Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 9

Издание выходит с 2006 года

В. В. Жаринов

Алгебро-геометрические основы математической физики

Москва
2008

УДК 512.7+514.7
ББК (В)22.147, (В)22.15
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 9: Алгебро-геометрические основы математической физики / Жаринов В. В. – 210 с.

ISBN 5-98419-026-5

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит годовой курс В. В. Жаринова “Алгебро-геометрические основы математической физики”, прочитанный в 2007 году.

ISBN 5-98419-026-5

Оглавление

Глава 1. Алгебраический минимум

В лекциях рассматриваются алгебраические и геометрические понятия и методы, применяемые в современной математической физике. В полном объеме подобная задача, конечно, неподъемная, так что предлагаемый материал отражает лишь мой личный опыт и мое понимание предмета.

В этой главе максимально сжато излагаются основные алгебраические объекты и конструкции, наиболее часто применяемые в современной математической физике. Для удобства читателей по каждому разделу приводится список рекомендуемой литературы для более полного изучения предмета.

Стандартные обозначения. Будем обозначать:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел;
$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел;
$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ – множество всех комплексных чисел;
$\mathbb{X}^D = \times^D \mathbb{X} = \{x = (\xi^1, \dots, \xi^D); \xi^i \in \mathbb{X}, 1 \leqslant i \leqslant D\}$ – декартово произведение D копий множества $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$;

Будем также использовать мультииндексные обозначения:

$i = (i_1, \dots, i_D) \in \mathbb{Z}^D$, $i_\mu \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant \mu \leqslant D$;
$|i| = |i_1| + \dots + |i_D| \in \mathbb{Z}_+$ для $i \in \mathbb{Z}^D$;
$x^i = (x^1)^{i_1} \dots (x^D)^{i_D} \in \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$, где $x = (x^1, \dots, x^D) \in \mathbb{F}^D$, $i = (i_1, \dots, i_D) \in \mathbb{Z}_+^D$, $(x^\mu)^{i_\mu}$ – компонента $x^\mu \in \mathbb{F}$ в степени $i_\mu \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant \mu \leqslant D$.

1.1. Язык категорий

Согласно Ю. И. Манину [23], “язык категорий воплощает ‘социологический’ подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных”.

В нашем курсе этот язык будет естественным языком, связывающим внешне разнородные объекты и конструкции, позволяющим давать ясные содержательные определения в сложных ситуациях.

1.1.1. Категории. Категория $\mathcal{K}$ задана, если

- ⋆ определено множество (точнее, класс) $\operatorname{Ob}\mathcal{K}$ *объектов* категории $\mathcal{K}$;
- ⋆ для каждой пары $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ определено множество
$$\operatorname{Mor}(A, B)$$
морфизмов из A *в* B, причем пересечение
$$\operatorname{Mor}(A, B) \cap \operatorname{Mor}(C, D) = \varnothing$$
при $(A, B) \neq (C, D)$, $A, \ldots, D \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$;
- ⋆ для каждой тройки $A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ определен *закон композиции*, т.е. отображение $\operatorname{Mor}(A, B) \times \operatorname{Mor}(B, C) \to \operatorname{Mor}(A, C)$, $f \in \operatorname{Mor}(A, B), g \in \operatorname{Mor}(B, C) \mapsto g \circ f \in \operatorname{Mor}(A, C)$;
- ⋆ выполнены аксиомы:
  - (a) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, для всех $h \in \operatorname{Mor}(A, B)$, $g \in \operatorname{Mor}(B, C)$, $f \in \operatorname{Mor}(C, D)$ (ассоциативность);
  - (b) для каждого $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ существует морфизм
$$\mathrm{id}_A \in \operatorname{Mor}(A, A)$$
такой, что
$$\mathrm{id}_A \circ f = f, \quad g \circ \mathrm{id}_A = g$$
для всех $f \in \operatorname{Mor}(B, A)$, $g \in \operatorname{Mor}(A, B)$ (тождественный морфизм).

Объединение $\bigcup_{A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}} \operatorname{Mor}(A, B)$ всех морфизмов категории $\mathcal{K}$ обозначается $\operatorname{Mor}\mathcal{K}$. Если надо уточнить, что речь идет о морфизмах именно категории $\mathcal{K}$, будем писать $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ вместо $\operatorname{Mor}(A, B)$.

При описании категорных конструкций обычно используется наглядная диаграммная запись. Именно, морфизм $f \in \operatorname{Mor}(A, B)$ записывается как стрелка $A \xrightarrow{f} B$, а композиция морфизмов как последовательность стрелок $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Часто морфизм $f \in \operatorname{Mor}(A, B)$ удобно записывать как $f\colon A \to B$.

В ряде категорий морфизмы называются *гомоморфизмами* и вместо символа Mor пишут символ Hom. Морфизмы из $\mathrm{Mor}(A, A)$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, называются *эндоморфизмами*, часто вместо $\mathrm{Mor}(A, A)$ пишут $\mathrm{End}(A)$.

Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называется

- ⋆ *изоморфизмом* (иначе, *биекцией*), если существует такой морфизм $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$, что $f \circ g = \mathrm{id}_B$ и $g \circ f = \mathrm{id}_A$; в этом случае g называется *обратным* к f, пишут $g = f^{-1}$; изоморфизмы из $\mathrm{End}(A)$ называются *автоморфизмами*, множество всех таких автоморфизмов обозначают через $\mathrm{Aut}(A)$;
- ⋆ *мономорфизмом* (иначе, *инъекцией*), если равенство

$$f \circ g_1 = f \circ g_2, \qquad \text{где} \quad g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(C, A),$$

  возможно лишь при $g_1 = g_2$;
- ⋆ *эпиморфизмом* (иначе, *сюръекцией*), если равенство

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f, \qquad \text{где} \quad h_1, h_2 \in \mathrm{Mor}(B, D),$$

  возможно лишь при $h_1 = h_2$.

Объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ называется *универсальным отталкивающим объектом* категории $\mathcal{K}$, если для любого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ множество $\mathrm{Mor}(X, A)$ состоит ровно из одного элемента. Все универсальные отталкивающие объекты, если таковые существуют в данной категории, изоморфны друг другу. Объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ называется *универсальным притягивающим объектом* категории $\mathcal{K}$, если для любого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ множество $\mathrm{Mor}(A, Y)$ состоит ровно из одного элемента. Все универсальные притягивающие объекты, если таковые существуют в данной категории, изоморфны друг другу.

Пример 1.1.1. Категория множеств $\mathcal{S}$: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ – все множества, $\mathrm{Mor}(S, T)$ – все отображения из множества S в множество T. Всякое одноэлементное множество есть универсальный притягивающий объект. Отображение f из множества S в множество T является

- ⋆ мономорфизмом, если для любых элементов $x, y \in S$, $x \neq y$, следует $f(x) \neq f(y)$;
- ⋆ эпиморфизмом, если для каждого элемента $u \in T$ существует элемент $x \in S$ такой, что $u = f(x)$;
- ⋆ изоморфизмом, если f одновременно является и мономорфизмом и эпиморфизмом.

Пример 1.1.2. Категория топологических пространств $\mathcal{T}$: $\operatorname{Ob}\mathcal{T}$ – все топологические пространства, $\operatorname{Mor}(S,T)$ – все непрерывные отображения из пространства S в пространство T.

Замечание. В категории топологических пространств из того, что данный морфизм является мономорфизмом и эпиморфизмом одновременно, не следует, что он изоморфизм, поскольку обратное отображение, хотя и существует в этом случае, не обязано быть непрерывным.

Пример 1.1.3. Категория $\mathcal{S}(M)$ всех подмножеств данного множества M: $\operatorname{Ob}\mathcal{S}(M)$ – множество всех подмножеств множества M, частично упорядоченное по включению, для пары подмножеств $A, B \subset M$ множество морфизмов $\operatorname{Mor}(A,B)$ состоит из одного элемента, если $A \subset B$, и пустое в противном случае.

1.1.2. Полезные конструкции. *Дуальная категория* $\mathcal{K}^\circ$ к данной категории $\mathcal{K}$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{K}^\circ = \operatorname{Ob}\mathcal{K},$$
$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A,B) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(B,A) \quad \text{для всех} \quad A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K},$$

закон композиции не меняется. Подробнее, пусть

$$f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A,B) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(B,A),$$
$$g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(B,C) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(C,B),$$
$$A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}^\circ = \operatorname{Ob}\mathcal{K},$$

тогда композиция $f \circ g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A,C) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(C,A)$. При переходе к дуальной категории универсальный отталкивающий объект переходит в универсальный притягивающий и обратно.

Произведение $\prod \mathcal{K}_i = \prod_{i\in I} \mathcal{K}_i$ семейства категорий $\{\mathcal{K}_i \mid i \in I\}$ определяется следующим образом: объекты этой категории суть семейства объектов

$$\prod A_i = \{A_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}_i \mid i \in I\},$$

а морфизмы из $\prod A_i$ в $\prod B_i$ суть семейства морфизмов

$$\prod f_i = \{f_i \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}_i}(A_i, B_i) \mid i \in I\},$$

закон композиции покомпонентный, т.е. $(\prod f_i) \circ (\prod g_i) = \prod (f_i \circ g_i)$.

Категория $\mathcal{K}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{L}$, если объекты $\operatorname{Ob}\mathcal{K} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{L}$, морфизмы $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B) \subset \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$, $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, и закон композиции в $\mathcal{K}$ индуцирован из $\mathcal{L}$. Подкатегория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(A, B)$ для всех $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{K}$ – категория и $S \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$. Категория $\mathcal{K}_S$ *объектов над* S определяется следующим образом: объекты этой категории суть морфизмы $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, S)$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, S)$ в объект $g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(B, S)$, суть морфизмы $h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ такие, что $g \circ h = f$. Другими словами, объекты построенной только что категории $\mathcal{K}_S$ суть стрелки $A \xrightarrow{f} S$, а равенство $g \circ h = f$ записывается как коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

1.1.3. Произведение и сумма семейства объектов.

Пусть I – некоторое множество.

Пусть дана категория $\mathcal{K}$ и семейство ее объектов

$$\{X^i \mid i \in I\} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{K}.$$

Зададим категорию $\mathcal{K}^I$ следующим образом: объекты категории $\mathcal{K}^I$ суть семейства морфизмов $\{A \xrightarrow{f^i} X^i \mid i \in I\}$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ в объект $\{B \xrightarrow{g^i} X^i\}$, $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, суть морфизмы $A \xrightarrow{h} B$ категории $\mathcal{K}$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f^i"'] & & B \arrow[dl, "g^i"] \\ & X^i & \end{tikzcd}$$

Если в категории $\mathcal{K}^I$ существует универсальный притягивающий объект $\{X \xrightarrow{\pi^i} X^i\}$, то объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ называется *произведением* семейства $\{X^i \mid i \in I\}$, причем обычно вместо X пишут $\prod_{i\in I} X^i$, а морфизмы $\pi^i \in \operatorname{Mor}(X, X^i)$, $i \in I$, называются *каноническими проекциями* из $\prod X^i$ в X^i. По определению в этом случае для всякого семейства $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ существует единственный морфизм $A \xrightarrow{f} \prod X^i$ категории $\mathcal{K}$ такой, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^i"'] & & \prod X^i \arrow[dl, "\pi^i"] \\ & X^i & \end{tikzcd}$$

Пример 1.1.4. Пусть $\mathcal{S}$ – категория множеств и $\{X^i \mid i \in I\}$ – семейство ее объектов (т.е. некоторое семейство множеств). Категория $\mathcal{S}^I$ состоит из объектов

$$\{A \xrightarrow{f^i} X^i\} = \{A \xrightarrow{f^i} X^i \mid i \in I\},$$

где A – произвольное множество, f^i – отображение из A в X^i, а морфизмы из объекта $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ в объект $\{B \xrightarrow{g^i} X^i\}$ суть отображения $A \xrightarrow{h} B$ такие, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f^i"'] & & B \arrow[dl, "g^i"] \\ & X^i & \end{tikzcd}$$

В $\mathcal{S}^I$ существует универсальный притягивающий объект

$$\{\times X^k \xrightarrow{\pi^i} X^i\},$$

который называется *декартовым произведением* семейства $\{X^i \mid i \in I\}$. Множество $\times X^k = \times_{k \in I} X^k$ состоит из всех элементов (семейств) вида $x = (x^k) = (x^k \in X^k \mid k \in I)$, а канонические проекции $\pi^i\colon \times X^k \to X^i$ действуют по правилу $x \mapsto \pi^i(x) = x^i$, $i \in I$, для всех $x = (x^k) \in \times X^k$. Универсальность этой конструкции состоит в том, что для всякого семейства отображений $\{A \xrightarrow{f^i} X^i\}$ существует единственное отображение $f\colon A \to \times X^k$ такое, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^i"'] & & \times X^k \arrow[dl, "\pi^i"] \\ & X^i & \end{tikzcd}$$

Отображение f действует по правилу $a \mapsto x = f(a)$, $x = (x^i)$, $x^i = f^i(a)$, $i \in I$, для всех $a \in A$.

Пусть дана категория $\mathcal{K}$ и семейство ее объектов

$$\{Y_i \mid i \in I\} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{K}.$$

Зададим категорию $\mathcal{K}_I$ следующим образом: объекты категории $\mathcal{K}_I$ суть семейства морфизмов $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A \mid i \in I\}$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ в объект $\{Y_i \xrightarrow{g_i} B\}$, $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, суть морфизмы $A \xrightarrow{h} B$ категории $\mathcal{K}$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

Если в категории $\mathcal{K}_I$ существует универсальный отталкивающий объект $\{Y_i \xrightarrow{\iota_i} Y\}$, то объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ называется *суммой* данного семейства $\{Y_i \mid i \in I\}$, причем обычно вместо Y пишут $\sum_{i\in I} Y_i$, а морфизмы $\iota_i \in \operatorname{Mor}(Y_i, Y)$ называются *каноническими инъекциями* слагаемых Y_i в $\sum Y_i$. По определению в этом случае для всякого семейства $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ существует единственный морфизм $\sum Y_i \xrightarrow{f} A$ категории $\mathcal{K}$ такой, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y_i \arrow[dl, "\iota_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \sum Y_i \arrow[rr, "f"'] & & A \end{tikzcd}$$

Пример 1.1.5. Пусть $\mathcal{S}$ – категория множеств и

$$\{Y_i \mid i \in I\}$$

– семейство ее объектов. Категория $\mathcal{S}_I$ состоит из объектов $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$, где A – множество, f_i – отображения из Y_i в A, $i \in I$, а морфизмы из объекта $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ в объект $\{Y_i \xrightarrow{g_i} B\}$

суть отображения $g\colon A \to B$ такие, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

В $\mathcal{S}_I$ существует универсальный отталкивающий объект

$$\{Y_i \xrightarrow{\iota_i} \bigcup Y_k\},$$

который называется *объединением* семейства множеств $\{Y_i \mid i \in I\}$. Множество

$$\bigcup Y_k = \bigcup_{k \in I} Y_k$$

состоит из всех элементов вида $x = x_k \in Y_k$, $k \in I$, а канонические инъекции $\iota_i\colon Y_i \to \bigcup Y_k$ суть естественные вложения подмножества в множество, $Y_i \subset \bigcup Y_k$, $i \in I$. Универсальность этой конструкции состоит в том, что для всякого семейства отображений $\{Y_i \xrightarrow{f_i} A\}$ существует единственное отображение $f\colon \bigcup Y_k \to A$ такое, что для всякого $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y_i \arrow[dl, "\iota_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \bigcup Y_k \arrow[rr, "f"'] & & A \end{tikzcd}$$

Отображение f действует по правилу $x \mapsto f(x) = f_i(x_i)$ для каждого $x = x_i \in Y_i \subset \bigcup Y_k$, $i \in I$.

В ряде категорий вместо терминов произведение и сумма используют термины *прямое произведение* и *прямая сумма*, а вместо символов $\prod$ и $\sum$ используют символы $\times$ и $\bigoplus$.

1.1.4. Функторы. *Ковариантный функтор* F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$ есть правило, которое каждому объекту $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{L}$ и каждому морфизму $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ ставит в соответствие морфизм

$$F(f) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), F(B)),$$

причем справедливо равенство

$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & C \arrow[d, mapsto, "F"'] \\
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

для всех $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ и $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$.

Контравариантный функтор F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$ есть правило, которое каждому объекту $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{L}$ и каждому морфизму $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ ставит в соответствие морфизм

$$F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(F(B), F(A)),$$

причем справедливо равенство

$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & C \arrow[d, mapsto, "F"'] \\
F(A) & F(B) \arrow[l, "F(f)"'] & F(C) \arrow[l, "F(g)"']
\end{tikzcd}$$

для всех $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ и $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B, C)$.

Пусть F и G – функторы из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$. *Естественное преобразование* Φ из F в G есть правило, которое каждому объекту $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ ставит в соответствие морфизм

$$\Phi(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A), G(A)),$$

причем коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\Phi(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\Phi(B)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

для всех $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$.

Подробнее смотри [23] и [17], а еще подробнее смотри [9], [10], [16], [21] и [22].

1.2. Группы, кольца, модули

1.2.1. Группы. Непустое множество G называется *группой*, если в нем определена групповая операция (обычно записываемая мультипликативно и называемая умножением) $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, причем выполняются аксиомы:

- ⋆ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ для всех $x, y, z \in G$ (ассоциативность);
- ⋆ существует элемент *единица* $e = e_G \in G$ такой, что $e \cdot x = x \cdot e$ для всех $x \in G$;
- ⋆ для каждого $x \in G$ существует *обратный элемент* $x^{-1} \in G$ такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Пример 1.2.1. *Тривиальная группа* есть группа, состоящая из одного единичного элемента e, где $e \cdot e = e = e^{-1}$.

Пример 1.2.2. Пусть S – произвольное множество. Множество $\operatorname{Aut}(S)$ всех его автоморфизмов в категории множеств (иначе, *перестановок*) есть группа с композицией в качестве групповой операции

$$(f \circ g)(s) = f(g(s)) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \operatorname{Aut}(S),\ s \in S.$$

Закон ассоциативности очевидно выполняется, единица есть тождественное отображение id_S, а наличие обратного отображения $f^{-1} \in \operatorname{Aut}(S)$ для каждого $f \in \operatorname{Aut}(S)$ входит в определение автоморфизма.

Пусть G и H – группы. Отображение $f\colon G \to H$ называется *мультипликативным*, если

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in G$$

(в частности, отсюда следует, что $f(e_G) = e_H$).

Легко проверяется, что таким образом определена категория *групп* $\mathcal{G}$, объекты которой суть группы, а морфизмы – мультипликативные отображения. Морфизмы групп обычно называют *гомоморфизмами*, а вместо символа Mor используют символ Hom. Ниже используется символ Hom, но морфизмы по-прежнему называются морфизмами. Таким образом, множество всех морфизмов (мультипликативных отображений) из группы G в группу H есть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(G, H)$.

Пусть G и H – группы. Отображение $f\colon G \to H$ называется *антимультипликативным* (иначе *антиморфизмом*), если

$$f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x) \quad \text{для всех} \quad x, y \in G$$

(в частности, отсюда также следует, что $f(e_G) = e_H$).

Пример 1.2.3. Пусть G – группа. Отображение $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, есть антиморфизм, поскольку $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ для всех $x \in G$.

Пусть G – группа. Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы G, если оно замкнуто относительно групповой операции, индуцированной из G:

- $\star$ единица $e \in H$ (в частности, множество H не пустое);
- $\star$ произведение $x \cdot y \in H$ для всех $x, y \in H$;
- $\star$ обратный элемент $x^{-1} \in H$ для каждого $x \in H$.

В этом случае множество H есть группа с групповой операцией, индуцированной из G, а естественное вложение $H \subset G$ – морфизм групп.

Пусть $f\colon G \to H$ – морфизм групп, тогда

- $\star$ ядро $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$ – подгруппа группы G, морфизм f инъективный тогда и только тогда, когда $\ker f = e_G$, т.е. когда ядро тривиальное (проверить!);
- $\star$ образ $\mathrm{im}\, f = \{y = f(x) \in H \mid x \in G\}$ – подгруппа группы H, морфизм f сюръективный тогда и только тогда, когда $\mathrm{im}\, f = H$.

Пусть H – подгруппа группы G. Для каждого элемента $a \in G$ подмножество

$$aH = \{x = a \cdot h \mid h \in H\} \subset G$$

называется *левым смежным классом* элемента a в группе G. Правило $h \mapsto a \cdot h$ определяет отображение $l_a \colon H \to aH$, которое является изоморфизмом категории множеств. Два левых смежных класса aH и bH, $a, b \in G$, либо совпадают, $aH = bH$ (в этом случае $a^{-1} \cdot b \in H$), либо не пересекаются, $(aH) \cap (bH) = \varnothing$ (проверить!). Следовательно, группа G есть объединение попарно непересекающихся левых смежных классов. Множество всех левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначим через $(G/H)_l$ и определим эпиморфизм $\pi_l \colon G \to (G/H)_l$ правилом $a \mapsto aH$ для всех $a \in G$.

Аналогичным образом определяются и правые смежные классы Ha, обладающие такими же свойствами.

Пусть H – подгруппа группы G. Для данного элемента $a \in G$ левый смежный класс aH и правый смежный класс Ha отнюдь не обязаны совпадать. Подгруппа H называется *нормальной*, если $aH = Ha$ (или, эквивалентно, $aHa^{-1} = H$) для всех $a \in G$. Подробнее, в этом случае для любых элементов $a \in G$, $h \in H$ существует элемент $g \in H$ такой, что $a \cdot h = g \cdot a$ (очевидно, $g = a \cdot h \cdot a^{-1}$).

Пусть H – нормальная подгруппа группы G. В этом случае левые и правые смежные классы совпадают и называются просто *смежными классами*, для данного элемента $a \in G$ его смежный класс обозначают через $\mathbf{a} = aH = Ha$. Аналогичным образом, $(G/H)_l = (G/H)_r = G/H$. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G/H$, определим смежный класс $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in G/H$ правилом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a \cdot b)H$. Проверим, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора представителей в своих классах. Пусть $a' \in \mathbf{a}$, $b' \in \mathbf{b}$, тогда $a' = a \cdot h_a$, $b' = b \cdot h_b$ для некоторых $h_a, h_b \in H$, откуда

$$\begin{aligned}(a' \cdot b')H &= \{x = a' \cdot b' \cdot h \mid h \in H\} = \{x = a \cdot h_a \cdot b \cdot h_b \cdot h \mid h \in H\} \\ &= \{x = (a \cdot b) \cdot (g_a \cdot h_b \cdot h) \mid h \in H\} \\ &= \{x = (a \cdot b) \cdot h' \mid h' = g_a \cdot h_b \cdot h \in H\} = (a \cdot b)H,\end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что по определению нормальной подгруппы существует элемент $g_a \in H$ такой, что $h_a \cdot b = b \cdot g_a$. Легко проверяется, что введенное таким образом умножение в множестве G/H ассоциативное, что смежный класс $\mathbf{e} = H$ является единицей и что смежный класс $\mathbf{a}^{-1} = a^{-1}H$ обратный к смежному классу $\mathbf{a} = aH$ для всех $a \in G$. Другими словами, *на множестве смежных классов G/H определена структура группы.* По построению отображение $\pi\colon G \to G/H$, $a \mapsto \mathbf{a}$, есть есть эпиморфизм категории групп ($\operatorname{im}\pi = G/H$), причем $\ker\pi = H$, т.е. определена точная последовательность морфизмов категории групп:

$$1 \to H \to G \xrightarrow{\pi} G/H \to 1,$$

где 1 – тривиальная группа, состоящая из одной единицы. Точность в члене H означает, что ядро отображения $H \to G$ тривиальное, т.е. это отображение есть вложение, точность в члене G означает, что ядро отображения π совпадает с подгруппой H, а точность в члене G/H означает, что образ отображения π есть вся группа G/H. Группа G/H называется *факторгруппой* группы G по нормальной подгруппе H, а отображение $\pi\colon G \to G/H$ называется канонической проекцией группы G на факторгруппу G/H.

Замечание. Тот факт, что ядро морфизма $\pi\colon G \to G/H$ есть нормальная подгруппа группы G не является случайным. Действительно, для любого морфизма $f\colon G \to F$ из группы G в группу F его ядро $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_F\}$ есть нормальная подгруппа группы G, поскольку

$$\begin{aligned} f(a\cdot h\cdot a^{-1}) &= f(a)\cdot f(h)\cdot f(a^{-1}) = f(a)\cdot e_F\cdot f(a^{-1}) \\ &= f(a)\cdot f(a^{-1}) = f(a\cdot a^{-1}) = f(e_G) = e_F \end{aligned}$$

для всех $a \in G$ и $h \in \ker f$.

Пусть G – группа и S – ее подмножество. Множество

$$N_S = \{a \in G \mid aSa^{-1} = S\}, \quad \text{где} \quad aSa^{-1} = \{x = a\cdot s\cdot a^{-1} \mid s \in S\},$$

называется *нормализатором* подмножества S и обладает следующими свойствами:

- ⋆ N_S есть подгруппа группы G для всякого $S \subset G$;
- ⋆ если S – подгруппа группы G, то $S \subset N_S$ и является нормальной подгруппой группы N_S, более того, N_S – наибольшая подгруппа в G, для которой S – нормальная подгруппа;
- ⋆ если S – нормальная подгруппа группы G, то $N_S = G$.

Далее, множество

$$Z_S = \{z \in G \mid z \cdot s = s \cdot z \text{ для всех } s \in S\}$$

называется *централизатором* подмножества S и обладает следующими свойствами:

* ⋆ Z_S есть подгруппа группы G для всякого $S \subset G$;
* ⋆ $Z_{\{s\}} = N_{\{s\}}$, когда $S = \{s\}$ состоит из одного элемента.

В случае $S=G$ централизатор Z_G называется *центром* группы G.

Пусть S – некоторое множество и $\mathrm{Aut}(S)$ – группа его автоморфизмов в категории множеств. *Левым действием* группы G на множестве S называется любой морфизм $L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(G, \mathrm{Aut}(S))$, $a \mapsto L_a \in \mathrm{Aut}(S)$, используют запись $L_a(s) = a \cdot s$ для всех $a \in G$, $s \in S$. Таким образом,

* ⋆ $L_{a\cdot b}(s) = (a \cdot b) \cdot s = (L_a \circ L_b)(s) = a \cdot (b \cdot s) = a \cdot b \cdot s$ для всех $a, b \in G$, $s \in S$;
* ⋆ $L_e(s) = e \cdot s = s$ для всех $s \in S$, где $e = e_G$ – единица группы G;
* ⋆ $L_{a^{-1}}(s) = L_a^{-1}(s) = a^{-1} \cdot s$ для всех $a \in G$, $s \in S$.

Правое действие определяется дуальным образом, с заменой морфизма на антиморфизм. Подробнее, правое действие

$$R\colon G \to \mathrm{Aut}(S)$$

есть отображение из G в $\mathrm{Aut}(S)$, $a \mapsto R_a$, используют запись $R_a(s) = s \cdot a$, такое, что

* ⋆ $R_{a\cdot b}(s) = s \cdot (a \cdot b) = (R_b \circ R_a)(s) = (s \cdot a) \cdot b = s \cdot a \cdot b$ для всех $a, b \in G$, $s \in S$;
* ⋆ $R_e(s) = s \cdot e = s$ для всех $s \in S$;
* ⋆ $R_{a^{-1}}(s) = R_a^{-1}(s) = s \cdot a^{-1}$ для всех $a \in G$, $s \in S$.

В обоих случаях группа G называется *группой* (*левых*, *правых*) *преобразований множества* S.

Левое действие группы G на множестве S называется *транзитивным*, если для любых точек $r, s \in S$ найдется элемент $a \in G$ такой, что $r = a \cdot s$, *свободным*, если равенство $a \cdot s = s$ для данных $a \in G$, $s \in S$ влечет $a = e$, *эффективным*, если равенство $a \cdot s = s$ для данного $a \in G$ и всех $s \in S$ влечет $a = e$. Аналогичная терминология используется и для правого действия.

Пример 1.2.4. Пусть G – группа. *Левый сдвиг*

$$l \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(G, \mathrm{Aut}(G)), \qquad a \mapsto l_a,$$

определяется правилом $l_a(x) = a \cdot x$ для всех $a, x \in G$ (напомним, что $\mathrm{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов множества G в категории множеств). Это действие, очевидно, свободное и транзитивное. Дуальным образом, *правый сдвиг* $r\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$, $a \mapsto r_a$, определяется правилом $r_a(x) = x \cdot a$ для всех $a, x \in G$. Кроме того, правило $a \mapsto L_a = r_{a^{-1}}$ задает левое действие, а правило $a \mapsto R_a = l_{a^{-1}}$ – правое действие на G.

Пример 1.2.5. Пусть G – группа. Левое действие на G, ассоциированное со сдвигами, есть

$$\mathrm{ad} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(G, \mathrm{Aut}(G)), \qquad a \mapsto \mathrm{ad}(a) = l_a \circ r_{a^{-1}} = r_{a^{-1}} \circ l_a,$$

оно называется *присоединенным действием* или *внутренним автоморфизмом*. В явном виде,

$$\mathrm{ad}(a)(x) = a \cdot x \cdot a^{-1} \quad \text{для всех} \quad a, x \in G.$$

Очевидно, это действие не транзитивное и не свободное, поскольку здесь $a \cdot e \cdot a^{-1} = e$ для всех $a \in G$. Как только что отмечалось, $\mathrm{Aut}(G)$ – группа автоморфизмов множества G в категории множеств, однако в данном случае для каждого элемента $a \in G$ действие $\mathrm{ad}(a)$ есть автоморфизм группы G в категории групп, поскольку

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(a)(x \cdot y) &= a \cdot x \cdot y \cdot a^{-1} = (a \cdot x \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot y \cdot a^{-1}) \\ &= \mathrm{ad}(a)(x) \cdot \mathrm{ad}(a)(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in G. \end{aligned}$$

Пусть группа G действует (слева) на множестве S, $(a, s) \mapsto a \cdot s$ для всех $(a, s) \in G \times S$.

Пусть $s \in S$. Множество $G_s = \{a \in G \mid a \cdot s = s\}$ является подгруппой группы G и называется *группой изотропии* (иначе, *стабильной подгруппой*) элемента s в G. Пусть $r, s \in S$, $r = g \cdot s$ для некоторого $g \in G$, тогда

$$\begin{aligned} gG_sg^{-1} &= g\{a \in G \mid a \cdot s = s\}g^{-1} = \{g \cdot a \cdot g^{-1} \in G \mid a \cdot s = s\} \\ &= \{b \in G \mid g^{-1} \cdot b \cdot g \cdot s = s\} = \{b \in G \mid b \cdot (g \cdot s) = g \cdot s\} \\ &= \{b \in G \mid b \cdot r = r\} = G_r, \end{aligned}$$

таким образом, в этом случае подгруппы G_r и G_s сопряжены и, следовательно, изоморфны, поскольку отображение

$$\mathrm{ad}(g)\colon G_s \to gG_sg^{-1}$$

является изоморфизмом групп. В частности, если группа G действует на множестве S транзитивно, то все группы изотропии G_s, $s \in S$, сопряжены между собой, а если свободно, то все они тривиальные, т.е. в этом случае $G_s = \{e\}$ для всех $s \in S$.

Пусть $s \in S$. Множество $Gs = \{t = a \cdot s \in S \mid a \in G\}$ называется *орбитой* элемента s. Множество всех орбит в S относительно действия группы G обозначается через S/G. Две орбиты Gr и Gs, $r, s \in S$, либо совпадают, $Gr = Gs$ (в этом случае $r = g \cdot s$ с некоторым $g \in G$), либо не пересекаются, $(Gr) \cap (Gs) = \varnothing$. Следовательно, множество S разбивается в дизъюнктивную сумму орбит. Очевидно, действие группы G на S транзитивно тогда и только тогда, когда множество S/G состоит всего из одной орбиты – самого множества S.

Пример 1.2.6. Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел, обозначим через $\mathbb{R}_\pm = \{x \in \mathbb{R} \mid x \gtrless 0\}$ – множество всех положительных/отрицательных чисел. Пусть $G = \mathbb{R}_+$ – группа всех положительных чисел по умножению, $S = \mathbb{R}$. Группа G естественным образом действует на множестве S, $(a, x) \mapsto ax$. Пусть $s \in S$, тогда

$$G_s = \begin{cases} \{1\}, & s \neq 0, \\ G, & s = 0; \end{cases} \qquad Gs = \begin{cases} \mathbb{R}_+, & s > 0, \\ \{0\}, & s = 0, \\ \mathbb{R}_-, & s < 0. \end{cases}$$

В частности, $S/G = \{\mathbb{R}_-, \{0\}, \mathbb{R}_+\}$, $S = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

В случае, когда множество S обладает дополнительной алгебраической структурой, рассматриваются действия, согласованные с этой структурой. Так, пусть S – линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ (например, над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$) и $GL(S, \mathbb{F}) \subset \mathrm{Aut}(S)$ – группа всех его автоморфизмов в категории линейных пространств (т.е. всех обратимых линейных преобразований пространства S). В этом случае левые действия $L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(G, GL(S, \mathbb{F}))$ называются *представлениями* группы G в линейном пространстве S.

1.2.2. Абелевы группы. Коммутативные группы называются абелевыми. Именно, непустое множество G называется *абелевой группой*, если в нем определена коммутативная групповая операция (обычно записываемая аддитивно и называемая сложением) $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a + b$, причем выполняются аксиомы:

- $\star$ $a + b = b + a$ для всех $a, b \in G$ (коммутативность);
- $\star$ $(a+b)+c = a+(b+c)$ для всех $a, b, c \in G$ (ассоциативность);
- $\star$ существует *нулевой элемент* $0 = 0_G \in G$ такой, что $a+0 = a$ для всех $a \in G$;
- $\star$ для каждого $a \in G$ имеется *противоположный элемент* $-a \in G$ такой, что $a + (-a) = 0$.

Пусть G и H – абелевы группы. Отображение $f\colon G \to H$ называется *аддитивным*, если

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in G$$

(в частности, отсюда следует, что $f(0_G) = 0_H$).

Легко проверяется, что таким образом определена категория *абелевых групп* $\mathcal{AG}$, объекты которой суть абелевы группы, а морфизмы – аддитивные отображения. Морфизмы абелевых групп обычно называют *гомоморфизмами*, а вместо символа Mor используют символ Hom. Ниже используется символ Hom, но морфизмы по-прежнему называются морфизмами. Таким образом, множество всех морфизмов (аддитивных отображений) из абелевой группы G в абелеву группу H есть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$.

Простейшая абелева группа есть *нулевая группа*, состоящая из одного нулевого элемента; она является одновременно универсальным отталкивающим и универсальным притягивающим объектом категории $\mathcal{AG}$.

Важная абелева группа есть множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ со стандартной операцией сложения.

Непустое подмножество $H \subset G$ есть *подгруппа* группы G, если оно замкнуто относительно групповой операции, индуцированной из G. Пусть G – абелева группа и H – ее подгруппа. Элементы $a, b \in G$ называются *эквивалентными относительно* H, пишут $a \sim b$, если разность $a - b \in H$. Класс эквивалентности элемента $a \in G$ есть подмножество $\mathbf{a} = a+H \subset G$. Множество G/H всех таких классов эквивалентности есть абелева группа со сложением, индуцированным из G,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = a+b+H \quad \text{для всех} \quad \mathbf{a} = a+H, \mathbf{b} = b+H \in G/H,\ a, b \in G.$$

Эта группа называется *факторгруппой* группы G по подгруппе H. Имеется естественный морфизм $\pi\colon G \to G/H$, $a \mapsto \mathbf{a}$ для всех $a \in G$.

Для абелевых групп G и H множество морфизмов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$$

есть абелева группа с поточечной групповой операцией

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

для всех $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ и $a \in G$.

Пусть $f\colon A \to B$ – морфизм абелевых групп. *Ядро* морфизма f есть абелева группа $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, а *образ* морфизма f есть абелева группа $\mathrm{im}\, f = \{b = f(a) \in B \mid a \in A\}$. Очевидно, $\ker f$ – подгруппа в A, а $\mathrm{im}\, f$ – подгруппа в B. Морфизм $f\colon A \to B$ является мономорфизмом, если $\ker f = 0$, и эпиморфизмом, если $\mathrm{im}\, f = B$. В категории $\mathcal{AG}$ морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.

1.2.3. Кольца. Абелева группа R называется *кольцом*, если в ней, кроме аддитивной операции – сложения, определена биаддитивная операция – *умножение*:

$$R \times R \to R, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех} \quad a, b \in R,$$

так что

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{и} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$\text{для всех} \quad a, b, c \in R.$$

Пусть R и S – кольца. Морфизм абелевых групп $f\colon R \to S$ называется *морфизмом колец*, если дополнительно

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in R.$$

Легко проверяется, что таким образом определена категория *колец* $\mathcal{R}$, объекты которой суть кольца, а морфизмы – морфизмы колец.

Пример 1.2.7. Простейший пример кольца есть *нулевое кольцо*, состоящее из одного нулевого элемента; оно является одновременно универсальным отталкивающим и универсальным притягивающим объектом категории $\mathcal{R}$.

Пример 1.2.8. Важные примеры колец – кольца целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$, вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пример 1.2.9. Популярный класс колец имеет следующую природу. Пусть X – данное множество, R – данное кольцо. Множество $R^X = \mathrm{Map}(X, R)$ всех отображений из X в R имеет естественную структуру кольца, причем кольцевые операции определяются поточечно:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

для всех $f, g \in R^X$, $x \in X$. Нулем этого кольца является нулевое отображение $0 = 0_{R^X} : X \to R$, $x \mapsto 0(x) = 0 = 0_R$ для всех $x \in X$.

Пример 1.2.10. Другой популярный класс колец строится следующим образом. Пусть G – абелева группа и

$$\mathrm{End}(G) = \mathrm{End}_{\mathcal{AG}}(G)$$

– множество всех ее эндоморфизмов в категории абелевых групп. Множество $\mathrm{End}(G)$ также обладает естественной структурой кольца, причем сложение определяется поточечно, а умножение – композицией отображений, т.е.

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (f \cdot g)(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$$

для всех $f, g \in \mathrm{End}(G)$, $a \in G$. Нулем этого кольца является нулевой эндоморфизм $0 = 0_{\mathrm{End}(G)} \colon G \to G$, $a \mapsto 0(a) = 0 = 0_G$ для всех $a \in G$.

Кольцо R называется *унитальным*, если в нем имеется элемент *единица* $e = e_R \in R$ такой, что

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{для всех} \quad a \in R.$$

Пусть R и S – унитальные кольца. Морфизм колец $f \colon R \to S$ называется *морфизмом унитальных колец*, если дополнительно $f(e_R) = e_S$.

Кольцо R называется *ассоциативным*, если

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{для всех} \quad a, b, c \in R.$$

Обычно в ассоциативных кольцах при записи умножения точку опускают, т.е. пишут ab вместо $a \cdot b$.

Кольцо R называется *коммутативным*, если

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{для всех} \quad a, b \in R.$$

Очевидно, кольцо R^X унитальное, ассоциативное, коммутативное, если таковым является кольцо R; единицей кольца R^X является отображение $e = e_{R^X} : X \to R$, $x \mapsto e(x) = e_R$ для всех $x \in X$.

Кольцо $\operatorname{End}(G)$ – унитальное и ассоциативное, причем единица этого кольца есть тождественный эндоморфизм

$$e_{\operatorname{End}(G)} = \mathrm{id}_G \colon G \to G, \qquad a \mapsto \mathrm{id}_G(a) = a \quad \text{для всех} \quad a \in G.$$

Вообще говоря, кольцо $\operatorname{End}(G)$ не коммутативное.

Пусть R – кольцо. Подгруппа S абелевой группы R называется *подкольцом* кольца R, если она является кольцом, с умножением индуцированным из R, т.е. если $a \cdot b \in S$ для всех $a, b \in S$.

Пример 1.2.11. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ есть подкольцо кольца вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Левый идеал I кольца R есть подгруппа абелевой группы R такая, что $R \cdot I \subset I$ (т.е. $a \cdot b \in I$ для всех $a \in R$, $b \in I$); в частности I – подкольцо кольца R. Аналогично, *правый идеал* J кольца R есть подгруппа абелевой группы R такая, что $J \cdot R \subset R$. В свою очередь, *двусторонний идеал* H кольца R есть подмножество множества R, которое одновременно является левым и правым идеалом кольца R. Ниже двусторонние идеалы будем называть просто *идеалами*.

Пример 1.2.12. Множество четных чисел $2\mathbb{Z}$ есть идеал кольца целых чисел $\mathbb{Z}$.

Пример 1.2.13. Пусть G – абелева группа, S – ее подгруппа, и пусть

$$\operatorname{End}(G \mid S) = \{f \in \operatorname{End}(G) \mid \ker f \supset S\}.$$

Очевидно, $\operatorname{End}(G \mid S)$ – левый идеал кольца $\operatorname{End}(G)$.

Пример 1.2.14. Пусть R, S – кольца и $f \colon R \to S$ – морфизм колец. Тогда ядро $\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$ – идеал кольца R, в то время как образ $\operatorname{im} f = \{b = f(a) \in S \mid a \in R\}$ – подкольцо кольца S.

Пусть R – кольцо и I – его идеал. В частности, I – подгруппа абелевой группы R, так что определена факторгруппа R/I. Более того, R/I есть кольцо с умножением, индуцированным из R правилом

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b + I \quad \text{для всех} \;\; \mathbf{a} = a + I,\; \mathbf{b} = b + I \in R/I, \quad a, b \in R.$$

Кольцо R/I называется *факторкольцом* кольца R по идеалу I. Имеется естественный морфизм колец $\pi\colon R \to R/I$, $a \mapsto \mathbf{a} = a + I$ для всех $a \in R$.

1.2.4. Модули. Пусть R – ассоциативное кольцо. Абелева группа M называется *левым R-модулем*, иначе *левым модулем над* R, если определено левое действие кольца R на группе M, т.е. задан морфизм колец $\mu\colon R \to \mathrm{End}(M)$. Подробнее, в этом случае каждому $a \in R$ ставится в соответствие эндоморфизм абелевых групп $\mu(a)\colon M \to M$, $x \mapsto \mu(a)(x) = ax$ (запись $\mu(a)(x)$ сокращают до ax, так что в явном виде морфизм μ не фигурирует), причем выполнены условия

$$a(x + y) = ax + ay, \quad (a + b)x = ax + bx, \quad (ab)x = a(bx)$$

для всех $a, b \in R$ и $x, y \in M$. Если кольцо R унитальное (и попрежнему ассоциативное), то дополнительно налагают условие $ex = x$ для всех $x \in M$, где e – единица кольца R.

Правые модули над ассоциативным кольцом R определяются заменой левого действия на правое, т.е. морфизма колец – на антиморфизм, другими словами, условие $\mu(ab) = \mu(a) \circ \mu(b)$ заменяется на дуальное условие $\mu(ab) = \mu(b) \circ \mu(a)$. Итак, абелева группа N называется *правым R-модулем*, иначе *правым модулем над* R, если каждой паре $a \in R$, $x \in N$ поставлен в соответствие элемент $xa \in N$, причем

$$(x + y)a = xa + ya, \quad x(a + b) = xa + xb, \quad x(ab) = (xa)b$$

для всех $a, b \in R$, $x, y \in N$.

Если ассоциативное кольцо R еще и коммутативное, то понятия левого и правого действия совпадают; как следствие, над коммутативными кольцами совпадают понятия левых и правых модулей. В этом случае используется общий термин *модуль* и левая запись.

Если на абелевой группе P определено и левое, и правое действия ассоциативного кольца R, причем выполнено естественное условие ассоциативности

$$(ax)b = a(xb) \quad \text{для всех} \quad a, b \in R,\ x \in P,$$

то P называется *двусторонним R-модулем.*

Пример 1.2.15. Всякая абелева группа G является модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, поскольку

$$0x = 0,\ 1x = x,\ 2x = x + x,\ \ldots,$$
$$(-1)x = -(1x) = -x,\ (-2)x = -(2x),\ \ldots$$

для всех $x \in G$.

Пример 1.2.16. Нулевая абелева группа является двусторонним модулем над любым ассоциативным кольцом.

Пример 1.2.17. Пусть R – ассоциативное кольцо и I – его левый идеал (в частности, $I = R$). *Левое присоединенное действие* $\mathrm{ad}_l \colon R \to \mathrm{End}_{\mathcal{AG}}(I)$ определяется правилом

$$a \mapsto \mathrm{ad}_l(a) \colon I \to I, \quad x \mapsto \mathrm{ad}_l(a)(x) = ax \quad \text{для всех} \ \ a \in R,\ x \in I.$$

Таким образом, I можно рассматривать как левый R-модуль. Аналогичным образом, правый идеал J кольца R является правым R-модулем относительно *правого присоединенного действия* $\mathrm{ad}_r \colon R \to \mathrm{End}_{\mathcal{AG}}(J)$,

$$a \mapsto \mathrm{ad}_r(a) \colon J \to J, \quad x \mapsto \mathrm{ad}_r(a)(x) = xa \quad \text{для всех} \ \ a \in R,\ x \in J.$$

В частности, всякий двусторонний идеал ассоциативного кольца можно рассматривать как двусторонний модуль над этим кольцом.

Пример 1.2.18. Всякая абелева группа G является левым модулем над кольцом ее эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathcal{AG}}(G)$ относительно тождественного действия, $\mathrm{id} \colon \mathrm{End}_{\mathcal{AG}}(G) \to \mathrm{End}_{\mathcal{AG}}(G)$.

Пример 1.2.19. Всякая абелева группа G является *тривиальным модулем* над любым ассоциативным кольцом R относительно тривиального действия

$$ax = 0 \quad \text{для всех} \quad a \in R,\ x \in G.$$

Пример 1.2.20. Пусть I – множество, R – ассоциативное кольцо, M – левый R-модуль. Множество $M^I = \mathrm{Map}(I, M)$ всех отображений из I в M есть левый R-модуль, где сложение задается поточечно,

$$(\phi + \psi)(i) = \phi(i) + \psi(i) \quad \text{для всех} \quad \phi, \psi \in M^I,\ i \in I,$$

а левое действие кольца R индуцировано его действием в модуле M,

$$(a\phi)(i) = a\phi(i) \quad \text{для всех} \quad a \in R,\ \phi \in M^I,\ i \in I.$$

Важный частный случай есть $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае вместо $M^{\{1,2,\dots,n\}}$ обычно пишут M^n, а элементы из M^n записывают как столбцы высотой n с компонентами из M.

Ниже мы будем в основном говорить лишь о левых модулях. Однако все рассуждения легко переносятся на правые и двусторонние модули (предлагаю делать это в качестве упражнения).

Пусть R – ассоциативное кольцо и M, N – левые R-модули. Морфизм абелевых групп $f\colon M \to N$ называется *морфизмом левых R-модулей*, иначе *R-линейным отображением*, если дополнительно

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех} \quad a \in R,\ x \in M.$$

Легко проверяется, что таким образом определена *категория левых модулей* над данным кольцом R. Обозначим эту категорию через $\mathcal{LM}_R$, множество ее объектов обозначим через $\mathrm{Ob}\,\mathcal{LM}_R$, а множество морфизмов из модуля M в модуль N будем обозначать через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{LM}_R}(M, N)$ или, короче, через $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Итак, каждому ассоциативному кольцу $R \in \mathcal{R}$ поставлена в соответствие категория $\mathcal{LM}_R$ левых модулей над R. Это соответствие функториальное. Именно, пусть $\mathcal{R}_{ass}$ – категория ассоциативных колец (проверить, что такая категория существует). Рассмотрим категорию $\mathcal{LM}$ всех левых модулей. Объекты этой категории суть категории $\mathcal{LM}_R$ левых R-модулей, $R \in \mathcal{R}_{ass}$, морфизмы из объекта $\mathcal{LM}_R$ в объект $\mathcal{LM}_S$ суть ковариантные функторы из категории $\mathcal{LM}_R$ в категорию $\mathcal{LM}_S$. Контравариантный функтор из категории ассоциативных колец $\mathcal{R}_{ass}$ в категорию левых модулей $\mathcal{LM}$ задается следующим образом. Каждому кольцу $R \in \mathcal{R}_{ass}$ ставится в соответствие категория $F(R) = \mathcal{LM}_R$, а каждому морфизму колец $\phi\colon R \to S$ ставится в соответствие функтор $\Phi = F(\phi)\colon \mathcal{LM}_S \to \mathcal{LM}_R$, действующий по правилу: каждому левому S-модулю M с действием $\mu_S\colon S \to \mathrm{End}(M)$ ставится в соответствие R-модуль $\Phi(M) = M$, совпадающий с M как абелева группа, но с действием $\mu_R = \mu_S \circ \phi\colon R \to \mathrm{End}(M)$; в свою очередь, каждому S-линейному отображению $h\colon M \to N$, $M, N \in \mathcal{LM}_S$, ставится в соответствие R-линейное отображение $\Phi(h)\colon \Phi(M) \to \Phi(N)$, где $\Phi(h)(x) = h(x)$ для всех $x \in M = \Phi(M)$ (так что $\Phi(h)$ и h совпадают как морфизмы абелевых групп), причем

$$\begin{aligned}\Phi(h)(\mu_R(a)(x)) = h(\mu_S(\phi(a))(x)) = \mu_S(\phi(a))(h(x)) = \mu_R(a)(h(x))\\ = \mu_R(a)(\Phi(h)(x))\end{aligned}$$

для всех $a \in R$ и $x \in M = \Phi(M)$. Легко проверяется, что приведенная конструкция корректна.

Пусть $R \in \mathcal{R}_{ass}$ и $M, N \in \mathcal{LM}_R$. Множество $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ всех R-линейных отображений из M в N обладает естественной структурой абелевой группы, сложение определяется поточечно

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N),\ x \in M.$$

В частности, для любого семейства $\{f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid i \in I\}$, где I – конечное множество, определена его сумма

$$\sum f_i = \sum_{i \in I} f_i \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \quad \Big(\sum f_i\Big)(x) = \sum f_i(x), \quad x \in M.$$

Более того, поточечное правило определяет сумму $\sum f_i$ и для бесконечного множества I, при условии, что для всякого $x \in M$ образ $f_i(x) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $i \in I$.

Пусть $R \in \mathcal{R}_{ass}$ и $M \in \mathcal{LM}_R$. Абелева группа

$$\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M, M)$$

обладает естественной структурой унитального ассоциативного кольца относительно композиции эндоморфизмов

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathrm{End}_R(M),\ x \in M.$$

Пусть $R \in \mathcal{R}_{ass}$ и $M \in \mathcal{LM}_R$. Подгруппа S абелевой группы M называется *подмодулем* модуля M, если S является левым R-модулем относительно действия, индуцированного из M, т.е. если $ax \in S$ для всех $a \in R$ и $x \in S$.

Пример 1.2.21. Нулевая подгруппа 0 и сам модуль M являются тривиальными подмодулями модуля M.

Пример 1.2.22. Рассмотрим ассоциативное кольцо R как левый R-модуль относительно левого присоединенного действия (см. пример 1.2.17); подмножество $I \subset R$ будет подмодулем модуля R тогда и только тогда, когда I есть идеал кольца R.

Пример 1.2.23. Пусть M, N – левые R-модули и $f\colon M \to N$ – морфизм левых R-модулей. Тогда ядро $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ – подмодуль модуля M, а образ $\operatorname{im} f = \{y = f(x) \mid x \in M\}$ – подмодуль модуля N.

Пример 1.2.24. Пусть I – множество, R – ассоциативное кольцо, M – левый R-модуль. Пусть $\phi \in M^I$ (см. пример 1.2.20). Множество

$$\operatorname{supp} \phi = \{i \in I \mid \phi(i) \neq 0\}$$

называется *носителем* отображения ϕ. Отображение ϕ называется *конечным*, если $\operatorname{supp} \phi$ – конечное множество (состоит из конечного числа элементов). Множество M^I_{fin} всех конечных отображений из M^I является подмодулем левого R-модуля M^I.

Пример 1.2.25. Пусть M – левый R-модуль и S – подмножество множества M. Множество $R\text{-hull}\{S\}$ всех конечных R-линейных комбинаций вида $\sum_i a_i x_i$, где $a_i \in R$, $x_i \in S$, есть минимальный подмодуль модуля M, содержащий S, называемый *подмодулем, порожденным подмножеством* S.

Пример 1.2.26. Пусть M – левый R-модуль и $\{N_i \subset M \mid i \in I\}$ – семейство его подмодулей. Теоретико-множественное пересечение $\bigcap_{i\in I} N_i$ есть подмодуль модуля M, называемый *пересечением семейства подмодулей* $\{N_i \subset M \mid i \in I\}$. В свою очередь, теоретико-множественное объединение $\bigcup_{i\in I} N_i$ не обладает структурой подмодуля, однако порождает подмодуль

$$\sum_{i\in I} N_i = R\text{-hull}\{\textstyle\bigcup_{i\in I} N_i\},$$

называемый *суммой семейства подмодулей* $\{N_i \subset M \mid i \in I\}$. Эта сумма называется *прямой*, если всякий элемент $x \in \sum_{i\in I} N_i$ имеет единственное представление $x = \sum_{i\in I} x_i$, где лишь конечное слагаемых $x_i \in N_i$ ненулевые, в этом случае вместо $\sum_{i\in I} N_i$ пишут $\bigoplus_{i\in I} N_i$.

Пусть R – ассоциативное кольцо, M – левый R-модуль и S – его подмодуль. В частности, S – подгруппа абелевой группы M, так что определена факторгруппа M/S. Легко проверяется, что на M/S определено левое действие кольца R, индуцированное из M,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}\colon R \to \operatorname{End}(M/S), \quad & a \mapsto \boldsymbol{\mu}(a)\colon M/S \to M/S,\\ & \mathbf{x} = x + S \mapsto \boldsymbol{\mu}(a)(\mathbf{x}) = \mu(a)(x) + S\end{aligned}$$

(короче, $a \cdot (x + S) = ax + S$) для всех $a \in R$ и $x \in M$. Левый R-модуль M/S называется *фактормодулем* модуля M. Имеется канонический морфизм левых R-модулей $\pi\colon M \to M/S$, действующий по правилу

$$\pi(x) = \mathbf{x} = x + S \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

Очевидно, ядро $\ker \pi = S$, а образ $\operatorname{im} \pi = M/S$. Более того, морфизм π обладает следующим свойством универсальности. Рассмотрим категорию, объекты которой суть морфизмы левых R-модулей $M \xrightarrow{f} N$ такие, что $\ker f \supset S$, а морфизмы из объекта $M \xrightarrow{f} N$ в объект $M \xrightarrow{g} P$ суть морфизмы левых R-модулей $N \xrightarrow{h} P$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ N \arrow[rr, "h"] & & P \end{tikzcd}$$

Легко проверяется, что морфизм $M \xrightarrow{\pi} M/S$ является универсальным отталкивающим объектом этой категории, т.е. для любого морфизма $M \xrightarrow{f} N$ такого, что $\ker f \supset S$, существует единственный морфизм $M/S \xrightarrow{\mathbf{f}} N$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M/S \arrow[rr, "\mathbf{f}"] & & N \end{tikzcd}$$

Очевидно морфизм $\mathbf{f}$ действует по правилу

$$\mathbf{x} = x + S \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

Рассмотрим важный частный случай. Пусть S – подмодуль левого R-модуля M, T – подмодуль левого R-модуля N, $f\colon M \to N$ – морфизм левых R-модулей такой, что $f(S) \subset T$. Зададим морфизм левых R-модулей $f'\colon M \to N/T$ правилом

$$x \mapsto f'(x) = f(x) + T \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

Очевидно, $f'(S) = 0$, так что определен факторморфизм

$$\mathbf{f}\colon M/S \to N/T,$$

действующий по правилу

$$\mathbf{x} = x + S \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + T \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

Его ядро

$$\ker \mathbf{f} = \{\mathbf{x} \in M/S \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\} = \{x + S \mid f(x) \in T\} = f^{-1}(T)/S,$$

где $f^{-1}(T) = f^{-1}(\operatorname{im} f \cap T)$ – прообраз подмодуля T, а образ

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \mathbf{f} &= \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M/S\} = \{f(x) + T \mid x \in M\} \\ &= \{f(x) + \operatorname{im} f \cap T \mid x \in M\} = \operatorname{im} f/(\operatorname{im} f \cap T), \end{aligned}$$

напомним, что $\operatorname{im} f = f(M)$. В частности, $\mathbf{f}$ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $f(M) = N$ и $f(S) = T$.

Последовательность морфизмов левых R-модулей

$$\ldots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots$$

называется *точной в члене* M_n, если $\operatorname{im} f_{n-1} = \ker f_n$, эта последовательность называется *точной*, если она точная во всех своих членах.

Пример 1.2.27. Фактормодуль M/S левого R-модуля M по подмодулю S полностью описывается точной последовательностью

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} M/S \longrightarrow 0,$$

где стрелки $0 \to$ и $\to 0$ – универсальные морфизмы категории левых R-модулей, $S \to M$ – естественное вложение, $M \xrightarrow{\pi} M/S$ – канонический морфизм, точность в члене S означает, что вложение имеет тривиальное ядро, точность в члене M означает, что ядро $\ker \pi = S$, точность в члене M/S означает, что образ $\operatorname{im} \pi = M/S$.

Пример 1.2.28. Для всякого морфизма $f\colon M \to N$ левых R-модулей определена точная последовательность левых R-модулей

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0,$$

где стрелки $0 \to$ и $\to 0$ – универсальные морфизмы категории левых R-модулей, $\ker f \longrightarrow M$ – естественное вложение, $N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f$ – канонический морфизм, точность в члене $\ker f$ означает, что вложение имеет тривиальное ядро, точность в члене M означает, что ядро

$$\ker \pi = \operatorname{im} f,$$

точность в члене $N/\operatorname{im} f$ означает, что образ

$$\operatorname{im} \pi = N/\operatorname{im} f.$$

Учитывая последний факт, фактормодуль $N/\operatorname{im} f$ часто называют *коядром* морфизма f.

В качестве упражнения по диаграммной технике, с максимальной подробностью докажем следующее утверждение.

Лемма 1.2.1. *Пусть коммутативная диаграмма левых R-модулей*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"'] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

ацикличная, т.е. все ее строки и столбцы точные. Тогда существует единственный морфизм левых R-модулей $\nu\colon N \to Z$ такой, что пополненная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"'] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

также коммутативная и ацикличная.

Доказательство. Прежде всего поясним, что точность столбцов означает, что λ, μ (и ν) – изоморфизмы, точность верхней строки в члене L означает, что f – мономорфизм ($\ker f = 0$), точность в члене M означает, что $\operatorname{im} f = \ker g$, а точность в члене N означает, что g – эпиморфизм ($\operatorname{im} g = N$), для нижней строки – аналогично.

Приступим к доказательству.

Морфизм $\nu\colon N \to Z$, построим следующим образом: каждому $n \in N$ поставим в соответствие $z = \nu(n) = (v \circ \mu)(m) \in Z$, где $m \in M$ такой, что $g(m) = n$ (g – эпиморфизм).

Проверим корректность этого определения, т.е. его независимость от выбора $m \in M$. Пусть $m, m' \in M$ такие, что

$$g(m') = g(m) = n,$$

тогда $g(m' - m) = 0$ и $m' - m = f(l)$, $l \in L$ ($\operatorname{im} f = \ker g$), т.е. $m' = m + f(l)$, и, значит,

$$z' = (v \circ \mu)(m') = (v \circ \mu)(m) + (v \circ \mu \circ f)(l) = z + 0 = z,$$

поскольку $(v \circ \mu \circ f)(l) = (v \circ u \circ \lambda)(l) = 0$ $(v \circ u = 0)$.

Проверим, что ν – морфизм левых R-модулей. Пусть

$$n = a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2, \qquad a_i \in R,\ n_i \in N,\ i = 1, 2.$$

Выберем $m_i \in M$ так, чтобы $n_i = g(m_i)$, и положим

$$m = a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2,$$

тогда

$$\begin{aligned}\nu(a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2) &= (v \circ \mu)(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2)\\ &= a_1 \cdot (v \circ \mu)(m_1) + a_2 \cdot (v \circ \mu)(m_2)\\ &= a_1 \cdot \nu(n_1) + a_2 \cdot \nu(n_2).\end{aligned}$$

По построению $\nu(n) = (v \circ \mu)(m)$ для всех $m \in M$ таких, что $g(m) = n \in Z$, т.е. $(v \circ \mu)(m) = (\nu \circ g)(m)$ для всех $m \in M$, т.е. $v \circ \mu = \nu \circ g$, и, значит, новый квадрат

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[d, "\nu"'] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd}$$

коммутативный.

Покажем, что ν – мономорфизм, т.е. что $\ker \nu = 0$. Пусть $n \in N$, $\nu(n) = 0$, т.е. $(v \circ \mu)(m) = 0$, где $g(m) = n$. Тогда $\mu(m) = u(x)$ для некоторого $x = \lambda(l) \in X$, $l \in L$ ($\ker v = \operatorname{im} u$, а λ – изоморфизм). Итак, $\mu(m) = (u \circ \lambda)(l)$, откуда

$$m = (\mu^{-1} \circ u \circ \lambda)(l) = f(l)$$

(μ – изоморфизм, $\mu \circ f = u \circ \lambda$) и, значит, $n = g(m) = (g \circ f)(l) = 0$ ($g \circ f = 0$).

Покажем, что ν – эпиморфизм. Пусть $z \in Z$, выберем $y = \mu(m) \in Y$, $m \in M$, такое, что $z = v(y) = (v \circ \mu)(m)$ (v – эпиморфизм, μ – изоморфизм). По построению $z = \nu(n)$ для $n = g(m) \in N$.

Проверим, что изоморфизм ν единственный. Пусть $\nu' \colon N \to Z$ другой изоморфизм, для которого пополненная диаграмма коммутативная и ацикличная. Пусть $n \in N$ и $m \in M$, $n = g(m)$, тогда $\nu(n) = (v \circ \mu)(m) = (\nu' \circ g)(m) = \nu'(n)$ (по условию $v \circ \mu = \nu' \circ g$).

Лемма полностью доказана.

Замечание. Приведенное доказательство наглядно демонстрирует, что диаграммная техника простая, но довольно кропотливая. Ее суть в разбиении доказательства на однотипные элементарные кусочки.

Следствие 1.2.1. *Если последовательность левых R-модулей*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

точная, то с точностью до изоморфизма $N = M/\operatorname{im} f$.

Доказательство. Надо предъявить изоморфизм

$$\nu\colon N \to M/\operatorname{im} f.$$

Для этого следует рассмотреть коммутативную ацикличную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_L"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d] & M/\operatorname{im} f \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

и воспользоваться доказанной выше леммой.

1.2.5. Прямое произведение и прямая сумма семейства модулей. Пусть R – ассоциативное кольцо. В категории $\mathcal{LM}_R$ левых R-модулей определены прямые произведения и прямые суммы произвольных семейств.

Действительно, пусть дано семейство левых R-модулей

$$\{M_i \mid i \in I\}.$$

Определим левый R-модуль $\bigtimes M_i = \bigtimes_{i\in I} M_i$ как множество всех семейств $x = (x_i) = \{x_i \in M_i \mid i \in I\}$ с покомпонентными модульными операциями:

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad a \cdot (x_i) = (a \cdot x_i)$$
$$\text{для всех} \quad (x_i), (y_i) \in \bigtimes M_i,\ a \in R.$$

Канонические проекции $\pi_k \colon \bigtimes M_i \to M_k$, $k \in I$, зададим правилом $(x_i) \mapsto \pi_k(x_i) = x_k$ для всех $(x_i) \in \bigtimes M_i$. Построенная таким образом пара $\{\bigtimes M_i, \{\pi_k \mid k \in I\}\}$ и есть прямое произведение семейства $\{M_i \mid i \in I\}$. Действительно, пусть дано семейство $\{N \xrightarrow{f_i} M_i \mid i \in I\}$ морфизмов левых R-модулей. Определим отображение $f \colon N \to \bigtimes M_i$ правилом $y \mapsto f(y) = (x_i) = (f_i(y))$ для всех $y \in N$. Легко проверяется, что это отображение есть морфизм левых R-модулей, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_k"'] & & \bigtimes M_i \arrow[dl, "\pi_k"] \\ & M_k & \end{tikzcd}$$

коммутативная для всех $k \in I$ и что морфизм f единственный с таким свойством.

Пусть $x = (x_i) \in \bigtimes M_i$. Множество $\operatorname{supp} x = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ называется *носителем* элемента x. Элемент $x \in \bigtimes M_i$ называется *конечным*, если $\operatorname{supp} x$ – конечное множество.

Определим левый R-модуль $\bigoplus M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$ как подмодуль модуля $\bigtimes M_i$, состоящий из всех его конечных элементов, так что

$$\bigoplus M_i = \{(x_i) \in \bigtimes M_i \mid \text{лишь конечное число } x_i \neq 0\}.$$

Канонические инъекции $\iota_k \colon M_k \to \bigoplus M_i$ зададим правилом $\iota_k(x_k) = x$, где $k \in I$, $x_k \in M_k$, $x = (\delta_i^k x_k)$, δ_i^k – символ Кронекера, так что семейство x имеет k-ю компоненту x_k, а остальные – нулевые. Построенная так пара $\{\bigoplus M_i, \{\iota_k \mid k \in I\}\}$ и есть прямая сумма семейства $\{M_i \mid i \in I\}$. Действительно, пусть дано семейство $\{M_i \xrightarrow{g_i} N \mid i \in I\}$ морфизмов левых R-модулей. Определим отображение $g \colon \bigoplus M_i \to N$ следующим правилом: $x \mapsto y = g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x_i)$ для всех $x = (x_i) \in \bigoplus M_i$ (сумма определена, поскольку лишь конечное число $x_i \neq 0$). Легко проверяется, что это отображение есть морфизм левых R-модулей, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M_k \arrow[dl, "\iota_k"'] \arrow[dr, "g_k"] & \\ \bigoplus M_i \arrow[rr, "g"'] & & N \end{tikzcd}$$

коммутативна для всех $k \in I$ и что морфизм g единственный с таким свойством.

Отождествляя модули M_i с их образами $\operatorname{im} \iota_i$ в $\bigoplus M_i$, приходим к более привычной записи элементов прямой суммы $x = \sum x_i$, где лишь конечное число слагаемых $x_i \in M_i$ ненулевые, $i \in I$.

По построению $\bigoplus M_i \subset \bigtimes M_i$, т.е. R-модуль $\bigoplus M_i$ есть подмодуль R-модуля $\bigtimes M_i$, причем эти модули совпадают, если семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ конечное. Но даже в конечном случае прямое произведение и прямая сумма – это разные объекты, поскольку прямое произведение характеризуется своими проекциями $\{\bigtimes M_i \xrightarrow{\pi_k} M_k \mid k \in I\}$, а прямая сумма – инъекциями $\{M_k \xrightarrow{\iota_k} \bigoplus M_i \mid k \in I\}$.

Предложение 1.2.1. *R-линейные отображения*

$$\mathrm{pr}_k = \iota_k \circ \pi_k \colon \bigoplus M_i \to \bigoplus M_i, \quad k \in I,$$

образуют полный набор ортогональных проекторов, т.е.

$$\mathrm{pr}_l \circ \mathrm{pr}_k = \begin{cases} \mathrm{pr}_k, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad \text{для всех} \quad k, l \in I, \qquad \sum_{k \in I} \mathrm{pr}_k = \mathrm{id}\,.$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения следует заметить, что композиции

$$\pi_l \circ \iota_k = \begin{cases} \mathrm{id}_{M_k}, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad \text{для всех} \quad k, l \in I,$$

а при доказательстве второго – учесть, что для всякого $x \in \bigoplus M_i$ образ $\mathrm{pr}_k(x) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $k \in I$.

Прямое произведение и прямая сумма обладают функториальными свойствами. Именно, для данного множества индексов I и ассоциативного кольца R категория $\mathcal{LM}_R^I$ определяется как категория, объекты которой суть семейства $\{M_i\} = \{M_i \mid i \in I\}$ левых R-модулей, а морфизмы из объекта $\{M_i\}$ в объект $\{N_i\}$ суть семейства $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ морфизмов левых R-модулей, композиция – покомпонентная,

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\}.$$

Ковариантный функтор $\times$ из категории $\mathcal{LM}_R^I$ в категорию $\mathcal{LM}_R$ задается правилами:

$$\{M_i\} \mapsto \times M_i, \quad \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} \mapsto \times M_i \xrightarrow{\times f_i} \times N_i,$$

где $(\times f_i)(x) = y$, $y = (y_i)$, $y_i = f_i(x_i)$, для всех $x = (x_i)$, $i \in I$.

Ковариантный функтор $\bigoplus$ из категории $\mathcal{LM}_R^I$ в категорию $\mathcal{LM}_R$ задается аналогичными правилами:

$$\{M_i\} \mapsto \bigoplus M_i, \quad \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} \mapsto \bigoplus M_i \xrightarrow{\bigoplus f_i} \bigoplus N_i,$$

где $(\bigoplus f_i)(x) = y$, $y = \sum f_i(x_i)$ для всех $x = \sum x_i \in \bigoplus M_i$.

1.2.6. Проективные и индуктивные пределы семейств модулей. Множество I называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар $i, j \in I$ определено отношение порядка $i \leqslant j$, удовлетворяющее условиям:

- $\star$ $i \leqslant i$ для всех $i \in I$,
- $\star$ $i \leqslant k$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leqslant j$, $j \leqslant k$,
- $\star$ $i = j$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$, $j \leqslant i$.

Частично упорядоченное множество I называется *направленностью по возрастанию*, если для любой пары $i, j \in I$ найдется элемент $k \in I$ такой, что $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$. В частности, в этом случае для всякого конечного подмножества $S \subset I$ существует $k \in I$ такой, что $S \leqslant k$, т.е. $i \leqslant k$ для всех $i \in S$. Аналогично, частично упорядоченное множество I называется *направленностью по убыванию*, если для любых элементов $i, j \in I$ найдется элемент $k \in I$ такой, что $k \leqslant i$ и $k \leqslant j$. По существу, направленности по возрастанию и убыванию отличаются лишь записью отношения порядка, и мы будем использовать лишь направленности по возрастанию, называя их просто *направленностями*.

Пример 1.2.29. Множества $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ с естественным порядком по возрастанию суть наиболее часто используемые направленности.

Пример 1.2.30. Пусть S – некоторое множество. Множество всех его подмножеств, частично упорядоченное по естественному вложению есть другой важный пример направленности. Этот пример можно модифицировать, рассматривая не все подмножества из S, а лишь избранные, с подходящими свойствами. Следует только проверять выполнение второго условия.

Пусть R – ассоциативное кольцо, I – направленность. Семейство левых R-модулей $\{M_i \mid i \in I\}$ называем *проективно направленным* (иначе, *обратно направленным*), если для любых $i, j \in I$, $i \leqslant j$, определено R-линейное отображение $M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j$, причем выполнены условия:

- $\star$ $\phi_{ii} = \mathrm{id}$ для всех $i \in I$,
- $\star$ $\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leqslant j \leqslant k$.

Проективно направленные семейства обозначаются через

$$\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j\}$$

или, подробнее, через

$$\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in I,\ i \leqslant j\}.$$

Пусть $\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j\}$ – проективно направленное семейство левых R-модулей. Рассмотрим категорию, объекты которой суть семейства R-линейных отображений $\{F \xrightarrow{f_i} M_i \mid i \in I\}$ такие, что для любых $i, j \in I$, $i \leqslant j$, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ M_i & & M_j \arrow[ll, "\phi_{ij}"] \end{tikzcd}$$

а морфизмы из объекта $\{F \xrightarrow{f_i} M_i\}$ в объект $\{G \xrightarrow{g_i} M_i\}$ суть R-линейные отображения $h\colon F \to G$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f_i"'] & & G \arrow[dl, "g_i"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

В построенной категории есть универсальный притягивающий объект $\{\varprojlim M_i \xrightarrow{\pi_k} M_k \mid k \in I\}$, называемый *проективным пределом* (иначе, *обратным пределом*) семейства $\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j\}$.

Именно, левый R-модуль $\varprojlim M_i$ есть подмодуль левого R-модуля $\times M_i$, состоящий из всех элементов $(x_i) \in \times M_i$ таких, что $\phi_{ij}(x_j) = x_i$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. В свою очередь, канонические проекции $\pi_k \colon \varprojlim M_i \to M_k$ суть сужения одноименных проекций $\pi_k \colon \times M_i \to M_k$, $k \in I$. Покажем, что для всякого объекта $\{F \xrightarrow{f_i} M_i\}$ существует единственный морфизм $f \colon F \to \varprojlim M_i$ такой, что для всех $k \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_k"'] & & \varprojlim M_i \arrow[dl, "\pi_k"] \\ & M_k & \end{tikzcd}$$

Определим требуемый морфизм правилом

$$f(y) = (x_i), \quad \text{где} \;\; x_i = f_i(y), \quad \text{для всех} \;\; y \in F,\; i \in I.$$

Тогда

$$\phi_{ij}(x_j) = \phi_{ij}(f_j(y)) = (\phi_{ij} \circ f_j)(y) = f_i(y) = x_j$$
$$\text{для всех} \quad i, j \in I,\; i \leqslant j,$$

что и требовалось. Единственность морфизма f с требуемыми свойствами очевидна.

Отметим, что канонические проекции $\pi_k \colon \varprojlim M_i \to M_k$, $k \in I$, характеризуются следующими свойствами:

- ⋆ $\pi_i = \phi_{ij} \circ \pi_j$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$,
- ⋆ для данного $x \in \varprojlim M_I$ имеем $x = 0$ тогда и только тогда, когда $\pi_i(x) = 0$ для всех $i \in I$.

Пример 1.2.31. Проективная последовательность

$$\{M_{i-1} \xleftarrow{\phi_i} M_i \mid i \in \mathbb{Z}\},$$

графически

$$\ldots \longleftarrow M_{i-1} \xleftarrow{\phi_i} M_i \xleftarrow{\phi_{i+1}} M_{i+1} \longleftarrow \ldots,$$

левых R-модулей M_i и R-линейных отображений $\phi_i \colon M_i \to M_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$, по сути есть проективное семейство

$$\{M_i \xleftarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i \leqslant j\},$$

где $\phi_{ii} = \mathrm{id}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\phi_{ij} = \phi_{i+1} \circ \ldots \circ \phi_j$, $i < j$.

Дуальным образом, пусть R – ассоциативное кольцо, I – направленность. Семейство левых R-модулей $\{M_i \mid i \in I\}$ называем *индуктивно направленным* (иначе, *прямо направленным*), если для любых $i, j \in I$, $i \leqslant j$, определено R-линейное отображение $M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j$, причем выполнены условия:

$\star$ $\phi_{ii} = \mathrm{id}$ для всех $i \in I$,

$\star$ $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leqslant j \leqslant k$.

Индуктивно направленные семейства обозначаются через

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j\}$$

или, подробнее, через

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in I, i \leqslant j\}.$$

Пусть $\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j\}$ – индуктивно направленное семейство левых R-модулей. Рассмотрим категорию, объекты которой суть семейства R-линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} F \mid i \in I\}$, F – левый R-модуль, такие, что для любых $i, j \in I$, $i \leqslant j$, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & M_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

а морфизмы из объекта $\{M_i \xrightarrow{f_i} F\}$ в объект $\{M_i \xrightarrow{g_i} G\}$ суть R-линейные отображения $h\colon F \to G$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ F \arrow[rr, "h"'] & & G \end{tikzcd}$$

В построенной категории есть универсальный отталкивающий объект $\{M_k \xrightarrow{\iota_i} \varinjlim M_i \mid k \in I\}$, называемый *индуктивным пределом* направленного семейства $\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j\}$. Левый R-модуль

$\varinjlim M_i$ строится следующим образом. Сначала отметим, что для всякого $x = \sum_i x_i \in \bigoplus M_i$ носитель $\operatorname{supp} x = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ конечный, следовательно, существует индекс $k \in I$ такой, что $\operatorname{supp} x \leqslant k$ и, значит, определена сумма $\sum_i \phi_{ik}(x_i) \in M_k$. Легко проверяется, что множество

$$N = \left\{ x = \sum x_i \in \bigoplus M_i \;\middle|\; \sum \phi_{ik}(x_i) = 0 \text{ для некоторого } k \in I \right\}$$

есть подмодуль левого A-модуля $\bigoplus M_i$. Положим

$$\varinjlim M_i = \bigoplus M_i \Big/ N,$$

канонические морфизмы $\psi_k \colon M_k \to \varinjlim M_i$, $k \in I$, определим как композиции $\psi_k = \pi \circ \iota_k$. Напомним, что прямая сумма есть объект $\{M_k \xrightarrow{\iota_k} \bigoplus M_i\}$, а фактормодуль $\bigoplus M_i \Big/ N$ характеризуется точной последовательностью

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \bigoplus M_i \xrightarrow{\pi} \bigoplus M_i \Big/ N \longrightarrow 0.$$

Проверим, что так построенный объект есть универсальный отталкивающий. Пусть дан объект $\{M_i \xrightarrow{f_i} F\}$. В силу универсальности прямой суммы $\bigoplus M_i$ существует R-линейное отображение $f' \colon \bigoplus M_i \to F$, $f_i = f' \circ \iota_i$, для всех $i \in I$, действующее по правилу $f'(x) = \sum_i f_i(x_i)$ для всех $x = \sum_i x_i \in \bigoplus M_i$. Пусть $x = \sum_i x_i \in N$, тогда

$$f'(x) = \sum_i f_i(x_i) = \sum_i (f_k \circ \phi_{ik})(x_i) = \sum_i f_k(\phi_{ik}(x_i)) = 0$$

для некоторого $k \in I$. Таким образом, $N \subset \ker f'$ и, значит, определен факторморфизм $f \colon \varinjlim M_i \to F$. Легко проверяется, что так построенное R-линейное отображение f искомое, т.е. для любого $k \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M_k \arrow[dl, "\psi_k"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ \varinjlim M_i \arrow[rr, "f"'] & & F \end{tikzcd}$$

и что R-линейное отображение с такими свойствами единственное.

Отметим, что канонические морфизмы $\psi_k\colon M_k \to \varinjlim M_i$, $k \in I$, характеризуются следующими свойствами:

- ⋆ $\psi_i = \psi_j \circ \phi_{ij}$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$,
- ⋆ $\psi_i(x_i) = \psi_j(x_j)$ для данных $x_i \in M_i$, $x_j \in M_j$, $i, j \in I$, тогда и только тогда, когда $\phi_{ik}(x_i) = \phi_{jk}(x_j)$ для некоторого $k \in I$, $i \leqslant k$, $j \leqslant k$,
- ⋆ $\bigcup_i \operatorname{im}\psi_i = \varinjlim M_i$, напомним, что $\operatorname{im}\psi_i = \psi_i(M_i)$.

Пример 1.2.32. Индуктивная последовательность

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}\},$$

графически

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots,$$

левых R-модулей M_i и R-линейных отображений $\phi_i\colon M_i \to M_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, по сути есть индуктивное семейство

$$\{M_i \xrightarrow{\phi_{ij}} M_j \mid i, j \in \mathbb{Z},\ i \leqslant j\},$$

где $\phi_{ii} = \mathrm{id}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\phi_{ij} = \phi_{j-1} \circ \ldots \circ \phi_i$, $i < j$.

1.2.7. Свободные модули. Пусть I – множество, R – унитальное ассоциативное кольцо. рассмотрим категорию, объекты которой суть отображения $\phi \in M^I$, $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{LM}_R$ (см. пример 1.2.20), а морфизмы из объекта $\phi \in M^I$ в объект $\psi \in N^I$, $M, N \in \operatorname{Ob}\mathcal{LM}_R$, суть морфизмы $h \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M \arrow[rr, "h"'] & & N \end{tikzcd}$$

В этой категории есть универсальный отталкивающий объект. Именно, положим $R\langle I\rangle = R^I_{\mathrm{fin}} \in \operatorname{Ob}\mathcal{LM}_R$ (см. пример 1.2.24) и определим каноническое отображение $\delta = \delta_I\colon I \to R\langle I\rangle$ правилом

$$i \mapsto \delta_i, \quad \text{где} \quad \delta_i(k) = \begin{cases} e, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \quad \text{для всех} \quad i, k \in I,$$

поясним, что $e = e_R$ – единица кольца R. Проверим, что δ – универсальный отталкивающий элемент рассматриваемой категории. Заметим сначала, что отображение δ инъективное, определяет вложение множества I в множество $R\langle I\rangle$, причем всякий элемент $\zeta \in R\langle I\rangle$ имеет однозначное представление $\zeta = \sum_{i\in I}\zeta(i)\delta_i$ (напомним, что отображение ζ конечное). Пусть теперь $\phi \in M^I$, определим отображение $\phi_*\colon R\langle I\rangle \to M$ правилом

$$\zeta \mapsto \phi_*(\zeta) = \sum_{i\in I}\zeta(i)\phi(i) \quad \text{для всех} \quad \zeta = \sum_{i\in I}\zeta(i)\delta_i \in R\langle I\rangle.$$

Легко проверяется, что ϕ_* – морфизм левых R-модулей, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ R\langle I\rangle \arrow[rr, "\phi_*"'] & & M \end{tikzcd}$$

коммутативна и что морфизм ϕ_* единственный с таким свойством.

Обычно универсальный элемент $I \xrightarrow{\delta} R\langle I\rangle$ называют *каноническим свободным левым R-модулем*, порожденным множеством I. Левый R-модуль M называют *свободным левым R-модулем*, порожденным множеством I, если существует изоморфизм левых R-модулей $f\colon R\langle I\rangle \to M$, при этом образ $B = \operatorname{im}(f\circ\delta) \subset M$ называют *базисом модуля* M. Универсальность базиса B в том, что всякий элемент $x \in M$ имеет однозначное представление $x = \sum_{i\in I}\xi^i\cdot e_i$, где лишь конечное число коэффициентов $\xi^i = \xi^i(x) \in R$ ненулевые, базисные элементы $e_i = f(\delta_i) \in B$, и в том, что для того чтобы задать морфизм левых R модулей из M в произвольный левый R-модуль N, достаточно определить его на базисе B и дальше продолжить на весь M по R-линейности. Число элементов (конечное или бесконечное) базиса B называется *размерностью* свободного левого R-модуля M.

Пример 1.2.33. Само кольцо R, рассматриваемое как левый R-модуль относительно левого присоединенного действия (см. пример 1.2.17), является свободным с базисом, состоящим из одного элемента e – единицы кольца R. В более общей ситуации, $I = \{1,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, левый R-модуль R^n (см. пример 1.2.20) также свободный с базисом $\{e_1,\dots,e_n\}$, где e_k – столбец, у которого на k-м месте стоит единица $e \in R$, а на остальных местах – нули, $1 \leqslant k \leqslant n$. Таким образом левый R-модуль R^I – свободный для любого конечного множества I. Если же множество I бесконечное, то свободным является левый R-модуль R^I_{fin}, а модуль R^I может и не быть свободным.

Канонические свободные модули обладают следующим функториальным свойством. Пусть $\chi\colon I \to J$ – отображение множества I в множество J. Положим $\delta_\chi = (\delta_J \circ \chi)_*\colon R\langle I\rangle \to R\langle J\rangle$, тогда получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\delta_I"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\delta_J \circ \chi"] & R\langle I\rangle \arrow[d, "\delta_\chi"] \\
J \arrow[r, "\delta_J"'] & R\langle J\rangle
\end{tikzcd}$$

Легко проверяется, что правила $I \mapsto \delta_I$, $\chi \mapsto \delta_\chi$ определяют ковариантный функтор из категории множеств в категорию левых R-модулей.

Не все левые R-модули свободные, однако имеет место

Предложение 1.2.2. *Каждый левый R-модуль есть фактормодуль свободного левого R-модуля.*

Доказательство. Действительно, пусть M – левый R-модуль. Возьмем M в качестве базисного множества, и пусть $M \xrightarrow{\delta} R\langle M\rangle$ – соответствующий канонический свободный модуль. Тождественное отображение $M \xrightarrow{\mathrm{id}} M$ порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & R\langle M\rangle \arrow[rr, "\mathrm{id}_*"'] & & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где id_* – единственный морфизм левых R-модулей, отвечающий тождественному отображению id. По построению нижняя строка точная, так что $M = R\langle M\rangle / \ker f$ в силу следствия 1.2.1.

1.2.8. Тензорное произведение семейства модулей.

Пусть R – унитальное ассоциативное коммутативное кольцо.

Пусть $\{M_i \mid i \in I\}$ – семейство R-модулей и $\bigtimes M_i$ – его прямое произведение. Для каждого $k \in I$ обозначим через M^k подмодуль модуля $\bigtimes M_i$, состоящий из всех элементов $x = (x_i) \in \bigtimes M_i$, у которых компонента $x_k = 0$, и будем считать модуль M_k канонически вложенным в прямое произведение $\bigtimes M_i$. В этих обозначениях $\bigtimes M_i = M^k \oplus M_k$ для всех $k \in I$.

Пусть $f\colon \bigtimes M_i \to N$ – отображение прямого произведения $\bigtimes M_i$ в R-модуль N. Пусть $k \in I$. Для каждого $x^k \in M^k$ определим отображение $f_{x^k}\colon M_k \to N$ правилом $f_{x^k}(y_k) = f(x^k + y_k)$, $y_k \in M_k$. Отображение f называется R-линейным по k-й переменной, если отображение f_{x^k} R-линейное для всех $x^k \in M^k$, и R-полилинейным, если оно R-линейное по каждой переменной. Иначе говоря, отображение $f\colon \bigtimes M_i \to N$ есть R-полилинейное, если

$$f(x^k + (ay_k + bz_k)) = af(x^k + y_k) + bf(x^k + z_k)$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$. Обратим внимание, что корректное определение R-полилинейности возможно лишь для коммутативного кольца R.

В категории, объекты которой суть R-полилинейные отображения из $\bigtimes M_i$ в R-модули, а морфизмы из объекта $\bigtimes M_i \xrightarrow{f} N$ в объект $\bigtimes M_i \xrightarrow{g} P$ суть R-линейные отображения $N \xrightarrow{\phi} P$ из R-модуля N в R-модуль P, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \bigtimes M_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
N \arrow[rr, "\phi"'] & & P
\end{tikzcd}$$

существует универсальный отталкивающий объект, называемый *тензорным произведением семейства* $\{M_i \mid i \in I\}$. Действительно, пусть $R\langle \bigtimes M_i \rangle$ – свободный R-модуль, порожденный множеством $\bigtimes M_i$. Обозначим через J подмодуль модуля $R\langle \bigtimes M_i \rangle$, порожденный всеми элементами вида

$$(x^k + (ay_k + bz_k)) - a(x^k + y_k) - b(x^k + z_k)$$

с произвольными $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$, и рассмотрим фактормодуль $\bigotimes M_i = R\langle \bigtimes M_i \rangle / J$. Последовательность отображений

$$0 \longrightarrow \times M_i \xrightarrow{\delta} R\langle \times M_i \rangle \xrightarrow{\pi} \bigotimes M_i \longrightarrow 0$$

определяет R-полилинейное отображение

$$\varkappa = \pi \circ \delta\colon \times M_i \to \bigotimes M_i,$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\varkappa(x^k + (ay_k + bz_k)) &= (x^k + (ay_k + bz_k)) + J \\
&= a(x^k + y_k) + b(x^k + z_k) \\
&\qquad + [(x^k + (ay_k + bz_k)) - a(x^k + y_k) - b(x^k + z_k)] + J \\
&= (a(x^k + y_k) + J) + (b(x^k + z_k) + J) \\
&= a((x^k + y_k) + J) + b((x^k + z_k) + J) \\
&= a\varkappa(x^k + y_k) + b\varkappa(x^k + z_k)
\end{aligned}$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$. Для данного R-полилинейного отображения $f\colon \times M_i \to N$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & R\langle \times M_i \rangle \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f_*"] & \bigotimes M_i \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{f}"] & 0 \\
 & & \times M_i \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "f"'] & N &
\end{tikzcd}$$

где R-линейное факторотображение $\mathbf{f}$ действует по следующему правилу: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_*(x)$, $\mathbf{x} = x + J \in \bigotimes M_i$, R-линейное отображение f_* определено в силу универсальности R-модуля $R\langle \times M_i \rangle$, причем $f_*(x) = 0$ для любого $x \in J$ в силу R-полилинейности исходного отображения f. Действительно,

$$\begin{aligned}
&f_*((x^k + (ay_k + bz_k)) - a(x^k + y_k) - b(x^k + z_k)) \\
&\qquad = f(x^k + (ay_k + bz_k)) - af(x^k + y_k) - bf(x^k + z_k) = 0
\end{aligned}$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$, так что $f_* = 0$ на J, поскольку такие элементы порождают подмодуль J.

Таким образом, объект $\bigtimes M_i \xrightarrow{\varkappa} \bigotimes M_i$ обладает необходимой универсальностью и является тензорным произведением семейства $\{M_i \mid i \in I\}$. Обычно полагают $\varkappa((x_i)) = \bigotimes x_i$ для всякого $(x_i) \in \bigtimes M_i$, причем полилинейность отображения $\varkappa$ сводится к равенствам

$$\bigotimes(x^k + (ay_k + bz_k))_i = a \cdot (\bigotimes(x^k + y_k)_i) + b \cdot (\bigotimes(x^k + z_k)_i)$$

для всех $k \in I$, $x^k \in M^k$, $a, b \in R$, $y_k, z_k \in M_k$.

Пример 1.2.34. Для тензорного произведения $M \otimes N$ пары R-модулей имеем

$$(a'x' + a''x'') \otimes y = a'(x' \otimes y) + a''(x'' \otimes y),$$
$$x \otimes (a'y' + a''y'') = a'(x \otimes y') + a''(x \otimes y'')$$

для всех $a', a'' \in R$, $x, x', x'' \in M$, $y, y', y'' \in N$.

Пример 1.2.35. Пусть R^m, R^n – R-модули, $m, n \in \mathbb{N}$, (см. пример 1.2.33). Элементы тензорного произведения

$$R^m \otimes R^n = R^{m \times n}$$

суть прямоугольные $(m \times n)$-матрицы с элементами из кольца R. Это свободный R-модуль с базисом $\{e_{ik} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$, где e_{ik} – матрица, у которой на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит единица $e \in R$, а на остальных местах – нули. Отметим, кстати, что прямое произведение $R^m \times R^n = R^{m+n}$.

Пример 1.2.36. Предыдущий пример имеет очевидное обобщение. Именно, пусть M – конечномерный свободный R-модуль с базисом $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и N – такой же модуль с базисом $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Тогда их тензорное произведение $M \otimes N$ есть конечномерный свободный R-модуль с базисом $\{e_i \otimes g_k \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

По построению каждое R-линейное отображение $h\colon \bigotimes M_i \to N$ порождается единственным R-полилинейным отображением $f\colon \bigtimes M_i \to N$, именно $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$, так что R-линейные отображения из $\bigotimes M_i$ в данный R-модуль отождествляются с R-полилинейными отображениями из $\bigtimes M_i$ в этот модуль.

Следующие два предложения справедливы для произвольного семейства модулей, но ради простоты изложения приводятся для конечных семейств.

Предложение 1.2.3 (ассоциативность тензорного произведения). *Для всякой тройки R-модулей $\{M_1, M_2, M_3\}$ существуют единственные изоморфизмы*

$$M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \simeq \bigotimes\nolimits_i^3 M_i \simeq (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$$

такие, что $x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) \mapsto \bigotimes_{i=1}^3 x_i \mapsto (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3$ *для всех* $x_i \in M_i$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Для каждого $x_1 \in M_1$ определено R-билинейное отображение $f_{x_1}\colon M_2 \times M_3 \to M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$ правилом

$$(x_2, x_3) \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \quad \text{для всех} \quad x_i \in M_i,\ i = 2, 3,$$

и в силу универсальности тензорного произведения определено R-линейное отображение

$$\mathbf{f}_{x_1}\colon M_2 \otimes M_3 \to M_1 \otimes M_2 \otimes M_3,$$
$$x_2 \otimes x_3 \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \quad \text{для всех} \quad x_i \in M_i,\ i = 2, 3.$$

Следовательно, определено R-билинейное отображение

$$f\colon M_1 \times (M_2 \otimes M_3) \to M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$$

правилом

$$(x_1, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{f}_{x_1}(\mathbf{y}) \quad \text{для всех} \quad x_1 \in M_1,\ \mathbf{y} \in M_2 \otimes M_3,$$

и в силу универсальности тензорного произведения определено R-линейное отображение $\mathbf{f}\colon M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \to M_1 \otimes M_2 \otimes M_3$, обладающее требуемым свойством

$$x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3) \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3, \quad x_i \in M_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Легко проверяется, что этот морфизм является изоморфизмом. Единственность такого морфизма следует из того факта, что элементы вида $x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$ порождают модуль $M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$.

Аналогичным образом строится и второй изоморфизм.

Замечание. Поскольку тензорное произведение, как любой универсальный объект, определено с точностью до изоморфизма, можно считать, что

$$M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) = M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 = (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3.$$

Некоторые авторы, однако, называют тензорным произведением семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ именно модуль $\bigotimes M_i$, построенный выше, и в этом случае имеет место установленный в предложении 1.2.3 изоморфизм.

Предложение 1.2.4. *Пусть* $\{M_1, \ldots, M_n\}$ *– семейство R-модулей и* σ *– подстановка* $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. *Тогда существует единственный изоморфизм*

$$M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \simeq M_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\sigma(n)},$$

такой, что

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$$

для всех $x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$.

Доказательство. R-полилинейное отображение

$$f_\sigma \colon M_1 \times \cdots \times M_n \to M_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\sigma(n)},$$

заданное правилом

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \quad \text{для всех} \quad x_i \in M_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

в силу универсальности тензорного произведения определяет R-линейное отображение $\mathbf{f}_\sigma \colon M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \to M_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\sigma(n)}$ с требуемым свойством. Поскольку всякая подстановка индексов обратима, это изоморфизм. Единственность очевидна.

Тензорное произведение, как и прямая сумма и прямое произведение, обладает функториальными свойствами. Именно, пусть $\mathcal{LM}_R^I$ – введенная на с. 39 категория для данного ассоциативного кольца R и множества индексов I. Ковариантный функтор $\bigotimes$ из категории $\mathcal{LM}_R^I$ в категорию $\mathcal{LM}_R$ задается правилами:

$$\{M_i\} \mapsto \bigotimes M_i, \quad \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} \mapsto \bigotimes M_i \xrightarrow{\otimes f_i} \bigotimes N_i,$$

где $\bigotimes f_i$ – R-линейное отображение, порожденное R-полилинейным отображением

$$f = \varkappa \circ (\times f_i)\colon \times M_i \to \bigotimes N_i,$$

$\varkappa\colon \times N_i \to \bigotimes N_i$ – каноническое R-полилинейное отображение.

1.2.9. Дуальность. Пусть R – ассоциативное кольцо.

Пусть M, N – левые R-модули, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ – множество всех R-линейных отображений из M в N

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ a \in R,\ x \in M.$$

Как было отмечено выше, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ есть абелева группа с поточечным сложением

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ x \in M,$$

однако какой-либо естественной структурой R-модуля в общем случае группа $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ не обладает.

Аналогичным образом, пусть M, N – правые R-модули, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ – множество всех R-линейных отображений из M в N

$$f(xa) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ a \in R,\ x \in M.$$

Опять, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ есть абелева группа с поточечным сложением, не обладающая естественной структурой R-модуля.

Пусть теперь M – левый, а N – правый R-модули, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ – множество всех R-линейных отображений из M в N

$$f(ax) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ a \in R,\ x \in M.$$

Множество $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ по-прежнему является абелевой группой с поточечным сложением, более того, оно обладает естественной структурой правого R-модуля. Действительно, для каждой пары $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $a \in R$ определим аддитивное отображение $fa\colon M \to N$ поточечно

$$(fa)(x) = f(ax) \quad \text{для всех} \quad x \in M,$$

тогда

$$(fa)(bx) = f(abx) = f(x)(ab) = (f(x)a)b = (f(ax))b = (fa)(x)b$$

для всех $b \in R$, $x \in M$, так что $fa \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Аналогичным образом, пусть M – правый, а N – левый R-модули, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ – множество всех R-линейных отображений из M в N

$$f(xa) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ a \in R,\ x \in M.$$

Здесь абелева группа $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ обладает естественной структурой левого R-модуля с поточечным умножением

$$(af)(x) = f(xa) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ a \in R,\ x \in M.$$

Наиболее полезны два частных случая.

Пусть R – ассоциативное коммутативное кольцо. Левые и правые модули отличаются только формой записи, так что для любых R-модулей M и N множество $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ всех R-линейных отображений из M в N есть R-модуль с поточечным умножением

$$(af)(x) = f(ax) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ a \in R,\ x \in M$$

(используется левая запись).

Пусть R – ассоциативное кольцо (возможно, некоммутативное). Пусть M – левый R-модуль. Рассматривая R как правый R-модуль с правым присоединенным действием, наделяем абелеву группу $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ структурой правого R-модуля с поточечным умножением

$$(\phi a)(x) = \phi(ax) = \phi(x)a \quad \text{для всех} \quad \phi \in M^*,\ a \in R,\ x \in M.$$

Правый R-модуль M^* называется *дуальным* (иначе, *сопряженным*) *модулем* к левому R-модулю M. Заметим, что иногда для $\phi \in M^*$ и $x \in M$ вместо $\phi(x)$ пишут $\langle \phi, x\rangle$. Для каждого левого R-линейного отображения $f\colon M \to N$, где M, N – левые R-модули, *дуальное* (иначе, *сопряженное*) правое R-линейное отображение $f^*\colon N^* \to M^*$ определено правилом $f^*(\phi) = \phi \circ f$ для всех $\phi \in N^*$. Очевидно, композиция $g \circ f\colon M \to P$, где $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$, переходит в композицию $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon P^* \to M^*$, а тождественное отображение $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ переходит в тождественное отображение $\mathrm{id}_{M^*}\colon M^* \to M^*$,

$$(\mathrm{id}_M)^*(\phi) = \phi \circ \mathrm{id}_M = \phi \quad \text{для всех} \quad \phi \in M^*.$$

Таким образом, правило $M \mapsto M^*$, где M – левый R-модуль, $f \mapsto f^*$, где $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, определяет контравариантный *функтор дуальности*, отображающий категорию левых R-модулей в категорию правых R-модулей.

1.2.10. Градуировка. Говорят, что абелева группа G *градуирована абелевой группой* Γ (иначе, Γ-*градуирована*), если

$$G = \bigoplus G_\gamma = \bigoplus\nolimits_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$$

для некоторого семейства абелевых групп $\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (поясним, что абелевы группы суть $\mathbb{Z}$-модули, так что для них определены прямые суммы, прямые и тензорные произведения и так далее). В этом случае слагаемые G_γ называются *однородными степени* γ (иначе, γ-*однородными*) компонентами группы G. Пусть $G = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, $H = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$ – две Γ-градуированные абелевы группы, морфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ называется *однородным степени* γ (иначе, γ-*однородным*), $\gamma \in \Gamma$, если $f(a) \in H_{\alpha+\gamma}$ для всех $a \in G_\alpha \subset G$, $\alpha \in \Gamma$. Каждый морфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ разлагается на γ-однородные компоненты (другими словами, Γ-градуируется). Именно, для всякой пары $\alpha, \gamma \in \Gamma$ положим $f_{\gamma,\alpha} = \mathrm{pr}_{\alpha+\gamma} \circ f \circ \iota_\alpha \colon G_\alpha \to H$ (см. предложение 1.2.1), тогда в силу универсальности суммы для любого $\gamma \in \Gamma$ существует единственный морфизм $f_\gamma \colon G \to H$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f_\gamma"] & & H \\ & G_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"] \arrow[ur, "f_{\gamma,\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

для всех $\alpha \in \Gamma$. Легко проверяется, что морфизмы f_γ суть γ-однородные, корректно определена сумма $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ и $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma = f$ (в случае конечной градуирующей группы Γ проблем с определением $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ вообще нет, поскольку $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ есть абелева группа, а если группа Γ бесконечная, то для всякого $x \in G$ образ $f_\gamma(x) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов $\gamma \in \Gamma$).

Таким образом, для каждой абелевой группы Γ определена категория $\mathcal{AG}_\Gamma$, объекты которой суть Γ-градуированные абелевы группы, а морфизмы суть Γ-градуированные аддитивные отображения, причем $\mathcal{AG}_\Gamma$ есть полная подкатегория категории $\mathcal{AG}$. Отметим, что по группе Γ можно построить еще одну категорию, объекты которой суть Γ-градуированные абелевы группы, а морфизмы суть 0-однородные (иначе, *однородные*) морфизмы Γ-градуированных абелевых групп. В приложениях используются обе возможности.

Пример 1.2.37. Каждая абелева группа G тривиально градуирована любой абелевой группой группой Γ, $G = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, где $G_0 = G$, $G_\gamma = 0$ при $\gamma \neq 0$.

Пример 1.2.38. Наиболее часто в качестве градуирующей группы используется группа целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае,

$G = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} G_n$. Очень часто $G_n = 0$ для $n < 0$, так что фактически $G = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n$, и в этом случае группа G называется $\mathbb{Z}_+$*-градуированной.*

Пример 1.2.39. Более детальная градуировка получается, если градуировать группой

$$\mathbb{Z}^D = \times^D \mathbb{Z} = \{n = (\nu^1, \dots, \nu^D) \mid \nu^i \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant d\}, \qquad D \in \mathbb{N}.$$

Пример 1.2.40. Весьма популярная градуирующая группа есть факторгруппа $\mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Именно, абелева группа G $\mathbf{Z}_2$-градуирована, если $G = G_{\mathbf{0}} \bigoplus G_{\mathbf{1}}$, где классы эквивалентности $\mathbf{0} = 0 + 2\mathbb{Z}$, $\mathbf{1} = 1 + 2\mathbb{Z}$, $G_{\mathbf{0}}$ и $G_{\mathbf{1}}$ – *четная* и *нечетная* подгруппы соответственно. В теоретической физике $\mathbf{Z}_2$-градуированные объекты обычно называют *суперобъектами*, а $\mathbf{Z}_2$-градуированные теории – *супертеориями.*

Пусть Γ – абелева группа. Говорят, что кольцо R *градуировано абелевой группой* Γ (другими словами, Γ*-градуировано*), если оно Γ-градуировано как абелева группа, $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$, для некоторого семейства абелевых групп $\{R_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $a \cdot b \in R_{\alpha+\beta}$ для любых $a \in R_\alpha$, $b \in R_\beta$ (т.е. $R_\alpha \cdot R_\beta \subset R_{\alpha+\beta}$), $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $R = \bigoplus R_\gamma$, $S = \bigoplus S_\gamma$ – два Γ-градуированных кольца, и пусть $f = \sum f_\gamma \colon R \to S$ – морфизм абелевых групп, Γ-градуированный семейством однородных морфизмов $\{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Легко проверяется, что γ-однородная компонента f_γ может быть ненулевым кольцевым морфизмом лишь при $\gamma = 0$. Учитывая этот факт, морфизм f называется *морфизмом* Γ*-градуированных колец*, если он *однородный* (точнее, 0-однородный), т.е. $f(a) \in S_\alpha$ для всех $a \in R_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$. Таким образом, определена категория Γ-градуированных колец $\mathcal{R}_\Gamma$, объекты которой суть Γ-градуированные кольца, а морфизмы – морфизмы Γ-градуированных колец.

Пусть Γ – абелева группа, $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ – ассоциативное Γ-градуированное кольцо. Говорят, что левый R-модуль M *градуирован абелевой группой* Γ (другими словами, Γ*-градуирован*), если он Γ-градуирован как абелева группа, $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ для некоторого семейства абелевых групп $\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $a \cdot x \in M_{\alpha+\beta}$ для всех $a \in R_\alpha$, $x \in M_\beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $M = \bigoplus M_\gamma$, $N = \bigoplus N_\gamma$ – два Γ-градуированных левых R-модуля, R-линейное отображение $f \colon M \to N$ называется *однородным степени* γ (иначе, γ*-однородным*), $\gamma \in \Gamma$, если $f(x) \in M_{\alpha+\gamma}$ для всех $x \in M_\alpha$,

$\alpha \in \Gamma$. Всякое R-линейное отображение $f\colon M \to N$ разлагается на однородные компоненты (другими словами, Γ-*градуируется*). Именно, представление $f = \sum f_\gamma$ строится по тем же правилам, что и в категории Γ-градуированных абелевых групп, следует лишь проверить, что аддитивные отображения f_γ в данном случае R-линейные.

Таким образом, определена категория Γ-градуированных левых R-модулей, объекты которой суть Γ-градуированные левые R-модули, а морфизмы суть Γ-градуированные R-линейные отображения, причем эта категория есть полная подкатегория категории левых R-модулей.

Подмодуль $N \subset M$, где $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ есть Γ-градуированный левый R-модуль, называется Γ-*градуированным*, если

$$N = \bigoplus\nolimits_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma,$$

причем $N_\gamma = N \cap M_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Пусть R – Γ-градуированное унитальное ассоциативное коммутативное кольцо. Тензорное произведение $\bigotimes M_i$ всякого семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ Γ-градуированных R-модулей,

$$M_i = \bigoplus\nolimits_{\gamma_i\in\Gamma} M_{i,\gamma_i},$$

обладает естественной Γ-градуировкой. Действительно,

$$\bigotimes M_i = \bigotimes\nolimits_{i\in I}\Bigl(\bigoplus\nolimits_{\gamma_i\in\Gamma} M_{i,\gamma_i}\Bigr) = \bigoplus\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\Bigl(\bigotimes M_i\Bigr)_\gamma,$$
$$\Bigl(\bigotimes M_i\Bigr)_\gamma = \bigoplus\nolimits_{\sum_{i\in I}\gamma_i=\gamma}\Bigl(\bigotimes M_{i,\gamma_i}\Bigr).$$

Пример 1.2.41. Для пары модулей

$$M = \bigoplus\nolimits_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha, \quad N = \bigoplus\nolimits_{\beta\in\Gamma} N_\beta$$

имеем

$$M\otimes N = \bigoplus\nolimits_{\gamma\in\Gamma}(M\otimes N)_\gamma, \quad (M\otimes N)_\gamma = \bigoplus\nolimits_{\alpha+\beta=\gamma}(M_\alpha\otimes N_\beta).$$

Подробнее смотри, например, [20], [21].

1.3. Линейные пространства

1.3.1. Поля. Пусть R – унитальное кольцо и $a \in R$. Элемент $b \in R$ называется *левым обратным* к a, если $b \cdot a = e$, элемент $c \in R$ называется *правым обратным* к a, если $a \cdot c = e$, элемент $a^{-1} \in R$ называется *обратным* к a, если он и левый, и правый обратный к a, т.е. если $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. В последнем случае элемент a является обратным к a^{-1}. Унитальное кольцо, в котором $e \neq 0$ и всякий ненулевой элемент имеет обратный, называется *кольцом с делением* или *телом*. Ассоциативное коммутативное кольцо с делением называется *полем*. Подчеркнем, что всякое поле содержит, по крайней мере два элемента, а именно 0 и e. Говорят, что поле $\mathbb{F}$ имеет *характеристику нуль*, если $n\lambda \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$. Основные поля, используемые в математической физике, суть поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, другие важные поля – поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, где p – простое число. Все эти поля имеют нулевую характеристику. Из полей с ненулевой характеристикой отметим поле $\mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Отметим, что в приложениях поля ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и им подобные) как правило не градуируются, точнее наделяются тривиальной градуировкой (см. пример 1.2.37).

1.3.2. Линейные пространства. Пусть $\mathbb{F}$ поле. Всякий $\mathbb{F}$-модуль называется $\mathbb{F}$-*линейным пространством* (иначе, *линейным пространством над* $\mathbb{F}$, используется также термин *векторное пространство*).

Очевидно, определена категория $\mathbb{F}$-линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть $\mathbb{F}$-линейные пространства, а морфизмы суть $\mathbb{F}$-линейные отображения.

Простейшее линейное пространство есть нулевое пространство, оно является одновременно универсальным отталкивающим и притягивающим объектом в категории $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. Простейшее ненулевое линейное пространство есть поле $\mathbb{F}$.

Хотя линейные пространства – это модули специального вида, они заслуживают индивидуального рассмотрения, поскольку являются возможно самым популярными объектами математической физики. С чисто математической точки зрения они также играют особую роль в силу следующего их свойства.

Предложение 1.3.1. *Всякое ненулевое линейное пространство свободное, т.е. обладает базисом.*

Доказательство этого утверждения опирается на лемму Цорна (см., например, [20]). В частности, оно неконструктивное, для многих бесконечномерных пространств в явном виде базис неизвестен.

Нулевое пространство базиса не имеет, поле $\mathbb{F}$ как линейное пространство – одномерное, в качестве базиса можно взять любой ненулевой элемент, например единицу $e \in \mathbb{F}$.

В категории линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ определены все конструкции и справедливы все результаты, установленные в категории левых R-модулей, такие как прямые произведения и суммы, тензорные произведения и так далее.

Линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ градуируются как модули над кольцом $\mathbb{F}$, с учетом того факта, что кольцо $\mathbb{F}$ тривиально градуировано.

1.3.3. Топологические линейные пространства. Практически все линейные пространства, используемые в математической физике, являются топологическими, сочетая алгебраические и аналитические свойства. Это позволяет привлекать в математическую физику, наряду с алгебраическим аппаратом, методы анализа, включая функциональный анализ. Поскольку теория топологических линейных пространств безграничная и требует специального рассмотрения, я ограничусь здесь основными определениями, с целью фиксации терминологии.

Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем выделено семейство подмножеств $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$, называемых *открытыми*, удовлетворяющее условиям:

- $\star$ пустое подмножество $\varnothing \in \mathcal{T}$,
- $\star$ само множество $X \in \mathcal{T}$,
- $\star$ объединение $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ для любого семейства $\{U_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\}$,
- $\star$ пересечение $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ для любого конечного семейства $\{U_i \in \mathcal{T} \mid i \in I\}$.

Пусть X, Y – топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если

$$\text{прообраз } f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \in \mathcal{T}_X \text{ для любого } V \in \mathcal{T}_Y.$$

Определена категория *топологических пространств*, объекты которой суть топологические пространства, а морфизмы – непрерывные отображения.

Пусть X – топологическое пространство. Подмножество $S \subset X$ называется *окрестностью точки* $x \in X$, если существует $U \in \mathcal{T}$ такое, что $x \in U \subset S$. Говорят, что последовательность $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset X$ *сходится*, если существует $x \in X$ такое, что для любой окрестности S точки x существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_i \in S$ для всех $i > N$. В этом случае элемент x называется *пределом* последовательности $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, пишут $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ и говорят, что последовательность $\{x_i\}$ *сходится к* x.

Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное поле. Множество L называется *топологическим линейным пространством над* $\mathbb{F}$, если оно наделено структурами топологического и линейного пространства над $\mathbb{F}$ одновременно, причем эти структуры согласованы, т.е. сложение $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \in L \times L$, и умножение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $(\lambda, x) \in \mathbb{F} \times L$, непрерывны. Определена категория *топологических линейных пространств* $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть топологические линейные пространства, а морфизмы – непрерывные линейные отображения.

Важное преимущество топологических линейных пространств перед просто линейными в том, что в топологических пространствах можно рассматривать не только конечные линейные комбинации, но и сходящиеся ряды. Подробнее, пусть L – топологическое линейное пространство. Ряд $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ с членами $x_i \in L$ называется *сходящимся*, если сходится его последовательность частичных сумм $\{\sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $\sigma_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$. В этом случае говорят, что ряд $\sum x_i$ сходится к $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \in L$, или что сумма ряда $\sum x_i$ равна σ, и пишут $\sum x_i = \sigma$.

Возможность рассматривать суммы счетного числа слагаемых приводит к понятию топологического базиса. Вопрос этот достаточно сложный, и я изложу его в простейшей интерпретации. Именно, последовательность $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset L$ называется *топологическим базисом* топологического линейного пространства L, если для всякого $x \in L$ существует единственная последовательность коэффициентов $\{\lambda_i \in \mathbb{F} \mid i \in \mathbb{N}\}$ такая, что $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i$. Таким образом, у всякого топологического линейного пространства, кроме алгебраического базиса, всегда существующего, но, возможно, неконструктивного, может существовать и топологический базис. Отметим, что вопрос о существовании топологического базиса для для важных классов топологических пространств до конца не изучен, что побуждает использовать альтернативные подходы к базису и развивать теории, не использующие понятия базиса (см., например, [26], [11]). Топологических проблем не возникает, если линейное пространство *конечномерное*, т.е. если его алгебраический базис конечный, поскольку в этом случае единственная разумная топология – евклидова, а все линейные отображения из одного конечномерного пространства в другое конечномерное пространство – непрерывные. Более того, как известно из курса линейной алгебры, все линейные пространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$ изоморфны друг другу и каноническому арифметическому пространству $\mathbb{F}^n$, состоящему из столбцов высотой n с элементами из поля $\mathbb{F}$. В свою очередь, линейные отображения из $\mathbb{F}^n$ в $\mathbb{F}^m$ суть прямоугольные матрицы размером $m \times n$ с элементами из $\mathbb{F}$.

В категории топологических линейных пространств $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ всякий изоморфизм является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом, обратное в общем случае неверно, поскольку обратное отображение, хотя оно определено и линейно, не обязано быть непрерывным.

В категории топологических линейных пространств $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ определены прямое произведение, прямая сумма и тензорное произведение произвольного семейства $\{L_i \mid i \in I\} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$, причем теми же правилами, что и в категории линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. При этом, прямое произведение $\times\, L_i$ наделяется слабейшей топологией, в которой все проекции π_i непрерывные, а прямая сумма $\bigoplus L_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции ι_i непрерывные. Вложение $\bigoplus L_i \subset \times\, L_i$ всегда непрерывное, а если семейство $\{L_i \mid i \in I\}$ конечное, то $\bigoplus L_i = \times\, L_i$ как топологические линейные пространства. При построении категории, характеризующей тензорное произведение возникает вопрос о непрерывности полилинейных отображений $f\colon \times\, L_i \to M$, $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$. Имеются две основные возможности: (а) полилинейное отображение f непрерывно в категории топологических пространств $\mathcal{T}$ (f непрерывно по совокупности переменных), в этом случае каждое из линейных отображений $f_{x^k}\colon L_k \to M$, $x^k \in L^k$, непрерывно; (б) для всякого $x^k \in L^k$ линейное отображение $f_{x^k}\colon L_k \to M$ непрерывно (f непрерывно по каждой переменной в отдельности), в этом случае полилинейное отображение f не обязано быть непрерывным по совокупности переменных (хотя есть широкий класс топологических линейных пространств, так называемых *ядерных пространств*, где это имеет место, см., например, [25]), [31], [32]. Имеются и другие возможности, см., например, [26], [3], [31], [32]. Пусть выбрано конкретное определение полилинейной непрерывности. Топологическое тензорное произведение (как универсальный объект соответствующей топологической категории) получают из алгебраического $\{\bigotimes L_i, \varkappa\}$, наделяя линейное пространство $\bigotimes L_i$ сильнейшей топологией, при которой полилинейное отображение $\varkappa$ непрерывно (в выбранном смысле). Полученное таким образом топологическое линейное пространство $\bigotimes L_i$ (сохраняется старое обозначение), как правило, неполное, что неудобно в приложениях, и его еще приходится пополнять. Пополненное пространство обычно обозначается через $\widehat{\bigotimes} L_i$. Ситуация существенно упрощается, если алгебраическое тензорное произведение удается вложить в подходящее топологическое линейное пространство и затем в качестве топологического тензорного произведения использовать замыкание алгебраического тензорного произведения в топологии объемлющего пространства.

Пример 1.3.1. Пусть $\mathcal{C}(T)$ – банахово линейное пространство всех непрерывных функций на отрезке $T = [0, 1]$ с нормой

$$\|\phi\| = \max_{t \in T} |\phi(t)|, \quad \phi \in \mathcal{C}(T).$$

Алгебраический тензорный квадрат

$$\otimes^2 \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T) \otimes \mathcal{C}(T)$$

состоит из всех функций на квадрате $T^2 = T \times T$ вида

$$f(s,t) = \sum_{\alpha=0}^{n} \phi_\alpha(s)\psi_\alpha(t), \quad \phi_\alpha, \psi_\alpha \in \mathcal{C}(T), \quad s, t \in T, \quad n = n(f).$$

Очевидно, $\otimes^2 \mathcal{C}(T)$ плотно вкладывается в банахово пространство $\mathcal{C}(T^2)$ всех непрерывных функций двух переменных на квадрате T^2. Его замыкание $\widehat{\otimes}^2 \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T^2)$ можно рассматривать как топологический квадрат банахова пространства $\mathcal{C}(T)$. В качестве упражнения предлагается подумать об универсальности такого тензорного произведения.

Топологических трудностей не возникает при построении тензорных произведений конечномерных линейных пространств.

Пример 1.3.2. Пусть M и N – два конечномерных линейных пространства с базисами $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset M$ и $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset N$

соответственно. Тогда их тензорное произведение (алгебраическое и топологическое) есть линейное пространство $M \otimes N$ с базисом $\{a_i \otimes b_k \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. В частности, $\dim(M \otimes N) = \dim M \cdot \dim N = mn$.

Подробнее смотри, например, [20], [26], [11], [25].

1.4. Алгебры

1.4.1. Алгебры. Алгебры над линейными пространствами определяются точно так же, как кольца над абелевыми группами.

Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное поле. Линейное пространство A над полем $\mathbb{F}$ называется $\mathbb{F}$-*алгеброй* (иначе, *алгеброй над полем* $\mathbb{F}$), если в нем определена $\mathbb{F}$-билинейная операция – *умножение*

$$A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех} \quad a, b \in A,$$

так что

- ⋆ $a \cdot (\lambda \cdot b + \mu \cdot c) = \lambda \cdot (a \cdot b) + \mu \cdot (a \cdot c)$,
- ⋆ $(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) \cdot c = \lambda \cdot (a \cdot c) + \mu \cdot (b \cdot c)$

для всех $a, b, c \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Определена *категория алгебр* $\mathcal{AL} = \mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть алгебры (над $\mathbb{F}$), а морфизмы из алгебры A в алгебру B – линейные (подробнее, $\mathbb{F}$-линейные) отображения $f\colon A \to B$ такие, что $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ для всех $a, b \in A$.

По определению умножение $\cdot$ есть билинейная операция в линейном пространстве $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, поэтому согласно универсальному свойству тензорного произведения существует единственное линейное отображение $\mu = \mu_A\colon A \otimes A \to A$ такое, что $a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ для всех $a, b \in A$. Преимущество такого определения в том, что мы остаемся в категории линейных пространств над $\mathbb{F}$ и можем использовать все ее возможности. Так линейное отображение $f\colon A \to B$, где A и B – алгебры, является морфизмом алгебр, если $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$, т.е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \otimes B \arrow[r, "\mu_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Алгебра A называется *унитальной*, если в ней есть элемент *единица* $e = e_A \in A$ такой, что $a \cdot e = e \cdot a = a$ для всех $a \in A$. Другими словами, существует линейное отображение $\varepsilon = \varepsilon_A \colon \mathbb{F} \to A$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \otimes A \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] & A \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, equal] & A \otimes \mathbb{F} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Конечно, $\varepsilon(1) = e$ для единицы $1 \in \mathbb{F}$ (поясним, что $\mathrm{id} = \mathrm{id}_A$ – тождественное отображение в A, и обратим внимание, что $\mathbb{F} \otimes L = L = L \otimes \mathbb{F}$ для любого линейного пространства L над $\mathbb{F}$). Морфизм f из унитальной алгебры A в унитальную алгебру B называется *унитальным*, если $f(e_A) = f(e_B)$, т.е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{F} \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Требование унитальности алгебры A во многих ситуациях несущественно, поскольку всякая неунитальная алгебра имеет *унитальное расширение*. Действительно, пусть алгебра A не имеет единицы. Обозначим через $\widehat{A} = \mathbb{F} \oplus_{\mathbb{F}} A$ прямую сумму двух линейных пространств над $\mathbb{F}$ с элементами $(\lambda, a) = \lambda e + a$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in A$, где $e = (1, 0) \in \widehat{A}$, $a = (0, a) \in \widehat{A}$, и покомпонентными линейными операциями

$$\alpha(\lambda e + a) + \beta(\mu e + b) = (\alpha\lambda + \beta\mu)e + (\alpha a + \beta b)$$

для всех $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a, b \in A$. Введем в линейном пространстве $\widehat{A}$ умножение таким образом, чтобы элемент e стал единицей, а алгебра A стала подалгеброй алгебры $\widehat{A}$. Именно, положим

$$(\lambda e + a) \cdot (\mu e + b) = (\lambda\mu)e + (\mu a + \lambda b + a \cdot b)$$
$$\text{для всех} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ a, b \in A.$$

Легко проверяется, что при таком определении все аксиомы умножения и наши пожелания выполнены. Таким образом, $\widehat{A}$ есть унитальное расширение алгебры A.

Алгебра A называется *коммутативной*, если

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{для всех} \quad a, b \in A.$$

На языке диаграмм это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

где перестановка σ задается правилом $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a, b \in A$. Алгебра A называется *ассоциативной*, если

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{для всех} \quad a, b, c \in A.$$

На языке диаграмм это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] & & A \\ & A \otimes A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

В случае ассоциативного умножения вместо $a \cdot b$ обычно пишут ab.

Алгебра A называется *алгеброй Ли*, если справедливы равенства

- $\star$ $a \cdot b + b \cdot a = 0$ для всех $a, b \in A$ (антикоммутативность),
- $\star$ $a \cdot (b \cdot c) + b \cdot (c \cdot a) + c \cdot (a \cdot b) = 0$ для всех $a, b, c \in A$ (тождество Якоби).

В алгебрах Ли вместо $a \cdot b$ обычно пишут $[a, b]$ и операцию умножения называют *скобкой Ли*.

Линейное подпространство $B \subset A$ называется *подалгеброй* алгебры A, если оно замкнуто относительно умножения, т.е.

$$a \cdot b \in B \quad \text{для всех} \quad a, b \in B.$$

Линейное подпространство $J \subset A$ называется *левым* (*правым*) *идеалом* алгебры A, если

$$a \cdot b \in J \quad (b \cdot a \in J) \quad \text{для всех} \quad a \in A, \ b \in J.$$

Линейное подпространство J называется *идеалом* (подробнее, *двусторонним идеалом*) алгебры A, если J есть левый и правый идеал одновременно. Подмножество

$$\operatorname{cen} A = \{a \in A \mid a \cdot b = b \cdot a \text{ для всех } b \in A\}$$

называется *центром* алгебры A, а подмножество

$$\operatorname{ann} A = \{a \in A \mid a \cdot b = b \cdot a = 0 \text{ для всех } b \in A\} \subset \operatorname{cen} A$$

называется *аннулятором* алгебры A. Ясно, что $\operatorname{cen} A$ – подалгебра алгебры A, а $\operatorname{ann} A$ – ее идеал. Если A – алгебра Ли, то $\operatorname{cen} A = \operatorname{ann} A$.

Пусть B – линейное подпространство алгебры A, так что определено линейное факторпространство A/B. Если B – идеал алгебры A, то A/B – алгебра, где умножение индуцировано из A, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b + B \in A/B$ для всех $\mathbf{a} = a + B$, $\mathbf{b} = b + B \in A/B$.

Для всякого $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AL}}(A, B)$ ядро $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ есть идеал алгебры A, а образ $\operatorname{im} f = \{b = f(a) \in B \mid a \in A\}$ есть подалгебра алгебры B.

Алгебра A называется *топологической*, если A – топологическое линейное пространство и умножение непрерывно, причем имеется две основных возможности: (а) умножение раздельно непрерывно (т.е. непрерывно по каждому сомножителю при фиксированном другом), (б) умножение совместно непрерывно (т.е. непрерывно как отображение топологического пространства $A \times A$ в топологическое пространство A). В приложениях используются обе возможности, хотя как правило предполагается, что умножение раздельно непрерывно. Морфизм топологической алгебры A в топологическую алгебру B называется *непрерывным*, если он непрерывен как отображение топологического пространства A в топологическое пространство B. Таким образом, определена категория *топологических алгебр* $\mathcal{TAL} = \mathcal{TAL}_{\mathbb{F}}$ (см., например, [24]).

Пример 1.4.1. Поле $\mathbb{F}$ есть простейшая нетривиальная алгебра, причем унитальная ассоциативная и коммутативная.

Пример 1.4.2. Множество $\mathbf{M}(D, \mathbb{F})$ всех квадратных матриц порядка D с элементами из $\mathbb{F}$ есть унитальная ассоциативная алгебра с обычными алгебраическими операциями.

Пример 1.4.3. Множество $\mathfrak{sl}(D,\mathbb{F})=\{a\in\mathbf{M}(D,\mathbb{F})\mid \mathrm{tr}(a)=0\}$ всех матриц из $\mathbf{M}(D,\mathbb{F})$ с нулевым следом ($\mathrm{tr}(a)$ – след матрицы a) есть алгебра Ли над $\mathbb{F}$ с коммутатором $[a,b]=ab-ba$ для $a,b\in\mathfrak{sl}(D,\mathbb{F})$ в качестве скобки.

Пример 1.4.4. Множество $\mathfrak{u}(D,\mathbb{C})=\{a\in\mathbf{M}(D,\mathbb{C})\mid a^+=-a\}$ всех косоэрмитовых матриц из $\mathbf{M}(D,\mathbb{F})$ ($a^+=\bar{a}'$ – эрмитово сопряжение, где черта "$\bar{\ }$" – комплексное сопряжение, штрих "$'$" – транспонирование) есть алгебра Ли над $\mathbb{R}$ с коммутатором в качестве скобки Ли.

Пример 1.4.5. Пусть S – множество, A – алгебра, тогда множество A^S всех отображений из S в A есть алгебра с поточечными алгебраическими операциями

$$(\lambda\phi+\mu\psi)(s)=\lambda\phi(s)+\mu\psi(s),\quad (\phi\cdot\psi)(s)=\phi(s)\cdot\psi(s)$$

для всех $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, $\phi,\psi\in A^S$, $s\in S$. Алгебра A^S наследует свойства алгебры A такие, как унитальность, ассоциативность, коммутативность, Ли (скобка Ли переходит в скобку Ли).

1.4.2. Стандартные конструкции. Пусть $\mathbb{F}$ – поле. При переходе из категории $\mathbb{F}$-линейных пространств (как $\mathbb{F}$-модулей) в категорию алгебр над полем $\mathbb{F}$ многие конструкции сохраняются, с заменой $\mathbb{F}$-линейных отображений (т.е. морфизмов категории $\mathbb{F}$-линейных пространств) на морфизмы категории алгебр над $\mathbb{F}$.

Прямые произведения и прямые суммы. Прямое произведение $\bigtimes A_i=\bigtimes_{i\in I}A_i$ семейства алгебр $\{A_i\mid i\in I\}$ есть его прямое произведение как семейства линейных пространств, с покомпонентным умножением, $(a_i)\cdot(b_i)=(a_i\cdot b_i)$, $(a_i),(b_i)\in\bigtimes A_i$, а для данного семейства морфизмов алгебр $\{B\xrightarrow{f_i}A_i\}$ морфизм $B\xrightarrow{f}\bigtimes A_i$ действует по правилу $f(x)=(a_i=f_i(x))$ для всех $x\in B$. Аналогичным образом, прямая сумма $\bigoplus A_i=\bigoplus_{i\in I}A_i$ семейства алгебр $\{A_i\mid i\in I\}$ есть его прямая сумма как семейства линейных пространств, с покомпонентным умножением, $(a_i)\cdot(b_i)=(a_i\cdot b_i)$ для всех $(a_i),(b_i)\in\bigoplus A_i$. Для данного семейства морфизмов алгебр $\{A_i\xrightarrow{f_i}B\}$ морфизм $\bigoplus A_i\xrightarrow{f}B$ действует по правилу $f((a_i))=\sum_{i\in I}f_i(a_i)$ для всех $(a_i)\in\bigoplus A_i$. Заметим, что прямая сумма $\bigoplus_{i\in I}A_i$ есть идеал прямого произведения $\bigtimes_{i\in I}A_i$, причем собственный, если семейство $\{A_i\mid i\in I\}$ бесконечное.

Тензорные произведения. *Тензорное произведение семейства алгебр* $\{A_i \mid i \in I\}$ с умножениями $\mu_i \colon A_i \otimes A_i \to A_i$, $i \in I$, определяется как тензорное произведение $\bigotimes A_i = \bigotimes_{i \in I} A_i$ соответствующих линейных пространств, снабженное умножением $\mu_\otimes \colon (\bigotimes_{i\in I} A_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I} A_i) \to \bigotimes_{i\in I} A_i$ таким, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\bigotimes_{i\in I} A_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I} A_i) \arrow[rr, "\mu_\otimes"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \bigotimes_{i\in I} A_i \\
& \bigotimes_{i\in I}(A_i \otimes A_i) \arrow[ur, "\bigotimes \mu_i"'] &
\end{tikzcd}$$

т.е. $\mu_\otimes = (\bigotimes \mu_i) \circ \sigma$, где перестановка σ – линейное отображение задаваемое правилом $\sigma((\bigotimes_{i\in I} a_i) \otimes (\bigotimes_{i\in I} b_i)) = \bigotimes_{i\in I}(a_i \otimes b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \bigtimes A_i$. Можно проверить, что умножение в $\bigotimes A_i$ задается правилом

$$(\bigotimes_{i\in I} a_i) \cdot (\bigotimes_{i\in I} b_i) = \bigotimes_{i\in I}(a_i \cdot b_i) \quad \text{для всех} \quad (a_i), (b_i) \in \bigtimes A_i.$$

В категории алгебр тензорное произведение сохраняет те же свойства, что и в категории линейных пространств, разумеется, с естественными модификациями. Предлагается рассмотреть их в качестве упражнения.

Присоединенная алгебра Ли. Пусть A – алгебра. Для каждой пары элементов $a, b \in A$ определен *коммутатор*

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \in A.$$

Условие антикоммутативности скобки Ли, очевидно, выполняется. Тождество Якоби также будет выполняться, если алгебра A ассоциативная. Таким образом, для каждой ассоциативной алгебры A определена *присоединенная алгебра Ли* $\mathrm{as}A$, которая совпадает с A как линейное пространство, а в качестве скобки Ли берется коммутатор.

Пример 1.4.6. Пусть L – линейное пространство и $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ – линейное пространство всех его эндоморфизмов. Взяв в качестве умножения композицию эндоморфизмов ($\mu(f \otimes g) = f \circ g$ для всех $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$), превратим $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ в унитальную ассоциативную алгебру с тождественным отображением в качестве единицы. Ее присоединенная $\mathfrak{gl}(L) = \operatorname{as}\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(L)$ есть алгебра Ли всех эндоморфизмов (иногда говорят *линейных преобразований*) линейного пространства L.

1.4.3. Градуировка. Пусть Γ – абелева группа. Говорят, что алгебра A *градуирована абелевой группой* Γ (другими словами, Γ-*градуирована*), если она Γ-градуирована как линейное пространство, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, для некоторого семейства линейных пространств $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $a \cdot b \in A_{\alpha+\beta}$ для любых $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ (т.е. $A_\alpha \cdot A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$), $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $A = \bigoplus A_\gamma$, $B = \bigoplus B_\gamma$ – две Γ-градуированные алгебры, и пусть $f = \sum f_\gamma \colon A \to B$ – линейное отображение, Γ-градуированное семейством линейных отображений $\{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Легко проверяется, что γ-однородная компонента f_γ может быть ненулевым морфизмом алгебр лишь при $\gamma = 0$. Учитывая этот факт, морфизм f называется *морфизмом* Γ-*градуированных алгебр*, если он *однородный* (точнее, 0-однородный). Таким образом, определена категория Γ-градуированных алгебр $\mathcal{AL}_{\mathbb{F},\Gamma}$, объекты которой суть Γ-градуированные алгебры, а морфизмы – морфизмы Γ-градуированных алгебр. Благодаря наличию градуировки в категории $\mathcal{AL}_{\mathbb{F},\Gamma}$ появляются новые возможности.

Назовем *градуирующим множителем*, ассоциированным с градуировкой Γ, всякое отображение $\chi = \chi_\Gamma \colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{F}$ такое, что

$\star$ $\chi(\alpha,\beta)\chi(\beta,\alpha) = 1$ для всех $\alpha, \beta \in \Gamma$,

$\star$ $\chi(\alpha+\beta,\gamma) = \chi(\alpha,\gamma)\chi(\beta,\gamma)$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$

(проверить, что в этом случае и $\chi(\alpha,\beta+\gamma) = \chi(\alpha,\beta)\chi(\alpha,\gamma)$).

Пример 1.4.7. Для тривиальной градуировки $\Gamma = 0$ есть только одна возможность $\chi(0,0) = 1$.

Пример 1.4.8. Для популярной градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}$ есть две возможности

$$\begin{aligned} &\chi(m,n) = 1 && \text{для всех} \quad m,n \in \mathbb{Z},\\ &\chi(m,n) = (-1)^{mn} && \text{для всех} \quad m,n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пример 1.4.9. Для градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}^D$, $D \in \mathbb{N}$, градуирующие множители имеют вид

$$\chi(m,n) = \prod_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant D} (q_{\alpha\beta})^{\mu_\alpha\nu_\beta} \quad \text{для всех} \quad m,n \in \mathbb{Z}^D,$$

где $D \times D$-матрица $q = \|q_{\alpha\beta}\|$, $q_{\alpha\beta} \in \mathbb{F}$, такая, что $q_{\alpha\beta}q_{\beta\alpha} = 1$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant D$ (поясним, что $m = (\mu_1, \ldots, \mu_D)$, $n = (\nu_1, \ldots, \nu_D)$).

Пример 1.4.10. Для градуировки $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ опять есть две возможности

$$\chi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 1 \qquad \text{для всех} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Z}_2,$$
$$\chi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1)^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Z}_2,$$

поясним что $\boldsymbol{\alpha} = \alpha + 2\mathbb{Z}$, $\boldsymbol{\beta} = \beta + 2\mathbb{Z}$, $\alpha, \beta = 0, 1$, так что $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = \alpha\beta + 2\mathbb{Z}$ и выражение $(-1)^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}}$ корректно определено.

Пусть Γ – абелева группа и χ – градуирующий множитель. Для Γ-градуированной алгебры $A = \bigoplus A_\gamma$ *градуированный коммутатор* определяется правилом

$$[a, b]_\chi = a \cdot b - \chi(\alpha, \beta) b \cdot a \quad \text{для всех} \quad a \in A_\alpha,\ b \in A_\beta,\ \alpha, \beta \in \Gamma,$$

очевидно, в этом случае $[a, b]_\chi \in A_{\alpha+\beta}$. Легко проверяются следующие свойства градуированного коммутатора:

⋆ $[a, b]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, a]_\chi = 0$,

⋆ если алгебра A ассоциативная, то

$\chi(\gamma, \alpha)[a, [b, c]_\chi]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, [c, a]_\chi]_\chi + \chi(\beta, \gamma)[c, [a, b]_\chi]_\chi = 0$

для всех $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$. Первое свойство называется *градуированной антикоммутативностью*, а второе – *градуированным тождеством Якоби*. Алгебра A называется *градуированной коммутативной алгеброй*, если $[a, b]_\chi = 0$ для всех $a, b \in A$. Аналогичным образом, градуированным центром градуированной алгебры A называется множество

$$\operatorname{cen}_\chi A = \{a \in A \mid [a, b]_\chi = 0 \text{ для всех } b \in A\}.$$

В соответствии с определением градуированного коммутатора градуированная алгебра A называется *градуированной алгеброй Ли*, если умножение в ней, называемое *градуированной скобкой Ли* и обозначаемое через $[\,\cdot\,, \cdot\,]_\chi$, удовлетворяет приведенным выше равенствам

⋆ $[a, b]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, a]_\chi = 0$,

⋆ $\chi(\gamma, \alpha)[a, [b, c]_\chi]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, [c, a]_\chi]_\chi + \chi(\beta, \gamma)[c, [a, b]_\chi]_\chi = 0$

для всех $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Пусть $A = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, $B = \bigoplus_{\beta\in\Gamma} B_\beta$ – две Γ-градуированные ассоциативные алгебры и $A \otimes B = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(A \otimes B)_\gamma$ – их Γ-градуированное тензорное произведение как Γ-градуированных линейных пространств. Пусть χ – градуирующий множитель, тогда на $A \otimes B$ определена структура градуированной алгебры, с умножением, задаваемым правилом

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = \chi(\beta_1, \alpha_2)((a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2))$$

для всех $a_i \in A_{\alpha_i}$, $b_i \in B_{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, $i = 1, 2$. Благодаря свойствам градуирующего множителя, алгебра $A \otimes B$ ассоциативная. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned}
&((a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2)) \cdot (a_3 \otimes b_3) \\
&\quad = \chi(\beta_1, \alpha_2)((a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)) \cdot (a_3 \otimes b_3) \\
&\quad = \chi(\beta_1, \alpha_2)\chi(\beta_1 + \beta_2, \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3) \\
&\quad = \chi(\beta_1, \alpha_2)\chi(\beta_1, \alpha_3)\chi(\beta_2, \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3),
\end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}
&(a_1 \otimes b_1) \cdot ((a_2 \otimes b_2) \cdot (a_3 \otimes b_3)) \\
&\quad = \chi(\beta_2, \alpha_3)(a_1 \otimes b_1) \cdot ((a_2 a_3) \otimes (b_2 b_3)) \\
&\quad = \chi(\beta_2, \alpha_3)\chi(\beta_1, \alpha_2 + \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3) \\
&\quad = \chi(\beta_2, \alpha_3)\chi(\beta_1, \alpha_2)\chi(\beta_1, \alpha_3)(a_1 a_2 a_3) \otimes (b_1 b_2 b_3)
\end{aligned}$$

для всех $a_i \in A_{\alpha_i}$, $b_i \in B_{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, 3$. Сравнивая полученные выражения, убеждаемся в ассоциативности Γ-градуированной алгебры $A \otimes B$.

Подробнее смотри, например, [20], [21], [27], [18], [31], [32], [24].

1.5. Модули над алгебрами

Подавляющее число модулей, применяемых в математической физике, фактически являются модулями над алгебрами и, следовательно, заслуживают отдельного рассмотрения. Поскольку алгебры суть кольца специального вида, то и модули над алгебрами – частный случай модулей над кольцами. При этом удобно строить модули над алгебрами, стартуя с линейных пространств, а не с абелевых групп. Итак, абелевы группы заменяем на линейные пространства, а кольца на алгебры.

1.5.1. Модули над алгебрами. Пусть $\mathbb{F}$ – поле и A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$. Линейное пространство $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$

называется *левым A-модулем* над алгеброй A, если определена билинейная операция – умножение слева на элементы из A,

$$A \times M \to M, \quad (a, x) \mapsto ax \quad \text{для всех} \quad a \in A, \ x \in M,$$

причем выполняются аксиомы:

⋆ $(ab)x = a(bx)$ для всех $a, b \in A$, $x \in M$;

⋆ $(\lambda a + \mu b)x = \lambda(ax) + \mu(bx)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a, b \in A$, $x \in M$;

⋆ $a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $x, y \in M$.

Если алгебра A унитальная, т.е. имеет единицу $e \in A$, то дополнительно налагают условие

⋆ $ex = x$ для всех $x \in M$.

Унитальность алгебры A во многих случаях не существенна. Действительно, пусть алгебра A не содержит единицы, и пусть $\widehat{A}$ – ее унитальное расширение (см. с. 64). Для любого левого A-модуля M правило

$$(\lambda e + a) \cdot x = \lambda x + ax \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{F}, \ a \in A, \ x \in M,$$

определяет на M структуру левого $\widehat{A}$-модуля. Другими словами, всякий левый A-модуль одновременно является и левым $\widehat{A}$-модулем.

Пусть M, N – левые A-модули. Линейное отображение $f\colon M \to N$ называется *A-линейным отображением*, если

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех} \quad a \in A, \ x \in M.$$

Заметим, что и здесь унитальность алгебры A не существенна, поскольку для любого A-линейного отображения $f\colon M \to N$ имеем

$$\begin{aligned} f((\lambda e + a)x) &= f(\lambda x + ax) = f(\lambda x) + f(ax) \\ &= \lambda f(x) + af(x) = (\lambda e + a)f(x) \end{aligned}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $x \in M$, т.е. отображение f фактически $\widehat{A}$-линейное.

Таким образом, определена категория $\mathcal{LM}_A$ левых A-модулей, объекты которой – левые A-модули, а морфизмы – A-линейные отображения.

Аналогичным образом, линейное пространство $M \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ называется *правым A-модулем* над алгеброй A, если определена билинейная операция – умножение справа на элементы из A,

$$M \times A \to M, \quad (x, a) \mapsto xa \quad \text{для всех} \quad x \in M, \ a \in A,$$

причем выполняются аксиомы:

- ⋆ $x(ab) = (xa)b$ для всех $x \in M$, $a, b \in A$;
- ⋆ $x(\lambda a + \mu b) = \lambda(xa) + \mu(xb)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $x \in M$, $a, b \in A$;
- ⋆ $(\lambda x + \mu y)a = \lambda(xa) + \mu(ya)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $x, y \in M$, $a \in A$.

Если алгебра A унитальная, т.е. имеет единицу $e \in A$, то дополнительно налагают условие

- ⋆ $xe = x$ для всех $x \in M$.

Пусть M, N – правые A-модули. Линейное отображение $f\colon M \to N$ называется *A-линейным отображением*, если

$$f(xa) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad x \in M,\ a \in A.$$

Таким образом, определена категория $\mathcal{RM}_A$ правых A-модулей, объекты которой – правые A-модули, а морфизмы – A-линейные отображения.

Если алгебра A коммутативная, то обе категории по существу совпадают. В этом случае определена категория A-модулей $\mathcal{M}_A$ и можно использовать обе формы записи. В общем случае все утверждения категории левых модулей имеют естественные аналоги в категории правых модулей. Ниже, если не оговорено противное, будем рассматривать только левые модули, предоставляя читателям правые формулировки в качестве упражнения.

В топологической ситуации, когда A – топологическая алгебра, а M – топологическое линейное пространство, добавляется естественное условие непрерывности билинейных операций, совместной или раздельной. Это определяет категорию топологических левых A-модулей $\mathcal{TLM}_A$ над $\mathbb{F}$, объекты которой суть топологические левые A-модули, а морфизмы – непрерывные A-линейные отображения.

Пример 1.5.1. Алгебра A сама есть левый A-модуль с левым присоединенным действием

$$A \times A \to A, \quad (a, x) \mapsto ax \quad \text{для всех} \quad a, x \in A,$$

и правый A-модуль с правым присоединенным действием

$$A \times A \to A, \quad (x, a) \mapsto xa \quad \text{для всех} \quad x, a \in A.$$

Пример 1.5.2. Пусть M – левый A-модуль, X – линейное пространство. Тогда $M \otimes_{\mathbb{F}} X$ – левый A-модуль с билинейной операцией

$$(a, m \otimes x) \mapsto a(m \otimes x) = (am) \otimes x \quad \text{для всех} \quad a \in A, \; m \in M, \; x \in X,$$

значок $_{\mathbb{F}}$ поясняет, что тензорное произведение берется в категории линейных пространств над $\mathbb{F}$.

1.5.2. Стандартные конструкции. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$.

Подмодули и фактормодули. Пусть M левый A-модуль. Линейное подпространство $S \subset M$ называется *подмодулем* модуля M, если оно замкнуто относительно умножения на элементы из A, т.е. если $ax \in S$ для всех $a \in A$, $x \in S$ (иначе, $AS \subset S$). В этом случае S – левый A-модуль, определен *фактормодуль* M/S – тоже левый A-модуль с умножением $A \times (M/S) \to (M/S)$,

$$(a, \mathbf{x}) \mapsto a\mathbf{x} = ax + S \quad \text{для всех} \quad a \in A, \; \mathbf{x} = x + S \in M/S,$$

и естественное A-линейное отображение $\pi\colon M \to M/S$, действующее по правилу $x \mapsto \mathbf{x} = x + S$ для всех $x \in M$.

Для каждого A-линейного отображения $f\colon M \to N$ определены ядро $\ker f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ – подмодуль левого A-модуля M, и образ $\operatorname{im} f = \{y = f(x) \in N \mid x \in M\}$ – подмодуль левого A-модуля N, причем имеется точная последовательность A-линейных отображений

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0.$$

Прямые произведения и прямые суммы. Прямые произведения и прямые суммы в категории левых A-модулей существуют и строятся по тем же правилам, что и в категории линейных пространств, с заменой линейных пространств на модули, а линейных отображений – на морфизмы модулей.

Именно, пусть дано семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ левых A-модулей.

Прямое произведение $\times M_i$ есть множество всевозможных семейств $x = (x_i) = (x_i \in M_i \mid i \in I)$ с покомпонентными модульными операциями:

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_i + \mu y_i), \quad ax = (ax_i),$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $x = (x_i), y = (y_i) \in \times M_i$. Канонические проекции $\pi_k \colon \times M_i \to M_k$, $k \in I$, действуют по правилу $x = (x_i) \mapsto \pi_k(x) = x_k$ для всех $x = (x_i) \in \times M_i$ и являются A-линейными отображениями. Для данного семейства $\{M \xrightarrow{f_i} M_i\}$ A-линейных отображений A-линейное отображение $M \xrightarrow{f} \times M_i$ задается правилом $y \mapsto f(y) = (x_i = f_i(y))$ для всех $y \in M$.

Пусть I – множество индексов. Определена категория $\mathcal{LM}_A^I$. Объекты этой категории суть семейства $\{M_i\} = \{M_i \mid i \in I\}$ левых A-модулей, а морфизмы из объекта $\{M_i\}$ в объект $\{N_i\}$ суть семейства A-линейных отображений

$$\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i \mid i \in I\}.$$

Для семейств $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ и $\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\}$ композиция определена покомпонентно

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\},$$

тождественный морфизм есть семейство тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_i}} M_i\}$. Как показано выше, для каждого семейства $\{M_i\}$ определено его прямое произведение $\times M_i$. Далее, для всякого семейства A-линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ определено *прямое произведение* $\times f_i \colon \times M_i \to \times N_i$ – A-линейное отображение с покомпонентным действием

$$x = (x_i) \mapsto (\times f_i)(x) = (y_i), \quad y_i = f_i(x_i) \text{ для всех } i \in I,\ x_i \in M_i.$$

Очевидно, прямое произведение семейства тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_i}} M_i\}$ есть $\times \mathrm{id}_{M_i} = \mathrm{id}_{\times M_i}$ – тождественное отображение на прямом произведении $\times M_i$, композиция

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\} \mapsto$$
$$\mapsto (\times g_i) \circ (\times f_i) = \times(g_i \circ f_i).$$

Таким образом, определен ковариантный функтор $\times$ из категории $\mathcal{LM}_A^I$ в категорию $\mathcal{LM}_A$.

Аналогичным образом, прямая сумма $\bigoplus M_i$ есть множество всех семейств $x = (x_i) = (x_i \in M_i \mid i \in I) = \sum_{i \in I} x_i$, у которых лишь конечное число компонент ненулевые, модульные операции – покомпонентные, канонические инъекции $\iota_k\colon M_k \to \bigoplus M_i$, $k \in I$, действуют по правилу $x_k \mapsto (\delta_i^k x_k \mid i \in I) = x_k$ для всех $x_k \in M_k \subset \bigoplus M_i$ и являются A-линейными отображениями. Для данного семейства $\{M_i \xrightarrow{f_i} M\}$ A-линейных отображений A-линейное отображение $\bigoplus M_i \xrightarrow{f} M$ задается правилом $x = \sum_{i\in I} x_i \mapsto f(x) = \sum_{i\in I} f_i(x_i)$ для всех $x \in \bigoplus M_i$.

Опять, $\bigoplus M_i$ есть подмодуль модуля $\times M_i$, причем

$$\bigoplus M_i = \times M_i,$$

если семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ конечное.

Пусть I – множество индексов и $\mathcal{LM}_A^I$ – введенная выше категория. Для каждого семейства $\{M_i\}$ определена его прямая сумма $\bigoplus M_i$. Также, для всякого семейства A-линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ определена его *прямая сумма* $\bigoplus f_i\colon \bigoplus M_i \to \bigoplus N_i$ – A-линейное отображение, задаваемое правилом

$$\begin{aligned} &x \mapsto (\textstyle\bigoplus f_i)(x) = \sum y_i, \quad y_i = f_i(x_i) \\ &\text{для всех} \quad i \in I,\ x = \textstyle\sum x_i \in \bigoplus M_i. \end{aligned}$$

Прямая сумма семейства тождественных морфизмов $\{M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_i}} M_i\}$ есть $\bigoplus \mathrm{id}_{M_i} = \mathrm{id}_{\bigoplus M_i}$ – тождественный морфизм на прямой сумме $\bigoplus M_i$, композиция

$$\begin{aligned} \{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i\circ f_i} P_i\} \mapsto& \\ \mapsto (\textstyle\bigoplus g_i) \circ (\bigoplus f_i) = \bigoplus (g_i \circ f_i).& \end{aligned}$$

Таким образом, определен ковариантный функтор $\oplus$ из категории $\mathcal{LM}_A^I$ в категорию $\mathcal{LM}_A$.

В топологической категории прямое произведение $\times M_i$ наделяется слабейшей топологией, в которой все проекции непрерывные, а прямая сумма $\bigoplus M_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции непрерывные. Вложение $\bigoplus M_i \subset \times M_i$ всегда непрерывное, и $\bigoplus M_i = \times M_i$ как топологические левые A-модули, если семейство $\{M_i \mid i \in I\}$ конечное.

Свободные модули. Пусть A – унитальная ассоциативная алгебра и S – некоторое множество. Каждому левому A-модулю M поставим в соответствие левый A-модуль M^S всех отображений из S в M с поточечными операциями

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(s) = \lambda\phi(s) + \mu\psi(s), \quad (a\phi)(s) = a\phi(s)$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $\phi, \psi \in M^S$, $s \in S$. Множество M^S_{fin} всех конечных отображений из S в M есть подмодуль модуля M^S (напомним, что отображение мы называем конечным, если его носитель – конечное множество).

Рассмотрим категорию, объекты которой суть отображения $\phi \in M^S$, M – левый A-модуль, а морфизмы из объекта $\phi \in M^S$ в объект $\psi \in N^S$ суть A-линейные отображения $f\colon M \to N$ из левого A-модуля M в левый A-модуль N такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

Как и следовало ожидать, в этой категории есть универсальный отталкивающий элемент $S \xrightarrow{\delta} A\langle S\rangle$, который называется *свободным левым A-модулем, порожденным множеством S*, и строится по тем же правилам, что и в случае модулей над кольцами (см. с. 45). Опять же, как в случае модулей над кольцами, причем теми же формулами определен ковариантный функтор δ из категории множеств в категорию левых A-модулей.

Левый A-модуль M называется свободным левым A-модулем с базисом $S \subset M$, если он изоморфен модулю $A\langle S\rangle$. Универсальность базиса $S \subset M$ в том, что для того чтобы определить A-линейное отображение левого A-модуля M в какой-либо левый A-модуль N, достаточно задать его на базисе S и дальше продолжить на весь M по A-линейности, причем такое продолжение всегда существует и единственное.

Не все все левые A-модули свободные, однако имеет место

Предложение 1.5.1. *Каждый левый A-модуль есть фактормодуль свободного левого A-модуля.*

Доказательство. Пусть M – левый A-модуль. Возьмем M в качестве базисного множества, и пусть $(A\langle M\rangle, \delta)$ – соответствующий универсальный объект. Тождественному отображению

$\mathrm{id}\colon M \to M$ отвечает следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & A\langle M\rangle \arrow[rr, "f"'] & & M \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где $f = (\,\mathrm{id})_*$ есть левое A-линейное отображение, порожденное тождественным отображением id. По построению отображение f есть эпиморфизм, так что $M = A\langle M\rangle/\ker f$.

Замечание. Для данного модуля следует различать его $\mathbb{F}$-линейный базис (т.е. его базис как линейного пространства над $\mathbb{F}$) и его A-линейный базис (т.е. его базис как левого A-модуля).

Пример 1.5.3. Пусть X – линейное пространство над $\mathbb{F}$ и $\dim_{\mathbb{F}} X$ – его размерность (число элементов базиса). Определен (см. пример 1.5.2) левый A-модуль $M = A\otimes_{\mathbb{F}} X$, его размерность как левого A-модуля есть $\dim_A M = \dim_{\mathbb{F}} X$, а его размерность как линейного пространства над $\mathbb{F}$ есть $\dim_{\mathbb{F}} M = \dim_{\mathbb{F}} A\cdot\dim_{\mathbb{F}} X$.

Тензорные произведения. Пусть A – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра.

Тензорные произведения в категории левых A-модулей строятся по тем же правилам, что и в случае левых модулей над кольцами, с очевидными модификациями. Подробнее, пусть $\{M_i\,|\,i\in I\}$ – семейство левых A-модулей и $\bigtimes M_i$ – его прямое произведение. Тензорное произведение $\bigotimes M_i = \bigotimes_{i\in I} M_i$ определяется как универсальный отталкивающий объект $\bigtimes M_i \xrightarrow{\varkappa} \bigotimes M_i$ категории, объекты которой суть A-полилинейные отображения из $\bigtimes M_i$ в левые A-модули, а морфизмы из объекта $\bigtimes M_i \xrightarrow{f} N$ в объект $\bigtimes M_i \xrightarrow{g} P$ суть A-линейные отображения $N \xrightarrow{\phi} P$ из левого A-модуля N в левый A-модуль P, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \bigtimes M_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
N \arrow[rr, "\phi"'] & & P
\end{tikzcd}$$

Как и в категориях модулей над кольцами и линейных пространств, каждое A-линейное отображение $h\colon \bigotimes M_i \to N$ порождается единственным A-полилинейным отображением $f\colon \bigtimes M_i \to N$, именно, $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$, так что A-линейные отображения из $\bigotimes M_i$ в данный левый A-модуль отождествляются с A-полилинейными отображениями из $\bigtimes M_i$ в этот модуль.

В категории левых A-модулей сохраняются свойства тензорного произведения, установленные в категориях модулей над кольцами и линейных пространств (ассоциативность, перестановки, тензорные произведения семейств A-линейных отображений, их функториальность). Предлагается сформулировать и доказать соответствующие утверждения в качестве упражнения.

В топологической ситуации возникающие проблемы наследуются из категорий топологических линейных пространств и топологических алгебр, их изучение выходит за рамки данных лекций.

Замечание. Поскольку каждый левый A-модуль одновременно является линейным пространством над $\mathbb{F}$, для данного семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ левых A-модулей следует различать его тензорное произведение в категории линейных пространств, обозначим его через $\bigotimes_{\mathbb{F}} M_i$, и его тензорное произведение в категории левых A-модулей, обозначим его через $\bigotimes_A M_i$.

Пример 1.5.4. Пусть $A = \mathbb{F}[t]$ – алгебра всех многочленов от одной переменной t с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Тогда его тензорный квадрат в категории линейных пространств есть $A \otimes_{\mathbb{F}} A = \mathbb{F}[s, t]$ – линейное пространство (конечно, и алгебра) всех многочленов от двух переменных s, t с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Далее, пусть $M = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m$ – левый A-модуль всех столбцов высотой $m \in \mathbb{N}$ с элементами из A, а $N = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n$ – аналогичный левый A-модуль всех столбцов высотой $n \in \mathbb{N}$ с элементами из A. Тензорное произведение этих модулей в категории линейных пространств есть

$$M \otimes_{\mathbb{F}} N = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m) \otimes_{\mathbb{F}} (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n) = (A \otimes_{\mathbb{F}} A) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n)$$

линейное пространство всех $(m \times n)$-матриц с элементами из $A \otimes_{\mathbb{F}} A$, тогда как его тензорное произведение в категории левых A-модулей есть

$$M \otimes_A N = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m) \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n) = A \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n)$$

левый A-модуль всех $(m \times n)$-матриц с элементами из A, поскольку тензорный квадрат левого A-модуля A в категории левых A-модулей есть $A \otimes_A A = A$.

1.5.3. Градуировка. Модули над алгебрами градуируются точно так же, как и модули над кольцами. Именно, пусть Γ – абелева группа, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ – Γ-градуированная ассоциативная алгебра. Говорят, что левый A-модуль M *градуирован абелевой группой* Γ (другими словами, Γ-*градуирован*), если он Γ-градуирован как линейное пространство, $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, для некоторого семейства линейных пространств $\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и произведение $ax \in M_{\alpha+\beta}$ для всех $a \in A_\alpha$, $x \in M_\beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$. Далее, пусть, $M = \bigoplus M_\gamma$, $N = \bigoplus N_\gamma$ – два Γ-градуированных левых A-модуля, A-линейное отображение $f\colon M \to N$ называется γ-*однородным*, $\gamma \in \Gamma$, если образ $f(x) \in M_{\alpha+\gamma}$ для всех $x \in M_\alpha \subset M$, $\alpha \in \Gamma$. Всякое A-линейное отображение $f\colon M \to N$ разлагается на однородные компоненты (другими словами, Γ-*градуируется*).

Таким образом, определена категория Γ-градуированных левых A-модулей, объекты которой суть Γ-градуированные левые A-модули, а морфизмы суть Γ-градуированные A-линейные отображения, причем эта категория есть полная подкатегория категории левых A-модулей.

Подмодуль $N \subset M$, где $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ есть Γ-градуированный левый A-модуль, называется Γ-*градуированным*, если $N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$, причем $N_\gamma = N \cap M_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Пусть A – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра. Тензорное произведение $\bigotimes M_i$ всякого семейства $\{M_i \mid i \in I\}$ Γ-градуированных A-модулей, $M_i = \bigoplus_{\gamma_i\in\Gamma} M_{i,\gamma_i}$, обладает естественной Γ-градуировкой. Именно,

$$\bigotimes M_i = \bigotimes_{i\in I}\Big(\bigoplus_{\gamma_i\in\Gamma} M_{i,\gamma_i}\Big) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\Big(\bigotimes M_i\Big)_\gamma,$$
$$\Big(\bigotimes M_i\Big)_\gamma = \bigoplus_{\sum_{i\in I}\gamma_i=\gamma}\Big(\bigotimes M_{i,\gamma_i}\Big).$$

Как и в градуированных алгебрах, в градуированных модулях появляются новые возможности. Действительно, пусть Γ – абелева группа, χ – градуирующий множитель, $A = \bigoplus A_\gamma$ – унитальная ассоциативная Γ-градуированная алгебра. Оставив без изменений определение Γ-градуированного левого A-модуля, в определении Γ-градуированного правого A-модуля M аксиому правой ассоциативности $x(ab) = (xa)b$ (см. с. 73) заменим на аксиому Γ-градуированной правой ассоциативности

$\star$ $x(ab) = \chi(\alpha,\beta)(xa)b$ для всех $x \in M$, $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$.

Такое определение корректно, поскольку в силу свойств градуирующего множителя

$$x(abc) = \chi(\alpha,\beta)\chi(\alpha,\gamma)\chi(\beta,\gamma)((xa)b)c$$

для всех $x \in M$, $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, независимо от порядка вычислений. Далее, если алгебра A – градуированная коммутативная (см. с. 70), то

$$x(ab) = \chi(\alpha,\beta)x(ba) = \chi(\alpha,\beta)\chi(\beta,\alpha)(xb)a = (xb)a$$

для всех $x \in M$, $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, так что в этом случае правое и левое действие фактически совпадают (с точностью до записи), и говорят что задан Γ-*градуированный модуль*.

Пусть Γ – абелева группа, χ – градуирующий множитель, $A = \bigoplus A_\gamma$ – унитальная ассоциативная Γ-градуированная коммутативная алгебра. Пусть $M = \bigoplus M_\gamma$, $N = \bigoplus N_\gamma$ – пара Γ-градуированных A-модулей. Билинейное отображение $f\colon M \times N \to P$, где $P = \bigoplus P_\gamma$ – Γ-градуированный A-модуль, называется *градуированным A-билинейным*, если

$$\begin{array}{lll} f(ax,y) = af(x,y) & \text{для всех} & a \in A,\ x \in M,\ y \in N, \\ f(x,ay) = \chi(\alpha,\beta)af(x,y), & \text{для всех} & x \in M_\alpha,\ a \in A_\beta,\ y \in N, \\ & & \alpha,\beta \in \Gamma. \end{array}$$

это определение корректно, поскольку в силу свойств градуирующего множителя χ и градуированной коммутативности алгебры A

$$f(ax,by) = \chi(\beta,\gamma)(ab)f(x,y)$$
$$\text{для всех} \quad a \in A_\alpha,\ x \in M_\beta,\ b \in A_\gamma,\ y \in N,$$

независимо от порядка вычислений.

В категории, объекты которой суть Γ-градуированные A-билинейные отображения из $M \times N = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(M_\gamma \times N_\gamma)$ в Γ-градуированные A-модули, а морфизмы из объекта $M \times N \xrightarrow{f} X$ в объект $M \times N \xrightarrow{g} Y$ суть A-линейные отображения $X \xrightarrow{h} Y$ из модуля $X = \bigoplus X_\gamma$ в модуль $Y = \bigoplus Y_\gamma$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "h"'] & & Y \end{tikzcd}$$

существует универсальный отталкивающий объект

$$M \times N \xrightarrow{\chi} M \otimes N,$$

называемый Γ-*градуированным тензорным произведением* пары модулей M, N. Строится это тензорное произведение так же, как и в неградуированной категории, с очевидными модификациями.

Замечание. Γ-градуированное тензорное произведение над A можно определить и для произвольного линейно упорядоченного семейства Γ-градуированных A-модулей.

1.5.4. Тензорная алгебра модуля. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – унитальная ассоциативная коммутативная алгебра над $\mathbb{F}$, M – A-модуль. Положим

$$T^n(M) = \bigotimes\nolimits^n M = \begin{cases} M \otimes \dots \otimes M \ (n \text{ сомножителей}), & n \in \mathbb{N}, \\ A, \quad n = 0. \end{cases}$$

(Здесь и ниже тензорное произведение берется в категории A-модулей.) Прямая сумма $T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n(M)$ A-модулей $T^n(M)$ по определению есть A-модуль. Она имеет дополнительную структуру унитальной ассоциативной $\mathbb{Z}_+$-градуированной алгебры с умножением, задаваемым правилами

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes \dots \otimes y_q) = x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q = x_1 \otimes \dots \otimes y_q$$

для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, y_q \in M$ (поясним, что $A \otimes M = M = M \otimes A$). Эта алгебра называется *тензорной алгеброй A-модуля M*.

Пусть дано A-линейное отображение $f\colon M \to N$ A-модуля M в A-модуль N, тогда правило

$$\begin{aligned} &e \mapsto e, \quad e \in A, \\ &x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in M, \end{aligned}$$

задает $\mathbb{Z}_+$-градуированный морфизм $T(f)\colon T(M) \to T(N)$, причем композиция $f \circ g$ переходит в композицию $T(f) \circ T(g)$. Другими словами, определен ковариантный функтор из категории A-модулей в категорию $\mathbb{Z}_+$-градуированных алгебр.

Пусть M – A-модуль и $T(M)$ – его $\mathbb{Z}_+$-градуированная тензорная алгебра. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определена *симметрическая группа* $\mathfrak{S}_n$, т.е. группа всех подстановок σ,

$$\{1, \dots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\},$$

а для каждой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ определен знак $\operatorname{sign}\sigma \in \{-1,+1\}$. Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$, на A-модуле $T^n(M)$, $x \mapsto \sigma(x)$, $\sigma \in \mathfrak{S}$, $x \in T^n(M)$, задается правилом

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \quad \text{для всех} \quad x_1, \ldots, x_n \in M.$$

На $T^0(M) = A$ группа $\mathfrak{S}_0 = \{\,\mathrm{id}\}$ действует тривиально. В частности, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено A-линейное отображение

$$\pi_+^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \colon T^n(M) \to T^n(M).$$

Его образ

$$S^n(M) = \operatorname{im} \pi_+^n = \{x \in T^n(M) \mid \sigma(x) = x \text{ для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Легко проверяется, что $\pi_+^n \circ \pi_+^n = \pi_+^n$, т.е. π_+^n – проектор. Определена точная последовательность A-модулей

$$0 \longrightarrow \ker \pi_+^n \longrightarrow T^n(M) \xrightarrow{\pi_+^n} S^n(M) \longrightarrow 0,$$

так что $S^n(M) = T^n(M)/\ker \pi_+^n$. Положим $S(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} S^n(M)$ и превратим $S(M)$ в $\mathbb{Z}_+$-градуированную унитальную ассоциативную коммутативную алгебру, задав умножение

$$\odot \colon S(M) \times S(M) \to S(M)$$

правилом

$$(x, y) \mapsto x \odot y = \pi_+^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех} \quad x \in S^m(M),\ y \in S^n(M).$$

Далее, положим $\pi_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \pi_+^n \colon T(M) \to S(M)$ (так что $\pi_+|_{T^n(M)} = \pi_+^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_+ – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \ker \pi_+^n$ – идеал алгебры $T(M)$ и алгебра $S(M) = T(M)/\ker \pi_+$. Алгебра $S(M)$ называется *симметрической алгеброй A-модуля M*. Заметим, что $S(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi = 1$.

Аналогичным образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено A-линейное отображение

$$\pi_-^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot \sigma \colon T^n(M) \to T^n(M).$$

Его образ

$$\Lambda^n(M) = \operatorname{im}\pi_-^n = \{x \in T^n(M) \mid \sigma(x) = \operatorname{sign}\sigma \cdot x \text{ для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

В частности, $\pi_-^n \circ \pi_-^n = \pi_-^n$, т.е. π_-^n – проектор. Определена точная последовательность A-модулей

$$0 \longrightarrow \ker\pi_-^n \longrightarrow T^n(M) \xrightarrow{\pi_-^n} \Lambda^n(M) \longrightarrow 0,$$

так что $\Lambda^n(M) = T^n(M)/\ker\pi_-^n$. Положим $\Lambda(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\Lambda^n(M)$ и превратим $\Lambda(M)$ в $\mathbb{Z}_+$-градуированную унитальную ассоциативную алгебру, задав умножение

$$\wedge\colon \Lambda(M)\times\Lambda(M)\to\Lambda(M)$$

правилом

$$(x, y) \mapsto x\wedge y = \pi_-^{m+n}(x\otimes y) \quad \text{для всех} \quad x\in\Lambda^m(M),\ y\in\Lambda^n(M).$$

Далее, положим $\pi_- = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\pi_-^n\colon T(M) \to \Lambda(M)$ (так что $\pi_-|_{T^n(M)} = \pi_-^n$, $n\in\mathbb{Z}_+$), тогда π_- – морфизм алгебр, его ядро $\ker\pi_- = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\ker\pi_-^n$ – идеал алгебры $T(M)$ и алгебра $\Lambda(M) = T(M)/\ker\pi_-$. Алгебра $\Lambda(M)$ называется *внешней алгеброй A-модуля M*. Заметим, что

$$y\wedge x = (-1)^{nm}x\wedge y \quad \text{для всех} \quad y\in\Lambda^n(M),\ x\in\Lambda^m(M),$$

так что $\Lambda(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi(m,n) = (-1)^{mn}$, $m,n\in\mathbb{Z}_+$.

В качестве упражнения полезно поразмышлять об универсальных свойствах введенных алгебр.

1.5.5. Ли модули. Вспомним, что левый модуль M над ассоциативной алгеброй A задавался морфизмом из алгебры A в алгебру $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M)$ эндоморфизмов $\mathbb{F}$-линейного пространства M. Но у алгебры $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M)$ есть присоединенная алгебра Ли $\mathfrak{gl}(M)$ (см. пример 1.4.6), что позволяет определить модули над алгебрами Ли.

Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – алгебра Ли над $\mathbb{F}$. $\mathbb{F}$-линейное пространство M называется *Ли модулем над A*, если определено действие алгебры Ли A линейном пространстве M, т.е. задан морфизм алгебр Ли $\lambda\colon A\to\mathfrak{gl}(M)$. Подробнее, в этом случае каждому $a\in A$ ставится в соответствие эндоморфизм линейных пространств $\lambda(a)\colon M\to M$, $x\mapsto\lambda(a)(x) = [a,x]$ (запись $\lambda(a)(x)$ сокращаем до $[a,x]$, хотя такое сокращение и не является общепринятым, но весьма наглядное), причем выполнены условия

* $\star$ $[a, \alpha x + \beta y] = \alpha[a, x] + \beta[a, y]$,
* $\star$ $[\alpha a + \beta b, x] = \alpha[a, x] + \beta[b, x]$,
* $\star$ $[[a, b], x] = [a, [b, x]] - [b, [a, x]]$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a, b \in A$, $x, y \in M$. Последнее условие в стандартных обозначениях имеет вид $\lambda([a, d]) = [\lambda(a), \lambda(b)]$, его можно также рассматривать как тождество Якоби для Ли модулей.

Замечание. Часто вместо термина *Ли модуль* используют термин *представление алгебры Ли в линейном пространстве.*

Пример 1.5.5. Всякое линейное пространство L есть тривиальный Ли модуль над любой алгеброй Ли A, где $[a, x] = 0$ для всех $a \in A$ и $x \in L$.

Пример 1.5.6. Всякая алгебра Ли A есть Ли модуль над A относительно присоединенного действия

$$a \mapsto \mathrm{ad}(a) \in \mathfrak{gl}(A), \quad x \mapsto \mathrm{ad}(a)(x) = [a, x] \text{ для всех } a \in A,\ x \in A.$$

Корректность такого определения следует из тождества Якоби.

Пример 1.5.7. Пусть A – алгебра Ли, L – линейное пространство над $\mathbb{F}$. Тензорное произведение $A \otimes L = A \otimes_{\mathbb{F}} L$ (в категории $\mathbb{F}$-линейных пространств) является Ли модулем над A относительно действия

$$a \mapsto \lambda(a) \in \mathfrak{gl}(A \otimes L), \quad b \otimes x \mapsto [a, b] \otimes x \quad \text{для всех} \quad a, b \in A,\ x \in L.$$

Иначе говоря, $\lambda(a) = \mathrm{ad}(a) \otimes \mathrm{id}_L$ для всех $a \in A$.

Пусть M, N – Ли модули над алгеброй Ли A. Линейное отображение $f\colon M \to N$ называется *морфизмом Ли модулей*, если

$$f([a, x]) = [a, f(x)] \quad \text{для всех} \quad a \in A,\ x \in M.$$

Таким образом, для каждой алгебры Ли A определена категория Ли модулей над A. Можно проверить, что это соответствие функториальное.

Подробнее смотри, например, [20], [21], [27], [18].

1.6. Гомологии

1.6.1. Дифференциальные модули. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – унитальная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$ и C – левый A-модуль. Эндоморфизм $\partial \in \mathrm{End}_A(C)$ (т.е. A-линейное отображение из C в C) называется *граничным оператором* (иначе, *дифференциалом*), если композиция $\partial \circ \partial = 0$ (т.е. $\mathrm{im}\,\partial \subset \ker\partial$). В этом случае пара $\{C, \partial\}$ называется *дифференциальным левым A-модулем*, элементы модуля C называются *цепями*, элементы ядра $\ker\partial = \{x \in C \mid \partial(x) = 0\} = Z(C)$ называются *циклами*, элементы образа $\mathrm{im}\,\partial = \{y = \partial(x) \mid x \in C\} = B(C)$ называются *границами*. Левый A-модуль *гомологий* дифференциального модуля $\{C, \partial\}$ определяется как фактормодуль (иначе, *производный модуль*)

$$\begin{aligned} H(C) = H(C, \partial) &= \ker\partial / \mathrm{im}\,\partial \\ &= \{x \in C \mid \partial(x) = 0\}/\{y = \partial(x) \mid x \in C\}, \end{aligned}$$

его элементы суть *гомологии*, т.е. классы эквивалентности

$$\mathbf{x} = x + \mathrm{im}\,\partial, \quad x \in C.$$

Пусть $\{C, \partial_C\}$, $\{K, \partial_K\}$ – дифференциальные левые A-модули. A-линейное отображение $f \colon C \to K$ называется *морфизмом дифференциальных модулей*, если $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_C"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "\partial_K"'] & K \end{tikzcd}$$

Таким образом, определена категория $\mathcal{LDM}_A$ дифференциальных левых A-модулей, объекты которой суть дифференциальные левые A-модули, а морфизмы – морфизмы дифференциальных модулей.

Аналогичным образом определяется категория правых дифференциальных A-модулей и категория дифференциальных A-модулей для коммутативной алгебры A. В топологической ситуации дифференциалы и морфизмы предполагаются непрерывными.

Предложение 1.6.1. *Пусть $f\colon C \to K$ – морфизм дифференциальных модулей. Тогда*

$$f(\ker \partial_C) \subset \ker \partial_K, \quad f(\operatorname{im} \partial_C) \subset \operatorname{im} \partial_K.$$

В частности, определено факторотображение $\mathbf{f}\colon H(C) \to H(K)$, *действующее по правилу*

$$\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial_C \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + \operatorname{im} \partial_K \quad \text{для всех} \quad x \in \ker \partial_C.$$

Доказательство проводится прямыми вычислениями, с помощью определяющего равенства $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$.

Замечание. Пусть $\{C, \partial_C\}$, $\{K, \partial_K\}$ – дифференциальные левые A-модули. Для того чтобы A-линейное отображение $f\colon C \to K$ допускало факторотображение $\mathbf{f}\colon H(C) \to H(K)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f(\ker \partial_C) \subset \ker \partial_K, \quad f(\operatorname{im} \partial_C) \subset \operatorname{im} \partial_K.$$

Согласно приведенному выше предложению достаточным условием для этого является условие $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$, но существуют и другие достаточные условия. Например, условие $\partial_K \circ f + f \circ \partial_C = 0$ также достаточное. Мы воспользуемся этим фактом ниже, при изучении бидифференциальных модулей и бикомплексов.

A-линейное отображение $s\colon C \to K$ называется *гомотопией, связывающей морфизмы дифференциальных модулей* $f, g\colon C \to K$, если справедлива *гомотопическая формула*

$$\partial_K \circ s + s \circ \partial_C = f - g.$$

Предложение 1.6.2. *Пусть $f, g\colon C \to K$ – морфизмы дифференциальных модулей и $s\colon C \to K$ – связывающая их гомотопия. Тогда факторотображения $\mathbf{f}, \mathbf{g}\colon H(C) \to H(K)$ совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть класс

$$\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial_C \in H(C),$$

где $x \in \ker \partial_C$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + \operatorname{im} \partial_K$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = g(x) + \operatorname{im} \partial_K$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= f(x) - g(x) + \operatorname{im} \partial_K = (f - g)(x) + \operatorname{im} \partial_K \\
&= (\partial_K \circ s + s \circ \partial_C)(x) + \operatorname{im} \partial_K \\
&= \partial_K(s(x)) + s(\partial_C(x)) + \operatorname{im} \partial_K \\
&= \operatorname{im} \partial_K = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

поскольку $\partial_K(s(x)) \in \operatorname{im} \partial_K$, а $s(\partial_C(x)) = 0$.

1.6.2. Комплексы. В приложениях часто встречаются случаи, когда дифференциальный модуль $\{C, \partial\}$ градуирован абелевой группой Γ:

$$C = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma, \quad \partial = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \partial_\gamma, \quad \partial_\gamma\colon C_\gamma \to C_{\gamma+\varepsilon} \ \text{ для всех } \ \gamma \in \Gamma$$

(алгебра A тривиально градуирована, $A_0 = A$, $A_\gamma = 0$ при $\gamma \neq 0$), т.е. дифференциал ∂ – однородный степени ε, $\varepsilon \in \Gamma$. (В этом случае условие $\partial \circ \partial = 0$ принимает вид $\partial_{\gamma+\varepsilon} \circ \partial_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$.) В наиболее популярной ситуации $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$, градуированный дифференциальный модуль называется *комплексом*, иногда *цепным комплексом* при $\varepsilon = -1$ и *коцепным комплексом* при $\varepsilon = +1$. Рассмотрим подробно случай $\varepsilon = -1$.

Пусть левый A-модуль C градуирован (точнее, $\mathbb{Z}$-градуирован), а дифференциал ∂ – однородный степени -1. Иначе говоря, $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$, $\partial = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \partial_n$, где A-линейные отображения $\partial_n\colon C_n \to C_{n-1}$, причем $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, т.е. $\operatorname{im}\partial_n \subset \ker\partial_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае говорят, что задан *комплекс*

$$\{C_n, \partial_n\} = \{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

левых A-модулей, и записывают его в виде последовательности

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \ldots,$$

в которой композиция любых двух последовательных стрелок равна нулю. В этом случае производный модуль также $\mathbb{Z}$-градуируется,

$$H(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C), \quad H_n(C) = \ker\partial_n / \operatorname{im}\partial_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

элементы модулей C_n называются *n-мерными цепями*, элементы ядер

$$\ker\partial_n = \{x_n \in C_n \mid \partial_n(x_n) = 0\} = Z_n(C)$$

называются *n-мерными циклами*, элементы образов

$$\operatorname{im}\partial_{n+1} = \{y_n = \partial_{n+1}(x_{n+1}) \mid x_{n+1} \in C_{n+1}\} = B_n(C)$$

называются *n-мерными границами*, а элементы фактормодулей $H_n(C)$ называются *n-мерными гомологиями*.

Пусть $\{C_n, (\partial_C)_n\}$, $\{K_n, (\partial_K)_n\}$ – комплексы левых A-модулей. A-линейное отображение

$$f = \bigoplus f_n \colon C = \bigoplus C_n \to K = \bigoplus K_n, \quad f_n \colon C_n \to K_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется *морфизмом комплексов левых A-модулей*, если справедливы равенства $(\partial_K)_n \circ f_n = f_{n-1} \circ (\partial_C)_n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\dots & C_{n-1} \arrow[l, "(\partial_C)_{n-1}"'] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "(\partial_C)_n"'] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n+1} \arrow[l, "(\partial_C)_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \dots \arrow[l, "(\partial_C)_{n+2}"'] \\
\dots & K_{n-1} \arrow[l, "(\partial_K)_{n-1}"'] & K_n \arrow[l, "(\partial_K)_n"'] & K_{n+1} \arrow[l, "(\partial_K)_{n+1}"'] & \dots \arrow[l, "(\partial_K)_{n+2}"']
\end{tikzcd}$$

Итак, определена категория $\mathcal{LCM}_A$ комплексов левых A-модулей, объекты которой суть комплексы левых A-модулей, а морфизмы – морфизмы комплексов левых A-модулей.

Предложение 1.6.3. *Пусть*

$$f = \bigoplus f_n \colon C = \bigoplus C_n \to K = \bigoplus K_n$$

– морфизм комплексов левых A-модулей. Тогда

$$f_n(\ker(\partial_C)_n) \subset \ker(\partial_K)_n, \quad f_n(\operatorname{im}(\partial_C)_{n+1}) \subset \operatorname{im}(\partial_K)_{n+1}.$$

В частности, определено фактороотображение

$$\mathbf{f} = \bigoplus \mathbf{f}_n \colon H(C) = \bigoplus H_n(C) \to H(K) = \bigoplus H_n(K),$$

действующее по правилу

$$\mathbf{x}_n = x_n + \operatorname{im}(\partial_C)_{n+1} \mapsto \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n) = f_n(x_n) + \operatorname{im}(\partial_K)_{n+1}, \\ x_n \in \ker(\partial_C)_n.$$

Пусть $f = \bigoplus f_n$, $g = \bigoplus g_n \colon C = \bigoplus C_n \to K = \bigoplus K_n$ – морфизмы комплексов левых A-модулей. A-линейное отображение

$$s = \bigoplus s_n \colon C = \bigoplus C_n \to K = \bigoplus K_n, \quad s_n \colon C_n \to K_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется *гомотопией, связывающей морфизмы f и g*, если справедливы равенства

$$(\partial_K)_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ (\partial_C)_n = f_n - g_n \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 1.6.4. *Пусть*

$$f = \bigoplus f_n,\ g = \bigoplus g_n\colon\ C = \bigoplus C_n \to K = \bigoplus K_n$$

– морфизмы комплексов левых A-модулей и

$$s = \bigoplus s_n \colon C = \bigoplus C_n \to K = \bigoplus K_n$$

– связывающая их гомотопия. Тогда факторотображения

$$\mathbf{f} = \bigoplus \mathbf{f}_n,\ \mathbf{g} = \bigoplus \mathbf{g}_n \colon H(C) = \bigoplus H_n(C) \to H(K) = \bigoplus H_n(K)$$

совпадают.

Аналогичным образом определяется категория комплексов правых A-модулей и категория комплексов A-модулей для коммутативной алгебры A. В топологической ситуации дифференциалы и морфизмы предполагаются непрерывными.

Часто встречаются ситуации, когда модули

$$C_n = 0 \quad \text{при} \quad n = -1, -2, \dots,$$

так что $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n$, $\partial = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \partial_n$ и комплекс имеет вид

$$0 \xleftarrow{\ \partial_0\ } C_0 \xleftarrow{\ \partial_1\ } C_1 \xleftarrow{\ \partial_2\ } C_2 \xleftarrow{\ \partial_3\ } \dots$$

В этом случае говорят, что комплекс $\{C_n, \partial_n\} = \{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ *неотрицателен.*

1.6.3. Когомологии. Пусть $\{C, \partial\}$ – дифференциальный левый A-модуль и M – правый A-модуль. В этом случае правый A-модуль $C(M) = \mathrm{Hom}_A(C, M)$ имеет естественную структуру дифференциального модуля с дифференциалом

$$d = \partial^* \colon C(M) \to C(M),$$
$$\text{где} \quad d(\phi) = \phi \circ \partial \colon C \to M \quad \text{для всех} \quad \phi\colon C \to M.$$

Легко проверяется, что d есть A-линейное отображение и композиция $d \circ d = 0$. Таким образом, определен дифференциальный правый A-модуль $\{C(M), d\}$. Здесь, дифференциал d называется *кограничным оператором*, элементы модуля $C(M)$ называются *коцепями* (со значениями в M), элементы ядра

$\ker d = \{\phi \in C(M) \mid d(\phi) = 0\}$ называются *коциклами*, элементы образа $\operatorname{im} d = \{\phi = d(\psi) \mid \psi \in C(M)\}$ называются *кограницами*, а элементы фактормодуля (иначе, *производного модуля*) $H(C(M)) = \ker d / \operatorname{im} d$ называются *когомологиями*.

Пусть $\{C(M), d_C\}$, $\{K(N), d_K\}$ – дифференциальные правые A-модули. Морфизм из $\{C(M), d_C\}$ в $\{K(N), d_K\}$ есть A-линейное отображение $F\colon C(M) \to K(N)$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C(M) \arrow[r, "d_C"] \arrow[d, "F"'] & C(M) \arrow[d, "F"] \\ K(N) \arrow[r, "d_K"'] & K(N) \end{tikzcd} \qquad \text{т.е.} \quad F \circ d_C = d_K \circ F.$$

Выделим морфизмы специального вида. Именно, пусть

$$f \in \operatorname{Hom}_A(K, C), \quad g \in \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Определим отображение $F \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$ правилом $\phi \mapsto F(\phi) = g \circ \phi \circ f$ для всех $\phi \in C(M)$. Легко проверяется, что F будет морфизмом из $\{C(M), d_C\}$ в $\{K(N), d_K\}$, если f есть морфизм из $\{K, \partial_K\}$ в $\{C, \partial_C\}$.

Пусть $\{C_n, \partial_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ – комплекс левых A-модулей и M – правый A-модуль. Положим здесь $C^n(M) = \operatorname{Hom}_A(C_n, M)$, $C(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n(M)$, $d^n = (\partial_{n+1})^* \in \operatorname{Hom}_A(C^n(M), C^{n+1}(M))$, где $d^n(\phi^n) = \phi^n \circ \partial_{n+1}$ для всех $\phi^n \in C^n(M)$, $d = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} d^n$. Легко проверяется, что $d^{n+1} \circ d^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, так что определен комплекс $\{C^n(M),\, d^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ правых A-модулей, который наглядно записывается как последовательность

$$\ldots \xrightarrow{d^{n-2}} C^{n-1}(M) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(M) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(M) \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$$

В этом случае когомологии тоже градуируются,

$$H(C(M)) = \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} H^n(C(M)),$$
$$H^n(C(M)) = \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

причем элементы из $C^n(M)$ называются *n-мерными коцепями*, элементы из

$$\ker d^n = \{\phi^n \in C^n(M) \mid d^n(\phi^n) = 0\}$$

называются *n-мерными коциклами*, элементы из

$$\operatorname{im} d^{n-1} = \{\phi^n = d^{n-1}(\psi^{n-1}) \mid \psi^{n-1} \in C^{n-1}(M)\}$$

называются *n-мерными кограницами*, а элементы фактормодулей $H^n(C(M))$ называются *n-мерными когомологиями*.

Пусть $\{C^n(M), d_C^n\}$ и $\{K^n(N), d_K^n\}$ – комплексы правых A-модулей. Морфизм из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$ есть A-линейное отображение

$$F = \bigoplus F^n \colon C(M) \to K(N), \quad F^n \colon C^n(M) \to K^n(N), \quad n \in \mathbb{Z},$$

такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d_C^{n-2}"] & C^{n-1}(M) \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d, "F^{n-1}"'] & C^n(M) \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[d, "F^n"'] & C^{n+1}(M) \arrow[r, "d_C^{n+1}"] \arrow[d, "F^{n+1}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d_K^{n-2}"] & K^{n-1}(N) \arrow[r, "d_K^{n-1}"] & K^n(N) \arrow[r, "d_K^n"] & K^{n+1}(N) \arrow[r, "d_K^{n+1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

иначе, $d_K^n \circ F^n = F^{n+1} \circ d_C^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Выделим морфизмы специального вида. Именно, пусть

$$f_n \in \operatorname{Hom}_A(K_n, C_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad g \in \operatorname{Hom}_A(M, N).$$

Отображение $F = \bigoplus F^n \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$, действующее по правилу

$$\phi^n \mapsto F^n(\phi^n) = g \circ \phi^n \circ f_n \quad \text{для всех} \quad \phi^n \in C^n(M), \ n \in \mathbb{Z},$$

будет морфизмом из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $(\partial_K)_n \circ f_n = f_{n-1} \circ (\partial_C)_n$, т.е. если $f = \bigoplus f_n$ есть морфизм из $\{K_n, (\partial_K)_n\}$ в $\{C_n, (\partial_C)_n\}$.

Пусть $F = \bigoplus F^n$, $G = \bigoplus G^n$ – морфизмы из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$. Отображение $S = \bigoplus S^n \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$, $S^n \colon C^n(M) \to K^{n-1}(N)$, $n \in \mathbb{Z}$, называется *гомотопией*, связывающей морфизмы F и G, если справедлива *гомотопическая формула*

$$d_K^{n-1} \circ S^n + S^{n+1} \circ d_C^n = F^n - G^n \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С такими определениями, для комплексов $\{C^n(M), d^n\}$ справедливы все результаты, доказанные выше для комплексов $\{C_n, \partial_n\}$, с очевидными модификациями.

Часто встречаются ситуации, когда модули

$$C_n = 0 \quad \text{при} \quad n = -1, -2, \dots,$$

так что $C(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} C^n(M)$, $d = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} d^n$ и комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow C^0(M) \xrightarrow{d^0} C^1(M) \xrightarrow{d^1} C^2(M) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Обычно в этом случае говорят, что комплекс $\{C^n(M),\, d^n \,|\, n\in\mathbb{Z}_+\}$ неотрицателен.

1.6.4. Бикомплексы. Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – унитальная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$. Пусть C – левый A-модуль, на котором определены два граничных оператора $\partial'\colon C \to C$ и $\partial''\colon C \to C$, причем $\partial' \circ \partial' = \partial'' \circ \partial'' = 0$. В этом случае определены два дифференциальных левых A-модуля $\{C, \partial'\}$ и $\{C, \partial''\}$ с производными модулями

$$H(C, \partial') = \ker \partial' / \operatorname{im} \partial' \quad \text{и} \quad H(C, \partial'') = \ker \partial'' / \operatorname{im} \partial''.$$

Если граничные операторы ∂' и ∂'' *совместные*, т.е.

$$\partial' \circ \partial'' + \partial'' \circ \partial' = 0,$$

то эндоморфизм $\partial = \partial' + \partial''\colon C \to C$ также является граничным оператором, поскольку

$$\begin{aligned}\partial \circ \partial &= (\partial' + \partial'') \circ (\partial' + \partial'')\\ &= \partial' \circ \partial' + (\partial' \circ \partial'' + \partial'' \circ \partial') + \partial'' \circ \partial'' = 0,\end{aligned}$$

и, значит, определен дифференциальный модуль $\{C, \partial\}$ с производным модулем $H(C, \partial) = \ker \partial / \operatorname{im} \partial$. В этом случае говорят, что задан *бидифференциальный левый A-модуль* $\{C, \partial', \partial''\}$.

В силу условия совместности

$$\partial''(\ker \partial') \subset \ker \partial' \quad \text{и} \quad \partial''(\operatorname{im} \partial') \subset \operatorname{im} \partial',$$

так что определено факторотображение $\boldsymbol{\partial''}\colon H(C, \partial') \to H(C, \partial')$. Очевидно, $\boldsymbol{\partial''} \circ \boldsymbol{\partial''} = 0$, так что определен дифференциальный левый A-модуль $\{H(C, \partial'), \boldsymbol{\partial''}\}$ с производным модулем $H(H(C, \partial'), \boldsymbol{\partial''})$.

Аналогичным образом определяются дифференциальный левый A-модуль $\{H(C,\partial''),\boldsymbol{\partial'}\}$ и его производный модуль $H(H(C,\partial''),\boldsymbol{\partial'})$.

Пусть $\{C,\partial'_C,\partial''_C\}$, $\{K,\partial'_K,\partial''_K\}$ – бидифференциальные левые A-модули. A-линейное отображение $f\colon C\to K$ называется *морфизмом бидифференциальных модулей*, если $\partial'_K\circ f=f\circ\partial'_C$ и $\partial''_K\circ f=f\circ\partial''_C$. Таким образом, определена категория бидифференциальных левых A-модулей. В частности, в этом случае определены факторотображения

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'\colon H(C,\partial'_C)&\to H(K,\partial'_K),\\ \mathbf{f}''\colon H(C,\partial''_C)&\to H(K,\partial''_K),\\ \mathbf{f}\colon H(C,\partial_C)&\to H(K,\partial_K).\end{aligned}$$

Пусть теперь модуль C *биградуированный* (т.е. $\mathbb{Z}^2$-градуированный), $C=\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}}C_{mn}$, граничный оператор ∂' – однородный бистепени $(-1,0)$, а граничный оператор ∂'' – однородный бистепени $(0,-1)$, так что

$$\partial'=\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}}\partial'_{mn},\qquad \partial'_{mn}\colon C_{mn}\to C_{m-1,n},$$
$$\partial''=\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}}\partial''_{mn},\qquad \partial''_{mn}\colon C_{mn}\to C_{m,n-1},$$

причем выполнены условия

$$\partial'_{m-1,n}\circ\partial'_{mn}=\partial'_{m,n-1}\circ\partial''_{mn}+\partial''_{m-1,n}\circ\partial'_{mn}=\partial''_{m,n-1}\circ\partial''_{mn}=0$$

для всех $m,n\in\mathbb{Z}$. Тогда бидифференциальный модуль $\{C,\partial',\partial''\}$ биградуируется в *бикомплекс* $\{C_{mn},\partial'_{mn},\partial''_{mn}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$, записываемый в виде антикоммутативной диаграммы рис. 1.1, где для краткости опущены индексы у граничных операторов ∂'_{mn} и ∂''_{mn}. Заметим, что антикоммутативность диаграммы есть графическое выражение условия совместности

$$\partial'_{m,n-1}\circ\partial''_{mn}+\partial''_{m-1,n}\circ\partial'_{mn}=0.$$

Такая графическая запись позволяет называть операторы ∂''_{mn} *горизонтальными*, а операторы ∂'_{mn} *вертикальными*.

Дифференциальные модули $\{C,\partial'\}$, $\{C,\partial''\}$, $\{C,\partial\}$ и их производные модули $H(C,\partial')$, $H(C,\partial'')$, $H(C,\partial)$ тоже градуируются. Именно,

$$\{C,\partial'\}=\{C_{m*},\partial'_{m*}\mid m\in\mathbb{Z}\}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\{C_{mn},\partial'_{mn}\mid m\in\mathbb{Z}\},$$
$$H(C,\partial')=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}H_{m*}(C,\partial'),\quad H_{mn}(C,\partial')=\ker\partial'_{mn}/\operatorname{im}\partial'_{m+1,n},$$
$$H_{m*}(C,\partial')=\ker\partial'_{m*}/\operatorname{im}\partial'_{m+1,*}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}H_{mn}(C,\partial'),$$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial'"'] & \vdots \arrow[d, "\partial'"'] & \vdots \arrow[d, "\partial'"'] & \\
\cdots & C_{m+1,n-1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{m+1,n} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{m+1,n+1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & \cdots \arrow[l, "\partial''"'] \\
\cdots & C_{m,n-1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{m,n} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{m,n+1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & \cdots \arrow[l, "\partial''"'] \\
\cdots & C_{m-1,n-1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{m-1,n} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{m-1,n+1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & \cdots \arrow[l, "\partial''"'] \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.1. Бикомплекс

$$\{C, \partial''\} = \{C_{*n}, \partial''_{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} \{C_{mn}, \partial''_{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\},$$
$$H(C, \partial'') = \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} H_{*n}(C, \partial''),$$
$$H_{mn}(C, \partial'') = \ker \partial''_{mn} / \operatorname{im} \partial''_{m,n+1},$$
$$H_{*n}(C, \partial'') = \ker \partial''_{*n} / \operatorname{im} \partial''_{*,n+1} = \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} H_{mn}(C, \partial''),$$

$$\{C, \partial\} = \{C_p, \partial_p \mid p \in \mathbb{Z}\},$$
$$C_p = \bigoplus\nolimits_{m+n=p} C_{mn}, \qquad \partial_p = \bigoplus\nolimits_{m+n=p} \partial_{mn},$$
$$H(C, \partial) = \bigoplus\nolimits_{p\in\mathbb{Z}} H_p(C, \partial), \quad H_p(C, \partial) = \ker \partial_p / \operatorname{im} \partial_{p+1},$$

где $\partial_{mn} = \partial'_{mn} + \partial''_{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

В силу условий совместности $\partial'_{m,n-1} \circ \partial''_{mn} + \partial''_{m-1,n} \circ \partial'_{mn} = 0$, имеем

$$\partial''_{mn}(\ker \partial'_{mn}) \subset \ker \partial'_{m,n-1} \quad \text{и} \quad \partial''_{mn}(\operatorname{im} \partial'_{m+1,n}) \subset \operatorname{im} \partial'_{m+1,n-1},$$

так что определены факторотображения

$$\boldsymbol{\partial}''_{mn}\colon H_{mn}(C,\partial') \to H_{m,n-1}(C,\partial'), \quad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Очевидно, $\boldsymbol{\partial}''_{m,n-1}\circ\boldsymbol{\partial}''_{mn}=0$ и, значит, определен комплекс

$$\{H_{*n}(C,\partial'),\boldsymbol{\partial}''_{*n}\mid n\in\mathbb{Z}\}=\bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}}\{H_{mn}(C,\partial'),\boldsymbol{\partial}''_{mn}\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

и его производный модуль

$$\begin{aligned}H(H(C,\partial'),\boldsymbol{\partial}'') &= \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} H_n(H(C,\partial'),\boldsymbol{\partial}'')\\ &= \bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}} H_n(H_{m*}(C,\partial'),\boldsymbol{\partial}''_{m*}),\end{aligned}$$

где

$$H_n(H_{m*}(C,\partial'),\boldsymbol{\partial}''_{m*})=\ker\boldsymbol{\partial}''_{mn}/\operatorname{im}\boldsymbol{\partial}''_{m,n+1}.$$

Аналогичным образом определяются комплекс

$$\{H_{m*}(C,\partial''),\boldsymbol{\partial}'_{m*}\mid m\in\mathbb{Z}\}=\bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}}\{H_{mn}(C,\partial''),\boldsymbol{\partial}'_{mn}\mid m\in\mathbb{Z}\}$$

и его производный модуль

$$\begin{aligned}H(H(C,\partial''),\boldsymbol{\partial}') &= \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} H_m(H(C,\partial''),\boldsymbol{\partial}')\\ &= \bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}} H_m(H_{*n}(C,\partial''),\boldsymbol{\partial}'_{*n}),\end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\partial}'_{mn}\colon H_{mn}(C,\partial'')\to H_{m-1,n}(C,\partial''),\\ H_m(H_{*n}(C,\partial''),\boldsymbol{\partial}'_{*n})=\ker\boldsymbol{\partial}'_{mn}/\operatorname{im}\boldsymbol{\partial}'_{m+1,n}.\end{gathered}$$

Пусть $\{C_{mn},(\partial'_C)_{mn},(\partial''_C)_{mn}\}$, $\{K_{mn},(\partial'_K)_{mn},(\partial''_K)_{mn}\}$ – бикомплексы. A-линейное отображение

$$\begin{gathered}f=\bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}}\colon C=\bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}} C_{mn}\to K=\bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}} K_{mn},\\ f_{mn}\colon C_{mn}\to K_{mn},\end{gathered}$$

называется *морфизмом бикомплексов*, если

$$(\partial'_K)_{mn}\circ f_{mn}=f_{m-1,n}\circ(\partial'_C)_{mn},\quad (\partial''_K)_{mn}\circ f_{mn}=f_{m,n-1}\circ(\partial''_C)_{mn}$$

для всех $m,n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, определена категория бикомплексов. В частности, в этом случае определены факторотображения

$$\begin{aligned}\mathbf{f}' &= \bigoplus\nolimits_{mn\in\mathbb{Z}}\mathbf{f}'_{mn}, & \mathbf{f}'_{mn}&\colon H_{mn}(C,\partial'_C)\to H_{mn}(C,\partial'_K),\\ \mathbf{f}'' &= \bigoplus\nolimits_{mn\in\mathbb{Z}}\mathbf{f}''_{mn}, & \mathbf{f}''_{mn}&\colon H_{mn}(C,\partial''_C)\to H_{mn}(K,\partial''_K),\\ \mathbf{f} &= \bigoplus\nolimits_{p\in\mathbb{Z}}\mathbf{f}_p, & \mathbf{f}_p&\colon H_p(C,\partial_C)\to H_p(K,\partial_K).\end{aligned}$$

Аналогичным образом обстоят дела и в случае когомологий с заменой левого A-модуля C на правый A-модуль

$$C(M) = \mathrm{Hom}_A(C, M),$$

граничных операторов $\partial', \partial''\colon C \to C$ на дифференциалы

$$\begin{gathered} d', d''\colon C(M) \to C(M), \\ d'(\phi) = \phi \circ \partial', \quad d''(\phi) = \phi \circ \partial'' \quad \text{для всех} \quad \phi \in C(M). \end{gathered}$$

Условие совместности $\partial' \circ \partial'' + \partial'' \circ \partial' = 0$ в этом случае принимает вид $d' \circ d'' + d'' \circ d' = 0$, поскольку

$$(d' \circ d'' + d'' \circ d')(\phi) = \phi \circ (\partial'' \circ \partial' + \partial' \circ \partial'') = 0 \ \text{ для всех } \ \phi \in C(M).$$

Итак, определен бидифференциальный правый A-модуль

$$\{C(M), d', d''\}.$$

В частности, определены дифференциальный модуль

$$\{C(M), d'\}$$

с производным $H(C(M), d')$, дифференциальный модуль

$$\{C(M), d''\}$$

с производным $H(C(M), d'')$ и дифференциальный модуль

$$\{C(M), d\}$$

с производным $H(C(M), d)$, где $d = d' + d''$.

Далее, определены фактордифференциалы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{d''}\colon H(C(M), d') \to H(C(M), d'), \\ \boldsymbol{d'}\colon H(C(M), d'') \to H(C(M), d''), \end{gathered}$$

дифференциальные модули

$$\{H(C(M), d'), \boldsymbol{d''}\}, \quad \{H(C(M), d''), \boldsymbol{d'}\}$$

и их производные модули

$$H(H(C(M), d'), \boldsymbol{d''}), \quad H(H(C(M), d''), \boldsymbol{d'}).$$

В биградуированной ситуации

$$C = \bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}} C_{mn},$$
$$C(M) = \bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}} C^{mn}(M), \quad C^{mn}(M) = \operatorname{Hom}_A(C_{mn}, M),$$

дифференциал d' – однородный бистепени $(1,0)$, а дифференциал d'' – однородный бистепени $(0,1)$, так что

$$d' = \bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}}(d')^{mn}, \qquad (d')^{mn}\colon C^{mn}(M) \to C^{m+1,n}(M),$$
$$d'' = \bigoplus\nolimits_{m,n\in\mathbb{Z}}(d'')^{mn}, \qquad (d'')^{mn}\colon C^{mn}(M) \to C^{m,n+1}(M).$$

В результате получаем бикомплекс

$$\{C^{mn}(M), (d')^{mn}, (d'')^{mn} \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$$

с антикоммутативной диаграммой рис. 1.2. Дифференциальные модули $\{C(M), d'\}$, $\{C(M), d''\}$, $\{C(M), d\}$ и их производные градуируются следующим образом:

$$\begin{aligned}\{C(M), d'\} &= \{C^{m*}(M), (d')^{m*} \mid m \in \mathbb{Z}\}\\ &= \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}}\{C^{mn}(M), (d')^{mn} \mid m \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$
$$H(C(M), d') = \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} H^{m*}(C(M), d'),$$
$$H^{m*}(C(M), d') = \ker(d')^{m*}/\operatorname{im}(d')^{m-1,*} = \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} H^{mn}(C(M), d'),$$
$$H^{mn}(C(M), d') = \ker(d')^{mn}/\operatorname{im}(d')^{m-1,n},$$

$$\begin{aligned}\{C(M), d''\} &= \{C^{*n}(M), (d'')^{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\}\\ &= \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}}\{C^{mn}(M), (d'')^{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$
$$H(C(M), d'') = \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} H^{*n}(C(M), d''),$$
$$H^{*n}(C(M), d'') = \ker(d'')^{*n}/\operatorname{im}(d'')^{*,n-1} = \bigoplus\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} H^{mn}(C(M), d''),$$
$$H^{mn}(C(M), d'') = \ker(d'')^{mn}/\operatorname{im}(d'')^{m,n-1},$$

$$\{C(M), d\} = \{C^p, d^p \mid p \in \mathbb{Z}\},$$
$$C^p(M) = \bigoplus\nolimits_{m+n=p} C^{mn}(M), \quad d^p = \bigoplus\nolimits_{m+n=p} d^{mn},$$
$$H(C(M), d) = \bigoplus\nolimits_{p\in\mathbb{Z}} H^p(C(M), d),$$
$$H^p(C(M), d) = \ker d^p/\operatorname{im} d^{p-1},$$

где $d^{mn} = (d')^{mn} + (d'')^{mn}$, $m,n \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r, "d''"] & C^{m+1,n-1}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & C^{m+1,n}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & C^{m+1,n+1}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d''"] & C^{m,n-1}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & C^{m,n}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & C^{m,n+1}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d''"] & C^{m-1,n-1}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & C^{m-1,n}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & C^{m-1,n+1}(M) \arrow[r, "d''"] \arrow[u, "d'"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u, "d'"] & \vdots \arrow[u, "d'"] & \vdots \arrow[u, "d'"] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1.2. Бикомплекс

Фактордифференциалы

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{d''})^{mn}\colon H^{mn}(C(M), d') &\to H^{m,n+1}(C(M), d'),\\
(\boldsymbol{d'})^{mn}\colon H^{mn}(C(M), d'') &\to H^{m+1,n}(C(M), d''),
\end{aligned}
$$

определяют комплексы

$$
\begin{aligned}
&\{H^{*n}(C(M), d'), (\boldsymbol{d''})^{*n} \mid n \in \mathbb{Z}\}\\
&\quad = \textstyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\{H^{mn}(C(M), d'), (\boldsymbol{d''})^{mn} \mid n \in \mathbb{Z}\},\\
&\{H^{m*}(C(M), d''), (\boldsymbol{d'})^{m*} \mid m \in \mathbb{Z}\}\\
&\quad = \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\{H^{mn}(C(M), d''), (\boldsymbol{d'})^{mn} \mid m \in \mathbb{Z}\},
\end{aligned}
$$

с производными модулями

$$\begin{aligned}H(H(C(M),d'),\boldsymbol{d''}) &= \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(H(C(M),d'),\boldsymbol{d''})\\ &= \textstyle\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}} H^n(H^{m*}(C(M),d'),(\boldsymbol{d''})^{m*}),\\ H(H(C(M),d''),\boldsymbol{d'}) &= \textstyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} H^m(H(C(M),d''),\boldsymbol{d'})\\ &= \textstyle\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}} H^m(H^{*n}(C(M),d''),(\boldsymbol{d'})^{*n}).\end{aligned}$$

Отметим, что на практике часто встречаются случаи, когда модули $C_{mn}=0$ при $m<0$ и/или $n<0$.

Подробное изложение см., например, в [16], [21], [10], [8].

1.7. Спектральные последовательности

В этой секции всюду, если не оговорено противное, $\mathbb{F}$ – поле, A – унитальная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$, термин *модуль* означает *левый A-модуль*.

1.7.1. Модули с фильтрацией. Пусть C – модуль. *Убывающей фильтрацией* модуля C называется последовательность его подмодулей $\{C^p; p\in\mathbb{Z}\}$ такая, что

$$\cdots\supset C^{p-1}\supset C^p\supset C^{p+1}\supset\cdots,\quad \textstyle\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} C^p = C.$$

Дуальным образом определяется возрастающая фильтрация. Здесь мы ограничимся убывающими фильтрациями и будем называть *модулем с фильтрацией* любой модуль с определенной на нем убывающей фильтрацией.

Пусть $C=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} C^p$, $K=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} K^p$ – модули с фильтрацией. A-линейное отображение $f\colon C\to K$ называется *морфизмом модулей с фильтрацией*, если $f(C^p)\subset K^p$ для всех $p\in\mathbb{Z}$. Таким образом, определена категория модулей с фильтрацией.

Пусть $C=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} C^p$ – модуль с фильтрацией. *Градуированным модулем, связанным с модулем C* называют модуль

$$G(C)=\textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} G_n(C),\quad \text{где}\quad G_n(C)=C^n/C^{n+1} \text{ – фактормодули,}$$

с естественной градуировкой. (Здесь и далее в этом разделе термин *градуированный* означает *$\mathbb{Z}$-градуированный*.)

С другой стороны, пусть $C=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ есть градуированный модуль. Зададим на C фильтрацию подмодулями

$$C^p=\textstyle\bigoplus_{n\geqslant p} C_n,$$

тогда градуированный модуль $G(C)\simeq C$.

Пусть на модуле C одновременно определены градуировка и фильтрация, т.е. $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} C^p$. Говорят, что градуировка и фильтрация *совместимы*, если

$$C^p = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^p \cap C_n \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},$$

т.е. если подмодули C^p разлагаются на однородные компоненты. В этом случае C *называется градуированным модулем с фильтрацией.* Также, говорят, что фильтрация *регулярна*, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует $P(n) \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$C^p \cap C_n = 0 \quad \text{для всех} \quad p \geqslant P(n).$$

1.7.2. Спектральная последовательность дифференциального модуля с фильтрацией. Пусть на модуле C определены дифференциал $d\colon C \to C$, $d \circ d = 0$, и фильтрация $C = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} C^p$. Говорят, что дифференциал и фильтрация *совместимы*, если $dC^p \subset C^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}$. В этом случае пара $\{C, d\} = \{C = \bigcup C^p, d\}$ называется *дифференциальным модулем с фильтрацией*. Пусть $\{C, d_C\}$, $\{K, d_K\}$ – два дифференциальных модуля с фильтрацией. Морфизм модулей $f\colon C \to K$ называется *морфизмом дифференциальных модулей с фильтрацией*, если f есть одновременно и морфизм дифференциальных модулей, и морфизм модулей с фильтрацией, т.е. если $d_K \circ f = f \circ d_C$ и $f(C^p) \subset K^p$ для всех $p \in \mathbb{Z}$. Таким образом, определена категория дифференциальных модулей с фильтрацией.

Пусть $\{C, d\}$ – дифференциальный модуль с фильтрацией, $C^{-\infty} = C$, $C^{\infty} = 0$. Ниже нам понадобятся следующие модули:

$$\begin{aligned}
&Z(C) = \ker d = \{x \in C \mid dx = 0\} \text{ – циклы модуля } \{C, d\},\\
&B(C) = \operatorname{im} d = dC = \{x = dy \mid y \in C\} \text{ – границы модуля } \{C, d\},\\
&H(C) = Z(C)/B(C) \text{ – гомологии модуля } \{C, d\},\\
&Z(C^p) = \ker d^p = \{x \in C^p \mid dx = 0\} \text{ – циклы модуля } \{C^p, d^p\},\\
&B(C^p) = \operatorname{im} d^p = dC^p = \{x = dy \in C^p \mid y \in C^p\}\\
&\qquad\qquad \text{ – границы модуля } \{C^p, d^p\},\\
&H(C^p) = Z(C^p)/B(C^p) \text{ – гомологии модуля } \{C^p, d^p\},
\end{aligned}$$

где $d^p = d|_{C^p}\colon C^p \to C^p$ – сужение дифференциала $d\colon C \to C$ на $C^p \subset C$, $p \in \mathbb{Z}$.

Для $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ положим

$$Z_r^p = Z(C^p \bmod C^{p+r}) = \{x \in C^p \mid dx \in C^{p+r}\},$$
$$B_r^p = C^p \cap dC^{p-r} = \{x = dy \in C^p \mid y \in C^{p-r}\},$$

в частности,

$$B_r^p = dZ_r^{p-r} = \{x = dy \mid y \in Z_r^p\}, \quad \text{для всех} \quad p, r \in \mathbb{Z},$$
$$Z_r^p = C^p, \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ r \leqslant 0,$$
$$B_r^p = dC^{p-r} = \{x = dy \mid y \in C^{p-r}\}, \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ r \leqslant 0,$$
$$Z_\infty^p = Z(C^p), \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},$$
$$B_\infty^p = C^p \cap dC = \{x = dy \in C^p \mid y \in C\}, \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $Z_r^p \supset Z_{r+1}^p \supset Z_\infty^p$ для всех $p, r \in \mathbb{Z}$. Также справедлива следующая

Лемма 1.7.1. *Для каждого $p \in \mathbb{Z}$ модули B_r^P, $r \in \mathbb{Z}$, образуют возрастающую фильтрацию модуля B_∞^p, т.е.*

$$B_r^p \subset B_{r+1}^p \quad \text{\textit{для всех}} \quad r \in \mathbb{Z}, \quad \bigcup\nolimits_{r \in \mathbb{Z}} B_r^p = B_\infty^p.$$

Доказательство. Эта лемма есть прямое следствие того, что модули C^s, $s \in \mathbb{Z}$, образуют убывающую фильтрацию модуля C. Подробнее, с одной стороны

$$B_r^p = C^p \cap dC^{p-r} \subset C^p \cap dC^{p-r-1} = B_{r+1}^p \subset C^p \cap C = B_\infty^p,$$

так что $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} B_r^p \subset B_\infty^p$. С другой стороны, пусть $x \in B_\infty^p$, т.е. $x = dy \in C^p$, $y \in C$. Поскольку $C = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} C^s$, найдется индекс $s \in \mathbb{Z}$ такой, что $y \in C^s$. Положим $r = p - s$, тогда получим $x = dy \in C^p$, $y \in C^{p-r}$, т.е. $x \in B_r^p$, и, значит, $B_\infty^p \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} B_r^p$, что и требовалось.

По построению

$$Z_r^p \supset B_{r-1}^p \text{ и } Z_r^p \supset Z_{r-1}^{p+1} \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

так что определены фактормодули

$$E_r^p = Z_r^p / (B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}), \quad p \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

которые объединяются в $\mathbb{Z}$-градуированные модули

$$E_r = \bigoplus\nolimits_{p \in \mathbb{Z}} E_r^p, \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Построенные таким образом модули образуют последовательность

$$\{E_r \mid r \in \mathbb{Z}\},$$

которая называется *спектральной последовательностью дифференциального модуля с фильтрацией* $\{C = \bigcup C^p, d\}$.

В частности, при $r \leqslant 0$ имеем

$$Z_r^p = C^p, \quad B_{r-1}^p = dC^{p-r+1} \subset C^{p+1} = Z_{r-1}^{p+1},$$

так что

$$E_r^p = C^p/C^{p+1} \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ r \leqslant 0.$$

При $r = 1$ имеем

$$B_0^p = dC^p, \quad Z_0^{p+1} = C^{p+1},$$

так что

$$E_1^p = Z_1^p/(dC^p + C^{p+1}) = \{x \in C^p \mid dx \in C^{p+1}\}/(dC^p + C^{p+1})$$

для всех $p \in \mathbb{Z}$, и так далее. В пределе получим

$$E_\infty^p = Z_\infty^p/(B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}) = Z(C^p)/(B(C^p) + Z(C^{p+1})),$$

для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Для каждого $r \in \mathbb{Z}$ определим эндоморфизм

$$d_r = \bigoplus\nolimits_{p\in\mathbb{Z}} d_r^p \in \operatorname{End}_A(E_r), \quad d_r^p \colon E_r^p \to E_r^{p+r}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

подробнее,

$$E_r^p = Z_r^p/(B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) \xrightarrow{d_r^p} E_r^{p+r} = Z_r^{p+r}/(B_{r-1}^{p+r} + Z_{r-1}^{p+r+1}),$$

правилом

$$[x]_r^p = x + (B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}) \mapsto d_r^p[x]_r^p = [dx]_r^{p+r} = dx + (B_{r-1}^{p+r} + Z_{r-1}^{p+r+1})$$

для всех $x \in Z_r^p$. Это определение корректно, поскольку по построению

$$dZ_r^p \subset Z_r^{p+r}, \quad dB_{r-1}^p = 0, \quad dZ_{r-1}^{p+1} = B_{r-1}^{p+r}.$$

Очевидно, композиция $d_r^{p+r} \circ d_r^p = 0$ для всех $p, r \in \mathbb{Z}$, так что для каждого $r \in \mathbb{Z}$ определен $\mathbb{Z}$-градуированный дифференциальный модуль $\{E_r, d_r\}$ с r-однородным дифференциалом d_r.

Теорема 1. *Для каждого $r \in \mathbb{Z}$ производный модуль $H(E_r)$ совпадает с модулем E_{r+1}, подробнее,*

$$\ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} = E_{r+1}^p \quad \textit{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Хотя доказательство одинаковое для всех $r \in \mathbb{Z}$, для наглядности сначала рассмотрим простые случаи. Пусть $r < 0$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$E_r^p = C^p / C^{p+1} = E_{r+1}^p, \quad E_r^{p+r} = C^{p+r} / C^{p+r+1}$$

и для всякого $x \in C^p$

$$d_r^p(x + C^{p+1}) = dx + C^{p+r+1} = 0,$$

поскольку

$$dx \in C^p \subset C^{p+r+1} \quad \text{при} \quad r < 0,$$

откуда $\ker d_r^p = E_r^p$, $\operatorname{im} d_p^{p-r} = 0$ и, следовательно,

$$\ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} = E_r^p = E_{r+1}^p \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ r < 0.$$

Другой простой случай $r = 0$. Здесь для $p \in \mathbb{Z}$ имеем

$$E_0^p = C^p / C^{p+1}, \quad E_1^p = Z_1^p / (dC^p + C^{p+1})$$

и для любого $x \in C^p$

$$d_0^p(x + C^{p+1}) = dx + C^{p+1},$$

откуда

$$\operatorname{im} d_0^p = dC^p + C^{p+1}, \quad \ker d_0^p = Z_1^p,$$

и, значит,

$$\ker d_0^p / \operatorname{im} d_0^p = Z_1^p / (dC^p + C^{p+1}) = E_1^p \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь общий случай $p, r \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что доказательство по сути есть игра с фактормодулями и суммами подмодулей, не слишком популярная среди неспециалистов, рассуждения проведем максимально подробно. Итак,

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}}, \quad E_r^{p+r} = \frac{Z_r^{p+r}}{dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1}},$$

$$E_{r+1}^p = \frac{Z_{r+1}^p}{dZ_r^{p-r} + Z_r^{p+1}}.$$

Для всякого $x \in Z_r^p$ имеем $d_r^p[x]_r^p = dx + (dZ_{r-1}^{p+1} + Z_{r-1}^{p+r+1})$, так что $d_r^p[x]_r^p = 0$ тогда и только тогда, когда $dx = dy + z$, $y \in Z_{r-1}^{p+1}$, $z \in Z_{r-1}^{p+r+1}$. Положим $u = x - y$, тогда $u \in (C^p + C^{p+1}) = C^p$, $du = z \in C^{p+r+1}$, т.е. $u \in Z_{r+1}^p$, и, значит, $x = u + y \in Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}$. Отсюда

$$\ker d_r^p = (Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1})/(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}).$$

Аналогичным образом,

$$\operatorname{im} d_r^{p-r} = (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})/(dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}),$$

где мы учли, что $dZ_{r-1}^{p-r+1} \subset dZ_r^{p-r}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\ker d_r^p/\operatorname{im} d_r^{p-r} &= \frac{Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}} \bigg/ \frac{dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1}}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1}} \\
&= \frac{Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}{dZ_{r-1}^{p-r+1} + Z_{r-1}^{p+1} + dZ_r^{p-r}} = \frac{Z_{r+1}^p + Z_{r-1}^{p+1}}{Z_{r-1}^{p+1} + dZ_r^{p-r}} \\
&= \frac{Z_{r+1}^p}{Z_{r+1}^p \cap (dZ_r^{p-r} + Z_{r-1}^{p+1})} = \frac{Z_{r+1}^p}{dZ_r^{p-r} + Z_{r+1}^p \cap Z_{r-1}^{p+1}} \\
&= Z_{r+1}^p/(dZ_r^{p-r} + Z_r^{p+1}) = E_{r+1}^p,
\end{aligned}$$

где мы учли, что

$$Z_{r-1}^{p-r+1} \subset Z_r^{p-r}, \quad dZ_r^{p-r} \subset Z_{r+1}^p, \quad Z_{r+1}^p \cap Z_{r-1}^{p+1} = Z_r^{p+1}.$$

Пример 1.7.1. Пусть $\{C, d\}$ – комплекс,

$$C = \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} C_n, \quad d = \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} d_n, \quad d_n \colon C_n \to C_{n+1}.$$

Ниже следует отличать дифференциал $d_n \colon C_n \to C_{n+1}$ от дифференциала $d_r \colon E_r \to E_r$. Зададим на модуле C фильтрацию подмодулями $C^p = \bigoplus_{n\geqslant p} C_n$, $p \in \mathbb{Z}$, тогда $dC^p \subset C^{p+1} \subset C^p$, поскольку

$$dC^p = \bigoplus\nolimits_{n\geqslant p} d_n C_n \subset \bigoplus\nolimits_{n\geqslant p} C_{n+1} = \bigoplus\nolimits_{n\geqslant p+1} C_n = C^{p+1}.$$

В частности, определен дифференциальный модуль с фильтрацией. Вычислим его спектральную последовательность. Пусть $p, r \in \mathbb{Z}$. По определению

$$Z_r^p = \{x \in C^p \mid dx \in C^{p+r}\}, \quad Z_{r-1}^{p+1} = \{x \in C^{p+1} \mid dx \in C^{p+r}\},$$

так что

$$Z_r^p/Z_{r-1}^{p+1} = \{x \in C_p \mid dx \in C^{p+r} \cap C_{p+1}\} = \begin{cases} C_p, & r \leqslant 1, \\ Z(C_p), & r \geqslant 2, \end{cases}$$

где $Z(C_p) = \ker d_p = \{x \in C_p \mid dx = 0\}$ и было учтено, что

$$C^{p+r} \cap C_{p+1} = \begin{cases} C_{p+1}, & r \leqslant 1, \\ 0, & r \geqslant 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{B_{r-1}^p + Z_{r-1}^{p+1}} = \begin{cases} C_p/(C_p \cap B_{r-1}^p), & r \leqslant 1 \\ Z(C_p)/(C_p \cap B_{r-1}^p), & r \geqslant 2. \end{cases}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} C_p \cap B_{r-1}^p &= C_p \cap C^p \cap dC^{p-r+1} \\ &= d(C^{p-r+1} \cap C_{p-1}) = \begin{cases} 0, & r \leqslant 1, \\ dC_{p-1}, & r \geqslant 2, \end{cases} \end{aligned}$$

так что

$$E_r^p = \begin{cases} C_p, & r \leqslant 1, \\ H_p(C), & r \geqslant 2, \end{cases}$$

коротко,

$$E_r = \bigoplus\nolimits_{p \in \mathbb{Z}} E_r^p = \begin{cases} C, & r \leqslant 1, \\ H(C) & r \geqslant 2, \end{cases}$$

где $H_p(C) = \ker d_p / \operatorname{im} d_{p-1} = Z(C_p)/B(C_p)$, $H(C) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C)$. Аналогичным образом проверяем, что для всех $p, r \in \mathbb{Z}$,

$$d_r^p = \begin{cases} 0, & r \neq 1, \\ d_p, & r = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\ker d_r^p / \operatorname{im} d_r^{p-r} = \begin{cases} C_p, & r \leqslant 0, \\ H_p(C), & r \geqslant 1, \end{cases} = E_{r+1}^p,$$

в согласии с теоремой 1. И наконец,

$$\begin{aligned} E_\infty^p &= Z_\infty^p/(B_\infty^p + Z_\infty^{p+1}) = Z(C_p)/(C_p \cap dC) \\ &= Z(C_p)/B(C_p) = H_p(C). \end{aligned}$$

Пусть $p \in \mathbb{Z}$. По построению

$$C^p \subset C, \quad Z(C^p) \subset Z(C), \quad B(C^p) \subset B(C),$$

так что определен морфизм

$$j^p \colon H(C^p) \to H(C), \quad x + dC^p \mapsto x + dC, \quad \text{для всех} \quad x \in Z(C^p).$$

Его образ

$$\operatorname{im} j^p = H(C)^p = \frac{Z(C^p) + dC}{dC} = \frac{Z(C^p)}{C^p \cap dC} = \frac{Z^p_\infty}{B^p_\infty}.$$

Вложения $C^p \supset C^{p+1}$ влекут вложения $H(C)^p \supset H(C)^{p+1}$, так что определены модуль с фильтрацией $H(C) = \bigcup H(C)^p$ (другими словами, фильтрация модуля C индуцирует фильтрацию производного модуля $H(C)$). В частности, определен градуированный модуль

$$G(H(C)) = \bigoplus G^p(H(C)),$$

где

$$G^p(H(C)) = H(C)^p / H(C)^{p+1}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2. *Справедливо равенство $E_\infty = G(H(C))$, или, подробнее,*

$$E^p_\infty = G(H(C))^p \quad \textit{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $p \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\frac{H(C)^p}{H(C)^{p+1}} = \frac{Z^p_\infty}{B^p_\infty} \Big/ \frac{Z^{p+1}_\infty}{B^{p+1}_\infty} = \frac{Z^p_\infty}{B^p_\infty + Z^{p+1}_\infty + B^{p+1}_\infty} = \frac{Z^p_\infty}{B^p_\infty + Z^{p+1}_\infty} = E^p_\infty,$$

где мы учли, что $Z^{p+1}_\infty \subset Z^p_\infty$, $B^{p+1}_\infty \subset B^p_\infty$.

1.7.3. Специальные случаи.

Градуировка. Пусть $\{C, d\}$ – дифференциальный модуль с фильтрацией, причем модуль C снабжен градуировкой, совместимой с фильтрацией, а дифференциал d – однородный степени $+1$ (говорят, что $\{C, d\}$ – *комплекс с фильтрацией*), так что для всех $p, q \in \mathbb{Z}$ имеем

$$C = \bigcup C^p = \bigoplus\nolimits_{q \in \mathbb{Z}} C_q, \quad dC^p \subset C^p, \quad d = \bigoplus\nolimits_{q \in \mathbb{Z}} d_q, \quad d_q \colon C_q \to C_{q+1}.$$

В такой ситуации члены E_r, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, биградуируются. Именно, пусть $p, q \in \mathbb{Z}$, тогда

$$
\begin{aligned}
&C^{pq} = C^p \cap C_{p+q}, \quad C^p = \textstyle\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C^{pq}, \quad dC^{pq} \subset C^{p,q+1},\\
&Z_r^{pq} = Z_r^p \cap C_{p+q} = \{x \in C^{pq} \mid dx \in C^{p+r,q-r+1}\},\\
&\quad Z_r^p = \textstyle\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} Z_r^{pq}, \quad dZ_r^{pq} = C^{p+r,q-r+1} \cap dC^{pq} = B_r^{p+r,q-r+1},\\
&B_r^{pq} = B_r^p \cap C_{p+q} = C^{pq} \cap dC^{p-r,q+r-1}\\
&\qquad = \{x = dy \in C^{pq} \mid y \in C^{p-r,q+r-1}\},\\
&\qquad B_r^p = \textstyle\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} B_r^{pq}, \quad dB_r^{pq} = 0,\\
&E_r^{pq} = Z_r^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}), \quad E_r^p = \textstyle\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} E_r^{pq}.\\
&\qquad d_r^p = \textstyle\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} d_r^{pq}, \quad d_r^{pq}\colon E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}, \text{ для всех } p, q \in \mathbb{Z},\\
&\qquad\quad E_{r+1}^{pq} = \ker d_r^{pq} / \operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1}.
\end{aligned}
$$

Доказательство этих равенств осуществляется прямой проверкой и является хорошим упражнением по технике работы с фактормодулями и суммами подмодулей. Доказательство последнего равенства использует теорему 1.

В частности,

$$
E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \quad \text{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}.
$$

Очевидно, $Z_r^{pq} \supset Z_{r+1}^{pq} \supset Z_\infty^{pq}$ для всех $p, q, r \in \mathbb{Z}$, а лемма 1.7.1 имеет

Следствие 1.7.1. *Для каждой пары $p, q \in \mathbb{Z}$ модули B_r^{pq}, $r \in \mathbb{Z}$, образуют возрастающую фильтрацию модуля B_∞^{pq}, т.е.*

$$
B_r^{pq} \subset B_{r+1}^{pq} \quad \textit{для всех} \quad r \in \mathbb{Z}, \quad \textstyle\bigcup_{r\in\mathbb{Z}} B_r^{pq} = B_\infty^{pq}.
$$

По построению модуль $H(C)$ имеет фильтрацию

$$
H(C) = \bigcup H(C)^p
$$

(см. с. 107) и градуировку

$$
H(C) = \bigoplus H_q(C)
$$

(см. с. 88). Очевидно, они совместимы. Для $p, q \in \mathbb{Z}$, положим

$$
H_q(C)^p = H_q(C) \cap H(C)^p = \{x + C^p \cap C_q \cap dC \mid x \in C^p \cap C_q,\ dx = 0\},
$$

тогда
$$E_\infty^{pq} = H_{p+q}(C)^p / H_{p+q}(C)^{p+1}.$$
Действительно,
$$\begin{aligned} H_{p+q}(C)^p &= \{x + C^{pq} \cap dC \mid x \in C^{pq},\ dx = 0\} = Z_\infty^{pq}/B_\infty^{pq}, \\ H_{p+q}(C)^{p+1} &= \{x + C^{p+1,q-1} \cap dC \mid x \in C^{p+1,q-1},\ dx = 0\} \\ &= Z_\infty^{p+1,q-1}/B_\infty^{p+1,q-1}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} H_{p+q}(C)^p / H_{p+q}(C)^{p+1} &= \frac{Z_\infty^{pq}}{B_\infty^{pq}} \Big/ \frac{Z_\infty^{p+1,q-1}}{B_\infty^{p+1,q-1}} \\ = \frac{Z_\infty^{pq}}{B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p+1,q-1}} &= \frac{Z_\infty^{pq}}{B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}} = E_\infty^{pq}, \end{aligned}$$
где мы учли, что $Z_\infty^{p+1,q-1} \subset Z_\infty^{pq}$ и $B_\infty^{p+1,q-1} \subset B_\infty^{pq}$.

Регулярная фильтрация. Пусть в условиях предыдущего пункта фильтрация комплекса $\{C, d\}$ регулярная, т.е. для всякого индекса $q \in \mathbb{Z}$ существует номер $P(q) \in \mathbb{Z}$ такой, что $C^p \cap C_q = 0$ для всех $p \geqslant P(q)$.

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}$, тогда $Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq}$ при $r \geqslant R = P(p+q+1) - p$, поскольку
$$Z_r^{pq} = \{x \in C^{pq} \mid dx \in C^{p+r,q-r+1}\},$$
а $C^{p+r,q-r+1} = C^{p+r} \cap C_{p+q+1} = 0$ при любых $p + r \geqslant P(p+q+1)$. Более того, и дифференциал $d_r^{pq} = 0$ при $r \geqslant R$, поскольку в этом случае $d_r^{pq}\colon E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1} = Z_r^{p+q,q-r+1}/(\dots)$, а $Z_r^{p+q,q-r+1} \subset C^{p+r,q-r+1} = 0$. Отсюда с помощью теоремы 1 выводим, что $E_{r+1}^{pq} = E_r^{pq}/\operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1}$, т.е. имеется точная последовательность модулей
$$0 \longrightarrow \operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1} \longrightarrow E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_r^{pq}} E_{r+1}^{pq} \longrightarrow 0, \quad r \geqslant R,$$
где π_r^{pq} – каноническая проекция модуля на фактормодуль. Таким образом, для каждой пары $p, q \in \mathbb{Z}$ определена индуктивная последовательность модулей
$$E_R^{pq} \xrightarrow{\pi_R^{pq}} E_{R+1}^{pq} \xrightarrow{\pi_{R+1}^{pq}} \dots \xrightarrow{\pi_{r-1}^{pq}} E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_r^{pq}} E_{r+1}^{pq} \xrightarrow{\pi_{r+1}^{pq}} \dots,$$
или коротко $\{E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_r^{pq}} E_{r+1}^{pq} \mid r \geqslant R\}$.

Теорема 3. *В указанных выше условиях для всякой пары $p, q \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство*
$$\varinjlim E_r^{pq} = E_\infty^{pq}.$$

Доказательство. Действительно, по построению модуль $\varinjlim E_r^{pq}$ характеризуется точностью последовательности

$$0 \longrightarrow N^{pq} \longrightarrow \bigoplus_{r \geqslant R} E_r^{pq} \xrightarrow{\pi^{pq}} \varinjlim E_r^{pq} \longrightarrow 0,$$

где

$$N^{pq} = \{\mathbf{x} = \textstyle\sum_r \mathbf{x}_r \in \bigoplus E_r^{pq} \mid \sum_r \pi_{rs}^{pq}(\mathbf{x}_r) = 0 \text{ для некоторого } s\},$$

а π^{pq} – каноническая проекция модуля на фактормодуль (поясним, что $\pi_{rs}^{pq} = \pi_{s-1}^{pq} \circ \ldots \circ \pi_r^{pq}$, см. пример 1.2.32).

Далее, по определению модуль $E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1})$, тогда как при $r \geqslant R$ модуль $E_r^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1})$, поскольку модуль $Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_\infty^{p+1,q-1}$ при

$$r - 1 \geqslant P((p+1) + (q-1) + 1) - (p+1) = R - 1,$$

т.е. при $r \geqslant R$. Для каждого $r \geqslant R$ определим эпиморфизм $\pi_{r\infty}^{pq} \colon E_r^{pq} \to E_\infty^{pq}$ правилом

$$\mathbf{x}_r = x + (B_{r-1}^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) \mapsto \mathbf{x}_\infty = x + (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}),$$
$$\text{для всех} \quad x \in Z_\infty^{pq},$$

напомним, что $B_{r-1}^{pq} \subset B_\infty^{pq}$. В силу универсальности прямой суммы определен эпиморфизм $\pi_\infty^{pq} \colon \bigoplus_{r \geqslant R} E_r^{pq} \to E_\infty^{pq}$, действующий по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_\infty = \sum \pi_{r\infty}^{pq}(\mathbf{x}_r) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_r \in \bigoplus E_r^{pq},$$

причем для всех $s \geqslant R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E_s^{pq} \arrow[dl, "\iota_s^{pq}"'] \arrow[dr, "\pi_{s\infty}^{pq}"] & \\ \bigoplus_{r \geqslant R} E_r^{pq} \arrow[rr, "\pi_\infty^{pq}"'] & & E_\infty^{pq} \end{tikzcd}$$

где ι_s^{pq} – канонические инъекции. В частности, определена вторая точная последовательность модулей

$$0 \longrightarrow N_\infty^{pq} \longrightarrow \bigoplus_{r \geqslant R} E_r^{pq} \xrightarrow{\pi_\infty^{pq}} E_\infty^{pq} \longrightarrow 0,$$

где $N_\infty^{pq} = \{\mathbf{x} \in \bigoplus E_r^{pq} \mid \pi_\infty^{pq}(\mathbf{x}) = 0\}$.

В силу леммы 1.2.1 теорема будет доказана, если мы покажем, что $N^{pq} = N^{pq}_\infty$. Итак, пусть

$$\mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_r \in \bigoplus E^{pq}_r, \quad \text{где} \quad \mathbf{x}_r = x_r + (B^{pq}_{r-1} + Z^{p+1,q-1}_\infty), \quad x_r \in Z^{pq}_\infty.$$

Пусть $s \geqslant \operatorname{supp} \mathbf{x}$, тогда

$$\sum \pi^{pq}_{rs}(\mathbf{x}_r) = x + (B^{pq}_{s-1} + Z^{p+1,q-1}_\infty), \quad \text{где} \quad x = \sum x_r \in Z^{pq}_\infty,$$

так что $\sum \pi^{pq}_{rs}(\mathbf{x}_r) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y + z$, для некоторых $y \in B^{pq}_{s-1}$, $z \in Z^{p+1,q-1}_\infty$. С другой стороны,

$$\pi^{pq}_\infty(\mathbf{x}) = \sum \pi^{pq}_{r\infty}(\mathbf{x}_r) = x + (B^{pq}_\infty + Z^{p+1,q-1}_\infty), \text{ где } x = \sum x_r \in Z^{pq}_\infty,$$

так что $\pi^{pq}_\infty(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y + z$ для некоторых $y \in B^{pq}_\infty$, $z \in Z^{p+1,q-1}_\infty$. Но, согласно следствию 1.7.1, $B^{pq}_\infty = \bigcup B^{pq}_r$, и, значит, найдется индекс $s \geqslant R$ такой, что фактически $y \in B^{pq}_{s-1}$. Сравнивая полученные выражения, приходим к выводу, что $N^{pq} = N^{pq}_\infty$, что и требовалось.

Неотрицательная фильтрация. Пусть $\{C, d\}$ – дифференциальный модуль с фильтрацией. Фильтрация $C = \bigcup C^p$ называется *неотрицательной*, если $C^0 = C$ (а значит, и $C^p = C$ для всех $p \leqslant 0$). В этом случае

$$E^p_r = 0 \quad \text{для всех} \quad p < 0, \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Действительно, при $r \in \mathbb{Z}$ модуль

$$Z^{p+1}_{r-1} = \{x \in C^{p+1} = C^p = C \mid dx \in C^{p+r}\} = Z^p_r,$$

так что $E^p_r = Z^p_r/(B^p_{r-1} + Z^{p+1}_{r-1}) = 0$, а при $r = \infty$ модуль

$$Z^{p+1}_\infty = \{x \in C^{p+1} = C^p = C \mid dx = 0\} = Z^p_\infty,$$

и опять $E^p_\infty = Z^p_\infty/(B^p_\infty + Z^{p+1}_\infty) = 0$.

Фильтрация, подчиненная градуировке. Пусть $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией. Фильтрация $C = \bigcup C^p$ называется *подчиненной* градуировке $C = \bigoplus C_q$, если $C^p \cap C_q = 0$ при $p \geqslant q + 1$ (в частности, фильтрация регулярная). Здесь

$$E^{pq}_r = 0 \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q < 0, \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Действительно, в этом случае $C^{pq} = C^p \cap C_{p+q} = 0$, а значит, и $Z^{pq}_r = 0$, а следовательно, и $E^{pq}_r = 0$.

Градуировка, обрезающая фильтрацию.

Пусть $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией. Будем говорить, что градуировка $C = \bigoplus C_q$ обрезает фильтрацию $C = \bigcup C^p$, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$C^p \cap C_q = C^{q-N} \cap C_q \quad \text{для всех} \quad p \leqslant q - N.$$

В этом случае

$$C^{pq} = C^p \cap C_{p+q} = C^{p+q-N} \cap C_{p+q} \quad \text{для всех} \quad q \geqslant N,$$

так что для всех $q > N$ имеем $C^{p+1,q-1} = C^{p+q-N} \cap C_{p+q} = C^{pq}$, откуда

$$\begin{aligned} Z_{r-1}^{p+1,q-1} &= \{x \in C^{p+1,q-1} \mid dx \in C^{p+r,q-r+1}\} \\ &= \{x \in C^{p,q} \mid dx \in C^{p+r,q-r+1}\} = Z_r^{pq} \end{aligned}$$

и, значит,

$$E_r^{pq} = Z_r^{pq}/(B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) = 0 \quad \text{для всех} \quad p, r \in \mathbb{Z},\ q > N.$$

Аналогичным образом проверяется, что $Z_\infty^{p+1,q-1} = Z_\infty^{pq}$ для всех $q > N$, так что и

$$E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq}/(B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) = 0 \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ q > N.$$

Неотрицательная градуировка.

Пусть $\{C, d\}$ – комплекс с фильтрацией, причем однородные компоненты $C_q = 0$ при $q < 0$, так что $C = \bigoplus_{q \geqslant 0} C_q$. Тогда

$$C^{pq} = C^p \cap C_{p+q} = 0 \quad \text{для всех} \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad p + q < 0,$$

откуда $Z_r^{pq} = 0$, а значит, и члены спектральной последовательности $E_r^{pq} = 0$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}$, $p + q < 0$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Спектральные последовательности бикомплекса.

Пусть $\{C, d', d''\}$ – бикомплекс, где (ср. с рис. 1.2)

$$\begin{aligned} C &= \textstyle\bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} C_{mn}, \quad d' \circ d' = d' \circ d'' + d'' \circ d' = d'' \circ d'' = 0, \\ d' &= \textstyle\bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} d'_{mn}, \quad d'_{mn} \colon C_{mn} \to C_{m+1,n}, \\ d'' &= \textstyle\bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} d''_{mn}, \quad d''_{mn} \colon C_{mn} \to C_{m,n+1}, \end{aligned}$$

напомним, что модули C_{mn} называются однородными бистепени (m,n), вертикальные дифференциалы d' – однородными бистепени $(1,0)$, а горизонтальные дифференциалы d'' – однородными бистепени $(0,1)$.

Положим

$$C_q = \bigoplus_{m+n=q} C_{mn}, \quad d_q = \bigoplus_{m+n=q}(d'_{mn} + d''_{mn}), \quad q \in \mathbb{Z},$$

тогда $C = \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} C_q$, $d_q\colon C_q \to C_{q+1}$ и $d_{q+1} \circ d_q = 0$, так что получим комплекс $\{C, d\}$, где модули C_q – однородные степени q, дифференциал d – однородный степени $+1$. В модуле C можно ввести две различные фильтрации. Первая, *вертикальная*, определяется правилом

$$'C^p = \bigoplus_{\substack{m\geqslant p\\ n\in\mathbb{Z}}} C_{mn}, \quad 'C^p \supset {}'C^{p+1}, \quad d('C^p) \subset {}'C^p, \quad p \in \mathbb{Z},$$
$$C = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} {}'C^p,$$

и задает комплекс с фильтрацией $'\{C, d\}$ со спектральной последовательностью $'E_r^p$, дифференциалами $'d_r$ и предельным членом $'E_\infty^p$, $p, r \in \mathbb{Z}$. Вторая, *горизонтальная*, определяется правилом

$$''C^p = \bigoplus_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\geqslant p}} C_{mn}, \quad ''C^p \supset {}''C^{p+1}, \quad d(''C^p) \subset {}''C^p, \quad p \in \mathbb{Z},$$
$$C = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} {}''C^p$$

и задает комплекс с фильтрацией $''\{C, d\}$ со спектральной последовательностью $''E_r^p$, дифференциалами $''d_r$ и предельным членом $''E_\infty^p$, $p, r \in \mathbb{Z}$.

В приложениях часто встречается случай, когда бикомплекс $\{C, d', d''\}$ неотрицательный, т.е. компоненты $C_{mn} = 0$ при $(m,n) \notin \mathbb{Z}_+^2$, так что фактически $C = \bigoplus_{m,n\geqslant 0} C_{mn}$. Здесь

$$C_q = \bigoplus_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m+n=q}} C_{mn} = \bigoplus_{0\leqslant n\leqslant q} C_{q-n,n}, \quad q \in \mathbb{Z},$$

в частности, $C_q = 0$ при $q < 0$, т.е. полная градуировка $C = \bigoplus_{q\geqslant 0} C_q$ неотрицательная. Далее,

$$'C^p = \bigoplus_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m\geqslant p}} C_{mn} = \bigoplus_{\substack{m\geqslant \max\{0,p\}\\ n\geqslant 0}} C_{mn}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

в частности, $'C^p = C$ при $p \leqslant 0$, т.е. вертикальная фильтрация неотрицательная и, следовательно, члены спектральной последовательности $'E_r^p = 0$ при $p < 0$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Кроме того,

$$'C^p \cap C_q = \bigoplus_{\substack{0\leqslant n\leqslant q\\ p\leqslant m=q-n}} C_{q-n,n} = \bigoplus_{0\leqslant n\leqslant \min\{q-p,q\}} C_{q-n,n},$$

в частности, $'C^p \cap C_q = 0$ при $p \geqslant q+1$, т.е. вертикальная фильтрация подчинена полной градуировке и, следовательно, члены спектральной последовательности $'E_r^{pq} = 0$ при $q < 0$, $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Таким образом, в этом случае спектральная последовательность $'E_r$ также неотрицательно биградуированная,

$$'E_r = \bigoplus\nolimits_{p,q \geqslant 0} {'E_r^{pq}} \quad \text{для всех} \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Аналогичным образом, в этом случае и

$$''E_r = \bigoplus\nolimits_{p,q \geqslant 0} {''E_r^{pq}} \quad \text{для всех} \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}.$$

Предположим дополнительно, что $C_{mn} = 0$ при $n > N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$, так что

$$C = \bigoplus\nolimits_{m \geqslant 0, 0 \leqslant n \leqslant N} C_{mn}.$$

В такой ситуации

$$'C^p \cap C_q = \bigoplus\nolimits_{0 \leqslant n \leqslant \min\{q-p,q,N\}} C_{q-n,n}.$$

Пусть $p \leqslant q - N$, тогда $q - p \geqslant N$, так что

$$'C^p \cap C_q = \bigoplus\nolimits_{0 \leqslant n \leqslant \min\{q,N\}} C_{q-n,n} = {'C^{q-N}} \cap C_q.$$

Другими словами, полная градуировка $C = \bigoplus_{q \geqslant 0} C_q$ обрезает фильтрацию $C = \bigcup_{p \geqslant 0} {'C^p}$, следовательно,

$$'E_r^{pq} = 0 \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ q > N,\ r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

и, значит, в этом случае

$$'E_r = \bigoplus\nolimits_{p \geqslant 0, 0 \leqslant q \leqslant N} {'E_r^{pq}} \quad \text{для всех} \quad r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\},$$

в согласии с биградуировкой модуля C.

Подробнее смотри [8], [16], [9], [21], [4].

Глава 2. Элементы дифференциальной геометрии

2.1. Гладкие многообразия

2.1.1. Категория гладких многообразий. Пусть M – отделимое топологическое пространство (напомним, что топологическое пространство называется *отделимым*, иначе *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки обладают непересекающимися окрестностями). Пара $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$, где U – открытое подмножество пространства M, называется *картой* на M, если ϕ – гомеоморфизм (т.е. взаимно однозначное непрерывное в обе стороны отображение) открытого множества U на образ $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. В этом случае каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие точка $\phi(p) = (\phi^1(p), \ldots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$, причем множество U называется *координатной окрестностью*, а компоненты $x^\mu = \phi^\mu(p) \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$, называются *локальными координатами* точки p.

Карты $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ и $\{V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m\}$ на M называются *согласованными*, если композиция $\psi \circ \phi^{-1}$ – гладкое (т.е. класса $\mathcal{C}^\infty$) отображение образа $\phi(U \cap V)$ на образ $\psi(U \cap V)$, а композиция $\phi \circ \psi^{-1}$ – гладкое отображение образа $\psi(U \cap V)$ на образ $\phi(U \cap V)$, причем якобианы перехода от координат $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \phi(U \cap V)$ к координатам $y = (y^1, \ldots, y^m) \in \psi(U \cap V)$ и обратно всюду ненулевые. Семейство карт $\{U_i, \phi_i\} = \{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$ называется *атласом* на M, если $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ и все карты из $\{U_i, \phi_i\}$ попарно согласованы. Карта $\{U, \phi\}$ называется *согласованной* с атласом $\{U_i, \phi_i\}$, если она согласована со всеми картами из $\{U_i, \phi_i\}$. Атлас $\{U_i, \phi_i\}$ называется *максимальным* иначе *гладкой структурой на* M, если он содержит все согласованные с ним карты. Очевидно, всякий атлас можно дополнить до максимального, включив в него все согласованные с ним карты. Отделимое топологическое пространство M вместе с фиксированным максимальным атласом $\{U_i, \phi_i\}$ называется *гладким многообразием*, а общее для всех карт натуральное число m называется *размерностью* многообразия M, пишут $m = \dim M$.

Функция $f\colon M \to \mathbb{F}$ на гладком многообразии M со значениями в поле $\mathbb{F}$ называется *гладкой* (иначе, класса $\mathcal{C}^\infty$), если композиция $f \circ \phi_i^{-1}$ гладкая на $\phi_i(U_i)$ для любой карты из атласа $\{U_i, \phi_i\}$, задающего многообразие M. Множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ всех гладких функций на данном гладком многообразии M является алгеброй с поточечными операциями

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $x \in M$. Очевидно, алгебра $\mathcal{C}^\infty(M)$ унитальная ассоциативная и коммутативная.

Пусть M – гладкое многообразие с атласом $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \,|\, i \in I\}$, а N – гладкое многообразие с атласом $\{V_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}^n \mid k \in K\}$. Непрерывное отображение $\Phi\colon M \to N$ называется *гладким* (иначе, класса $\mathcal{C}^\infty$), если композиции $\psi_k \circ \Phi \circ \phi_i^{-1}$ – гладкие отображения из открытого множества $U_i \cap \Phi^{-1}(V_k) \subset \mathbb{R}^m$ в открытое множество $\psi_k(V_k) \subset \mathbb{R}^n$ для всех индексов $i \in I$ и $k \in K$ таких, что пересечение $U_i \cap \Phi^{-1}(V_k) \neq \varnothing$. Эквивалентное определение: непрерывное отображение $\Phi\colon M \to N$ называется *гладким*, если композиция $f \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ для любой $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$.

Пусть Φ – гладкое отображение из гладкого m-мерного многообразия M в гладкое n-мерное многообразие N. Тогда для каждой точки $p \in M$ существуют

- $\star$ карта $\{U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^m\}$ на M, $p \in U$,
- $\star$ карта $\{V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n\}$ на N, $\Phi(U) \subset V$,

такие, что

- $\star$ $y = \widetilde{\Phi}(x)$ – гладкое отображение из $\phi(U)$ в $\psi(V)$, где $\widetilde{\Phi} = \psi \circ \Phi \circ \phi^{-1}$.

Таким образом, определена *категория гладких многообразий*, объекты которой – гладкие многообразия, а морфизмы – гладкие отображения.

Каждое гладкое отображение $\Phi\colon M \to N$ порождает морфизм алгебр $\Phi^*\colon \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ правилом

$$g \mapsto f = \Phi^*(g) = g \circ \Phi \quad \text{для всех} \quad g \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

2.1.2. Прямые произведения. Пусть M – гладкое многообразие с атласом $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$, а N – гладкое многообразие с атласом $\{V_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}^n \mid k \in K\}$. Декартово произведение $M \times N$ топологических пространств M и N обладает естественной структурой гладкого многообразия, задаваемой атласом

$$\{U_i \times V_k \xrightarrow{\phi_i \times \psi_k} \mathbb{R}^{m+n} \mid (i,k) \in I \times K\}$$

(поясним, что отображение $\phi_i \times \psi_k$ точку $(x,y) \in U_i \times V_k$ переводит в точку $(\phi_i(x), \psi_k(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$). Топологическое пространство $M \times N$, снабженное такой гладкой структурой называется *прямым произведением* многообразий M и N.

2.1.3. Подмногообразия. Пусть M – топологическое пространство и $S \subset M$. В этом случае на подмножестве S индуцирована топология правилом: подмножество $V \subset S$ открыто в S тогда и только тогда, когда $V = S \cap U$ для некоторого подмножества $U \subset M$, открытого в M. Очевидно, индуцированная топология в S отделимая, если исходная топология в M отделимая.

Пусть теперь M – гладкое m-мерное многообразие и $S \subset M$ – его подмножество, наделенное индуцированной топологией. Для $1 \leqslant s < m$ будем представлять евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ как прямое произведение евклидовых пространств $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, так что каждая точка $x \in \mathbb{R}^m$ будет записываться как $x = (y,z)$, $y \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^{m-s}$. Пусть существуют $s \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant s < m$, и атлас $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$ на M такие, что

- ⋆ $V_i = S \cap U_i = \{q \in U_i \mid \phi_i(q) = (y,z) \in \phi_i(U_i),\ z = 0\}$ для всех $i \in I$ таких, что $V_i \neq \varnothing$,
- ⋆ семейство $\{V_i \xrightarrow{\psi_i} \mathbb{R}^s \mid i \in I,\ V_i \neq \varnothing\}$ является атласом для S, где $\psi_i = \pi_s \circ \phi_i|_{V_i}$, проекция $\pi_s \colon \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \to \mathbb{R}^s$, $(y,z) \mapsto y$, а отображение $\phi_i|_{V_i}$ – сужение отображения ϕ_i на V_i.

Множество S, наделенное индуцированной таким образом s-мерной гладкой структурой, называется *гладким подмногообразием* многообразия M.

Еще один класс подмногообразий получается следующим образом. Пусть M – гладкое многообразие и W – его открытое подмножество. В этом случае W – отделимое топологическое пространство и всякая карта $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$, $V = W \cap U \neq \varnothing$, определяет на W карту $\{V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m\}$, где $\psi = \phi|_V$. В частности, на W определена гладкая m-мерная структура, индуцированная из M, и множество W, наделенное этой структурой, есть гладкое многообразие, называемое *открытым подмногообразием* многообразия M.

2.2. Расслоения

2.2.1. Категория гладких расслоений. *Гладким расслоением с типичным слоем* F называется всякая тройка $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, где F, E и B – гладкие многообразия, а π – гладкое отображение из E на B, удовлетворяющая условию *локальной тривиальности*: у каждой точки $b \in B$ существует открытая окрестность $U \subset B$ такая, что

- ⋆ имеется изоморфизм (гладких многообразий)

$$\chi\colon \pi^{-1}(U) \simeq U \times F,$$

- ⋆ композиция $\pi \circ \chi^{-1}\colon U \times F \to U$ есть проекция на первый сомножитель, $(u, f) \mapsto u$ для всех $u \in U$, $f \in F$.

Многообразие E называется *пространством расслоения*, многообразие B называется *базой расслоения*, а отображение π – *проекцией*. Для каждой точки $b \in B$ прообраз $\pi^{-1}(b)$, называемый *слоем* над b, есть подмногообразие в E, изоморфное многообразию F. Обратим внимание, что по построению, $E = \bigcup_{b\in B} \pi^{-1}(b)$, т.е. многообразие E расслоено на слои, изоморфные типичному слою F.

Пример 2.2.1 (тривиальное расслоение). Пусть B, F – гладкие многообразия, $B \times F$ – их прямое произведение, $\pi\colon B \times F \to B$ – проекция на первый сомножитель, $(b, v) \mapsto \pi(b, v) = b$ для всех $b \in B$ и $v \in F$. Тогда тройка $\{B \times F \xrightarrow{\pi} B\}$ есть тривиальное гладкое расслоение с типичным слоем F, пространством расслоения $E = B \times F$, базой B и проекцией π. Слой над точкой $b \in B$ есть $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times F$.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F, причем $\dim B = m$, $\dim F = s$, $\dim E = m + s$. Тогда для каждой точки $p \in E$ существуют

- ⋆ карта $\{U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^m\}$ на B, $\pi(p) \in U$,
- ⋆ карта $\{V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^s\}$ на F,

⋆ изоморфизм $\chi\colon \pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, $q \mapsto \chi(q) = (u, v)$,

такие, что

⋆ $\{\chi^{-1}(U \times V) \xrightarrow{\varrho} \phi(U) \times \phi(V) \subset \mathbb{R}^{m+s}\}$ – карта на E, где $\varrho = (\phi \times \psi) \circ \chi$, $q \mapsto \varrho(q) = z = (x, y)$, $x = \phi(u) \in \mathbb{R}^m$, $y = \psi(v) \in \mathbb{R}^s$,

⋆ $\widetilde{\pi} = \phi \circ \pi \circ \varrho^{-1}\colon \phi(U) \times \psi(V) \to \phi(U)$, $z = (x, y) \mapsto x$.

Морфизм из расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F в расслоение $\{H \xrightarrow{\lambda} C\}$ с типичным слоем G, по определению, есть пара гладких отображений $\Phi\colon E \to H$, $\varphi\colon B \to C$ такая, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[d, "\lambda"] \\ B \arrow[r, "\varphi"'] & C \end{tikzcd}$$

(другими словами, сужение $\Phi|_{\pi^{-1}(q)}\colon \pi^{-1}(q) \to \lambda^{-1}(\varphi(q))$ есть гладкое отображение из гладкого многообразия $\pi^{-1}(q) \simeq F$ в гладкое многообразие $\lambda^{-1}(\varphi(q)) \simeq G$ для всех $q \in B$).

Пример 2.2.2. Морфизм из тривиального расслоения

$$\{B \times F \xrightarrow{\pi} B\}$$

в тривиальное расслоение

$$\{C \times G \xrightarrow{\lambda} C\}$$

задается произвольной парой гладких отображений $\varphi\colon B \to C$, $s\colon F \to G$, отображение

$$\Phi = \varphi \times s\colon E = B \times F \to H = C \times G.$$

Таким образом, определена категория гладких расслоений, объекты которой суть гладкие расслоения, а морфизмы – определенные выше морфизмы гладких расслоений.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F, и пусть S – подмногообразие многообразия E, а G – подмногообразие многообразия F. Более того, пусть у каждой точки $q \in B$

существует открытая окрестность $U \subset B$ такая, что прообраз $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, а сужение прообраза $\pi^{-1}(U) \cap S \simeq U \times G$. Пусть $\iota\colon S \to E$ – каноническая инъекция подмногообразия S в многообразие E (гладкое отображение!). Положим $\pi_S = \pi|_S = \pi \circ \iota\colon S \to B$ – сужение проекции π с E на S. В этом случае тройка $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ является гладким расслоением с типичным слоем G, которое называется *подрасслоением* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. По построению коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_S"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & B \end{tikzcd}$$

т.е. пара $\iota\colon S \to E$, $\mathrm{id}\colon B \to B$ является морфизмом из расслоения $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ в расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, причем структура подрасслоения на S однозначно определена этим свойством.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F, и пусть $\varphi\colon A \to B$ – морфизм гладких многообразий. Можно проверить, что

- $\star$ множество $A \times_B E = \{(a, e) \in A \times E \mid \varphi(a) = \pi(e)\}$ есть гладкое многообразие, подмногообразие многообразия $A \times E$,
- $\star$ проекция на первый сомножитель $\pi_A\colon A \times_B E \to A$, $(a, e) \mapsto a$, есть гладкое отображение,
- $\star$ тройка $\{A \times_B E \xrightarrow{\pi_A} A\}$ – гладкое расслоение с тем же типичным слоем F,
- $\star$ отображение $\varphi_*\colon A \times_B E \to E$, $(a, e) \mapsto e$, гладкое,
- $\star$ пара $\varphi_*\colon A \times_B E \to E$, $\varphi\colon A \to B$, есть морфизм гладких расслоений.

В силу этих свойств тройка $\{A \times_B E, \pi_A, \varphi_*\}$ называется *обратным образом* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ относительно отображения $\varphi\colon A \to B$. Обратный образ обладает следующим свойством универсальности. Для всякого морфизма $\Phi\colon X \to E$, $\varphi\colon A \to B$ из расслоения $X \xrightarrow{\lambda} A$ в расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ существует единственное гладкое отображение $\mu\colon X \to A \times_B E$, действующее по правилу $x \mapsto (\lambda(x), \Phi(x))$, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\mu"] \arrow[drr, "\Phi"] \arrow[ddr, swap, "\lambda"] & & \\
& A \times_B E \arrow[r, "\varphi_*"'] \arrow[d, "\pi_A"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& A \arrow[r, "\varphi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F. Гладкое отображение $B \xrightarrow{\sigma} E$ называется *сечением* (иногда, *глобальным сечением*) этого расслоения, если композиция $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$. По определению для каждой точки $q \in B$ образ $\sigma(q) \in \pi^{-1}(q)$. Множество всех сечений расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ будем обозначать через $\mathcal{F}(\pi)$. Аналогичным образом, гладкое отображение $U \xrightarrow{\sigma} E$, где U – открытое подмножество многообразия B, называется *локальным сечением* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, если композиция $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.

Пример 2.2.3. Сечения тривиального расслоения

$$\{B \times F \xrightarrow{\pi} B\}$$

суть гладкие отображения $s\colon B \to F$, отображения

$$\sigma\colon B \to E = B \times F$$

действуют по правилу: $q \mapsto \sigma(q) = (q, s(q))$ для всех $q \in B$.

Сечение χ расслоения $\{H \xrightarrow{\lambda} C\}$ называется *согласованным* с сечением σ расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ относительно морфизма расслоений $\{E \xrightarrow{\Phi} H, B \xrightarrow{\varphi} C\}$, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\Phi"] & H \\
B \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\varphi"'] & C \arrow[u, "\chi"']
\end{tikzcd}$$

В приложениях стандартный слой часто обладает дополнительной алгебраической структурой, например структурой векторного или аффинного пространства или структурой алгебры Ли.

2.2.2. Векторные расслоения. Пусть F – векторное пространство. (Термины *векторное пространство* и *линейное пространство* обычно употребляются как синонимы, но в контексте расслоений термин линейное пространство применяется лишь к одномерным векторным пространствам.) Расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F называется *векторным расслоением*, если каждый слой $\pi^{-1}(q)$, $q \in B$, наделен структурой векторного пространства, изоморфного F, причем изоморфизм здесь есть изоморфизм категории линейных пространств. Соответственно, морфизм $\Phi\colon E \to H$, $\varphi\colon B \to C$ из векторного расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F в векторное расслоение $\{H \xrightarrow{\lambda} C\}$ с типичным слоем G называется *морфизмом векторных расслоений*, если, дополнительно, сужение $\Phi|_{\pi^{-1}(q)}\colon \pi^{-1}(q) \to \lambda^{-1}(\varphi(q))$ есть линейное отображение из векторного пространства $\pi^{-1}(q) \simeq F$ в векторное пространство $\lambda^{-1}(\varphi(q)) \simeq G$ для всех $q \in B$. Таким образом, в категории гладких расслоений определена подкатегория векторных расслоений. Сечения векторных расслоений обычно называют *векторными полями*.

Наличие алгебраической структуры в слоях приводит к соответствующей алгебраической структуре в множестве сечений. Именно, пусть F – векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Тогда множество $\mathcal{F}(\pi)$ всех гладких сечений векторного расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ с типичным слоем F есть модуль над алгеброй $\mathcal{C}^\infty(B)$ с поточечными операциями

$$(\alpha \cdot \sigma + \beta \cdot \chi)(q) = \alpha \cdot \sigma(q) + \beta \cdot \chi(q), \quad (f \cdot \sigma)(q) = f(q) \cdot \sigma(q)$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\sigma, \chi \in \mathcal{F}(\pi)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(B)$, $q \in B$.

Векторные подрасслоения определяются как и гладкие подрасслоения, с естественными модификациями. Ради полноты изложения приведем точную формулировку. Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – векторное расслоение с типичным слоем F, и пусть S – подмногообразие многообразия E, а G – подпространство векторного пространства F. Более того, пусть у каждой точки $q \in B$ существует открытая окрестность $U \subset B$ такая, что прообраз $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$, а сужение прообраза $\pi^{-1}(U) \cap S \simeq U \times G$. Пусть $\iota\colon S \to E$ – каноническая инъекция подмногообразия S в многообразие E. Положим $\pi_S = \pi \circ \iota\colon S \to B$ – сужение проекции π с E на S. Тройка $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ является гладким расслоением с типичным слоем G, которое называется *векторным подрасслоением* расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. В этом случае коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi_S"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & B \end{tikzcd}$$

т.е. пара $\iota\colon S \to E$, $\mathrm{id}\colon B \to B$ является морфизмом из векторного расслоения $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ в векторное расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$, причем структура подрасслоения на S однозначно определена этим свойством. Отождествление слоя $\pi_S^{-1}(q)$ с его каноническим образом $\iota(\pi_S^{-1}(q)) \subset \pi^{-1}(q)$ позволяет считать, что для всех $q \in B$ векторное пространство $\pi_S^{-1}(q)$ есть подпространство пространства $\pi^{-1}(q)$.

Отметим, что $\mathcal{C}^\infty(B)$-модуль $\mathcal{F}(\pi_S)$ сечений подрасслоения $\{S \xrightarrow{\pi_S} B\}$ есть подмодуль $\mathcal{C}^\infty(B)$-модуля $\mathcal{F}(\pi)$ сечений расслоения $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$.

Обратный образ в категории векторных расслоений определятся теми же правилами, что и в случае гладких расслоений.

2.3. Касательные и кокасательные поля

2.3.1. Гладкие функции, подробнее. Пусть M – гладкое многообразие. Пусть $\mathcal{C}^\infty(M)$ – алгебра всех гладких функций на M, наделенная естественной топологией равномерной сходимости вместе с частными производными всех порядков на компактных подмножествах из M. *Носитель* $\mathrm{supp}(f)$ функции $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ определяется как наименьшее замкнутое подмножество из M, вне которого $f = 0$ (другими словами, $\mathrm{supp}(f)$ есть замыкание множества точек $q \in M$ для которых $f(q) \neq 0$). Будем считать, что топологическое пространство M достаточно хорошее (например, *нормальное*, см. [30]), так что множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ достаточно большое. В частности, будем предполагать, что для любых компакта K и открытого подмножества U, $K \subset U \subset M$, существует функция $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такая, что $\varphi = 1$ на K, $\varphi = 0$ вне U. Также будем считать, что для каждого открытого покрытия пространства M существует гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию.

Алгебра $\mathcal{C}^\infty(M)$ есть алгебра всех глобально определенных гладких функций на многообразии M. Наряду с ней для каждого открытого подмножества $U \subset M$ (открытого подмногообразия!) имеется алгебра $\mathcal{C}^\infty(U)$ – алгебра всех локально определенных гладких функций на M. Очевидно, $\mathcal{C}^\infty(U)$ есть $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль для любого открытого $U \subset M$. Далее, для каждой пары открытых подмножеств $V \subset U \subset M$ определено *сужение*

$$\varrho_V^U \colon \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(V), \quad f \mapsto \varrho_V^U(f) = f|_V,$$

морфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей, причем выполняются стандартные аксиомы

- $\star$ $\varrho_U^U = \mathrm{id}$ для любого открытого $U \subset M$
- $\star$ $\varrho_W^V \circ \varrho_V^U = \varrho_W^U$ для любых открытых $W \subset V \subset U \subset M$.

Для точки $p \in M$ обозначим через $\mathcal{U}(p) = \{U \in M \mid p \in U\}$ семейство всех ее открытых окрестностей. Множество $\mathcal{U}(p)$ частично упорядочено по включению $V \subset U$. Более того, оно является направленностью по убыванию (см. с. 40), поскольку для любых $U, V \in \mathcal{U}(p)$ пересечение $U \cap V \in \mathcal{U}(p)$. Рассмотрим семейство $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей

$$\{\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\varrho_V^U} \mathcal{C}^\infty(V) \mid U, V \in \mathcal{U}(p),\ U \supset V\}$$

В силу приведенных выше свойств сужений оно будет индуктивно направленным (подчеркнем, что семейство $\mathcal{U}(p)$ – направленность *по убыванию*), его индуктивный предел обозначается через

$$\mathcal{C}^\infty(p) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{C}^\infty(U)$$

и называется множеством *ростков* гладких функций в точке $p \in M$. Подробнее, в объединении $\bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{C}^\infty(U)$ функции $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ и $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $U, V \in \mathcal{U}(p)$, считаются эквивалентными, если сужения $f|_W = g|_W$ для некоторого $W \in \mathcal{U}(p)$, $W \subset U \cap V$. По определению росток $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(p)$ есть класс эквивалентности некоторой функции $f \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{C}^\infty(U)$. Отметим, что у каждого ростка $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(p)$ есть *глобальный* представитель $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ (короче, пересечение $\mathbf{f} \cap \mathcal{C}^\infty(M) \neq \varnothing$ для всякого $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(p)$, доказать это!). Совсем упрощая ситуацию, говорят, что функция f гладкая в точке p, если она гладкая в некоторой окрестности этой точки. Построенный таким образом $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(p)$ есть унитальная ассоциативная коммутативная алгебра со следующими операциями: пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{C}^\infty(p)$, выберем $f \in \mathbf{f}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $g \in \mathbf{g}$, $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $U, V \in \mathcal{U}(p)$, и определим $\alpha \cdot \mathbf{f} + \beta \cdot \mathbf{g}$ как класс эквивалентности функции $\alpha \cdot f|_W + \beta \cdot g|_W \in \mathcal{C}^\infty(W)$, а $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ как класс эквивалентности функции $f|_W \cdot g|_W \in \mathcal{C}^\infty(W)$, где $W = U \cap V \in \mathcal{U}(p)$.

2.3.2. Дифференцирования. Непрерывное линейное отображение $\xi\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ (эндоморфизм категории векторных топологических пространств) называется *дифференцированием* алгебры $\mathcal{C}^\infty(M)$, если оно удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\xi(f \cdot g) = \xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Обозначим через $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(\mathcal{C}^\infty(M))$ множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(M)$. Очевидно, $\mathfrak{D}(M)$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$. Более того, $\mathfrak{D}(M)$ – модуль над алгеброй $\mathcal{C}^\infty(M)$, где $(\varphi \cdot \xi)(f) = \varphi \cdot \xi(f)$ для всех $\varphi, f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\xi \in \mathfrak{D}(M)$, поскольку

$$\begin{aligned}(\varphi \cdot \xi)(f \cdot g) &= \varphi \cdot (\xi(f \cdot g)) = \varphi \cdot (\xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g)) \\ &= \varphi \cdot \xi(f) \cdot g + f \cdot \varphi \cdot \xi(g) = (\varphi \cdot \xi)(f) \cdot g + f \cdot (\varphi \cdot \xi)(g)\end{aligned}$$

для всех $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Другая важная алгебраическая структура на линейном пространстве $\mathfrak{D}(M)$ есть структура алгебры Ли с коммутатором в качестве скобки Ли

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathfrak{D}(M).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}[\xi, \eta](f \cdot g) &= \xi(\eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g)) - \eta(\xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g)) \\ &= (\xi(\eta(f)) \cdot g + \eta(f) \cdot \xi(g) + \xi(f) \cdot \eta(g) + f \cdot \xi(\eta(g))) \\ &\quad - (\eta(\xi(f)) \cdot g + \xi(f) \cdot \eta(g) + \eta(f) \cdot \xi(g) + f \cdot \eta(\xi(g))) \\ &= ([\xi, \eta](f)) \cdot g + f \cdot ([\xi, \eta](g)) \quad \text{для всех} \ \ f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).\end{aligned}$$

Обратим внимание, что композиция двух дифференцирований не является дифференцированием.

Отметим, что $\xi(1) = 0$ для любого дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(M)$, где $1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $1(p) = 1$ для всех $p \in M$, поскольку

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = \xi(1) \cdot 1 + 1 \cdot \xi(1) = 2\xi(1).$$

2.3.3. Локальность.

Предложение 2.3.1. *Каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ есть локальный эндоморфизм пространства $\mathcal{C}^\infty(M)$, т.е.*

$$\operatorname{supp}(\xi(f)) \subset \operatorname{supp}(f) \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(M)$. Пусть $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и $p \notin \operatorname{supp}(f)$. Найдется функция $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такая, что $\varphi(p) = 0$ и $\varphi = 1$ на $\operatorname{supp}(\xi)$. Тогда

$$\xi(f)(p) = \xi(\varphi \cdot f)(p) = \xi(\varphi)(p) \cdot f(p) + \varphi(p) \cdot \xi(f)(p) = 0$$

и, значит,

$$\operatorname{supp}(\xi(f)) \subset \operatorname{supp}(f)$$

в силу произвольности точки $p \notin \operatorname{supp}(f)$.

Для каждого открытого $U \subset M$ определено множество $\mathfrak{D}(U)$ дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(U)$ со структурой $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуля (и в частности, $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуля) и алгебры Ли.

Пусть $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M,

$$q \mapsto \phi(q) = x, \quad \phi(q) = (\phi^1(q), \ldots, \phi^m(q)), \quad x = (x^1, \ldots, x^m).$$

Для упрощения записи будем писать $f(x)$ вместо $(f \circ \phi^{-1})(x)$ и $\xi(f)(x)$ вместо $(\xi(f) \circ \phi^{-1})(x)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ и $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ (так что следует отличать точку $q \in U$ от координатного столбца $x \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$, а функции $f(q), \xi(f)(q) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ от функций $f(x), \xi(f)(x) \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U))$.

Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(U)$, положим

$$z^\mu(x) = \xi(\phi^\mu)(x) \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U)), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m, \quad x \in \phi(U),$$

где $\phi^\mu = \phi^\mu(q) = x^\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Тогда с помощью правила Лейбница для каждого монома $x^i = (x^1)^{i_1} \ldots (x^m)^{i_m}$, где $x^\mu = \phi^\mu(q)$,

$1 \leqslant \mu \leqslant m$, и мультииндекс $i = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, получим

$$\xi(x^i)(x) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^\mu(x) i_\mu (x^1)^{i_1} \ldots (x^\mu)^{i_\mu - 1} \ldots (x^m)^{i_m}$$
$$= \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^\mu(x) \partial_{x^\mu} x^i \qquad \text{для всех} \quad x = \phi(q) \in \phi(U),$$

где $\partial_{x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ – частные производные по переменной x^μ, $1 \leqslant \mu \leqslant m$. По линейности получаем

$$\xi(P(x))(x) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^\mu(x) \partial_{x^\mu} P(x) \quad \text{для любого многочлена } P(x).$$

В силу непрерывности отображения $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ и плотности многочленов в алгебре $\mathcal{C}^\infty(\phi(U))$ отсюда следует, что

$$\xi(f)(x) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^\mu(x) \partial_{x^\mu} f(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(U),\ x \in \phi(U).$$

Эти рассуждения приводят к следующим двум утверждениям.

Предложение 2.3.2. *Для каждого открытого множества $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^m$ множество $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ состоит из всех однородных дифференциальных операторов первого порядка вида*

$$\xi = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^\mu \partial_{x^\mu} = z \cdot \partial_x,$$

где

$$z = (z^1, \ldots, z^m) \in \times^m \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}),\ \partial_x = (\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^m}) \in \times^m \mathfrak{D}(\mathcal{O}),$$

так что, в частности, $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ есть свободный m-мерный $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$-модуль с базисом $\{\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^m}\} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{O})$. Скобка Ли в алгебре Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ вычисляется по правилу $[\xi, \eta] = \varrho$, где

$$\varrho = r \cdot \partial_x, \quad r^\mu = [\xi, \eta]^\mu = \xi(y^\mu) - \eta(z^\mu), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$
$$\textit{для всех} \quad \xi = z \cdot \partial_x,\ \eta = y \cdot \partial_x \in \mathfrak{D}(\mathcal{O}).$$

Доказательство. По существу, описание множества $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$ следует из предшествующих построений, а алгебраическая часть легко проверяется.

Предложение 2.3.3. *Для каждой карты*

$$\{U, \phi\}, \quad q \mapsto \phi(q) = (\phi^1, \ldots, \phi^m),$$

гладкого многообразия M правило

$$\xi \mapsto \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^\mu \partial_{x^\mu}, \quad z^\mu = \xi(\phi^\mu) \circ \phi^{-1}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

задает изоморфизм алгебр Ли

$$\mathfrak{D}(U) \simeq \mathfrak{D}(\phi(U)).$$

Кроме того, множество $\mathfrak{D}(U)$ есть свободный m-мерный $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль с базисом $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\} \subset \mathfrak{D}(U)$, где положено $\partial_\mu f = \partial_{x^\mu}(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ для всех $1 \leqslant \mu \leqslant m$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Скобка Ли

$$[\xi, \eta] = \varrho \in \mathfrak{D}(U)$$

дифференцирований $\xi = \sum z^\mu \partial_\mu, \eta = \sum y^\mu \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U)$ вычисляется по правилу

$$\varrho = \sum r^\mu \partial_\mu, \quad \text{где} \quad r^\mu = [\xi, \eta]^\mu = \xi(y^\mu) - \eta(z^\mu), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

Доказательство. Опять надо проверить только алгебраическую часть утверждения, что предлагается проделать в качестве полезного упражнения.

Замечание. Глобально $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathfrak{D}(M)$ может и не быть свободным, поскольку базисные дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_m$ определены лишь в локальных картах.

Для каждой пары отрытых подмножеств $V \subset U \subset M$ определим *сужение*

$$r_V^U \colon \mathfrak{D}(U) \to \mathfrak{D}(V), \quad \xi \mapsto r_V^U(\xi) = \xi|_V$$

следующим образом. Пусть функция $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Для произвольной точки $p \in V$, выберем окрестность $W \in \mathcal{U}(p)$ с компактным замыканием $\overline{W} \subset V$ и функцию $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такую, что $\operatorname{supp}(\phi) \subset V$ и $\phi|_W = 1$. Тогда $\phi \cdot f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ и $(\phi \cdot f)|_W = f|_W$. Положим $(\xi|_V)(f)(p) = \xi(\phi \cdot f)(p)$. С помощью предложения 2.3.1 легко проверяется, что значение $\xi(\phi \cdot f)(p) \in \mathbb{F}$ не зависит от выбора окрестности W и вспомогательной функции ϕ, и что построенная таким образом функция $(\xi|_V)(f)$ на V гладкая, т.е. $(\xi|_V)(f) \in \mathcal{C}^\infty(V)$. Также легко проверяется, что r^U_V – морфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей и что

⋆ $r^U_U = \mathrm{id}$ для любого открытого $U \subset M$

⋆ $r^V_W \circ r^U_V = r^U_W$ для любых открытых $W \subset V \subset U \subset M$.

В частности, для каждой точки $p \in M$ семейство $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей

$$\{\mathfrak{D}(U) \xrightarrow{r^U_V} \mathfrak{D}(V) \mid U, V \in \mathcal{U}(p),\ U \supset V\}$$

индуктивно направленное, его индуктивный предел обозначается через

$$\mathfrak{D}(p) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$$

и называется множеством *ростков* дифференцирований в точке p. Подробнее, в объединении $\bigcup_{U\in\mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$ дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ и $\eta \in \mathfrak{D}(V)$, $U, V \in \mathcal{U}(p)$, считаются эквивалентными, если совпадают сужения $\xi|_W = \eta|_W$ для некоторого $W \in \mathcal{U}(p)$, $W \subset U \cap V$. По определению росток $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{D}(p)$ есть класс эквивалентности некоторого дифференцирования $\xi \in \bigcup_{U\in\mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$. Опять, у каждого ростка $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{D}(p)$ есть *глобальный* представитель $\xi \in \boldsymbol{\xi} \cap \mathfrak{D}(M)$. Множество $\mathfrak{D}(p)$ наследует из объединения $\bigcup_{U\in\mathcal{U}(p)} \mathfrak{D}(U)$ структуры $\mathcal{C}^\infty(p)$-модуля и алгебры Ли. Легко проверяется (проделать это!), что для любых ростков $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{D}(p)$ и $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(p)$ определено действие $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{f}) = \boldsymbol{\eta}$ правилом $\eta = \xi(f)$, где $\xi \in \boldsymbol{\xi} \cap \mathfrak{D}(M)$, $f \in \mathbf{f} \cap \mathcal{C}^\infty(M)$ – произвольные глобальные представители соответствующих ростков. Более того, это правило осуществляет изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{D}(p)$ и алгебры Ли всех дифференцирований алгебры $\mathcal{C}^\infty(p)$.

2.3.4. Касательное расслоение. Всюду в этом разделе поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Касательный вектор X_p в точке $p \in M$ есть непрерывный линейный функционал на $\mathcal{C}^\infty(p)$ $(X_p \in (\mathcal{C}^\infty(p))^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(p), \mathbb{R}))$, удовлетворяющий остаточному правилу Лейбница

$$X_p(\mathbf{f}_p \cdot \mathbf{g}_p) = X_p(\mathbf{f}_p) \cdot \mathbf{g}_p(p) + \mathbf{f}_p(p) \cdot X_p(\mathbf{g}_p) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{f}_p, \mathbf{g}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

(заметим, что для каждого ростка $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ величина $\mathbf{f}_p(p)$ определена как общее значение в точке p всех представителей $f \in \mathbf{f}_p$). Множество всех касательных векторов в точке $p \in M$ обозначается через T_pM.

Пример 2.3.1. Пусть $\gamma\colon I \to M$ – гладкая кривая на M, где интервал $I \subset \mathbb{R}$. Касательный вектор $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$, $t \in I$, определяется равенством

$$\dot\gamma(t)(\mathbf{f}_{\gamma(t)}) = \frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau))\Big|_{\tau=t} \quad \text{для всех} \quad \mathbf{f}_{\gamma(t)} \in \mathcal{C}^\infty(\gamma(t)),\ f \in \mathbf{f}_{\gamma(t)}.$$

С помощью предложения 2.3.1 легко проверить, что каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ для каждой точки $p \in M$ определяет касательный вектор $X_p = \widehat{\xi}_p \in T_pM$ по правилу

$$X_p(\mathbf{f}_p) = \xi(f)(p) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

где $f \in \mathbf{f}_p \cap \mathcal{C}^\infty(M)$ – произвольный глобальный представитель ростка $\mathbf{f}_p$. Более того, если два дифференцирования $\xi, \eta \in \mathfrak{D}(M)$, совпадают в некоторой окрестности точки $p \in M$, т.е. $\xi|_W = \eta|_W$, для некоторого $W \in \mathcal{U}(p)$, то соответствующие касательные векторы тоже совпадают, т.е. $\widehat{\xi}_p = \widehat{\eta}_p$. Отсюда следует, что каждый росток $\boldsymbol{\xi}_p \in \mathfrak{D}(p)$, $p \in M$, порождает касательный вектор $X_p = \widehat{\xi}_p \in T_pM$ по правилу

$$X_p(\mathbf{f}_p) = \boldsymbol{\xi}_p(\mathbf{f}_p)(p) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p).$$

Можно доказать и обратное, что каждый касательный вектор порождается некоторым ростком дифференцирований (фактически, это будет следовать из дальнейших построений).

Легко проверяется, что множество T_pM есть подпространство векторного пространства $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(p), \mathbb{R})$. Векторное пространство T_pM называется *касательным пространством* в точке $p \in M$.

Положим $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ и определим проекцию $\pi\colon TM \to M$ правилом

$$X_p \mapsto \pi(X_p) = p \quad \text{для всех} \quad X_p \in TM,$$

так что для всякой точки $p \in M$ слой $\pi^{-1}(p) = T_pM$ есть векторное пространство.

Определим на множестве TM гладкую структуру, используя локальные карты гладкого многообразия M.

Обратимся к отображению $TM \xrightarrow{\pi} M$. Пусть $\pi^{-1}(p) = T_pM$ – слой над точкой $p \in M$ и $\{U, \phi\}$ – карта на M, причем

$U \in \mathcal{U}(p)$. Пусть вектор $X_p \in T_pM$. Каждый класс эквивалентности $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ имеет представитель $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, так что здесь $X_p(\mathbf{f}_p) = X_p(f)$, а остаточное правило Лейбница имеет вид

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Слегка модифицировав рассуждения, проведенные выше для дифференцирований, приходим к выводу, что

$$X_p(\mathbf{f}_p) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z_p^\mu \cdot (\partial_{p,\mu}\mathbf{f}_p) = (z_p \cdot \partial_p)(\mathbf{f}_p) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

где

$$z_p = (z_p^1, \dots, z_p^m) \in \times^m \mathbb{R} = \mathbb{R}^m,$$
$$\partial_p = (\partial_{p,1}, \dots, \partial_{p,m}) \in \times^m T_pM,$$

компоненты $z_p^\mu = X_p(\phi^\mu)$, $\partial_{p,\mu}\mathbf{f}_p$ – частные производные по x^μ представителя $f \in \mathbf{f}_p$, $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\phi(U))$, вычисленные в точке $x = \phi(p)$ (очевидно, результат вычислений не зависит от выбора представителя), $1 \leqslant \mu \leqslant m$.

Эти рассуждения приводят к следующему утверждению.

Предложение 2.3.4. *Для каждой точки $p \in M$ касательное пространство T_pM имеет структуру вещественного m-мерного пространства, причем каждая карта $\{U, \phi\}$, $U \in \mathcal{U}(p)$, задает базис*

$$\partial_p = \{\partial_{p,1}, \dots, \partial_{p,m}\} \subset T_pM,$$

а разложение по этому базису имеет вид

$$X_p = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z_p^\mu \partial_{p,\mu} = z_p \cdot \partial_p, \quad z_p^\mu = X_p(\phi^\mu), \quad \text{для всех } X_p \in T_pM.$$

Доказательство. По существу следует лишь еще раз проверить корректность приведенных выше построений, что полезно проделать в качестве упражнения.

Замечание. Отметим, что каждый слой T_pM, будучи конечномерным векторным пространством, обладает естественной евклидовой топологией.

Каждой паре $(\{U, \phi\}, \mathcal{O})$, где $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ карта на M, $\mathcal{O}$ – открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, поставим в соответствие множество $\{X_p \in TM \mid p \in U,\ X_p \in \mathcal{O}\}$, где запись $X_p \in \mathcal{O}$ означает, что в разложении $X_p = z_p \cdot \partial_p$ компонентный вектор $z_p \in \mathcal{O}$. Приняв эти множества в качестве базиса, определим на множестве TM отделимую топологию.

Каждой карте $\{U, \phi\}$ многообразия M поставим в соответствие карту $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ на топологическом пространстве TM, где открытое множество $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$, а непрерывное отображение $\widehat{\phi}\colon \widehat{U} \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ определено правилом

$$X_p \mapsto \widehat{\phi}(X_p) = (\phi(p), z_p) \quad \text{для всех} \quad X_p \in \widehat{U},$$

где z_p – компонентный вектор касательного вектора X_p в базисе $\partial_p \subset T_pM$.

Проверим, что если карты $\{U, \phi\}$ и $\{V, \psi\}$, $U \cap V \neq \varnothing$, гладко согласованы на M, то индуцированные карты $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ и $\{\widehat{V}, \widehat{\psi}\}$ гладко согласованы на TM. Итак, пусть

$$X_p \in \widehat{U} \cap \widehat{V} = \pi^{-1}(U \cap V) \neq \varnothing.$$

Тогда

$$\widehat{\phi}(X_p) = (\phi(p), z_p^{\phi}) \quad \text{и} \quad \widehat{\psi}(X_p) = (\psi(p), z_p^{\psi})$$

(индексы ϕ, ψ указывают в каких координатах вычислен компонентный вектор). Здесь

$$y = \psi(p) = \psi(\phi^{-1}(x)) = y(x) \quad \text{и} \quad x = \phi(p) = \phi(\psi^{-1}(y)) = x(y)$$

суть гладкие функции согласно определению согласованных карт на M. В свою очередь, имеем два представления

$$X_p = z_p^{\phi} \cdot \partial_p^{\phi} = z_p^{\psi} \cdot \partial_p^{\psi},$$

где z_p^{ϕ}, z_p^{ψ} – компонентные векторы касательного вектора X_p в соответствующих картах. Согласно правилам замены переменных

$$\partial_{p,\mu}^{\phi} = \partial_{y^\mu}\big|_p = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} \partial_{x^\mu} y^\nu\big|_p \cdot \partial_{y^\nu}\big|_p = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} \partial_{x^\mu} y^\nu\big|_p \cdot \partial_{p,\nu}^{\psi},$$
$$1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

или

$$\partial_p^{\phi} = \big\|\partial_x y\big|_p\big\| \cdot \partial_p^{\psi}, \quad \text{откуда} \quad z_p^{\psi} = \big\|\partial_x y\big|_p\big\| \cdot z_p^{\phi},$$

где $\|\partial_x y\big|_p\|$ – матрица Якоби перехода от переменных $(x^1, \dots, x^m)$ к переменным $(y^1, \dots, y^m)$. Она имеет гладкие коэффициенты и ее детерминант (якобиан) $\det\|\partial_x y\big|_p\| \neq 0$ по определению согласованных карт на M. Аналогичным образом,

$$\partial_p^\psi = \|\partial_y x\big|_p\| \cdot \partial_p^\phi, \quad \text{откуда} \quad z_p^\phi = \|\partial_y x\big|_p\| \cdot z_p^\psi,$$

где $\|\partial_y x\big|_p\|$ – матрица Якоби перехода от переменных $(y^1, \dots, y^m)$ к переменным $(x^1, \dots, x^m)$. В частности, отсюда следует, что карты $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ и $\{\widehat{V}, \widehat{\psi}\}$ гладко согласованы на TM.

Подведем итоги. На отделимом топологическом пространстве TM определена гладкая структура, превращающая его в гладкое многообразие. Легко проверяется, что проекция $\pi\colon TM \to M$ есть гладкое сюръективное отображение. Имеет место локальная тривиализация: каждой карте $\{U, \phi\}$ на многообразии M поставлена в соответствие карта $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ на многообразии TM, осуществляющая изоморфизм открытого множества $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$ на прямое произведение $U \times \mathbb{R}^m$. Другими словами, построено гладкое расслоение $TM = \{TM \xrightarrow{\pi} M\}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^m$. Более того, для каждой точки $p \in M$ слой $\pi^{-1}(p) = T_pM$ есть вещественное m-мерное векторное пространство, очевидно изоморфное в категории линейных пространств пространству $\mathbb{R}^m$. Следовательно, *расслоение TM есть векторное расслоение с типичным слоем $\mathbb{R}^m$*. Оно называется *касательным расслоением гладкого многообразия M*.

Гладкие сечения расслоения TM называются *касательными векторными полями* на многообразии M. Множество всех касательных векторных полей на многообразии M обозначается через $\mathfrak{T}(M)$. Как множество сечений векторного расслоения оно является модулем над алгеброй $\mathcal{C}^\infty(M)$.

По построению каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ порождает касательное векторное поле $X \in \mathfrak{T}(M)$, $X\colon M \to TM$, по правилу

$$p \mapsto X_p \in T_pM, \quad X_p(\mathbf{f}_p) = \xi(f)(p) \quad \text{для всех} \;\; p \in M, \; \mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p),$$

где $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ – представитель ростка $\mathbf{f}_p$. Легко проверяется (следует проделать это в качестве упражнения), что фактически это правило определяет изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей, причем обратный морфизм $\mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{D}(M)$, $X \mapsto \xi$, задается правилом

$$\xi(f)(p) = X_p(\mathbf{f}_p) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M), \; p \in M,$$

где $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ есть росток функции f в точке p, а $X_p = X(p) \in T_pM$ есть значение сечения X в той же точке p.

Таким образом, установлено следующее

Предложение 2.3.5. *Имеется естественный изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей*

$$\tau\colon \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M), \quad \xi \mapsto X = \tau(\xi),$$

где $X_p(\mathbf{f}_p) = \xi(f)(p)$ для всех $p \in M$ и $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ – представитель ростка $\mathbf{f}_p$.

Замечание. По построению $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathfrak{D}(M)$ обладает дополнительной структурой алгебры Ли. Установленный только что изоморфизм переносит эту структуру на $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathfrak{T}(M)$. Именно,

$$[X, Y] = \tau([\tau^{-1}(X), \tau^{-1}(Y)]) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{T}(M).$$

Более того, на практике можно считать, что дифференцирования и касательные поля это различные описания одного и того же объекта.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Согласно предложению 2.3.3 $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль $\mathfrak{D}(U)$ свободный с базисом $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$, каждое дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ однозначно записывается в виде

$$\xi = \sum z^\mu \cdot \partial_\mu, \quad z^\mu = \xi(\phi^\mu) \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

С другой стороны, каждое локальное сечение $X \in \mathfrak{T}(U)$, $X\colon U \to TU$, имеет вид $p \mapsto X_p \in T_pU$, где

$$X_p = \sum z_p^\mu \cdot \partial_{p,\mu}, \quad z_p^\mu \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

$\{\partial_{p,1}, \ldots, \partial_{p,m}\}$ – базисы в T_pU (см. предложение 2.3.4). Следовательно, $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль $\mathfrak{T}(U)$ также свободный с базисом $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, где

$$\sigma_\mu\colon U \to TU, \quad p \mapsto \partial_{p,\mu}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

сечение $X \in \mathfrak{T}(U)$ однозначно записывается в виде

$$X = \sum z^\mu \cdot \sigma_\mu, \quad z^\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

Таким образом, изоморфизм $\tau\colon \mathfrak{D}(U) \simeq \mathfrak{T}(U)$ сводится к отождествлению базиса $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ с базисом $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ (если точно, то к правилу $\tau(\partial_\mu) = \sigma_\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$).

Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(U)$, где U – открытое подмножество многообразия M. Говорят, что $\xi = 0$ на открытом подмножестве $V \subset U$, если выполняется одно (а значит, и остальные) из следующих эквивалентных условий:

- ⋆ $\xi(f) = 0$ для любой $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $\operatorname{supp}(f) \subset V$;
- ⋆ $\xi|_V = 0$;
- ⋆ $X|_V = 0$, где $X = \tau(\xi)$ – касательное векторное поле, порожденное дифференцированием ξ.

Соответственно, *носитель* дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(U)$ определяется как наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp}(\xi) \subset U$, вне которого $\xi = 0$.

Пусть M, N – гладкие многообразия. Каждое гладкое отображение $\Phi\colon M \to N$ индуцирует морфизм алгебр

$$\Phi^*\colon \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad g \mapsto f = \Phi^*(g) = g \circ \Phi.$$

Этот морфизм для каждой пары точек $p \in M$, $q = \Phi(p) \in N$, определяет морфизм алгебр (для простоты используем то же самое обозначение)

$$\Phi^*\colon \mathcal{C}^\infty(q) \to \mathcal{C}^\infty(p), \quad \mathbf{g}_q \mapsto \mathbf{f}_p = \Phi^*(\mathbf{g}_q)$$

(поясним, что росток $\mathbf{f}_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ есть класс эквивалентности функции $f = g \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, где $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$ есть произвольный представитель ростка $\mathbf{g}_q \in \mathcal{C}^\infty(q)$, $V \in \mathcal{U}(q)$, $U = \Phi^{-1}(V) \in \mathcal{U}(p)$). В свою очередь, это позволяет определить *касательное отображение*

$$\Phi_*\colon TM \to TN, \quad X_p \mapsto Y_q = \Phi_*(X_p) = X_p \circ \Phi^*,$$

подробнее, касательный вектор $X_p \in T_pM$ отображается в касательный вектор $Y_q \in T_qN$, $p \in M$, $q = \Phi(p) \in N$, где $Y_q(\mathbf{g}_q) = X_p(\Phi^*(\mathbf{g}_q))$ для всех $\mathbf{g}_q \in \mathcal{C}^\infty(q)$. В качестве упражнения, предлагается проверить, что такое отображение гладкое и что пара $M \xrightarrow{\Phi} N$, $TM \xrightarrow{\Phi_*} TN$ есть морфизм из касательного расслоения $TM \xrightarrow{\pi_M} M$ в касательное расслоение $TN \xrightarrow{\pi_N} N$. Следует также проверить, что таким образом определен ковариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных расслоений.

Пусть $\Phi\colon M \to N$ – гладкое отображение гладкого m-мерного многообразия M в гладкое n-мерное многообразие N, и пусть $\Phi_*\colon TM \to TN$ – его касательное отображение. Пусть вектор $X_p \in T_pM$, тогда его образ $Y_q = \Phi_*(X_p) \in T_qN$, $q = \Phi(p)$. Как было сказано выше для точки $p \in M$ существуют

- ⋆ карта $\{U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^m\}$ на M, $p \in U$,
- ⋆ карта $\{V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset \mathbb{R}^n\}$ на N, $\Phi(U) \subset V$,

такие, что

- ⋆ $y = \widetilde{\Phi}(x)$ – гладкое отображение из $\phi(U)$ в $\psi(V)$, где $\widetilde{\Phi} = \psi \circ \Phi \circ \phi^{-1}$.

Как было показано, карты $\{U, \phi\}$ и $\{V, \psi\}$ индуцируют карты $\{\widehat{U}, \widehat{\phi}\}$ и $\{\widehat{V}, \widehat{\psi}\}$ на касательных многообразиях, причем

- ⋆ $X_p \in \widehat{U}$, $X_p = z_p \cdot \partial^{\phi}_{p}$, где $z_p \in \mathbb{R}^m$, а $\{\partial^{\phi}_{p,1}, \ldots, \partial^{\phi}_{p,m}\}$ – базис в T_pM,
- ⋆ $Y_q \in \widehat{V}$, $Y_q = u_q \cdot \partial^{\psi}_{q}$, где $u_q \in \mathbb{R}^n$, а $\{\partial^{\psi}_{q,1}, \ldots, \partial^{\psi}_{q,n}\}$ – базис в T_qN.

По определению

$$Y_q(\mathbf{g}_q) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant n} u^{\nu}_{p} \cdot \partial^{\psi}_{q,\nu}(\mathbf{g}_q) = X_p(\mathbf{f}_p) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} z^{\mu}_{p} \cdot \partial^{\phi}_{p,\mu}(\mathbf{f}_p)$$

для всякого ростка $\mathbf{g}_q \in \mathcal{C}^{\infty}(q)$, где $\mathbf{f}_p(x) = \mathbf{g}_q(y)\big|_{y=\widetilde{\Phi}(x)}$. Следовательно,

$$\partial^{\phi}_{p,\mu}(\mathbf{f}_p) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \partial_{y^{\nu}} \mathbf{g}_q|_q \cdot \partial_{x^{\mu}} y^{\nu}|_p = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant n} (\partial_{x^{\mu}} \widetilde{\Phi}^{\nu}|_p) \cdot \partial^{\psi}_{q,\nu}(\mathbf{g}_q),$$

откуда получаем формулу для касательного отображения в локальных координатах

$$u^{\nu}_{q} = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} (\partial_{x^{\mu}} \widetilde{\Phi}^{\nu}|_p) \cdot z^{\mu}_{p}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n.$$

Гладкое отображение $\Phi\colon M \to N$ в общем случае не приводит к какому-либо отображению модулей сечений $\mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{T}(N)$. Можно лишь говорить, что два сечения $X \in \mathfrak{T}(M)$ и $Y \in \mathfrak{T}(N)$

Φ-*согласованы*, пишут $X \sim_\Phi Y$, если следующая диаграмма коммутативная

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\Phi_*"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\Phi"'] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

т.е. если $\Phi_* \circ X = Y \circ \Phi$ или, подробнее, $\Phi_*(X_p) = Y_q$ для всех $p \in M, q = \Phi(p) \in N$. Изоморфизмы $\mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M), \mathfrak{D}(N) \simeq \mathfrak{T}(N)$ переносят это понятие на дифференцирования. Именно, говорят что дифференцирования $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ и $\eta \in \mathfrak{D}(N)$ Φ-согласованы, пишут опять $\xi \sim_\Phi \eta$, если следующая диаграмма коммутативная

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\infty(M) \arrow[d, "\xi"'] & \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[l, "\Phi^*"'] \arrow[d, "\eta"] \\ \mathcal{C}^\infty(M) & \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[l, "\Phi^*"] \end{tikzcd}$$

т.е. если $\xi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \eta$.

Предложение 2.3.6. *Пусть* $\xi_i \in \mathfrak{D}(M)$, $\eta_i \in \mathfrak{D}(N)$, *причем* $\xi_i \sim_\Phi \eta_i$, *для* $i = 1, 2$. *Тогда коммутаторы* $[\xi_1, \xi_2] \sim_\Phi [\eta_1, \eta_2]$.

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}(\xi_1 \circ \xi_2) \circ \Phi^* &= \xi_1 \circ (\xi_2 \circ \Phi^*) = \xi_1 \circ (\Phi^* \circ \eta_2) = (\xi_1 \circ \Phi^*) \circ \eta_2 \\ &= (\Phi^* \circ \eta_1) \circ \eta_2 = \Phi^* \circ (\eta_1 \circ \eta_2)\end{aligned}$$

и, значит, коммутаторы $[\xi_1, \xi_2]$ и $[\eta_1, \eta_2]$ Φ-согласованы.

Следствие 2.3.1. *Пусть* $X_i \in \mathfrak{T}(M)$, $Y_i \in \mathfrak{T}(N)$, *причем* $X_i \sim_\Phi Y_i$, *для* $i = 1, 2$. *Тогда скобки Ли* $[X_1, X_2] \sim_\Phi [Y_1, Y_2]$.

Доказательство. Очевидно, достаточно воспользоваться изоморфизмами $\mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{T}(M)$, $\mathfrak{D}(N) \simeq \mathfrak{T}(N)$.

Пусть $\Phi\colon M \simeq N$ *диффеоморфизм* (изоморфизм категории гладких многообразий) и $\Phi^{-1}\colon N \simeq M$ – обратное отображение. Тогда правило Φ-согласования по каждому сечению $X \in \mathfrak{T}(M)$ однозначно определяет сечение $Y \in \mathfrak{T}(N)$ формулой

$$Y = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1}.$$

Другими словами, в этом случае определен изоморфизм линейных пространств

$$\Phi_*\colon \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(N), \quad X \mapsto Y = \Phi_*(X) = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1},$$

так что

$$Y_q = \Phi_*(X_p) \quad \text{для всех} \quad q \in N,\ p = \Phi^{-1}(q).$$

Изоморфизмы $\tau_M\colon \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{X}(M)$ и $\tau_N\colon \mathfrak{D}(N) \simeq \mathfrak{X}(N)$ переносят это правило на дифференцирования. Именно, каждое $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ отображается в $\eta = \tau_N^{-1}(\Phi_*(\tau_M(\xi))) \in \mathfrak{D}(N)$. Легко проверяется, что здесь $\eta = (\Phi^*)^{-1} \circ \xi \circ \Phi^*$ (обратим внимание, что $(\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*$). Таким образом, определен изоморфизм линейных пространств

$$\Phi_*\colon \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{D}(N), \quad \xi \mapsto \eta = \Phi_*(\xi) = (\Phi^*)^{-1} \circ \xi \circ \Phi^*$$

(ради простоты обозначений, мы используем один и тот же символ в родственных ситуациях).

Суммируем установленные результаты.

Предложение 2.3.7. *Пусть $\Phi\colon M \simeq N$ – диффеоморфизм. Тогда определены изоморфизмы алгебр Ли*:

- ⋆ $\Phi_*\colon \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}(N), \quad X \mapsto Y = \Phi_*(X) = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1}$;
- ⋆ $\Phi_*\colon \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{D}(N), \quad \xi \mapsto \eta = \Phi_*(\xi) = (\Phi^*)^{-1} \circ \xi \circ \Phi^*$.

Пусть S и M – гладкие многообразия с касательными расслоениями $TS \xrightarrow{\pi_S} S$ и $TM \xrightarrow{\pi_M} M$. Пусть $\Phi\colon S \to M$ – гладкое отображение. Обозначим через $\{T_SM, \pi_S^0, \varphi\}$ обратный образ расслоения $TM \xrightarrow{\pi_M} M$ относительно отображения $\Phi\colon S \to M$ (см. с. 120, здесь положено $T_SM = S \times_M TM$, $\pi_S^0 = \pi_S$, $\varphi = \Phi_*$, индекс ^{0} добавлен для удобства). По построению $T_SM \xrightarrow{\pi_S^0} S$ есть векторное расслоение над S, причем существует единственное гладкое отображение $\Phi^0_*\colon TS \to T_S M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
TS \arrow[rr, "\Phi_*"] \arrow[dd, "\pi_S"'] \arrow[dr, "\Phi^0_*"] & & TM \arrow[dd, "\pi_M"] \\
& T_S M \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[dl, "\pi^0_S"] & \\
S \arrow[rr, "\Phi"'] & & M
\end{tikzcd}$$

Учитывая большое количество стрелок этой диаграммы, выпишем правила по которым они действуют:

- ⋆ $\Phi\colon S \to M$, $p \mapsto q = \Phi(p)$,
- ⋆ $\pi_S\colon TS \to S$, $X_p \mapsto p$,
- ⋆ $\pi_M\colon TM \to M$, $Y_q \mapsto q$,
- ⋆ $\Phi_*\colon TS \to TM$, $X_p \mapsto Y_q = \Phi_*(X_p)$, $q = \Phi(p)$,
- ⋆ $T_S M = \{(p, Y_q) \in S \times TM \mid q = \Phi(p)\}$,
- ⋆ $\pi^0_S\colon T_S M \to S$, $(p, Y_q) \mapsto p$,
- ⋆ $\varphi\colon T_S M \to TM$, $(p, Y_q) \mapsto Y_q$,
- ⋆ $\Phi^0_*\colon TS \to T_S M$, $X_p \mapsto (p, Y_q)$, $Y_q = \Phi_*(X_p)$, $q = \Phi(p)$.

Важный частный случай – многообразие S есть подмногообразие многообразия M. Здесь

- ⋆ $\Phi = \iota\colon S \to M$ – каноническое вложение, $p \mapsto p$ для всех $p \in S$,
- ⋆ $\Phi_* = \iota_*\colon TS \to TM$, $X_p \mapsto Y_p = X_p$, тоже каноническое вложение, так что можно считать, что $T_p S \subset T_p M$ для всех $p \in S$,
- ⋆ $T_S M = \{(p, Y_p) \in S \times TM\} = \{Y_p \in TM \mid p \in S\} = \bigcup_{p \in S} T_p M$,
- ⋆ $\pi^0_S\colon T_S M \to S$, $Y_p \mapsto p$,
- ⋆ $\varphi\colon T_S M \to TM$, $Y_p \mapsto Y_p$,
- ⋆ $\Phi^0_* = \iota^0_*\colon TS \to T_S M$, $X_p \mapsto X_p$.

2.3.5. Кокасательное расслоение. Пусть M – гладкое m-мерное многообразие, $TM \xrightarrow{\pi} M$ – его касательное расслоение. Для каждой точки $p \in M$ касательное векторное пространство $T_p M$ имеет дуальное (иначе, сопряженное или двойственное) m-мерное векторное пространство $T^*_p M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, \mathbb{R})$, которое называется *кокасательным пространством* в точке p. Элементы кокасательного пространства T_p^*M называются *кокасательными векторами*. Положим $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ и определим проекцию $\pi\colon T^*M \to M$ правилом

$$\omega_p \mapsto \pi(\omega_p) = p \quad \text{для всех} \quad \omega_p \in T^*M.$$

Как и в случае касательного расслоения, определим на множестве T^*M гладкую структуру, используя локальные карты гладкого многообразия M. Пусть $\{U, \phi\} = \{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Для каждой точки $p \in U$ касательное пространство T_pM имеет базис $\partial_p = (\partial_{p,1}, \ldots, \partial_{p,m})$, а дуальное кокасательное пространство T_p^*M имеет дуальный базис

$$d_p = (d_p^1, \ldots, d_p^m), \quad d_p^\mu(\partial_{p,\nu}) = \delta_\nu^\mu, \quad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m.$$

Соответственно, каждый кокасательный вектор $\omega_p \in T_p^*M$ имеет разложение

$$\omega_p = \sum_{1\leqslant\mu\leqslant m} u_{p,\mu} d_p^\mu = u_p \cdot d_p, \quad u_{p,\mu} = \omega_p(\partial_{p,\mu}) \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

Каждой паре $(\{U, \phi\},\ \mathcal{O})$, где $\{U, \phi\}$ – карта на M, $\mathcal{O}$ – открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, поставим в соответствие множество $\{\omega_p \in T^*M \mid p \in U,\ \omega_p \in \mathcal{O}\}$, где запись $\omega_p \in \mathcal{O}$ означает, что в разложении $\omega_p = u_p \cdot d_p$ компонентный ковектор $u_p = (u_{p,1}, \ldots, u_{p,m}) \in \mathcal{O}$. Приняв эти множества в качестве базиса, определим на T^*M отделимую топологию.

Каждой карте $\{U, \phi\}$ многообразия M поставим в соответствие карту $\{\widetilde{U}, \widetilde{\phi}\}$ на топологическом пространстве T^*M, где открытое множество $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$, а непрерывное отображение $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{U} \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ определено правилом

$$\omega_p \mapsto \widetilde{\phi}(\omega_p) = (\phi(p), u_p) \quad \text{для всех} \quad \omega_p \in \widetilde{U},$$

где u_p – компонентный ковектор кокасательного вектора ω_p в базисе d_p. Проверим, что если карты $\{U, \phi\}$ и $\{V, \psi\}$, $U \cap V \neq \varnothing$, гладко согласованы на M, то индуцированные карты $\{\widetilde{U}, \widetilde{\phi}\}$ и $\{\widetilde{V}, \widetilde{\psi}\}$ гладко согласованы на T^*M. Итак, пусть

$$\omega_p \in \widetilde{U} \cap \widetilde{V} = \pi^{-1}(U \cap V) \neq \varnothing,$$

тогда

$$\widetilde{\phi}(\omega_p) = (\phi(p), u_p^{\phi}) \quad \text{и} \quad \widetilde{\psi}(\omega_p) = (\psi(p), u_p^{\psi})$$

(индексы ϕ, ψ указывают, в каких координатах вычислен компонентный ковектор). Учитывая проведенные выше рассуждения для касательного расслоения, надо лишь выяснить, как преобразуются компонентные ковекторы. Имеем два представления

$$\omega_p = u_p^{\phi} \cdot d_p^{\phi} = u_p^{\psi} d_p^{\psi},$$
$$u_p^{\phi} = (u_{p,1}^{\phi}, \ldots, u_{p,m}^{\phi}),\ u_p^{\psi} = (u_{p,1}^{\psi}, \ldots, u_{p,m}^{\psi}) \in \mathbb{R}^m.$$

Здесь

$$u_{p,\mu}^{\phi} = \omega_p(\partial_{p,\mu}^{\phi}) = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant m} \partial_{x^\mu} y^\nu|_p \cdot \omega_p(\partial_{p,\nu}^{\psi}) = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant m} \partial_{x^\mu} y^\nu|_p \cdot u_{p,\nu}^{\psi},$$

откуда $u_p^{\phi} = \big\|\partial_x y\big|_p\big\| \cdot u_p^{\psi}$. Аналогичным образом выводим, что $u_p^{\psi} = \big\|\partial_y x\big|_p\big\| \cdot u_p^{\phi}$. Как и в случае касательного расслоения, отсюда следует, что карты $\{\widetilde{U}, \widetilde{\phi}\}$ и $\{\widetilde{V}, \widetilde{\psi}\}$ гладко согласованы на T^*M.

Замечание. Обратим внимание, что в отличие от компонентных векторов (см. с. 132), компонентные ковекторы преобразуются с помощью обратных матриц Якоби.

Подведем итоги. На отделимом топологическом пространстве T^*M определена гладкая структура, превращающая его в гладкое многообразие. Легко проверяется, что проекция $\pi\colon T^*M \to M$ есть гладкое сюръективное отображение. Имеет место локальная тривиализация: каждой карте $\{U, \phi\}$ на многообразии M поставлена в соответствие карта $\{\widetilde{U}, \widetilde{\phi}\}$ на многообразии T^*M, осуществляющая изоморфизм открытого множества $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ на прямое произведение $U \times \mathbb{R}^m$. Другими словами, построено гладкое расслоение $T^*M = \{T^*M \xrightarrow{\pi} M\}$ с типичным слоем $\mathbb{R}^m$. Более того, для каждой точки $p \in M$ слой $\pi^{-1}(p) = T_p^*M$ есть вещественное m-мерное векторное пространство, очевидно изоморфное в категории линейных пространств пространству $\mathbb{R}^m$. Следовательно, *расслоение T^*M есть векторное расслоение с типичным слоем $\mathbb{R}^m$*. Оно называется *кокасательным расслоением гладкого многообразия M*. По построению векторное расслоение T^*M – *послойно дуальное* к векторному расслоению TM, т.е. слой T_p^*M есть векторное пространство, дуальное к векторному пространству слою T_pM для каждой точки $p \in M$.

Гладкие сечения расслоения T^*M называются *кокасательными векторными полями* на многообразии M. Множество всех кокасательных векторных полей на многообразии M обозначается через $\mathfrak{T}^*(M)$. Как множество сечений векторного расслоения оно является модулем над алгеброй $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Далее, $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathfrak{D}(M)$ имеет дуальный $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль

$$\Omega^1(M) = (\mathfrak{D}(M))^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathfrak{D}(M), \mathcal{C}^\infty(M))$$

– модуль дифференциальных 1-форм.

Предложение 2.3.8. *Каждая* 1-*форма* $\omega \in \Omega^1(M)$ *есть локальное отображение*, *т.е.*

$$\mathrm{supp}(\omega(\xi)) \subset \mathrm{supp}(\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathfrak{D}(M).$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ и $p \notin \mathrm{supp}(\xi)$. Тогда найдется функция $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ такая, что $\varphi(p) = 0$ и $\varphi = 1$ на $\mathrm{supp}(\xi)$, откуда

$$\omega(\xi)(p) = \omega(\varphi \cdot \xi)(p) = \varphi(p) \cdot \omega(\xi)(p) = 0.$$

Каждой 1-форме $\omega \in \Omega^1(M)$ поставим в соответствие кокасательное поле $\widetilde{\omega} \in \mathfrak{T}^*(M)$ по правилу

$$p \mapsto \widetilde{\omega}_p \in T_p^*M, \quad \widetilde{\omega}_p(X_p) = \omega(\xi)(p) \ \text{ для всех } \ p \in M, \ X_p \in T_pM,$$

где дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ такое, что $X_p = \widehat{\xi_p}$ (другими словами, $\xi \in \boldsymbol{\xi}_p \cap \mathfrak{D}(M)$ – глобальный представитель ростка дифференцирований $\boldsymbol{\xi}_p$). В силу предложения 2.3.8 это правило корректное. Более того, это правило осуществляет изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей $\Omega^1(M)$ и $\mathfrak{T}^*(M)$, причем обратное отображение $\mathfrak{T}^*(M) \to \Omega^1(M)$ задается правилом

$$\sigma \mapsto \omega, \ \ \omega(\xi)(p) = \sigma_p(\widehat{\xi_p}) \ \text{ для всех } \ \sigma \in \mathfrak{T}^*(M), \ \xi \in \mathfrak{D}(M), \ p \in M,$$

где $\sigma_p \in T_p^*M$ – значение сечения σ в точке p, $\widehat{\xi_p}$ – касательный вектор в точке p, порожденный дифференцированием ξ. Гладкость возникающих здесь функций и сечений следует проверять локально, т.е. в соответствующих картах.

Наконец, $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathfrak{T}(M)$ также имеет дуальный $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль

$$(\mathfrak{T}(M))^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathfrak{T}(M), \mathcal{C}^\infty(M)),$$

очевидно изоморфный $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулю $\mathfrak{T}^*(M)$, изоморфизм задается поточечно: каждому кокасательному векторному полю $\sigma \in \mathfrak{T}^*(M)$ ставится в соответствие сечение $\widetilde{\sigma} \in (\mathfrak{T}(M))^*$, где

$$\widetilde{\sigma}(X)(p) = \sigma_p(X_p) \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{T}(M),\ p \in M,$$

$\sigma_p \in T_p^*M$ – значение сечения σ в точке p, $X_p \in T_pM$ – значение сечения X в точке p.

Таким образом, установлено следующее

Предложение 2.3.9. *Имеются естественные изоморфизмы $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей*

$$\Omega^1(M) \simeq \mathfrak{T}^*(M) \simeq (\mathfrak{T}(M))^*.$$

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Согласно предложению 2.3.3 $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль $\mathfrak{D}(U)$ – свободный с базисом $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$. Следовательно, дуальный $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль $\Omega^1(U)$ тоже свободный с дуальным базисом

$$\{d^1, \dots, d^m\}, \quad d^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m,$$

каждая 1-форма $\omega \in \Omega^1(U)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum \omega_\mu \cdot d^\mu, \quad \omega_\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

С другой стороны, каждое локальное сечение

$$\omega \in \mathfrak{T}^*(U), \quad \omega\colon U \to T^*U,$$

имеет вид $p \mapsto \omega_p \in T_p^*U$, где

$$\omega_p = \sum \omega_{p,\mu} \cdot d_p^\mu, \quad \omega_{p,\mu} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

$\{d_p^1, \dots, d_p^m\}$ – базисы в T_p^*U, $p \in U$. Следовательно, $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль $\mathfrak{T}^*(U)$ тоже свободный с базисом $\{\sigma^1, \dots, \sigma^m\}$, где

$$\sigma^\mu\colon U \to T^*U, \quad p \mapsto d_p^\mu, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

сечение $\omega \in \mathfrak{T}^*(U)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum \omega_\mu \cdot \sigma^\mu, \quad \omega_\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

Наконец, $\mathcal{C}^\infty(U)$-модуль $(\mathfrak{T}(U))^*$, как дуальный к свободному $\mathcal{C}^\infty(U)$-модулю $\mathfrak{T}(U)$, также свободный с базисом

$$\{s^1, \dots, s^m\}, \quad s^\mu(\sigma_\nu) = \delta^\mu_\nu, \quad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m,$$

дуальным к базису $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ модуля $\mathfrak{T}(U)$, так что каждый элемент $\omega \in (\mathfrak{T}(U))^*$ имеет однозначное представление

$$\omega = \sum \omega_\mu \cdot s^\mu, \quad \omega_\mu \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m.$$

В таких обозначениях изоморфизмы $\Omega^1(U) \simeq \mathfrak{T}^*(U) \simeq (\mathfrak{T}(U))^*$ сводятся к отождествлению базисов $\{d^1, \dots, d^m\}$, $\{\sigma^1, \dots, \sigma^m\}$ и $\{s^1, \dots, s^m\}$.

Замечание. На практике $\mathcal{C}^\infty(M)$-модули $\Omega^1(M)$, $\mathfrak{T}^*(M)$ и $(\mathfrak{T}(M))^*$ обычно отождествляют, считая их различными описаниями одного и того же объекта.

Пусть M, N – гладкие многообразия, $\Phi\colon M \to N$ – гладкое отображение (см. с. 135). *Кокасательное отображение*

$$\Phi^*\colon \mathfrak{T}^*(N) \to \mathfrak{T}^*(M)$$

задается правилом: сечению $\chi \in \mathfrak{T}^*(N)$ ставится в соответствие сечение $\omega = \Phi^*(\chi) = \chi \circ \Phi_* \in \mathfrak{T}^*(M)$, так что

$$\omega(X)(p) = \chi_q(Y_q) \quad \text{для всех} \quad p \in M,\ X \in \mathfrak{T}(M),$$

где $q = \Phi(p)$, $Y_q = \Phi_*(X_p)$. Легко проверяется, что эти правила, в частности, определяют контравариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию линейных пространств, где каждому гладкому многообразию ставится в соответствие линейное пространство (почему не модуль?) гладких сечений кокасательного расслоения, каждому гладкому отображению – соответствующее кокасательное отображение.

Замечание. В силу предложения 2.3.9 кокасательное отображение определено и на 1-формах. Заметим, также что кокасательное отображение $\Phi^*\colon T^*N \to T^*M$ в общем случае не определено (сравни с касательным отображением, см. предложение 2.3.7).

2.3.6. Тензорные поля. Пусть M – гладкое многообразие, $\mathfrak{T}(M)$ – модуль гладких сечений касательного расслоения, $\mathfrak{T}^*(M)$ – модуль гладких сечений кокасательного расслоения (здесь и ниже в этом разделе термин “модуль” означает $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль). Обозначим

- $\star$ $\mathbf{T}^0_0(M) = \mathbf{T}^0(M) = \mathbf{T}_0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ – модуль скалярных полей (гладких функций) на M,
- $\star$ $\mathbf{T}^r(M) = \mathbf{T}^r_0(M) = \bigotimes^r \mathfrak{T}(M)$ – модуль контравариантных тензорных полей степени $r \in \mathbb{N}$ на M,
- $\star$ $\mathbf{T}_s(M) = \mathbf{T}^0_s(M) = \bigotimes^s \mathfrak{T}^*(M)$ – модуль ковариантных тензорных полей степени $s \in \mathbb{N}$ на M,
- $\star$ $\mathbf{T}^r_s(M) = \mathbf{T}^r(M) \otimes \mathbf{T}_s(M)$ – модуль тензорных полей бистепени $(r, s) \in \mathbb{Z}^2_+$ на M
- $\star$ $\mathbf{T}(M) = \bigoplus_{r,s \in \mathbb{Z}_+} \mathbf{T}^r_s(M)$ – тензорная алгебра полей на M

(здесь и ниже в этом разделе, если не указано противное, тензорные произведения и прямая сумма берутся в категории $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей). Поясним, что умножение в тензорной алгебре $\mathbf{T}(M)$ задается правилом

$$(X \otimes \varrho) \cdot (Y \otimes \chi) = (X \otimes Y) \otimes (\varrho \otimes \chi)$$
$$\text{для всех} \quad X \otimes \varrho \in \mathbf{T}^p_q(M),\ Y \otimes \chi \in \mathbf{T}^r_s,$$

так что здесь $(X \otimes \varrho) \cdot (Y \otimes \chi) \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+s}(M)$.

Тензорные поля на многообразии M можно определить и другим эквивалентным образом, с помощью послойного тензорного произведения касательного и кокасательного расслоений. Именно, для всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$T^r_s M = \bigcup_{p \in M} (T^r_s)_p M, \quad (T^r_s)_p M = (\bigotimes^r T_p M) \otimes (\bigotimes^s T^*_p M),$$

где тензорные произведения берутся в категории векторных пространств. Подобно тому, как это было сделано в случае касательного и кокасательного расслоений, снабдим множество $T^r_s M$ структурой векторного расслоения $T^r_s M \xrightarrow{\pi} M$ и определим тензорные поля бистепени (r, s) как гладкие сечения этого расслоения. Можно показать, что построенный таким образом модуль сечений будет изоморфен (в категории $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей) введенному выше модулю $\mathbf{T}^r_s(M)$.

2.4. Дифференциальные формы

2.4.1. Внешняя алгебра дифференцирований. Пусть M – гладкое m-мерное многообразие.

Пусть $\wedge\mathfrak{D}(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}_+} \wedge^p \mathfrak{D}(M)$ – внешняя алгебра $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуля $\mathfrak{D}(M)$, где

$$\wedge^p \mathfrak{D}(M) = \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & p = 0, \\ \underbrace{\mathfrak{D}(M) \wedge \cdots \wedge \mathfrak{D}(M)}_{p \text{ сомножителей}}, & p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(тензорное произведение берется в категории $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей, ради краткости здесь и ниже пишем $\wedge$ вместо $\wedge_{\mathcal{C}^\infty(M)}$).

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Согласно предложению 2.3.3 модуль $\mathfrak{D}(U)$ свободный с базисом $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$. Следовательно, для каждого $p \in \mathbb{N}$ модуль $\wedge^p \mathfrak{D}(U)$ также свободный с базисом

$$\{\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \mid 1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m\},$$

каждый элемент $V \in \wedge^p \mathfrak{D}(U)$ имеет однозначное представление

$$V = \sum_{1\leqslant\mu_1<\cdots<\mu_p\leqslant m} V^{\mu_1\ldots\mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}, \quad V^{\mu_1\ldots\mu_p} \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

На практике удобнее использовать другое, альтернированное (иначе, косое), представление

$$V = \frac{1}{p!} \sum_{1\leqslant\mu_1,\ldots,\mu_p\leqslant m} V^{\mu_1\ldots\mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p},$$

где коэффициенты $V^{\mu_1\ldots\mu_p}$ кососимметрично продолжены на все значения индексов,

$$V^{\sigma(\mu_1\ldots\mu_p)} = \operatorname{sign}\sigma \cdot V^{\mu_1\ldots\mu_p} \ \text{ для всех } \ \sigma \in \Sigma_p, \ \ 1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p \leqslant m.$$

Замечание. Здесь и ниже $\sigma(\mu_1 \ldots \mu_p) = (\mu_{\sigma(1)} \ldots \mu_{\sigma(p)})$.

Умножение во внешней алгебре $\wedge\mathfrak{D}(U)$ задается правилом

$$(\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}) \wedge (\partial_{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p+q}}) = \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p+q}}$$

для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_{p+q} \leqslant m$, так что

$$V \wedge W = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{1\leqslant\mu_1,\ldots,\mu_{p+q}\leqslant m} (V \wedge W)^{\mu_1\ldots\mu_{p+q}} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p+q}}$$

для всех

$$V = \sum_{1\leqslant\mu_1<\dots<\mu_p\leqslant m} V^{\mu_1\dots\mu_p}\cdot\partial_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\partial_{\mu_p}\in\wedge^p\mathfrak{D}(U),$$
$$W = \sum_{1\leqslant\mu_1<\dots<\mu_q\leqslant m} W^{\mu_1\dots\mu_q}\cdot\partial_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\partial_{\mu_q}\in\wedge^q\mathfrak{D}(U),$$

где

$$(V\wedge W)^{\mu_1\dots\mu_{p+q}} = \sum_{\sigma\in\Sigma^{p,q}_{p+q}} \operatorname{sign}\sigma\cdot V^{\sigma(\mu_1\dots\mu_p}W^{\mu_{p+1}\dots\mu_{p+q})},$$

альтернированная сумма берется по всем перестановкам σ натуральных чисел $1,\dots,p+q$, перемещающим хотя бы одно число из группы $1,\dots,p$ в группу $p+1,\dots,p+q$.

Аналогичным образом определяется внешняя алгебра

$$\wedge\mathfrak{T}(M) = \bigoplus\nolimits_{p\in\mathbb{Z}_+}\wedge^p\mathfrak{T}(M)$$

$\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей $\mathfrak{T}(M)$, причем изоморфизм $\tau\colon\mathfrak{D}(M)\simeq\mathfrak{T}(M)$ (см. предложение 2.3.5) распространяется и на внешние алгебры:

$$\tau\colon\wedge^p\mathfrak{D}(M)\simeq\wedge^p\mathfrak{T}(M),\quad \tau(\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_p)=\tau(\xi_1)\wedge\dots\wedge\tau(\xi_p),\ p\in\mathbb{N}.$$

Этот изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей позволяет переносить все результаты, установленные для внешней алгебры дифференцирований на внешнюю алгебру касательных полей, и обратно, практически отождествляя их.

Пусть $\Phi\colon M\to N$ – гладкое отображение из гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Касательное отображение $\Phi_*\colon TM\to TN$ (см. с. 135) индуцирует линейное отображение

$$\Phi_*\colon\wedge^p TM\to\wedge^p TN,$$
$$\Phi_*(\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_p)=\Phi_*(\xi_1)\wedge\dots\wedge\Phi_*(\xi_p),\quad p\in\mathbb{N}.$$

Очевидно,

$$\Phi_*(V\wedge W)=\Phi_*(V)\wedge\Phi_*(W)$$
$$\text{для всех}\quad V\in\wedge^p TM,\ W\in\wedge^q TM,\ p,q\in\mathbb{N}.$$

На алгебре $\wedge\mathfrak{D}(M)$ определены следующие естественные операции.

Предложение 2.4.1. *Для каждой 1-формы $\omega \in \Omega^1(M)$ существует единственное косое дифференцирование (иначе, антидифференцирование) ι_ω внешней алгебры $\wedge\mathfrak{D}(M)$ такое, что*

- $\star$ $\iota_\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p\mathfrak{D}(M), \wedge^{p-1}\mathfrak{D}(M))$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}_+$,
- $\star$ $\iota_\omega(f) = 0$ *для всех* $f \in \wedge^0\mathfrak{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- $\star$ $\iota_\omega(X) = \omega(X)$ *для всех* $X \in \wedge^1\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$\iota_\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} (-1)^{i-1}\omega(X_i) \cdot X_1 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p.$$

Замечание. Здесь и всюду ниже значок ˇ означает, что соответствующий аргумент пропущен.

Замечание. Термин *косое дифференцирование* означает, что

$$\iota_\omega(V \wedge W) = \iota_\omega(V) \wedge W + (-1)^p V \wedge \iota_\omega(W)$$

для всех $\omega \in \Omega^1(M)$, $V \in \wedge^p\mathfrak{D}(M)$, $W \in \wedge^q\mathfrak{D}(M)$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Доказательство предлагается проделать в качестве упражнения.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Пусть

$$\omega = \sum_{1\leqslant\mu\leqslant m} \omega_\mu \cdot d^\mu \in \Omega^1(U),$$

$V = \sum_{1\leqslant\mu_1<\cdots<\mu_p\leqslant m} V^{\mu_1\cdots\mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p\mathfrak{D}(U)$, $p \in \mathbb{N}$, тогда

$$\iota_\omega(V) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{1\leqslant\mu_1,\ldots,\mu_{p-1}\leqslant m} (\iota_\omega V)^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_{p-1}},$$

где

$$(\iota_\omega V)^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}} = \sum_{1\leqslant\mu\leqslant m} \omega_\mu V^{\mu\mu_1\cdots\mu_{p-1}}.$$

Очевидно, в силу кососимметрии

$$\iota_\omega \circ \iota_\chi + \iota_\chi \circ \iota_\omega = 0 \quad \text{для всех} \quad \omega, \chi \in \Omega^1(M),$$

в частности,

$$\iota_\omega \circ \iota_\omega = 0 \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega^1(M).$$

Таким образом, для каждой 1-формы $\omega \in \Omega^1(M)$ определен комплекс $\{\wedge^p\mathfrak{D}(M), \iota_\omega^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_\omega^p = \iota_\omega|_{\wedge^p\mathfrak{D}(M)}$.

Предложение 2.4.2. *Пусть* $\omega \in \Omega^1(M)$, $D \in \mathfrak{D}(M)$, *определим эндоморфизм* $h_D \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge \mathfrak{D}(M))$ *правилом*

$$h_D(V) = D \wedge V \quad \text{для всех} \quad V \in \wedge^p \mathfrak{D}(M),\ p \in \mathbb{Z}_+$$

(в частности, $h_D(f) = f \cdot D$ *для всех* $f \in \wedge^0 \mathfrak{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$*), тогда*

$$\iota_\omega \circ h_D + h_D \circ \iota_\omega = \omega(D) \cdot \mathrm{id}_{\wedge \mathfrak{D}(M)} .$$

Доказательство. Действительно, пусть $V \in \wedge^p \mathfrak{D}(M)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned}(\iota_\omega \circ h_D)(V) = \iota_\omega(D \wedge V) &= \iota_\omega(D) \wedge V - D \wedge \iota_\omega(V) \\ &= \omega(D) \cdot V - D \wedge \iota_\omega(V),\end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$(h_D \circ \iota_\omega)(V) = h_D(\iota_\omega(V)) = D \wedge \iota_\omega(V).$$

Складывая полученные равенства, убеждаемся в справедливости доказываемой формулы.

Следствие 2.4.1. *Пусть для данной* $\omega \in \Omega^1(M)$ *существует* $D \in \mathfrak{D}(M)$ *такое, что* $\omega(D) = 1$ *(где* $1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$*), тогда комплекс* $\{\wedge \mathfrak{D}(M), \iota_\omega\}$ *ациклический, т.е. все его гомологии нулевые,*

$$H_p(\wedge \mathfrak{D}(M), \iota_\omega) = \ker \iota^p / \operatorname{im} \iota^{p+1} = 0, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Предложение 2.4.3. *Присоединенное действие*

$$\begin{gathered}\mathrm{as}\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(M)),\\ D \mapsto \mathrm{as}(D)\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(M), \quad X \mapsto D(X) = [D, X],\end{gathered}$$

для всех $D, X \in \mathfrak{D}(M)$, *определяет единственный морфизм алгебр Ли*

$$L\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(\wedge \mathfrak{D}(M))$$

такой, что для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$

- ⋆ $L_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\wedge^p \mathfrak{D}(M))$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}_+$,
- ⋆ $L_D(f) = D(f)$ *для всех* $f \in \wedge^0 \mathfrak{D}(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- ⋆ $L_D(X) = [D, X]$ *для всех* $X \in \wedge^1 \mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$L_D(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} X_1 \wedge \dots \wedge [D, X_i] \wedge \dots \wedge X_p$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} (-1)^{i-1}[D, X_i] \wedge X_1 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p$$

для всех $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$.

Доказательство этого и ряда других утверждений этого раздела опускаем, поскольку они доказаны в более общей форме в следующем выпуске моих лекций.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Пусть

$$D = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} D^\mu \cdot \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U),$$

$$V = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \dots < \mu_p \leqslant m} V^{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U),$$

тогда

$$L_D(V) = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \dots, \mu_p \leqslant m} (L_D V)^{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_p},$$

где

$$(L_D V)^{\mu_1 \dots \mu_p} = D(V^{\mu_1 \dots \mu_p}) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} (-1)^i \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} (\partial_\mu D^{\mu_i}) \cdot V^{\mu \mu_1 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p}.$$

2.4.2. Комплекс де Рама $\{\Omega(M), d\}$. Пусть M – гладкое m-мерное многообразие.

Определен $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль

$$\Omega(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge \mathfrak{D}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = \bigoplus\nolimits_{p \in \mathbb{Z}_+} \Omega^p(M),$$

дуальный к $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулю $\wedge \mathfrak{D}(M)$, где

$$\Omega^p(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{D}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = (\wedge^p \mathfrak{D}(M))^*, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

в частности, $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ (проверить).

Согласно предложению 2.3.5 можно отождествить $\mathcal{C}^\infty(M)$-модули $\mathfrak{D}(M)$ и $\mathfrak{T}(M)$ и считать, что

$$\Omega^p(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{T}(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{N}$$

(ср. с предложением 2.3.9).

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Как было отмечено выше, для каждого $p \in \mathbb{N}$ модуль $\wedge^p \mathfrak{D}(U)$ свободный. Следовательно, дуальный модуль $\Omega^p(U)$ тоже свободный, обладает дуальным базисом

$$\{d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \mid 1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m\},$$

где $d^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$, $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$, каждый элемент $\omega \in \Omega^p(U)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \omega(\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}) \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

(сравни с аналогичными представлениями в модуле $\wedge^p \mathfrak{D}(U)$). В частности,

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \ldots \mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \ldots \mu_p} \in \mathcal{C}^\infty(U) \end{aligned}$$

для всех

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U), \\ V &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} V^{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U). \end{aligned}$$

Модуль $\Omega(M)$ обладает дополнительной структурой – структурой ассоциативной алгебры с умножением, задаваемым правилом

$$\begin{aligned} &(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{p+q}) \\ &\quad = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \operatorname{sign} \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \\ &\quad = \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{p,q}_{p+q}} \operatorname{sign} \sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M)$, $X_1, \ldots, X_{p+q} \in \mathfrak{D}(M)$, где в первом случае альтернированная сумма берется по всем перестановкам σ индексов $1, \ldots, p+q$, а во втором случае – лишь по перестановкам σ, перемещающим хотя бы один индекс из группы $1, \ldots, p$ в группу $p+1, \ldots, p+q$. По построению

$$\omega \wedge \chi = (-1)^{pq} \chi \wedge \omega \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega^p(M),\ \chi \in \Omega^q(M),$$

так что $\Omega(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\Gamma(p,q) = (-1)^{pq}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$ (см. раздел 1.5.4).

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Тогда для базисных элементов имеем

$$(d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p}) \wedge (d^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_{p+q}}) = d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_{p+q}}$$
$$\text{для всех} \quad p, q \in \mathbb{N},$$

так что

$$\omega \wedge \chi = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_{p+q} \leqslant m} (\omega \wedge \chi)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+q}} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_{p+q}},$$

для всех

$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U),$$
$$\chi = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_q \leqslant m} \chi_{\mu_1 \ldots \mu_q} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_q} \in \Omega^q(U),$$

где

$$(\omega \wedge \chi)_{\mu_1 \ldots \mu_{p+q}} = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}^{p,q}} \operatorname{sign} \sigma \cdot \omega_{\sigma(\mu_1 \ldots \mu_p} \chi_{\mu_{p+1} \ldots \mu_{p+q})},$$

альтернированная сумма берется по всем перестановкам σ натуральных чисел $1, \ldots, p+q$, перемещающим хотя бы одно число из группы $1, \ldots, p$ в группу $p+1, \ldots, p+q$ (сравни с умножением в алгебре $\wedge \mathfrak{D}(M)$).

Пусть $\Phi \colon M \to N$ – гладкое отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N, $\Phi_* \colon \wedge^p TM \to \wedge^p TN$ – его касательное отображение, $p \in \mathbb{N}$. Кокасательное отображение $\Phi^* \colon \mathfrak{T}^*(N) \to \mathfrak{T}^*(M)$ (см. с. 144) индуцирует одноименное линейное отображение

$$\Phi^* \colon \Omega(N) \to \Omega(M), \quad \chi \mapsto \omega = \Phi^*(\chi) = \chi \circ \Phi_*,$$

так что

$$\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_p)(a) = \chi_b(Y_{1,b} \wedge \dots \wedge Y_{p,b})$$
$$\text{для всех} \quad X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{T}(M), \quad p \in \mathbb{N}, \quad a \in M,$$

где $b = \Phi(a)$, $Y_{1,b} = \Phi_*(X_{1,a}), \dots, Y_{p,b} = \Phi_*(X_{p,a}) \in T_bN$, и мы отождествляем дифференцирования и касательные поля, дифференциальные формы и кокасательные поля. Очевидно,

$$\Phi^*(\chi \wedge \varrho) = \Phi^*(\chi) \wedge \Phi^*(\varrho)$$
$$\text{для всех} \quad \chi \in \Omega^p(N), \quad \varrho \in \Omega^q(N), \quad p, q \in \mathbb{Z}_+,$$

другими словами, *отображение Φ^* есть морфизм внешних алгебр.*

На алгебре $\Omega(M)$ определены следующие естественные операции.

Предложение 2.4.4. *Для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$ существует единственное косое дифференцирование ι_D алгебры $\Omega(M)$ такое, что*

- ⋆ $\iota_D \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega^p(M), \Omega^{p-1}(M))$ *для всех* $p \in \mathbb{Z}_+$,
- ⋆ $\iota_D(f) = 0$ *для всех* $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,
- ⋆ $\iota_D(\omega) = \omega(D)$ *для всех* $\omega \in \Omega^1(M)$.

Именно,

$$(\iota_D\omega)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}) = p \cdot \omega(D \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1})$$

для всех $X_1, \dots, X_{p-1} \in \mathfrak{D}(M)$.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Пусть

$$D = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} D^\mu \cdot \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U),$$
$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \dots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U),$$

тогда

$$\iota_D(\omega) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \dots, \mu_{p-1} \leqslant m} (\iota_D\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_{p-1}},$$

где

$$(\iota_D\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} D^\mu \cdot \omega_{\mu\mu_1 \dots \mu_{p-1}}.$$

Очевидно, в силу кососимметрии

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0 \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}(M),$$

в частности,

$$\iota_D \circ \iota_D = 0 \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}(M).$$

Таким образом, для каждого дифференцирования $D \in \mathfrak{D}(M)$ определен комплекс $\{\Omega^p(M), \iota_D^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_D^p = \iota_D|_{\Omega^p(M)}$.

Предложение 2.4.5. *Пусть $D \in \mathfrak{D}(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$, определим эндоморфизм $h_\omega \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega(M))$ правилом*

$$h_\omega(\chi) = \omega \wedge \chi \quad \textit{для всех} \quad \chi \in \Omega^p(M),\ p \in \mathbb{Z}_+$$

(в частности, $h_\omega(f) = f \cdot \omega$ для всех $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$), тогда

$$\iota_D \circ h_\omega + h_\omega \circ \iota_D = \omega(D) \cdot \mathrm{id}_{\Omega(M)}\,.$$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Следствие 2.4.2. *Пусть для данного $D \in \mathfrak{D}(M)$ существует $\omega \in \Omega^1(M)$ такая, что $\omega(D) = 1$, тогда комплекс $\{\Omega(M), \iota_D\}$ ациклический.*

В алгебре $\Omega(M)$ определено также действие L (*производная Ли*), аналогичное одноименному действию в алгебре $\wedge\mathfrak{D}(M)$.

Предложение 2.4.6. *Присоединенное действие*

$$\begin{gathered}\mathrm{as}\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(M)),\\ D \mapsto \mathrm{as}(D)\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(M), \quad X \mapsto D(X) = [D, X],\end{gathered}$$

для всех $D, X \in \mathfrak{D}(M)$, определяет единственный морфизм алгебр Ли $L\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(\Omega(M))$ такой, что для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$

- ⋆ *$L_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,*
- ⋆ *$L_D(f) = D(f)$ для всех $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,*
- ⋆ *$D(\omega(X)) = (L_D(\omega))(X) + \omega(L_D(X))$ для всех $\omega \in \Omega^1(M)$, $X \in \mathfrak{D}(M)$.*

Именно,

$$L_D(\omega) = D \circ \omega - \omega \circ L_D \quad \textit{для всех} \quad \omega \in \Omega^p(M),\ p \in \mathbb{N},$$

так что

$$L_D(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) = D(\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega(X_1 \wedge \cdots [D, X_i] \cdots \wedge X_p)$$
$$\text{\textit{для всех}} \quad X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{D}(M).$$

Корректность этого определения, т.е. справедливость равенства

$$[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]} \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}(M),$$

в более общей ситуации доказана в следующем выпуске моих лекций.

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Пусть

$$D = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} D^\mu \cdot \partial_\mu \in \mathfrak{D}(U),$$
$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U),$$

тогда

$$L_D(\omega) = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p \leqslant m} (L_D \omega)_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p},$$

где

$$(L_D\omega)_{\mu_1 \ldots \mu_p} = D(\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p}) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} (\partial_{\mu_i} D^\mu) \cdot \omega_{\mu \mu_1 \ldots \check{\mu}_i \ldots \mu_p}.$$

Предложение 2.4.7. *Для любых $X, Y \in \mathfrak{D}(M)$ справедливо равенство*

$$[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}.$$

Предложение 2.4.8. *Имеется единственное косое дифференцирование d алгебры $\Omega(M)$ (обычно называемое* внешним дифференциалом*) такое, что*

- $\star$ *$d \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M), \Omega^{p+1}(M))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$,*
- $\star$ *$d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$.*

Именно,

$$d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_p) = \frac{1}{p+1} \Bigg\{ \sum_{0 \leqslant i \leqslant p} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p)) + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \ldots \check{X}_j \cdots \wedge X_p) \Bigg\}$$

для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $X_0, \ldots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

В частности,

- $\star$ $df(X) = X(f)$ *для всех* $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{D}(M)$,
- $\star$ $d\omega(X \wedge Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\}$ *для всех* $\omega \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{D}(M)$,
- $\star$ $d\omega(X \wedge Y \wedge Z) = \frac{1}{3}\{(X(\omega(Y \wedge Z)) + \text{c.p.}) - (\omega([X,Y] \wedge Z) + \text{c.p.})\}$ *для всех* $\omega \in \Omega^2(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{D}(M)$, *где c.p. – циклическая перестановка переменных* X, Y, Z.

Замечание. Приведенная выше формула для внешнего дифференциала обладает тем преимуществом, что она глобальная, не нуждается в локальных картах. Однако она не всегда удобна, поскольку состоит из двух слагаемых ($\sum_i \ldots$ и $\sum_{i<j} \ldots$), каждое из которых в отдельности не является формой, поскольку не $\mathcal{C}^\infty(M)$-линейно (хотя и $\mathbb{R}$-линейно).

Предложение 2.4.9. *Справедливо равенство*

$$d \circ L_D - L_D \circ d = 0 \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}(M).$$

Предложение 2.4.10. *Справедливо равенство*

$$d \circ d = 0.$$

Итак, определен комплекс $\{\Omega(M), d\} = \{\Omega^p(M), d^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, называемый *комплексом де Рама*, где

$$d^p = d|_{\Omega^p(M)} \colon \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M).$$

Здесь используется следующая терминология:

- $\star$ элементы модуля $\Omega^p(M)$ называются p-формами (подробнее, дифференциальными p-формами),
- $\star$ элементы ядра $\ker d^p = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid d(\omega) = 0\}$ называются замкнутыми p-формами,
- $\star$ элементы образа $\operatorname{im} d^{p-1} = \{\omega = d(\phi) \mid \phi \in \Omega^{p-1}(M)\}$ называются точными p-формами,
- $\star$ элементы факторпространства $H^p(\Omega(M), d) = \ker d^p / \operatorname{im} d^{p-1}$ называются p-мерными когомологиями де Рама.

Пусть

- $\star$ $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M, $a \mapsto x = \phi(a)$, $x^\mu = \phi^\mu(a)$, для всех $a \in U$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$;

- ⋆ $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ – базис в $\mathfrak{D}(U)$, $(\partial_\mu f)(a) = \partial_{x^\mu} f(\phi^{-1}(x))|_{x=\phi(a)}$ для всех $1 \leqslant \mu \leqslant m$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$;
- ⋆ $\{d^1, \ldots, d^m\}$ – дуальный базис в $\Omega^1(U)$, $d^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$, $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant m$, и, значит, $d^\mu(X) = X^\mu$ для всех $1 \leqslant \mu \leqslant m$, $X = \sum_\nu X^\nu \cdot \partial_\nu \in \mathfrak{D}(U)$.

Для всякой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$ имеем

$$df = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} (\partial_\mu f) \cdot d^\mu,$$

так как

$$df(X) = X(f) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} X^\mu(\partial_\mu f) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} (\partial_\mu f) \cdot d^\mu(X) \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{D}(U).$$

Далее, справедливо равенство

$$d(d^\mu) = 0 \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

так как

$$\begin{aligned} d(d^\mu)(X \wedge Y) &= \frac{1}{2}\{X(d^\mu(Y)) - Y(d^\mu(X)) - d^\mu([X, Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{X(Y^\mu) - Y(X^\mu) - [X, Y]^\mu\} = 0 \\ &\quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{D}(U) \end{aligned}$$

(см. предложение 2.3.3).

Более того,

$$d^\mu = d\phi^\mu = dx^\mu \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

так как

$$(d\phi^\mu)(X) = X(\phi^\mu) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} X^\nu \cdot (\partial_{x^\nu} x^\mu)|_{x=\phi} = X^\mu = d^\mu(X)$$

для всех $X \in \mathfrak{D}(U)$.

Поскольку внешний дифференциал d есть косое дифференцирование внешней алгебры $\Omega(U)$, отсюда следует

Предложение 2.4.11. *Для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ и каждой p-формы*

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \dots, \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U)$$

справедливо представление

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \dots, \mu_p \leqslant m} d(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}) \wedge d^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U) \\ &= \frac{1}{(p+1)!} \sum_{1 \leqslant \mu_0, \dots, \mu_p \leqslant m} (d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_p} \cdot d^{\mu_0} \wedge \dots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^{p+1}(U), \end{aligned}$$

где

$$(d\omega)_{\mu_0 \dots \mu_p} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant p} (-1)^i \partial_{\mu_i} (\omega_{\mu_0 \dots \check{\mu}_i \dots \mu_p}).$$

Замечание. Приведенная выше локальная формула для внешнего дифференциала, хотя и зависит от выбора карты, при вычислениях часто удобнее, чем глобальная бескоординатная формула, поскольку в ней каждое слагаемое и каждый множитель в отдельности являются локальными формами.

Пусть $M = U$ – область в $\mathbb{R}^m$, тогда каждая форма $\omega \in \Omega^p(U)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, имеет вид

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \dots, \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad x \in U,$$

где мы пишем dx^μ вместо d^μ. Напомним, что область $U \subset \mathbb{R}^m$ называется *звездной*, если $tx \in U$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $x \in U$.

Лемма 2.4.1 (лемма Пуанкаре). *Пусть $M = U$ – звездная область в $\mathbb{R}^m$, тогда справедлива гомотопическая формула*

$$d \circ h + h \circ d = \mathrm{id} - \varrho,$$

гомотопический оператор $h \colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, действует по правилу

$$h(f) = 0 \quad \textit{для всех} \quad f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U),$$

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \in \Omega^p(U), \quad p \in \mathbb{N},$$

$$\mapsto h(\omega) = \frac{1}{(p-1)!} \sum (h\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}}(x) \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}} \in \Omega^{p-1}(U),$$

где

$$(h\omega)_{\mu_1\ldots\mu_{p-1}}(x) = \int_0^1 t^{p-1} \sum_{1\leqslant\mu\leqslant m} x^\mu \omega_{\mu\mu_1\ldots\mu_{p-1}}(tx)\,dt,$$

а дополнительный оператор $\varrho\colon \Omega^p(U) \to \Omega^p(U)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, *действует по правилу*

$$\begin{aligned} \varrho(f)(x) = f(0) \quad &\text{для всех} \quad f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U), \\ \varrho(\omega) = 0 \qquad &\text{для всех} \quad \omega \in \Omega^p(U),\ p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Замечание. Поясним, что здесь $f(0) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ – постоянная функция.

Доказательство. Пусть сначала $p = 0$, $f \in \Omega^0(U)$. Тогда

$$\begin{aligned} &h(f) = 0, \quad (d \circ h)(f) = 0, \\ &d(f) = \sum_\mu (\partial_{x^\mu} f)(x) \cdot dx^\mu, \quad (df)_\mu(x) = (\partial_{x^\mu} f)(x), \end{aligned}$$

$$(h \circ d)(f) = \int_0^1 t^0 \sum_\mu x^\mu\,(\partial_{x^\mu} f)(tx)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx)\,dt = f(x) - f(0),$$

так что здесь $(d \circ h + h \circ d)(f) = f - \varrho(f)$, как и требуется. Пусть теперь $p \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega^p(U)$. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} ((d \circ h)(\omega))_{\mu_1\ldots\mu_p}(x) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant p} (-1)^{i-1} \partial_{x^{\mu_i}} ((h\omega)_{\mu_1\ldots\check{\mu}_i\ldots\mu_p})(x) \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant p} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{p-1} \sum_\mu \bigl\{ \delta^\mu_{\mu_i} \omega_{\mu\mu_1\ldots\check{\mu}_i\ldots\mu_p}(tx) \\ &\qquad\qquad + x^\mu \partial_{x^{\mu_i}} (\omega_{\mu\mu_1\ldots\check{\mu}_i\ldots\mu_p}(tx)) \bigr\}\,dt \\ &= \int_0^1 \Bigl\{ p t^{p-1} \omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(tx) \\ &\qquad - t^p \sum_{1\leqslant i\leqslant p} (-1)^i \sum_\mu x^\mu (\partial_{x^{\mu_i}} \omega_{\mu\mu_1\ldots\check{\mu}_i\ldots\mu_p})(tx) \Bigr\}\,dt, \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$
\begin{aligned}
((h\circ d)\omega)_{\mu_1\ldots\mu_p}(x) &= \int_0^1 t^p \sum_\mu x^\mu (d\omega)_{\mu\mu_1\ldots\mu_p}(tx)\,dt \\
&= \int_0^1 t^p \sum_\mu x^\mu \Big\{ (\partial_{x^\mu}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p})(tx) \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i\leqslant p} (-1)^i (\partial_{x^{\mu_i}}\omega_{\mu\mu_1\ldots\check{\mu}_i\ldots\mu_p})(tx)\Big\}\,dt \\
&= \int_0^1 t^p \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(tx) \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i\leqslant p} (-1)^i \sum_\mu x^\mu (\partial_{x^{\mu_i}}\omega_{\mu\mu_1\ldots\check{\mu}_i\ldots\mu_p})(tx)\Big\}\,dt.
\end{aligned}
$$

Складывая полученные выражения, получаем

$$
\begin{aligned}
&((d\circ h + h\circ d)\omega)_{\mu_1\ldots\mu_p}(x) \\
&\quad = \int_0^1 \Big\{ p t^{p-1}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(tx) + t^p \frac{\partial}{\partial t}\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(tx)\Big\}\,dt \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(t^p\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(tx))\,dt = (t^p\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}(tx))\big|_{t=0}^{t=1} = \omega_{\mu_1\ldots\mu_o}(x),
\end{aligned}
$$

что и требовалось.

Следствие 2.4.3. *Пусть U – звездная область в $\mathbb{R}^m$, тогда линейные пространства когомологий*

$$
H^p(\Omega(U),d) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p=0, \\ 0, & p\in\mathbb{N}. \end{cases}
$$

Следствие 2.4.4. *Для любого многообразия M пространства когомологий локально тривиальные, т.е. у каждой точки $s\in M$ существует открытая окрестность $U\subset M$, $s\in U$, такая, что линейные пространства когомологий*

$$
H^p(\Omega(U),d) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p=0, \\ 0, & p\in\mathbb{N}. \end{cases}
$$

Доказательство. Достаточно выбрать карту $U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m$ на M такую, что $s \in U$, а образ $\phi(U)$ – звездная (например, выпуклая) область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Замечание. Смысл последнего утверждения в том, что *когомологии характеризуют глобальное поведение многообразия, локально все многообразия тривиальные.*

Предложение 2.4.12. *Пусть* $\Phi\colon M \to N$ *– гладкое отображение гладкого многообразия* M *в гладкое многообразие* N *и* $\Phi^*\colon \Omega(N) \to \Omega(M)$ *– его кокасательное отображение. Справедливо равенство*

$$d \circ \Phi^* = \Phi^* \circ d.$$

Доказательство. Пусть сначала $\chi = g \in \Omega^0(N) = \mathcal{C}^\infty(N)$. Тогда для всех $a \in M$, $b = \Phi(a) \in N$, $X \in \mathfrak{D}(M)$, с одной стороны, имеем

$$(d(\Phi^* g))(X)(a) = X(\Phi^*(g))(a) = \Phi_*(X_a)(\mathbf{g}_b)$$

(напомним, что $\Phi_*(X_a) \in T_bN$), а с другой стороны, имеем

$$(\Phi^*(dg))(X)(a) = (dg)_b(\Phi_*(X_a)) = \Phi_*(X_a)(\mathbf{g}_b),$$

поскольку

$$(dg)_b(Y_b) = (dg)(Y)(b) = Y(g)(b) = Y_b(\mathbf{g}_b)$$
$$\text{для всех} \quad Y \in \mathfrak{D}(N),\ b \in N.$$

Следовательно, доказываемое равенство справедливо при $p = 0$. Пусть теперь $\chi \in \Omega^p(N)$, $p \in \mathbb{N}$. Поскольку доказываемое равенство носит локальный характер (почему?), без ограничения общности считаем, что многообразие N покрывается одной картой $N \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ с координатами $y^\nu = \psi^\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, так что форма χ записывается в виде (см. с. 157)

$$\chi = \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \nu_1, \dots, \nu_p \leqslant n} \chi_{\nu_1 \dots \nu_p} \cdot d\psi^{\nu_1} \wedge \dots \wedge d\psi^{\nu_p},$$
$$\chi_{\nu_1 \dots \nu_p}, \psi^{\nu_1}, \dots, \psi^{\nu_p} \in \mathcal{C}^\infty(N).$$

Поскольку d – косое дифференцирование внешней алгебры $\Omega(N)$, а Φ^* – морфизм внешних алгебр (см. с. 153), из этого представления и доказанного равенства для $p = 0$ следует его справедливость в общем случае. Именно,

$$\begin{aligned}(\Phi^* \circ d)(\chi) &= \Phi^*\Biggl(\frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant\nu_1,\dots,\nu_p\leqslant n} d\chi_{\nu_1\dots\nu_p}\wedge d\psi^{\nu_1}\wedge\dots\wedge d\psi^{\nu_p}\Biggr)\\ &= \frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant\nu_1,\dots,\nu_p\leqslant n} \Phi^*(d\chi_{\nu_1\dots\nu_p})\wedge\Phi^*(d\psi^{\nu_1})\wedge\dots\wedge\Phi^*(d\psi^{\nu_p})\\ &= \frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant\nu_1,\dots,\nu_p\leqslant n} d(\Phi^*\chi_{\nu_1\dots\nu_p})\wedge d(\Phi^*\psi^{\nu_1})\wedge\dots\wedge d(\Phi^*\psi^{\nu_p})\\ &= d\Biggl(\frac{1}{p!}\sum_{1\leqslant\nu_1,\dots,\nu_p\leqslant n} (\Phi^*\chi_{\nu_1\dots\nu_p})\wedge(\Phi^*\psi^{\nu_1})\wedge\dots\wedge(\Phi^*\psi^{\nu_p})\Biggr)\\ &= (d\circ\Phi^*)(\chi).\end{aligned}$$

2.4.3. Векторнозначные дифференциальные формы. Пусть M – гладкое m-мерное многообразие.

Пусть $\mathcal{K}$ – $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль и $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ – $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль всех его эндоморфизмов, где $(f\cdot L)(v) = f\cdot(L(v)))$ для всех $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $L\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, $v\in\mathcal{K}$.

Пара $D = (D_M, D_{\mathcal{K}})$, где $D_M\in\mathfrak{D}(M)$, $D_{\mathcal{K}}\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, называется *дифференцированием* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-модуля* $\mathcal{K}$, если выполняется правило Лейбница

$$D_{\mathcal{K}}(f\cdot v) = D_M(f)\cdot v + f\cdot D_{\mathcal{K}}(v) \quad \text{для всех} \quad f\in\mathcal{C}^\infty(M),\ v\in\mathcal{K}.$$

Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{K})$ всех дифференцирований $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуля $\mathcal{K}$ имеет две алгебраические структуры:

- ⋆ $\mathfrak{D}(\mathcal{K})$ – $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль, $f\cdot D = (f\cdot D_M, f\cdot D_{\mathcal{K}})$ для всех $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $D = (D_M, D_{\mathcal{K}})\in\mathfrak{D}(\mathcal{K})$;
- ⋆ $\mathfrak{D}(\mathcal{K})$ – алгебра Ли с коммутатором в качестве скобки Ли, $[X, Y] = ([X_M, Y_M], [X_{\mathcal{K}}, Y_{\mathcal{K}}])$ для всех $X, Y\in\mathfrak{D}(\mathcal{K})$.

Говорят, отображение $\varkappa\colon\mathfrak{D}(M)\to\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, $D\mapsto\varkappa(D)$, определяет действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(M)$ на $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуле $\mathcal{K}$, если

- ⋆ $\varkappa\colon\mathfrak{D}(M)\to\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ – морфизм алгебр Ли;
- ⋆ $\varkappa\colon\mathfrak{D}(M)\to\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ – морфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей;
- ⋆ пара $(D, \varkappa(D))\in\mathfrak{D}(\mathcal{K})$ для любого $D\in\mathfrak{D}(M)$.

Пример 2.4.1. Пусть $\mathcal{V}$ – вещественное векторное пространство. Рассмотрим $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V}) = \mathcal{C}^\infty(M)\otimes\mathcal{V}$, где $f\cdot(g\otimes v) = (f\cdot g)\otimes v$ для всех $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $g\otimes v\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$. Элементы модуля $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$ суть гладкие отображения из многообразия M в векторное пространство $\mathcal{V}$, снабженное естественной топологией (евклидовой, если пространство $\mathcal{V}$ конечномерное). Каждому $D\in\mathfrak{D}(M)$ поставим в соответствие эндоморфизм $\varkappa(D)\in\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V}))$, где $\varkappa(D)(f\otimes v) = (D(f))\otimes v$ для всех $f\otimes v\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$. Легко проверяется, что правило $D\mapsto\varkappa(D)$ определяет действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(M)$ на $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуле $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$. Векторное пространство $\mathcal{V}$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$, $v\mapsto 1\otimes v$ для всех $v\in\mathcal{V}$, где $1\in\mathcal{C}^\infty(M)$ – функция, тождественно равная единице. Более того, здесь множество $\mathcal{V}$ порождает $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$, т.е. $F=\sum_{1\leqslant i\leqslant N} f^i\cdot v_i$ для всех $F\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$, где $N=N(F)\in\mathbb{N}$, $f^i\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $v_i\in\mathcal{V}$, причем $\varkappa(D)(F)=\sum D(f^i)\cdot v_i$ для всех $D\in\mathfrak{D}(M)$. В частности, если в векторном пространстве $\mathcal{V}$ задан базис $\{e_1,\ldots,e_k\}$, $k=\dim\mathcal{V}$, то $F=\sum_{1\leqslant i\leqslant k} f^i\cdot e_i$, $f^i\in\mathcal{C}^\infty(M)$, и $\varkappa(D)(F)=\sum_{1\leqslant i\leqslant k} D(f^i)\cdot e_i$.

Пусть $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathcal{K}$ изоморфен $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулю $\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})$, т.е. задан изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей $\varrho\colon\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{V})\simeq\mathcal{K}$. Тогда только что определенное действие $\varkappa$ индуцирует действие $\varkappa_{\mathcal{K}}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}(M)$ на $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуле $\mathcal{K}$ по формуле

$$\varkappa_{\mathcal{K}}(D)=\varrho\circ\varkappa(D)\circ\varrho^{-1}\quad\text{для всех}\quad D\in\mathfrak{D}(M).$$

В этом случае каждый элемент $F\in\mathcal{K}$ имеет вид

$$F=\sum_{1\leqslant i\leqslant N} f^i\cdot\varrho(v_i),$$

где $N=N(F)\in\mathbb{N}$, $f^i\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $v_i\in\mathcal{V}$, $\varrho(v_i)\in\mathcal{K}$, так что действие $\varkappa_{\mathcal{K}}(D)(F)=\sum D(f^i)\cdot\varrho(v_i)$ для всех $D\in\mathfrak{D}(M)$. Очевидно, множество $\varrho(\mathcal{V})\subset\mathcal{K}$ порождает $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\mathcal{K}$, причем $\varkappa_{\mathcal{K}}(D)(\varrho(v))=0$ для всех $D\in\mathfrak{D}(M)$, $v\in\mathcal{V}$.

Ниже, если не оговорено противное, будем писать D вместо $\varkappa(D)$ для всех $D\in\mathfrak{D}(M)$ и полагать $D(f)=D_M(f)$ для всех $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ и $D(v)=D_{\mathcal{K}}(v)=\varkappa(D)(v)$ для всех $v\in\mathcal{K}$.

Определим теперь $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль

$$\Omega(M,\mathcal{K})=\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge\,\mathfrak{D}(M),\mathcal{K}))=\textstyle\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}_+}\Omega^p(M,\mathcal{K}),$$

положив

$$\Omega^p(M,\mathcal{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\wedge^p \mathfrak{D}(M),\mathcal{K}), \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

в частности, $\Omega^0(M,\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ (проверить). Элементы модуля $\Omega^p(M,\mathcal{K})$, $p \in \mathbb{Z}_+$, называются *p-формами с коэффициентами в модуле* $\mathcal{K}$ или, нестрого, *векторнозначными p-формами.*

Пусть $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ – карта на M. Модуль $\Omega^p(U,\mathcal{K})$, $p \in \mathbb{N}$, "свободный" с "базисом"

$$\{d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \mid 1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m\},$$

каждый элемент $\omega \in \Omega^p(U,\mathcal{K})$ имеет вид

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p},\end{aligned}$$

где

$$\omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} = \omega(\partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p}) \in \mathcal{K}.$$

В частности,

$$\begin{aligned}\omega(V) &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leqslant \mu_1, \ldots, \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \in \mathcal{K}\end{aligned}$$

для всех

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p} \cdot d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \in \Omega^p(U,\mathcal{K}), \\ V &= \sum_{1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant m} V^{\mu_1 \cdots \mu_p} \cdot \partial_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{\mu_p} \in \wedge^p \mathfrak{D}(U).\end{aligned}$$

Замечание. Здесь $d^\mu(D) = D^\mu \in \mathcal{C}^\infty(U)$ для всех $1 \leqslant \mu \leqslant m$ и всех $D = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant m} D^\nu \partial_\nu$, так что элементы

$$d^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d^{\mu_p} \notin \Omega^p(U,\mathcal{K})$$

и не являются базисными в обычном смысле. В свою очередь и компоненты $\omega_{\mu_1\dots\mu_p} \notin \mathcal{C}^\infty(M)$. Тем не менее, запись

$$\omega(V) = \sum \omega_{\mu_1\dots\mu_p} \cdot V^{\mu_1\dots\mu_p} \in \mathcal{K}$$

корректна и удобна в практических приложениях. В качестве упражнения предлагается подумать об универсальности такой конструкции.

$\mathcal{C}^\infty(M)$-модуль $\Omega(M,\mathcal{K})$ фактически обладает более широкой структурой внешнего $\Omega(M)$-модуля (напомним, $\mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$) с внешним умножением

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M,\mathcal{K}) \to \Omega^{p+q}(M,\mathcal{K}), \quad (\omega,\chi) \mapsto \omega \wedge \chi, \quad p,q \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$\begin{aligned}
&(\omega \wedge \chi)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p+q}) \\
&\qquad = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \operatorname{sign}\sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p+q)}) \\
&\qquad = \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma^{p,q}_{p+q}} \operatorname{sign}\sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p)}) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \chi(X_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge X_{\sigma(p+q)})
\end{aligned}$$

для всех $X_1,\dots,X_{p+q} \in \mathfrak{D}(M)$ (см. с. 151).

Для каждого дифференцирования $D \in \mathfrak{D}(M)$ определен единственный эндоморфизм $\iota_D \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega(M,\mathcal{K}))$ такой, что

- ⋆ $\iota_D \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega^p(M,\mathcal{K}), \Omega^{p-1}(M,\mathcal{K}))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $\iota_D(v) = 0$ для всех $v \in \Omega^0(M,\mathcal{K}) = \mathcal{K}$;
- ⋆ $\iota_D(\omega) = \omega(D)$ для всех $\omega \in \Omega^1(M,\mathcal{K})$;
- ⋆ $\iota_D(\omega \wedge \chi) = (\iota_D\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (\iota_D\chi)$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M,\mathcal{K})$.

Именно,

$$(\iota_D\omega)(X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1}) = p \cdot \omega(D \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_{p-1})$$

для всех $X_1,\dots,X_{p-1} \in \mathfrak{D}(M)$.

Очевидно,

$$\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0 \quad \text{для всех} \quad X,Y \in \mathfrak{D}(M),$$

в частности,

$$\iota_D \circ \iota_D = 0 \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}(M).$$

Таким образом, для каждого дифференцирования $D \in \mathfrak{D}(M)$ определен комплекс $\{\Omega^p(M, \mathcal{K}), \iota_D^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\iota_D^p = \iota_D|_{\Omega^p(M,\mathcal{K})}$.

Ниже в этом разделе считаем, что алгебра Ли $\mathfrak{D}(M)$ *действует в* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-модуле* $\mathcal{K}$. *Элементы модуля* $\Omega(M, \mathcal{K})$ *в этом случае называем* дифференциальными формами с коэффициентами в $\mathcal{K}$.

Определен единственный морфизм алгебр Ли

$$L\colon \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{D}(\Omega(M, \mathcal{K}))$$

такой, что для каждого $D \in \mathfrak{D}(M)$

- ⋆ $L_D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M, \mathcal{K}))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $L_D(v) = D(v)$ для всех $v \in \Omega^0(M, \mathcal{K}) = \mathcal{K}$;
- ⋆ $D(\omega(X)) = (L_D(\omega))(X) + \omega(L_D(X))$ для всех $\omega \in \Omega^1(M, \mathcal{K})$, $X \in \mathfrak{D}(M)$;
- ⋆ $L_D(\omega \wedge \chi) = (L_D\omega) \wedge \chi + \omega \wedge (L_D\chi)$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M, \mathcal{K})$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Именно,

$$L_D(\omega) = D \circ \omega - \omega \circ L_D \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega^p(M, \mathcal{K}),\ p \in \mathbb{N},$$

так что

$$\begin{aligned} L_D(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) &= D(\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)) \\ &- \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega(X_1 \wedge \cdots [D, X_i] \cdots \wedge X_p) \\ &\text{для всех} \quad X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{D}(M). \end{aligned}$$

По-прежнему, для любых $X, Y \in \mathfrak{D}(M)$ имеем

- ⋆ $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$,
- ⋆ $[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$.

Определен единственный эндоморфизм $d \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Omega(M, \mathcal{K}))$ такой, что

- ⋆ $d \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^p(M, \mathcal{K}), \Omega^{p+1}(M, \mathcal{K}))$ для всех $p \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $d(\omega \wedge \chi) = (d\omega) \wedge \chi + (-1)^p \omega \wedge (d\chi)$ для всех $\omega \in \Omega^p(M)$, $\chi \in \Omega^q(M, \mathcal{K})$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$;
- ⋆ $d \circ \iota_D + \iota_D \circ d = L_D$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M)$.

Именно,

$$d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_p) = \frac{1}{p+1}\Bigg\{ \sum_{0 \leqslant i \leqslant p} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_p))$$

$$+ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \check{X}_j \cdots \wedge X_p)\Bigg\}$$

для всех $\omega \in \Omega^p(M, \mathcal{K})$, $X_0, \ldots, X_p \in \mathfrak{D}(M)$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

По-прежнему,

- ⋆ $d \circ L_D - L_D \circ d = 0$ для всех $D \in \mathfrak{D}(M, \mathcal{K})$.
- ⋆ $d \circ d = 0$.

Итак, если алгебра Ли $\mathfrak{D}(M)$ действует в $\mathcal{C}^\infty(M)$-модуле $\mathcal{K}$, то определен комплекс $\{\Omega(M, \mathcal{K}), d\} = \{\Omega^p(M, \mathcal{K}), d^p \mid p \in \mathbb{Z}_+\}$, называемый *векторнозначным комплексом де Рама*.

2.5. Слоения

2.5.1. Слоения. *Слоение* есть множество с двумя структурами гладкого многообразия, одна из которых слоит другую. Подробнее, слоение $\mathbf{X} = (X^m, X^s)$ есть множество X со следующими свойствами.

- ⋆ На множестве X определена отделимая топология и гладкая структура с атласом $\{U_i \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{R}^m \mid i \in I\}$, т.е. определено m-мерное гладкое многообразие, которое мы обозначим через X^m (и которое как множество совпадает с X).
- ⋆ На множестве X определена другая, более сильная, топология и другая гладкая структура с атласом

  $$\{S_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{R}^s \mid k \in K\},$$

  т.е. другое гладкое s-мерное многообразие, которое мы обозначим через X^s (и которое как множество тоже совпадает с X, на практике $1 \leqslant s < m$).
- ⋆ Многообразие X^s *слоит* многообразие X^m, т.е. для каждой точки $p \in X$ существует карта $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$ многообразия X^m, $p \in U$, со следующими свойствами. Представим евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ как прямое произведение

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, тогда

$$\phi(q) = x = (y, z) \in \phi(U) \text{ для всех } q \in U,$$
$$\text{где} \quad y \in \mathbb{R}^s, z \in \mathbb{R}^{m-s}.$$

Для каждого $c \in \mathbb{R}^{m-s}$ положим

$$\phi(U)|_{z=c} = \{(y, z) \in \phi(U) \mid z = c\}$$

– сечение образа $\phi(U)$ гиперплоскостью $\{z = c\}$. В таких обозначениях требуется, чтобы прообраз $S_c = \phi^{-1}(\phi(U)|_{z=c})$ был открытым подмногообразием (возможно пустым) многообразия X^s, а пара $\{S_c \xrightarrow{\psi_c} \mathbb{R}^s\}$, $S_c \neq \varnothing$, была картой на многообразии X^s, где отображение $\psi_c = \pi_s \circ \phi|_{S_c}$, проекция $\pi_s \colon \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \to \mathbb{R}^s$, $(y, z) \mapsto y$, а отображение $\phi|_{S_c}$ – сужение отображения ϕ на S_c.

Пример 2.5.1 (тривиальное слоение). Пусть $1 \leqslant s < m$. Представим евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ как прямое произведение $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, так что $x = (y, z) \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^{m-s}$. Определим X как множество $\mathbb{R}^m$ без топологии. Многообразие X^m определим как $\mathbb{R}^m$ со стандартной евклидовой топологией и атласом из одной естественной карты $\{X^m \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R}^m\}$. Многообразие X^s определим следующим образом. Как множество $X^s = X = \mathbb{R}^m$. Топологию на X^s зададим базисными множествами вида

$$\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^m \mid y \in \mathcal{O},\ z = c\},$$

где $\mathcal{O}$ – открытые подмножества из $\mathbb{R}^s$, а $c \in \mathbb{R}^{m-s}$ – фиксированные точки. Атлас на X^s составим из карт $\{S_c \xrightarrow{\psi_c} \mathbb{R}^s \mid c \in \mathbb{R}^{m-s}\}$, где *листы*

$$S_c = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^m \mid y \in \mathbb{R}^s,\ z = c\},$$

а гомеоморфизмы $\psi_c \colon S_c \to \mathbb{R}^s$ действуют по правилу $x = (y, c) \mapsto y$. В качестве упражнения предлагается проверить, что здесь многообразие X^s действительно слоит многообразие X^m.

Замечание. Обратим внимание, что здесь многообразие X^s существенно несвязное, состоит из несчетного множества связных компонент S_c, $c \in \mathbb{R}^{m-s}$. Именно так обстоит дело и в общем случае: многообразие X^s состоит из несчетного множества связных компонент, которые называются *листами*.

Пример 2.5.2. Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с m-мерным пространством расслоения E, s-мерным типичным слоем F и $(m-s)$-мерной базой B. По построению через каждую точку $p \in E$ проходит слой $S_{\pi(p)} = \pi^{-1}(\pi(p)$, изоморфный многообразию F и, значит, имеющий структуру s-мерного гладкого многообразия. Очевидно, $S_{\pi(p)} = S_{\pi(q)}$, если $\pi(p) = \pi(q)$, и $S_{\pi(p)} \cap S_{\pi(q)} = \varnothing$, если $\pi(p) \neq \pi(q)$. Введем на множестве E отношение эквивалентности правилом: $p \sim q$, если $\pi(p) = \pi(q)$, и обозначим через $E^s = E/\sim$ множество всех таких классов эквивалентности. Классы эквивалентности естественным образом отождествляются со слоями данного расслоения. Это позволяет определить на E^s структуру гладкого s-мерного многообразия, в которой каждый слой является открытым подмногообразием (этим правилом определяется и топология на E^s). Чтобы проверить, что многообразие E^s слоит многообразие $E^m = E$ следует воспользоваться локальными картами на E, тривиализующими расслоение $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. Заметим, что правило $b \mapsto S_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B$, позволяет также говорить, что многообразие B расслаивает многообразие E и что оно параметризует слои многообразия E^s.

Пример 2.5.3. Гладкое отображение $f\colon E \to B$ называется *субмерсией* гладкого многообразия E в гладкое многообразие B, если касательное отображение $f_*\colon TE \to TB$ послойно сюръективное, т.е. если образ $f_*(T_pE) = T_{f(p)}B$ для всех $p \in E$. Пусть $f\colon E \to B$ – субмерсия, где $\dim E = m$, $\dim B = m - s$, из условия, что отображение f есть субмерсия следует, что $0 \leqslant s \leqslant m$, мы предполагаем, что $1 \leqslant s < m$. Каждая точка $p \in E$ порождает слой $S_p = f^{-1}(f(p))$, причем опять $S_p = S_q$, если $f(p) = f(q)$. Можно параметризовать слои точками $b \in B$, полагая $S_b = f^{-1}(b)$, но тогда некоторые слои будут пустыми (если отображение f не сюръективное, т.е. если $\operatorname{im} f \neq B$). Из условия $f_*(T_pE) = T_{f(p)}B$ для всех $p \in E$ следует, что для каждой точки $p \in E$ найдутся карты $\{U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^m\}$, $p \in U \subset E$, и $\{V \xrightarrow{\chi} \mathbb{R}^{m-s}\}$, $b = f(p) \in V \subset B$, со следующими свойствами:

- ⋆ $f(U) \subset V$;
- ⋆ $\phi(q) = x = (y, z) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$ для всех $q \in U$;
- ⋆ $\chi(c) = z \in \mathbb{R}^{m-s}$ для всех $c \in V$;
- ⋆ $(\chi \circ f \circ \phi^{-1})(y, z) = z \in \chi(V)$ для всех $(y, z) \in \phi(U)$;

* $\star$ $\phi(S_c) = \phi(f^{-1}(c)) = \{(y,z) \in \phi(U) \mid z = \chi(c)\}$ для всех $c \in V$ (если, конечно, $S_c \neq \varnothing$).

Отсюда легко выводится, что на множестве E определена структура s-мерного гладкого многообразия E^s, в котором слои $f^{-1}(b)$, $b \in B$, являются открытыми подмногообразиями, и которое слоит исходное многообразие $E = E^m$.

Пример 2.5.4. Пусть $y' = f(x,y)$ – обыкновенное дифференциальное уравнение, где $(x,y) \in U$, U – область в $\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ – гладкая функция в U, штрих $'$ означает производную по x. Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [29]) через каждую точку области U проходит одна и только одна интегральная кривая (решение) данного уравнения, причем в силу гладкой зависимости решения от начальных данных множество U^1 всех интегральных кривых является гладким 1-мерным многообразием, которое слоит гладкое 2-мерное многообразие $U^2 = U$. Другими словами, всякое дифференциальное уравнение указанного вида порождает 1-мерное слоение. Аналогичный результат справедлив и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных ситуация принципиально отличная.

Пусть $\mathbf{X} = (X^m, X^s)$, $\mathbf{Y} = (Y^n, Y^r)$ слоения. Отображение f из множества X в множество Y называется *морфизмом слоений*, если оно одновременно является гладким отображением многообразия X^m в многообразие Y^n и гладким отображением многообразия X^s в многообразие Y^r. В этом случае каждый лист многообразия X^s отображается в соответствующий лист многообразия Y^r.

Таким образом, определена категория слоений.

Автоморфизмы в категории слоений называются *симметриями*, а группа всех симметрий данного слоения $\mathbf{X} = (X^m, X^s)$ обозначается через $\mathrm{Sym}(\mathbf{X})$.

2.5.2. Распределения. Пусть M – гладкое m-мерное многообразие, TM – его касательное расслоение и $1 \leqslant s < m$. Гладким s-мерным *распределением* на M называется всякое векторное подрасслоение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ с типичным слоем $\mathbb{R}^s$ касательного расслоения $TM \xrightarrow{\pi} M$. В этом случае коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\pi_R"'] & & TM \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

и каждый слой $\pi_R^{-1}(p)$, $p \in M$, отождествляется со своим каноническим образом $\iota(\pi_R^{-1}(p)) \subset T_pM$, т.е. векторное пространство $\pi_R^{-1}(p)$ является подпространством касательного пространства T_pM.

Пусть $R \xrightarrow{\pi_R} M$ есть s-мерное распределение на m-мерном многообразии M.

Гладкое отображение $f\colon X \to M$ называется *интегралом* распределения $R \xrightarrow{\pi_R} M$, если образ касательного отображения $f_*\colon TX \to TM$ лежит в R, иначе, $f_*(T_xX) \subset \pi_R^{-1}(p)$ для всех $x \in X$, $p = f(x)$. В этом случае существует единственное гладкое отображение $\varphi\colon TX \to R$ такое, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "\pi_X"'] & & M \arrow[dd, "\pi"] \\ & R \arrow[ur, "\iota"'] \arrow[dr, "\pi_R"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & M \end{tikzcd}$$

Гладкое s-мерное подмногообразие S многообразия M называется *интегральным подмногообразием* распределения $R \xrightarrow{\pi_R} M$, если каноническая инъекция $\iota\colon S \to M$ есть интеграл этого распределения, т.е. если для всякой точки $p \in S$ касательное пространство $T_pS = \pi_R^{-1}(p)$.

Распределение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ называется *интегрируемым*, если существует слоение $\mathbf{M} = (M^m = M, M^s)$ такое, что листы многообразия M^s суть интегральные многообразия распределения $R \xrightarrow{\pi_R} M$.

Пример 2.5.5. Пусть $\mathbf{M} = (M^m, M^s)$ – слоение. Правило, которое каждой точке $p \in M^m$ ставит в соответствие касательное подпространство $R_p = T_pM^s \subset T_pM^m$ определяет на многообразии M^m интегрируемое s-мерное распределение $R \xrightarrow{\pi} M^m$ Для которого листы многообразия M^s и только они являются интегральными многообразиями.

Распределение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ называется *инволютивным*, если его гладкие сечения образуют подалгебру Ли алгебры Ли всех касательных полей на многообразии M.

Поясним, что согласно предложению 2.3.5 модуль $\mathfrak{T}(M)$ всех гладких сечений касательного расслоения TM изоморфен модулю дифференцирований $\mathfrak{D}(M)$, модуль $\mathfrak{D}(M)$ имеет также структуру алгебры Ли, которая в силу изоморфизма индуцирует структуру алгебры Ли на модуле сечений $\mathfrak{T}(M)$. По построению модуль $\mathcal{F}(\pi_R)$ всех гладких сечений подрасслоения $R \xrightarrow{\pi_R} M$ является подмодулем модуля $\mathfrak{T}(M)$, но не обязательно подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{T}(M)$. Условие инволютивности и является требованием, чтобы модуль $\mathcal{F}(\pi_R)$ был замкнутым относительно скобки Ли, индуцированной из алгебры Ли $\mathfrak{T}(M)$.

Предложение 2.5.1 (теорема Фробениуса). *Пусть M – гладкое m-мерное многообразие, пусть $1 \leqslant s < m$. Гладкое s-мерное распределение $R \xrightarrow{\pi_R} M$ интегрируемое тогда и только тогда, когда оно инволютивное.*

Приведем два полезных критерия инволютивности.

Предложение 2.5.2. *Гладкое s-мерное распределение R на M инволютивное тогда и только тогда, когда для каждой точки $q \in M$ имеются открытое $U \subset M$, $q \in U$, и система полей $\{X_1, \dots, X_s\} \subset \mathfrak{T}(U)$ такие, что*

- ⋆ *линейная оболочка* $\operatorname{span}\{X_{1,p}, \dots, X_{s,p}\} = R_p$ *для всех* $p \in U$,
- ⋆ *скобка Ли* $[X_i, X_j] = \sum_{1\leqslant k\leqslant s} c_{ij}^k \cdot X_k$ *для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant s$ *и некоторых гладких функций* $c_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Для формулировки второго критерия требуется некоторая подготовка.

Будем говорить, что форма $\omega \in \Omega^p(M)$, $p \in \mathbb{N}$, равна нулю на распределении R, и писать $\omega|_R = 0$, если

$$\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = 0 \quad \text{для всех} \quad X_1, \dots, X_p \in \mathcal{F}(\pi_R)$$

(мы пользуемся отождествлением модулей $\mathfrak{D}(M)$ и $\mathfrak{T}(M)$, см. с. 150). Множество

$$\mathcal{J}_R(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \omega|_R = 0,\ p \in \mathbb{N}\},$$

как легко проверить (сделать это!), является идеалом алгебры $\Omega(M)$. Идеал $\mathcal{J}_R(M)$ будем называть *дифференциально замкнутым*, и писать $d\mathcal{J}_R(M) \subset \mathcal{J}_R(M)$, если $d\omega \in \mathcal{J}_R(M)$ для всех $\omega \in \mathcal{J}_R(M)$.

Предложение 2.5.3. *Пусть M – гладкое m-мерное многообразие, пусть $1 \leqslant s < m$. Гладкое s-мерное распределение R на M инволютивное тогда и только тогда, когда идеал $\mathcal{J}_R(M)$ дифференциально замкнутый.*

Предложение 2.5.4. *Гладкое s-мерное распределение R на M инволютивное тогда и только тогда, когда для каждой точки $q \in M$ имеются открытое $U \subset M$, $q \in U$, и система 1-форм $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^{m-s}\} \in \Omega^1(U)$ такие, что*

- ⋆ $\mathcal{J}_R(U) = \{\omega = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m-s} \chi_i \wedge \vartheta^i \mid \chi_i \in \Omega(U)\}$,
- ⋆ $d\vartheta^i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m-s} \chi^i_j \wedge \vartheta^i$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant m-s$ *и некоторых* 1-*форм* $\chi^i_j \in \Omega^1(U)$.

Доказательство приведенных критериев интегрируемости можно найти, например, в книгах [27] и [15].

Замечание. Обратим внимание, что всякое одномерное ($s=1$) распределение инволютивное и, значит, интегрируемое.

2.6. Группы Ли

2.6.1. Группы Ли. Гладкое многообразие G называется *группой Ли*, если на нем определена структура группы, причем групповые операции являются гладкими отображениями. Подробнее, в этом случае определено гладкое отображение

$$G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех} \quad a, b \in G,$$

со следующими свойствами:

- ⋆ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a, b, c \in G$;
- ⋆ существует точка $e \in G$ такая, что $e \cdot a = a \cdot e = a$ для всех $a \in G$;

- ⋆ для каждой точки $a \in G$ существует обратная точка $a^{-1} \in G$ такая, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$, причем отображение $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, гладкое.

Пример 2.6.1. Множество $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ всех вещественных квадратных матриц n-го порядка, $n \in \mathbb{N}$, естественным образом отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n^2}$ и, следовательно, является гладким n^2-мерным многообразием с атласом из одной карты $\{\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R}^{n^2}\}$. Далее, множество всех вырожденных матриц $S = \{a \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det a = 0\}$ есть замкнутое подмножество в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, и, значит, его дополнение – множество всех невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$ есть открытое подмногообразие многообразия $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Следовательно, $GL(n, \mathbb{R})$ – гладкое многообразие с атласом из одной карты $\{GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^{n^2}\}$, где отображение ι – каноническое вложение. С другой стороны, $GL(n, \mathbb{R})$ есть группа относительно обычного матричного умножения. Легко проверяется, что групповые операции суть гладкие отображения, так что $GL(n, \mathbb{R})$ – группа Ли. Многообразие $GL(n, \mathbb{R})$ состоит из двух связных компонент $GL_{\pm}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det a \gtrless 0\}$, причем только компонента $GL_{+}(n, \mathbb{R})$, содержащая единичную матрицу e, является подгруппой группы $GL(n, \mathbb{R})$. Отметим, что аналогичная группа $GL(n, \mathbb{C})$ – группа Ли всех комплексных невырожденных матриц связная.

Пример 2.6.2. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ имеет подгруппы, играющие важную роль в математической физике. Это

- ⋆ $SL(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det a = 1\}$ – специальная группа (всех вещественных матриц с детерминантом 1);
- ⋆ $O(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid a \cdot a^t = e\}$ – группа всех ортогональных матриц, где a^t – транспонированная матрица;
- ⋆ $SO(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid a \cdot a^t = e,\ \det a = 1\}$ – специальная группа ортогональных матриц.

Можно проверить, что все эти группы суть группы Ли. Аналогичные подгруппы имеет и группа $GL(n, \mathbb{C})$.

Пусть G, H – группы Ли. Морфизм групп $f\colon G \to H$ называется *морфизмом групп Ли*, если f – гладкое отображение гладкого многообразия G в гладкое многообразие H, т.е. морфизм категории гладких многообразий. Таким образом, определена категория групп Ли.

Аналогичным образом определяется антиморфизм групп Ли.

Пример 2.6.3. Пусть G – группа Ли, тогда отображение $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, есть антиморфизм групп Ли.

2.6.2. Группы Ли преобразований. Пусть G – группа Ли, M – гладкое многообразие. Левое действие L группы G на множестве M (см. с. 20) называется *левым действием группы Ли G на многообразии M*, если отображение

$$L\colon G \times M \to M, \quad (a, p) \mapsto L(a, p) = a \cdot p,$$

гладкое, т.е. есть морфизмом категории гладких многообразий. Аналогичным образом определяется и правое действие группы Ли на многообразии. В обоих случаях группа Ли G называется *группой Ли преобразований* многообразия M.

Пусть L – левое действие группы Ли G на гладком многообразии M. Тогда для каждого элемента $a \in G$ определены

- $\star$ диффеоморфизм (автоморфизм категории гладких многообразий)
  $L_a\colon M \simeq M, \quad p \mapsto q = a \cdot p \quad$ для всех $\quad p \in M$;
- $\star$ автоморфизм категории алгебр
  $L_a^*\colon \mathcal{C}^\infty(M) \simeq \mathcal{C}^\infty(M)$,
  $g \mapsto f = g \circ L_a \quad$ для всех $\quad g \in \mathcal{C}^\infty(M)$;
- $\star$ автоморфизм категории векторных расслоений
  $(L_a)_*\colon TM \simeq TM$,
  $X_p \mapsto Y_{a \cdot p} = (L_a)_*(X_p)$ для всех $p \in M$, $X \in T_pM$;
- $\star$ автоморфизм категории алгебр Ли (см. предложение 2.3.7)
  $(L_a)_*\colon \mathfrak{T}(M) \simeq \mathfrak{T}(M)$, $X \mapsto Y = (L_a)_*(X) = (L_a)_* \circ X \circ L_{a^{-1}}$,
  для всех $X \in \mathfrak{T}(M)$;
- $\star$ автоморфизм категории алгебр Ли (см. предложение 2.3.7)
  $(L_a)_*\colon \mathfrak{D}(M) \simeq \mathfrak{D}(M)$,
  $\xi \mapsto \eta = (L_a)_*(\xi) = L_{a^{-1}}^* \circ \xi \circ L_a^*$ для всех $\xi \in \mathfrak{D}(M)$;
- $\star$ автоморфизм категории внешних алгебр
  $L_a^*\colon \Omega(M) \simeq \Omega(M), \quad \omega \mapsto L_a^*(\omega)$, где
  $L_a^*(\omega)(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)(p) = \omega((L_a)_*(X_1) \wedge \dots \wedge (L_a)_*(X_n))(a \cdot p)$
  для всех $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega^n(M)$, $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{T}(M)$, $p \in M$.

Замечание. Заметим, что здесь $d \circ L_a^* = L_a^* \circ d$ для всех $a \in G$ (см. предложение 2.4.12).

Касательное поле $X \in \mathfrak{T}(M)$ называется *левоинвариантным* (инвариантным относительно левого действия группы G), если

$(L_a)_*(X) = X$, т.е. если $X \circ L_a = (L_a)_* \circ X$ для всех $a \in G$. Соответственно, дифференцирование $\xi \in \mathfrak{D}(M)$ называется *левоинвариантным*, если $(L_a)_*(\xi) = \xi$, т.е. если $L_a^* \circ \xi = \xi \circ L_a^*$, для всех $a \in G$.

Предложение 2.6.1. *Множество ${}_G\mathfrak{T}(M)$ всех левоинвариантных касательных полей на M есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{T}(M)$.*

Доказательство. Действительно, в силу предложения 2.3.7 в этом случае

$$(L_a)_*([X,Y]) = [(L_a)_*(X), (L_a)_*(Y)] = [X,Y]$$

для всех $a \in G$, $X, Y \in {}_G\mathfrak{T}(M)$.

Предложение 2.6.2. *Пусть точки $p, q \in M$ лежат на одной орбите. Тогда для любого касательного поля $X \in {}_G\mathfrak{T}(M)$ справедливо равенство*

$$X_q = (L_a)_*(X_p),$$

где элемент $a \in G$ такой, что $q = a \cdot p$.

Доказательство. Заметим сначала, что указанный элемент a существует (возможно, не единственный) в силу определения орбиты точки относительно действия группы. Далее, в этом случае

$$X_q = ((L_a)_*(X))_q = ((L_a)_* \circ X \circ L_{a^{-1}})_q = (L_a)_*(X_{a^{-1}\cdot q}) = (L_a)_*(X_p).$$

Пусть L – левое действие группы Ли G на гладком многообразии M.

Форма $\omega \in \Omega^n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *левоинвариантной формой*, если $L_a^*(\omega) = \omega$ для всех $a \in G$. В этом случае

$$\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)(p) = \omega((L_a)_*(X_1) \wedge \cdots \wedge (L_a)_*(X_n))(a \cdot p)$$

для всех $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{T}(M)$, $p \in M$, $a \in G$. Множество всех левоинвариантных форм на M обозначим через

$${}_G\Omega(M) = \bigoplus\nolimits_{n \in \mathbb{Z}_+} \Omega^n_G(M),$$

где

$${}_G\Omega^0(M) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid f(a \cdot p) = f(p) \text{ для всех } a \in G,\ p \in M\}$$

– множество всех гладких функций на многообразии M, постоянных на орбитах группы G.

Предложение 2.6.3. *Пусть*

$$\omega \in {}_G\Omega^n(M), \quad X_1, \dots, X_n \in {}_G\mathfrak{T}(M), \quad n \in \mathbb{N},$$

тогда

$$\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)(a \cdot p) = \omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)(p) \ \text{для всех} \ a \in G, \ p \in M.$$

Другими словами, в этом случае функция $\omega(X_1 \wedge \dots \wedge X_n)$ постоянна на орбитах группы G.

Доказательство. Действительно, здесь

$$L_a^*(\omega) = \omega, \quad (L_a)_*(X_i) = X_i \quad \text{для всех} \quad a \in G, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Предложение 2.6.4. *Множество всех левоинвариантных форм ${}_G\Omega(M)$ есть дифференциально замкнутая подалгебра внешней алгебры $\Omega(M)$.*

Доказательство. Очевидно (см. с. 153),

$$L_a^*(\omega \wedge \chi) = L_a^*(\omega) \wedge L_a^*(\chi) = \omega \wedge \chi$$

для всех $\omega \in {}_G\Omega^n(M)$, $\chi \in {}_G\Omega^r(M)$, $a \in G$, $n, r \in \mathbb{Z}_+$, так что ${}_G\Omega(M)$ – подалгебра алгебры $\Omega(M)$. Далее, согласно предложению 2.4.12

$$L_a^*(d(\omega)) = d(L_a^*(\omega)) = d(\omega)$$
$$\text{для всех} \quad \omega \in {}_G\Omega^n(M), \ a \in G, \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

откуда $d_G\Omega(M) \subset {}_G\Omega(M))$, т.е. подалгебра ${}_G\Omega(M)$ дифференциально замкнутая.

2.6.3. Алгебра Ли группы Ли. Пусть G – группа Ли, действие l – ее левый сдвиг,

$$l\colon G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto l_a(b) = a \cdot b$$

(см. пример 1.2.4).

Алгебра Ли ${}_G\mathfrak{T}(G)$ всех левоинвариантных касательных полей на многообразии G называется *алгеброй Ли группы Ли G*.

По построению группа Ли G действует на многообразии G транзитивно и свободно, множество орбит состоит из одной орбиты – самого многообразия G, так что в силу предложения 2.6.2 каждое поле $X \in {}_G\mathfrak{X}(G)$ однозначно определяется своим значением в любой наперед заданной точке. Из соображений удобства, обычно в качестве такой точки выбирают единицу $e \in G$. В этом случае, для всякого поля $X \in {}_G\mathfrak{X}(G)$ предложение 2.6.2 дает представление

$$X_a = (l_a)_*(X_e) = X_e \circ l_a^* \quad \text{для всех} \quad a \in G,$$

где

$$l_a^* \colon \mathcal{C}^\infty(a) \to \mathcal{C}^\infty(e),$$
$$\mathbf{f}_a \mapsto \mathbf{g}_e = l_a^*(\mathbf{f}_a) = \mathbf{f}_a \circ l_a \quad \text{для всех} \quad \mathbf{f}(x) \in \mathcal{C}^\infty(a)$$

(см. с. 135). Таким образом, справедливо

Предложение 2.6.5. *Пусть G – группа Ли и ${}_G\mathfrak{X}(G)$ – ее алгебра Ли, тогда*

$${}_G\mathfrak{X}(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X_a = (l_a)_*(X_e) \quad \textit{для всех} \quad a \in G\}.$$

Доказательство. Надо лишь проверить, что всякое касательное поле указанного вида на G левоинвариантное. Предлагается проделать это в качестве упражнения.

Следствие 2.6.1. *Пусть G – группа Ли. Правило $X \mapsto X_e$, определяет изоморфизм линейных пространств*

$${}_G\mathfrak{X}(G) \simeq T_eG,$$

и индуцирует на касательном пространстве T_eG структуру алгебры Ли.

Замечание. На практике алгебры Ли ${}_G\mathfrak{X}(G)$ и T_eG, как правило, отождествляют и обозначают через $\mathfrak{g}$. Отметим, что имеются и другие, эквивалентные, определения алгебры Ли данной группы Ли (см., например, [17]). Обратим также внимание, что *левоинвариантные поля на группе не выдерживают умножение на функции, множество ${}_G\mathfrak{X}(G)$ есть линейное пространство, а не $\mathcal{C}^\infty(G)$-модуль.*

Пример 2.6.4. Для группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$ (см. пример 2.6.1) алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, для группы Ли $SL(n,\mathbb{R})$ (см. пример 2.6.2) алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid Tr(a) = 0\}$, где $Tr(a)$ – след матрицы a, для группы Ли $O(n,\mathbb{R})$ алгебра Ли $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = \{a \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid a + a^t = 0\}$, для группы Ли $SO(n,\mathbb{R})$ алгебра Ли $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$). Во всех случаях скобка Ли есть матричный коммутатор. Обратим внимание, что у групп $O(n,\mathbb{R})$ и $SO(n,\mathbb{R})$ алгебры Ли одинаковые, это не случайно, поскольку по алгебре Ли восстанавливается лишь связная компонента группы Ли, а $SO(n,\mathbb{R})$ и есть связная компонента группы $O(n,\mathbb{R})$. Аналогичные результаты справедливы и для комплексных матричных групп.

Пусть G – группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Пусть m – размерность многообразия G. Очевидно, и размерность линейного пространства $\mathfrak{g}=T_eG$ также равна m (коротко, $\dim G=\dim\mathfrak{g}=m$). В линейном пространстве $\mathfrak{g}$ выберем произвольный базис $\{g_1,\ldots,g_m\} \subset \mathfrak{g}$, тогда согласно определению алгебры Ли найдутся числа $c^\lambda_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \lambda,\mu,\nu \leqslant m$, такие, что

$$[g_\mu, g_\nu] = \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant m} c^\lambda_{\mu\nu} g_\lambda \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant \mu,\nu \leqslant m.$$

Числа $c^\lambda_{\mu\nu}$ называются *структурными константами* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и удовлетворяют следующим равенствам, полностью характеризующими алгебру Ли в данном базисе:

- ⋆ $c^\lambda_{\mu\nu}+c^\lambda_{\nu\mu} = 0$ для всех $1 \leqslant \lambda,\mu,\nu \leqslant m$ (кососимметричность);
- ⋆ $\sum\limits_{1\leqslant\beta\leqslant m}(c^\alpha_{\beta\lambda}c^\beta_{\mu\nu}+c^\alpha_{\beta\mu}c^\beta_{\nu\lambda}+c^\alpha_{\beta\nu}c^\beta_{\lambda\mu})=0$ для всех $1\leqslant\alpha,\lambda,\mu,\nu\leqslant m$ (тождество Якоби).

Предложение 2.6.6. *Каждый автоморфизм* $\Phi\colon G\simeq G$ *группы Ли* G *индуцирует автоморфизм* $\Phi_*\colon \mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}$ *ее алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Согласно предложению 2.3.7 автоморфизм Φ индуцирует автоморфизм $\Phi_*\colon \mathfrak{T}(G) \simeq \mathfrak{T}(G)$ алгебры Ли касательных полей на G, и надо лишь проверить, что $\Phi_*\colon {}_G\mathfrak{T}(G) \to {}_G\mathfrak{T}(G)$. Для этого сначала заметим, что формула $\Phi(a\cdot b) = \Phi(a)\cdot\Phi(b)$, $a,b \in G$, влечет равенство $\Phi\circ l_a = l_{\Phi(a)}\circ\Phi$, т.е. $\Phi\circ l_{\Phi^{-1}(a)} = l_a\circ\Phi$, для всех $a \in G$. Пусть теперь $A \in {}_G\mathfrak{T}(G)$, так что $A_{a\cdot b} = (l_a)_*(A_b)$ для всех $a,b \in G$ и $B = \Phi_*(A)$, $B_a = \Phi_*(A_{\Phi^{-1}(a)})$

для всех $a \in G$. Тогда

$$B_{a\cdot b} = \Phi_*(A_{\Phi^{-1}(a\cdot b)}) = \Phi_*(A_{\Phi^{-1}(a)\cdot\Phi^{-1}(b)}) = (\Phi \circ l_{\Phi^{-1}(a)})_*(A_{\Phi^{-1}(b)}) \\ = (l_a \circ \Phi)_*(A_{\Phi^{-1}(b)}) = (l_a)_*(B_b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in G,$$

что и требовалось.

Пример 2.6.5. Пусть G – алгебра Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Для каждого $a \in G$ положим $\mathrm{ad}(a) = l_a \circ r_{a^{-1}} = r_{a^{-1}} \circ l_a$ (см. пример 1.2.5), так что $\mathrm{ad}(a)(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ для всех $x \in G$. Согласно предложению 2.6.6 автоморфизм $\mathrm{ad}(a)$ индуцирует автоморфизм $\mathrm{ad}(a)_*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что в свою очередь определяет действие $\mathrm{ad}_* \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, называемое *присоединенным представлением* группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть G – группа Ли, действие l – ее левый сдвиг, ${}_G\Omega(G)$ – множество всех левоинвариантных форм на G. Согласно предложению 2.6.4 ${}_G\Omega(G)$ – дифференциально замкнутая подалгебра внешней алгебры $\Omega(G)$. Обозначим через $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ кокасательное пространство гладкого многообразия G в точке $e \in G$, и пусть $\wedge\, \mathfrak{g}^* = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}_+} \wedge^p \mathfrak{g}^*$ – его внешняя алгебра.

Предложение 2.6.7. *Имеет место изоморфизм внешних алгебр*

$${}_G\Omega(G) \simeq \wedge\, \mathfrak{g}^*, \quad \omega \mapsto \omega_e.$$

Доказательство. Пусть сначала $p = 0$. По определению

$${}_G\Omega^0(G) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) \mid f(a \cdot b) = f(b) \text{ для всех } a, b \in G\} \simeq \\ \simeq \mathbb{R} = \wedge^0 \mathfrak{g}^*,$$

поскольку группа G действует на многообразии G транзитивно. Пусть теперь $\omega \in {}_G\Omega^p(G)$, $p \in \mathbb{N}$, тогда по определению левоинвариантности

$$\omega(X_1 \wedge \cdots \wedge X_p)(a) = \omega_e(Y_{1,e} \wedge \cdots \wedge Y_{p,e}) \\ \text{для всех} \quad X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{T}(G),\ a \in G,$$

где $\omega_e \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$, $Y_{i,e} = (l_{a^{-1}})_*(X_{i,a}) \in \mathfrak{g}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Таким образом, всякая левоинвариантная форма полностью определяется своим значением в точке $e \in G$ (как обычно, мы отождествляем дифференциальные формы и сечения соответствующего расслоения).

Замечание. Обратим внимание, что здесь

$$\omega(A_1 \wedge \cdots \wedge A_p)(a) = \mathrm{const}$$
$$\text{для всех} \quad \omega \in {}_G\Omega^p(G), \quad A_1, \ldots, A_p \in {}_G\mathfrak{T}(G),$$

поскольку группа G действует на многообразии G транзитивно. Отметим также, что левоинвариантные формы на группе не выдерживают умножение на функции, *множество ${}_G\Omega(G)$ есть линейное пространство, а не $\mathcal{C}^\infty(G)$-модуль.*

Согласно предложению 2.6.4 на внешней алгебре ${}_G\Omega(G)$ определен дифференциал $d = d_G \colon {}_G\Omega(G) \to {}_G\Omega(G)$. Изоморфизм ${}_G\Omega(G) \simeq \wedge\,\mathfrak{g}^*$ (см. предложение 2.6.7) переносит этот дифференциал на внешнюю алгебру $\wedge\,\mathfrak{g}^*$. Таким образом, справедливо

Предложение 2.6.8. *Определен дифференциал*

$$d = d_{\mathfrak{g}} \colon \wedge\,\mathfrak{g}^* \to \wedge\,\mathfrak{g}^*$$

такой, что для всех $p \in \mathbb{Z}_+$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} {}_G\Omega^p(G) & \simeq & \wedge^p\,\mathfrak{g}^* \\ {\scriptstyle d = d_G}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle d = d_{\mathfrak{g}}} \\ {}_G\Omega^{p+1}(G) & \simeq & \wedge^{p+1}\,\mathfrak{g}^* \end{array}$$

Именно,

$$d_{\mathfrak{g}} c = 0 \quad \text{для всех} \quad c \in \wedge^0\,\mathfrak{g}^* = \mathbb{R},$$
$$(d_G\chi)(A_0 \wedge \cdots \wedge A_p) = \\ = \frac{1}{p+1} \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} \chi([A_i, A_j] \wedge \cdots \check{A}_i \cdots \check{A}_j \cdots \wedge A_p)$$

для всех $p \in \mathbb{N}$, $\chi \in \wedge^p\,\mathfrak{g}^*$, $A_0, \ldots, A_p \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Прежде всего напомним, что ${}_G\Omega^0(G) \simeq \mathbb{R}$ и, значит, $d_G\omega = 0$ для всех $\omega \in {}_G\Omega^0(G)$. Далее, в случае $p \in \mathbb{N}$ следует воспользоваться стандартной формулой для внешнего дифференциала (см. предложение 2.4.7), изоморфизмом ${}_G\mathfrak{T}(G) \simeq \mathfrak{g}$ (см. следствие 2.6.1) и учесть приведенное выше замечание.

Следствие 2.6.2. *Имеет место* ***уравнение Маурера–Картана***:

$$d\omega(A \wedge B) = -\frac{1}{2}\,\omega([A, B]) \quad \text{для всех} \quad \omega \in {}_G\Omega^1(G), \; A, B \in {}_G\mathfrak{T}(G).$$

2.6.4. Локальные однопараметрические группы преобразований. Пусть M – гладкое многообразие, $\dim M = m$. Говорят, что задана *локальная однопараметрическая группа локальных преобразований* φ (иначе, *локальный поток*), если заданы открытое подмножество $U \subset M$, интервал $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, и гладкое отображение $\varphi\colon I_\epsilon \times U \to M$, $(t,p) \mapsto \varphi_t(p)$, такие, что

- ⋆ для каждого $t \in I_\epsilon$ отображение $\varphi_t\colon U \to M$, $p \mapsto \varphi_t(p)$, есть диффеоморфизм открытого подмногообразия U на образ $\varphi_t(U)$;
- ⋆ если $t, s, t+s \in I_\epsilon$ и $p, \varphi_s(p) \in U$, то $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$.

По построению $\varphi_0 = \mathrm{id}_U$, $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, для всех $t \in I_\epsilon$.

Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований $\varphi\colon I_\epsilon \times U \to M$ называется *однопараметрической группой преобразований* многообразия M (иначе, *потоком*), если $I_\epsilon = \mathbb{R}$ и $U = M$.

Каждый локальный поток $\varphi\colon I_\epsilon \times U \to M$ порождает касательное поле $X \in \mathfrak{T}(U)$, где

$$X(f)(p) = \frac{d}{dt} f(p(t))\bigg|_{t=0} \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(U),\ p \in U,$$

кривая $p(t) = \varphi_t(p)$, $t \in I_\epsilon \subset M$ (в частности, $p(0) = p$, и коротко можно записать $\dot p(0) = X_p$).

Верно и обратное

Предложение 2.6.9. *Пусть даны касательное поле $X \in \mathfrak{T}(M)$ и точка $u \in M$. Существуют $\epsilon > 0$, открытое подмножество $U \subset M$, $u \in U$, и локальный поток $\varphi\colon I_\epsilon \times U \to M$, индуцирующий поле X на U.*

Доказательство. Выберем карту $V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^m$ на M, $u \in V$, с координатами $x = \psi(p)$, $p \in V$. В этом случае сужение

$$X|_V = \xi = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant m} \xi^\mu \cdot \partial_{x^\mu}, \quad \xi^\mu = \xi^\mu(x) \in \mathcal{C}^\infty(\psi(V)).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{df^\mu(t,x)}{dt} = \xi^\mu(f(t,x)), \quad f^\mu(0,x) = x, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

для неизвестной функции $f = (f^1(t,x), \ldots, f^m(t,x))$. Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений для $a = \psi(u)$

найдутся $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что эта задача Коши имеет единственное решение $f(t, x) \in \mathcal{C}^\infty(I_\epsilon \times B_\delta)$, где $B_\delta = \{|x - a| < \delta\}$. Положим $U = \psi^{-1}(B_\delta)$, $\varphi = \varphi_t(p) = f(t, \psi(p))$, тогда $u \in U \subset V$ и индуцированное гладкое отображение $\varphi\colon I_\epsilon \times U \to M$ задает искомую локальную группу преобразований. Свойство

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) \quad \text{для всех} \quad t, s, t+s \in I_\epsilon, \quad \text{и} \quad p, \varphi_s(p) \in U,$$

есть следствие того факта, что наша система $df/dt = \xi(f)$ автономная, т.е. ее правая часть явно не зависит от переменной $t \in I_\epsilon$.

Предложение 2.6.10. *Пусть $\Phi\colon M \simeq M$ – диффеоморфизм гладкого многообразия M, и пусть локальный поток $\varphi_t\colon U \to M$, $t \in I_\epsilon$, порождает касательное поле $X \in \mathfrak{T}(U)$. Тогда индуцированный локальный поток $\psi_t = \Phi \circ \varphi_t \circ \Phi^{-1}\colon V \to M$, $V = \Phi(U)$, $t \in I_\epsilon$, порождает поле $Y = \Phi_*(X) = \Phi_* \circ X \circ \Phi^{-1} \in \mathfrak{T}(V)$.*

Доказательство. Действительно, для всех $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$, $q \in V$ имеем

$$Y(g)(q) = \frac{d}{dt} g(q(t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(p(t))\bigg|_{t=0} = X(f)(p),$$

где $f = \Phi^*(g) = g \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $p = \Phi^{-1}(q) \in U$, $q(t) = \psi_t(q)$, $p(t) = \varphi_t(p)$, что и требуется.

Следствие 2.6.3. *Касательное поле $X \in \mathfrak{T}(M)$ инвариантно относительно диффеоморфизма $\Phi\colon M \simeq M$, т.е. $\Phi_*(X) = X$, тогда и только тогда, когда диффеоморфизм Φ коммутирует с каждым локальным потоком $\varphi_t\colon U \to M$, $t \in I_\epsilon$.*

Предложение 2.6.11. *Пусть $X, Y \in \mathfrak{T}(M)$ и $\varphi_t\colon U \to M$ – локальный поток, порождающий касательное поле X, тогда коммутатор*

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(Y - (\varphi_t)_*(Y)\big),$$

или, подробнее,

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(Y_p - (\varphi_t)_*(Y_q)\big) \quad \text{для всех} \quad p \in U, \quad q = \varphi_t^{-1}(p).$$

Доказательство проводится средствами классического анализа, см., например, [18].

2.6.5. Экспоненциальное отображение. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Пусть $A \in \mathfrak{g} =_G \mathfrak{T}(G)$. Как касательное поле A порождает локальный поток $\varphi\colon I_\epsilon \times U \to G$, где $U \subset G$, $e \in U$, причем в данном случае

$$\varphi_t(a) = (\varphi_t \circ l_a)(e) = (l_a \circ \varphi_t)(e) = a \cdot \varphi_t(e) \quad \text{для всех} \quad t \in I_\epsilon,\ a \in U,$$

поскольку поле A левоинвариантное (см. следствие 2.6.3). Более того, локальный поток φ распространяется на все многообразие G, $\varphi\colon I_\epsilon \times G \to G$, правилом $\varphi_t(a) = a \cdot \varphi_t(e)$ для всех $t \in I_\epsilon$, $a \in G$. Фиксируем теперь произвольное λ, $0 < \lambda < \epsilon$, тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ найдутся $n \in \mathbb{Z}$ и $\tau \in I_\epsilon$ такие, что $t = n\lambda + \tau$. Для каждого $a \in G$ положим

$$\varphi_t(a) = a \cdot \varphi_t(e) = a \cdot \varphi_{n\lambda+\tau}(e) = a \cdot \varphi_\lambda(e)^n \cdot \varphi_\tau(e).$$

Можно проверить, что это правило не зависит от выбора λ и представления $t = n\lambda + \tau$, что оно однозначно продолжает локальный поток φ до глобального потока $\varphi\colon \mathbb{R} \times G \to G$ и что порождаемое этим глобальным потоком касательное поле совпадает с исходным левоинвариантным полем $A \in \mathfrak{g}$. Итак, имеет место

Предложение 2.6.12. *Каждое левоинвариантное поле $A \in \mathfrak{g}$ порождает поток $\varphi = \varphi^A\colon \mathbb{R} \times G \to G$,*

$$\varphi_t^A(a) = a \cdot e^{tA} \quad \textit{для всех} \quad t \in \mathbb{R},\ a \in G,$$

где положено $e^{tA} = \varphi_t(e)$. Другими словами, $\varphi_t^A = r_{e^{tA}}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Замечание. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли и $A \in \mathfrak{g}$. Кривая $\{e(t) = e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset G$ есть однопараметрическая коммутативная подгруппа группы G, поскольку

$$\begin{aligned} e(s+t) &= \varphi_{s+t}^A(e) = \varphi_s^A(\varphi_t^A(e)) = \varphi_t^A(e) \cdot \varphi_s^A(e) \\ &= e(t) \cdot e(s) = e(t+s) = e(s) \cdot e(t) \quad \text{для всех} \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В частности, определено *экспоненциальное отображение*

$$\exp\colon \mathfrak{g} \to G, \quad A \mapsto e^A = e(1).$$

Предложение 2.6.11 для левоинвариантных полей на группе принимает вид

Предложение 2.6.13. *Пусть* $A, B \in \mathfrak{g}$, *тогда коммутатор*

$$[A,B] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(B - (r_{e^{tA}})_*(B)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(B - \mathrm{ad}(e^{-tA})_*(B)\big),$$

в частности,

$$[A,B]_e = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(B_e - \mathrm{ad}(e^{-tA})_*(B_e)\big).$$

Доказательство. Следует учесть, что здесь $\varphi_t = r_{e^{tA}}$, $(l_{e^{-tA}})_*(B) = B$ и что $\mathrm{ad}(e^{-tA})(e) = e$.

2.6.6. Правое действие группы на многообразии.

Пусть M – гладкое многообразие, группа Ли G действует на M справа, $R\colon M \times G \to M$, $(p,a) \mapsto R(p,a) = p \cdot a$. В частности,

- $\star$ для каждого $a \in G$ определены диффеоморфизмы: $R_a\colon M \simeq M$, $p \mapsto p \cdot a$, $\quad l_a\colon G \simeq G$, $b \mapsto a \cdot b$, $\quad r_a\colon G \simeq G$, $b \mapsto b \cdot a$,
- $\star$ для каждого $p \in M$ определено гладкое отображение $L_p\colon G \to M$, $a \mapsto p \cdot a$,

причем $L_p \circ l_a = L_{p\cdot a}$ и $L_p \circ r_a = R_a \circ L_p$, т.е. следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l_a"] \arrow[dr, "L_{p\cdot a}"'] & G \arrow[d, "L_p"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "r_a"] \arrow[d, "L_p"'] & G \arrow[d, "L_p"] \\ M \arrow[r, "R_a"'] & M \end{tikzcd}$$

Далее, каждому левоинвариантному полю $A \in \mathfrak{g}$ отвечает однопараметрическая подгруппа e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, группы Ли G, действующая на многообразии M справа и порождающая на M поток

$$R_{e^{tA}}\colon M \simeq M, \quad p \mapsto R_{e^{tA}}(p) = R(p, e^{tA}) = p \cdot e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Этот поток индуцирует на M касательное поле $A^* \in \mathfrak{T}(M)$, называемое *фундаментальным*, где

$$A^*(f)(p) = \frac{d}{dt} f(p \cdot e^{tA})\bigg|_{t=0} \qquad \text{для всех} \quad p \in M,\ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Таким образом, определено каноническое отображение

$$\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{T}(M), \quad A \mapsto \sigma(A) = A^*.$$

Гладкое отображение $L_p\colon G \to M$, $p \in M$, имеет касательное отображение $(L_p)_*\colon TG \to TM$, в частности,

$$(L_p)_*\colon T_eG = \mathfrak{g} \to T_pM.$$

Предложение 2.6.14. *Имеет место равенство*

$$A_p^* = (L_p)_*(A_e) \quad \textit{для всех} \quad p \in M.$$

Доказательство. Действительно, пусть $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и $p \in M$, тогда

$$\begin{aligned} A_p^*(\mathbf{f}_p) = A^*(f)(p) &= \frac{d}{dt} f(p \cdot e^{tA})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(L_p(e^{tA}))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(L_p^*(f))(e^{tA})\Big|_{t=0} = A(L_p^*(f))(e) = (L_p)_*(A_e)(\mathbf{f}_p), \end{aligned}$$

что и требуется доказать.

Предложение 2.6.15. *Пусть группа Ли G действует на многообразии M справа, тогда отображение $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ есть морфизм алгебр Ли. Более того, если G действует на M эффективно, то σ есть мономорфизм (т.е. его ядро тривиальное), а если свободно, то $A_p^* \neq 0$ для всех $A \in \mathfrak{g}$, $A \neq 0$, $p \in M$.*

Доказательство. Покажем, что коммутатор двух фундаментальных полей есть фундаментальное поле, порожденное коммутатором исходных левоинвариантных полей. Именно, пусть $A, B \in \mathfrak{g}$, $R_{e^{tA}}$ – поток, порождающий фундаментальное поле A^*. Тогда согласно предложению 2.6.11 для всех $p \in M$ имеем

$$[A^*, B^*]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(B^* - (R_{e^{tA}})_*(B^*)_p\big) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(B^* - (R_{e^{tA}})_*(B_q^*)\big),$$

где $q = p \cdot e^{-tA}$. Далее, в силу предложения 2.6.14

$$\begin{aligned} (R_{e^{tA}})_*(B_q^*) &= (R_{e^{tA}} \circ L_q)_*(B_e) = (L_q \circ r_{e^{tA}})_*(B_e) \\ &= (L_p \circ l_{e^{-tA}} \circ r_{e^{tA}})_*(B_e) = (L_p)_*\big(\mathrm{ad}(e^{-tA})_*(B_e)\big), \end{aligned}$$

так что

$$[A^*, B^*]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(L_p)_*\big(B_e - \mathrm{ad}(e^{-tA})_*(B_e)\big) = (L_p)_*([A, B]_e)$$

в силу предложения 2.6.13. Согласно предложению 2.6.14 отсюда следует доказываемое утверждение. Остальные утверждения предлагается доказать самостоятельно или посмотреть, например, в книге [18].

2.7. Связности

2.7.1. Связности в гладких расслоениях.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F, и пусть $TE \xrightarrow{\pi_*} TB$ – соответствующее касательное отображение, так что определена коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\pi_E"'] & TB \arrow[d, "\pi_B"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & B \end{tikzcd}$$

В силу локальной тривиальности расслоения отображение π_* сюръективное, т.е. его образ $\operatorname{im}\pi_* = TB$, однако оно имеет нетривиальное ядро

$$\ker\pi_* = VE = \textstyle\bigcup_{p\in E} V_pE,$$
$$V_pE = \{X_p \in T_pE \mid \pi_*(X_p) = 0\} = T_pS_{\pi(p)},$$

где $S_x = \pi^{-1}(x)$ – слой в E над точкой $x \in B$. Касательные векторы $X_p \in V_pE$, $p \in E$, называются *вертикальными*. По построению множество VE есть подрасслоение касательного расслоения TE, его гладкие сечения называются *вертикальными полями* или (отождествляя касательные поля и дифференцирования) *вертикальными дифференцированиями*.

Предложение 2.7.1. *Касательное поле $X \in \mathfrak{T}(E)$ есть вертикальное дифференцирование тогда и только тогда, когда композиция $X \circ \pi^* = 0$, т.е. когда $X(\pi^*(\phi)) = 0$ для всех $\phi \in \mathcal{C}^\infty(B)$. В частности, множество $\mathfrak{V}(E)$ всех вертикальных полей на E есть $\mathcal{C}^\infty(E)$-модуль и подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{T}(E)$ всех касательных полей на E.*

Доказательство. Действительно, $\mathfrak{V}(E)$ есть $\mathcal{C}^\infty(E)$-модуль как множество сечений векторного расслоения, а для доказательства того что $\mathfrak{V}(E)$ есть алгебра Ли следует воспользоваться следствием 2.3.1.

Следствие 2.7.1. *Подрасслоение* $VE \xrightarrow{\pi_V} E$, *где* $\pi_V = \pi_E|_{VE}$, *есть инволютивное и, значит, интегрируемое, распределение на* E, *причем порождаемое им слоение описано в примере 2.5.2 выше.*

Подрасслоение $HE \xrightarrow{\pi_H} E$, где $\pi_H = \pi_E|_{HE}$, касательного расслоения TE называется *связностью* на E, если

$$TE = VE \oplus HE,$$

где прямая сумма есть послойная прямая сумма линейных пространств, т.е.

$$T_pE = V_pE \oplus H_pE \quad \text{для всех} \quad p \in E.$$

(В качестве упражнения полезно дать категорное определение такой прямой суммы.) Касательные векторы $X_p \in H_pE$, $p \in E$, называются *горизонтальными*, гладкие сечения подрасслоения HE называются *горизонтальными полями*, множество $\mathfrak{H}(E)$ всех горизонтальных полей на E есть $\mathcal{C}^\infty(E)$-модуль.

По построению $\mathfrak{T}(E) = \mathfrak{V}(E) \oplus \mathfrak{H}(E)$, где прямая сумма берется в категории $\mathcal{C}^\infty(E)$-модулей. Следовательно, определены проекции

- $\star$ $v\colon \mathfrak{T}(E) \to \mathfrak{V}(E), \quad X \mapsto v(X)$,
- $\star$ $h\colon \mathfrak{T}(E) \to \mathfrak{H}(E), \quad X \mapsto h(X)$,

так что для всякого $X \in \mathfrak{T}(E)$ имеет место разложение

$$X = v(X) + h(X), \quad \text{где} \quad v(X) \in \mathfrak{V}(E),\ h(X) \in \mathfrak{H}(E).$$

Отметим также, что если распределение HE инволютивное, то на E определена вторая структура слоения, дополнительная к исходной, т.е. в этом случае на E определено *двойное слоение*, при этом через каждую точку многообразия E проходят два слоя – вертикальный и горизонтальный.

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – гладкое расслоение с типичным слоем F, и пусть HE – связность на E. В этом случае определена последовательность расслоений

$$0 \longrightarrow VE \longrightarrow TE = VE \oplus HE \xrightarrow{\pi_*} TB \longrightarrow 0.$$

Подробнее, для каждой точки $p \in E$ определена точная последовательность векторных пространств

$$0 \longrightarrow V_pE \longrightarrow T_pE = V_pE \oplus H_pE \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(p)}B \longrightarrow 0.$$

В частности, определены изоморфизмы векторных пространств

$$\pi_*|_{HE} \colon H_pE \simeq T_{\pi(p)}B \quad \text{для всех} \quad p \in E,$$

причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} HE \arrow[r, "\pi_*|_{HE}"] \arrow[d, "\pi_H"'] & TB \arrow[d, "\pi_B"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & B \end{tikzcd}$$

Это позволяет каждому касательному полю $X \in \mathfrak{T}(B)$ поставить в соответствие его *горизонтальный лифт* $X^h \in \mathfrak{H}(E)$ – горизонтальное поле, задаваемое правилом

$$X_p^h = (\pi_*|_{HE})^{-1}(X_{\pi(p)}) \quad \text{для всех} \quad p \in E.$$

Другими словами, X^h – единственное поле на E такое, что

$$X^h \in \mathfrak{H}(E) \quad \text{и} \quad \pi_*(X_p^h) = X_p \quad \text{для всех} \quad p \in E,$$

иначе, $X^h \in \mathfrak{H}(E)$ и $X^h \sim_\pi X$ (см. с. 137).

Предложение 2.7.2. *Отображение*

$$^h \colon \mathfrak{T}(B) \to \mathfrak{H}(E), \quad X \mapsto X^h,$$

обладает следующими характерными свойствами:
- ⋆ $(f \cdot X + g \cdot Y)^h = \pi^*(f) \cdot X^h + \pi^*(g) \cdot Y^h$ *для всех* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(B)$, $X, Y \in \mathfrak{T}(B)$;
- ⋆ $[X, Y]^h = h([X^h, Y^h])$ *для всех* $X, Y \in \mathfrak{T}(B)$;
- ⋆ $\operatorname{im}{}^h = \{Y \in \mathfrak{H}(E) \mid \pi_*(Y_p) = \pi_*(Y_q)$ *для всех* $\pi(p) = \pi(q)\}$.

Доказательство. Действительно, первое утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} (\pi^*(f) \cdot X^h + \pi^*(g) \cdot Y^h)_p &= \pi^*(f)(p) \cdot X_p^h + \pi^*(g)(p) \cdot Y_p^h \\ &= f(b) \cdot (\pi_*|_{HE})^{-1}(X_b) + g(b) \cdot (\pi_*|_{HE})^{-1}(Y_b) \\ &= (\pi_*|_{HE})^{-1}(f \cdot X + g \cdot Y)_b \\ &= (f \cdot X + g \cdot Y)_p^h, \quad \text{для всех} \quad p \in E,\ b = \pi(p) \in B. \end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения следует заметить, что по построению $X^h \sim_\pi X$, $Y^h \sim_\pi Y$, а $[X^h, Y^h] \sim_\pi [X, Y]$ в силу следствия 2.3.1. Очевидно, $\pi_*(h([X^h, Y^h])_p) = \pi_*([X, Y]_p)$ для всех $p \in E$. Таким образом,

$$h([X^h, Y^h]) \in \mathfrak{H}(E) \quad \text{и} \quad h([X^h, Y^h]) \sim_\pi [X, Y],$$

так что

$$[X, Y]^h = h([X^h, Y^h]),$$

поскольку горизонтальный лифт определен однозначно. Для проверки третьего утверждения достаточно заметить, что в случае выполнения условия $\pi_*(Y_p) = \pi_*(Y_q)$ для всех $p, q \in E$ таких, что $\pi(p) = \pi(q)$, горизонтальное поле $Y = X^h$, где $X \in \mathfrak{T}(B)$ определено условием $X_b = \pi_*(Y_p)$ для каждого $b \in B$ и произвольного $p \in \pi^{-1}(b)$.

Гладкая кривая $\gamma^h \colon I \to E$ называется *горизонтальным лифтом* гладкой кривой $\gamma \colon I \to B$ (см. пример 2.3.1), если она *горизонтальна* (т.е. $\dot{\gamma}^h(t) \in H_{\gamma^h(t)}E$ для всех $t \in I$) и $\pi(\gamma^h(t)) = \gamma(t)$ также для всех $t \in I$.

Предложение 2.7.3. *Пусть $\gamma \colon I \to B$ – гладкая кривая и $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, где $x_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in I$. Тогда существует единственный горизонтальный лифт $\gamma^h \colon I \to E$ такой, что $\gamma^h(t_0) = p_0$.*

Доказательство. См., например, [18], [1].

Пусть $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ – векторное расслоение и HE – связность на E. Пусть касательное поле $X \in \mathfrak{T}(B)$ и сечение (векторное поле) $f \in \mathcal{F}(\pi)$. Пусть точка $x \in B$ и ее образ $f(x) \in \pi^{-1}(x) \subset E$. Проведем через точку x гладкую кривую $\gamma \colon I_\epsilon \to B$, $I_\epsilon = \{|\tau| < \epsilon\}$, $\gamma(0) = x$, такую что $\dot{\gamma}(0) = X_x$. Для каждого $t \in I_\epsilon$ обозначим через $\gamma_t^h \colon I_\epsilon \to E$ горизонтальный лифт кривой γ такой, что $\gamma_t^h(t) = f(\gamma(t))$. Вектор $\phi_t(f(\gamma(t))) = \gamma_t^h(0) \in \pi^{-1}(x)$ называется *параллельным переносом вектора* $f(\gamma(t)) = \gamma_t^h(t) \in \pi^{-1}(\gamma(t))$ *вдоль кривой* γ. Вектор

$$(\nabla_X f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(\phi_t(f(\gamma(t))) - f(x)\big) \in \pi^{-1}(x)$$

называется *ковариантной производной в точке x сечения f в направлении X_x*. Заметим, что дробь $(\phi_t(f(\gamma(t))) - f(x))/t$ определена корректно, поскольку мы предположили, что расслоение

$\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ векторное и, значит, в его слоях определены линейные операции. Перейдя в подходящую локальную расслаивающую карту, можно убедиться, что выписанный выше предел существует, не зависит от выбора кривой γ и гладко зависит от точки x. Построенное таким образом сечение $\nabla_X f \in \mathcal{F}(\pi)$ называется *ковариантной производной сечения* $f \in \mathcal{F}(\pi)$ *вдоль поля* $X \in \mathfrak{T}(B)$.

Предложение 2.7.4. *Ковариантная производная* ∇ *обладает следующими свойствами*:

- $\star$ $\nabla_{\lambda\cdot X+\mu\cdot Y} f = \lambda \cdot \nabla_X f + \mu \cdot \nabla_Y f$
  для всех $f \in \mathcal{F}(\pi)$, $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^\infty(B)$, $X, Y \in \mathfrak{T}(B)$;
- $\star$ $\nabla_X(f+g) = \nabla_X f + \nabla_X g$
  для всех $f, g \in \mathcal{F}(\pi)$, $X \in \mathfrak{T}(B)$;
- $\star$ $\nabla_X(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \nabla_X f + X(\lambda) \cdot X$
  для всех $f \in \mathcal{F}(\pi)$, $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(B)$, $X \in \mathfrak{T}(B)$.

Доказательство. См., например, [18], [1].

Введем $\mathcal{C}^\infty(E)$-модуль $\Omega(E, \mathfrak{V}(E)) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \Omega^n(E, \mathfrak{V}(E))$, где

$$\Omega^n(E, \mathfrak{V}(E)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(E)}(\wedge^n \mathfrak{T}(E), \mathfrak{V}(E)) \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности, $\Omega^0(E, \mathfrak{V}(E)) = \mathfrak{V}(E)$. (Мы не будем здесь называть элементы модуля $\Omega(E, \mathfrak{V}(E))$ *дифференциальными формами*, поскольку на модуле $\mathfrak{V}(E)$ не определено действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(E) = \mathfrak{T}(E)$, см. с. 166.)

Предложение 2.7.5. *Пусть HE – связность в расслоении* $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. *Тогда проекция* $v\colon \mathfrak{T}(E) \to \mathfrak{V}(E)$, $X \mapsto v(X)$, *является* 1*-формой из* $\Omega^1(E, \mathfrak{V}(E)$, *называется* формой связности *и обладает характерными свойствами*:

- $\star$ $v(X) = X$ *для всех* $X \in \mathfrak{V}(E) \subset \mathfrak{T}(E)$;
- $\star$ $v(X) = 0$ *для всех* $X \in \mathfrak{H}(E) \subset \mathfrak{T}(E)$.

Обратно, если дана 1*-форма* $v \in \Omega^1(E, \mathfrak{V}(E))$, $X \mapsto v(X)$, *такая, что* $v(X) = X$ *для всех* $X \in \mathfrak{V}(E)$, *то подмодуль*

$$\mathfrak{H}(E) = \ker v = \{X \in \mathfrak{T}(E) \mid v(X) = 0\}$$

определяет в расслоении $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$ *связность HE для которой* v *будет формой связности, а отображение*

$$h = \mathrm{id} - v\colon \mathfrak{T}(E) \to \mathfrak{H}(E)$$

будет проекцией на подмодуль $\mathfrak{H}(E)$.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Предложение 2.7.6. *Пусть* HE *– связность в расслоении* $\{E \xrightarrow{\pi} B\}$. *Тогда* 2*-форма* $c \in \Omega^2(E, \mathfrak{V}(E))$, $X \wedge Y \mapsto c(X \wedge Y)$, *где*

$$c(X \wedge Y) = -\frac{1}{2}\, v([h(X), h(Y)]) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{T}(E),$$

называется формой кривизны *связности* HE, *причем распределение* HE *инволютивное тогда и только тогда, когда связность* HE плоская, *т.е. когда ее кривизна* $c = 0$.

Доказательство. Для доказательства того, что

$$c \in \Omega^2(E, \mathfrak{V}(E)),$$

следует лишь проверить, что $c((f \cdot X) \wedge Y) = f \cdot c(X \wedge Y)$ для всех $f \in \mathcal{C}^\infty(E)$ и всех $X, Y \in \mathfrak{T}(E)$. Но

$$\begin{aligned} v([h(f \cdot X), h(Y)]) &= v([f \cdot h(X), h(Y)]) \\ &= v(f \cdot [h(X), h(Y)] - h(Y)(f) h(X)) \\ &= f \cdot v([h(X), h(Y)]) - h(Y)(f) v(h(X)) \\ &= f \cdot v([h(X), h(Y)]) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{T}(E). \end{aligned}$$

Для проверки второго утверждения следует вспомнить определение инволютивности распределения.

2.7.2. Связности в главных расслоениях.

Главные расслоения. Пусть G – группа Ли. Гладкое расслоение $\{P \xrightarrow{\pi} M\}$ с типичным слоем G называется *главным расслоением* над M с группой G, если определено свободное правое действие R группы Ли G на многообразии P,

$$R\colon P \times G \to P, \quad (p, a) \mapsto R(p, a) = p \cdot a,$$

причем

- ⋆ слои расслоения $\{P \xrightarrow{\pi} M\}$ суть орбиты группы Ли G на P, т.е.
  - – для каждой точки $x \in M$ слой $S_x = \pi^{-1}(x)$ – орбита группы G, так что для любых $p, q \in S_x$ существует единственный элемент $a \in G$ такой, что $q = p \cdot a$,

– для каждой точки $p\in P$ орбита $pG=\{p\cdot a\mid a\in G\}=S_{\pi(p)}$;

⋆ локальная тривиализация согласована с действием группы Ли G на многообразии P, т.е. у каждой точки многообразия M есть окрестность $U\subset M$ и диффеоморфизм

$$\Phi\colon \pi^{-1}(U)\simeq U\times G,\quad p\mapsto \Phi(p)=(\pi(p),\phi(p)),$$

такой, что

$$\phi(p\cdot a)=\phi(p)\cdot a \quad \text{для всех} \quad a\in G,\ p\in\pi^{-1}(U).$$

Такое расслоение обычно обозначается через $P(M,G)$. Обратим внимание, что в этом случае $M=P/G$, $\pi\colon P\to M$ – каноническая проекция на факторпространство.

Пример 2.7.1. Пусть G – группа Ли, M – гладкое многообразие. Определим свободное правое действие группы Ли G на гладком многообразии $P=M\times G$ правилом

$$R\colon P\times G\to P,\quad ((x,b),a)\mapsto R((x,b),a)=(x,b\cdot a).$$

Легко проверяется (проделать это!), что таким образом определено главное расслоение $P(M,G)$, обычно называемое *тривиальным*.

Пример 2.7.2 (расслоение реперов). Пусть M – гладкое многообразие, $\dim M=m$. *Репером* в точке $p\in M$ называется всякий базис $\mathbf{e}_p=(e_{1,p},\dots,e_{m,p})$ касательного пространства T_pM, записанный в виде строки. Обозначим через $L_p(M)$ множество всех реперов в точке p и положим $L(p)=\bigcup_{p\in M}L_p(M)$. Проекция $\pi\colon L(M)\to M$ определена правилом $\mathbf{e}_p\mapsto\pi(\mathbf{e}_p)=p$. Группа $GL(m,\mathbb{R})$ действует на $L(M)$ справа по правилу

$$R\colon L(M)\times GL(m,\mathbb{R})\to L(M),\quad (\mathbf{e}_p,a)\mapsto R_a(\mathbf{e})=\mathbf{e}_p\cdot a,$$

для всех $p\in M$, $\mathbf{e}_p\in L_p(M)$, $a\in GL(m,\mathbb{R})$, где $\mathbf{e}_p\cdot a$ есть произведение строки $\mathbf{e}_p$ на квадратную матрицу a по обычным правилам линейной алгебры. Очевидно, здесь группа $GL(m,\mathbb{R})$ действует в каждом слое $\pi^{-1}(p)=L_p(M)$, $p\in M$, свободно и транзитивно, что и требуется для главного расслоения. Для построения главного расслоения $L(M)(M,GL(m,\mathbb{R}))$ осталось ввести на множестве $L(M)$ структуру гладкого многообразия, такую чтобы введенные алгебраические операции были гладкими. Для этого достаточно воспользоваться картами, тривиализующими касательное расслоение TM. Детали можно найти, например, в [18] или [15].

Морфизм главных расслоений из главного расслоения $P(M,G)$ в главное расслоение $Q(N,H)$ есть тройка $M \xrightarrow{\varphi} N$, $P \xrightarrow{\Phi} Q$, $G \xrightarrow{\gamma} H$, где пара $M \xrightarrow{\varphi} N$, $P \xrightarrow{\Phi} Q$ есть морфизм гладких расслоений, а отображение $\gamma\colon G \to H$ – морфизм групп Ли, причем выполнено условие согласования

$$\Phi(p \cdot a) = \Phi(p) \cdot \gamma(a) \quad \text{для всех} \quad p \in P,\ a \in G.$$

Таким образом, определена категория главных расслоений.

Предложение 2.7.7. *Если главное расслоение $P(M,G)$ имеет глобальное сечение, то оно тривиальное, точнее изоморфно тривиальному. Именно, в этом случае существует диффеоморфизм $\Phi\colon P \simeq M \times G$, $p \mapsto \Phi(p) = (\pi(p), g(p))$, такой, что следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

где π_1 – проекция на первый сомножитель, и справедливо равенство

$$\Phi(p \cdot a) = (\pi(p), g(p) \cdot a) \quad \textit{для всех} \quad p \in P,\ a \in G.$$

Доказательство. Пусть $\sigma\colon M \to P$ – данное глобальное сечение, где $x \mapsto \sigma(x) \in P$ для всех $x \in M$, причем $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Для каждого $p \in P$ определим образ $g(p)$ как единственный элемент группы G, $g(p) \in G$, для которого $p = \sigma(\pi(p)) \cdot g(p)$. Легко проверяется, что индуцированное отображение $p \mapsto \Phi(p) = (\pi(p), g(p))$ обладает требуемыми свойствами.

Итак, нетривиальные главные расслоения имеют только локальные сечения.

Связности в главных расслоениях. Пусть $P(M,G)$ – главное расслоение. Тогда (см. с. 185)

$\star$ для каждого $a \in G$ определены

– диффеоморфизм (автоморфизм гладких многообразий)

$$R_a\colon P \simeq P, \quad p \mapsto R_a(p) = R(p,a) = p \cdot a,$$

причем $R_a\colon S_x \simeq S_x$, поскольку G действует свободно и транзитивно на каждом слое S_x для всех $x \in M$,

– автоморфизм касательных расслоений

$$(R_a)_*\colon TP \simeq TP,$$
$$(R_a)_*\colon T_pP \simeq T_{p\cdot a}P, \quad X_p \mapsto Y_{p\cdot a} = (R_a)_*(X_p),$$

причем $(R_a)_*\colon V_pP \simeq V_{p\cdot a}P$ для всех $p \in P$ (напомним, что $V_pP = T_pS_{\pi(p)}$),

– автоморфизм $\mathcal{C}^\infty(P)$-модулей

$$(R_a)_*\colon \mathfrak{T}(P) \simeq \mathfrak{T}(P),$$
$$X \mapsto Y = (R_a)_*(X) = (R_{a^{-1}})^* \circ X \circ (R_a)^*,$$
$$Y_p = (R_a)_*(X_{p\cdot a^{-1}}) \quad \text{для всех} \quad p \in P,$$

причем $(R_a)_*\colon \mathfrak{V}(P) \simeq \mathfrak{V}(P)$,

– автоморфизм $\mathcal{C}^\infty(P)$-модулей

$$(R_a)^*\colon \Omega^n(P) \simeq \Omega^n(P), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \omega \mapsto \chi = (R_a)^*(\omega),$$
$$\chi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)(p) = \omega(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_n)(p \cdot a)$$

для всех $X_i \in \mathfrak{T}(P)$, $p \in P$, $Y_i = (R_a)_*(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$;

⋆ для каждого $p \in P$ определены

– гладкое отображение

$$L_p\colon G \to P, \quad a \mapsto L_p(a) = R(p, a) = p \cdot a,$$

причем $L_p\colon G \simeq S_{\pi(p)}$,

– касательное отображение

$$(L_p)_*\colon TG \to TP,$$
$$(L_p)_*\colon T_aG \to T_{p\cdot a}P, \quad A_a \mapsto X_{p\cdot a} = (L_p)_*(A_a),$$

причем $(L_p)_*\colon T_aG \simeq V_{p\cdot a}P$ для всех $a \in G$.

В частности,

$$(L_p)_*\colon \mathfrak{g} = T_eG \simeq V_pP \quad \text{для всех} \quad p \in P.$$

Предложение 2.7.8. *Каноническое отображение*

$$\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{T}(P)$$

(см. с. 185) расширяется до изоморфизма $\mathcal{C}^\infty(M)$-модулей (см. пример 2.4.1)

$$\sigma\colon \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{V}(P), \quad A \mapsto X = \sigma(A),$$

где

$$X\colon P \to VP, \quad p \mapsto X_p = (L_p)_*(A(p)) \in V_pP,$$
$$\textit{для всех} \quad A\colon P \to \mathfrak{g}, \quad p \mapsto A(p), \quad p \in P.$$

Доказательство. Действительно, здесь обратное отображение

$$\sigma^{-1}\colon \mathfrak{V}(P) \simeq \mathcal{C}^\infty(P,\mathfrak{g}), \quad X \mapsto A = \sigma^{-1}(X),$$

действует по правилу $A(p) = (L_p)_*^{-1}(X_p)$ для всех $p \in P$. Гладкость прямого и обратного отображений легко проверяется в локальных картах.

Множество $\mathfrak{g}$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{C}^\infty(P)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(P,\mathfrak{g})$ и порождает его (см. пример 2.4.1), его образ

$$\sigma(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{V}(P) \mid (L_p)_*^{-1}(X_p) \text{ не зависит от } p \in P\}$$

порождает $\mathcal{C}^\infty(P)$-модуль $\mathfrak{V}(P)$. Вертикальные поля

$$A^* = \sigma(A) \in \sigma(\mathfrak{g})$$

называются *фундаментальными*.

Заметим, что изоморфизмы $(L_p)_*\colon \mathfrak{g} \simeq V_pP$, $p \in P$, позволяют тривиализовать вертикальное подрасслоение VP правилом

$$VP \simeq P \times \mathfrak{g}, \quad X_p \mapsto (p, A(p)), \quad A(p) = (L_p)_*^{-1}(X_p), \quad p \in P.$$

Естественно ожидать, что наличие дополнительной алгебраической структуры приводит к более богатой геометрии. Главное новшество – возможность определить действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{T}(P)$ на $\mathcal{C}^\infty(P)$-модуле $\mathfrak{V}(P)$.

Поскольку действие $\varkappa$ алгебры Ли $\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{T}(P)$ на $\mathcal{C}^\infty(P,\mathfrak{g})$ уже определено (см. пример 2.4.1), ее действие $\varkappa_{\mathfrak{V}}$ на $\mathfrak{V}(P)$ дается правилом

$$D = \varkappa_{\mathfrak{V}}(D) = \sigma \circ \varkappa(D) \circ \sigma^{-1} \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}(P).$$

Подробнее, всякое вертикальное поле $X \in \mathfrak{V}(P)$ записывается в виде $X = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} f^i \cdot A_i^*$, где $N = N(X) \in \mathbb{N}$, $f^i \in \mathcal{C}^\infty(P)$, $A_i \in \mathfrak{g}$, и

$$D(X) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} D(f^i) \cdot A_i^* \quad \text{для всех} \quad D \in \mathfrak{D}(P).$$

В частности, $D(A^*) = 0$ для всех $D \in \mathfrak{D}(P)$ и $A \in \mathfrak{g}$.

Итак, для всякой формы $\omega \in \Omega^n(P, \mathfrak{V}(P))$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. с. 191), стандартным образом (см. с. 167) определен внешний дифференциал $d\omega \in \Omega^{n+1}(P, \mathfrak{V}(P))$,

$$d\omega(X_0 \wedge \cdots \wedge X_n) = \frac{1}{n+1}\Bigg\{ \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i X_i(\omega(X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \wedge X_n))$$

$$+ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \check{X}_i \cdots \check{X}_j \cdots \wedge X_n) \Bigg\}$$

для всех $X_0, \ldots, X_n \in \mathfrak{T}(P)$.

Связность HP в гладком расслоении $\{P \xrightarrow{\pi} M\}$ называется *связностью в главном расслоении* $P(M, G)$, если она согласована с действием группы Ли G на гладком многообразии P, т.е. если

$$(R_a)_* \colon H_p P \simeq H_{p \cdot a} P \quad \text{для всех} \quad a \in G,\ p \in P,$$

причем в этом случае

$$(R_a)_* \colon \mathfrak{H}(P) \simeq \mathfrak{H}(P) \quad \text{для всех} \quad a \in G.$$

Пусть $P(M, G)$ – главное расслоение со связностью HP.

В частности, определены проекции

⋆ $v \colon \mathfrak{T}(P) \to \mathfrak{V}(P)$, $\quad X \mapsto v(X)$,

⋆ $h \colon \mathfrak{T}(P) \to \mathfrak{H}(P)$, $\quad X \mapsto h(X)$,

так что для всякого $X \in \mathfrak{T}(P)$ имеется единственное разложение

$$X = v(X) + h(X), \quad \text{где} \quad v(X) \in \mathfrak{V}(P),\ h(X) \in \mathfrak{H}(P).$$

Предложение 2.7.9. *Имеют место равенства*

$$(R_a)_* \circ v = v \circ (R_a)_*, \quad (R_a)_* \circ h = h \circ (R_a)_* \quad \textit{для всех} \quad a \in G.$$

Доказательство проверить самостоятельно.

Предложение 2.7.5 теперь имеет вид

Предложение 2.7.10. *Пусть в главном расслоении $P(M, G)$ дана связность HP. Тогда проекция $v \colon \mathfrak{T}(P) \to \mathfrak{V}(P)$ есть форма из $\Omega^1(P, \mathfrak{V}(P))$, называется* формой связности *и обладает характерными свойствами*

★ $v(X) = X$ *для всех* $X \in \mathfrak{V}(P)$;
★ $v(X) = 0$ *для всех* $X \in \mathfrak{H}(P)$;
★ $(R_a)_* \circ v = v \circ (R_a)_*$ *для всех* $a \in G$.

Обратно, если дана 1*-форма* $v \in \Omega^1(P, \mathfrak{V}(P))$ *такая, что* $v(X) = X$ *для всех* $X \in \mathfrak{V}(P)$, *причем* $(R_a)_* \circ v = v \circ (R_a)_*$ *для всех* $a \in G$, *то подмодуль*

$$\mathfrak{H}(P) = \ker v = \{X \in \mathfrak{T}(P) \mid v(X) = 0\}$$

определяет в главном расслоении $P(M, G)$ *связность* HP *для которой* v *будет формой связности, а отображение*

$$h = \operatorname{id} - v \colon \mathfrak{T}(P) \to \mathfrak{H}(P)$$

будет проекцией на подмодуль $\mathfrak{H}(P)$.

Доказательство. В доказательстве предложения 2.7.5 следует учесть требование инвариантности связности HP относительно действия группы G.

$\mathcal{C}^\infty(P)$-модуль $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$ обладает поточечной структурой алгебры Ли,

$$[A, B](p) = [A(p), B(p)] \quad \text{для всех} \quad A, B \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}),\ p \in P,$$

причем

$$[fA, B] = f[A, B] \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(P),\ A, B \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}).$$

Изоморфизм $\sigma \colon \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{V}(P)$ переносит эту структуру на $\mathcal{C}^\infty(P)$-модуль $\mathfrak{V}(P)$,

$$[X, Y]^{\mathfrak{g}} = \sigma([\sigma^{-1}(X), \sigma^{-1}(Y)]) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{V}(P),$$

где по-прежнему

$$[fX, Y]^{\mathfrak{g}} = f[X, Y]^{\mathfrak{g}} \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{C}^\infty(P), \quad X, Y \in \mathfrak{V}(P).$$

Определим 2-форму $[\dots] \in \Omega^2(P, \mathfrak{V}(P))$ правилом

$$[X \wedge Y] = [v(X), v(Y)]^{\mathfrak{g}} \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{T}(P)$$

и напомним, что выше (см. предложение 2.7.6) была определена форма кривизны $c \in \Omega^2(P, \mathfrak{V}(P))$.

Предложение 2.7.11. *Имеет место* ***структурное уравнение Картана***:

$$dv(X \wedge Y) = -\frac{1}{2}[X \wedge Y] + c(X \wedge Y) \quad \textit{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{T}(P).$$

Доказательство. Учитывая, что все три составляющие структурного уравнения являются 2-формами, т.е. $\mathcal{C}^\infty(P)$-билинейные, и что фундаментальные поля порождают $\mathcal{C}^\infty(P)$-модуль $\mathfrak{V}(P)$, справедливость уравнения достаточно проверить в трех частных случаях: (а) оба поля X, Y – фундаментальные, (б) поле X – фундаментальное, а поле Y – горизонтальное, (в) оба поля X, Y – горизонтальные.

(а) Пусть $X = A^*$, $Y = B^*$. Тогда, с одной стороны (см. с. 197),

$$\begin{aligned} dv(A^* \wedge B^*) &= \frac{1}{2}\big(A^*(v(B^*)) - B^*(v(A^*)) - v([A^*, B^*])\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(A^*(B^*) - B^*(A^*) - [A^*, B^*]\big) = -\frac{1}{2}[A^*, B^*], \end{aligned}$$

поскольку $v(A^*) = A^*$, $v(B^*) = B^*$, $A^*(B^*) = B^*(A^*) = 0$ (см. с. 197), $v([A^*, B^*]) = v([A, B]^*) = [A, B]^* = [A^*, B^*]$ (см. предложение 2.6.15). С другой стороны,

$$[A^* \wedge B^*] = [v(A^*), v(B^*)]^{\mathfrak{g}} = [A^*, B^*]^{\mathfrak{g}} = [A, B]^* = [A^*, B^*]$$

согласно предложению 2.6.15, а

$$c(A^* \wedge B^*) = -\frac{1}{2}\, v([h(A^*), h(B^*)]) = 0,$$

поскольку $h(A^*) = h(B^*) = 0$. Таким образом, в этом случае структурное уравнение выполняется.

(б) Пусть $X = A^*$, $Y \in \mathfrak{H}(P)$. Тогда, с одной стороны,

$$dv(A^* \wedge Y) = \frac{1}{2}\big(A^*(v(Y)) - Y(v(A^*)) - v([A^*, Y])\big) = 0,$$

поскольку $v(Y) = 0$, $Y(v(A^*)) = Y(A^*) = 0$, и коммутатор

$$[A^*, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(Y - (R_{e^{tA}})_*(Y)\big) \in \mathfrak{H}(P)$$

в силу предложения 2.6.11, определения фундаментального поля (см. с. 185) и условия согласования $(R_a)_*\colon \mathfrak{H}(P) \simeq \mathfrak{H}(P)$ (см. с. 197). С другой стороны, формы $[A^* \wedge Y] = [v(A^*), v(Y)]^{\mathfrak{g}} = 0$ $(v(Y) = 0)$ и $c(A^* \wedge Y) = 0$ $(h(A^*) = 0)$, так что структурное уравнение справедливо и в этом случае.

(в) Пусть $X, Y \in \mathfrak{H}(P)$. Тогда, с одной стороны,

$$dv(X \wedge Y) = \frac{1}{2}\big(X(v(Y)) - Y(v(X)) - v([X,Y])\big) = c(X \wedge Y),$$

поскольку $v(Y) = v(X) = 0$, $h(X) = X$ и $h(Y) = Y$, а с другой стороны, $[X \wedge Y] = [v(X), v(Y)]^{\mathfrak{g}} = 0$ $(v(Y) = v(X) = 0)$, так что структурное уравнение справедливо.

Следствие 2.7.2. *Имеет место тождество Бианки*

$$dc(X \wedge Y \wedge Z) = 0 \quad \textit{для всех} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{H}(P).$$

Замечание. На практике обычно вместо модуля $\Omega(P, \mathfrak{V}(P))$ используют изоморфный ему модуль $\Omega(P, \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g}))$, обозначаемый через $\Omega(P, \mathfrak{g})$. Именно, *формой связности* называют 1-форму $\omega = \sigma^{-1} \circ v \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, а *формой кривизны* называют 2-форму $\Omega = \sigma^{-1} \circ c \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$. Структурное уравнение Картана в этом случае принимает вид

$$d\omega(X \wedge Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X \wedge Y) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathfrak{T}(P),$$

где $[\omega(X), \omega(Y)]$ – поточечный коммутатор в $\mathcal{C}^\infty(P)$-модуле $\mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})$, а тождество Бианки – вид

$$d\Omega(X \wedge Y \wedge Z) = 0 \quad \text{для всех} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{H}(P).$$

2.7.3. Связности в ассоциированных расслоениях.

Ассоциированные расслоения. Пусть G – группа Ли, $P(M, G)$ – главное расслоение над многообразием M с группой G. Пусть F – гладкое многообразие на котором определено левое действие группы Ли G,

$$L\colon G \times F \to F, \quad (a, u) \mapsto L(a, u) = a \cdot u.$$

Тогда на прямом произведении $P \times F$ определено правое действие группы Ли G,

$$R\colon (P \times F) \times G \to P \times F, \quad ((p, u), a) \mapsto R((p, u), a) = (p \cdot a, a^{-1} \cdot u).$$

Две пары $(p,u),(q,v) \in P \times F$ называются *эквивалентными относительно этого действия*, если существует $a \in G$ такое, что $(p,u) = (q \cdot a, a^{-1} \cdot v)$. Множество всех таких классов эквивалентности $[p,u]$ обозначаем через $E = P \times_G F$ и приходим к следующей коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\varrho"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ E \arrow[r, "\pi_E"'] & M \end{tikzcd}$$

где π_1 – проекция на первый сомножитель, π – проекция, входящая в определение главного расслоения $P(M,G)$, каноническая проекция ϱ каждой паре (p,u) ставит в соответствие ее класс эквивалентности $[p,u]$, проекция π_E действует по правилу: $[p,u] \mapsto \pi(p)$ (это правило не зависит от выбора представителя (p,u), поскольку из условия $p = q \cdot a$ следует, что $\pi(p) = \pi(q)$ для всех $p,q \in P$, $a \in G$). Используя локальную тривиализацию расслоения $P(M,G)$, можно проверить, что на множестве E существует естественная структура гладкого многообразия такая, что проекции ϱ и π_E суть гладкие отображения.

Предложение 2.7.12. *Для каждого $x \in M$ слой $\pi_E^{-1}(x) \simeq F$.*

Доказательство. Заметим, что равенство $[p,u] = [p,v]$ влечет равенство $u = v$ для любых $p \in P$, $u,v \in F$, поскольку группа G действует на P свободно. Итак, пусть $x \in M$. Выберем произвольное $r \in P$. Определим отображение $i_r\colon \pi_E^{-1}(x) \to F$ правилом $[p,u] \mapsto v$, где $v = a \cdot u$, a – единственный элемент из группы G такой, что $p = r \cdot a$, так что здесь $[p,u] = [r \cdot a, u] = [r, a \cdot u] = [r,v]$. В свою очередь, отображение $j_r\colon F \to \pi_E^{-1}(x)$ зададим правилом $v \mapsto [r,v]$. Легко проверяется, что $j_r \circ i_r = \mathrm{id}_{\pi_E^{-1}(x)}$ и $i_r \circ j_r = \mathrm{id}_F$.

Замечание. Пусть $x \in M$, и фиксируем $r \in \pi^{-1}(x) \subset P$. Тогда для любого $p \in \pi^{-1}(x)$ существует единственный элемент $a \in G$ такой, что $p = r \cdot a$, а значит, в любом классе $[p,u] \in \pi_E^{-1}(x)$ существует единственный представитель вида (r,v) (именно, с $v = a \cdot u$), т.е. коротко можно писать

$$\pi_E^{-1}(x) = \{(r,v) \mid v \in F\} \simeq F.$$

Полученное расслоение обозначается через $E = E(M, F, G, P)$ и называется *расслоением над M со стандартным слоем F, ассоциированным с главным расслоением $P = P(M, G)$*.

Предложение 2.7.13. *Пусть в ассоциированном расслоении $E(M, F, G, P)$ многообразие F есть векторное пространство, на котором определено представление группы Ли G (в частности, G действует на F линейно). Тогда $E(M, F, G, P)$ обладает естественной структурой векторного расслоения с типичным слоем F.*

Доказательство. Надо показать, что каждый слой $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, обладает естественной структурой векторного пространства, изоморфного (в категории линейных пространств) пространству F. Фиксируем точку $r \in \pi^{-1}(x)$ и для любых $[r, u], [r, v] \in \pi_E^{-1}(x)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ положим

$$\alpha[r, u] + \beta[r, v] = [r, \alpha u + \beta v] \in \pi_E^{-1}(x).$$

Покажем, что это определение не зависит от выбора точки $r \in \pi^{-1}(x)$. Возьмем другую точку $s \in \pi^{-1}(x)$, тогда найдется единственный элемент $a \in G$ такой, что $r = s \cdot a$, и, значит,

$$[r, u] = [s, a \cdot u], \quad [r, v] = [s, a \cdot v],$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha[s, a \cdot u] + \beta[s, a \cdot v] &= [s, \alpha \cdot a \cdot u + \beta \cdot a \cdot v] = [s, a \cdot (\alpha u + \beta v)] \\ &= [s \cdot a, \alpha u + \beta v] = [r, \alpha u + \beta v] = \alpha[r, u] + \beta[r, v]. \end{aligned}$$

Гладкость этой конструкции легко проверяется в локальных тривиализующих картах.

Связности в ассоциированных расслоениях.

Пусть $P(M, G)$ – главное расслоение со связностью HP и $E(M, F, G, P)$ – ассоциированное с ним расслоение. В расслоении $E(M, F, G, P)$ следующим образом определяется связность, ассоциированная со связностью HP. Пусть класс $[p, u] \in E$. Определим отображение

$$\phi_u \colon P \to E$$

правилом $r \mapsto [r, u]$ (в частности, $p \mapsto [p, u]$), тогда касательное отображение $(\phi_u)_* \colon TP \to TE$ (в частности, $T_pP \to T_{[p,u]}E$), и мы положим $H_{[p,u]}E = (\phi_u)_*(H_pP)$. Проверим, что это определение не зависит от выбора представителя класса $[p,u]$. Возьмем произвольный представитель $(q,v) \in [p,u]$, так что $q = p \cdot a$, $v = a^{-1} \cdot u$ для некоторого $a \in G$. Тогда $\phi_v \colon P \to E$, $r \mapsto [r,v]$ (в частности, $q \mapsto [q,v] = [p,u]$), причем

$$\begin{aligned}(\phi_v)_*(H_qP) &= (\phi_v)_*(H_{p\cdot a}P) = ((\phi_v)_* \circ (R_a)_*)(H_pP) \\ &= (\phi_v \circ R_a)_*(H_pP) = (\phi_u)_*(H_pP) = H_{[p,u]}E,\end{aligned}$$

где было учтено, что по определению связности в главном расслоении $(R_a)_* \colon H_pP \simeq H_{p\cdot a}P$ и что

$$(\phi_v \circ R_a)(r) = \phi_v(r \cdot a) = [r \cdot a, v] = [r, a \cdot v] = [r,u] = \phi_u(r) \quad \text{для всех} \quad r \in P.$$

Гладкость этой конструкции легко проверяется в локальных тривиализующих картах. Далее, легко проверяется, что имеет место разложение в прямую сумму

$$T_{[p,u]}E = V_{[p,u]}E \oplus H_{[p,u]}E \quad \text{для всех} \quad [p,u] \in E,$$

и аналогичные разложения для касательного расслоения TE и $\mathcal{C}^\infty(E)$-модуля касательных полей $\mathfrak{T}(E)$.

Таким образом, *связность в главном расслоении* действительно *индуцирует связность в ассоциированном расслоении.*

Список литературы

[1] C. J. Isham, *Modern differential geometry for physicists*, World Sci. Lecture Notes Phys., **61**, World Scientific, River Edge, NJ, 1999, MR 1698234.

[2] J. Madore, *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **206**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, MR 1366835.

[3] J. L. Taylor, "Homology and cohomology for topological algebras", *Advances in Mathematics*, **9**:2 (1972), 137–182, doi 10.1016/0001-8708(72)90016-3, MR 328624, Zbl 0271.46040.

[4] L. R. Vermani, *An elementary approach to homological algebra*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003, MR 1988048.

[5] V. V. Zharinov, *Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations*, Ser. Soviet East European Math., **9**, World Scientific, River Edge, NJ, 1992, MR 1167448.

[6] Н. Бурбаки, *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов*, Мир, Москва, 1975, MR 0377915.

[7] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, Москва, 1997.

[8] Р. Годеман, *Алгебраическая топология и теория пучков*, ИЛ, Москва, 1961, MR 0130684.

[9] А. Гротендик, *О некоторых вопросах гомологической алгебры*, ИЛ, Москва, 1961.

[10] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, Москва, 1976, MR 0448330.

[11] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Вып. 5, Лекционные курсы НОЦ, МИАН, Москва, 2006, Mi http://mi.mathnet.ru/rus/lkn5.

[12] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, том I, Эдиториал УРСС, Москва, 1998.

[13] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, том II, Эдиториал УРСС, Москва, 1998.

[14] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, Москва, 1984, MR 0766739.

[15] Р. Зуланке, П. Винтген, *Дифференциальная геометрия и расслоения*, Мир, Москва, 1975, MR 0413153.

[16] А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, ИЛ, Москва, 1960, MR 0117263.

[17] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, Москва, 1978, MR 0509211.

[18] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, том I, Наука, Москва, 1981, MR 0628734.

[19] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, том II, Наука, Москва, 1981, MR 0643797.

[20] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, Москва, 1968.

[21] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, Москва, 1966.

[22] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, Москва, 2004.

[23] Манин Ю. И., *Лекции по алгебраической геометрии*. Часть I. *Аффинные схемы*, МГУ, Москва, 1970.

[24] Наймарк М. А., *Нормированные кольца*, Наука, Москва, 1968, MR 0355602.

[25] А. Пич, *Ядерные локально выпуклые пространства*, Мир, Москва, 1967, MR 0221262.

[26] А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, Москва, 1967, MR 0228963.

[27] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, Москва, 1970, MR 0394454.

[28] Р. Уэллс, *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, Москва, 1976, MR 0515873.

[29] М. В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва, 1985, MR 0964270.

[30] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, Москва, 2005.

[31] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии*, Наука, Москва, 1989, MR 1031991.

[32] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, Москва, 2004.

Предметный указатель

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 8

Виктор Викторович Жаринов

Алгебро-геометрические основы математической физики

Сдано в набор 01.12.2007. Подписано в печать 01.06.2008.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,125. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pavlov@mi.ras.ru`