящих $\infty \in \mathbb{CP}^1$ в начало $o \in \Omega G$.




Действительно, фиксируем некоторую точку $z \in \mathbb{CP}^1$. Сужение заданного голоморфного $G^{\mathbb{C}}$-расслоения над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ на проективную прямую $\mathbb{CP}^1_z := \mathbb{CP}^1 \times \{z\}$ задается функцией перехода

$$F_z\colon S^1 \subset \mathbb{CP}^1_z \longrightarrow G^{\mathbb{C}},$$

которая продолжается в некоторую окрестность $U$ экватора $S^1$ в $\mathbb{CP}^1_z$ до голоморфного отображения $F_z\colon U \subset \mathbb{CP}^1_z \to G^{\mathbb{C}}$. Функцию $F_z\colon S^1 \to G^{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как элемент группы петель $LG^{\mathbb{C}}$, поэтому получаем отображение

$$F\colon \mathbb{CP}^1 \ni z \longmapsto F_z \in LG^{\mathbb{C}}.$$

В композиции с проекцией $LG^{\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega G^{\mathbb{C}} = LG^{\mathbb{C}}/L_+G^{\mathbb{C}}$ оно дает отображение

$$f\colon \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \Omega G.$$

Построенное отображение $f$ является центрированным и голоморфным, если исходное $G^{\mathbb{C}}$-расслоение над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ было голоморфным и тривиальным на $\mathbb{CP}^1_\infty \cup \mathbb{CP}^1_\infty$. Тем самым, имеется следующее взаимно-однозначное соответствие

$$\left\{\begin{matrix}\text{пространство модулей}\\ G\text{-инстантонов на } \mathbb{R}^4\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пространство центрирован-}\\ \text{ных голоморфных отображе-}\\ \text{ний } f\colon \mathbb{CP}^1 \to \Omega G\end{matrix}\right\}.$$

Имея указанный результат Атьи–Дональдсона, естественно выдвинуть гипотезу, которая получается “реалификацией” (иначе говоря, “овеществлением”) приведенного соответствия. Согласно этой гипотезе, должно существовать следующее взаимно-однозначное соответствие

$$\left\{\begin{matrix}\text{пространство модулей}\\ G\text{-полей Янга–Миллса}\\ \text{на } \mathbb{R}^4\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{пространство центрирован-}\\ \text{ных гармонических отобра-}\\ \text{жений } h\colon \mathbb{CP}^1 \to \Omega G\end{matrix}\right\}.$$

Сформулированная гипотеза остается пока недоказанной. Главная трудность заключается в отсутствии “вещественного” аналога теоремы Дональдсона. Имеющееся доказательство этой теоремы основано на методе монад и является чисто голоморфным.

## 6.2. Гармонические отображения в пространства петель

Мы будем изучать гармонические отображения в пространства петель $\Omega G$, вкладывая $\Omega G$ в бесконечномерный грассманиан Гильберта–Шмидта, к определению которого мы переходим.

Отступление (грассманиан Гильберта–Шмидта; см. [16], гл. VII, [19], гл. 7). Пусть $H$ есть комплексное (сепарабельное) гильбертово пространство. Допустим, что $H$ *поляризовано*, т.е. обладает разложением в прямую ортогональную сумму

$$H = H_+ \oplus H_- \tag{6.6}$$

замкнутых бесконечномерных подпространств. Обозначим через $\mathrm{pr}_+$ (соответственно $\mathrm{pr}_-$) ортогональную проекцию $H \to H_+$ (соответственно $H \to H_-$).

В качестве конкретной реализации поляризованного гильбертова пространства можно взять пространство $L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых комплекснозначных функций на окружности $S^1$ с нулевым средним. Функции $f \in L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ имеют ряды Фурье, сходящиеся в $L^2$-смысле, вида

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k, \quad f_0 = 0,$$

где $z = e^{i\theta}$. В этом случае в качестве $H_+$ (соответственно $H_-$) можно взять подпространство, состоящее из функций $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{C})$, имеющих нулевые коэффициенты Фурье с отрицательными (соответственно положительными) индексами:

$$H_+ = \left\{ f \in H \colon f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k \right\},$$
$$H_- = \left\{ f \in H \colon f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k \right\}.$$

Обозначим через $\mathrm{L}(H)$ пространство линейных ограниченных операторов на $H$, и через $\mathrm{GL}(H)$ группу линейных ограниченных операторов на $H$, имеющих ограниченный обратный. Относительно поляризации $H = H_+ \oplus H_-$ любой оператор $A \in \mathrm{L}(H)$ записывается в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\colon H_+ \to H_+, & b\colon H_- \to H_+ \\ c\colon H_+ \to H_-, & d\colon H_- \to H_- \end{pmatrix}.$$

Определение 11. *Группа Гильберта–Шмидта* $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из операторов $A \in \mathrm{GL}(H)$, для которых внедиагональные члены $b$ и $c$ являются операторами Гильберта–Шмидта.

Оператор $A \in \mathrm{L}(H)$ называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве $H$ сходится ряд

$$\sum_{i}^{\infty} \|Te_i\| < \infty.$$

Если это условие выполняется для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}$, то оно выполняется и для любого другого ортонормированного базиса в $H$. Операторы Гильберта–Шмидта образуют комплексное гильбертово пространство $\mathrm{HS}(H)$ относительно нормы, задаваемой формулой

$$\|T\|_2 := \left( \sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Можно сказать, что пространство $\mathrm{HS}(H)$ является операторным аналогом функционального пространства $L^2$, а определение 11 означает, что в операторах $A \in \mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ “внедиагональные” операторы $b$ и $c$ “малы” по сравнению с “диагональными” операторами $a$ и $d$. Определение операторов Гильберта–Шмидта очевидным образом переносится на линейные ограниченные операторы $A\colon H_1 \to H_2$, действующие из одного гильбертова пространства в другое.

С группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$, также как в конечномерном случае, связано грассманово многообразие Гильберта–Шмидта.

Определение 12. *Грассманово многообразие Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ есть множество замкнутых подпространств $W \subset H$, для которых ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+\colon W \to H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_-\colon W \to H_-$ есть оператор Гильберта–Шмидта.

Напомним, что линейный оператор $A \in \mathrm{L}(H)$ называется *фредгольмовым*, если он обладает конечномерными ядром и коядром. Для такого оператора можно определить его *фредгольмов индекс* по формуле

$$\operatorname{ind} A := \dim(\operatorname{Ker} A) - \dim(\operatorname{Coker} A).$$

Фредгольмов индекс является топологическим инвариантом оператора $A$, точнее, он не меняется при непрерывных линейных деформациях $A$. Эквивалентное определение: оператор $A$ является фредгольмовым, если он обратим по модулю компактных операторов, т.е. если существует оператор $B \in \mathrm{L}(H)$ такой, что операторы $I - AB$ и $I - BA$ компактны. Определение фредгольмовых операторов немедленно переносится на линейные ограниченные операторы $A\colon H_1 \to H_2$, действующие из одного гильбертова пространства в другое.

С учетом приведенных свойств фредгольмовых операторов и операторов Гильберта–Шмидта можно перефразировать определение 12, сказав, что многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из подпространств $W \subset H$, которые “мало” отличаются от подпространства $H_+$ в том смысле, что проекция $\mathrm{pr}_+\colon W \to H_+$ является изоморфизмом по модулю компактных операторов, а проекция $\mathrm{pr}_-\colon W \to H_-$ “мала”, будучи оператором Гильберта–Шмидта.

Эквивалентно, грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ можно определить как множество замкнутых подпространств $W \subset H$, являющихся образами линейных ограниченных операторов $w\colon H_+ \to H$ таких, что оператор $w_+ := \mathrm{pr}_+ \circ w\colon H_+ \to H_+$ фредгольмов, а оператор $w_- := \mathrm{pr}_- \circ w\colon H_+ \to H_-$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Если подпространство $W$ принадлежит $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, то график любого оператора Гильберта–Шмидта $w'\colon W \to W^\perp$ также принадлежит $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Поэтому мы можем рассмотреть открытое подмножество $U_W \subset \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ вида

$$U_W := \{W' \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)\colon \text{ортогональная проекция } W' \to W \\ \text{есть изоморфизм}\}. \tag{6.7}$$

Открытые подмножества $U_W$ играют роль координатных окрестностей на грассмановом многообразии $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$.

Группа Гильберта–Шмидта $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ действует на многообразии $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, причем это действие транзитивно. Действие унитарной подгруппы $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H) \subset \mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$, определяемой как

$$\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H) := \mathrm{U}(H) \cap \mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H),$$

также является транзитивным, причем ее подгруппа изотропии в точке $H_+ \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ совпадает с $\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-)$.

Справедливо следующее

Предложение 9 ([16], пред. 7.1.2; [19], п. 7.1). *Грассманиан Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ *является комплексным гильбертовым многообразием, локальной моделью которого служит гильбертово пространство операторов Гильберта–Шмидта* $\mathrm{HS}(H_+, H_-)$. *Введенные выше координатные окрестности* $\{U_W\}$ *образуют атлас многообразия* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ *с локальными картами, задаваемыми отображениями*

$$U_W \ni W' \longmapsto w' \in \mathrm{HS}(W, W^\perp).$$

Касательное пространство $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ совпадает с гильбертовым пространством $\mathrm{HS}(H_+, H_-)$, на котором имеется инвариантное скалярное произведение, задаваемое формулой

$$(A, B) \longmapsto \mathrm{Re}\,\{\mathrm{tr}(AB^*)\}, \quad A, B \in \mathrm{HS}(H_+, H_-).$$

Мнимая часть комплексного скалярного произведения $\mathrm{tr}(AB^*)$:

$$\omega(A, B) := \mathrm{Im}\,\{\mathrm{tr}(AB^*)\}$$

определяет инвариантную невырожденную 2-форму на $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, которая продолжается до $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$-инвариантной симплектической формы на многообразии $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$. Это задает на $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$ кэлерову структуру, превращая его *в кэлерово гильбертово многообразие.*

Многообразие $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$ имеет счетное число связных компонент, нумеруемых индексом соответствующего фредгольмова оператора. Именно, сопоставим подпространству $W \in \mathrm{Gr_{HS}}(H)$, совпадающему с образом оператора $w\colon H_+ \to H$, число, равное индексу фредгольмова оператора $w_+$. Будем говорить, что подпространство $W \in \mathrm{Gr_{HS}}(H)$ имеет *виртуальную размерность* $d$, если фредгольмов индекс оператора $w_+$ равен $d$. Обозначим через $G_d(H)$ подмножество $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$, состоящее из подпространств виртуальной размерности $d$. Тогда многообразие $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$ является несвязным объединением связных компонент $G_d(H)$:

$$\mathrm{Gr_{HS}}(H) = \bigcup_d G_d(H). \qquad \square \tag{6.8}$$

Построим теперь обещанное изометрическое вложение пространства петель $\Omega G$ в грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$.

Предположим, что компактная группа Ли $G$ является матричной, т.е. реализована в виде подгруппы унитарной группы $\mathrm{U}(n)$ при некотором $n$. Группа петель $LG$ допускает изометрическое вложение в унитарную группу $\mathrm{U_{HS}}(H)$, где гильбертово пространство $H$ отождествляется с пространством вектор-функций $L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n)$. Это вложение строится следующим образом. Мы сопоставляем произвольной петле $\gamma \in LG = C^\infty(S^1, G)$ оператор умножения $M_\gamma \in \mathrm{U_{HS}}(H)$, определяемый посредством

$$f \in H = L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n) \longmapsto (M_\gamma f)(z) := \gamma(z) f(z) \ \text{ для } \ z \in S^1.$$

Иначе говоря, действие оператора $M_\gamma$ на вектор-функцию $f \in H$ задается поточечным применением матричной функции $\gamma(z) \in C^\infty(S^1, \mathrm{U}(n))$ к вектор-функции $f(z) \in L^2_0(S^1, \mathbb{C}^n)$.

Задача 23. Проверьте, что оператор умножения $M_\gamma$ принадлежит группе $\mathrm{U_{HS}}(H)$ для гладких петель $\gamma \in C^\infty(S^1, G)$.

Построенное вложение группы петель $LG$ в унитарную группу Гильберта–Шмидта $\mathrm{U_{HS}}(H)$ индуцирует изометрическое вложение

$$\Omega G \longrightarrow \mathrm{Gr_{HS}}(H).$$

Тем самым, мы можем считать, что любое гармоническое отображение $M \to \Omega G$ из компактной римановой поверхности $M$

в пространство петель $\Omega G$ принимает значения в грассманиане Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, сводя задачу об описании гармонических отображений $M \to \Omega G$ к исследованию гармонических отображений $M \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Последняя задача, ввиду разложения (6.8), сводится к изучению гармонических отображений

$$\varphi\colon M \longrightarrow G_d(H)$$

в грассманианы фиксированной виртуальной размерности $d$. Эту задачу можно решать, обобщая на указанные отображения методы, развитые для описания гармонических отображений $M \to G_d(\mathbb{C}^n)$.

Введем, по аналогии с конечномерным случаем, многообразия виртуальных флагов. Для этого фиксируем произвольное разложение $d = r_1 + \dots + r_n$ числа $d$ в сумму целых чисел и определим *многообразие виртуальных флагов* $F_{\mathbf{r}}(H)$ типа $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, состоящее из наборов $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$ попарно ортогональных подпространств $W_i \subset H$ виртуальной размерности $r_i$. Далее, для любого упорядоченного подмножества $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ положим $r := \sum_{i\in\sigma} r_i$ и построим однородное виртуальное флаговое расслоение

$$\pi_\sigma\colon F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H),$$

сопоставляя

$$(W_1, \dots, W_n) \longmapsto W := \bigoplus W_i.$$

Введем на многообразии виртуальных флагов $F_{\mathbf{r}}(H)$ почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ также, как в конечномерной ситуации. Справедливо следующее предложение, которое доказывается также, как его аналог для грассманова многообразия $G_r(\mathbb{C}^n)$ (см. предложение 4 из п. 4.2).

Предложение 10 [20]. *Флаговое расслоение*

$$\pi_\sigma\colon (F_{\mathbf{r}}(H), \mathcal{J}^2) \to G_r(H)$$

*является твисторным, т.е. проекция любого $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi\colon M \to F_{\mathbf{r}}(H)$ на $G_r(H)$ есть гармоническое отображение $\varphi := \pi_\sigma \circ \psi\colon M \to G_r(H)$.*

Есть основания полагать, что и другие утверждения, доказанные в п. 4.2 (в частности, предложение 5), переносятся на случай грассманового многообразия $G_r(H)$.

# Список литературы


[1] M. F. Atiyah, “Instantons in two and four dimensions”, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 437–451, doi 10.1007/BF01212288, MR 763752, Zbl 0564.58040, ADS 1984CMaPh..93..437A; Имеется русский перевод в сборнике: *Монополи. Топологические и вариационные методы*, Мир, М., 1989, 231–254.

[2] М. Атья, “Геометрия полей Янга–Миллса”, *Геометрия и физика узлов*, Мир, М., 1995, MR 1397266.

[3] M. F. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin, Yu. I. Manin, “Construction of instantons”, *Phys. Lett. A*, **65** (1978), 185–187, doi 10.1016/0375-9601(78)90141-X, MR 598562, ADS 1978PhLA...65..185A.

[4] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, “Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry”, *Proc. Roy. Soc. London*, **362** (1978), 425–461, MR 506229, Zbl 0389.53011, ADS 1978RSPSA.362..425A.

[5] Р. Бишоп, Р. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967, MR 0213981, Zbl 0146.43304.

[6] F. E. Burstall, “Twistor methods for harmonic maps”, *Differential geometry*, Proc. Nord. Summer Sch. (Lyngby, Denmrk, 1985), Lecture Notes Math., **1263**, 1987, 55–96, doi 10.1007/BFb0078610, MR 905879, Zbl 0655.58011.

[7] F. E. Burstall, J. C. Wood, “The construction of harmonic maps into complex Grassmannians”, *J. Diff. Geom.*, **23** (1986), 255–297, MR 852157, Zbl 0588.58018.

[8] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988, MR 1090326.

[9] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982, MR 0693752.

[10] S. K. Donaldson, “Instantons and geometric invariant theory”, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 453–460, doi 10.1007/BF01212289, MR 763753, Zbl 0581.14008, ADS 1984CMaPh..93..453D; Имеется русский перевод в сборнике: *Монополи. Топологические и вариационные методы*, Мир, М., 1989, 255–267.

[11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979, MR 0566582.

[12] J. Eells, J. C. Wood, “Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces”, *Adv. Math.*, **49** (1983), 217–263, doi 10.1016/0001-8708(83)90062-2, MR 716372, Zbl 0528.58007.

[13] J. L. Koszul, B. Malgrange, “Sur certaines structures fibrées complexes”, *Arch. Math.*, **9** (1958), 102–109, doi 10.1007/BF02287068, MR 131882, Zbl 0083.16705.

[14] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971, Zbl 0216.45701.

[15] A. M. Perelomov, “Chiral models: geometrical aspects”, *Phys. Rep.*, **146** (1987), 135–213, doi 10.1016/0370-1573(87)90044-5, MR 876858, ADS 1987PhR...146..135P.

[16] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990, MR 1071737.

[17] J. H. Rawnsley, “$f$-structures, $f$-twistor spaces and harmonic maps”, *Geometry seminar “Luigi Bianchi” II*–1984, Lecture Notes Math., **1164**, 1985, 84–159, MR 829229.

[18] S. Salamon, “Harmonic and holomorphic maps”, *Geometry seminar “Luigi Bianchi” II*–1984, Lecture Notes Math., **1164**, 1985, 161–224, doi 10.1007/BFb0081912, MR 829230, Zbl 0591.53031.

[19] А. Г. Сергеев, *Кэлерова геометрия пространств петель*, МЦНМО, М., 2001.

[20] A. G. Sergeev, “Harmonic maps into loop spaces of compact Lie groups”, *Science in China, Ser. A: Mathematics*, **51** (2008), 695–706, doi 10.1007/s11425-007-0201-6, MR 2395414, Zbl pre05323348.

[21] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976, MR 0515873.

[22] K. Uhlenbeck, “Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model)”, *J. Diff. Geom.*, **30** (1989), 1–50, MR 1001271, Zbl 0677.58020.

[23] Д. Хьюзмоллер, *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970.

[24] G. Valli, “On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups”, *Topology*, **27** (1988), 129–136, doi 10.1016/0040-9383(88)90032-8, MR 948176.

[25] J. C. Wolfson, “Harmonic sequences and harmonic maps of surfaces into complex Grassmann manifolds”, *J. Diff. Geom.*, **27** (1988), 161–178, MR 918462, Zbl 0642.58021.

[26] J. C. Wood, “The explicit construction and parametrization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmannian”, *J. Reine Angew. Math.*, **386** (1988), 1–31, MR 936991, Zbl 0633.58016.

# Предметный указатель

*Научное издание*

# Лекционные курсы НОЦ

**Выпуск 10**

***Армен Глебович Сергеев***

**Гармонические отображения**

Сдано в набор 10.11.2008. Подписано в печать 01.12.2008.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 7,375. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/noc/ e-mail: pavlov@mi.ras.ru