Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

**Лекционные курсы НОЦ**

***Выпуск 8***

Издание выходит с 2006 года

В. А. Ватутин

# Ветвящиеся процессы и их применения

Москва
2008

УДК 519.218.23
ББК (В)22.171
Л43



Л43 **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 8: Ветвящиеся процессы и их применения / Ватутин В. А. – 108 с.

ISBN 5-98419-024-9

Серия "Лекционные курсы НОЦ" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии "Лекционные курсы НОЦ" публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит полугодовой курс В. А. Ватутина "Ветвящиеся процессы и их применения", прочитанный весной 2007-го года.

ISBN 5-98419-024-9

# Оглавление

# 1. Введение

Ветвящиеся процессы являются одним из интереснейших разделов теории вероятностей. Возникшая в середине 19-го столетия как теория, пытавшаяся объяснить причины вырождения знаменитых фамилий в Великобритании, теория ветвящихся процессов стала в настоящее время весьма разветвленной областью теории вероятностей и мощным инструментом исследования в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, теория просачивания, а также во многих разделах других наук, в число которых, входят, в частности, физика, химия и биология.

Предлагаемый выпуск основан на спецкурсе по теории ветвящихся процессов, прочитанном автором весной 2007 года в Научно-образовательном центре Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук. Конечно, в рамках полугодового курса лекций невозможно изложить даже наиболее важные результаты теории ветвящихся процессов, не говоря уже о ее применениях. Поэтому в спецкурс были включены лишь следующие разделы:

- Процессы Гальтона–Ватсона, классификация, предельные теоремы для докритических, критических и надкритических процессов. Связь процессов Гальтона–Ватсона со случайными блужданиями. Процессы Гальтона–Ватсона и системы массового обслуживания.
- Редуцированные процессы. Расстояние до ближайшего общего предка.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00035) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4129.2006.1).

- Марковские ветвящиеся процессы, классификация, предельные теоремы, регулярность. Ветвящиеся процессы с иммиграцией.
- Ветвящиеся процессы с финальным продуктом. Системы массового обслуживания с одним прибором, бесконечной очередью и обслуживанием в случайном порядке. Ветвящиеся процессы с иммиграцией и финальным продуктом. Системы $M|G|1$ с повторными вызовами.

Читатель, который захочет узнать больше о теории ветвящихся процессов и ее применениях, может убедиться в математической красоте и стройности этой теории, а также ее важности для приложений, обратившись к монографиям [1]–[6] и обзорам [7] и [8].

# 2. Классификация ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона

**2.1. Марковские цепи.** Пусть на множестве всех неотрицательных целых чисел задано распределение вероятностей

$$P_0(k) \geqslant 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots ; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} P_0(k) = 1,$$

и переходные вероятности

$$P_{kj} \geqslant 0, \quad k, j = 0, 1, 2, \dots ; \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj} = 1.$$

Определение. Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\eta_0, \eta_1, \dots$ называется *цепью Маркова на множестве* $\mathscr{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$ *с начальным распределением* $P_0(k)$ *и переходными вероятностями* $P_{kj}$, если

$$\mathbf{P}(\eta_0 = k) = P_0(k), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

и для любого $n = 0, 1, \dots$ и любых $k_0, k_1, \dots, k_n, j$ из множества $\mathscr{N}_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta_{n+1} = j \mid \eta_0 = k_0, \eta_1 = k_1, \dots, \eta_n = k_n)& \\ = \mathbf{P}(\eta_{n+1} = j \mid \eta_n = k_n) = P_{k_n j}&.\end{aligned}$$

**2.2. Процессы Гальтона–Ватсона.** Пусть на множестве $\mathscr{N}_0$ задано распределение вероятностей

$$p_m \geqslant 0, \quad m = 0, 1, \dots ; \qquad \sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1,$$

и пусть для целых чисел $k \geqslant 1$ и $j \geqslant 0$

$$p_j^{*k} = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_k = j} p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_k}$$

– значение $k$-кратной свертки распределения $\{p_m,\ m = 0, 1, \dots\}$ с собой в точке $j$.

Ясно, что если $\mathbf{P}(\xi = m) = p_m$, $m = 0, 1, \dots$, а $\xi_i$, $i = 1, 2, \dots,$ – последовательность независимых случайных величин таких, что

$\xi_i \stackrel{d}{=} \xi$ при всех $i$ (символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению), то

$$p_j^{*k} = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k = j)$$
$$= \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=j} \mathbf{P}(\xi_1 = j_1, \xi_2 = j_2, \dots, \xi_k = j_k).$$

Определение. *Ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона* называется цепь Маркова $\{Z(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ на множестве $\mathscr{N}_0$ с начальным распределением вероятностей $P_0(k) = \mathbf{P}\big(Z(0) = k\big)$ и переходными вероятностями

$$P_{kj} = \mathbf{P}\big(Z(n+1) = j \mid Z(n) = k\big) = \begin{cases} p_j^{*k}, & \text{если } k \geqslant 1,\ j \geqslant 0; \\ \delta_{0j}, & \text{если } k = 0,\ j \geqslant 0. \end{cases}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что начальное распределение имеет вид

$$P_0(1) = \mathbf{P}\big(Z(0) = 1\big) = 1, \qquad P_0(k) = 0, \quad k \neq 1.$$

**2.3. Интерпретация ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона в терминах популяций частиц.** Весьма удобной интерпретацией формального определения ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона является их описание в терминах эволюции популяции частиц. В этой популяции первоначально имеется одна частица: $Z(0) = 1$. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число потомков $\xi$ в соответствии с распределением

$$\mathbf{P}(\xi = m) = p_m, \quad m = 0, 1, \dots .$$

Каждая из новорожденных частиц также имеет единичную продолжительность жизни и в конце ее производит (независимо от остальных частиц) случайное число потомков в соответствии с вероятностным распределением $\{p_m,\ m = 0, 1, \dots\}$. Таким образом, при $n \geqslant 0$

$$Z(n+1) = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)},$$

где $\xi_i^{(n)}$ – число потомков $i$-й частицы $n$-го поколения ($i = 1, 2, \dots, Z(n)$), причем $\xi_i^{(n)} \stackrel{d}{=} \xi$ при всех $i = 1, 2, \dots$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ и независимы.

**2.4. Вероятностное пространство.** В дальнейшем нам понадобится детальное описание вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, на котором будет задан процесс Гальтона–Ватсона. С этой целью мы припишем частицам процесса метки следующим образом. Первоначальная частица будет обозначаться символом (меткой) (0), ее $i$-й потомок – символом $(0i)$, частицы $n$-го поколения будут нумероваться наборами

$$(0i_1 i_2 \dots i_n).$$

Пусть, далее, $\xi_{0i_1i_2\dots i_n}$ – количество потомков частицы $(0i_1i_2\dots i_n)$. В этих обозначениях *история семейства* (реализация эволюции популяции) имеет вид

$$\omega = (\xi_0, \xi_{01}, \xi_{02}, \dots).$$

Объединение всех возможных историй семейств и является нашим пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, а *$\sigma$-алгебра* $\mathscr{F}$ порождается цилиндрическими подмножествами пространства $\Omega$.

*Поколения.* Для каждого $\omega \in \Omega$ введем последовательность $I_0(\omega), I_1(\omega), \dots, I_n(\omega), \dots$, в которой $I_n(\omega)$ обозначает множество частиц, образующих $n$-е поколение. Элементы этой последовательности задаются следующим образом.

$$I_0(\omega) = \{(0)\}, \qquad I_1(\omega) = \{(01), \dots, (0\xi_0)\},$$

а $I_n(\omega)$ состоит из всех последовательностей $(0i_1\dots i_n)$ таких, что

$$(0i_1\dots i_{n-1}) \in I_{n-1}(\omega)$$

и $\xi_{0i_1\dots i_{n-1}}(\omega) \geqslant i_n$. Если $\xi_{0i_1\dots i_{n-1}}(\omega) = 0$, то, естественно, $I_r(\omega) = \varnothing$ для всех $r = n, n+1, \dots$ .

С каждой историей семейства можно связать плоское корневое ориентированное дерево с вершинами, помеченными символами

$$(0), (01), \dots, (0\xi_0), \dots, (011), (012), \dots, (021), \dots,$$

и ребрами, направленными от корня. Корню дерева сопоставлен символ (0), что соответствует первоначальной частице, вершины, которые соединены с корнем, помечены символами $(01), \dots, (0\xi_0)$ (что соответствует частицам первого поколения) и т.д.

*Вероятностная мера* $\mathbf{P}$ задается на цилиндрических подмножествах, являющихся элементами $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}$, при помощи соотношений

$$\mathbf{P}(\xi_{0i_1\ldots i_n} = k) = p_k,$$

и

$$\mathbf{P}\big((\xi_0, \xi_{01}, \xi_{02}, \ldots, \xi_{0i_1\ldots i_n}) = (k_0, k_{01}, k_{02}, \ldots, k_{0i_1\ldots i_n})\big)$$
$$= p_{k_0} p_{k_{01}} \cdots p_{k_{0i_1\ldots i_n}}$$

и естественным образом продолжается на все элементы $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}$.

Описанная конструкция и задает *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, на котором определен ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона.

**2.5. Производящие функции.** Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\{Z(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть

$$f(s) := \mathbf{E}\big[s^{\xi}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \qquad |s| \leqslant 1, \qquad (1)$$

– вероятностная производящая функция, задающая распределение случайной величины $\xi$ числа непосредственных потомков частиц этого процесса. Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}\xi = f'(1), \qquad \mathbf{E}\xi(\xi - 1) = f''(1),$$

и

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \mathbf{E}\xi(\xi - 1) + \mathbf{E}\xi - (\mathbf{E}\xi)^2 = f''(1) + f'(1) - \big(f'(1)\big)^2.$$

Пример 1. Пусть число непосредственных потомков частиц в ветвящемся процессе имеет геометрическое распределение, задаваемое для $q + p = 1$, $p > 0, q > 0$, производящей функцией

$$f(s) = \mathbf{E}\big[s^{\xi}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} q p^k s^k$$
$$= \frac{q}{1 - ps} = \frac{q}{1 - p + p(1 - s)} = \frac{q}{q + p(1 - s)} = \frac{1}{1 + A(1 - s)},$$

где $A = p/q$.

Нетрудно проверить, что $\mathbf{E}\xi = f'(1) = A$. Этот факт будет полезен нам в дальнейшем.

Итерациями производящей функции $f(s)$ называется последовательность

$$f_0(s) := s, \qquad f_{n+1}(s) := f_n\bigl(f(s)\bigr), \quad n \geqslant 0.$$

В биологических приложениях весьма часто используется производящая функция

$$f(s) = q + ps^2, \qquad q > 0, \quad p > 0, \quad q + p = 1.$$

Однако даже в этой простой ситуации вычисление итераций является непростой задачей.

Полезность итераций производящих функций в теории ветвящихся процессов во многом определяется тем, что если $Z(0) = 1$, то

$$\begin{aligned} F(n+1, s) := \mathbf{E}s^{Z(n+1)} &= \mathbf{E}\bigl[\,\mathbf{E}\bigl[s^{Z(n+1)} \mid Z(n)\bigr]\bigr] \\ &= \mathbf{E}\bigl[\,\mathbf{E}\bigl[s^{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)}} \mid Z(n)\bigr]\bigr] = \mathbf{E}\bigl(\mathbf{E}s^{\xi}\bigr)^{Z(n)} \\ &= \mathbf{E}\bigl(f(s)\bigr)^{Z(n)} = F\bigl(n, f(s)\bigr) = \dots = f_{n+1}(s). \end{aligned}$$

**2.6. Классификация.** Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона разбиваются на три класса в соответствии со значением параметра

$$A := \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}[\,Z(1) \mid Z(0) = 1] = f'(1).$$

Процесс Гальтона–Ватсона называется докритическим, если $A < 1$, критическим, если $A = 1$, и надкритическим, если $A > 1$.

Математическое ожидание и дисперсия числа индивидуумов $n$-го поколения можно вычислить, опираясь на формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z(n) &= \bigl(\mathbf{E}s^{Z(n)}\bigr)'\big|_{s=1} = \bigl(f_n(s)\bigr)'\big|_{s=1} \\ &= f'\bigl(f_{n-1}(s)\bigr)\bigl(f_{n-1}(s)\bigr)'\big|_{s=1} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} f'\bigl(f_k(s)\bigr)\big|_{s=1} = \bigl(f'(1)\bigr)^n = A^n \end{aligned}$$

и

$$f_n''(s) = f'\bigl(f_{n-1}(s)\bigr) f_{n-1}''(s) + f''\bigl(f_{n-1}(s)\bigr)\bigl(f_{n-1}'(s)\bigr)^2, \qquad (2)$$

что приводит к равенству

$$\mathbf{E}\big[\,Z(n)\big(Z(n)-1\big)\big] = A\mathbf{E}\big[\,Z(n-1)\big(Z(n-1)-1\big)\big] + f''(1)A^{2(n-1)}.$$

Таким образом, если $Z(0)=1$, то

$$\mathbf{E}\big[\,Z(n)\big(Z(n)-1\big)\big] = \sum_{k=1}^{n} f''(1)A^{2(n-k)}A^{k-1} = f''(1)A^{n-1}\sum_{k=1}^{n} A^{n-k}.$$

После очевидных упрощений, мы получим

$$\mathbf{E}\big[\,Z(n)\big(Z(n)-1\big)\big] = f''(1)\,\frac{A^{n-1}(A^n-1)}{A-1}\,,$$

при $A \neq 1$, и

$$\mathbf{E}\big[\,Z(n)\big(Z(n)-1\big)\big] = f''(1)n$$

в критическом случае. Следовательно, при $A \neq 1$

$$\mathbf{E}[\,Z^2(n)] = f''(1)\,\frac{A^{n-1}(A^n-1)}{A-1} + A^n, \tag{3}$$

$$\mathbf{D}[\,Z(n)] = f''(1)\,\frac{A^{n-1}(A^n-1)}{A-1} + A^n - A^{2n}. \tag{4}$$

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\sigma^2 = \mathbf{D}[\xi] = f''(1) - A(A-1)$$

и предположение $Z(0)=1$, нетрудно вывести, что

$$\mathbf{D}[\,Z(n)] = \begin{cases} \sigma^2\,\dfrac{A^{n-1}(A^n-1)}{A-1}\,, & \text{если } A \neq 1; \\ \sigma^2 n, & \text{если } A = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Коэффициентом вариации $CV_n$ популяции в момент $n$ называется величина

$$CV_n = \frac{\sqrt{\mathbf{D}[\,Z(n)]}}{\mathbf{E}Z(n)}\,.$$

Для надкритических процессов коэффициент вариации при больших $n$ удовлетворяет соотношению

$$CV_n = \frac{\sigma}{\sqrt{A(A-1)}}\,\sqrt{1-A^{-n}} \approx \frac{\sqrt{\mathbf{D}[\,Z(1)]}}{\mathbf{E}Z(1)}$$

и быстро стабилизируется. Для критических процессов

$$CV_n = \sigma\sqrt{n}\,,$$

а для докритических процессов

$$CV_n = A^{-n/2}\sigma\sqrt{\frac{(1-A^n)}{A(1-A)}}\,.$$

Полученные соотношения указывают на нестабильность критических и докритических процессов Гальтона–Ватсона.

**2.7. Вычисление итераций для чисто геометрического закона распределения числа потомков.** Рассмотрим производящую функцию

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} qp^k s^k = \frac{1}{1+A(1-s)}\,.$$

Ясно, что $f'(1) = A = p/q$. Далее, несложно видеть, что

$$1 - f(s) = \frac{A(1-s)}{1+A(1-s)}$$

и

$$\frac{1}{1-f(s)} - \frac{1}{A(1-s)} = \frac{A(1-s)+1}{A(1-s)} - \frac{1}{A(1-s)} = 1.$$

Таким образом, для итераций $f_n(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, справедлива цепочка равенств

$$\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{A(1-f_{n-1}(s))} = \frac{1}{1-f(f_{n-1}(s))} - \frac{1}{A(1-f_{n-1}(s))} = 1,$$

т.е.

$$\frac{1}{1-f_n(s)} = 1 + \frac{1}{A(1-f_{n-1}(s))} = 1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2(1-f_{n-2}(s))} = \ldots\,.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{1-f_n(s)} = 1 + (1/A) + (1/A)^2 + \cdots + (1/A)^{n-1} + 1/A^n(1-s)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A^n-1}{A^{n-1}(A-1)} + \dfrac{1}{A^n(1-s)}\,, & \text{если } A \neq 1; \\[2ex] n + \dfrac{1}{1-s}\,, & \text{если } A = 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $A \neq 1$, то

$$1 - f_n(s) = \frac{A^n(A-1)(1-s)}{A(A^n-1)(1-s) + A - 1}\,. \tag{6}$$

Если же $A = 1$, то

$$1 - f_n(s) = \frac{1}{n + (1-s)^{-1}}\,.$$

При помощи полученных равенств нетрудно вычислить вероятность выживания процесса по крайней мере в течение $n$ поколений: если $A = p/q \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big(Z(n) > 0\big) = 1 - f_n(0) &= \frac{A^n(A-1)}{A(A^n-1) + A - 1} \\ &= \frac{A^{n+1}(1-1/A)}{A^{n+1}-1} = \frac{(p/q)^n(1-p/q)}{1-(p/q)^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

Если же $A = 1$, то

$$\mathbf{P}\big(Z(n) > 0\big) = \frac{1}{n+1}\,.$$

Отметим, что при $A > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(n) > 0\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{A^{n+1}(1-1/A)}{A^{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{A}\,.$$

**2.8. Элементарные свойства производящих функций.** Пусть

$$f(s) = \mathbf{E}s^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

– вероятностная производящая функция. В дальнейшем, чтобы исключить тривиальные случаи, предположим, что $p_0 + p_1 < 1$. При этом условии

1) $f(s)$ строго выпуклая функция на $[0,1]$: $f'(s) > 0$, $f''(s) > 0$;
2) $f(0) = p_0 = \mathbf{P}\big(Z(1) = 0 \mid Z(0) = 1\big)$;
3) если $A \leqslant 1$, то $f(s) > s$, $s \in [0,1)$, так как $f(1) = 1$ и $f'(s) - 1 < 0$ при $s \in [0,1)$;
4) если $A > 1$, то уравнение $f(s) = s$ имеет единственный корень $r$ на полуинтервале $[0,1)$, причем $f(s) > s$ при $s < r$ и $f(s) < s$ при $s > r$. Справедливость этих неравенств вытекает из оценок $f'(0) - 1 < 0$, $f'(1-) - 1 = A - 1 > 0$ и $f''(s) > 0$, $s \in (0,1]$.

**2.9. Вероятность вырождения.** Как мы уже знаем,

$$f_n(s) = \mathbf{E}s^{Z(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\big(Z(n) = k\big)s^k.$$

Поэтому вероятность вырождения процесса $\mathbf{P}\big(Z(n) = 0\big) = f_n(0)$. Так как справедлива импликация

$$\{Z(n) = 0\} \quad \Longrightarrow \quad \{Z(n+1) = 0\},$$

то

$$f_n(0) = \mathbf{P}\big(Z(n) = 0\big) \leqslant \mathbf{P}\big(Z(n+1) = 0\big) = f_{n+1}(0).$$

Отсюда следует, что последовательность

$$P(n) = \mathbf{P}\big(Z(n) = 0\big) = f_n(0), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

монотонно возрастая стремится к вероятности вырождения процесса, которую мы обозначим буквой $P$:

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = P.$$

Положим

$$r^* = \begin{cases} 1, & \text{если } A \leqslant 1; \\ r, & \text{если } A > 1. \end{cases}$$

Так как $f(0) < r^* = f(r^*)$, то

$$P(n) = f_n(0) = f\big(f_{n-1}(0)\big) = f\big(P(n-1)\big) < f(r^*) = r^*.$$

Отсюда, в силу непрерывности функции $f(s)$ следует, что $P = f(P)$. Значит, $P = r^*$.

Таким образом, докритические и критические процессы вырождаются с вероятностью 1, в то время как вероятность вырождения надкритического процесса $P$ меньше 1 и является наименьшим неотрицательным корнем уравнения $f(s) = s$, $s \in [0, 1)$.

Пример 2. Для бинарного расщепления частиц, т.е. в случае, когда в конце жизни частица либо умирает с вероятностью $q$, либо производит двух потомков с вероятностью $p$, для нахождения вероятности вырождения необходимо решить уравнение $q+p\,x^2 = x$. В результате получаем $P = q/p$, если $p > 1/2$, и $P = 1$ в противном случае.

Пример 3. Для чисто геометрического закона распределения числа потомков решение уравнения

$$\frac{q}{1 - xp} = x$$

дает такой же результат: $P = q/p$ при $p > 1/2$, и $P = 1$ при $p \leqslant 1/2$. В этом случае $A = p/q$, и, следовательно, $P = 1/A$.

В частности, в процессе Гальтона–Ватсона с чисто геометрическим законом распределения и математическим ожиданием числа потомков $A = 1.2$ удвоение математического ожидания числа частиц происходит за четыре поколения (если $Z(0) = N$, то $\mathbf{E}[\,Z(4)] = N(1.2)^4 = N \times 2.07$), в то время как вероятность вырождения отдельного семейства больше 80 % ($P = 1/A = 1/1.2 = 0.83$, если $Z(0) = 1$).

## 3. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона и простое случайное блуждание

**3.1. Ветвящийся процесс.** Мы снова рассмотрим ветвящийся процесс $\{Z(n),\ n \geqslant 0\}$ с чисто геометрическим законом распределения числа потомков:

$$f(s) = \mathbf{E}s^{\xi} = \frac{q}{1-ps}\,, \qquad p+q=1, \quad p\,q>0. \tag{7}$$

Как мы уже знаем, вероятность вырождения такого процесса равна

$$P = \min\left\{\frac{q}{p}\,, 1\right\}.$$

Отметим также, что

$$Z(n+1) = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z(n)}^{(n)}, \tag{8}$$

где $\xi_i^{(n)}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, $\xi_i^{(n)} \stackrel{d}{=} \xi$, причем $\mathbf{P}(\xi = j) = qp^j$, $j = 0, 1, \dots$ . Кроме того, было показано, что в случае $p \neq q$

$$\mathbf{P}\big(Z(n) > 0\big) = \frac{(p/q)^n(1-p/q)}{1-(p/q)^{n+1}}\,, \tag{9}$$

а при $p = q = 1/2$

$$\mathbf{P}\big(Z(n) > 0\big) = \frac{1}{n+1}\,. \tag{10}$$

**3.2. Простое случайное блуждание.** Рассмотрим теперь простое случайное блуждание

$$S_0 = m, \qquad S_k = S_0 + X_1 + \dots + X_k,$$

где $m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество всех целых чисел, а

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = p, \qquad \mathbf{P}(X_i = -1) = 1-p = q, \quad p\,q > 0.$$

Зафиксируем число $n \geqslant 1$ и предположим, что блуждание $\{S_k,\ k \geqslant 0\}$ стартует из точки $S_0 = m \in [-1, n]$ и останавливается в тот момент, когда оно впервые окажется либо в точке $-1$, либо в точке $n$. Вычислим вероятность того, что блуждание закончится в точке $n$.

Пусть

$$\mathbf{P}_m(N) = \mathbf{P}(\text{блуждание стартует из точки } m \text{ и останавливается в точке } n \text{ внутри временного интервала } [0, N\,]).$$

$$\mathbf{p}_m(N) = \mathbf{P}(\text{блуждание стартует из точки } m \text{ и останавливается в точке } n \text{ на } N\text{-м шаге}).$$

Ясно, что при $0 \leqslant m \leqslant n-1$

$$\mathbf{P}_m(N) = p\,\mathbf{P}_{m+1}(N-1) + q\,\mathbf{P}_{m-1}(N-1),$$

в то время как

$$\mathbf{P}_{-1}(N) = 0, \qquad \mathbf{P}_n(N) = 1.$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{P}_m(N) = \mathbf{P}_m(N-1) + \mathbf{p}_m(N) \geqslant \mathbf{P}_m(N-1). \tag{11}$$

Поэтому при каждом $m = -1, 0, 1, \ldots, n$ существует предел

$$P_m = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}_m(N).$$

Используя этот факт и устремляя $N$ к бесконечности в обеих частях равенства (11), приходим к уравнениям

$$\mathbf{P}_m = p\,\mathbf{P}_{m+1} + q\,\mathbf{P}_{m-1}, \qquad 0 \leqslant m \leqslant n-1,$$

с граничными условиями

$$\mathbf{P}_{-1} = 0, \qquad \mathbf{P}_n = 1.$$

Решение этой системы уравнений можно получить методом, похожим на тот, который применяется при решении линейных дифференциальных уравнений. Для этого необходимо составить характеристическое уравнение

$$\lambda^m = p\lambda^{m+1} + q\lambda^{m-1}.$$

Откуда получаем

$$\lambda = p\lambda^2 + q.$$

Решения последнего уравнения имеют вид

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{q}{p}\,.$$

Таким образом, при $p \neq q$ общее решение интересующей нас системы имеет вид

$$\mathbf{P}_m = a\lambda_1^m + b\lambda_2^m = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^m.$$

Отсюда, с учетом граничных условий, находим

$$a + b\left(\frac{q}{p}\right)^{-1} = 0 \quad \text{и} \quad a + b\left(\frac{q}{p}\right)^n = 1.$$

Следовательно,

$$b\left(-\frac{p}{q} + \left(\frac{q}{p}\right)^n\right) = 1,$$

что дает

$$b = \frac{q/p}{(q/p)^{n+1} - 1}\,, \qquad a = -\frac{1}{(q/p)^{n+1} - 1}\,.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_m = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^m &= -\frac{1}{(q/p)^{n+1} - 1} + \frac{(q/p)^{m+1}}{(q/p)^{n+1} - 1}\\ &= \frac{(q/p)^{m+1} - 1}{(q/p)^{n+1} - 1} = \frac{(p/q)^n((p/q)^{-m} - p/q)}{1 - (p/q)^{n+1}}.\end{aligned}$$

В частности,

$$\mathbf{P}_0 = \frac{(p/q)^n(1 - p/q)}{1 - (p/q)^{n+1}}. \tag{12}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0 = \max\left\{0, 1 - \frac{q}{p}\right\}. \tag{13}$$

При $p = q$ общее решение имеет вид

$$\mathbf{P}_m = a + b\,m.$$

Учитывая граничные условия, получаем

$$a - b = 0, \qquad a + b\,n = 1.$$

Отсюда

$$b = \frac{1}{n+1} = a.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_m = \frac{m+1}{n+1}\,.$$

В частности,

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{n+1}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0 = 0. \tag{14}$$

Заметим, что величина $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0$ есть вероятность того, что случайное блуждание, стартующее из нуля *никогда* не попадет в точку $-1$. Таким образом, если $S_k^*$ – простое случайное блуждание, стартующее из нуля и остановленное в момент $\theta_{-1} := \min\{k \geqslant 1 \colon S_k = -1\}$, т.е. в момент времени, когда оно в первый раз примет значение $-1$, то

$$\mathbf{P}(\theta_{-1} < \infty) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0 = \min\left\{\frac{q}{p}, 1\right\}.$$

Покажем теперь, что с простым случайным блужданием можно связать некоторый ветвящийся процесс. С этой целью обозначим

$$Y(n) := \{\text{количество } k \in [0,\infty) \text{ таких, что } S_k^* = n,\ S_{k+1}^* = n-1\}. \tag{15}$$

Будем предполагать, что $p \leqslant q$. Нетрудно понять, что тогда $Y(0) = 1$, а случайная величина

$$Y(1) := \{\text{количество } k \in [0,\infty) \text{ таких, что } S_k^* = 1,\ S_{k+1}^* = 0\}$$

имеет следующее распределение:

$$\mathbf{P}\big(Y(1) = 0\big) = q, \qquad \mathbf{P}\big(Y(1) = 1\big) = p\,q$$

и, вообще, для любого $j \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}\big(Y(1) = j\big) = \mathbf{P}(\eta = j) = qp^j,$$

где

$$\mathbf{E}s^\eta = \frac{q}{1-ps}\,. \tag{16}$$

Пусть теперь $S_m = n$ для некоторого $m = 1, 2, \dots,\ m \geqslant n$, и пусть $\theta_{n-1} = \min\{k \geqslant 1\colon S_{m+k} = n-1\}$. В силу однородности простого случайного блуждания число шагов с уровня $n+1$ на уровень $n$ в промежутке $[m, m+\theta_{n-1}]$ случайно и имеет геометрическое распределение с параметром $p$. Отсюда следует, что если $Y(n)$ задается соотношением (15), т.е. равно числу переходов исходного случайного блуждания с уровня $n$ на уровень $n-1$, то

$$Y(n+1) = \eta_1^{(n)} + \dots + \eta_{Y(n)}^{(n)},$$

где случайные величины $\eta_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены, причем $\eta_i^{(n)} \overset{d}{=} \eta$.

Таким образом, мы получим такой же ветвящийся процесс, как и в (8).

Из приведенной выше конструкции ясно, что при $p \leqslant q$ событие, состоящее в том, что блуждание окажется в точке $n$ ранее, чем в точке $-1$, соответствует событию $\{Z(n) > 0\}$ для ветвящегося процесса с чисто геометрической производящей функцией числа потомков. Этим и объясняется причина совпадения формул (9) и (10) с формулами (12) и (14), соответственно.

Заметим, наконец, что если $p \leqslant q$, то ветвящийся процесс с производящей функцией (7) вырождается с вероятностью единица. Если теперь $\tau$ – момент вырождения процесса, то общее число частиц, родившихся в процесса за время эволюции, равно

$$T := Z(0) + Z(1) + \dots + Z(\tau - 1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\theta = \min\{k\colon S_k = -1\} = 2\,T - 1.$$

# 4. Предельная теорема для распределения числа частиц в надкритических процессах Гальтона–Ватсона

Мы знаем, что математическое ожидание числа частиц $n$-го поколения в надкритических процессах Гальтона–Ватсона растет как $A^n$, причем коэффициент вариации $CV_n = \sqrt{\mathbf{D}Z(n)}/\mathbf{E}Z(n)$ стабилизируется при стремлении $n$ к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} CV_n = \frac{\sqrt{\mathbf{D}Z(1)}}{\mathbf{E}Z(1)}\,.$$

Это позволяет надеяться на то, что и размер популяции $Z(n)$ в момент $n$, нормированный математическим ожиданием $A^n$, также будет в определенном смысле сходиться при $n \to \infty$ к некоторой случайной величине. Результаты данного раздела подтверждают эту гипотезу.

**4.1. Некоторые факты о сходимости случайных величин.** В данном разделе собраны необходимые для дальнейшего изложения сведения о видах сходимости последовательностей случайных величин. Будем предполагать, что эти величины заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Для обозначения элементов пространства элементарных событий $\Omega$ мы будем использовать символ $\omega$.

Напомним несколько определений.

Определение 1. Скажем, что последовательность случайных величин $\eta_n = \eta_n(\omega)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *сходится почти наверное* к случайной величине $\eta = \eta(\omega)$ при $n \to \infty$, если

$$\mathbf{P}\big(\omega \in \Omega\colon \eta_n(\omega) \nrightarrow \eta(\omega)\big) = 0.$$

Определение 2. Скажем, что последовательность случайных величин $\eta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *сходится в среднем квадратическом* к случайной величине $\eta$ при $n \to \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\eta_n - \eta)^2 = 0.$$

Определение 3. Неслучайная последовательность $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant n_0$

$$\sup_{k\geqslant 0} |x_{n+k} - x_n| \leqslant \varepsilon.$$

Как известно, в этом случае существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Определение 4. Последовательность случайных величин $\eta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется *фундаментальной с вероятностью* 1, если последовательность $\{\eta_n(\omega)\}_{n\geqslant 0}$ фундаментальна для почти всех $\omega \in \Omega$.

Определение 5. Последовательность случайных величин $\eta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется *фундаментальной в среднем квадратическом*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant n_0$

$$\sup_{k\geqslant 0} \mathbf{E}(\eta_{n+k} - \eta_n)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 1. *Последовательность случайных величин $\{\eta_n\}_{n\geqslant 0}$ сходится в среднем квадратическом к некоторой случайной величине $\eta$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\eta_n\}_{n\geqslant 0}$ является фундаментальной в среднем квадратическом.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге А. Н. Ширяева [9, гл. 2, § 10].

В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство.

Лемма 1. *Для любых случайных величин $\eta$ и $\zeta$ с конечным вторым моментом*

$$\left(\sqrt{\mathbf{E}\eta^2} - \sqrt{\mathbf{E}\zeta^2}\,\right)^2 \leqslant \mathbf{E}(\eta - \zeta)^2.$$

Доказательство. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\sqrt{\mathbf{E}\eta^2}\,\sqrt{\mathbf{E}\zeta^2} \geqslant \mathbf{E}\eta\zeta.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\eta^2 - 2\sqrt{\mathbf{E}\eta^2}\,\sqrt{\mathbf{E}\zeta^2} + \mathbf{E}\zeta^2 \leqslant \mathbf{E}\eta^2 - 2\mathbf{E}\eta\zeta + \mathbf{E}\zeta^2.$$

Отсюда

$$\left(\sqrt{\mathbf{E}\eta^2} - \sqrt{\mathbf{E}\zeta^2}\,\right)^2 \leqslant \mathbf{E}(\eta - \zeta)^2.$$

Лемма доказана.

**4.2. Предельная теорема.** Теперь мы можем сформулировать основную теорему данного раздела.

Теорема 2. *Если $A > 1$ и $\sigma^2 < \infty$, то существует случайная величина $W$ такая, что при $n \to \infty$*

$$W_n := \frac{Z(n)}{A^n} \to W \quad \textit{почти наверное},$$

*причем*

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(W - W_n)^2 = 0$,
2. $\mathbf{E}W = 1, \qquad \mathbf{D}W = \sigma^2/(A^2 - A)$,
3. $\mathbf{P}(W = 0) = P = \mathbf{P}\big(Z(n) = 0$ *при некотором* $n\big)$.

Доказательство. Ясно, что

$$\mathbf{E}W_n = \mathbf{E}\left[\frac{Z(n)}{A^n}\right] = \frac{1}{A^n}\mathbf{E}[\,Z(n)] = 1$$

и

$$\mathbf{E}[\,W_{n+k} \mid W_n] = \mathbf{E}\left[\frac{Z(n+k)}{A^{n+k}} \;\Big|\; \frac{Z(n)}{A^n}\right] = \frac{1}{A^{n+k}}\mathbf{E}[\,Z(n+k) \mid Z(n)]$$
$$= \frac{1}{A^{n+k}}\mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{Z(n)} Z_j^*(k,n) \mid Z(n)\right], \tag{17}$$

где $Z_j^*(k,n)$ $(j = 1, 2, \ldots, Z(n))$ – размер семейства в момент $n+k$, порожденного $j$-м индивидуумом, существовавшим в популяции в момент $n$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{A^{n+k}}\mathbf{E}\left[\sum_{j=1}^{Z(n)} Z_j^*(k,n) \mid Z(n)\right] = \frac{1}{A^{n+k}} Z(n)A^k = \frac{Z(n)}{A^n} = W_n. \tag{18}$$

Поскольку

$$\mathbf{E}[\,Z^2(n)] = f''(1)\frac{A^{n-1}(A^n - 1)}{A - 1} + A^n, \tag{19}$$

то соотношения (17)–(19) влекут

$$\mathbf{E}[\,W_{n+k}W_n] = \mathbf{E}[\,W_n^2] = f''(1)\frac{(1 - A^{-n})}{A(A-1)} + A^{-n}$$
$$= \frac{f''(1)}{A(A-1)} - \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+1}(A-1)}\,.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(W_{n+k} - W_n)^2 &= \mathbf{E}W_{n+k}^2 + \mathbf{E}W_n^2 - 2\mathbf{E}[\,W_{n+k}W_n] \\
&= \frac{f''(1)}{A(A-1)} - \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+k+1}(A-1)} \\
&\qquad + \frac{f''(1)}{A(A-1)} - \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+1}(A-1)} \\
&\qquad - 2\left(\frac{f''(1)}{A(A-1)} - \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+1}(A-1)}\right) \\
&= \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+1}(A-1)} - \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+k+1}(A-1)} \to 0
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $k \geqslant 0$.

Следовательно, существует случайная величина $W$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(W - W_n)^2 = 0.$$

Таким образом, последовательность $W_n$ сходится к $W$ в среднем квадратическом. В частности, в силу леммы 1

$$\left(\sqrt{\mathbf{E}W^2} - \sqrt{\mathbf{E}W_n^2}\,\right)^2 \leqslant \mathbf{E}(W - W_n)^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}W_n^2 \to \mathbf{E}W^2, \qquad n \to \infty.$$

Кроме того,

$$\big(\mathbf{E}(W - W_n)\big)^2 \leqslant \mathbf{E}(W - W_n)^2 \to 0,$$

что в свою очередь влечет

$$\mathbf{E}W = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}W_n = 1$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}W &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{D}W_n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}W_n^2 - 1 \\
&= \frac{f''(1)}{A(A-1)} - 1 = \frac{\sigma^2}{A^2 - A}\,.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{E}(W - W_n)^2 = \frac{f''(1) - A(A-1)}{A^{n+1}(A-1)}$$

и, таким образом,

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(W - W_n)^2\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}(W - W_n)^2 < \infty.$$

Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(W - W_n)^2$$

сходится с вероятностью 1. Поэтому

$$\mathbf{P}(W_n \to W, n \to \infty) = 1.$$

Покажем теперь, что величина $d = \mathbf{P}(W = 0)$ совпадает с вероятностью $P = \mathbf{P}\big(Z(n) = 0$ для некоторого $n \geqslant 0\big)$. Поскольку $\mathbf{E}W = 1$, то $d < 1$ и

$$\begin{aligned} d &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\big(W = 0 \mid Z(1) = k\big)\mathbf{P}\big(Z(1) = k\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}^k\big(W = 0 \mid Z(0) = 1\big)\mathbf{P}\big(Z(1) = k\big) = f(d). \end{aligned}$$

Поскольку $P$ – наименьший неотрицательный корень уравнения $f(s) = s$, то из предыдущего соотношения следует, что $d = P$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $A > 1$, $\sigma^2 < \infty$ и $\varphi(\lambda) := \mathbf{E}\big[e^{-\lambda W}\big]$ – преобразование Лапласа случайной величины $W$. Тогда*

$$\varphi(\lambda) = f\left(\varphi\left(\frac{\lambda}{A}\right)\right).$$

Доказательство. Мы знаем, что при любом $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F(n,s) &= \mathbf{E}\big[s^{Z(n)} \mid Z(0) = 1\big] = \mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[s^{Z(n)} \mid Z(1); Z(0) = 1\big]\big] \\ &= \mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[s^{Z_1^*(n-1) + Z_2^*(n-1) + \cdots + Z_{Z(1)}^*(n-1)} \mid Z(1); Z(0) = 1\big]\big] \\ &= \mathbf{E}\big[\big(F(n-1,s)\big)^{Z(1)} \mid Z(0) = 1\big] = f\big(F(n-1,s)\big), \end{aligned}$$

где $Z_i^*(n-1)$ – количество частиц в момент $n$ в популяции, порожденной $i$-й частицей первого поколения. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{-\lambda W_n} &= \mathbf{E}e^{-\lambda Z(n)A^{-n}} = F(n, e^{-\lambda A^{-n}}) \\ &= f\big(\mathbf{E}\big[e^{-\lambda A^{-n}Z(n-1)}\big]\big) = f\big(\mathbf{E}\big[e^{-\lambda A^{-1}W_{n-1}}\big]\big).\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем соотношении, обозначая через $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{-\lambda W}$ преобразование Лапласа случайной величины $W$ и используя непрерывность функции $f(s)$, $s \in [0,1]$, получаем

$$\varphi(\lambda) = f\left(\varphi\left(\frac{\lambda}{A}\right)\right). \tag{20}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *В надкритическом ветвящемся процессе с дисперсией $\sigma^2 > 0$ распределение случайной величины $W$ имеет больше одной точки роста на полуоси* $(0, \infty)$.

Доказательство. Предположим, что следствие не верно. Тогда случайная величина $W$ может принимать не более двух значений, одно из которых 0 (с вероятностью $P < 1$), другое, скажем, $C > 0$ (с вероятностью $1 - P$). Следовательно, преобразование Лапласа $\varphi(\lambda)$ предельного распределения можно записать в виде

$$\varphi(\lambda) = P + (1-P)e^{-\lambda C}, \qquad \lambda \geqslant 0, \quad C > 0.$$

Положим $s := \varphi(A^{-1}\lambda)$. Тогда

$$e^{-\lambda C} = \left(\frac{s-P}{1-P}\right)^A.$$

Отсюда и из теоремы 3 выводим, что

$$f(s) = \varphi(\lambda) = P + (1-P)\left(\frac{s-P}{1-P}\right)^A. \tag{21}$$

Если теперь $P = 0$, то $f(s) = s^A$, что для вероятностной производящей функции числа непосредственных потомков $\xi$ одной частицы возможно лишь при целом $A > 1$. Но в этом случае $\mathbf{D}\xi = 0$, что противоречит условиям следствия.

Если $P \in (0,1)$, то при целом значении $A$ правая часть (21) будет содержать (после возведения в степень) отрицательные коэффициенты при положительных степенях переменной $z$, что для вероятностной производящей функции невозможно, а для нецелых $A > 1$ мнимая часть функции

$$f(s) = P + e^{2\pi i A}(1-P)\left|\frac{s-P}{1-P}\right|^A$$

при $s \in (0, P)$ равна

$$(1-P)\left|\frac{s-P}{1-P}\right|^A \sin 2\pi A \tag{22}$$

и, очевидно, отлична от нуля, что невозможно для вероятностной производящей функции при этих значениях $s$.

Следствие доказано.

Пример 4. Если

$$f(s) = \frac{q}{1-ps} = \frac{1}{1+A(1-s)}\,,$$

где $A = p/q > 1$, то

$$f_n(s) = 1 - \frac{A^n(A-1)(1-s)}{A(A^n-1)(1-s)+A-1} \tag{23}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{E}e^{-\lambda W_n} &= 1 - \frac{A^n(A-1)(1-e^{-\lambda A^{-n}})}{A(A^n-1)(1-e^{-\lambda A^{-n}})+A-1}\\ &\to 1 - \frac{\lambda(A-1)}{\lambda A + A - 1}\\ &= \frac{1}{A} + \left(1-\frac{1}{A}\right)\frac{1-1/A}{\lambda+1-1/A} = \mathbf{E}e^{-\lambda W}.\end{aligned}$$

Обращая преобразование Лапласа предельной величины, находим

$$\mathbf{P}(W \leqslant x) = \frac{1}{A} + \left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-e^{-(1-1/A)x}\right), \qquad x \geqslant 0.$$

## 5. Докритические процессы

**5.1. Асимптотика вероятности невырождения докритических процессов.** Исследуя свойства производящих функций, мы установили, что вероятность вырождения докритических и критических процессов равна 1. Естественно поставить вопрос о том, с какой скоростью приближается вероятность $\mathbf{P}\big(Z(n)=0\big)$ к 1, или, другими словами, как быстро стремится к нулю вероятность невырождения процесса $\mathbf{P}\big(Z(n)>0\big)$ при $n\to\infty$. В данном разделе мы получим ответ на этот вопрос для докритических процессов.

Докажем сначала следующее неравенство.

Лемма 2 (Неравенство Маркова). *Если $\eta$ – неотрицательная случайная величина, отличная от тождественного нуля, то для любого $x>0$*

$$\mathbf{P}(\eta\geqslant x)\leqslant x^{-1}\mathbf{E}\eta.$$

Доказательство. Для $x>0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta\geqslant x)&=\mathbf{E}I(\eta\geqslant x)=x^{-1}\mathbf{E}xI(\eta\geqslant x)\\&\leqslant x^{-1}\mathbf{E}\eta I(\eta\geqslant x)\leqslant x^{-1}\mathbf{E}\eta.\end{aligned}$$

Вернемся теперь к ветвящимся процессам. При $A<1$ неравенство Маркова дает

$$Q(n):=\mathbf{P}\big(Z(n)>0\mid Z(0)=1\big)=\mathbf{P}\big(Z(n)\geqslant 1\big)\leqslant\mathbf{E}Z(n)=A^n. \tag{24}$$

Таким образом, вероятность невырождения в докритических процессах Гальтона–Ватсона убывает по крайней мере с экспоненциальной скоростью. Но сколь точна оценка (24) (хотя бы по порядку)? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дан в следующей теореме.

Пусть $\ln^+ x=\ln x$ при $x>1$ и $\ln^+ x=0$ при $x\leqslant 1$.

Теорема 4. *Если $A<1$, то*

$$Q(n)\sim KA^n\big(1+o(1)\big),\qquad K>0,$$

*тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{E}\xi\ln^+\xi=\mathbf{E}Z(1)\ln^+Z(1)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k k\,\ln k<\infty.$$

Из теоремы 4 вытекает, что

$$\frac{A^n}{Q(n)} = \frac{\mathbf{E}Z(n)}{\mathbf{P}(Z(n)>0)} = \mathbf{E}[\,Z(n) \mid Z(n)>0] \approx K^{-1}, \qquad n\to\infty. \tag{25}$$

Таким образом, если докритический процесс, удовлетворяющий условиям теоремы 4, не выродился к достаточно далекому моменту моменту $n$, то математическое ожидание числа частиц в процессе стабилизируется и приближается к величине $K^{-1}$.

При доказательстве теоремы 4 нам понадобится следующий технический результат.

Лемма 3. *Пусть заданы вероятностная производящая функция*

$$H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

*и величина* $\delta\in(0,1)$. *Ряд*

$$S := \sum_{n=0}^{\infty}[1-H(1-\delta^n)] \tag{26}$$

*сходится тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \ln k < \infty. \tag{27}$$

Доказательство. Поскольку

$$1-H(1-\delta^{n+1}) \leqslant 1-H(1-\delta^x) \leqslant 1-H(1-\delta^n), \qquad x\in[n,n+1],$$

то

$$1-H(1-\delta^{n+1}) \leqslant \int_n^{n+1}\bigl(1-H(1-\delta^x)\bigr)\,dx \leqslant 1-H(1-\delta^n).$$

Отсюда, полагая

$$S_N := \sum_{n=0}^{N}\bigl(1-H(1-\delta^n)\bigr), \qquad J_N := \int_0^{N+1}\bigl(1-H(1-\delta^x)\bigr)\,dx,$$

получаем

$$S_{N+1} - \bigl(1-H(0)\bigr) \leqslant J_N \leqslant S_N.$$

Из этих неравенств легко следует, что

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N < \infty \Longleftrightarrow J := \lim_{N\to\infty} J_N = \int_0^\infty [1 - H(1-\delta^x)]\, dx < \infty.$$

Делая в интеграле $J$ замену переменных $y = 1-\delta^x$, мы видим, что для доказательства леммы нужно показать, что

$$J = -\frac{1}{\ln\delta}\int_0^1 \frac{1-H(y)}{1-y}\, dy < \infty$$

тогда и только тогда, когда выполнено (27). Таким образом, осталось выяснить, когда

$$\int_0^1 \frac{1-H(y)}{1-y}\, dy < \infty.$$

Очевидно, что

$$\frac{1-H(y)}{1-y} = \sum_{k=1}^\infty h_k \frac{1-y^k}{1-y} = \sum_{k=1}^\infty h_k \sum_{j=0}^{k-1} y^j.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-H(y)}{1-y}\, dy &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^\infty h_k \sum_{j=0}^{k-1} y^j\right) dy \\ &= \sum_{k=1}^\infty h_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1} = \sum_{k=1}^\infty h_k \big(\ln k + O(1)\big),\end{aligned}$$

где последнее соотношение следует из оценок

$$\frac{1}{j+2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{j+1}, \qquad x \in [j+1, j+2],$$

и

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+2} \leqslant \int_1^k \frac{dx}{x} = \ln k \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что из утверждения леммы 3 вытекает, что либо ряд (26) сходится при всех $\delta \in (0,1)$, либо расходится при всех $\delta \in (0,1)$.

Доказательство теоремы 4. Положим

$$H(s) := \frac{1-f(s)}{A(1-s)} = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{\infty} p_j \frac{1-s^j}{1-s} = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{k=0}^{j-1} s^k$$
$$= \frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j =: \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \leqslant 1,$$

где последнее неравенство вытекает из оценки $1-f(s) \leqslant A(1-s)$. Ясно, что

$$\frac{1-f_{n+1}(s)}{A^{n+1}} = \frac{1-f_n(s)}{A^n}\,\frac{1-f_{n+1}(s)}{A(1-f_n(s))} = \frac{1-f_n(s)}{A^n}\,H\bigl(f_n(s)\bigr).$$

Следовательно,

$$\frac{Q(n+1)}{A^{n+1}} = \frac{1-f(f_n(0))}{A^{n+1}} = \frac{Q(n)}{A^n}\,H\bigl(f_n(0)\bigr).$$

Отсюда, обозначая $K(n) = Q(n)A^{-n}$, выводим

$$K(n+1) = K(n)H\bigl(f_n(0)\bigr).$$

Таким образом, имеет место монотонная сходимость

$$K(n) = \prod_{t=0}^{n-1} H\bigl(f_t(0)\bigr) \downarrow K, \qquad n \to \infty,$$

причем предел $K = \lim_{n\to\infty} K(n)$ положителен тогда и только тогда, когда

$$\sum_{t=0}^{\infty}\bigl(1 - H(f_t(0))\bigr) < \infty.$$

В силу неравенства Маркова

$$1 - f_t(0) = \mathbf{P}\bigl(Z(t) > 0\bigr) \leqslant \mathbf{E}Z(t) = A^t =: \delta_1^t$$

и, кроме того, для любого $t \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\bigl(Z(t+1) > 0\bigr) &= 1 - f_{t+1}(0) = 1 - f\bigl(f_t(0)\bigr) \geqslant f'\bigl(f_t(0)\bigr)\bigl(1 - f_t(0)\bigr)\\ &\geqslant f'\bigl(f(0)\bigr)\bigl(1 - f_t(0)\bigr) \geqslant \cdots \geqslant \bigl(f'(f(0))\bigr)^t\bigl(1 - f(0)\bigr)\\ &\geqslant \bigl(\min\bigl(f'(f(0)), 1 - f(0)\bigr)\bigr)^t =: \delta_2^t.\end{aligned}$$

Ввиду монотонности функции $H(s)$ по $s$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\bigl(1-H(1-\delta_2^{t-1})\bigr) \leqslant \sum_{t=0}^{\infty}\bigl(1-H(f_t(0))\bigr) \leqslant \sum_{t=0}^{\infty}\bigl(1-H(1-\delta_1^{t})\bigr).$$

Вспоминая лемму 3, заключаем, что

$$\sum_{t=0}^{\infty}\bigl(1-H(f_t(0))\bigr) < \infty$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln k \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j = \sum_{j=2}^{\infty} p_j \sum_{k=1}^{j-1}\ln k < \infty.$$

Последнее справедливо тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j j \,\ln j < \infty,$$

поскольку

$$\begin{aligned}(j-1)\ln(j-1)-j+2 = \int_1^{j-1}\ln x\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{j-1}\ln k\\ \leqslant \int_1^{j}\ln x\,dx = j\ln j - j + 1.\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. Из приведенного выше доказательства следует, что при всех $n \geqslant 0$

$$K \leqslant \frac{\mathbf{P}(Z(n)>0)}{A^n}\,.$$

**5.2. Явные неравенства для вероятности невырождения докритических процессов.** В приложениях весьма часто необходимо знать не предельные соотношения для вероятности невырождения докритических процессов, а явные оценки сверху или снизу для этой вероятности. При этом весьма желательно, чтобы такого рода оценки зависели лишь от небольшого числа параметров, надежные статистические оценки которых могут быть получены на основе экспериментальных данных. В данном разделе будут выведены оценки сверху или снизу для вероятности невырождения докритических процессов, которые зависят лишь от среднего и дисперсии числа потомков одной частицы. Для начала мы получим оценку снизу для вероятности того, что неотрицательная случайная величина $\zeta$ (не обязательно целочисленная) положительна.

Лемма 4. *Если случайная величина $\zeta$ неотрицательна с вероятностью 1 и не равна тождественно нулю, то*

$$\mathbf{P}(\zeta > 0) \geqslant \frac{(\mathbf{E}\zeta)^2}{\mathbf{E}\zeta^2}\,.$$

Доказательство. В силу неравенства Гельдера

$$\mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}\big[\zeta I\{\zeta > 0\}\big] \leqslant \sqrt{\mathbf{E}\zeta^2 \mathbf{E} I^2\{\zeta > 0\}} = \sqrt{\mathbf{E}\zeta^2 \mathbf{P}(\zeta > 0)}\,,$$

что и требовалось.

Из леммы 4 и полученных ранее результатов вытекает, что

$$\begin{aligned} A^n &= \mathbf{E}[\,Z(n) \mid Z(0) = 1] \\ &\geqslant \mathbf{P}\big(Z(n) > 0 \mid Z(0) = 1\big) \geqslant \frac{(\mathbf{E}[\,Z(n) \mid Z(0) = 1])^2}{\mathbf{E}[\,Z^2(n) \mid Z(0) = 1]} \\ &= \frac{A^{2n}}{\sigma^2 \frac{A^{n-1}(A^n - 1)}{A-1} + A^{2n}} = \frac{A^{n+1}(1-A)}{\sigma^2(1 - A^n) + A^{n+1}(1-A)}\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N\big(Z(n) > 0\big) &= \mathbf{P}\big(Z(n) > 0 \mid Z(0) = N\big), \\ \mathbf{E}_N[\,Z(n)] &= \mathbf{E}[\,Z(n) \mid Z(0) = N\,]. \end{aligned}$$

Теорема 5. *Если докритический ветвящийся процесс стартует с $Z(0) = N$ частиц, то*

$$\begin{aligned} N\mathbf{P}_1\big(Z(n) > 0\big)(1 - A^n)^{N-1} &\leqslant \mathbf{P}_N\big(Z(n) > 0\big) \\ &\leqslant N\mathbf{P}_1\big(Z(n) > 0\big) \leqslant NA^n. \end{aligned} \tag{29}$$

*Если, кроме того, дисперсия числа непосредственных потомков частиц $\sigma^2 < \infty$, то*

$$\mathbf{P}_N\big(Z(n) > 0\big) \geqslant \frac{NA^{n+1}(1 - A^n)^{N-1}(1-A)}{\sigma^2(1 - A^n) + A^{n+1}(1-A)} \approx \frac{N(1-A)A^{n+1}}{\sigma^2}\,. \tag{30}$$

Доказательство. Обозначим для краткости (и только при доказательстве этой теоремы) $R := \mathbf{P}_1\big(Z(n) = 0 \mid Z(0) = 1\big)$ вероятность вырождения процесса, начавшегося с одной частицы, за первые $n$ поколений. Тогда

$$\mathbf{P}_N\big(Z(n) > 0\big) = 1 - R^N \leqslant N(1 - R) = N\mathbf{P}_1\big(Z(n) > 0\big) \leqslant NA^n.$$

Откуда, учитывая оценки (28), получаем утверждение теоремы при $N = 1$. Для доказательства желаемого утверждения при $Z(0) = N > 1$ заметим, что

$$1 - x^N \geqslant N(1 - x)x^{N-1}, \qquad x \in [0, 1].$$

Следовательно,

$$1 - R^N \geqslant N(1 - R)R^{N-1} \geqslant N\mathbf{P}_1\big(Z(n) > 0\big)(1 - A^n)^{N-1},$$

что доказывает соотношения (29). Неравенство (30) вытекает из (28).

Теорема доказана.

Замечание 1. Как было установлено ранее, при $A \leqslant 1$ вероятность вырождения равна 1. В докритическом случае этот результат может быть доказан весьма просто. Для этого достаточно воспользоваться соотношением (29), поскольку в этом случае $\lim_{n\to\infty} NA^n = 0$.

Пример 5. Рассмотрим один пример использования полученных оценок, приведенный в работе [10]. В этой статье обсуждается проблема вырождения “правильных” северо-атлантических китов. Самка северо-атлантических китов может произвести за год либо ни одной, либо одну, либо две особи женского пола. При этом смерть матери влечет гибель потомства за этот год. Для анализа эволюции популяции женских особей северо-атлантических китов авторы работы [10], предложили модель ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, согласно которой самка в момент времени $n$ (трактуемый как промежуток времени длинною в год) не производит потомства, если она погибает до начала $n+1$-го года, производит одну особь женского пола (себя), если она выживает, но не производит особей женского пола, и производит две особи женского пола (себя и одного потомка), если она не погибнет за $n$-й год и произведет на свет одну особь женского пола. Других возможностей нет.

Пусть $p$ обозначает вероятность дожития до следующего года, а $\mu$ – вероятность рождения потомка женского пола. Вероятностная производящая функция имеет в данном случае вид

$$f(s) = 1 - p + p(1-\mu)s + p\mu s^2$$

со средним $A = p(1-\mu) + 2p\mu = p(1+\mu)$. В работе [10] на основе данных из различных источников были получены следующие оценки для параметров $p$, $\mu$ и, как следствие, для $A$:

| | $\mu = 0.051$ | $\mu = 0.038$ |
|---|---|---|
| $p = 0.94$ | $A = 0.988$ | $A = 0.976$ |

Применяя к этим данным формулы (29) и (30), можно получить следующие оценки снизу для числа поколений (лет) $n$, по истечении которых популяция китов (насчитывающая сейчас около 150 женских особей) сохранится с вероятностью, превосходящей 0.99, и оценки сверху для количества лет, по истечении которых популяция исчезнет с вероятностью, превосходящей 0.99 (см. [6, гл. 5.4]):

| | $A$ | 0.988 | 0.976 |
|---|---|---|---|
| вероятность невырождения по крайней мере $n$ лет $\geqslant 0.99$ | $n \leqslant$ | 357 | 177 |
| вырождение менее, чем за $n$ лет с вероятностью $\geqslant 0.99$ | $n \geqslant$ | 796 | 395 |

Из таблицы видно, что если интенсивность воспроизводства в популяции останется на нынешнем уровне в будущем, то при худшем сценарии популяция северо-атлантических китов исчезнет через 400 лет с вероятностью, превосходящей 0.99.

**5.3. Математическое ожидание времени до вырождения докритических процессов.** В предыдущем разделе мы исследовали асимптотику вероятности невырождения докритических процессов. При этом наши оценки снизу использовали дисперсию числа непосредственных потомков частиц. В этом разделе мы рассмотрим докритические процессы, начинающиеся с большого числа частиц, и получим асимптотическое представление для величины $\mathbf{E}[\tau \mid Z(0) = N\,]$ математического ожидания времени до вырождения процесса при $N \to \infty$. Приятной особенностью такого асимптотического представления будет его зависимость лишь от параметров $A$ и $N$.

Теорема 6. *Если* $A < 1$ *и* $\mathbf{E}\xi \ln^+ \xi < \infty$, *то*

$$\mathbf{E}_N[\tau] := \mathbf{E}[\tau \mid Z(0) = N\,] \sim \frac{\ln N}{|\ln A|}\,, \qquad N \to \infty. \tag{31}$$

Доказательство. Мы знаем, что

$$KA^n \leqslant \mathbf{P}_1\big(Z(n) > 0\big) = \mathbf{P}_1(\tau > n) \leqslant A^n, \tag{32}$$

где

$$K^{-1} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_1[\,Z(n) \mid Z(n) > 0],$$

и, кроме того,

$$\mathbf{P}_N(\tau > n) \leqslant NA^n. \tag{33}$$

Положим

$$\phi(N) = \frac{\ln N}{|\ln A|}\,, \qquad \psi(N) = \frac{\ln\ln N - \ln K}{|\ln A|} \geqslant 0.$$

Заметим, что $NA^{\phi(N)} = NA^{-(\ln N)/\ln A} = 1$ и

$$\exp\big\{-KNA^{\phi(N)-\psi(N)}\big\} = \exp\big\{-KA^{-\psi(N)}\big\} = \exp\{-\ln N\} = \frac{1}{N}\,.$$

Далее,

$$\mathbf{E}_N[\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_N(\tau > n)$$

и, следовательно, ввиду (33)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_N[\tau] &\leqslant \sum_{0\leqslant n<\phi(N)} \mathbf{P}_N(\tau > n) + N\sum_{n\geqslant\phi(N)}^{\infty} A^n \\ &\leqslant \phi(N) + 1 + \frac{NA^{\phi(N)}}{1-A} = \frac{\ln N}{|\ln A|} + \frac{2-A}{1-A}\,.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_N[\tau] &\geqslant \sum_{0\leqslant n<\phi(N)-\psi(N)} \mathbf{P}_N(\tau > n) \\ &\geqslant \big(\phi(N)-\psi(N)-1\big)\mathbf{P}_N\big(\tau \geqslant \phi(N)-\psi(N)\big) \\ &= \big(\phi(N)-\psi(N)-1\big)\big(1-\mathbf{P}_N(\tau < \phi(N)-\psi(N))\big).\end{aligned}$$

Вспоминая (32) и используя неравенство $1 - x \leqslant e^{-x}$, $x > 0$, мы видим, что для любого $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_N(\tau \leqslant n) = \mathbf{P}_1^N(\tau \leqslant n) = \bigl(1 - \mathbf{P}_1(\tau > n)\bigr)^N \\ \leqslant e^{-N\mathbf{P}_1(\tau > n)} \leqslant e^{-KNA^n}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_N\bigl(\tau \leqslant \phi(N) - \psi(N)\bigr) \leqslant \exp\bigl\{-KNA^{\phi(N)-\psi(N)}\bigr\} = \frac{1}{N}\,.$$

В результате мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{\ln N}{|\ln A|}\left(1 - \frac{\ln\ln N - \ln K + |\ln A|}{\ln N}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ \leqslant \mathbf{E}_N[\tau] \leqslant \frac{\ln N}{|\ln A|} + \frac{2 - A}{1 - A}\,.\end{aligned}$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Пример 6. Вернемся снова к примеру 5. Используя приведенные ранее значения параметра $A$ и асимптотическое представление (31), можно получить следующие оценки для математического ожидания времени до вырождения существующей ныне популяции северо-атлантических китов (см. [6, гл. 5.4]):

| $A$ | 0.988 | 0.976 |
|---|---|---|
| $\mathbf{E}[\tau \mid Z(0) = 150] \approx$ | 415 | 206 |

**5.4. Условная предельная теорема для распределения числа частиц в докритических процессах.** Поскольку докритические ветвящиеся процессы вырождаются с вероятностью 1, изучение свойств таких процессов в момент $n$ естественно проводить при условии $Z(n) > 0$, т.е. при условии невырождения процесса к моменту $n$. Мы уже отмечали (см. формулу (25)), что в докритических ветвящихся процессах, удовлетворяющих условию $\mathbf{E}\xi \ln^+ \xi < \infty$, условное математическое ожидание $\mathbf{E}[\,Z(n) \mid Z(n) > 0]$ числа частиц стабилизируется при $n \to \infty$. Этот факт наводит на мысль, что в докритических процессах распределение числа частиц (при условии невырождения к моменту $n$) должно сходится при $n \to \infty$ к дискретному распределению. Следующая теорема служит подтверждением наших нестрогих соображений.

Теорема 7. *Если $A < 1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(n) = k \mid Z(n) > 0\big) = P_k^*, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* = 1,$$

*причем функция*

$$f^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* s^k$$

*является решением уравнения*

$$1 - f^*\big(f(s)\big) = A\big(1 - f^*(s)\big).$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\mathbf{E}\big[s^{Z(n)} \mid Z(n) > 0\big] = 1 - \frac{1 - f_n(s)}{1 - f_n(0)}\,.$$

Ясно, что функция $\big(1 - f(s)\big)/(1 - s)$ возрастает по $s$, причем

$$\lim_{s\uparrow 1} \frac{1 - f(s)}{1 - s} = A.$$

Поэтому

$$\frac{1 - f_{n+1}(s)}{1 - f_n(s)} = \frac{1 - f(f_n(s))}{1 - f_n(s)} \geqslant \frac{1 - f(f_n(0))}{1 - f_n(0)}$$

или

$$\frac{1 - f_n(s)}{1 - f_n(0)} \leqslant \frac{1 - f_{n+1}(s)}{1 - f_{n+1}(0)}\,.$$

Следовательно, для любого $s \in [0, 1)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n(s)}{1 - f_n(0)} = 1 - f^*(s).$$

В частности,

$$\begin{aligned}1 - f^*(s) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_{n+1}(s)}{1 - f_{n+1}(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n(f(s))}{1 - f_n(0)}\,\frac{1 - f_n(0)}{1 - f(f_n(0))} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n(f(s))}{1 - f_n(0)} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n(0)}{1 - f(f_n(0))} = \frac{1 - f^*(f(s))}{A}\,,\end{aligned}$$

что влечет
$$1-f^*\big(f(s)\big)=A\big(1-f^*(s)\big).$$
Устремляя $s$ к единице, получаем
$$1-f^*\big(f(1)\big)=A\big(1-f^*(1)\big).$$
Таким образом, $f^*(1)=1$.

Теорема 7 доказана.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, когда предельное распределение, задаваемое производящей функцией $f^*(s)$, будет иметь конечное математическое ожидание.

Теорема 8. *$f^{*\prime}(1)<\infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi\ln^+\xi<\infty$.*

Доказательство. Ясно, что
$$1-f^*\big(f_n(s)\big)=1-f^*\big(f(f_{n-1}(s))\big)=A\big(1-f^*(f_{n-1}(s))\big)$$
$$=\cdots=A^n\big(1-f^*(s)\big).$$
Отсюда, вспоминая теорему 4 и учитывая равенство $f^*(0)=0$, заключаем, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-f^*(f_n(0))}{1-f_n(0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{A^n}{Q(n)}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[\,Z(n)\mid Z(n)>0]<\infty$$
тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi\ln^+\xi<\infty$.

Пример 7. Для докритических ветвящихся процессов со средним $A=p/q$ и геометрическим распределением числа частиц
$$f(s)=\frac{q}{1-ps}=\frac{1}{1+A(1-s)}\,,\qquad p<q,$$
имеем
$$1-f_n(s)=\frac{A^n(A-1)(1-s)}{A(A^n-1)(1-s)+A-1}$$
и
$$\mathbf{P}\big(Z(n)>0\big)=1-f_n(0)=\frac{A^n(A-1)}{A^{n+1}-1}\,.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\big[s^{Z(n)} \mid Z(n)>0\big] &= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1-f_n(s)}{1-f_n(0)}\right]\\ &= 1-\frac{1-s}{1-As}=\frac{s(1-A)}{1-As}=\frac{s(q-p)}{q-ps}\\ &= \frac{s}{1+A^*(1-s)}=f^*(s),\end{aligned}$$

где $A^* = p/(q-p)$. Таким образом, в пределе у нас снова будет геометрическое распределение, но не на множестве $\{0,1,2,\dots\}$, а на множестве $\{1,2,3,\dots\}$. Причем математическое ожидание предельного распределение стремится к бесконечности, если $p\uparrow 1/2$, т.е. в ситуации, когда параметры докритического ветвящегося процесса приближаются к критическим значениям $p=q=1/2$.

# 6. Общее число частиц в вырождающихся надкритических ветвящихся процессах

В разделе 4 было показано, что в надкритических процессах число частиц на множестве невырождающихся траекторий растет с течением времени экспоненциальным образом. Как мы знаем, если производящая функция надкритического процесса в нуле положительна ($f(0) = p_0 = \mathbf{P}(\xi = 0) > 0$), то вероятность вырождения такого процесса также положительна. Естественно задать вопрос о том, как ведет себя число частиц в таком надкритическом вырождающемся процессе и каково будет общее число частиц, появившихся в этом процессе за время его эволюции? Наивная гипотеза о том, что число частиц в таком процессе сначала будет расти экспоненциально, а затем будет уменьшаться (резко или медленно), ошибочна. Оказывается, траектории таких *надкритических* процессов будут сходны с траекториями *докритических процессов*. Для описания того, что происходит в интересующем нас случае, рассмотрим общее число частиц $T(n)$, появившихся в процессе за первые $n$ поколений:

$$T(n) = Z(0) + Z(1) + \cdots + Z(n-1).$$

Если $Z(0) = 1$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\,T(n)] &= \mathbf{E}[\,Z(0) + Z(1) + \cdots + Z(n-1)]\\ &= \mathbf{E}[\,Z(0)] + \mathbf{E}[\,Z(1)] + \cdots + \mathbf{E}[\,Z(n-1)]\\ &= 1 + A + \cdots + A^n.\end{aligned}$$

Как мы знаем, при $A < 1$ процесс быстро вырождается, и общее число частиц, когда-либо появившихся в процессе

$$T(\infty) = Z(0) + Z(1) + \cdots + Z(n) + \cdots$$

конечно с вероятностью 1, причем

$$\mathbf{E}[\,T(\infty)] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \frac{1}{1-A}\,.$$

С другой стороны, если $A \geqslant 1$, то $\mathbf{E}[\,T(n)] \to \infty$ при $n \to \infty$. Однако если рассмотреть надкритический процесс в предположении, что он выродится рано или поздно, и обозначить момент его вырождения через $\tau$, то можно убедиться в справедливости следующего утверждения

Теорема 9. *Если $A > 1$, то*

$$\mathbf{E}[\,T(\infty) \mid \tau < \infty] = \frac{1}{1 - f'(P)}\,, \tag{34}$$

*где $P = \mathbf{P}(\tau < \infty)$ – вероятность вырождения рассматриваемого процесса.*

Замечание 2. Покажем, что $f'(P) < 1$. С этой целью рассмотрим функцию $\varphi(s) := f(s) - s$. Если $P = 0$, то, очевидно, $f'(P) < 1$. Пусть теперь $P \in (0, 1)$. Предположим, что $f'(P) > 1$. Тогда $\varphi(P) = 0$, $\varphi'(P) > 0$ и, следовательно, найдется левая окрестность $(P - \varepsilon, P)$ точки $P$ такая, в которой $\varphi(s) < 0$ при $s \in (P - \varepsilon, P)$, что противоречит неравенству $f(s) > s$ при $s \in [0, P)$. Предположение $f'(P) = 1$ также приводит к противоречию, поскольку в этом случае

$$\varphi(P) = 0, \qquad \varphi'(P) = 0, \qquad \varphi''(P) \geqslant 0$$

и, следовательно, точка $P$ является точкой локального минимума для $\varphi(s)$, что несовместимо с неравенством $f(s) < s$ при $s \in (P, 1)$.

Доказательство. Для проверки соотношения (34) запишем равенство

$$\mathbf{E}[\,T(\infty) \mid \tau < \infty] = \frac{\mathbf{E}[\,T(\infty); \tau < \infty]}{\mathbf{P}(\tau < \infty)}\,. \tag{35}$$

Далее,

$$\mathbf{E}[\,T(\infty); \tau < \infty] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[\,Z(n); n < \tau < \infty]. \tag{36}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\,Z(n); n < \tau < \infty] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}\big(Z(n) = k; n < \tau < \infty\big)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}\big(Z(n) = k\big)P^k,\end{aligned}$$

поскольку каждая из подпопуляций, порожденных $Z(n) = k$ частицами, существовавшими в момент $n$, должна вымереть. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\,Z(n); n < \tau < \infty] &= P \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{P}\big(Z(n) = k\big) P^{k-1} \\ &= P f_n'(P) = P\big(f'(P)\big)^n.\end{aligned}$$

Используя найденные соотношения последовательно в (36) и (35), получим (34).

Теорема доказана.

Пример 8. Для надкритического ветвящегося процесса с геометрическим распределением числа непосредственных потомков имеем $P = q/p = A^{-1} < 1$ и

$$f'(P) = \frac{qp}{(1 - pP)^2} = \frac{1}{A}\,.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[\,T(\infty) \mid \tau < \infty] = \frac{1}{1 - A^{-1}} = \frac{A}{A - 1} = 1 + \frac{1}{A - 1}\,. \tag{37}$$

Заметим, что математическое ожидание в (37), монотонно *убывая*, стремится к 1 при $A \to \infty$.

Таким образом, мы получили неожиданный (на первый взгляд) результат: если надкритический процесс достаточно быстро вырождается (и, следовательно, общее число частиц, родившихся в процессе за все время его существования мало), это может свидетельствовать в пользу того, что математическое ожидание числа непосредственных потомков частиц велико. Однако этот эффект имеет довольно прозрачное объяснение. Если надкритический процесс вырождается, то это должно произойти в самом начале его развития (и, следовательно, общее число частиц, появившихся в процессе к моменту вырождения, не может быть большим), поскольку позднее вероятность вырождения становится пренебрежимо маленькой, ввиду того, что популяция становится экспоненциально большой через несколько выживших поколений.

## 7. Пуассоновский поток с параметром $\Lambda$

Рассмотрим прибор, на который поступают группы требований, причем количество требований в группах случайно и имеет производящую функцию $g(s)$. В начальный момент времени прибор свободен от требований. Будем предполагать, что промежутки времени $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ между между последовательными моментами прибытия групп случайны, независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром $\Lambda$. Пусть $\mu(t)$ – число групп заявок, поступивших на обслуживание в промежутке времени $[0, t]$. Наша задача – найти распределение случайной величины $\mu(t)$.

Обозначим

$$G(t) = 1 - e^{-\Lambda t} = \mathbf{P}(\gamma_1 \leqslant t), \qquad t \geqslant 0,$$

функцию распределения временно́го промежутка между последовательными моментами поступления групп. Ясно, что

$$\mathbf{P}(\gamma_1 \in dt) := \mathbf{P}\big(\gamma_1 \in (t, t + dt)\big) = \Lambda e^{-\Lambda t}\, dt.$$

Пусть

$$h(t; s) := \mathbf{E} s^{\mu(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\big(\mu(t) = k\big) s^k$$

– производящая функция случайной величины $\mu(t)$. Используя формулу полной вероятности и свойства экспоненциального распределения, находим

$$\begin{aligned}
h(t; s) &= \mathbf{E}[s^{\mu(t)}; \gamma_1 > t] + \int_0^t \mathbf{E}[s^{\mu(t)}; \gamma_1 \in du] \\
&= \mathbf{P}(\gamma_1 > t) + \int_0^t \mathbf{E}[s^{\mu(t)} \mid \gamma_1 \in du]\mathbf{P}(\gamma_1 \in du) \\
&= e^{-\Lambda t} + \Lambda s \int_0^t \mathbf{E}[s^{\mu(t-u)}] e^{-\Lambda u}\, du \\
&= e^{-\Lambda t} + \Lambda s \int_0^t h(t - u; s) e^{-\Lambda u}\, du \\
&= e^{-\Lambda t} + \Lambda e^{-\Lambda t} s \int_0^t h(v; s) e^{\Lambda v}\, dv
\end{aligned}$$

(здесь при переходе к последнему равенству мы использовали замену времени $v = t - u$). Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(t;s)}{\partial t} &= -\Lambda\left(e^{-\Lambda t} + \Lambda e^{-\Lambda t} s \int_0^t h(v;s) e^{\Lambda v}\, dv\right) + \Lambda s h(t;s) \\ &= \Lambda(s-1)h(t;s).\end{aligned}$$

Принимая во внимание начальное условие $h(0;s) = 1$, получаем

$$h(t;s) = e^{\Lambda(s-1)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}\, e^{-\Lambda t} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\big(\mu(t) = k\big) s^k.$$

Найдем теперь распределение числа требований $K(t)$, поступивших в промежутке времени $[0, t]$. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E} s^{K(t)} &= \mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[s^{K(t)} \mid \mu(t)\big]\big] = \mathbf{E} g^{\mu(t)}(s) = h\big(t; g(s)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}\, e^{-\Lambda t} g^k(s) = e^{\Lambda(g(s)-1)t}.\end{aligned}$$

# 8. Система массового обслуживания с одним прибором и неограниченной очередью

Рассмотрим систему, состоящую из прибора, на который поступают группы требований, причем количество требований в группах случайно и имеет производящую функцию $g(s)$. Будем предполагать, что промежутки времени $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ между последовательными моментами прибытия групп случайны, независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром $\Lambda$. Пусть время $l$ обслуживания одного требования имеет распределение $B(x) = \mathbf{P}(l \leqslant x)$, а число (потенциальных) требований, которые могут ожидать обслуживания, может быть сколь угодно большим. Будем считать, что в момент $t = 0$ прибор был свободен и в этот момент на обслуживание поступило одно требование, которое сразу было принято на обслуживание. После окончания обслуживания очередного требования прибор мгновенно переходит к обслуживанию следующего требования (если таковое в очереди есть). Требования обслуживаются в порядке поступления в систему.

Определение. *Периодом занятости* называется промежуток времени, заключенный между моментом $t = 0$ начала работы прибора и ближайшим к нулю моментом, когда система оказалась свободной от требований.

Наша задача – найти распределение общего числа требований $N$, которые были обслужены за период занятости.

Для решения этой задачи мы свяжем с рассматриваемой системой обслуживания следующий ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Будем интерпретировать требования как частицы, а первоначальное требование – как частицу-основателя необходимого нам ветвящегося процесса. Требования, пришедшие за время обслуживания первоначального требования, будем считать непосредственными потомками первоначальной частицы. Аналогично, требования, поступившие во время обслуживания любого из последующих требований (частиц), рассматриваются как потомки соответствующей частицы. Ясно, что при такой интерпретации мы получим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, причем общее число частиц, появившихся в этом процессе до момента его вырождения, будет равно общему числу требований $N$, которые были обслужены за период занятости.

Таким образом, для нахождения математического ожидания случайной величины $N$ необходимо найти распределение случайной величины $\xi$ – числа непосредственных потомков первоначальной частицы.

Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}s^{\xi} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = j)s^j = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\Lambda u} \frac{(\Lambda u)^k}{k!} g^k(s)\, dB(u) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\Lambda u(1-g(s))}\, dB(u) = f(s).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$A = \mathbf{E}\xi = f'(1) = \Lambda g'(1) \int_0^{\infty} u\, dB(u) = \Lambda g'(1)\mathbf{E}l.$$

Если $A < 1$, то ответ на интересующий нас вопрос таков:

$$\mathbf{E}N = \frac{1}{1-A}\,,$$

если же $A \geqslant 1$, то $\mathbf{E}N = \infty$. При $A < 1$ можно также вычислить математическое ожидание длины периода занятости:

$$\mathbf{E}(l_0 + l_1 + \cdots + l_N) = \mathbf{E}l\, \mathbf{E}N = \frac{\mathbf{E}l}{1 - \Lambda g'(1)\mathbf{E}l}\,.$$

## 9. Условная предельная теорема для критических процессов

В этом разделе мы будем рассматривать критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, производящая функция которого удовлетворяет условию

$$A = f'(1) = 1, \qquad f''(1) = 2B \in (0,\infty). \tag{38}$$

Докажем следующую теорему:

Теорема 10. *Если выполнено условие* (38), *то*

$$Q(n) = \mathbf{P}\big(Z(n) > 0\big) \sim \frac{1}{Bn}, \qquad n \to \infty, \tag{39}$$

*и для любого* $\lambda \in [0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda \frac{Z(n)}{Bn}\right\} \,\Big|\, Z(n) > 0\right] = \frac{1}{1+\lambda}\,. \tag{40}$$

Замечание 3. Легко проверить, что

$$\frac{1}{1+\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-x}\,dx$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z(n)}{Bn} \leqslant y \,\Big|\, Z(n) > 0\right) = \int_0^y e^{-x}\,dx = 1 - e^{-y}.$$

Таким образом, условное предельное распределение случайной величины $Z(n)/(Bn)$ является экспоненциальным с параметром единица.

Доказательство. Разлагая до второго члена функцию $f(s)$ в левой окрестности точки $s = 1$ по формуле Тейлора, получаем

$$1 - f(s) = 1 - s - \beta(1-s)(1-s)^2,$$

где

$$\beta(1-s) = \frac{f''(\theta)}{2}\,, \qquad \theta = \theta(s) \in [s,1],$$

и

$$\beta(y) \to B := \frac{f''(1)}{2}\,, \qquad y \to 0.$$

Таким образом,

$$1-f_{k+1}(0)=1-f\bigl(f_k(0)\bigr)=1-f_k(0)-\beta\bigl(1-f_k(0)\bigr)\bigl(1-f_k(0)\bigr)^2$$

или

$$Q(k+1)=Q(k)-\beta\bigl(Q(k)\bigr)Q^2(k).$$

Заметим, что при $k\to\infty$

$$\begin{aligned}1\leqslant\frac{Q(k)}{Q(k+1)}&=\frac{1-f_k(0)}{1-f_{k+1}(0)}=\frac{1-f_k(0)}{1-f(f_k(0))}\\&\leqslant\frac{1-f_k(0)}{f'(f_k(0))(1-f_k(0))}=\frac{1}{f'(f_k(0))}\to 1.\end{aligned}$$

Следовательно, мы можем записать

$$Q(k+1)=Q(k)-\beta^*(k)Q(k)Q(k+1),$$

где

$$\beta^*(k)=\beta\bigl(Q(k)\bigr)\frac{Q(k)}{Q(k+1)}=B+\varepsilon(k),$$

причем $\varepsilon(k)\to 0$, $k\to\infty$, и $|\varepsilon(k)|<C$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{Q(k+1)}-\frac{1}{Q(k)}=B+\varepsilon(k).$$

Суммируя обе части этого равенства по $k$ от 0 до $n-1$, получаем

$$\frac{1}{Q(n)}-1=Bn+\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(k),$$

что после деления на $n$ приводит к соотношению

$$\frac{1}{nQ(n)}=B+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(k)\to B,\qquad n\to\infty,$$

поскольку для любого $\delta>0$ можно найти число $K=K(\delta)$ такое, что $|\varepsilon(k)|<\delta$ при всех $k>K$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(k)\right|&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{K}|\varepsilon(k)|+\frac{1}{n}\sum_{k=K+1}^{n}|\varepsilon(k)|\\&\leqslant\frac{CK}{n}+\frac{\delta(n-K)}{n}\leqslant\frac{CK}{n}+\delta.\end{aligned}$$

Первая часть теоремы доказана.

Далее,

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda\frac{Z(n)}{Bn}\right\} \;\Big|\; Z(n)>0\right] = 1 - \frac{1-f_n\bigl(\exp\{-\frac{\lambda}{Bn}\}\bigr)}{Q(n)}\,.$$

Выберем теперь $m = m(n)$ таким, что

$$f_m(0) \leqslant \exp\left\{-\frac{\lambda}{Bn}\right\} \leqslant f_{m+1}(0),$$

или

$$1 - f_m(0) \geqslant 1 - \exp\left\{-\frac{\lambda}{Bn}\right\} \geqslant 1 - f_{m+1}(0),$$

что можно переписать в виде

$$Q(m) \geqslant \frac{\lambda}{Bn}\bigl(1+\varepsilon^*(n)\bigr) \geqslant Q(m+1),$$

где $\varepsilon^*(n) \to 0$, $n \to \infty$. Это означает, что

$$\frac{1}{Bm} \sim Q(m) \sim \frac{\lambda}{Bn} = \frac{1}{B(n/\lambda)}\,.$$

Следовательно, $m \sim [n/\lambda]$ при $n \to \infty$. Отсюда, ввиду оценок

$$1 - f_n\bigl(f_{m+1}(0)\bigr) \leqslant 1 - f_n\left(\exp\left\{-\frac{\lambda}{Bn}\right\}\right) \leqslant 1 - f_n\bigl(f_m(0)\bigr),$$

выводим

$$1 - f_n\left(\exp\left\{-\frac{\lambda}{Bn}\right\}\right) \sim 1 - f_{n+m}(0) \sim \frac{1}{B(n+m)}$$
$$\sim \frac{1}{Bn(1+\lambda^{-1})} = \frac{\lambda}{Bn(1+\lambda)}\,.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{1-f_n\bigl(\exp\{-\frac{\lambda}{Bn}\}\bigr)}{Q(n)} \sim \frac{Bn\lambda}{Bn(1+\lambda)} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\,, \qquad n \to \infty,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda\frac{Z(n)}{Bn}\right\} \;\Big|\; Z(n)>0\right] = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n\bigl(\exp\{-\frac{\lambda}{Bn}\}\bigr)}{Q(n)}$$
$$= 1 - \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}\,,$$

что завершает доказательство теоремы.

Пример 9. В случае чисто геометрического распределения числа потомков, т.е. при

$$f(s) = \frac{1}{2-s}\,, \qquad f'(1) = 1, \qquad f''(1) = 2,$$

полученные результаты допускают простое объяснение. Действительно, как было установлено ранее,

$$\mathbf{P}(\max S_j^* > n) = \frac{1}{n+1}\,.$$

Далее, если

$$Z(n) = \#(j\colon S_{j-1}^* = n+1,\ S_j^* = n),$$

то

$$\mathbf{P}\bigl(Z(n) = k; \max S_j^* > n\bigr) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-1}\frac{1}{n+1}$$

и

$$\mathbf{P}\bigl(Z(n) \geqslant k; \max S_j^* > n\bigr) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-1}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\bigl(Z(n) \geqslant k \mid \max S_j^* > n\bigr) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k-1},$$

что при $k = ny$ дает

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\bigl(Z(n) \geqslant ny \mid \max S_j^* > n\bigr) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{ny-1} = e^{-y}.$$

# 10. Редуцированные процессы

Пусть $\{Z(k),\ k \geqslant 0\}$ – ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, а $Z(m,n)$ – число частиц в этом процессе в момент $m \leqslant n$, которые имеют непустое потомство в момент $n$. Процесс $\{Z(m,n),\ 0 \leqslant m \leqslant n\}$ называется *редуцированным процессом*, построенным по набору $Z(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

**10.1. Редуцированные надкритические процессы.** Поскольку надкритический процесс с положительной вероятностью существует бесконечно долго, то естественно ожидать, что в редуцированном надкритическом процессе момент рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в момент $n$ (при условии невырождения процесса к моменту $n$) находится в начале эволюции процесса. Следующая теорема подтверждает это предположение.

Теорема 11. *Если $A > 1$, то для при любом $m = 0, 1, \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[s^{Z(m,n)} \mid Z(n) > 0\big] = \frac{f_m(P + (1-P)s) - P}{1-P},$$

*где величина $P < 1$ есть вероятность вырождения рассматриваемого процесса.*

Доказательство. Поскольку при $m \leqslant n$

$$\mathbf{E}\big[s^{Z(m,n)}; Z(n) = 0\big] = \mathbf{P}\big(Z(n) = 0\big) = f_n(0)$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[s^{Z(m,n)}\big] &= \mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[s^{Z(m,n)} \mid Z(m)\big]\big] \\ &= \mathbf{E}\Big[\big(f_{n-m}(0) + (1 - f_{n-m}(0))s\big)^{Z(m)}\Big] \\ &= f_m\big(f_{n-m}(0) + (1 - f_{n-m}(0))s\big),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[s^{Z(m,n)} \mid Z(n) > 0\big] &= \frac{\mathbf{E}[s^{Z(m,n)}; Z(n) > 0]}{\mathbf{P}(Z(n) > 0)} \\ &= \frac{\mathbf{E}[s^{Z(m,n)}] - \mathbf{E}[s^{Z(m,n)}; Z(n) = 0]}{\mathbf{P}(Z(n) > 0)} \\ &= \frac{f_m(f_{n-m}(0) + (1 - f_{n-m}(0))s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)}.\end{aligned} \tag{41}$$

Отсюда, переходя в (41) к пределу при $n \to \infty$, используя непрерывность $f_m(y)$ по $y \in [0,1]$ и вспоминая, что $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = P$, несложно получить утверждение теоремы.

Для редуцированного ветвящегося процесса момент

$$r = \max\bigl\{0 \leqslant k < n \colon Z(k,n) = 1\bigr\}$$

называется моментом рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в момент $n$. Очевидно, что

$$\{r \geqslant m\} = \{Z(m,n) = 1\}.$$

Из этого представления и теоремы 11 легко вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если $A > 1$, то для любого $m = 0, 1, \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(r = m \mid Z(n) > 0\bigr) = \bigl(f'(P)\bigr)^m - \bigl(f'(P)\bigr)^{m+1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\bigl(r \geqslant m \mid Z(n) > 0\bigr) = \mathbf{P}\bigl(Z(m,n) = 1 \mid Z(n) > 0\bigr),$$

что в силу теоремы 11 приводит к равенству

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(Z(m,n) = 1 \mid Z(n) > 0\bigr) = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{f_m(P + (1-P)s) - P}{1-P}\right]_{s=0}.$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$\frac{f_m(P + (1-P)s) - P}{1-P} = \frac{1}{1-P}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_m^{(k)}(P)}{k!}(1-P)^k s^k.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(r \geqslant m \mid Z(n) > 0\bigr) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(Z(m,n) = 1 \mid Z(n) > 0\bigr) \\ &= \frac{1}{1-P}\,\frac{f'_m(P)}{1!}(1-P) = \bigl(f'(P)\bigr)^m.\end{aligned} \tag{42}$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(r = m \mid Z(n) > 0\bigr) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(Z(m,n) = 1 \mid Z(n) > 0\bigr) \\
&\qquad - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(Z(m+1,n) = 1 \mid Z(n) > 0\bigr) \\
&\quad = \bigl(f'(P)\bigr)^m - \bigl(f'(P)\bigr)^{m+1},
\end{aligned}
$$

что и требовалось.

Поскольку $f'(P) < 1$ (см. замечание 2 раздела 6), то (42) влечет

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(r \geqslant m \mid Z(n) > 0\bigr) = \lim_{m\to\infty} \bigl(f'(P)\bigr)^m = 0.$$

Это, нестрого говоря, означает, что в редуцированном надкритическом процессе момент рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в момент $n$ (при условии невырождения процесса к моменту $n$), находится в начале эволюции процесса.

**10.2. Редуцированные докритические процессы.** В этом разделе мы опишем структуру редуцированных докритических процессов.

Теорема 12. *Если $A < 1$, то для любого $m = 0, 1, \ldots$ существует предел*

$$
\begin{aligned}
h(s) &:= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\bigl[s^{Z(n-m,n)} \mid Z(n) > 0\bigr] \\
&= \frac{f^*(f_m(0) + (1 - f_m(0))s) - f^*(f_m(0))}{A^m},
\end{aligned}
$$

*где*

$$f^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* s^k$$

*– производящая функция условного предельного распределения (при условии невырождения) докритического процесса:*

$$1 - f^*\bigl(f(s)\bigr) = A\bigl(1 - f^*(s)\bigr).$$

Доказательство. Аналогично (41) при $m \leqslant n$ получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\bigl[s^{Z(n-m,n)} \mid Z(n) > 0\bigr] \\ = \frac{f_{n-m}(f_m(0) + (1 - f_m(0))s) - f_{n-m}(f_m(0))}{1 - f_n(0)}\,.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{1 - f_{n-m}(0)}{1 - f_n(0)} = \frac{1 - f_{n-m}(0)}{1 - f_m(f_{n-m}(0))} \to A^{-m}$$

при $n \to \infty$, то

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\bigl[s^{Z(n-m,n)} \mid Z(n) > 0\bigr] \\ = \frac{1 - f_{n-m}(0)}{1 - f_n(0)} \times \frac{f_{n-m}(f_m(0) + (1 - f_m(0))s) - f_{n-m}(f_m(0))}{1 - f_{n-m}(0)} \\ \to A^{-m}\bigl(f^*(f_m(0) + (1 - f_m(0))s) - f^*(f_m(0))\bigr)\end{aligned}$$

при $n \to \infty$, что доказывает теорему.

Величина

$$D(n) = n - \max\bigl\{0 \leqslant k < n \colon Z(k,n) = 1\bigr\}$$

называется расстоянием до момента рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в момент $n$, или просто расстоянием до ближайшего общего предка.

Следствие 3. *Если $A < 1$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(D(n) \leqslant m \mid Z(n) > 0\bigr) = \frac{P_1^*}{p_1(m)}\,, \tag{43}$$

*где*

$$p_1(m) = \mathbf{P}\bigl(Z(m) = 1 \mid Z(m) > 0\bigr) = \frac{\mathbf{P}(Z(m) = 1)}{1 - f_m(0)}\,,$$

*а*

$$P_1^* = \lim_{m\to\infty} p_1(m).$$

Доказательство. Разлагая функцию $f^*(y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $y = f_m(0)$, получаем

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{f^*(f_m(0) + (1 - f_m(0))s) - f^*(f_m(0))}{A^m} \\ &= A^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{*(k)}(f_m(0))}{k!} \big(1 - f_m(0)\big)^k s^k \\ &= A^{-m} f^{*\prime}\big(f_m(0)\big) \big(1 - f_m(0)\big) s \\ &\qquad + A^{-m} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{*(k)}(f_m(0))}{k!} \big(1 - f_m(0)\big)^k s^k. \end{aligned}$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(D(n) \leqslant m \mid Z(n) > 0\big) = \frac{f^{*\prime}(f_m(0))(1 - f_m(0))}{A^m}. \tag{44}$$

Используя соотношение

$$1 - f^*\big(f_m(s)\big) = A^m \big(1 - f^*(s)\big) \tag{45}$$

и дифференцируя обе его части по $s$ в точке $s = 0$, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*(f_m(s))}{\partial s}\bigg|_{s=0} &= \frac{df^*(s)}{ds}\bigg|_{s=f_m(0)} \frac{\partial f_m(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\ &= A^m \frac{df^*(s)}{ds}\bigg|_{s=0} = A^m P_1^*. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f^{*\prime}\big(f_m(0)\big) = \frac{df^*(s)}{ds}\bigg|_{s=f_m(0)} = \frac{A^m \frac{df^*(s)}{ds}\big|_{s=0}}{\frac{\partial f_m(s)}{\partial s}\big|_{s=0}} = \frac{A^m P_1^*}{\mathbf{P}(Z(m) = 1)}.$$

Подстановка этого соотношения в (44) завершает доказательство следствия.

Замечая, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_1^*}{p_1(m)} = 1,$$

и вспоминая равенство (43), мы видим, что при больших $n$ в докритических ветвящихся процессах ближайший общий предок всех частиц, существующих в момент $n$ (при условии невырождения процесса к моменту $n$), с вероятностью близкой к единице находится недалеко от момента наблюдения $n$.

**10.3. Редуцированные критические процессы.** В этом разделе мы примем следующее соглашение. Для $t \in [0,1]$ будем интерпретировать произведение $nt$ как целое число $[nt]$.

Теорема 13. *Если*

$$A = f'(1) = 1, \qquad f''(1) = 2B \in (0, \infty),$$

*то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[s^{Z(nt,n)} \mid Z(n) > 0\big] = \frac{s(1-t)}{1-st}$$

*и, следовательно, для любого* $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(nt,n) = k \mid Z(n) > 0\big) = (1-t)t^{k-1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[s^{Z(nt,n)} \mid Z(n) > 0\big] &= \frac{f_{nt}(f_{n(1-t)}(0) + (1 - f_{n(1-t)}(0))s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)} \\ &= 1 - \frac{1 - f_{nt}(1 - (1 - f_{n(1-t)}(0))(1-s))}{1 - f_n(0)}\,.\end{aligned}$$

Выберем теперь целое натуральное число $m = m(t,s)$ таким, что

$$f_m(0) \leqslant f_{n(1-t)}(0) + \big(1 - f_{n(1-t)}(0)\big)s \leqslant f_{m+1}(0).$$

Ввиду асимптотических соотношений

$$\big(1 - f_{n(1-t)}(0)\big)(1-s) \sim \frac{1-s}{Bn(1-t)} = \frac{1}{Bn((1-t)/(1-s))}\,, \quad n \to \infty,$$

и

$$1 - f_m(0) \sim \frac{1}{Bm}\,, \qquad m \to \infty,$$

несложно заключить, что $m \sim n(1-t)/(1-s)$ при $n \to \infty$. Далее, неравенства

$$\begin{aligned}1 - f_{nt+m+1}(0) &\leqslant 1 - f_{nt}\big(1 - (1 - f_{n(1-t)}(0))(1-s)\big) \\ &\leqslant 1 - f_{nt+m}(0)\end{aligned}$$

влекут при $n \to \infty$ соотношение

$$\begin{aligned}1 - f_{nt}\Big(1 - (1 - f_{n(1-t)}(0))(1-s)\Big) &\sim \frac{1}{B(nt+m)} \\ \sim \frac{1}{Bn(t + (1-t)(1-s)^{-1})} &= \frac{1-s}{Bn(1-ts)}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\frac{1 - f_{nt}(1 - (1 - f_{n(1-t)}(0))(1 - s))}{1 - f_n(0)} \to \frac{1 - s}{1 - ts}\,.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[s^{Z(nt,n)} \mid Z(n) > 0\big] &= 1 - \frac{1 - s}{1 - ts} \\ &= \frac{s(1-t)}{1 - st} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-t)t^{k-1}s^k. \qquad (46)\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Если* $A = f'(1) = 1$, $f''(1) = 2B \in (0, \infty)$, *то для любого* $t \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(D(n)n^{-1} \leqslant t \mid Z(n) > 0\big) = t.$$

Доказательство. Из предыдущих рассуждений и (46) следует, что

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(D(n)n^{-1} \leqslant t \mid Z(n) > 0\big) \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(n(1-t), n) = 1 \mid Z(n) > 0\big) = t.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

**10.4. Дополнительная информация о структуре процесса $Z(nt, n)$, $t \in [0, 1]$, в критическом случае.** Будем обозначать $Z_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots$, независимые вероятностные копии критического ветвящегося процесса $Z(n)$, $n \geqslant 0$, $Z(0) = 1$, и пусть $Z_i(m, n)$, $m \leqslant n$, – редуцированные процессы, построенные по процессам $Z_i(n)$. Введем событие

$$\mathscr{B}_j = \big\{Z_i\big(n(1 - t_1)\big) > 0;\ \ Z_i(0) = 1;\ \ i = 1, \ldots, j\big\}.$$

Согласно теореме 13 для $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$ и $j \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[s^{Z(nt_2,n)} \mid Z(nt_1,n) = j; Z(0) = 1\big] \\
&\ = \mathbf{E}\big[s^{Z_1(n(t_2-t_1),n(1-t_1))+\dots+Z_j(n(t_2-t_1),n(1-t_1))} \mid \mathscr{B}_j\big] \\
&\ = \Big(\mathbf{E}\big[s^{Z(n(t_2-t_1),n(1-t_1))} \mid Z\big(n(1-t_1)\big) > 0; Z(0) = 1\big]\Big)^j \\
&\ = \Big(\mathbf{E}\big[s^{Z(n(1-t_1)(t_2-t_1)(1-t_1)^{-1},n(1-t_1))} \mid Z\big(n(1-t_1)\big) > 0; Z(0) = 1\big]\Big)^j \\
&\qquad \to \left(\frac{s\left(\frac{1-t_2}{1-t_1}\right)}{1 - s\frac{t_2-t_1}{1-t_1}}\right)^j, \qquad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, при $k \geqslant j$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(nt_2,n) = k \mid Z(nt_1,n) = j; Z(0) = 1\big) \\
&\qquad = \operatorname{coef}_{s^k}\left(\frac{s\left(\frac{1-t_2}{1-t_1}\right)}{1 - s\frac{t_2-t_1}{1-t_1}}\right)^j = \left(\frac{1-t_2}{1-t_1}\right)^j \binom{k-1}{k-j}\left(\frac{t_2-t_1}{1-t_1}\right)^{k-j} \\
&\qquad = \mathbf{P}\big(\widehat{Z}(t_2) = k \mid \widehat{Z}(t_1) = j;\ \widehat{Z}(0) = 1\big),
\end{aligned}$$

где $\big\{\widehat{Z}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}$ – предельный процесс. В частности, при $k - j \geqslant 2$, $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}\big(\widehat{Z}(t+\Delta t) = k \mid \widehat{Z}(t) = j;\ \widehat{Z}(0) = 1\big) \\
&\qquad = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1-t-\Delta t}{1-t}\right)^j \binom{k-1}{k-j} (\Delta t)^{k-j-1} \frac{1}{(1-t)^{k-j}} = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $\{Z(nt,n),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ является марковским процессом, тем самым мы доказали сходимость конечномерных распределений процесса $\{Z(nt,n),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $\big\{\widehat{Z}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\big\}$ и, более того, показали, что с вероятностью единица скачки предельного процесса равны 1.

Поскольку

$$\mathbf{P}\big(\widehat{Z}(t_2) = j+1 \mid \widehat{Z}(t_1) = j;\ \widehat{Z}(0) = 1\big) = j\left(\frac{1-t_2}{1-t_1}\right)^j \left(\frac{t_2-t_1}{1-t_1}\right),$$

$$\mathbf{P}\big(\widehat{Z}(t_2) = j \mid \widehat{Z}(t_1) = j;\ \widehat{Z}(0) = 1\big) = \left(\frac{1-t_2}{1-t_1}\right)^j$$

и, в частности,

$$\mathbf{P}\big(\widehat{Z}(t)=1 \mid \widehat{Z}(0)=1\big)=1-t,$$

то эволюция процесса $\big\{\widehat{Z}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\big\}$ допускает следующее нестрогое описание. Начальная частица имеет продолжительность жизни, равномерно распределенную на интервале $[0,1]$ и в момент своей гибели, скажем, $l$, она производит двух потомков (бинарное деление). Продолжительности жизней новорожденных частиц независимы и равномерно распределены на интервале $[l,1]$. В момент гибели каждая из этих частиц производит независимо от других частиц ровно двух потомков и т.д. В результате мы получим процесс, называемый обычно процессом Юла.

**10.5. Расстояние до момента рождения ближайшего общего предка двух случайно выбранных частиц в критическом процессе.** Пусть $D_2(n)$ – расстояние до момента рождения ближайшего общего предка двух случайно выбранных частиц $n$-го поколения.

Теорема 14. *Если $A=1$ и $B\in(0,\infty)$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big(D_2(n)n^{-1}\leqslant t \mid Z(0)=1, Z(n)>0\big)=2t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-t)^{k-1}}{k+1}\,.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}&\big(D_2(n)n^{-1}\leqslant t \mid Z(0)=1, Z(n)>0\big)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\big(Z(n(1-t),n)=k \mid Z(0)=1, Z(n)>0\big)\mathbf{P}_{n,n(1-t),k},\end{aligned}\tag{47}$$

где $\mathbf{P}_{n,n(1-t),k}$ – вероятность того, что две частицы, выбранные случайно среди частиц $n$-го поколения (повторный выбор одной и той же частицы допускается), имеют общего предка в поколении $n(1-t)$, при условии, что $Z(n(1-t),n)=k$. Пусть $Z_1^*(u), Z_2^*(u),\ldots,$ – набор независимых одинаково распределенных случайных величин с таким же распределением, как и у $\{Z(u)\mid Z(u)>0\}$. Если $S_k^*(u)=Z_1^*(u)+Z_2^*(u)+\cdots+Z_k^*(u)$, то при условии $Z(n(1-t),n)=k$ и фиксации набора $Z_1^*(nt), Z_2^*(nt),\ldots,Z_k^*(nt)$ вероятность того, что при описанной процедуре выбора из частиц

$n$-го поколения будет выбрана одна и та же частица два раза или две частицы, имеющие общего предка в поколении $n(1-t)$, равна

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{Z_i^*(nt)}{S_k^*(nt)}\right)^2,$$

что с учетом одинаковой распределенности случайных величин $Z_i^*(nt)/S_k^*(nt)$ приводит к равенству

$$\mathbf{P}_{n,n(1-t),k} = k\mathbf{E}\left(\frac{Z_1^*(nt)}{S_k^*(nt)}\right)^2.$$

Поскольку при $n \to \infty$ последовательность нормированных случайных величин $Z_1^*(nt)/(ntB)$ сходится по распределению к случайной величине $Z_1^*$, имеющей экспоненциальное распределение с единичным средним, и

$$0 \leqslant \frac{Z_1^*(nt)}{S_k^*(nt)} \leqslant 1,$$

то теорема о монотонной сходимости дает

$$\mathbf{P}_{n,n(1-t),k} \to k\mathbf{E}\left(\frac{Z_1^*}{S_k^*}\right)^2 = k\mathbf{E}\left(\frac{Z_k^*}{S_k^*}\right)^2, \qquad n \to \infty.$$

Для нахождения распределения отношения, стоящего под знаком математического ожидания, заметим, что при $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\frac{Z_k^*}{S_k^*} \geqslant y\right) &= \mathbf{P}\left(Z_k^* \geqslant \frac{y}{1-y}S_{k-1}^*\right)\\ &= \int_0^\infty e^{-s}\frac{s^{k-2}}{(k-2)!}\,ds\int_{sy/(1-y)}^\infty e^{-x}\,dx\\ &= \int_0^\infty e^{-s}e^{-sy/(1-y)}\frac{s^{k-2}}{(k-2)!}\,ds\\ &= \int_0^\infty e^{-s/(1-y)}\frac{s^{k-2}}{(k-2)!}\,ds = (1-y)^{k-1}.\end{aligned}$$

Отсюда, обращаясь к формуле

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{Z_k^*}{S_k^*}\right)^2 &= \int_0^1 y^2\,d\,\mathbf{P}\left(\frac{Z_k^*}{S_k^*} \leqslant y\right) = 2\int_0^1 y\mathbf{P}\left(\frac{Z_k^*}{S_k^*} \geqslant y\right)dy\\ &= 2\int_0^1 y(1-y)^{k-1}\,dy = \frac{2}{k(k+1)}\,,\end{aligned}$$

находим

$$\mathbf{P}_{n,n(1-t),k} \to \frac{2}{k+1}\,, \quad k \geqslant 2, \qquad n \to \infty.$$

Заметим, что последнее соотношение верно и при $k = 1$, поскольку, очевидно, $\mathbf{P}_{n,n(1-t),1} = 1$. Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться теоремой 13 и вспомнить, что в соответствии с (47)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(D_2(n)n^{-1} \leqslant t \mid Z(0) = 1, Z(n) > 0\big) \\
&\quad= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(Z(n(1-t), n) = k \mid Z(0) = 1; Z(n) > 0\big)\mathbf{P}_{n,n(1-t),k} \\
&\quad= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(Z(n(1-t), n) = k \mid Z(0) = 1; Z(n) > 0\big) \\
&\qquad\qquad \times \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,n(1-t),k} = 2t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-t)^{k-1}}{k+1}\,.
\end{aligned}$$

# 11. Марковские ветвящиеся процессы с непрерывным временем

Определение. Случайный процесс $\{Z(t,\omega), t \geqslant 0\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ называется *марковским ветвящимся процессом с непрерывным временем*, если

1. пространство состояний процесса – множество неотрицательных целых чисел;
2. процесс $\{Z(t,\omega), t \geqslant 0\}$ является стационарной цепью Маркова относительно $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_t = \sigma\{Z(s,\omega),\ s \leqslant t\}$ с переходными вероятностями
$$P_{ij}(\Delta, \Delta + t) := P\{Z(\Delta + t) = j \mid Z(\Delta) = i\} = P_{ij}(t),$$
где последнее равенство выполнено для всех $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\Delta \geqslant 0$ в силу стационарности процесса;
3. для всех $t \geqslant 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и $|s| \leqslant 1$ выполнено свойство ветвления
$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j = \left( \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) s^j \right)^i := \big(F(t,s)\big)^i.$$

**11.1. Построение марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем.** При построении марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем удобно использовать следующую вероятностную интерпретацию. Состояние $i$ ветвящегося процесса в какой-либо момент времени интерпретируется как число частиц, существующих в процессе в этот момент. Эти частицы в дальнейшем эволюционируют независимо друг от друга в соответствии со следующими правилами. Каждая из этих частиц имеет время жизни, распределенное экспоненциально с параметром $\rho$ (и, следовательно, и оставшееся время жизни частиц распределено экспоненциально с тем же параметром $\rho$). В момент гибели частицы производят потомство в соответствии с вероятностной производящей функцией
$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$
независимо от поведения других частиц. Новорожденные частицы эволюционируют в дальнейшем независимо друг от друга и

остальных частиц, существующих в процессе, и в соответствии с описанной выше схемой.

Пусть
$$F(t;s) := \mathbf{E}\big[s^{Z(t)} \mid Z(0)=1\big]$$
– производящая функция числа частиц в марковском ветвящемся процессе с непрерывным временем в момент $t$ при условии, что в начальный момент времени $t=0$ в процессе была одна частица. Поскольку остаточное время жизни частиц имеет экспоненциальное распределение, то возраст начальной частицы в момент $t=0$ не имеет значения. Положим $f^{(\rho)}(s) := \rho\big(f(s)-s\big)$.

Лемма 5. *Функция $F(t;s)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова*
$$\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} = f^{(\rho)}(s)\frac{\partial F(t;s)}{\partial s}, \qquad F(0;s)=s. \tag{48}$$

Доказательство. Положим
$$P_{ij}(t) = \mathbf{P}\big(Z(t)=j \mid Z(0)=i\big).$$
Тогда
$$\begin{aligned} P_{kk}(\Delta) &= e^{-k\rho\Delta} + k\rho\int_0^\Delta \sum_{j=0}^\infty p_j P_{k+j-1,k}(\Delta-u)e^{-k\rho u}\,du \\ &= 1+O(\Delta), \qquad \Delta\downarrow 0, \end{aligned}$$
и при $i\neq k$
$$P_{ik}(\Delta) = i\rho\int_0^\Delta \sum_{j=0}^\infty p_j P_{i+j-1,k}(\Delta-u)e^{-i\rho u}\,du = O(\Delta), \qquad \Delta\downarrow 0.$$
Следовательно,
$$\begin{aligned} P_{kk}(\Delta) &= e^{-k\rho\Delta} + k\rho\int_0^\Delta \sum_{j=0}^\infty p_j P_{k+j-1,k}(\Delta-u)e^{-k\rho u}\,du \\ &= e^{-k\rho\Delta} + k\rho\int_0^\Delta p_1 P_{kk}(\Delta-u)e^{-k\rho u}\,du \\ &\qquad + k\rho\int_0^\Delta \sum_{j\neq 1}^\infty p_j P_{k+j-1,k}(\Delta-u)e^{-k\rho u}\,du \\ &= 1-k\rho\Delta+k\rho p_1\Delta+O(\Delta^2) \\ &= 1-k\rho(1-p_1)\Delta+O(\Delta^2), \qquad \Delta\downarrow 0, \end{aligned}$$

и при $k \geqslant i-1$, $k \neq i$

$$\begin{aligned} P_{ik}(\Delta) &= i\rho \int_0^\Delta p_{k-i+1} P_{kk}(\Delta - u) e^{-i\rho u}\, du \\ &\qquad + i\rho \int_0^\Delta \sum_{j \neq k-i+1}^{\infty} p_j P_{i+j-1,k}(\Delta - u) e^{-i\rho u}\, du \\ &= i\rho p_{k-i+1}\Delta + O(\Delta^2), \qquad \Delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

В результате мы получаем

$$P_{kk}(\Delta) = 1 - k\rho\Delta + k\rho p_1 \Delta + O(\Delta^2), \qquad \Delta \downarrow 0,$$

а

$$P_{ik}(\Delta) = i\rho p_{k-i+1}\Delta + O(\Delta^2), \qquad \Delta \downarrow 0,$$

если либо $k = i-1$, либо $k > i$, в то время как

$$P_{ik}(\Delta) = O(\Delta^2), \qquad \Delta \downarrow 0,$$

при $k < i-1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{1k}(t+\Delta) &= \sum_{i=0}^{\infty} P_{1i}(t) P_{ik}(\Delta) = P_{1k}(t) P_{kk}(\Delta) + \sum_{i \neq k}^{\infty} P_{1i}(t) P_{ik}(\Delta) \\ &= P_{1k}(t)(1 - \rho k\Delta + k\rho p_1 \Delta) \\ &\qquad + \rho\Delta \sum_{i\neq k}^{\infty} P_{1i}(t) i p_{k-i+1} + o(\Delta) \\ &= P_{1k}(t)(1 - \rho k \Delta) + \rho\Delta \sum_{i=0}^{k+1} P_{1i}(t) i p_{k-i+1} + o(\Delta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{P_{1k}(t+\Delta) - P_{1k}(t)}{\Delta} = -k\rho P_{1k}(t) + \rho \sum_{i=0}^{k+1} i P_{1i}(t) p_{k-i+1} + o(1).$$

Переходя к пределу при $\Delta \downarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial P_{1k}(t)}{\partial t} = -k\rho P_{1k}(t) + \rho \sum_{i=0}^{k+1} i P_{1i}(t) p_{k-i+1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $s^k$ и суммируя по $j$ от 0 до $\infty$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial P_{1k}(t)}{\partial t}s^k &= -\rho\sum_{k=0}^{\infty}kP_{1k}(t)s^k+\rho\sum_{k=0}^{\infty}p_k\sum_{i=0}^{k+1}iP_{1i}(t)p_{k-i+1}s^k\\ &= -\rho s\sum_{k=0}^{\infty}kP_{1k}(t)s^{k-1}\\ &\qquad +\rho\sum_{i=0}^{\infty}iP_{1i}(t)s^{i-1}\sum_{k=i-1}^{\infty}p_{k-i+1}s^{k-i+1},\end{aligned}$$

которые, после очевидных преобразований, дают

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} &= -\rho s\frac{\partial F(t;s)}{\partial s}+\rho f(s)\frac{\partial F(t;s)}{\partial s}\\ &= \rho\big(f(s)-s\big)\frac{\partial F(t;s)}{\partial s}=f^{(\rho)}(s)\frac{\partial F(t;s)}{\partial s}\,.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, при $i\geqslant 1$ и $\Delta t\to 0$ переходные вероятности процесса имеют вид

$$\begin{aligned}&P_{ij}(\Delta t)=\rho i p_{j-i+1}\Delta t+o(\Delta t), \qquad j\geqslant i-1, \quad i\neq j,\\ &P_{ii}(\Delta t)=1-\rho i\Delta t+i\rho p_1\Delta+o(\Delta t),\\ &P_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t), \qquad j<i-1,\end{aligned}$$

в то время как $P_{0j}(t)=\delta_{0j}$, где $\delta_{0j}$ – символ Кронекера. Используя эти соотношения, нетрудно вывести прямое

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t)=-j\rho P_{ij}(t)+\rho\sum_{k=1}^{j+1}kP_{ik}(t)p_{j-k+1}$$

и обратное

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t)=-i\rho P_{ij}(t)+i\rho\sum_{k=i-1}^{\infty}p_{k-i+1}P_{kj}(t)$$

уравнения Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\{Z(t),\ t\geqslant 0\}$ с начальными условиями

$$P_{ij}(+0)=\delta_{ij}, \qquad i,j=0,1,\ldots\,.$$

Используя обратное уравнение Колмогорова при $i = 1$, получаем еще одно уравнение для производящей функции $F(t; s)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} &= -\rho \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) s^j + \rho \sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{k=0}^{\infty} p_k P_{kj}(t) \\ &= \rho\big(f(F(t;s)) - F(t;s)\big) = f^{(\rho)}\big(F(t;s)\big)\end{aligned}$$

с начальным условием $F(0, s) = s$.

**11.2. Классификация марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем.** Как и процессы Гальтона–Ватсона, марковские ветвящиеся процессы с непрерывным временем можно разбить на три класса в зависимости от величины математического ожидания числа непосредственных потомков частиц

$$A := \mathbf{E}\xi = \mathbf{E}[\, Z(1) \mid Z(0) = 1] = f'(1).$$

Марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем называется *докритическим*, если $A < 1$, *критическим*, если $A = 1$, и *надкритическим*, если $A > 1$.

Пусть

$$\mathbf{A}(t) := \mathbf{E}[\, Z(t) \mid Z(0) = 1].$$

Дифференцируя по $s$ обе части обратного уравнения Колмогорова для функции $F(t; s)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial F(t;s)}{\partial t} = f^{(\rho)\prime}\big(F(t;s)\big) \frac{\partial F(t;s)}{\partial s}\,. \tag{49}$$

Отсюда при $s = 1$ вытекает, что функция $\mathbf{A}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\,\mathbf{A}(t)}{dt} = \rho\big(f'(1) - 1\big)\mathbf{A}(t), \qquad \mathbf{A}(0) = 1,$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{A}(t) = e^{at}, \quad \text{где } a = \rho\big(f'(1) - 1\big). \tag{50}$$

Таким образом, в докритических марковских процессах с непрерывным временем среднее число частиц стремится к нулю с экспоненциальной скоростью, в критических процессах среднее число частиц равно единице, а в надкритических процессах математическое ожидание размера популяции растет с течением времени экспоненциально.

Дифференцируя (49) по $s$ еще раз и полагая $s = 1$, получаем следующее уравнение для величины $\mathbf{B}(t) := \mathbf{E}Z(t)\big(Z(t) - 1\big)$:

$$\frac{d\,\mathbf{B}(t)}{dt} = a\mathbf{B}(t) + b\mathbf{A}^2(t), \qquad \mathbf{B}(0) = 0,$$

где $b = \rho f''(1)$. Отсюда при помощи (50) нетрудно вывести, что

$$\mathbf{B}(t) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}\, e^{at}(e^{at} - 1) = \dfrac{f''(1)}{f'(1) - 1}\, e^{at}(e^{at} - 1), & \text{если } a \neq 0; \\ bt = \rho f''(1)t, & \text{если } a = 0. \end{cases} \tag{51}$$

Рассмотрим два примера марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем, заимствованных из книги Б. А. Севастьянова [2].

Пример 10. Пусть $\rho = 1$ и для $0 < \alpha < 1$, $1 + B \geqslant A > 0$ и $A \leqslant B(1 + \alpha)$

$$f(s) = 1 - A(1 - s) + B(1 - s)^{1+\alpha}, \qquad s \in [0, 1].$$

Тогда

$$\frac{\partial F(t; s)}{\partial t} = (1 - A)\big(1 - F(t; s)\big) + B\big(1 - F(t; s)\big)^{1+\alpha}, \qquad F(0; s) = s.$$

Для того, чтобы найти решение этого уравнения в явном виде, сделаем замену

$$v(t; s) := \frac{1}{(1 - F(t; s))^{\alpha}}\,.$$

Тогда

$$\frac{dv(t; s)}{dt} = \alpha(A - 1)v(t; s) + B\alpha, \qquad v(0; s) = \frac{1}{(1 - s)^{\alpha}}\,.$$

Отсюда

$$F(t; s) = 1 - \left[B\,\frac{e^{\alpha(A-1)t} - 1}{A - 1} + e^{\alpha(A-1)t}(1 - s)^{-\alpha}\right]^{-1/\alpha},$$

если $A \neq 1$, и

$$F(t; s) = 1 - \big[\alpha Bt + (1 - s)^{-\alpha}\big]^{-1/\alpha},$$

если $A = 1$.

Пример 11. Пусть, как и в предыдущем примере, $\rho = 1$. Положим

$$f(s) = 1 - (1-s)^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

В этом случае соответствующее уравнение для производящей функции $F(t;s)$ имеет вид

$$\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} = 1 - F(t;s) - \bigl(1 - F(t;s)\bigr)^{\alpha}, \qquad F(0;s) = s.$$

Сделав замену

$$v(t;s) = \bigl(1 - F(t;s)\bigr)^{1-\alpha},$$

получим линейное уравнение

$$\frac{dv(t;s)}{dt} = (1-\alpha)^{-1}\bigl(v(t;s) - 1\bigr), \qquad v(0;s) = (1-s)^{1-\alpha},$$

решение которого имеет вид

$$F(t;s) = 1 - \bigl[1 - e^{-(1-\alpha)t} + e^{-(1-\alpha)t}(1-s)^{1-\alpha}\bigr]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} F(t;1) = \mathbf{P}\bigl(Z(t) < \infty\bigr) &= \lim_{s\uparrow 1} F(t;s) \\ &= 1 - \bigl[1 - e^{-(1-\alpha)t}\bigr]^{\frac{1}{1-\alpha}} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t > 0$ величина $1 - F(t;1)$ положительна. Поскольку $1 - F(t;1) = \mathbf{P}\bigl(Z(t) = \infty\bigr)$, это означает, что с положительной вероятностью в рассматриваемом процессе за сколь угодно малое время может родиться бесконечное число частиц. Такое явление называется взрывом, а ветвящиеся процессы, в которых взрыв за конечное время возможен с положительной вероятностью, называются *нерегулярными*.

## 11.3. Критерий регулярности

Определение. Марковский ветвящийся процесс называется *регулярным*, если $\mathbf{P}\bigl(Z(t) < \infty\bigr) = 1$ для любого $t \in (0,\infty)$, и *нерегулярным* в противном случае.

Теорема 15. *Марковский ветвящийся процесс с производящей функцией числа потомков $f(s)$ регулярен тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0,1)$*

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{du}{1-f(u)} = \infty.$$

Мы не будем доказывать эту теорему, а вместо этого убедимся в справедливости следующего более слабого утверждения.

Теорема 16. *Если $f'(1) = \mathbf{E}\xi < \infty$, то марковский ветвящийся процесс с производящей функцией числа потомков $f(s)$ регулярен.*

Доказательство. Обозначим $G(t) = 1 - e^{-\rho t} = \mathbf{P}(\tau < t)$ функцию распределения длительности жизни $\tau$ первоначальной частицы процесса. Используя формулу полной вероятности и марковость ветвящегося процесса, нетрудно проверить, что $F(t;s)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$F(t;s) = s\bigl(1 - G(t)\bigr) + \int_0^t f\bigl(F(t-u;s)\bigr)\,dG(u). \tag{52}$$

Покажем сначала, что при любом $s$: $|s| \leqslant 1$ уравнение (52) имеет единственное решение на полуоси $t \geqslant 0$. Пусть существуют два решения $F_1(t;s)$ и $F_2(t;s)$ уравнения (52). Тогда

$$\begin{aligned}
|F_1(t;s) - F_2(t;s)| &\leqslant \int_0^t \bigl|f\bigl(F_1(t-u;s)\bigr) - f\bigl(F_2(t-u;s)\bigr)\bigr|\,dG(u) \\
&\leqslant f'(1)\int_0^t |F_1(t-u;s) - F_2(t-u;s)|\,dG(u) \\
&\leqslant f'(1)G(t)\sup_{0\leqslant v\leqslant t}|F_1(v;s) - F_2(v;s)|.
\end{aligned}$$

Выберем $t_0 > 0$ таким, что $f'(1)G(t_0) < 1$. Из предыдущих соотношений вытекает, что

$$\sup_{0\leqslant v\leqslant t_0}|F_1(v;s) - F_2(v;s)| \leqslant f'(1)G(t_0)\sup_{0\leqslant v\leqslant t_0}|F_1(v;s) - F_2(v;s)|.$$

Отсюда, очевидно, следует, что при всех $|s| \leqslant 1$

$$F_1(t;s) = F_2(t;s), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{53}$$

Повторяя эту процедуру еще раз при $t \in (t_0, 2t_0]$ и учитывая (53), получаем, что при всех $|s| \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
|F_1(t;s) - F_2(t;s)| &\leqslant \int_0^t \bigl|f\bigl(F_1(t-u;s)\bigr) - f\bigl(F_2(t-u;s)\bigr)\bigr|\,dG(u) \\
&= \int_0^{t-t_0} \bigl|f\bigl(F_1(t-u;s)\bigr) - f\bigl(F_2(t-u;s)\bigr)\bigr|\,dG(u) \\
&\leqslant f'(1)\int_0^{t-t_0} |F_1(t-u;s) - F_2(t-u;s)|\,dG(u) \\
&\leqslant f'(1)G(t-t_0)\sup_{t_0\leqslant v\leqslant t}|F_1(v;s) - F_2(v;s)|,
\end{aligned}
$$

что в свою очередь влечет

$$
F_1(t;s) = F_2(t;s), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant 2t_0, \quad |s| \leqslant 1,
$$

и т.д. Таким образом, для любого $s : |s| \leqslant 1$ уравнение (52) имеет единственное решение $F(t;s)$, $0 \leqslant t < \infty$. В частности, уравнение

$$
\varphi(t) = 1 - G(t) + \int_0^t f\bigl(\varphi(t-u)\bigr)\,dG(u)
$$

имеет единственное решение $\varphi(t) \equiv 1$. Поскольку

$$
F(t;1) = 1 - G(t) + \int_0^t f\bigl(F(t-u;1)\bigr)\,dG(u),
$$

отсюда вытекает, что $F(t;1) \equiv 1$ при любом $t \geqslant 0$, что и доказывает утверждение теоремы.

Одним из важных свойств ветвящихся процессов с дискретным временем и производящей функцией числа непосредственных потомков $f(s)$ является равенство $f_n(s) = f\bigl(f_{n-1}(s)\bigr)$, влекущее для любых натуральных $m$ и $k$ представление $f_{m+k}(s) = f_m\bigl(f_k(s)\bigr)$. Оказывается, что аналог такого равенства имеет место и для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем.

Теорема 17. *Производящая функция $F(t;s)$ числа частиц в момент $t$ в марковском ветвящемся процессе с непрерывным временем, начавшемся в момент $t = 0$ с одной частицы, удовлетворяет при любых $t, r \geqslant 0$ уравнению*

$$
F(t+r;s) = F\bigl(t; F(r;s)\bigr) \tag{54}
$$

*с начальным условием*

$$F(0; s) = s. \tag{55}$$

Доказательство. Поскольку $Z(0) = 1$, то условие (55), очевидно, выполнено. Занумеруем $Z(t)$ частиц, существующих в процессе в момент $t$, числами $1, 2, \ldots, Z(t)$ произвольным образом. Тогда

$$Z(t+r) = \sum_{k=1}^{Z(t)} Z_k(t, t+r), \tag{56}$$

где $Z_k(t, t+r)$ – размер семейства в момент $t+r$, основателем которого является частица с номером $k$, существовавшая в момент $t$ (такое семейство может состоять и из самой частицы-основателя, если она не погибла к моменту $t+r$). В силу свойств экспоненциального распределения, независимости эволюции отдельных частиц и однородности нашего ветвящегося процесса случайные величины $Z_k(t, t+r)$ независимы при фиксированном значении $Z(t)$ и распределены так же, как случайная величина $Z(r)$. Поэтому

$$\begin{aligned} F(t+r; s) &= \mathbf{E} s^{Z(t+r)} = \mathbf{E}\big[\,\mathbf{E}\big[s^{Z(t+r)} \mid Z(t)\big]\big] \\ &= \mathbf{E}\big[(\mathbf{E} s^{Z(r)})^{Z(t)}\big] = \mathbf{E} F^{Z(t)}(r; s) = F\big(t; F(r; s)\big). \end{aligned} \tag{57}$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Заметим, что из равенства (57) следует, что для любого $\Delta > 0$ и любого неотрицательного целого числа $n$ справедливо равенство

$$F(n\Delta + \Delta; s) = F\big(\Delta; F(n\Delta; s)\big).$$

Таким образом, последовательность функций $\{F(n\Delta; s),\ n \geqslant 0\}$ можно трактовать как целочисленные итерации производящей функции $F(s) := F(\Delta; s)$. В частности, это означает, что марковский ветвящийся процесс с *непрерывным* временем, рассматриваемый в моменты $n\Delta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, можно интерпретировать как ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона.

Полагая в интегральном уравнении (52) $s = 0$ и обозначая $P(t) = F(t; 0) = \mathbf{P}\big(Z(t) = 0\big)$, получаем

$$P(t) = \int_0^t f\big(P(t-u)\big)\, dG(u). \tag{58}$$

Отсюда, переходя к пределу при $t \to \infty$ и используя монотонность функции $P(t)$ по $t$, выводим

$$P := \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f\bigl(P(t-u)\bigr)\, dG(u) = f(P).$$

Таким образом, вероятность вырождения марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем является решением уравнения $s = f(s)$.

Отсюда следует, что докритический и критический марковские ветвящиеся процессы с непрерывным временем вырождаются с вероятностью единица. Ясно также, что для надкритического процесса, производящая функция которого удовлетворяет условию $f(0) = \mathbf{P}(\xi = 0) = 0$, вероятность вырождения равна нулю.

Если же в надкритическом процессе $f(0) > 0$, то из (58), в силу монотонности функции $P(t)$ по $t$ и функции $f(s)$ по $s$, вытекает, что $P(t) \leqslant f\bigl(P(t)\bigr)G(t) < f\bigl(P(t)\bigr)$. Отсюда и из свойств производящей функции $f(s)$ надкритического процесса легко следует, что $P$ является минимальным положительным решением уравнения $s = f(s)$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 18. *Вероятность вырождения марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем является минимальным неотрицательным решением уравнения $s = f(s)$.*

**11.4. Предельные теоремы для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем.** В предыдущем разделе мы обнаружили, что вероятность вырождения марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем вычисляется по такой же формуле, как и в случае процессов Гальтона–Ватсона. В данном разделе будет показано, что и более тонкие результаты для процессов с непрерывным временем имеют соответствующие аналоги среди утверждений для процессов с дискретным временем.

Теорема 19. *В марковских докритических процессах с непрерывным временем при $t \to \infty$*

$$Q(t) = \mathbf{P}\bigl(Z(t) > 0 \mid Z(0) = 1\bigr) \sim Ke^{at}\bigl(1 + o(1)\bigr), \qquad K > 0,$$

*где* $a = \rho\bigl(f'(1)-1\bigr) = f^{(\rho)}{}'(1)$, *тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{E}\xi \ln^+ \xi = \sum_{k=1}^{\infty} p_k k \ln k < \infty. \tag{59}$$

*При этом для любого докритического процесса и всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\bigl(Z(t) = k \mid Z(t) > 0\bigr) = P_k^*, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* = 1,$$

*причем производящая функция*

$$F^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^* s^k, \qquad |s| \leqslant 1,$$

*предельного распределения имеет вид*

$$\begin{aligned} F^*(s) &= 1 - \exp\left\{ a \int_0^s \frac{du}{f^{(\rho)}(u)} \right\} \\ &= 1 - \exp\left\{ \bigl(f'(1)-1\bigr) \int_0^s \frac{du}{f(u)-u} \right\}. \end{aligned} \tag{60}$$

Доказательство. Пусть $R(t;s) = 1 - F(t;s)$. Из уравнения

$$\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} = \rho\bigl(f(F(t;s)) - F(t;s)\bigr) = f^{(\rho)}\bigl(F(t;s)\bigr), \qquad F(0;s) = s,$$

вытекает, что

$$t = \int_{R(t;s)}^{1-s} \frac{du}{f^{(\rho)}(1-u)} = \int_{Q(t)}^{1} \frac{du}{f^{(\rho)}(1-u)}\,. \tag{61}$$

Отсюда, в частности, следует, что,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^{at}}{Q(t)}\right) &= \int_{Q(t)}^{1} \frac{a\,du}{f^{(\rho)}(1-u)} + \int_{Q(t)}^{1} \frac{du}{u} \\ &= \int_{Q(t)}^{1} \frac{\rho(A-1)u - \rho(f(1-u) - (1-u))}{\rho u(f(1-u) - (1-u))}\, du \\ &= \int_0^{1-Q(t)} \frac{A(1-v) - (1 - f(v))}{(1-v)(f(v) - v)}\, du. \end{aligned} \tag{62}$$

Поскольку для докритического процесса $f(s) > s$, $s \in [0,1)$, и для любой производящей функции $1 - f(s) \leqslant A(1-s)$, $s \in [0,1)$, то в последнем интеграле в (62) подинтегральная функция неотрицательна. Учитывая, что в докритическом процессе $Q(t) \to 0$ при $t \to \infty$, заключаем, что последний интеграл в (62) сходится тогда и только тогда, когда интеграл

$$J := \int_0^1 \frac{A(1-v) - (1 - f(v))}{(1-v)(f(v)-v)}\, dv < \infty. \tag{63}$$

Поскольку знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль только в правом конце $v = 1$ промежутка интегрирования и $(1-v)\big(f(v)-v\big) \sim (1-v)^2(1-A)$ при $v \uparrow 1$, то

$$J < \infty \Longleftrightarrow J_1 := \int_0^1 \frac{A(1-v) - (1-f(v))}{(1-v)^2}\, dv < \infty. \tag{64}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1-f(v)}{1-v} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{1-v^k}{1-v} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 + v + \cdots + v^{k-1})$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}
\frac{A(1-v) - (1-f(v))}{(1-v)^2} &= \frac{A - \frac{1-f(v)}{1-v}}{1-v} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k p_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 + v + \cdots + v^{k-1})}{1-v} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \frac{(1-v) + \cdots + (1 - v^{k-1})}{1-v} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} v^r \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \sum_{r=0}^{k-2} (k-1-r) v^r.
\end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в (64) и интегрируя, получаем

$$J_1 = \sum_{k=2}^{\infty} p_k \sum_{r=0}^{k-2} (k-1-r) \int_0^1 v^r\, dv$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} p_k \left( k \sum_{r=0}^{k-2} \frac{1}{r+1} - (k-1) \right).$$

Поскольку

$$k \sum_{r=0}^{k-2} \frac{1}{r+1} - (k-1) \sim k \ln k, \qquad k \to \infty,$$

то $J_1 < \infty$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (59). Следовательно, правая часть (62) конечна тогда и только тогда, когда выполнено (59). Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства представления (60) введем функцию

$$F^*(t; s) = \mathbf{E}\big[s^{Z(t)} \mid Z(t) > 0\big] = 1 - \frac{R(t; s)}{Q(t)}$$

и покажем, что $\lim_{t\to\infty} F^*(t; s) = F^*(s)$. Из (61) следует, что

$$\int_0^s \frac{du}{f^{(\rho)}(u)} = \int_{R(t;s)}^{Q(t)} \frac{du}{f^{(\rho)}(1-u)}$$
$$= \frac{1}{f^{(\rho)\prime}(1)(1+\varepsilon(t,s))} \ln \frac{R(t; s)}{Q(t)}\,,$$

где $\varepsilon(t, s) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $|s| \leqslant 1$. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t; s)}{Q(t)} = \exp\left\{ f^{(\rho)\prime}(1) \int_0^s \frac{du}{f^{(\rho)}(u)} \right\}$$
$$= \exp\left\{ \big(f'(1) - 1\big) \int_0^s \frac{du}{f(u) - u} \right\}.$$

Теорема доказана.

Доказательство следующего утверждения может быть проведено с помощью рассуждений, которые были использованы в аналогичной ситуации при доказательстве соответствующей теоремы для надкритических процессов Гальтона–Ватсона. Мы опускаем эти аргументы.

Теорема 20. *Если* $a = \rho\big(f'(1) - 1\big) > 0$ *и* $\sigma^2 < \infty$, *то существует случайная величина* $W$ *такая, что при* $t \to \infty$

$$W_t := \frac{Z(t)}{e^{at}} \to W \quad \text{почти наверное,}$$

*причем*

1. $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(W - W_t)^2 = 0$;
2. $\mathbf{E}W = 1, \qquad \mathbf{D}W = \sigma^2/(A^2 - A)$;
3. $\mathbf{P}(W = 0) = q = \mathbf{P}\big(Z(t) = 0$ *для некоторого* $t \geqslant 0\big)$.

Сформулируем теперь предельную теорему для критических ветвящихся процессов с непрерывным временем.

Теорема 21. *Если* $f'(1) = 1$ *и* $f''(1) = 2B \in (0, \infty)$, *то при* $t \to \infty$

$$Q(t) = \mathbf{P}\big(Z(t) > 0\big) \sim \frac{1}{\rho B t}\,, \tag{65}$$

*Кроме того, для любого* $\lambda \in [0, \infty)$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda \frac{Z(t)}{\rho B t}\right\} \,\Big|\, Z(t) > 0\right] \to \frac{1}{1+\lambda}\,. \tag{66}$$

Доказательство. Как мы уже знаем, для любого $\Delta > 0$ процесс $Z(n\Delta)$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, является процессом Гальтона–Ватсона с производящей функцией численности потомства частиц

$$F(s) := F(\Delta; s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{1k}(\Delta) s^k,$$

у которого (см. (50), (51)) в случае $a = 0$

$$F'(1) = \mathbf{A}(\Delta) = e^{a\Delta} = 1, \qquad F''(1) = \rho B \Delta.$$

Отсюда и из теоремы об асимптотическом поведении вероятности невырождения критических процессов Гальтона–Ватсона следует, что для $\Delta = 1$ и $n \to \infty$

$$Q(n) = \mathbf{P}\big(Z(n) > 0 \mid Z(0) = 1\big) \sim \frac{1}{\rho B n}\,.$$

Используя монотонность $Q(t)$ по $t$, находим

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{t\to\infty} [t] \rho B Q([t]+1) &\leqslant \liminf_{t\to\infty} \rho B t Q(t) \\ &\leqslant \limsup_{t\to\infty} \rho B t Q(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} ([t]+1) \rho B Q([t]) = 1, \end{aligned}$$

что доказывает (65). Для доказательства (66) нужно рассмотреть функцию

$$R\bigl(t; \exp\{-\lambda/(B\rho t)\}\bigr) = 1 - F\bigl(t; \exp\{-\lambda/(B\rho t)\}\bigr),$$

подобрать $m = m(\lambda, t)$ так, чтобы

$$R\bigl(t; \exp\{-\lambda/(B\rho t)\}\bigr) = Q(t + m),$$

а затем практически дословно повторить рассуждения, использовавшиеся при доказательстве условной предельной теоремы для критических процессов Гальтона–Ватсона.

# 12. Ветвящиеся процессы с финальным продуктом

В этом разделе мы рассмотрим некоторое усложнение марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем, а именно, ветвящиеся процессы с финальным продуктом.

Эта модель описывает популяцию частиц (ветвящийся процесс), продолжительность жизни которых имеет экспоненциальное распределение с параметром $\rho$. В конце жизни каждая частица производит (независимо от поведения других частиц) случайное число потомков $\xi$ в соответствии с производящей функцией $f(s)$ и, кроме того, финальный продукт случайного объема $\chi \geqslant 0$. Новорожденные частицы эволюционируют аналогичным образом. Предполагается, что совместное распределение случайных величин $\xi, \chi$ задается функцией

$$\varphi^{\chi}(s,\lambda) := \mathbf{E} s^{\xi} e^{-\lambda\chi}.$$

Финальный продукт не подвергается в дальнейшем никаким изменениям. Объем $\chi$ финального продукта частицы называется случайной характеристикой этой частицы.

Пусть $\mathscr{A}_t = \{\mathscr{A}\}$ – множество частиц $\mathscr{A}$, погибших в процессе за время $[0,t]$. Обозначим

$$Z^{\chi}(t) := \sum_{\mathscr{A} \in \mathscr{A}_t} \chi_{\mathscr{A}}$$

совокупный финальный продукт, произведенный всеми частицами $\mathscr{A}$, погибшими в процессе за время $[0,t]$.

**Примеры случайных характеристик:**

- если $\chi = I\{\xi = k\}$, то $Z^{\chi}(t)$ – количество частиц, погибших в процессе за время $[0,t]$, каждая из которых произвела в момент гибели ровно $k$ потомков;
- если $\chi = I\{\xi \geqslant k\}$, то $Z^{\chi}(t)$ – количество частиц, погибших в процессе за время $[0,t]$, каждая из которых произвела в момент гибели не менее $k$ потомков;
- наконец, если $\chi = I\{\text{длительность жизни частиц} \leqslant x\}$, то $Z^{\chi}(t)$ – количество частиц, погибших в процессе за время $[0,t]$, длительность жизни каждой из которых не превосходила величину $x$.

Выведем дифференциальное уравнение для функции

$$\Phi(t;s,\lambda) = \mathbf{E}\big[s^{Z(t)}e^{-\lambda Z^{\chi}(t)} \mid \big(Z(0), Z^{\chi}(0)\big) = (1,0)\big],$$

задающей совместное распределение компонент случайного вектора $\big(Z(t), Z^{\chi}(t)\big)$. Ясно, что $\Phi(0;s,\lambda) = s$. Учитывая, что распределение длительности жизни частиц имеет вид $G(t) = 1 - e^{-\rho t}$, и используя формулу полной вероятности, находим

$$\Phi(t;s,\lambda) = s\big(1 - G(t)\big) + \int_0^t \varphi^{\chi}\big(\Phi(t-u;s,\lambda),\lambda\big)\, dG(u).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\Phi(t;s,\lambda)}{\partial t} = \rho\big(\varphi^{\chi}(\Phi(t;s,\lambda),\lambda) - \Phi(t;s,\lambda)\big), \qquad \Phi(0,s,\lambda) = s.$$

В частности, полагая $\Phi(t;\lambda) := \Phi(t;1,\lambda)$, мы получаем интегральное

$$\Phi(t;\lambda) = 1 - G(t) + \int_0^t \varphi^{\chi}\big(\Phi(t-u;\lambda),\lambda\big)\, dG(u) \tag{67}$$

и дифференциальное

$$\frac{\partial\Phi(t;\lambda)}{\partial t} = \rho\big(\varphi^{\chi}(\Phi(t;\lambda),\lambda) - \Phi(t;\lambda)\big), \qquad \Phi(0;\lambda) = 1,$$

уравнения для преобразования Лапласа совокупного объема финального продукта, произведенного в процессе за промежуток времени $[0,t]$.

Отсюда вытекает, что математическое ожидание $\mathbf{A}^{\chi}(t) := \mathbf{E}Z^{\chi}(t)$ объема финального продукта, произведенного за промежуток времени $[0,t]$, удовлетворяет интегральному

$$\mathbf{A}^{\chi}(t) = \mathbf{E}\xi\int_0^t \mathbf{A}^{\chi}(t-u)\, dG(u) + \mathbf{E}\chi G(t)$$

и дифференциальному

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{\chi}(t) = \rho(\mathbf{E}\xi - 1)\mathbf{A}^{\chi}(t) + \mathbf{E}\chi, \qquad \mathbf{A}^{\chi}(0) = 0,$$

уравнениям. Решение этих уравнений имеет следующий вид: если $\mathbf{E}\xi \neq 1$, то

$$\mathbf{A}^{\chi}(t) = \frac{\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1}\, e^{\rho(\mathbf{E}\xi-1)t} - \frac{\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1}\,,$$

если же $\mathbf{E}\xi = 1$, то $\mathbf{A}^{\chi}(t) = \rho t\mathbf{E}\xi$.

Поскольку случайная величина $Z^\chi(t)$ не убывает с течением времени, то существует предел

$$Z^\chi(\infty) := \lim_{t\to\infty} Z^\chi(t),$$

причем

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &:= \mathbf{E}\big[e^{-\lambda Z^\chi(\infty)} \mid \big(Z(0), Z^\chi(0)\big) = (1,0)\big] \\ &= \lim_{t\to\infty} \Phi(t;\lambda) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\big[e^{-\lambda Z^\chi(t)} \mid \big(Z(0), Z^\chi(0)\big) = (1,0)\big].\end{aligned}$$

Отметим, что интегральное соотношение (67) влечет

$$\Phi(\lambda) = \varphi^\chi\big(\Phi(\lambda), \lambda\big). \tag{68}$$

Уравнение (68) имеет прозрачный вероятностный смысл. Действительно, пусть компоненты вектора $(\tau_0, \xi_0, \chi_0)$ обозначают длительность жизни, число непосредственных потомков и объем финального продукта первоначальной частицы, соответственно, а величина $Z_i^\chi(u)$ равна совокупному объему финального продукта, произведенного семейством, порожденным $i$-м потомком первоначальной частицы, за время $u$, прошедшее с момента гибели первоначальной частицы. Ясно, что

$$Z^\chi(t) = \chi_0 I\{\tau_0 \leqslant t\} + Z_1^\chi(t-\tau_0) + \cdots + Z_{\xi_0}^\chi(t-\tau_0).$$

При помощи этого равенства, учитывая, что длительность жизни первоначальной частицы конечна с вероятностью единица, и используя монотонность по времени объема финального продукта, производимого каждым из семейств, порожденных непосредственными потомками первоначальной частицы, нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства (по распределению):

$$Z^\chi(\infty) \overset{d}{=} \chi_0 + Z_1^\chi(\infty) + \cdots + Z_{\xi_0}^\chi(\infty),$$

где случайные величины $Z_1^\chi(\infty)$ независимы и распределены так же, как и $Z^\chi(\infty)$. Отсюда легко следует (68).

В частности, для нахождения распределения общего числа частиц, родившихся в процессе за все время его существования, что, как мы знаем, соответствует произведенному за время жизни процесса совокупному объему финального продукта с характеристикой $\chi \equiv 1$, имеем

$$\varphi^\chi(s,\lambda) = \mathbf{E}s^\xi e^{-\lambda\chi} = e^{-\lambda}\mathbf{E}s^\xi = e^{-\lambda} f(s)$$

и

$$\Phi(\lambda) = e^{-\lambda} f\bigl(\Phi(\lambda)\bigr).$$

Для ветвящегося процесса с производящей функцией числа потомков

$$f(s) = \frac{q}{1 - ps}$$

находим

$$\Phi(\lambda) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\,qe^{-\lambda}}}{2p}\,.$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \Phi(\lambda) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\,q}}{2p} = \frac{1 - |p - q|}{2p} = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leqslant q; \\ \dfrac{q}{p}\,, & \text{если } p > q, \end{cases}$$

что является естественным отражением того факта, что общее число частиц, родившихся в процессе за все время его существования, конечно с вероятностью единица в докритическом и критическом случаях ($p \leqslant q$) и бесконечно с вероятностью $1 - qp^{-1}$ в надкритическом случае ($p > q$).

# 13. Системы с одним прибором и бесконечным числом мест ожидания (потенциально неограниченная длина очереди)

Рассматривается система с одним прибором и бесконечным числом мест ожидания. Первоначальное количество требований (заявок, покупателей) в очереди равно $n+1$, причем одно из этих требований помечено. Прибор в этот момент свободен. Из очереди случайно и равновероятно выбирается одно требование, которое немедленно поступает на обслуживание. Пусть $\pi_1, \pi_2, \ldots$ – длительности обслуживания требований, последовательно поступающих на обслуживание. Будем предполагать, что случайные величины $\pi_1, \pi_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения

$$B(x) := \mathbf{P}(\pi_i \leqslant x).$$

Пусть $\xi_i$ – количество новых требований, добавившихся к очереди за время обслуживания $\pi_i$ $i$-го по порядку требования. Будем предполагать, что двумерные векторы $(\xi_i, \pi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены (ранее мы видели, что это условие выполнено для систем обслуживания, новые требования в которых появляются в соответствии с пуассоновским потоком с параметром $\Lambda$, т.е. для так называемых $M|G|1$ систем обслуживания). Обозначим через $T_n^\pi$ время ожидания начала обслуживания помеченного требования. Ясно, что если помеченное требование было обслужено $(N+1)$-м по порядку, то время ожидания

$$T_n^\pi = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_N.$$

Одна из наших целей – исследовать свойства случайной величины $T_n^\pi$.

Мы взглянем на эту задачу с несколько более общей точки зрения, а именно, будем предполагать, что в системе в моменты времени $\pi_1, \pi_1+\pi_2, \ldots, \pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_i+\cdots$, производится некоторый продукт объема $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_i, \ldots$, который в дальнейшем не исчезает и не изменяется, накапливаясь в системе. В частности, если $\chi_i \equiv 1$, то $T_n^\chi = N$ – количество требований, обслуженных до начала обслуживания помеченного требования, если $\chi_i = \xi_i - 1$, то $T_n^\chi + n$ – длина очереди в момент начала обслуживания помеченного требования, и т.д.

Ясно, что если помеченное требование было принято на обслуживание $(N+1)$-м по порядку, то совокупный объем финального продукта, произведенного к моменту начала обслуживания помеченного требования, равен

$$T_n^\chi = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_N. \tag{69}$$

Для дальнейших рассуждений нам будет удобно считать, что система обслуживания останавливается, как только помеченное требование поступает на обслуживание. Построим вероятностное пространство, соответствующее описанной выше вероятностной модели.

С этой целью введем своеобразную "индексацию" требований следующим образом. Присвоим помеченному требованию номер 0, а первоначальные непомеченные требования занумеруем в произвольном порядке числами от 1 до $n$. Если требование с номером 0 будет взято на обслуживание первым, то это элементарное событие (исход) запишем в виде $(0_1)$. Пусть теперь первым на обслуживание было взято требование с номером $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $j$-му требованию, пришедшему в систему за время обслуживания требования $i_1$, мы сопоставим набор $(i_1 j)$. Дальнейшая нумерация требований, пришедших в систему до момента поступления помеченного требования на обслуживание, производится по индукции: если на обслуживании находится требование, которому сопоставлен набор $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, то требованию, являющемуся $j$-м по порядку среди требований, поступивших в систему за время обслуживания требования $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, мы сопоставляем набор $(i_1 i_2 \ldots i_k j)$. Объем финального продукта, произведенного в системе за время обслуживания требования $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, обозначим символом $\chi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Количество новых требований, пришедших в систему за время обслуживания требования $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, равно $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Ясно, что при таком описании с каждым первоначальным требованием $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ можно связать дерево, корень которого имеет номер $i$, а вершины занумерованы наборами $(i i_2 \ldots i_k)$. Число ребер, выходящих из корня, равно $\xi_i$, а число ребер, выходящих из вершины $(i i_2 \ldots i_k)$ (и направленных от корня), равно $\xi_{i i_2 \ldots i_k}$. При этом вершина $(i i_2 \ldots i_k)$ соединена ребрами, направленными от корня, с вершинами

$$(i i_2 \ldots i_k 1), \quad (i i_2 \ldots i_k 2), \quad \ldots, \quad (i i_2 \ldots i_k \xi_{i i_2 \ldots i_k}).$$

Пусть теперь помеченное требование 0 поступило на обслуживание $(N+1)$-м, а $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{N}$ – номера требований, обслуженных ранее требования 0. (В соответствии с введенными обозначениями этим номерам соответствуют наборы вида $(j_1 j_2 \dots j_k)$.) Тогда функционирование рассматриваемой системы может быть описано (в рамках нашей вероятностной схемы) следующим образом:

$$(\overline{1}, t_1, \xi_{\overline{1}}, \chi_{\overline{1}}), \quad (\overline{2}, t_2, \xi_{\overline{2}}, \chi_{\overline{2}}), \quad \dots, \quad (\overline{N}, t_N, \xi_{\overline{N}}, \chi_{\overline{N}}), \quad (0_{N+1}),$$

где $t_i := \sum_{k=1}^{i} \pi_k$, $i \geqslant 1$, а объем финального продукта, произведенного в системе к моменту начала обслуживания требования 0, равен (в слегка измененном по сравнению с равенством (69) виде)

$$T_n^{\chi} = \chi_{\overline{1}} + \chi_{\overline{2}} + \dots + \chi_{\overline{N}} \,. \tag{70}$$

## 14. Вспомогательный ветвящийся процесс

Мы свяжем с описанной выше системой обслуживания марковский ветвящийся процесс $\{Z(t),\ t \geqslant 0\}$ с финальным продуктом. Этот процесс начинается в момент времени $t = 0$ при $Z(0) = n + 1$. Одна из этих первоначальных частиц помечена символом (0), а остальные занумерованы в произвольном порядке числами от 1 до $n$. Продолжительность жизни первоначальных частиц, так же, как и их потомков, имеет экспоненциальное распределение с параметром 1. В конце жизни каждая из этих частиц, скажем, с номером $i$ производит потомство $\xi_i$ и финальный продукт $\chi_i$, причем количество потомков и объем финального продукта имеют такое же совместное распределение, как и совместное распределение числа новых требований, пришедших за время обслуживания требования в описанной выше схеме обслуживания, и объема финального продукта, произведенных в конце обслуживания этого требования. Новорожденные частицы производят потомство и финальный продукт независимо от остальных частиц и по таким же вероятностным законам, как и исходные частицы. Процесс останавливается в момент гибели частицы с пометкой (0), причем предполагается, что помеченная частица не успевает произвести потомство и финальный продукт.

В таком остановленном процессе мы проведем стандартную нумерацию частиц: непосредственные потомки первоначальной частицы с номером $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ будут помечены символами $(i1), \ldots, (i\xi_1)$. Непосредственные потомки частицы $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ (если таковые есть) будут помечены символами

$$(i_1 i_2 \ldots i_k 1), \quad (i_1 i_2 \ldots i_k 2), \quad \ldots, \quad (i_1 i_2 \ldots i_k \xi_{i_1 i_2 \ldots i_k}).$$

Произведем теперь запись событий, происходивших в ветвящемся процессе до момента гибели частицы с пометкой (0), в следующем виде. Будем записывать моменты гибели частиц в порядке возрастания, а также число произведенных ими потомков и объем финального продукта. Пусть помеченная частица погибла $(N+1)$-й. Обозначим $1^*, 2^*, \ldots, N^*$ номера частиц (в соответствии с введенными обозначениями эти номера имеют вид $(j_1 j_2 \ldots j_k)$), погибших ранее частицы (0), и пусть $t_1 < t_2 < \cdots < t_N < t_{(0)}$ – моменты гибели этих частиц и частицы (0). Тогда последовательность событий, произошедших в ветвящемся процессе к моменту гибели помеченной частицы, будет иметь (в рамках нашей вероятностной схемы) следующий вид

$$(1^*, t_1, \xi_{1^*}, \chi_{1^*}),\ \ (2^*, t_2, \xi_{2^*}, \chi_{2^*}),\ \ \ldots,\ \ (N^*, t_N, \xi_{N^*}, \chi_{N^*}),\ \ (0, t_{(0)}),$$

а финальный продукт, произведенный в ветвящемся процессе к моменту гибели помеченной частицы равен

$$T_n^{*\chi} = \chi_{1^*} + \chi_{2^*} + \cdots + \chi_{N^*}. \tag{71}$$

Предыдущие построения могут служить основой при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 22. *Описанные выше ветвящийся процесс и систему обслуживания можно задать на одном и том же вероятностном пространстве таким образом, что*

$$T_n^{\chi} = Z_1^{\chi}(\tau) + \cdots + Z_n^{\chi}(\tau) \quad \textit{почти наверное},$$

*где случайные величины* $\tau$ *и* $Z_i^{\chi}(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *независимы, причем* $\mathbf{P}(\tau \leqslant x) = 1 - e^{-x}$, *и*

$$Z_i^{\chi}(t) \stackrel{d}{=} Z^{\chi}(t) \quad \textit{при любом } t \geqslant 0.$$

Доказательство. Кажется почти очевидным, что для доказательства теоремы достаточно установить, что если в момент времени $t$ число частиц в ветвящемся процессе равно, скажем, $m + 1$, то каждая из этих частиц имеет вероятность $(m + 1)^{-1}$ произвести потомство первой. Для доказательства этого факта перенумеруем произвольным образом частицы, существующие в момент $t$, и пусть $l_1, l_2, \ldots, l_{m+1}$ – оставшиеся (после момента $t$) продолжительности жизней рассматриваемых частиц. В силу свойств экспоненциального распределения $\mathbf{P}(l_i > x) = e^{-x}$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\bigl(\min_{1 \leqslant i \leqslant m} l_i \leqslant x\bigr) = 1 - e^{-mx}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\bigl(l_{m+1} < \min_{1 \leqslant i \leqslant m} l_i\bigr) &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}(l_{m+1} < x)\, d\,\mathbf{P}\bigl(\min_{1 \leqslant i \leqslant m} l_i \leqslant x\bigr) \\ &= m \int_0^{\infty} (1 - e^{-x}) e^{-mx}\, dx = \frac{1}{m+1}\,.\end{aligned}$$

Будем теперь интерпретировать частицу с номером $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ как требование в системе обслуживания с номером $(i_1 i_2 \ldots i_k)$, а число ее потомков и объем финального продукта – как число требований, пришедших в систему за время обслуживания требования $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ и объем финального продукта, образовавшегося в системе в момент окончания обслуживания требования $(i_1 i_2 \ldots i_k)$.

В дальнейшем нам будет удобно понимать равенства вида $|\overline{N}| = k$ (соответственно, $|N^*| = k$) как факт, что число требований, которые были обслужены до момента поступления на обслуживание помеченного требования (соответственно, как количество частиц, которые погибли ранее помеченной частицы) равно $k$.

Ясно, что

$$\mathbf{P}(T_n^\chi = 0) = \mathbf{P}(|\overline{N}| = 0) = \frac{1}{n+1}\,.$$

С другой стороны

$$\mathbf{P}\bigl(l_0 < \min_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i\bigr) = \mathbf{P}(|N^*| = 0) = \frac{1}{n+1}\,.$$

Таким образом, вероятность того, что помеченное требование будет взято на обслуживание первым, равна вероятности того, что помеченная частица погибнет первой. Поскольку распределения объемов финальных продуктов в системе обслуживания и ветвящемся процессе совпадают, то из приведенных выше описаний элементарных событий нетрудно понять, для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$\mathbf{P}(|\overline{N}| = k) = \mathbf{P}(|N^*| = k) \tag{72}$$

при любом $k \geqslant 1$. Ясно, что

$$\mathbf{P}(|\overline{N}| = 1) = \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\bigl[\mathbf{P}(|\overline{N}| = 1|\xi_{\overline{1}})\bigr] = \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\,\frac{1}{n+\xi_{\overline{1}}}\,.$$

и, аналогично,

$$\mathbf{P}(|N^*| = 1) = \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\bigl[\mathbf{P}(|N^*| = 1|\xi_{1^*})\bigr] = \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\,\frac{1}{n+\xi_{1^*}}\,.$$

Поскольку распределения случайных величин $\xi_{1^*}$ и $\xi_{\overline{1}}$ совпадают, то справедливость равенства (72) при $k = 1$ доказана. По тем же соображениям, для произвольного $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\overline{N}| = k) &= \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\big[\mathbf{P}(|\overline{N}| = k \mid \xi_{\overline{1}}, \dots, \xi_{\overline{k}})\big] \\ &= \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\,\frac{1}{n-k+\xi_{\overline{1}}+\xi_{\overline{2}}+\dots+\xi_{\overline{k}}} \\ &\qquad\times\prod_{j=1}^{k-1}\frac{n-j+\xi_{\overline{1}}+\xi_{\overline{2}}+\dots+\xi_{\overline{k-1}}}{n-j+1+\xi_{\overline{1}}+\xi_{\overline{2}}+\dots+\xi_{\overline{k-1}}}\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|N^*| = k) &= \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\big[\mathbf{P}(|N^* = k| \mid \xi_{1^*}, \dots, \xi_{k^*})\big] \\ &= \frac{n}{n+1}\,\mathbf{E}\,\frac{1}{n-k+\xi_{1^*}+\xi_{2^*}+\dots+\xi_{k^*}} \\ &\qquad\times\prod_{j=1}^{k-1}\frac{n-j+\xi_{1^*}+\xi_{2^*}+\dots+\xi_{(k-1)^*}}{n-j+1+\xi_{1^*}+\xi_{2^*}+\dots+\xi_{(k-1)^*}}\,,\end{aligned}$$

что в силу одинаковой распределенности случайных величин $\xi_{j^*}$ и $\xi_{\overline{j}}$ при любом $j$ доказывает (72) для всех $k \geqslant 1$.

Теорема доказана.

Из сформулированной выше теоремы, в частности, следует, что

$$\mathbf{E}e^{-\lambda T_n^\chi} = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathbf{E}e^{-\lambda(Z_1^\chi(t)+\dots+Z_n^\chi(t))}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\Phi^n(t;\lambda)\,dt,$$

где $\Phi(t;\lambda) = \mathbf{E}e^{-\lambda Z^\chi(t)}$, и при любом $p \geqslant 0$

$$\mathbf{E}(T_n^\chi)^p = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathbf{E}\big(Z_1^\chi(t)+\dots+Z_n^\chi(t)\big)^p\,dt.$$

При $p = 1$ и $\mathbf{E}\xi < 2$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}T_n^\chi &= n \int_0^\infty e^{-t}\,\mathbf{E}Z^\chi(t)\,dt \\
&= \frac{n\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1} \int_0^\infty e^{-t}\big(e^{(\mathbf{E}\xi-1)t} - 1\big)\,dt \\
&= \frac{n\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1} \int_0^\infty \big(e^{(\mathbf{E}\xi-2)t} - e^{-t}\big)\,dt \\
&= \frac{n\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1}\left(\frac{1}{2-\mathbf{E}\xi} - 1\right) = \frac{n\mathbf{E}\chi}{2 - E\xi}\,.
\end{aligned}$$

Следовательно, если $\mathbf{E}\xi < 2$, то случайная величина $T_n^\chi$ имеет конечное математическое ожидание при любом $n = 1, 2, \ldots$ . Если же $\mathbf{E}\xi \geqslant 2$, то $\mathbf{E}T_n^\chi = \infty$.

Можно показать, что при $\mathbf{E}\xi < 3/2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_n^\chi)^2 = n\bigg(&\frac{\mathbf{E}\chi^2}{2-\mathbf{E}\xi} + \frac{2\mathbf{E}\chi\mathbf{E}\xi\chi}{(2-\mathbf{E}\xi)^2} + \frac{2(\mathbf{E}\chi)^2(\mathbf{E}\xi^2-2)}{(3-2\mathbf{E}\xi)(2-\mathbf{E}\xi)^2}\bigg) \\
&+ \frac{n^2\mathbf{E}\chi^2}{(3-2\mathbf{E}\xi)(2-\mathbf{E}\xi)}\,,
\end{aligned}$$

а если $\mathbf{E}\xi \geqslant 3/2$, то $\mathbf{E}(T_n^\chi)^2 = \infty$.

Замечание. Выведем условия, при выполнении которых $\mathbf{P}(T_n^\chi < \infty) = 1$. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(T_n^\chi < \infty) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(Z^\chi(\tau) < \infty) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}(Z^\chi(t) < \infty) = 1$$

для почти всех $t > 0$ и, следовательно, для всех $t > 0$. Можно показать, что если $\mathbf{P}(\chi > 0) > 0$, то

$$\mathbf{P}\big(Z^\chi(t) < \infty\big) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{P}\big(Z(t) < \infty\big) = 1.$$

Отсюда и из критерия регулярности для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 23. $\mathbf{P}(T_n^\chi < \infty) = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^1 \frac{du}{1 - f(1-u)} = \infty. \tag{73}$$

Поскольку для $M|G|1$ системы с ординарным пуассоновским потоком требований интенсивности $\rho = 1$ и единичной интенсивностью обслуживания требований в системе

$$f(s) = \mathbf{E}s^{\xi} = \int_0^{\infty} e^{(s-1)x}\, dB(x),$$

то для такой системы $\mathbf{P}(T_n^{\chi} < \infty) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \left(1 - \int_0^{\infty} e^{-xu}\, dB(x)\right)^{-1} du = \infty.$$

Упомянем одно интересное явление, указанное С. А. Гришечкиным в работе [11]. Пусть имеются две $M|G|1$ системы с ординарным пуассоновским потоком требований интенсивности $\rho = 1$ и единичной интенсивностью обслуживания требований. Пусть $B_i(x)$, $i = 1, 2$, – распределения времен обслуживания требований в каждой из этих систем. Объединим эти две системы в одну, предполагая, что функция распределения времени обслуживания поступившего требования имеет вид

$$\frac{B_1(x) + B_2(x)}{2}\,,$$

а интенсивность обслуживания требований в этой новой системе также равна 1. Оказывается, что можно построить две функции $B_i(x)$, $i = 1, 2$, такие, что с положительной вероятностью время ожидания начала обслуживания отмеченным требованием в объединенной системе будет бесконечным, в то время как время ожидания начала обслуживания отмеченным требованием в каждой из этих систем конечно с вероятностью единица. Явное построение этого примера выходит за рамки этого курса лекций. Заинтересованный читатель может ознакомится с таким построением, обратившись к уже упоминавшейся статье С. А. Гришечкина [11].

Исследуем некоторые свойства финального продукта $T_n^{\chi}$ рассматриваемого процесса при $n \to \infty$. Положим $m = \mathbf{E}\xi - 1$ и обозначим

$$x_m = -\frac{1}{m}\,, \quad m < 0, \qquad x_m = \infty, \quad m > 0.$$

Теорема 24. *При $n \to \infty$*

$$\frac{T_n^{\chi}}{n\mathbf{E}\chi} \xrightarrow{d} \zeta_m,$$

*где при $m \neq 0$ функция распределения $F_m(x)$ случайной величины $\zeta_m$ имеет вид*

$$F_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1 - (1 + mx)^{-1/m}, & \text{если } 0 \leqslant x < x_m; \\ 1, & \text{если } x \geqslant x_m; \end{cases}$$

*в то время как*

$$F_0(x) = 1 - e^{-x}, \qquad x \geqslant 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 22

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_n^{\chi}}{n\mathbf{E}\chi} \leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{Z_1^{\chi}(\tau) + \cdots + Z_n^{\chi}(\tau)}{n\mathbf{E}\chi} \leqslant x\right)$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathbf{P}\left(\frac{Z_1^{\chi}(t) + \cdots + Z_n^{\chi}(t)}{n\mathbf{E}\chi} \leqslant x\right) dt.$$

Пусть $m \neq 0$. Как мы уже знаем, в этом случае

$$\mathbf{A}^{\chi}(t) = \frac{\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1}\, e^{(\mathbf{E}\xi - 1)t} - \frac{\mathbf{E}\chi}{\mathbf{E}\xi - 1} = \frac{\mathbf{E}\chi}{m}(e^{mt} - 1),$$

что в силу закона больших чисел доказывает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_1^{\chi}(t) + \cdots + Z_n^{\chi}(t)}{n\mathbf{E}\chi} \leqslant x\right) = \mathbf{I}\left(\frac{1}{m}(e^{mt} - 1) \leqslant x\right), \qquad (74)$$

где $\mathbf{I}(C)$ – индикатор события $C$.

Нетрудно проверить, что при $0 \leqslant x < x_m$

$$\mathbf{I}\left(\frac{1}{m}(e^{mt} - 1) \leqslant x\right) = \mathbf{I}\left(t \leqslant \frac{1}{m}\ln(mx + 1)\right).$$

Теперь применение теоремы о монотонной сходимости приводит при $0 \leqslant x < x_m$ к соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathbf{P}\left(\frac{Z_1^{\chi}(t) + \cdots + Z_n^{\chi}(t)}{n\mathbf{E}\chi} \leqslant x\right) dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathbf{I}\left(\frac{1}{m}(e^{mt} - 1) \leqslant x\right) dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathbf{I}\left(t \leqslant \frac{1}{m}\ln(mx + 1)\right) dt$$
$$= \int_0^{\ln(mx+1)/m} e^{-t}\, dt = 1 - (1 + mx)^{-1/m}.$$

Если же $m = 0$, то $\mathbf{A}^{\chi}(t) = t$ и, следовательно, при $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-t}\, \mathbf{P}\left(\frac{Z_1^{\chi}(t) + \cdots + Z_n^{\chi}(t)}{n\mathbf{E}\chi} \leqslant x\right) dt \\ = \int_0^\infty e^{-t}\, \mathbf{I}(t \leqslant x)\, dt \\ = \int_0^x e^{-t}\, dt = 1 - e^{-x}.\end{aligned}$$

Теорема 24 доказана.

## 15. Ветвящиеся процессы с иммиграцией и финальным продуктом

Рассмотрим популяцию частиц, образованную следующим образом. В начальный момент времени в популяции имеется одна особая "вечная" частица. Через случайные промежутки времени $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, распределенные экспоненциально с параметром $\rho_0$, "вечная" частица производит $\eta_1, \eta_2, \ldots$ частиц-аборигенов. Величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ случайны, независимы и одинаково распределены в соответствии с вероятностной производящей функцией $g(s) = \mathbf{E}s^{\eta}$. Кроме того, в моменты $\sigma_1, \sigma_1+\sigma_2, \ldots$ "вечная" частица вбрасывает в популяцию финальный продукт объемов $\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots$, соответственно. Финальный продукт накапливается в популяции не изменяясь. Случайные величины $\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots$ независимы и одинаково распределены: $\chi_i^* \stackrel{d}{=} \chi^* \geqslant 0$.

При этом предполагается, что совместное распределение пары $\eta, \chi^*$ описывается функцией

$$\psi^{\chi}(s, \lambda) = \mathbf{E}s^{\eta}e^{-\lambda\chi^*}, \qquad \psi^{\chi}(s, 0) = g(s).$$

Потомки "вечной" частицы, пришедшие (иммигрировавшие) в популяцию, в дальнейшем эволюционируют независимо друг от друга в соответствии с марковским ветвящимся процессом с непрерывным временем и финальным продуктом, т.е. каждая частица имеет экспоненциально распределенную продолжительность жизни с параметром $\rho$, в конце которой она производит случайное число потомков-аборигенов $\xi$ в соответствии с вероятностной производящей функцией $f(s) = \mathbf{E}s^{\xi}$, а также финальный продукт $\chi \geqslant 0$ случайного объема, который накапливается в популяции не изменяясь. Совместное распределение пары $\xi, \chi$ описывается функцией

$$\varphi^{\chi}(s, \lambda) = \mathbf{E}s^{\xi}e^{-\lambda\chi}, \qquad \varphi^{\chi}(s, 0) = f(s).$$

Пара $\chi^*, \chi$ называется случайной характеристикой описанного процесса, а сам процесс, эволюция которого описывается четверкой

$$\big(\rho_0, \rho, \psi^{\chi}(s, \lambda), \varphi^{\chi}(s, \lambda)\big),$$

называется ветвящимся процессом с иммиграцией и случайными характеристиками (или ветвящимся процессом с иммиграцией и финальным продуктом).

Обозначим $Y(t)$ число частиц в процессе с иммиграцией в момент $t$ (без учета "вечной" частицы). Пусть, далее, $\mathscr{I}_t = \{I\}$ – множество моментов вбрасывания финального продукта "вечной" частицей в промежутке $[0, t]$, а $\mathscr{A}_t = \{\mathscr{A}\}$ – множество частиц-аборигенов $\mathscr{A}$, погибших в процессе за время $[0, t]$. Обозначим

$$Y_*^\chi(t) = \sum_{\mathscr{A} \in \mathscr{A}_t} \chi_{\mathscr{A}} + \sum_{I \in \mathscr{I}_t} \chi_I^*$$

совокупный финальный продукт, произведенный в процессе с иммиграцией за время $[0, t]$.

Пусть $\big(Z(t), Z^\chi(t)\big)$ – количество частиц и совокупный объем финального продукта в момент $t$ в обычном (без иммиграции) ветвящемся процессе со случайной характеристикой $\chi$, производящей функцией числа непосредственных потомков $f(s)$, распределением длительности жизней частиц $G(t) = 1 - e^{-\rho t}$ и начальным условием $\big(Z(0), Z^\chi(0)\big) = (1, 0)$. Заметим, что если $\sigma_1$ – момент прихода в популяцию первой группы иммигрантов размера $\eta_1$, то

$$\begin{aligned}\big(Y(t), Y_*^\chi(t)\big) \overset{d}{=} I\{\sigma_1 \leqslant t\}\big(\widetilde{Y}(t - \sigma_1), \widetilde{Y}_*^\chi(t - \sigma_1)\big) \\ + I\{\sigma_1 \leqslant t\}\left[\chi_1^* + \sum_{i=1}^{\eta_1}\big(Z_i(t - \sigma_1), Z_i^\chi(t - \sigma_1)\big)\right],\end{aligned} \tag{75}$$

где при фиксированной паре $(\sigma_1, \eta_1)$ двумерные векторы в правой части (75) независимы, причем

$$\begin{aligned}&\big(\widetilde{Y}(t), \widetilde{Y}_*^\chi(t)\big) \overset{d}{=} \big(Y(t), Y_*^\chi(t)\big), \\ &\big(Z_i(t), Z_i^\chi(t)\big) \overset{d}{=} \big(Z(t), Z^\chi(t)\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, \eta_1.\end{aligned}$$

Наша цель – вывести дифференциальное уравнение для функции

$$\begin{aligned}\Phi_*(t; s, \lambda) :&= \mathbf{E}\big[s^{Y(t)} e^{-\lambda Y_*^\chi(t)}\big] \\ &= \mathbf{E}\big[s^{Y(t)} e^{-\lambda Y_*^\chi(t)} \mid Y(0) = 0,\ Y_*^\chi(0) = 0\big],\end{aligned}$$

описывающей распределение вектора $\big(Y(t), Y_*^\chi(t)\big)$ в момент $t$ при условии отсутствия частиц и финального продукта в процессе в момент $t = 0$. Пусть, как и ранее,

$$\Phi(t; s, \lambda) = \mathbf{E}\big[s^{Z(t)} e^{-\lambda Z^\chi(t)} \mid \big(Z(0), Z^\chi(0)\big) = (1, 0)\big].$$

Напомним, что

$$\Phi(t;s,\lambda) = s\big(1-G(t)\big) + \int_0^t \varphi^{\chi}\big(\Phi(t-u;s,\lambda),\lambda\big)\,dG(u),$$

причем справедливо равенство

$$F(t;s) := \mathbf{E}\big[s^{Z(t)} \mid Z(0)=1\big] = \Phi(t,s,0)$$

и выполняется начальное условие $F(0,s) = \Phi(0;s,0) = s$. Учитывая, что функция распределения промежутков времени между поступлением в популяцию иммигрантов равна $G_0(t) = 1 - e^{-\rho_0 t}$, и используя соотношение (75) и формулу полной вероятности, получаем следующее интегральное уравнение для $\Phi_*(t,s,\lambda)$

$$\begin{aligned}
\Phi_*(t;s,\lambda) &= \mathbf{E}\big[s^{Y(t)}e^{-\lambda Y_*^{\chi}(t)};\sigma_1 > t\big] \\
&\qquad + \int_0^t \mathbf{E}\big[s^{Y(t)}e^{-\lambda Y_*^{\chi}(t)} \mid \sigma_1 = u\big]\,dG_0(u) \\
&= 1 - G_0(t) \\
&\qquad + \int_0^t \psi^{\chi}\big(\Phi(t-u;s,\lambda),\lambda\big)\Phi_*(t-u;s,\lambda)\,dG_0(u) \\
&= e^{-\rho_0 t} + \rho_0\int_0^t \psi^{\chi}\big(\Phi(u;s,\lambda),\lambda\big)\Phi_*(u;s,\lambda)e^{-\rho_0(t-u)}\,du
\end{aligned}$$

с начальным условием

$$\Phi_*(0;s,\lambda) = 1.$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_*(t;s,\lambda)}{\partial t} &= -\rho_0 e^{-\rho_0 t} \\
&\qquad - \rho_0^2\int_0^t \psi^{\chi}\big(\Phi(u;s,\lambda),\lambda\big)\Phi_*(u;s,\lambda)e^{-\rho_0(t-u)}\,du \\
&\qquad + \rho_0\psi^{\chi}\big(\Phi(u;s,\lambda),\lambda\big)\Phi_*(u;s,\lambda) \\
&= -\rho_0\Phi_*(t;s,\lambda) + \rho_0\psi^{\chi}\big(\Phi(t;s,\lambda),\lambda\big)\Phi_*(t;s,\lambda) \\
&= \rho_0\big(\psi^{\chi}(\Phi(t;s,\lambda),\lambda) - 1\big)\Phi_*(t;s,\lambda).
\end{aligned}$$

Решая это дифференциальное уравнение с указанным выше начальным условием, получаем

$$\Phi_*(t;s,\lambda) = \exp\bigg\{\int_0^t \rho_0\big(\psi^{\chi}(\Phi(u;s,\lambda),\lambda) - 1\big)du\bigg\}. \tag{76}$$

Из уравнения (76) при $\lambda = 0$ вытекает, что производящая функция

$$F^0(t;s) = \mathbf{E}\big[s^{Y(t)} \mid Y(0)=0\big] = \Phi_*(t;s,0), \qquad F^0(0;s)=1,$$

числа частиц $Y(t)$ в момент $t$ в ветвящемся процессе с иммиграцией (без учета финального продукта) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F^0(t;s)}{\partial t} = \rho_0\big(g(F(t;s))-1\big)F^0(t;s),$$

где $F(t;s) = \mathbf{E}\big[s^{Z(t)} \mid Z(0)=0\big]$. Решение этого уравнения имеет вид

$$F^0(t;s) = \exp\biggl\{\int_0^t \rho_0\big(g(F(u;s))-1\big)\,du\biggr\}. \tag{77}$$

# 16. Ветвящиеся процессы с иммиграцией и непрерывным временем

Частным случаем ветвящихся процессов с иммиграцией и случайной характеристикой является обычный ветвящийся процесс с иммиграцией и непрерывным временем, т.е. процесс с иммиграцией, в котором финальный продукт отсутствует. Такой процесс характеризуется параметрами $\rho_0$, $\rho$ и производящими функциями $g(s) = \mathbf{E}s^\eta$ и $f(s) = \mathbf{E}s^\xi$. Напомним, что производящая функция $F(t;s)$ числа частиц в момент $t$ для процесса без иммиграции удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(t;s) = s\bigl(1 - G(t)\bigr) + \int_0^t f\bigl(F(t-u;s)\bigr)\,dG(u)$$

и дифференциальному (обратному) уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial F(t;s)}{\partial t} = \rho\bigl(f(F(t;s)) - F(t;s)\bigr) = f^{(\rho)}\bigl(F(t;s)\bigr), \qquad F(0;s) = s. \tag{78}$$

При помощи соотношений (78) и (48) представление (77) может быть преобразовано к более удобному для исследований виду.

Теорема 25. *Если $g'(1) < \infty$ и $f'(1) < 1$, то*

$$\lim_{t\to\infty} F^0(t;s) = \exp\biggl\{\int_0^\infty \rho_0\bigl(g(F(u;s)) - 1\bigr)\,du\biggr\} = \exp\biggl\{\int_s^1 \frac{\rho_0(g(y)-1)}{\rho(f(y)-y)}\,dy\biggr\}.$$

Доказательство. Поскольку

$$0 \leqslant 1 - g\bigl(F(u;s)\bigr) \leqslant g'(1)\bigl(1 - F(u;s)\bigr) \leqslant g'(1)e^{\rho(f'(1)-1)u}(1-s),$$

то интеграл в (77) сходится равномерно по $s \in [0,1]$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} F^0(t;s) = \exp\biggl\{\int_0^\infty \rho_0\bigl(g(F(u;s)) - 1\bigr)\,du\biggr\}.$$

Так как для докритического процесса без иммиграции $F(t;s) \geqslant F(t;0) \to 1$ при $t \to \infty$ и $g(1) = 1$, то

$$\frac{\rho_0 g(F(t;s))}{f^{(\rho)}(s)} \to \frac{\rho_0}{f^{(\rho)}(s)}, \qquad t \to \infty,$$

равномерно по $s \in [0,1)$. Поэтому в приводимых ниже соотношениях возможна перестановка операций интегрирования и дифференцирования, что с учетом (78) и (48) приводит к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_0^\infty \rho_0\big(g(F(u;s))-1\big)\,du &= \rho_0\int_0^\infty \frac{dg(F(u;s))}{dF}\,\frac{\partial F(u;s)}{\partial s}\,du\\
&= \rho_0\int_0^\infty \frac{dg(F(u;s))}{dF}\,\frac{\partial F(u;s)}{\partial u}\,\frac{du}{f^{(\rho)}(s)}\\
&= \frac{\rho_0}{f^{(\rho)}(s)}\int_0^\infty \frac{\partial g(F(u;s))}{\partial u}\,du\\
&= \frac{\rho_0}{f^{(\rho)}(s)}\,g\big(F(u;s)\big)\Big|_{u=0}^{\infty}\\
&= \frac{\rho_0(1-g(s))}{f^{(\rho)}(s)}\,.
\end{aligned}$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Докажем теперь теорему, описывающую асимптотическое поведение распределения числа частиц $Y(t)$ в критическом ветвящемся процессе с иммиграцией при $t \to \infty$.

Теорема 26. *Если* $g'(1) = b < \infty$ *и* $f'(1) = 1$, $f''(1) = 2B \in (0,\infty)$, *то для* $\theta = b\rho_0/B\rho$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Y(t)}{\rho Bt} \leqslant x\right) = \frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^x y^{\theta-1}e^{-y}\,dy. \tag{79}$$

Доказательство. Положим

$$s = s(t,\lambda) := \exp\left\{-\frac{\lambda}{\rho Bt}\right\}$$

и найдем $T = T(t,\lambda)$ такое, что

$$F(T;0) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\rho Bt}\right\} = s.$$

Поскольку $f'(1) = 1$, то в силу теоремы об асимптотическом поведении вероятности невырождения критических ветвящихся процессов с непрерывным временем

$$1 - F(T;0) \sim \frac{\lambda}{\rho Bt} \sim \frac{1}{\rho BT}$$

при $t \to \infty$. Таким образом, $T = T(t,\lambda) \sim t/\lambda$. Отсюда и из представления (77) следует, что при $t \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\exp\left(-\frac{\lambda Y(t)}{\rho B t}\right) &= \exp\left\{\int_0^t \rho_0\big(g(F(u;s))-1\big)\,du\right\}\\
&= \exp\left\{\int_0^t \rho_0\big(g(F(u;F(T;0)))-1\big)\,du\right\}\\
&= \exp\left\{\int_0^t \rho_0\big(g(F(u+T;0))-1\big)\,du\right\}\\
&= \exp\left\{-\big(1+o(1)\big)\int_0^t \rho_0 g'(1)\big(1-F(u+T;0)\big)\,du\right\}\\
&= \exp\left\{-\big(1+o(1)\big)\frac{\rho_0 b}{\rho B}\int_0^t \frac{1}{u+t/\lambda}\,du\right\}\\
&\sim \exp\left\{-\theta\int_0^t \frac{1}{u+t/\lambda}\,du\right\}\\
&= \exp\left\{-\theta\ln\left(\frac{t(1+1/\lambda)}{t/\lambda}\right)\right\} = \frac{1}{(1+\lambda)^\theta}\,,
\end{aligned}$$

что в силу равенства

$$\frac{1}{(1+\lambda)^\theta} = \frac{1}{\Gamma(\theta)}\int_0^\infty e^{-\lambda y} y^{\theta-1} e^{-y}\,dy$$

доказывает теорему.

## 17. Система $M|G|1$ с повторными вызовами

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченной очередью и одним прибором, на который поступает пуассоновский поток требований интенсивности $\rho_0$. Если пришедшее требование приходит в тот момент, когда прибор свободен, то оно немедленно начинает обслуживаться. В противном случае требование становится в очередь и через промежутки времени, распределенные экспоненциально с параметром $\rho$, повторяет попытки попасть на обслуживание.

Пусть $\pi_i$ обозначает длительность обслуживания $i$-го требования, поступившего на прибор, а $\xi_i$ – количество новых требований, поступивших за время обслуживания $i$-го требования. Будем предполагать, что векторы $(\xi_i, \pi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены $\pi \stackrel{d}{=} \pi_i$, и обозначим $B(x) = \mathbf{P}(\pi < x)$ функцию распределения длительности обслуживания одного требования.

Предположим, что первоначально в системе находятся $n+1$ требование, одно из которых помечено, и прибор свободен. Тогда в течение времени $\theta_1$ с распределением

$$\mathbf{P}(\theta_1 > t) = e^{-t(\rho(n+1)+\rho_0)}$$

прибор будет свободен. Затем какое-либо требование поступит на обслуживание, в результате чего в промежутке времени $(\theta_1, \theta_1 + \pi_1]$ прибор будет занят, причем за это время в очередь добавятся $\xi_1$ новых требований. Освободившись прибор будет простаивать в промежутке времени $(\theta_1 + \pi_1, \theta_1 + \pi_1 + \theta_2]$, причем распределение случайной величины $\theta_2$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\theta_2 > t) = e^{-t(\rho(n+\xi_1)+\rho_0)}.$$

Пусть $N$ – количество требований, обслуженных прежде, чем помеченное требование поступило на обслуживание. Ясно, что в этом случае время ожидания $V_n$ начала обслуживания помеченным требованием вычисляется по формуле

$$V_n = \theta_1 + \pi_1 + \theta_2 + \pi_2 + \cdots + \theta_N + \pi_N + \theta_{N+1},$$

где $\theta_i$ – длительность простоя прибора перед началом обслуживания $i$-го требования, а общее число попыток попасть на обслуживание, совершенных помеченным требованием к моменту начала обслуживания, равно

$$R_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_N + 1,$$

где $r_i$ – количество безуспешных попыток в промежутке, заключенном между моментами окончания обслуживания $(i-1)$-го и $i$-го требований. Пусть $r \stackrel{d}{=} r_i$. Наша цель – исследовать свойства величин $V_n$ и $R_n$ при $n \to \infty$.

Как и в случае систем со случайным порядком обслуживания, мы взглянем на эту проблему с более общей точки зрения. А именно, будем предполагать, что в конце обслуживания $i$-го требования прибор выдает финальный продукт случайного объема $\chi_i$, а число новых требований, поступивших за время обслуживания $i$-го требования, равно $\xi_i$. Допустим также, что векторы $(\xi_i, \chi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены, причем, как и ранее, $\chi_i \stackrel{d}{=} \chi$. В такой постановке совокупный объем $T_n^{*\chi}$ финального продукта, произведенного прибором к моменту начала обслуживания помеченного требования, вычисляется по формуле

$$T_n^{*\chi} = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_N.$$

В частности,

$$R_n = T_n^{*r} + 1, \qquad V_n = T_n^{*\pi} + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N + \theta_{N+1}.$$

# 18. Вспомогательный ветвящийся процесс с иммиграцией и финальным продуктом

Свяжем с описанной выше системой массового обслуживания с повторными вызовами следующий ветвящийся процесс с иммиграцией и финальным продуктом.

В начальный момент времени в процессе есть $n+1$ частица-абориген. Через случайные промежутки времени, имеющие экспоненциальное распределение с параметром $\rho_0$, в ветвящийся процесс вбрасывается финальный продукт случайного объема $\chi$ и одновременно иммигрирует случайное число $\eta$ частиц, которые мгновенно становятся аборигенами. Совместное распределение пары $\eta, \chi$ задается функцией $\psi^{\chi}(s,\lambda) = \mathbf{E}s^{\eta}e^{-\lambda\chi}$. Длительности жизней частиц-аборигенов случайны и имеют экспоненциальное распределение с параметром $\rho$. В конце жизни частица-абориген, скажем, $\mathscr{A}$, производит финальный продукт $\chi_{\mathscr{A}}$ и случайное число потомков $\xi_{\mathscr{A}}$. При этом предполагается, что распределения векторов $(\chi, \eta)$ и $(\chi_{\mathscr{A}}, \xi_{\mathscr{A}})$ совпадают, т.е.

$$\psi^{\chi}(s,\lambda) = \mathbf{E}s^{\eta}e^{-\lambda\chi} = \mathbf{E}s^{\xi_{\mathscr{A}}}e^{-\lambda\chi_{\mathscr{A}}} =: \varphi^{\chi}(s,\lambda).$$

Предполагается также, что

$$g(s) := \psi^{\chi}(s,0) = \varphi^{\chi}(s,0) =: f(s) = \int_0^{\infty} e^{\rho_0(s-1)x}\, dB(x),$$

где $\beta(x)$ – функция распределения, введенная в предыдущем параграфе.

Обозначим $\theta_1', \theta_1'+\theta_2', \ldots$ моменты иммиграции или гибели частиц в рассматриваемом процессе с иммиграцией и финальным продуктом.

В дальнейшем рождение частицы $\mathscr{A}$ будет интерпретироваться как приход в систему требования $\mathscr{A}$, а гибель частицы $\mathscr{A}$ – как окончание обслуживания требования $\mathscr{A}$. Иммиграция соответствует случаю, когда в момент прихода требования в систему прибор свободен и немедленно начинает обслуживание этого требования.

Проследим за изменениями в рассматриваемой системе в моменты $\theta_1, \theta_1+\pi_1+\theta_2, \theta_1+\pi_1+\theta_2+\pi_2+\theta_3, \ldots$ .

Будем записывать, сколько новых требований пришло в систему, какое из требований обслуживается, и какое количество финального продукта оно произвело. Непосредственная проверка показывает, что объем финального продукта, образовавшийся в системе к моменту начала обслуживания помеченного требования, совпадает с объемом финального продукта, произведенном во вспомогательном ветвящемся процессе с иммиграцией к моменту гибели помеченной частицы,

$$P(\tau \leqslant x) = 1 - e^{-\rho x}.$$

Нетрудно понять, что

$$\theta_1 \stackrel{d}{=} \theta_1', \qquad \theta_2 \stackrel{d}{=} \theta_2', \qquad \dots$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 27. *Описанные выше систему массового обслуживания с повторными вызовами и вспомогательный ветвящийся процесс с иммиграцией можно задать на одном вероятностном пространстве таким образом, что*

$$T_n^{*\chi} = Z_1^\chi(\tau) + \dots + Z_n^\chi(\tau) + Y_*^\chi(\tau) \quad \textit{почти наверное},$$

*и*

$$\theta_1 = \theta_1', \qquad \theta_2 = \theta_2', \qquad \dots \qquad \textit{почти наверное},$$

*где $\tau$ и случайные величины $Z_i^\chi(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$, независимы, причем $P(\tau \leqslant x) = 1 - e^{-\rho x}$ и*

$$Z_i^\chi(\tau) \stackrel{d}{=} Z^\chi(\tau),$$

*а $Y_*^\chi(t)$ – финальный продукт, накопившийся к моменту $t$ во вспомогательном ветвящемся процессе с иммиграцией, в котором в момент времени $t = 0$ частиц не было.*

Поскольку

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N + \theta_{N+1} \stackrel{\text{п.н.}}{=} \theta_1' + \theta_2' + \dots + \theta_N' + \theta_{N+1}' = \tau,$$

мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 5.

$$R_n = r_1 + r_2 + \dots + r_N + 1 = Z_1^r(\tau) + \dots + Z_n^r(\tau) + Y_*^r(\tau) + 1 = T_n^{*r} + 1$$

*и*

$$\begin{aligned} V_n &= \theta_1 + \pi_1 + \theta_2 + \pi_2 + \dots + \theta_N + \pi_N + \theta_{N+1} \\ &= T_n^{*\pi} + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N + \theta_{N+1} \\ &= Z_1^\pi(\tau) + \dots + Z_n^\pi(\tau) + Y_*^\pi(\tau) + \tau. \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\Phi(t,\lambda) = \mathbf{E}\big[e^{-\lambda Z^\chi(t)} \mid \big(Z(0), Z^\chi(0)\big) = (1,0)\big]$$

и

$$\Phi_*(t,\lambda) = \mathbf{E}\big[e^{-\lambda Y^\chi(t)} \mid \big(Y(0), Y_*^\chi(0)\big) = (0,0)\big].$$

Поэтому

$$\mathbf{E}e^{-\lambda T_n^{*\chi}} = \rho \int_0^\infty e^{-\rho_1 t}\Phi^n(t,\lambda)\Phi_*(t,\lambda)\,dt,$$

где

$$\frac{\partial\Phi(t,\lambda)}{\partial t} = \rho\big(\varphi^\chi(\Phi(t,\lambda),\lambda) - \Phi(t,\lambda)\big), \qquad \Phi(0,\lambda) = 1,$$

и

$$\Phi_*(t,\lambda) = \exp\bigg\{\int_0^t \rho_0\big(\varphi^\chi(\Phi(u,\lambda),\lambda) - 1\big)\,du\bigg\}.$$

Пусть $m = \mathbf{E}\xi - 1$. Повторяя почти дословно рассуждения, использовавшиеся в аналогичной ситуации для марковских ветвящихся процессов без иммиграции, можно убедиться в справедливости следующей теоремы, доказательство которой мы опускаем. Пусть, как и ранее,

$$x_m = -\frac{1}{m}, \quad m < 0, \qquad x_m = \infty, \quad m > 0.$$

Теорема 28. *При $n \to \infty$*

$$\frac{T_n^{*\chi}}{\rho n E\chi} \xrightarrow{d} \zeta_m^*,$$

*где при $m \neq 0$ функция распределения $F_m^*(x)$ случайной величины $\zeta_m^*$ имеет вид*

$$F_m^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1 - (1+mx)^{-1/m}, & \text{если } 0 \leqslant x < x_m; \\ 1, & \text{если } x \geqslant x_m; \end{cases}$$

*в то время как при $m = 0$*

$$F_0^*(x) = 1 - e^{-x}, \qquad x \geqslant 0.$$

# Список литературы


[1] В. А. Ватутин, Т. М. Телевинова, В. П. Чистяков, *Вероятностные методы в физических исследованиях*, Наука, М., 1984.

[2] Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971 MR 0345229.

[3] Т. Харрис, *Теория ветвящихся случайных процессов*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: T. E. Harris, *The theory of branching processes*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963 Zbl 0117.13002.

[4] K. B. Athreya, P. Ney, *Branching Processes*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972 MR 0373040.

[5] P. Jagers, *Branching Processes with Biological Applications*, John Wiley & Sons, London, 1975 MR 0488341.

[6] P. Haccou, P. Jagers, V. Vatutin, *Branching Processes in Biology*: *Variation*, *Growth and Extinction of Populations*, Cambridge Univeristy Press, Cambridge, 2005 Zbl 1118.92001.

[7] В. А. Ватутин, А. М. Зубков, “Ветвящиеся процессы, I”, Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Кибернетика, **28**, ВИНИТИ, М., 1985, 3–67 MR 810404.

[8] V. A. Vatutin, A. M. Zubkov, “Branching Processes, II”, *J. Soviet Math.*, **67** (1993), 3407–3485 doi 10.1007/BF01096272, MR 1260986, Zbl 0846.60083.

[9] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980 MR 0609521.

[10] H. Caswell, M. Fujiwara, S. Brault, “Declining survivial probability threatens the North Atlanitic right whale”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **96** (1999), 3308–3313 doi 10.1073/pnas.96.6.3308, ADS 1999PNAS...96.3308C.

[11] С. А. Гришечкин, “О регулярности ветвящихся процессов с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **21**:2 (1986), 278–289 MR 850988.

*Научное издание*

**Лекционные курсы НОЦ**

**Выпуск 8**

***Владимир Алексеевич Ватутин***

**Ветвящиеся процессы и их применения**

Компьютерная верстка: *С. А. Поликарпов*

Сдано в набор 01.12.2007. Подписано в печать 20.06.2008.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 6,75. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pavlov@mi.ras.ru`