Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 2

Издание выходит с 2006 года

М. Е. Чанга

Метод комплексного интегрирования

МИАН

Москва
2006

УДК 511
ББК (В)22.13
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2006. Вып. 2: Метод комплексного интегрирования / Чанга М.Е. – 58 с.

ISBN 5-98419-012-5

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит полугодовой курс М. Е. Чанги “Метод комплексного интегрирования”, прочитанный в осеннем семестре 2005 года.

ISBN 5-98419-012-5

Оглавление

Обозначения 4
§ 1 Мультипликативные функции. Производящие ряды Дирихле 5
§ 2 Сумматорные функции. Формула Перрона 13
§ 3 Дзета-функция Римана. Функциональное уравнение . . . 20
§ 4 Нули дзета-функции Римана 29
§ 5 Асимптотический закон распределения простых чисел . 38
§ 6 Проблема делителей Дирихле. Формула Вороного 45

Обозначения

Запись $d \mid n$ при натуральном d и целом n означает, что d делит n, то есть существует целое q такое, что $n = dq$;

(n, m) обозначает наибольший общий делитель чисел n и m;

$p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2, \ldots$ обозначают простые числа;

$s = \sigma + it$ обозначает комплексное переменное;

Запись $A \ll B$ при положительном B означает, что $A = O(B)$, то есть существует положительное c такое, что $|A| \leqslant cB$;

Запись $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$;

$c, c_1, c_2, \ldots$ обозначают положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

ε обозначает произвольно малое положительное число;

$[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x;

$\{x\}$ обозначает дробную долю числа x, то есть $x - [x]$;

$\ln s$ обозначает главную ветвь логарифма.

§ 1 Мультипликативные функции. Производящие ряды Дирихле

Комплекснозначная функция натурального аргумента $f(n)$ называется *мультипликативной*, если она не равна нулю тождественно и для любых натуральных n и m таких, что $(n, m) = 1$, имеет место равенство

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Например, функция n^s мультипликативна при любом комплексном s. Рассмотрим простейшие свойства мультипликативных функций.

Теорема 1. *Пусть $f(n)$ и $g(n)$ мультипликативны. Тогда*
а) $f(1) = 1$;
б) $f(n)g(n)$ *мультипликативна*;
в) $\sum_{d|n} f(d)$ *мультипликативна*;
г) *если* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, *то* $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_r^{\alpha_r})$.
Таким образом, мультипликативная функция вполне определяется своими значениями на степенях простых чисел.

Доказательство. а) Пусть n таково, что $f(n) \neq 0$. Поскольку $(n, 1) = 1$, имеем

$$f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1).$$

Сокращая на $f(n)$, получаем требуемое.

б) Пусть $(n, m) = 1$. Тогда

$$f(nm)g(nm) = f(n)f(m)g(n)g(m) = f(n)g(n)f(m)g(m).$$

При этом $f(n)g(n)$ не равна нулю тождественно, так как $f(1) = g(1) = 1$.

в) При $n = 1$ имеем $\sum_{d|1} f(d) = f(1) = 1$. Пусть теперь $(n, m) = 1$. Тогда из основной теоремы арифметики следует, что если d_1 пробегает делители n, а d_2 пробегает делители m, то $d_1 d_2$ пробегает все делители nm, причем только один раз. Имеем

$$\sum_{d|nm} f(d) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1) f(d_2)$$
$$= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2),$$

ибо, очевидно, $(d_1, d_2) = 1$.

г) Так как $(p_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}, p_r^{\alpha_r}) = 1$, имеем

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}) f(p_r^{\alpha_r}).$$

Продолжая этот процесс, получим требуемое. ■

Определим *функцию Мебиуса* $\mu(n)$ равенствами $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 \dots p_r) = (-1)^r$; $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа. Таким образом, функция $\mu(n)$ отлична от нуля только на числах, свободных от квадратов, а ее модуль есть характеристическая функция множества таких чисел. Докажем важные свойства функции Мебиуса.

Теорема 2. *Имеют место следующие утверждения*:

а) *Функция Мебиуса мультипликативна*;

б) *при натуральном* $n > 1$ *имеет место равенство*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0;$$

в) (*формула обращения Мебиуса*) *если* $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, *то* $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$ *и обратно.*

Доказательство. а) Пусть n или m содержит квадрат. Тогда nm также содержит квадрат и равенство $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ выполнено. Пусть теперь n и m бесквадратны, причем $(n, m) = 1$. Тогда $n = p_1 \dots p_r$ и $m = q_1 \dots q_s$, при этом $p_i \neq q_j$ для всех $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, s$. Тогда

$$\mu(n)\mu(m) = (-1)^r (-1)^s = (-1)^{r+s} = \mu(nm).$$

В случае $n = 1$ полагаем $r = 0$.

б) Из пункта а) и теоремы 1 заключаем, что функция $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ мультипликативна. Найдем ее значения на степенях простых чисел. При $\alpha \geqslant 1$ имеем

$$f(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \dots + \mu(p^\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

Теперь требуемое утверждение следует из пункта г) теоремы 1.

в) Пусть $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Используя утверждение пункта б) имеем

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} f(k) = \sum_{k|n} f(k) \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d) = f(n).$$

Обратно, если $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$, то

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) g(k) = \sum_{k|n} g(k) \sum_{r|\frac{n}{k}} \mu(r) = g(n).$$

■

В теории чисел важную роль играют ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, называемые рядами Дирихле. Следующая теорема позволяет перемножать подобные ряды.

Теорема 3. *Пусть ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$ *сходятся абсолютно. Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$, *где*

$$c(n) = \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right)$$

также сходится абсолютно, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}.$$

Формула для коэффициентов $c(n)$ содержит сумму по делителям числа n, что и определяет тесную связь рядов Дирихле с арифметикой.

Доказательство. Перемножая частичные суммы, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{N} \frac{b(m)}{m^s} &= \sum_{n,m=1}^{N} \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} \sum_{n|k} a(n) b\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{\substack{n,m=1 \\ nm>N}}^{N} \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s},\end{aligned}$$

но так как при $nm > N$ либо $n > \sqrt{N}$, либо $m > \sqrt{N}$, то

$$\left|\sum_{\substack{n,m=1\\nm>N}}^{N}\frac{a(n)b(m)}{(nm)^s}\right| \leqslant \sum_{n>\sqrt{N}}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|b(m)|}{m^\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\sum_{m>\sqrt{N}}\frac{|b(m)|}{m^\sigma}.$$

В силу абсолютной сходимости перемножаемых рядов правая часть последнего выражения стремится к нулю при $N \to \infty$.

Наконец, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)}{n^s}$ сходится абсолютно, так как

$$\frac{|c(n)|}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^\sigma}\sum_{d|n}|a(d)|\left|b\left(\frac{n}{d}\right)\right|,$$

а по доказанному выше

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}\sum_{d|n}|a(d)|\left|b\left(\frac{n}{d}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|}{n^\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b(n)|}{n^\sigma} < \infty.$$

■

Простейший ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Его сумма как функция комплексного переменного s называется *дзета-функцией Римана.* Таким образом, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ называется *производящим* рядом Дирихле функции $f(n)$. Производящие ряды Дирихле многих мультипликативных функций выражаются через дзета-функцию Римана. Например, пользуясь основным свойством функции Мебиуса, при $\operatorname{Re} s > 1$ находим

$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d|n}\mu(d) = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что дзета-функция Римана не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Итак, в этой полуплоскости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Аналогично

$$\zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d^2|n}\left|\mu\left(\frac{n}{d^2}\right)\right|,$$

где $\delta(n)$ – характеристическая функция множества квадратов натуральных чисел. Последний ряд есть дзета-функция Римана, так как при любом n

$$\sum_{d^2|n}\left|\mu\left(\frac{n}{d^2}\right)\right|=1.$$

Действительно, из основной теоремы арифметики следует, что натуральное n однозначно представляется в виде a^2b с бесквадратным b. Суммирование по $d^2 \mid n$ заменяется при этом суммированием по $d \mid a$, а по свойствам функции Мебиуса все слагаемые окажутся равными нулю, кроме слагаемого с $d=a$, которое равняется единице. Таким образом, при $\operatorname{Re} s>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

Теорема 4 (тождество Эйлера). *Пусть $f(n)$ мультипликативна и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ абсолютно сходится. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)=\prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Тождество Эйлера по существу представляет собой аналитический эквивалент основной теоремы арифметики о единственности канонического разложения натурального числа на простые сомножители.

Доказательство. Поскольку ряды $\sum_{k=0}^{\infty}f(p^k)p^{-ks}$ сходятся абсолютно, повторное применение теоремы 3 показывает, что их можно перемножать между собой в любом конечном числе. Имеем

$$\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{f(n)}{n^s}+\sum_{n>N}{}'\frac{f(n)}{n^s},$$

где штрих у знака суммы означает суммирование по натуральным n, все простые делители которых не превосходят N. Здесь мы существенно пользуемся основной теоремой арифметики и мультипликативностью функции $f(n)$. В силу абсолютной сходимости производящего ряда Дирихле имеем

$$\left|\sum_{n>N}{}' \frac{f(n)}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n>N}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \longrightarrow 0$$

при $N \to \infty$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, доказываем сходимость произведения и получаем требуемое. Заметим, что в силу абсолютной сходимости производящего ряда Дирихле, случай расходимости бесконечного произведения к нулю здесь исключен.

Например, при $\operatorname{Re} s > 1$, находим

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right).$$

Отсюда легко следуют уже полученные нами ранее соотношения между этими функциями. ■

Задачи к § 1

1. При $k \geqslant 3$ функции $\tau_k(n)$ определяются по индукции равенством

$$\tau_k(n) = \sum_{d|n} \tau_{k-1}(d),$$

где

$$\tau_2(n) = \tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

есть число делителей n.

а) Доказать мультипликативность $\tau_k(n)$;

б) показать, что $\tau_k(n)$ есть число решений уравнения $x_1 \ldots x_k = n$ в натуральных $x_1, \ldots, x_k$;

в) доказать, что

$$\tau_k(p^\alpha) = C_{\alpha+k-1}^{k-1};$$

г) доказать, что $\tau_k(n) \leqslant \tau^{k-1}(n)$;

д) доказать, что $1 \leqslant \tau_k(n) \leqslant C(\varepsilon)n^\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$;

е) показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \zeta^k(s).$$

2. При $k \geqslant 1$ функции $\sigma_k(n)$ определяются равенствами

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

в частности,

$$\sigma_1(n) = \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

есть сумма делителей n.

а) Доказать мультипликативность $\sigma_k(n)$;

б) доказать, что

$$\sigma_k(p^\alpha) = \frac{p^{(\alpha+1)k} - 1}{p^k - 1};$$

в) доказать, что при $k \geqslant 2$ имеют место неравенства $n^k \leqslant \sigma_k(n) \leqslant 2n^k$;

г) пользуясь тем, что

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + O(1), \qquad \sum_{p \leqslant x} \ln p \gg x,$$

доказать неравенства $n \leqslant \sigma(n) \leqslant n \ln\ln n$;

д) показать, что при $\operatorname{Re} s > k+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-k);$$

е) показать, что при $\operatorname{Re} s > k+l+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)\sigma_l(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)\zeta(s-l)\zeta(s-k-l)}{\zeta(2s-k-l)}.$$

3. Функция Эйлера $\varphi(n)$ есть количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним:

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k \leqslant n \\ (k,n)=1}} 1.$$

а) Доказать, что

$$\varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d};$$

б) доказать мультипликативность $\varphi(n)$;
в) доказать, что $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$;
г) доказать, что

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right);$$

д) доказать, что

$$\sum_{d|n}\varphi(d) = n;$$

е) пользуясь тем, что

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \ln\ln x + O(1), \qquad \sum_{p\leqslant x}\ln p \gg x,$$

доказать неравенства

$$\frac{n}{\ln\ln n} \ll \varphi(n) \leqslant n;$$

ж) показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

§ 2 Сумматорные функции. Формула Перрона

Докажем вначале интегральный аналог преобразования Абеля для сумм, который имеет исключительно широкое применение в аналитической теории чисел.

Теорема 5 (преобразование Абеля). *Пусть* $c_n \in \mathbb{C}$, $C(x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n$ *и* $f(x) \in C^1[a,b]$. *Тогда*

$$\sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n) = C(b)f(b) - \int_a^b C(x)f'(x)\,dx.$$

Доказательство. Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}\int_a^b \sum_{a<n\leqslant x} c_n f'(x)\,dx &= \sum_{a<n\leqslant b} c_n \int_n^b f'(x)\,dx \\ &= f(b)\sum_{a<n\leqslant b} c_n - \sum_{a<n\leqslant b} c_n f(n).\end{aligned}$$

■

Выражение $\sum_{n\leqslant x} f(n)$ называют *сумматорной функцией* $f(n)$. Оказывается, производящий ряд Дирихле достаточно просто выражается через сумматорную функцию.

Теорема 6. *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *сходится при* $\mathrm{Re}\, s > a \geqslant 0$, $F(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\, s > a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Доказательство. Совершая преобразование Абеля, получим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{F(N)}{N^s} + s\int_1^{N} \frac{f(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F(x) = 0$ при $x < 1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $F(N)N^{-s} \to 0$ при $N \to \infty$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{1}{N^s}F(N) = \frac{1}{N^s}\sum_{n=1}^{N}\frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}}n^{s-\varepsilon}$$
$$= N^{-\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}\frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} - \frac{s-\varepsilon}{N^s}\int_1^N \sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}}x^{s-\varepsilon-1}dx.$$

Но в силу сходимости ряда Дирихле

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}}\right| \leqslant C(s,\varepsilon)$$

для любого N. Отсюда, считая ε столь малым, что $\sigma-\varepsilon > 0$, находим

$$\left|\frac{F(N)}{N^s}\right| \leqslant C(s,\varepsilon)\left(N^{-\varepsilon} + \frac{|s|+\varepsilon}{N^\sigma}\int_1^N x^{\sigma-\varepsilon-1}\,dx\right)$$
$$\leqslant C_1(s,\varepsilon)N^{-\varepsilon} \longrightarrow 0$$

при $N\to\infty$. ■

Следующая теорема, напротив, выражает сумматорную функцию через соответствующий производящий ряд Дирихле.

Теорема 7 (формула Перрона). *Пусть*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},$$

причем ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re}s > a \geqslant 0$, *и пусть при* $\sigma\to a+0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|}{n^\sigma} \ll (\sigma-a)^{-\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 0$. *Тогда при любых* $b > a$, $x\geqslant 2$, $T\geqslant 2$ *имеет место формула*

$$\sum_{n\leqslant x}a(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{x^s}{s}\,ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll \frac{x^b}{T(b-a)^\alpha} + 2^b\left(\frac{x\ln x}{T} + \ln\frac{T}{b} + 1\right)\max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}}|a(n)|.$$

Доказательство. Ряд Дирихле функции $F(s)$ равномерно сходится на отрезке интегрирования, поэтому его можно интегрировать почленно. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $n<x-1$, выберем произвольно большое число U и рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $-U\pm iT$, $b\pm iT$. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\operatorname{res}_{s=0}\frac{1}{s}\left(\frac{x}{n}\right)^s=1.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}+I_1+I_2+I_3,$$

где I_1, I_2, I_3 обозначают интегралы по левой, верхней и нижней сторонам контура Γ. Оценим эти интегралы по абсолютной величине:

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{x}{n}\right)^{-U}\frac{dt}{U}=\frac{T}{\pi U}\left(\frac{x}{n}\right)^{-U},$$

$$|I_2|,|I_3|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{b}\left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma}\frac{d\sigma}{T}\leqslant\frac{1}{2\pi T}\left(\frac{x}{n}\right)^{b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}.$$

Переходя к пределу при $U\to\infty$, получим при $n<x-1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=1+O\left(\frac{1}{T}\left(\frac{x}{n}\right)^{b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}\right).$$

Пусть теперь $n>x+1$. Выбирая произвольно большое число U и, рассматривая прямоугольный контур с вершинами в точках $b\pm iT$, $U\pm iT$, проведем аналогичные рассуждения. Получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=O\left(\frac{1}{T}\left(\frac{x}{n}\right)^{b}\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}\right).$$

Наконец, при $|n-x|\leqslant 1$ оценим интеграл тривиально:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\ll\left(\frac{x}{n}\right)^b\int_{-T}^{T}\frac{dt}{\sqrt{t^2+b^2}}$$
$$\ll 2^b\int_0^b\frac{dt}{b}+2^b\int_b^T\frac{dt}{t}\ll 2^b\Big(\ln\frac{T}{b}+1\Big).$$

Собирая полученные оценки, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\sum_{n<x-1}a(n)$$
$$+O\Bigg(2^b\Big(\ln\frac{T}{b}+1\Big)\sum_{|n-x|\leqslant 1}|a(n)|$$
$$+\frac{1}{T}\sum_{|n-x|>1}|a(n)|\left(\frac{x}{n}\right)^b\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}\Bigg)$$
$$=\sum_{n\leqslant x}a(n)+O\Bigg(2^b\Big(\ln\frac{T}{b}+1\Big)\max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}}|a(n)|\Bigg)$$
$$+O\Bigg(\frac{1}{T}\sum_{|n-x|>\frac{x}{2}}|a(n)|\left(\frac{x}{n}\right)^b\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}$$
$$+\frac{1}{T}\sum_{1<|n-x|\leqslant\frac{x}{2}}|a(n)|\left(\frac{x}{n}\right)^b\left|\ln\frac{x}{n}\right|^{-1}\Bigg).$$

Рассмотрим отдельно две последние суммы, обозначив их через S_1 и S_2. При $|n-x|>\frac{x}{2}$ имеем $|\ln\frac{x}{n}|>\ln\frac{3}{2}$. Отсюда находим

$$S_1\ll\frac{x^b}{T}\sum_{|n-x|>\frac{x}{2}}\frac{|a(n)|}{n^b}\leqslant\frac{x^b}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a(n)|}{n^b}\ll\frac{x^b}{T(b-a)^{\alpha}}.$$

При $1<|n-x|\leqslant\frac{x}{2}$ имеем

$$S_2\ll\frac{2^b}{T}\Bigg(\sum_{1<|n-x|\leqslant\frac{x}{2}}\left|\ln\frac{n}{x}\right|^{-1}\Bigg)\max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}}|a(n)|$$
$$\ll\frac{2^b}{T}\Bigg(\sum_{1<|n-x|\leqslant\frac{x}{2}}\left|\frac{n}{x}-1\right|^{-1}\Bigg)\max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}}|a(n)|,$$

ибо $s(\ln(1+s))^{-1}$ есть аналитическая в круге $|s|<1$ функция. Итак,

$$S_2 \ll 2^b \frac{x}{T}\Bigg(\sum_{1<|n-x|\leqslant\frac{x}{2}} \frac{1}{|n-x|}\Bigg) \max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}} |a(n)|$$

$$\ll 2^b \frac{x\ln x}{T} \max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}} |a(n)|.$$

Этим доказательство завершается. ■

Иногда более удобен другой вариант формулы Перрона, в котором фигурирует интеграл от сумматорной функции.

Теорема 8. *Пусть*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем этот ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > a \geqslant 0$, *и пусть при* $b > a$

$$B(b) = \int_1^{\infty} \frac{|A(u)|}{u^{b+1}}\,du, \qquad A(u) = \sum_{n\leqslant u} a(n).$$

Тогда при $x\geqslant 2$, $T\geqslant 2$ *имеет место формула*

$$\int_1^x A(u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll B(b)\frac{x^{b+1}}{T} + 2^b\left(\frac{x\ln x}{T} + \ln T\right) \max_{\frac{x}{2}\leqslant u\leqslant\frac{3x}{2}} |A(u)|.$$

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > a$ согласно теореме 6 имеем

$$\frac{F(s)}{s} = \int_1^{\infty} \frac{A(u)}{u^{s+1}}\,du.$$

Поскольку этот интеграл равномерно сходится при $s = b + it$, $|t|\leqslant T$, мы можем поменять порядок интегрирования следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\int_1^\infty \frac{A(u)}{u^{s+1}}\,du\right)\frac{x^{s+1}}{s+1}\,ds$$
$$= \int_1^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b+1-iT}^{b+1+iT}\left(\frac{x}{u}\right)^s\frac{ds}{s}\right)A(u)\,du.$$

Внутренний интеграл в правой части уже был исследован при доказательстве предыдущей теоремы. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds = \int_1^{x-1}A(u)\,du$$
$$+ O\left(\frac{1}{T}\int_{|x-u|>1}|A(u)|\left(\frac{x}{u}\right)^{b+1}\left|\ln\frac{x}{u}\right|^{-1}du + \max_{\frac{x}{2}\leqslant u\leqslant\frac{3x}{2}}|A(u)|\ln T\right)$$
$$= \int_1^x A(u)du + O\left(\ln T\max_{\frac{x}{2}\leqslant n\leqslant\frac{3x}{2}}|A(u)|\right)$$
$$+ O\left(\frac{1}{T}\int_{|x-u|>\frac{x}{2}}|A(u)|\left(\frac{x}{u}\right)^{b+1}\left|\ln\frac{x}{u}\right|^{-1}du\right.$$
$$\left.+\frac{1}{T}\int_{1<|x-u|\leqslant\frac{x}{2}}|A(u)|\left(\frac{x}{u}\right)^{b+1}\left|\ln\frac{x}{u}\right|^{-1}du\right).$$

Рассмотрим отдельно два последних интеграла, обозначив их через I_1 и I_2. При $|x-u|>\frac{x}{2}$ имеем $|\ln\frac{x}{u}|>\ln\frac{3}{2}$. Отсюда находим

$$I_1 \ll \frac{x^{b+1}}{T}\int_{|x-u|>\frac{x}{2}}\frac{|A(u)|}{u^{b+1}}\,du \leqslant \frac{x^{b+1}}{T}\int_1^\infty\frac{|A(u)|}{u^{b+1}}\,du = B(b)\frac{x^{b+1}}{T}.$$

При $1<|x-u|\leqslant\frac{x}{2}$ имеем

$$I_2 \ll \frac{2^b}{T}\left(\int_{1<|x-u|\leqslant\frac{x}{2}}\left|\ln\frac{u}{x}\right|^{-1}du\right)\max_{\frac{x}{2}\leqslant u\leqslant\frac{3x}{2}}|A(u)|$$
$$\ll \frac{2^b}{T}\left(\int_{1<|x-u|\leqslant\frac{x}{2}}\left|\frac{u}{x}-1\right|^{-1}du\right)\max_{\frac{x}{2}\leqslant u\leqslant\frac{3x}{2}}|A(u)|,$$

ибо $s(\ln(1+s))^{-1}$ есть аналитическая в круге $|s|<1$ функция. Итак,

$$\begin{aligned} I_2 &\ll 2^b \frac{x}{T}\left(\int_{1<|x-u|\leqslant \frac{x}{2}} \frac{du}{|x-u|}\right) \max_{\frac{x}{2}\leqslant u\leqslant \frac{3x}{2}} |A(u)| \\ &\ll 2^b \frac{x\ln x}{T} \max_{\frac{x}{2}\leqslant u\leqslant \frac{3x}{2}} |A(u)|. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ∎

Задачи к § 2

1. Доказать, что функция

$$F(s) = se^{Cs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

является целой и имеет только простые нули в точках $s=0,-1,-2,\ldots$.

2. Пусть C – постоянная Эйлера,

$$C = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N\right).$$

Тогда при $\operatorname{Re} s>0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{F(s)} = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx.$$

Из приведенных задач следует, что гамма-функция Эйлера задается при любом комплексном s равенством

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s}e^{-Cs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}.$$

Гамма-функция не имеет нулей, а в точках $s=0,-1,-2,\ldots$ она имеет полюса первого порядка.

§ 3 Дзета-функция Римана. Функциональное уравнение

Мы начнем с доказательства формулы суммирования Эйлера, имеющей многочисленные приложения. Введем вспомогательные функции

$$\varrho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \qquad \sigma(x) = \int_0^x \varrho(u)\,du.$$

Очевидны следующие свойства этих функций:

а) $\varrho(x)$ и $\sigma(x)$ периодичны с периодом 1;

б) $\varrho(n) = \frac{1}{2}$ и $\sigma(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.

в) $|\varrho(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ и $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant \frac{1}{8}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 9 (формула суммирования Эйлера). *Пусть* $f \in C^2[a,b]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a)$$
$$+ \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)\,dx.$$

Доказательство. Применим к сумме в левой части преобразование Абеля

$$\begin{aligned}
\sum_{a<n\leqslant b} f(n) &= f(b)\sum_{a<n\leqslant b} 1 - \int_a^b \Bigl(\sum_{a<n\leqslant x} 1\Bigr) f'(x)\,dx \\
&= f(b)([b]-[a]) - \int_a^b ([x]-[a])f'(x)\,dx \\
&= f(b)(b-a+\varrho(b)-\varrho(a)) \\
&\qquad - \int_a^b (x-a+\varrho(x)-\varrho(a))f'(x)\,dx \\
&= f(b)(b-a+\varrho(b)-\varrho(a)) - \int_a^b (x-a)f'(x)\,dx \\
&\qquad - \int_a^b \varrho(x)f'(x)\,dx + \varrho(a)(f(b)-f(a))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(b)(b-a+\varrho(b)) - \varrho(a)f(a) - \\
&\qquad - (b-a)f(b) + \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varrho(x)f'(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) - \int_a^b \varrho(x)f'(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Мы получили *упрощенный вариант* формулы суммирования Эйлера, который также часто используется.

Допустим, интервал (a,b) не содержит целых точек, то есть функция $\varrho(x)$ непрерывна на (a,b). Тогда

$$
\begin{aligned}
-\int_a^b \varrho(x)f'(x)\,dx &= -\int_a^b f'(x)\,d\sigma(x) \\
&= \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Если же интервал (a,b) содержит целые точки, то, разбивая его на интервалы, таких точек не содержащие, и действуя аналогично предыдущему случаю, получим требуемое. ■

В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ *дзета-функция Римана* определяется равенством

$$
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.
$$

В силу равномерной сходимости ряда Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1+\varepsilon$ дзета функция Римана является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Кроме того, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$
\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.
$$

Наконец, как уже отмечалось в §1, $\zeta(s)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

С помощью формулы суммирования Эйлера получим аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

Теорема 10. *При* $\operatorname{Re} s > 0$, $N \geqslant 1$ *имеет место равенство*

$$
\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^{\infty} \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}}\,du.
$$

Доказательство. Пусть $M > N$. Имеем

$$\sum_{N<n\leqslant M} \frac{1}{n^s} = \int_N^M \frac{du}{u^s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^M \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}}\,du =$$

$$= \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} - \frac{M^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}M^{-s} + s\int_N^M \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}}\,du.$$

Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Перейдем к пределу при $M \to \infty$. Имеем

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}}\,du.$$

Последний интеграл есть аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ функция. Согласно принципу аналитического продолжения получаем требуемое. ■

Таким образом, $\zeta(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1.

Теперь мы докажем функциональное уравнение дзета-функции Римана, которое связывает значения дзета-функции в точках s и $1-s$, и дает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость. Нам понадобится вспомогательное утверждение.

Теорема 11. *Пусть* $x > 0$,

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Тогда

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\theta(x).$$

Доказательство. Будем считать x фиксированным числом. Пусть $N > 10$, $M = N^4$, $|n| \leqslant N$. Рассмотрим интеграл

$$I(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u} e^{-\pi x(n+u)^2}\,du.$$

Поскольку

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}\,du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^{M} e^{2\pi iku}\,du$$
$$= \sum_{k=-M}^{M} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi iku}\,du = 1,$$

имеем

$$I(n) = e^{-\pi xn^2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\pi(2M+1)u}{\sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi xn^2}\right)du.$$

Разобьем последний интеграл на интегралы I_1, I_2 и I_3 по промежуткам $\left(N^{-3}, \frac{1}{2}\right)$, $(-N^{-3}, N^{-3})$ и $\left(-\frac{1}{2}, -N^{-3}\right)$, соответственно. Оценим каждый из интегралов сверху. При $|u| \leqslant \frac{1}{2}$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi xn^2} \ll Nu,$$

откуда

$$I_2 \ll N \int_0^{N^{-3}} \frac{udu}{\sin\pi u} \ll \frac{1}{N^2},$$

ибо $|\sin\pi u| \geqslant 2u$ при $|u| \leqslant \frac{1}{2}$. Интегралы I_1 и I_3 оцениваются одинаково. Интегрируя по частям, имеем

$$I_1 = \frac{-\cos\pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)\sin\pi u}\left(e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi xn^2}\right)\Bigg|_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}}$$
$$- \int_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)}\left(\frac{\pi\cos\pi u}{\sin^2\pi u}\left(e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi xn^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2\pi x(n+u)e^{-\pi x(n+u)^2}}{\sin\pi u}\right)du.$$

Действуя аналогично предыдущему, получаем, что внеинтегральный член есть $\ll NM^{-1}$, а выражение в скобках в последнем интеграле есть $\ll Nu^{-1}$. Отсюда

$$I_1 \ll \frac{N}{M} + \frac{N}{M}\int_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} \ll \frac{N\ln N}{M} \ll \frac{1}{N^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=-N}^{N} I(n) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi x n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} I(n) &= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^{M} e^{2\pi iku-\pi x(n+u)^2}\,du \\ &= \sum_{k=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} e^{2\pi iku-\pi xu^2}\,du \\ &= \sum_{k=-M}^{M} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi iku-\pi xu^2}\,du.\end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл. Рассмотрим прямоугольный контур с вершинами в точках $\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+ikx^{-1}$. Подынтегральная функция аналитична внутри этого контура, поэтому согласно теореме Коши интеграл от этой функции по такому контуру будет равен нулю. Отсюда, оценивая интегралы по боковым сторонам контура тривиально, находим

$$\begin{aligned}&\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi iku-\pi xu^2}\,du \\ &\quad= \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi ik(u+ikx^{-1})-\pi x(u+ikx^{-1})^2}\,du + O\left(|k|e^{-\pi xN}\right) \\ &\quad= e^{-\frac{\pi k^2}{x}} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{-\pi xu^2}du + O\left(|k|e^{-\pi xN}\right) \\ &\quad= e^{-\frac{\pi k^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi xu^2}\,du + O\left((|k|+1)e^{-\pi xN}\right),\end{aligned}$$

ибо

$$\int_{N+\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\pi xu^2}\,du \leqslant \int_{N}^{\infty} e^{-\pi xu}\,du \ll e^{-\pi xN}.$$

Наконец,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2}\,du = 2\int_0^{\infty} e^{-\pi x u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}}\,dv$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Окончательно имеем

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi x n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-N^4}^{N^4} e^{-\frac{\pi k^2}{x}} + O\big(N^8 e^{-\pi x N}\big).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем требуемое. ∎

Идея доказательства этой теоремы является основой так называемой формулы суммирования Пуассона. Теперь мы готовы к доказательству функционального уравнения $\zeta(s)$.

Теорема 12 (функциональное уравнение дзета-функции Римана). *Дзета-функция Римана аналитически продолжается на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$ и удовлетворяет тождеству*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1}\,dx$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 u}\right) u^{\frac{s}{2}-1}\,du.$$

Здесь мы сделали замену переменной $x = \pi n^2 u$. Введем функцию

$$\omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} = \frac{\theta(u) - 1}{2}.$$

Из определения $\omega(u)$ следует, что $\theta(u) \ll e^{-\pi u}$ при $u \to \infty$, а из теоремы 11 следует, что $\theta(u) \ll u^{-\frac{1}{2}}$ при $u \to 0$. Таким образом,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\omega(u)\,du \\ - \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u}\right)u^{\frac{s}{2}-1}\,du,$$

причем первый интеграл в правой части сходится. Оценим выражение в скобках:

$$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \leqslant \int_N^\infty e^{-\pi x^2 u}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}}\int_{\pi N^2 u}^\infty e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}\,dv \\ \ll \min\bigl(u^{-\frac{1}{2}}, (Nu)^{-1}e^{-\pi N^2 u}\bigr).$$

Отсюда находим

$$\int_0^{\frac{1}{N^2}}\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u}\right)u^{\frac{s}{2}-1}\,du \ll \int_0^{\frac{1}{N^2}} u^{\frac{\sigma-3}{2}}\,du = \frac{2N^{1-\sigma}}{\sigma-1},$$

$$\int_{\frac{1}{N^2}}^\infty\left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u}\right)u^{\frac{s}{2}-1}\,du \ll \frac{1}{N}\int_{\frac{1}{N^2}}^\infty e^{-\pi N^2 u}u^{\frac{\sigma}{2}-2}\,du \\ = N^{1-\sigma}\int_1^\infty e^{-\pi v}v^{\frac{\sigma}{2}-2}\,dv.$$

Поскольку $\operatorname{Re} s > 1$, оба выражения стремятся к нулю при $N \to \infty$. Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\omega(u)\,du.$$

Рассмотрим часть этого интеграла, отвечающую промежутку $(0, 1)$, сделаем в нем замену $u = v^{-1}$, и воспользуемся теоремой 11.

Имеем

$$\int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1}\omega(u)\,du = \int_1^\infty v^{-1-\frac{s}{2}}\omega(v^{-1})\,dv = \int_1^\infty \frac{\theta\left(\frac{1}{v}\right)-1}{2} v^{-1-\frac{s}{2}}\,dv$$
$$= \int_1^\infty \frac{\sqrt{v}\theta(v)-1}{2} v^{-1-\frac{s}{2}}\,dv$$
$$= \int_1^\infty \left(\sqrt{v}\omega(v) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{v}}{2}\right) v^{-1-\frac{s}{2}}\,dv$$
$$= \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\omega(v)\,dv - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$
$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\omega(v)\,dv.$$

Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место формула

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\right)\omega(u)\,du.$$

Последний интеграл есть целая функция комплексного переменного s, так что по принципу аналитического продолжения получаем, что дзета-функция Римана задается равенством

$$\zeta(s) = \frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\right)\omega(u)\,du\right)$$

при любом комплексном s, кроме $s = 1$, так как полюс первого порядка при $s = 0$ гасится полюсом первого порядка функции $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. Наконец, правая часть предпоследнего равенства не меняется при замене s на $1 - s$, что дает функциональное уравнение и завершает доказательство. ■

Задачи к § 3

1. Доказать, что

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \ln x + C + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

причем для константы Эйлера C справедливо представление

$$C = \frac{1}{2} + 2\int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^3}\,dx.$$

2. Доказать, что при $\delta > 0$ и $|\arg s| \leqslant \pi - \delta$ справедлива формула Стирлинга

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

3. Доказать следующую формулу для суммы Гаусса

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} \sqrt{N}.$$

4. Доказать, что

$$\lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s - 1}\right) = C.$$

§ 4 Нули дзета-функции Римана

В предыдущем параграфе было установлено, что дзета-функция Римана аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1. Из свойств гамма-функции Эйлера (см. задачи к § 2) и последнего равенства § 3 следует, что дзета-функция Римана имеет нули в точках $s = -2, -4, -6 \ldots$, называемые *тривиальными*. Других нулей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s < 0$ нет, так как в противном случае в силу функционального уравнения и свойств гамма-функции $\zeta(s)$ имела бы нули при $\mathrm{Re}\, s > 1$, что, как мы показали в § 1, не имеет места. Таким образом, все прочие нули дзета-функции Римана, называемые *нетривиальными*, лежат в *критической полосе* $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$. При этом они расположены симметрично относительно *критической прямой* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ и вещественной оси $\mathrm{Im}\, s = 0$, поскольку $\zeta(s)$ вещественна при вещественных s и удовлетворяет функциональному уравнению. *Гипотеза Римана*, до сих пор не доказанная и не опровергнутая, утверждает, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на критической прямой.

Рассмотрим функцию

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Из последнего равенства § 3 следует, что $\xi(s)$ является целой функцией и ее нули суть в точности нетривиальные нули дзета-функции Римана. При этом в силу теоремы 12 имеет место соотношение

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

В этом параграфе мы получим представление $\xi(s)$ в виде бесконечного произведения по нетривиальным нулям дзета-функции Римана. Нам потребуются два вспомогательных утверждения из комплексного анализа.

Теорема 13 (формула Иенсена). *Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leqslant R$, не имеет нулей на окружности $|s| = R$ и $f(0) \neq 0$. Тогда*

$$\ln \frac{|f(0)|R^n}{r_1 \ldots r_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

где $r_1, \ldots, r_n$ – модули нулей функции $f(s)$ в круге $|s| < R$, каждый из которых считается столько раз, каков его порядок.

Доказательство. Пусть $s_1, \ldots, s_n$ – нули $f(s)$ в круге $|s| < R$. Рассмотрим функцию

$$F(s) = \frac{f(s)}{R^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{R^2 - s\overline{s_k}}{s - s_k}.$$

Эта функция аналитична в круге $|s| \leqslant R$ и не имеет там нулей, ибо $R^2 r_k^{-1} > R$. Таким образом, функция $\ln F(s)$ аналитична в круге $|s| \leqslant R$. Согласно теореме о среднем

$$\ln F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln F(Re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Отделяя вещественную часть, получим

$$\ln F(0) = \ln \frac{|f(0)|R^n}{r_1 \ldots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Но по определению функции $F(s)$

$$|F(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})| \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{R - e^{i\varphi}\overline{s_k}}{Re^{i\varphi} - s_k} \right| = |f(Re^{i\varphi})|,$$

что и завершает доказательство. ■

Теорема 14 (Борель, Каратеодори). *Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leqslant R$. Тогда для любого $n \geqslant 1$*

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leqslant 2(A(R) - \operatorname{Re} f(0))R^{-n},$$

где $A(R)$ обозначает максимум $\operatorname{Re} f(s)$ на окружности $|s| = R$.

Доказательство. Согласно формулам Коши

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s)\, ds}{s^{n+1}} = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi}\, d\varphi.$$

С другой стороны, при $n \geqslant 1$, в силу теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{n-1}\, ds = \frac{R^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{in\varphi}\, d\varphi = 0.$$

Таким образом, взяв комплексное сопряжение, получим

$$\frac{R^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(Re^{i\varphi})}e^{-in\varphi}\,d\varphi = 0.$$

Складывая, находим

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{R^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}\,d\varphi\\ &= \frac{R^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi}(\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R))e^{-in\varphi}\,d\varphi,\\ \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| &\leqslant \frac{R^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R)\Big|\,d\varphi\\ &= \frac{R^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi}(A(R) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}))\,d\varphi,\end{aligned}$$

ибо, по определению $A(R)$, всегда $A(R) \geqslant \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})$. Далее,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\,d\varphi = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi\operatorname{Re} f(0)$$

в силу теоремы о среднем. Подставляя полученное равенство в предыдущую оценку, получим требуемое. ■

Теорема 15. *Справедливо равенство*

$$\xi(s) = e^{as}\prod_{\varrho}\left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)e^{\frac{s}{\varrho}},$$

где в правой части стоит бесконечное произведение по всем нетривиальным нулям ϱ функции $\zeta(s)$ с учетом кратности, расположенным в порядке возрастания модуля,

$$a = \ln 2\sqrt{\pi} - \frac{C}{2} - 1,$$

C – константа Эйлера.

Доказательство. Оценим максимум модуля $\xi(s)$ на окружности $|s| = R$. Так как $\xi(s) = \xi(1-s)$, достаточно рассмотреть случай $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$. Из теоремы 10 при $N = 1$ получаем оценку

$$|\zeta(s)| \leqslant \frac{1}{|s-1|} + \frac{1}{2} + |s|\int_1^\infty \frac{|\varrho(u)|}{u^{\sigma+1}}\,du \leqslant \frac{1}{R-1} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2}\int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \ll R.$$

Отделяя вещественную часть в формуле Стирлинга (см. задачу 2 к § 3), находим

$$\ln\left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| = \frac{\sigma-1}{2}\ln\frac{|s|}{2} - \frac{t}{2}\arg\frac{s}{2} - \frac{\sigma}{2} + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$
$$\leqslant \frac{R}{2}\ln\frac{R}{2} + \frac{\pi R}{4} + O(1) \ll R\ln R.$$

Отсюда находим при $|s| = R$

$$|\xi(s)| = \left|s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\right| \ll R^3 e^{c_1 R\ln R} \leqslant e^{c_2 R\ln R}.$$

Предположим, что множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана бесконечно. Применим формулу Иенсена к функции $\xi(s)$. Легко видеть, что

$$\xi(0) = \xi(1) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Пусть $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ – нули $\xi(s)$ в круге $|s| \leqslant R$. Выберем $R_1 \in [2R, 3R]$ так, чтобы $\xi(s)$ не имела нулей на окружности $|s| = R_1$. Пусть $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ – нули $\xi(s)$ в круге $|s| \leqslant R_1$. Имеем

$$\ln\frac{{R_1}^k}{|\varrho_1|\ldots|\varrho_k|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\xi(Re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant c_2 R_1\ln R_1 \leqslant c_3 R\ln R.$$

С другой стороны, поскольку $|\varrho_l| \leqslant R$ при $l = 1, \ldots, n$, имеем

$$\ln\frac{{R_1}^k}{|\varrho_1|\ldots|\varrho_k|} \geqslant \ln\left(\frac{R_1}{R}\right)^n \geqslant n\ln 2.$$

Таким образом, число нулей $\xi(s)$ в круге $|s| \leqslant R$ есть $O(R\ln R)$. В частности, при $R = |\varrho_n|$ получим

$$n \leqslant c_4|\varrho_n|\ln|\varrho_n| \leqslant c_5|\varrho_n|^{1+\varepsilon}.$$

Итак, при любом положительном a справедлива оценка

$$|\varrho_n|^{-a} \leqslant c_6 n^{-\frac{a}{1+\varepsilon}},$$

что означает сходимость ряда $\sum_\varrho |\varrho|^{-a}$ при $a > 1$.

Рассмотрим функцию

$$F(s) = \prod_{\varrho}\Bigl(1 - \frac{s}{\varrho}\Bigr)e^{\frac{s}{\varrho}},$$

и докажем, что она является целой и имеет своими нулями точки $s = \varrho$ и только их. Пусть R – произвольно большое число. Рассмотрим круг $|s| \leqslant R$ и разобьем произведение на два сомножителя – с ϱ, по модулю не превосходящими $2R$, и с оставшимися ϱ, обозначив эти сомножители через $F_1(s)$ и $F_2(s)$, соответственно. Функция $F_1(s)$ аналитична в круге $|s| \leqslant R$ и имеет там только требуемые нули. Докажем, что функция $F_2(s)$ также аналитична в круге $|s| \leqslant R$, но не имеет там нулей. В силу произвольности R это и даст нам требуемое утверждение.

Рассматривая соответствующий $F_2(s)$ ряд логарифмов, при $|s| \leqslant R$ имеем

$$\Bigl|\sum_{|\varrho|>2R}\Bigl(\ln\Bigl(1 - \frac{s}{\varrho}\Bigr) + \frac{s}{\varrho}\Bigr)\Bigr| \leqslant \sum_{|\varrho|>2R}\Bigl|\frac{s^2}{2\varrho^2} + \frac{s^3}{3\varrho^3} + \cdots\Bigr|$$
$$\leqslant \sum_{|\varrho|>2R}\frac{|s|^2}{|\varrho|^2} \leqslant R^2\sum_{|\varrho|>2R}\frac{1}{|\varrho|^2}.$$

Поскольку ряд $\sum_{\varrho}|\varrho|^{-2}$ сходится, то сходится и вышеприведенный ряд логарифмов, следовательно, бесконечное произведение $F_2(s)$ также сходится. Таким образом, функция $F_2(s)$ существует и не обращается в нуль в круге $|s| \leqslant R$. Далее, имеет место тождество

$$\Bigl|\prod_{2R<|\varrho|\leqslant M}\Bigl(1 - \frac{s}{\varrho}\Bigr)e^{\frac{s}{\varrho}} - F_2(s)\Bigr|$$
$$= |F_2(s)|\Bigl|1 - \exp\Bigl(\sum_{|\varrho|>M}\Bigl(\ln\Bigl(1 - \frac{s}{\varrho}\Bigr) + \frac{s}{\varrho}\Bigr)\Bigr)\Bigr|.$$

Выражение в экспоненте в правой части стремится к нулю с ростом M, что следует из предыдущей оценки при замене $2R$ на M. Поэтому, начиная с некоторого M, справедлива оценка

$$\Bigl|\prod_{2R<|\varrho|\leqslant M}\Bigl(1 - \frac{s}{\varrho}\Bigr)e^{\frac{s}{\varrho}} - F_2(s)\Bigr| \leqslant 2R^2\exp\Bigl(R^2\sum_{|\varrho|>2R}\frac{1}{|\varrho|^2}\Bigr)\sum_{|\varrho|>M}\frac{1}{|\varrho|^2},$$

правая часть которой также стремится к нулю с ростом M. Таким образом, последовательность частичных произведений сходится к $F_2(s)$ равномерно в круге $|s| \leqslant R$, что в силу теоремы Вейерштрасса означает аналитичность $F_2(s)$ в этом круге.

Итак, функция $\xi(s)(F(s))^{-1}$ есть целая функция, не имеющая нулей. Следовательно, ее логарифм есть также целая функция. Таким образом, имеем

$$\xi(s) = e^{h(s)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

где $h(s)$ – некоторая целая функция. Мы доказали эту формулу в предположении бесконечности множества нетривиальных нулей ϱ, в случае конечности этого множества формула очевидна.

Прологарифмируем это равенство и дважды продифференцируем его:

$$h''(s) = \frac{d}{ds} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \sum_{\varrho} \frac{1}{(s-\varrho)^2}.$$

Пусть R – произвольно большое число, и $|s| \leqslant \frac{R}{2}$. Тогда при $|\varrho| > R$ имеем $|s - \varrho| \geqslant |\varrho| - |s| > \frac{1}{2}|\varrho|$. Таким образом, находим

$$\left| \sum_{|\varrho|>R} \frac{1}{(s-\varrho)^2} \right| \leqslant \sum_{|\varrho|>R} \frac{1}{|s-\varrho|^2} \leqslant 4 \sum_{|\varrho|>R} \frac{1}{|\varrho|^2}.$$

Итак, эта сумма стремится к нулю с ростом R. В случае конечности множества нулей ϱ она вообще равна нулю тождественно при достаточно большом R.

Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{d}{ds} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \sum_{|\varrho| \leqslant R} \frac{1}{(s-\varrho)^2} = \frac{d^2}{ds^2} \ln\left(\xi(s) \prod_{|\varrho| \leqslant R} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)^{-1} \right) = {h_R}''(s)$$

и применим к $h_R(s)$ теорему Бореля–Каратеодори. На окружности $|s| = 2R$ имеем

$$\operatorname{Re} h_R(s) = \ln \left| \xi(s) \prod_{|\varrho| \leqslant R} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)^{-1} \right| \leqslant c_3 R \ln R,$$

ибо при $|s| = 2R$ и $|\varrho| \leqslant R$

$$\left| \frac{\varrho}{\varrho - s} \right| \leqslant \frac{|\varrho|}{|s| - |\varrho|} \leqslant 1.$$

Далее, $\operatorname{Re} h_R(0) = \ln|\xi(0)| = 0$, откуда при $n \geqslant 1$ имеем

$$\left|\frac{h_R{}^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant c_7(2R)^{-n} R\ln R.$$

Раскладывая $h_R{}''(s)$ в ряд Тейлора при $|s| \leqslant \frac{R}{2}$, находим

$$\begin{aligned}|h_R{}''(s)| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_R{}^{(n)}(0)}{(n-2)!} s^{n-2}\right| \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} c_7(2R)^{-n} n(n-1)\left(\frac{R}{2}\right)^{n-2} R\ln R \\ &= 4c_7 \frac{\ln R}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n}.\end{aligned}$$

Мы видим, что $h''_R(s)$ также стремится к нулю с ростом R. Фиксируя s и устремляя R к бесконечности, получаем, что функция $h''(s)$ равна нулю тождественно, то есть $h(s) = as + b$. Итак,

$$\xi(s) = e^{as+b} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}.$$

Подставляя $s = 0$, находим, что $b = 0$. Для вычисления a возьмем логарифмическую производную от обеих частей равенства и положим $s = 0$:

$$a = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = \lim_{s\to 1}\left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right).$$

Здесь мы пользовались определением и функциональным уравнением $\xi(s)$. Пользуясь выражением гамма-функции в виде бесконечного произведения (см. задачу 2 к § 2), находим

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) - \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) \\ &= \ln 2\sqrt{\pi} + \frac{C}{2} - 1 - \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right).\end{aligned}$$

Для вычисления предела воспользуемся задачей 4 к § 3, согласно которой в окрестности точки $s = 1$ будем иметь

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + c + \cdots}{\frac{1}{s-1} + C + c(s-1) + \cdots} = -\frac{1}{s-1} + C + O(|s-1|).$$

Таким образом, искомый предел равен константе Эйлера C.

Осталось показать, что множество нулей ϱ бесконечно. В противном случае $\xi(s)$ есть многочлен, умноженный на экспоненту от линейной функции, то есть

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| \leqslant e^{c_8 R}.$$

Но если R вещественно и стремится к $+\infty$, то из формулы Стирлинга и определения функции $\xi(s)$ следует, что $\ln \xi(R) \sim \frac{R}{2} \ln R$, то есть

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| \geqslant |\xi(R)| \geqslant e^{c_9 R \ln R}.$$

Полученное противоречие доказывает бесконечность множества нетривиальных нулей $\zeta(s)$ и завершает доказательство теоремы. ■

Задачи к § 4

1. Функция Мангольдта $\Lambda(n)$ равна $\ln p$, если n есть степень простого числа p, и равна нулю, если n не является степенью простого числа.

а) Доказать, что

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n;$$

б) показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)};$$

в) показать, что

$$\ln(n!) = \sum_{k \leqslant n} \Lambda(k) \left[\frac{n}{k}\right];$$

г) доказать оценку

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \asymp x;$$

д) доказать асимптотическую формулу

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln x}\right);$$

е) показать, что
$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1 \asymp \frac{x}{\ln x}.$$

2. Доказать, что при $t \geqslant 2\pi$, $|\sigma| \leqslant N$ (N – фиксировано), имеет место формула
$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-it\ln\frac{t}{2\pi e}+i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

3. Доказать, что при $t \geqslant 2\pi$ и фиксированном N справедливы оценки
$$\zeta(s) \ll t^{\frac{1}{2}-\sigma}\ln t, \quad -N \leqslant \sigma \leqslant 0; \qquad \zeta(s) \ll t^{\frac{1}{2}}\ln t, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2};$$
$$\zeta(s) \ll t^{1-\sigma}\ln t, \quad \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1; \qquad \zeta(s) \ll \ln t, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant N.$$

§ 5 Асимптотический закон распределения простых чисел

Метод комплексного интегрирования возник в связи с доказательством асимптотической формулы для $\pi(x)$ – количества простых чисел, не превосходящих x. Эта формула была получена Адамаром и Валле-Пуссеном в 1896 году. Ключевым моментом доказательства явилось установление так называемой границы нулей дзета-функции Римана.

Теорема 16 (Валле-Пуссен). *Пусть $T \geqslant 10$. Тогда существует $c > 0$ такое, что дзета-функция Римана не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\ln T}, \quad |t| \leqslant T.$$

Доказательство. В точке $s = 1$ функция $\zeta(s)$ имеет полюс, поэтому при достаточно малом c существует $T_0 > 0$ такое, что в области

$$1 - \frac{c}{\ln T} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T_0$$

дзета-функция Римана не имеет нулей. Кроме того, $\zeta(s) \neq 0$ при $\sigma > 1$.

Согласно задаче 1 к § 3 при $\sigma > 1$ имеем

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \ln n).$$

Поскольку при любом вещественном φ

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2 + 4\cos\varphi + 2\cos^2\varphi = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geqslant 0,$$

при $1 < \sigma \leqslant 2$, $T_0 < t \leqslant T$ справедливо следующее неравенство:

$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\left(-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right) + \left(-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}\right) \geqslant 0.$$

Оценим сверху каждое слагаемое в левой части этого неравенства. Логарифмическая производная дзета-функции Римана имеет при $s = 1$ полюс первого порядка с вычетом -1, поэтому

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leqslant \frac{1}{\sigma - 1} + c_1.$$

Пользуясь теоремой 15, определением функции $\xi(s)$ и представлением гамма-функции в виде бесконечного произведения, получим

$$\begin{aligned}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= a + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Re}\varrho = \beta$, $\operatorname{Im}\varrho = \gamma$, тогда

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leqslant -\sum_{\varrho}\left(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right) + c_2\ln T,$$

ибо

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{s-1} + c_3 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{T_0} + |c_3| + \sum_{n\leqslant T}\frac{1}{n} + \sum_{n>T}\frac{|s|}{4n^2} \leqslant c_2\ln T.\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma > 1$, а $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, то в сумме по ϱ все слагаемые неотрицательны, следовательно,

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} \leqslant -\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + c_2\ln T,$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ – произвольный нетривиальный нуль дзета-функции Римана. Наконец, аналогично получаем оценку

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} \leqslant c_4\ln T.$$

Объединяя полученные оценки, находим при $1 < \sigma \leqslant 2$, $T_0 < t \leqslant T$ следующее неравенство

$$\frac{3}{\sigma-1} - 4\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + c_5\ln T \geqslant 0,$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ – произвольный нетривиальный нуль дзета-функции Римана. Пусть $T_0 < \gamma \leqslant T$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в этом случае $\beta < 1 - \frac{c}{\ln T}$ для достаточно малого c. Взяв $t = \gamma$, получим

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leqslant \frac{3}{\sigma-1} + c_5\ln T.$$

Возьмем теперь $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_5 \ln T}$, что дает неравенство

$$\beta \leqslant 1 - \frac{1}{14c_5 \ln T}$$

и завершает доказательство теоремы. ■

Теперь мы готовы к доказательству асимптотического закона распределения простых чисел.

Теорема 17. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x + O\big(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\big),$$

где $c > 0$ – постоянная.

Доказательство. При $\operatorname{Re} s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Применим формулу Перрона, взяв $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$. Параметр α равен единице, ибо логарифмическая производная $\zeta(s)$ имеет при $s = 1$ полюс первого порядка. Для коэффициентов $\Lambda(n)$ справедлива тривиальная оценка $\ln n$. В итоге находим

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \ln x \ln T\right).\end{aligned}$$

Согласно теореме Валле-Пуссена о границе нулей дзета-функции Римана существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{2c_1}{\ln T}, \quad |t| \leqslant 2T$$

нет нулей $\zeta(s)$. Рассмотрим интеграл по контуру Γ, представляющему собой прямоугольник с вершинами $b \pm iT$, $\alpha \pm iT$, где $\alpha = 1 - \frac{c_1}{\ln T}$. Подынтегральная функция аналитична на Γ и внутри него, исключая простой полюс при $s = 1$ с вычетом x. Таким образом, в силу теоремы Коши

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s}\, ds + I_1 + I_2 + I_3,$$

где через I_1, I_2, I_3 обозначены интегралы по левой и горизонтальным сторонам контура Γ. Оценим эти интегралы сверху.

Применим теорему Бореля–Каратеодори к функции $\ln\zeta(s)$ в круге радиуса $R = \frac{3c_1}{\ln T}$ с центром в точке $s_0 = 1 + \frac{R}{2} + it$, где $2\pi \leqslant t \leqslant T$. Согласно задаче 3 к § 4 в круге $|s - s_0| \leqslant R$ справедлива оценка $\zeta(s) \ll \ln T$. Таким образом, имеем

$$A(R) = \max_{|s-s_0|=R} \operatorname{Re} \ln\zeta(s) = \max_{|s-s_0|=R} \ln|\zeta(s)| \leqslant c_2 \ln\ln T.$$

Далее, пользуясь тождеством Эйлера, находим

$$\begin{aligned} |\ln\zeta(s_0)| &= \left|\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right)\right| = \left|\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms_0}}\right| \\ &\leqslant \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma_0}} = \ln\zeta\left(1 + \frac{R}{2}\right) \leqslant c_3 \ln\ln T, \end{aligned}$$

ибо

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{R}{2}}} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{R}{2}}} = \frac{2+R}{R} \ll \ln T.$$

Итак, $-\operatorname{Re}\ln\zeta(s_0) = -\ln|\zeta(s_0)| \leqslant |\ln\zeta(s_0)| \leqslant c_3 \ln\ln T$, откуда при $n \geqslant 1$ имеем окончательно

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n} \ln\zeta(s)\bigg|_{s=s_0} \ll R^{-n} \ln\ln T.$$

Раскладывая логарифмическую производную дзета-функции Римана в ряд Тейлора, находим в круге $|s - s_0| \leqslant \frac{5c_1}{2\ln T}$ оценку

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(s-s_0)^{n-1} \ll \ln\ln T \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n \ln T \ll \ln T \ln\ln T.$$

В частности, эта оценка справедлива на горизонтальных сторонах контура Γ и на его левой стороне, если $|t| \geqslant 2\pi$. Если же $|t| < 2\pi$, то на левой стороне Γ справедлива оценка

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \ln T,$$

поскольку логарифмическая производная дзета-функции имеет при $s = 1$ простой полюс.

Теперь оценим интегралы I_1, I_2, I_3. Имеем

$$I_1 \ll x^\alpha \ln T \int_0^{2\pi} dt + x^\alpha \ln T \ln\ln T \int_{2\pi}^{T} \frac{dt}{t} \ll x^\alpha \ln^2 T \ln\ln T,$$

$$I_2, I_3 \ll \frac{\ln T \ln\ln T}{T} \int_\alpha^b x^\sigma \, d\sigma \ll \frac{x}{T} \ln T \ln\ln T.$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \\ &= x + O\biggl(\frac{x \ln^2 x}{T} + \frac{x \ln T \ln\ln T}{T} + x^\alpha \ln^2 T \ln\ln T + \ln x \ln T \biggr).\end{aligned}$$

Положив $T = e^{\sqrt{\ln x}}$, получим требуемое асимптотическое равенство. ■

Следствие (асимптотический закон распределения простых чисел). *Имеет место асимптотическая формула*

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\bigl(x e^{-c\sqrt{\ln x}}\bigr),$$

где $c > 0$ – постоянная.

Доказательство. По определению функции Мангольдта находим

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{p \leqslant x} \ln p + \sum_{\substack{p^k \leqslant x \\ k \geqslant 2}} \ln p = \sum_{p \leqslant x} \ln p + O(\sqrt{x}),$$

ибо в силу задачи 1, е к § 4

$$\sum_{\substack{p^k \leqslant x \\ k \geqslant 2}} \ln p = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \ln p \sum_{2 \leqslant k \leqslant \frac{\ln x}{\ln p}} 1 \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \ln p \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \leqslant \ln x \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} 1 \ll \sqrt{x}.$$

Таким образом, из теоремы 17 получаем, что

$$\sum_{p \leqslant x} \ln p = x + O\bigl(x e^{-c\sqrt{\ln x}}\bigr).$$

Пусть $\delta(n)$ обозначает характеристическую функцию множества простых чисел. Совершая преобразование Абеля (теорема 9), находим

$$\begin{aligned}\pi(x) &= 1 + \sum_{2<n\leqslant x} \delta(n) \ln n \frac{1}{\ln n} \\ &= 1 + \frac{1}{\ln x} \sum_{2<n\leqslant x} \delta(n) \ln n + \int_2^x \left(\sum_{2<n\leqslant u} \delta(n) \ln n \right) \frac{du}{u \ln^2 u} \\ &= 1 + \frac{1}{\ln x} \sum_{2<p\leqslant x} \ln p + \int_2^x \left(\sum_{2<p\leqslant u} \ln p \right) \frac{du}{u \ln^2 u} \\ &= \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} + O\left(x e^{-c\sqrt{\ln x}} + \int_2^x e^{-c\sqrt{\ln u}}\, du \right).\end{aligned}$$

Возьмем по частям интеграл в главном члене

$$\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} = \frac{x}{\ln x} - \int_2^x u\, d\left(\frac{1}{\ln u}\right) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

Наконец, оценим интеграл в остаточном члене, разбив его на два интеграла и пользуясь монотонностью подынтегральной функции

$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln u}}\, du \ll \int_2^{\sqrt{x}} du + e^{-c_1\sqrt{\ln x}} \int_{\sqrt{x}}^x du \ll x e^{-c_1\sqrt{\ln x}}.$$

Этим доказательство завершается. ■

В 1958 году Виноградов получил новую границу нулей дзета-функции Римана – $\sigma \geqslant 1 - c(\ln T)^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}$, и новую оценку остаточного члена в асимптотическом законе – $\ll x e^{-c(\ln x)^{0.6-\varepsilon}}$. Эти результаты, по существу, не улучшены и по сей день. Между тем, из гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(\sqrt{x} \ln x).$$

Задачи к § 5

1. Доказать следующие асимптотические формулы:

а)
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=O\bigl(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\bigr);$$

б)
$$\sum_{n\leqslant x}r(n)=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x+O\bigl(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\bigr),$$

где $r(n)$ – число решений уравнения $\varphi(m)=n$.

2. Доказать следующие асимптотические формулы:

а)
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\ln x+c+O(x^{-\frac{2}{3}}\ln^2 x);$$

б)
$$\sum_{n\leqslant x}\sigma^2(n)=\frac{\zeta^2(2)\zeta(3)}{\zeta(4)}\frac{x^3}{3}+O(x^{\frac{7}{3}}\ln^3 x);$$

в)
$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n^2)=\frac{x\ln^2 x}{2\zeta(2)}+c_1x\ln x+c_2+O(x^{\frac{5}{7}+\varepsilon}).$$

3. Доказать следующую асимптотическую формулу:
$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}=\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\prod_p\sqrt{p(p-1)}\ln\frac{p}{p-1}$$
$$+c_1x(\ln x)^{-\frac{3}{2}}+\cdots+c_{N-1}x(\ln x)^{-N+\frac{1}{2}}+O\bigl(x(\ln x)^{-N-\frac{1}{2}}\bigr),$$

где N – произвольное фиксированное число.

§ 6 Проблема делителей Дирихле. Формула Вороного

Асимптотические формулы для некоторых сумматорных функций можно получить, не прибегая к методу комплексного интегрирования. Например,

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}1=\sum_{d\leqslant x}\sum_{k\leqslant \frac{x}{d}}1$$
$$=\sum_{d\leqslant x}\left[\frac{x}{d}\right]=x\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d}+O(x)=x\ln x+O(x).$$

Полученная оценка остатка очень груба, так как суммирование по d идет вплоть до x, где ошибка от замены целой части дроби $\frac{x}{d}$ на саму дробь сравнима по величине с этой дробью. Гораздо более точную оценку можно получить с помощью изящного приема, восходящего к Гауссу.

Теорема 18 (Дирихле). *Справедливо равенство*

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=x\ln x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}),$$

где C – постоянная Эйлера.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=\sum_{d\leqslant x}\left[\frac{x}{d}\right]=\sum_{uv\leqslant x}1.$$

Таким образом, интересующая нас величина представляет собой число точек с целыми неотрицательными координатами под гиперболой $uv=x$. Имеет место соотношение

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=2\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\left[\frac{x}{d}\right]-\Bigg(\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}1\Bigg)^2.$$

Действительно, первое слагаемое в правой части есть число целых точек под гиперболой $uv=x$ с ограничением $u\leqslant\sqrt{x}$ плюс число целых точек под той же гиперболой с ограничением $v\leqslant\sqrt{x}$. Эти две области перекрываются по квадрату $u,v\leqslant\sqrt{x}$, то есть целые точки в этом квадрате считаются дважды и их количество должно быть вычтено. Согласно задаче 1 к § 3 имеем

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=2x\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{d}-x+O(\sqrt{x})=x\ln x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}).$$

Этим доказательство завершается. ■

Положим

$$R(x)=\sum_{n\leqslant x}\tau(n)-x\ln x-(2C-1)x.$$

Проблема уточнения оценки $R(x)$ известна как проблема делителей Дирихле. В 1903 году Вороной показал, что $R(x)\ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Наилучший на сегодняшний день результат – $R(x)\ll x^{\frac{7}{22}+\varepsilon}$ – получен Иванцом в 1988 году. С другой стороны, Харди доказал существование последовательности чисел x_n, стремящейся к бесконечности и такой, что $|R(x_n)|\gg {x_n}^{\frac{1}{4}}$. Предполагают, что имеет место оценка $R(x)\ll x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

Мы получим явную формулу для $R(x)$, известную как формула Вороного, из которой легко следует оценка $R(x)\ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Для этого мы проведем контур интегрирования существенно левее единичной прямой, и вместо того, чтобы оценивать интеграл по левой стороне контура, вычислим его асимптотически. Нам потребуется два вспомогательных утверждения.

Теорема 19. *При* $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $t\geqslant 2\pi$ *имеет место оценка*

$$\zeta(s)\ll t^{\frac{1-\sigma}{2}}\ln t.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(s)=e^{\varepsilon is+\frac{s-1}{2}\ln(-is)}\frac{1}{\ln(-is)}.$$

Пусть $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $t\geqslant 2\pi$. Имеем

$$|f_\varepsilon(s)|=\frac{e^{-\varepsilon t+\frac{\sigma-1}{2}\ln|s|-\frac{t}{2}\arg(-is)}}{\sqrt{\ln^2|s|+\arg^2(-is)}}=t^{\frac{\sigma-1}{2}}e^{-\varepsilon t}\frac{e^{\frac{\sigma}{2}}+O(t^{-2})}{\ln t},$$

поскольку $\ln|s|=\frac{1}{2}\ln(\sigma^2+t^2)=\ln t+O(t^{-2})$, а $\arg(-is)=-\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{t}=-\frac{\sigma}{t}+O(t^{-3})$.

Рассмотрим теперь функцию $\zeta(s)f_\varepsilon(s)$ в полуполосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 2\pi$. Согласно задаче 3 к § 4 имеют место оценки $\zeta(it) \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t$ и $\zeta(1+it) \ll \ln t$. Таким образом, на границе указанной полуполосы имеем
$$|\zeta(s)f_\varepsilon(s)| \leqslant M,$$
где M – абсолютная постоянная. При $T \geqslant T_0(\varepsilon)$ та же оценка верна и при $s = \sigma + iT$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, что опять же следует из упомянутой задачи. В силу принципа максимума модуля указанная оценка справедлива в прямоугольнике $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $2\pi \leqslant t \leqslant T$, а значит и во всей полуполосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 2\pi$, так как T можно брать произвольно большим.

Итак, при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 2\pi$ имеем
$$|\zeta(s)| \leqslant M|f_\varepsilon(s)|^{-1} \leqslant M_1 e^{\varepsilon t} t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t.$$
Доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$. ■

Теорема 20. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a,b]$ условиям:*

1) *$f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;*

2) *существуют числа $H, A > 0$, $U \geqslant b-a$ такие, что*
$$f^{(2)}(x) \asymp A^{-1}, \qquad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \qquad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(x) \ll H, \qquad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \qquad \varphi''(x) \ll HU^{-1};$$

3) *существует $c \in [a,b]$ такое, что $f(c) = 0$.*

Тогда имеет место формула
$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)}\,dx = \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i f(c) + \frac{\pi i}{4}} + O(HAU^{-1})$$
$$+ O(H\min(|f'(a)|^{-1}, \sqrt{A})) + O(H\min(|f'(b)|^{-1}, \sqrt{A})).$$

Доказательство. Пусть $c \in (a,b)$. Рассмотрим отдельно интеграл от c до b и интеграл от a до c. Имеем
$$\int_c^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)}\,dx = \varphi(c)\int_c^b e^{2\pi i f(x)}\,dx$$
$$+ \int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)}\,dx.$$

Возьмем второй интеграл по частям:

$$\int_0^{b-c}(\varphi(x+c)-\varphi(c))e^{2\pi i f(x+c)}\,dx = \frac{\varphi(x+c)-\varphi(c)}{2\pi i f'(x+c)}e^{2\pi i f(x+c)}\Big|_0^{b-c}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{b-c}\frac{\varphi'(x+c)f'(x+c)-f''(x+c)(\varphi(x+c)-\varphi(c))}{(f'(x+c))^2}$$
$$\times e^{2\pi i f(x+c)}\,dx.$$

Пользуясь условиями на производные функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из формулы конечных приращений Лагранжа находим

$$\begin{aligned}\varphi(x+c)-\varphi(c)&=\varphi'(c)x+O(HU^{-2}x^2),\\ \varphi'(x+c)&=\varphi'(c)+O(HU^{-2}x),\\ f'(x+c)&=f''(c)x+O(A^{-1}U^{-1}x^2),\quad |f'(x+c)|\gg A^{-1}x,\\ f''(x+c)&=f''(c)+O(A^{-1}U^{-1}x).\end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства $U\geqslant b-a$ следует, что

$$\int_0^{b-c}(\varphi(x+c)-\varphi(c))e^{2\pi i f(x+c)}\,dx\ll HAU^{-1}.$$

Точно такая же оценка справедлива и для интеграла от a до c.

Рассмотрим теперь разность

$$D=\int_0^{b-c}e^{2\pi i f(x+c)}\,dx-\int_0^{b-c}\frac{f'(x+c)e^{2\pi i f(x+c)}\,dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c)-f(c))}}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$D=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{f'(x+c)}-\frac{1}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c)-f(c))}}\right)e^{2\pi i f(x+c)}\Big|_0^{b-c}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{b-c}\left(-\frac{f''(x+c)}{(f'(x+c))^2}+\frac{f'(x+c)}{\sqrt{8f''(c)}(f(x+c)-f(c))^{\frac32}}\right)$$
$$\times e^{2\pi i f(x+c)}\,dx.$$

Пользуясь формулой Тейлора и условиями на производные функции $f(x)$, получаем

$$\begin{aligned}f(x+c)-f(c)&=\frac12 f''(c)x^2+\frac16 f^{(3)}(c)x^3+O(A^{-1}U^{-2}x^4),\\ f'(x+c)&=f''(c)x+f^{(3)}(c)x^2+O(A^{-1}U^{-2}x^3),\\ f''(x+c)&=f''(c)+f^{(3)}(c)x+O(A^{-1}U^{-2}x^2).\end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства $U \geqslant b-a$ следует, что

$$\int_0^{b-c} e^{2\pi i f(x+c)}\,dx = \int_0^{b-c} \frac{f'(x+c)e^{2\pi i f(x+c)}dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c)-f(c))}} + O(AU^{-1}).$$

В случае интеграла от a до c имеем

$$\int_{a-c}^{0} e^{2\pi i f(x+c)}\,dx = -\int_{a-c}^{0} \frac{f'(x+c)e^{2\pi i f(x+c)}\,dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c)-f(c))}} + O(AU^{-1}),$$

ибо в этом случае $x \leqslant 0$ и $\sqrt{x^2} = -x$.

Сделаем замену переменной $u = f(x+c) - f(c)$, обозначая $\lambda = f(b) - f(c)$ (соответственно, $\lambda = f(a) - f(c)$). Имеем $u \geqslant 0$, так как c – точка минимума $f(x)$, и в обоих случаях получаем интеграл одного и того же вида:

$$\frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^{\lambda} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}\,du + O\left(\sqrt{A}\left|\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}\,du\right|\right).$$

С одной стороны, интегрируя по частям, находим оценку

$$\left|\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{4\pi}\int_{\lambda}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}}\,du \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

С другой стороны,

$$\left|\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}\,du\right| \ll 1.$$

При $\lambda > 1$ последняя оценка следует из предыдущей, а при $\lambda \leqslant 1$ имеем

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\lambda+1} - 2\sqrt{\lambda} \ll 1.$$

Наконец, согласно формуле конечных приращений Лагранжа находим

$$\sqrt{f(b)-f(c)} = \sqrt{\frac{1}{2}f''(\xi)(b-c)^2} \gg \frac{1}{\sqrt{A}}|b-c|,$$
$$|f'(b)| = |f''(\xi_1)(b-c)| \ll \frac{1}{A}|b-c|,$$

то есть
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ll \frac{1}{\sqrt{A}|f'(b)|}.$$
Окончательно имеем
$$\int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i f(x)}\,dx = \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}}e^{2\pi i f(c)}\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}du + O(HAU^{-1})$$
$$+ O(H\min(|f'(a)|^{-1}, \sqrt{A})) + O(H\min(|f'(b)|^{-1}, \sqrt{A})).$$
Случай $c = b$ или $c = a$ также учитывается этой формулой: главный член будет вдвое меньше, но он поглощается остатком $O(H\sqrt{A})$.

Остается вычислить несобственный интеграл в правой части. Рассмотрим контур Γ, состоящий из четвертей окружностей радиусов r и R с центром в нуле, расположенных в первом квадранте, и соединяющих концы этих дуг отрезков вещественной и мнимой осей. Согласно теореме Коши
$$\int_\Gamma \frac{e^{2\pi i s}}{\sqrt{s}}\,ds = 0.$$
Интегралы по дугам стремятся к нулю при $r \to 0$ и $R \to \infty$, ибо
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\pi i r e^{i\varphi}}}{\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}} i r e^{i\varphi}\,d\varphi \ll \sqrt{r},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\pi i R e^{i\varphi}}}{\sqrt{R}e^{\frac{i\varphi}{2}}} i R e^{i\varphi}\,d\varphi \ll \sqrt{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\pi R\sin\varphi}\,d\varphi$$
$$\ll \sqrt{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-4R\varphi}\,d\varphi \ll \frac{1}{\sqrt{R}}.$$
Таким образом, получаем
$$\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\int_0^\infty \frac{e^{-2\pi u}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}}.$$
Этим доказательство завершается. ■

Теперь мы готовы к доказательству формулы Вороного.

Теорема 21 (формула Вороного). *Пусть $T \leqslant x$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = x\ln x + (2C-1)x + \frac{x^{\frac14}}{\pi\sqrt{2}}\sum_{n\leqslant \frac{1}{x}(\frac{T}{2\pi})^2}\frac{\tau(n)}{n^{\frac34}}\cos\Bigl(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\Bigr) + O\Bigl(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\Bigr),$$

где C – постоянная Эйлера.

Доказательство. Будем считать $T \geqslant 100\sqrt{x}$, так как в противном случае формула Вороного следует из теоремы Дирихле. Будем также считать, не ограничивая общности, что верхний предел суммирования в правой части формулы Вороного есть полуцелое число. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s),$$

причем согласно задаче 1, д к § 1 справедлива оценка $\tau(n) \ll n^{\varepsilon}$. Поскольку дзета-функция Римана имеет при $s=1$ полюс первого порядка, то при $\sigma \to 1+0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{\sigma}} = \zeta^2(\sigma) \ll \frac{1}{(\sigma-1)^2}.$$

Выберем $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ и применим формулу Перрона, полагая $T \leqslant x$. Имеем

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\,ds + O\Bigl(\frac{x^{1+2\varepsilon}}{T}\Bigr).$$

Рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $b\pm iT$, $-\varepsilon\pm iT$. Согласно теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\,ds = \operatorname{res}_{s=1}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s} + \operatorname{res}_{s=0}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}.$$

Вычислим вычеты в правой части последнего равенства:

$$\operatorname{res}_{s=1}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s} = \Bigl(((s-1)\zeta(s))^2\frac{x^s}{s}\Bigr)'\Big|_{s=1} = x\ln x - x + 2Cx,$$

что следует из задачи 4 к § 3, и

$$\operatorname{res}_{s=0} \zeta^2(s)\frac{x^s}{s} = \zeta^2(0) \ll 1.$$

Теперь оценим интегралы по горизонтальным сторонам контура Г. Используя теорему 19 и задачу 3 к § 4, получим

$$\int_{-\varepsilon}^{b} \zeta^2(\sigma \pm iT)\frac{x^{\sigma\pm iT}}{\sigma \pm iT}\,d\sigma \ll \frac{x^0}{T}\max_{-\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant 0}|\zeta^2(\sigma\pm iT)| \\ + \frac{\ln^2 T}{T}\int_0^1 x^\sigma T^{1-\sigma}\,d\sigma + \frac{x^b}{T}\max_{1\leqslant\sigma\leqslant b}|\zeta^2(\sigma\pm iT)| \\ \ll T^{2\varepsilon}\ln^2 T + \frac{x}{T}\ln^2 T \ll \frac{x^{1+3\varepsilon}}{T}.$$

Итак, имеем

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = x\ln x + (2C-1)x + j + O\left(\frac{x^{1+3\varepsilon}}{T}\right),$$

где

$$j = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Преобразуем интеграл j к более удобному виду. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\varepsilon-2\pi i}^{-\varepsilon+2\pi i}\zeta^2(s)\frac{x^s}{s}\,ds \ll 1,$$

и, поскольку дзета-функция Римана вещественна при вещественных s,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{-2\pi}\zeta^2(-\varepsilon+it)\frac{x^{-\varepsilon+it}}{-\varepsilon+it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{T}\zeta^2(-\varepsilon-it)\frac{x^{-\varepsilon-it}}{-\varepsilon-it}\,dt \\ = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{T}\zeta^2(-\varepsilon+it)\frac{x^{-\varepsilon+it}}{-\varepsilon+it}\,dt}.$$

Таким образом,

$$j = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{2\pi}^{T}\zeta^2(-\varepsilon+it)\frac{x^{-\varepsilon+it}}{-\varepsilon+it}dt + O(1).$$

Согласно функциональному уравнению дзета-функции Римана и задаче 2 к § 4 имеем

$$\zeta^2(-\varepsilon+it)=\chi^2(-\varepsilon+it)\zeta^2(1+\varepsilon-it)$$
$$=\zeta^2(1+\varepsilon-it)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1+2\varepsilon}e^{-2it\ln\frac{t}{2\pi e}+i\frac{\pi}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{-\varepsilon+it}=\frac{1}{it}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

и

$$\zeta^2(1+\varepsilon-it)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}n^{it}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}\ll 1,$$

получаем равенство

$$\zeta^2(-\varepsilon+it)\frac{x^{-\varepsilon+it}}{-\varepsilon+it}$$
$$=\zeta^2(1+\varepsilon-it)\frac{x^{-\varepsilon}t^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}}e^{-it\ln(\frac{1}{x}(\frac{t}{2\pi e})^2)}+O(x^{-\varepsilon}t^{2\varepsilon-1}).$$

Таким образом,

$$j=\frac{1}{\pi}\frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}}\operatorname{Re}\int_{2\pi}^{T}\zeta^2(1+\varepsilon-it)t^{2\varepsilon}e^{-it\ln(\frac{1}{x}(\frac{t}{2\pi e})^2)}\,dt+O(T^{2\varepsilon}).$$

Но ряд Дирихле для $\zeta^2(1+\varepsilon-it)$ сходится равномерно на отрезке интегрирования, поэтому его можно проинтегрировать почленно, что приводит к равенству

$$j=\frac{1}{\pi}\frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}\operatorname{Re}j(n)+O(T^{2\varepsilon}),$$

где

$$j(n)=\int_{2\pi}^{T}t^{2\varepsilon}e^{it\ln(\frac{1}{nx}(\frac{t}{2\pi e})^2)}\,dt.$$

Мы изменили знак показателя мнимой экспоненты, так как он не влияет на вещественную часть.

Теперь найдем асимптотическую формулу для величины $j(n)$. Введем обозначение

$$f(t)=\frac{t}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{nx}\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^2\right).$$

Тогда

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{nx}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2\right) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{t}{t_1},$$

где $t_1 = 2\pi\sqrt{nx}$. Очевидно, $f'(t_1) = 0$. Пусть

$$n_1 = \frac{1}{x}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2,$$

причем T, напомним, таково, что n_1 равно половине нечетного числа. Пусть вначале $t_1 > T$, то есть $n > n_1$. Тогда, интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned} j(n) &= \int_{2\pi}^{T} \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)}\, de^{2\pi i f(t)} \\ &= \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} e^{2\pi i f(t)}\Big|_{2\pi}^{T} - \int_{2\pi}^{T} e^{2\pi i f(t)}\, d\frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)}. \end{aligned}$$

Но функция $-t^{2\varepsilon}(f'(t))^{-1}$ положительна и монотонно возрастает на отрезке интегрирования, поэтому, оценивая правую часть тривиально, получим

$$j(n) \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{|f'(T)|} \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{\ln\frac{n}{n_1}},$$

ибо

$$f'(T) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{nx}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{n}{n_1}.$$

Таким образом, в силу полуцелости n_1, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n>n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}\operatorname{Re} j(n) &\ll T^{2\varepsilon} \sum_{n>n_1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{\ln\frac{n}{n_1}} \\ &\ll T^{2\varepsilon} \sum_{n>\frac{3}{2}n_1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} + \frac{T^{2\varepsilon}}{{n_1}^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{n_1<n\leqslant\frac{3}{2}n_1} \frac{n_1}{n-n_1} \\ &\ll T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} + T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n_1}{2}} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \\ &\ll T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \ln n_1 \ll T^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$j=\frac{1}{\pi}\frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}}\sum_{n<n_1}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}\operatorname{Re} j(n)+O(T^{2\varepsilon}).$$

Пусть теперь $n<n_1$, то есть $t_1<T$. Введем обозначения $a=0.9t_1$, $b=\min(1.1t_1,T)$. Аналогично предыдущему имеем

$$\int_{2\pi}^{a}\frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)}\,de^{2\pi i f(t)}\ll\frac{a^{2\varepsilon}}{|f'(a)|}\ll t_1^{2\varepsilon}\ll n^{\varepsilon}x^{\varepsilon}.$$

Функция $t^{2\varepsilon}(f'(t))^{-1}$ положительна на отрезке $[b,T]$ и либо монотонна на этом отрезке, либо имеет на нем два участка монотонности, разделенных точкой минимума. В обоих случаях интегрирование по частям приводит к оценке

$$\int_{b}^{T}\frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)}\,de^{2\pi i f(t)}\ll\frac{T^{2\varepsilon}}{|f'(T)|}+\frac{b^{2\varepsilon}}{|f'(b)|}\ll n^{\varepsilon}x^{\varepsilon}+\frac{T^{2\varepsilon}}{\ln\frac{n_1}{n}}.$$

Отсюда

$$j=\frac{1}{\pi}\frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}}\sum_{n<n_1}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}\operatorname{Re}\int_{a}^{b}t^{2\varepsilon}e^{2\pi i f(t)}\,dt+R+O(T^{2\varepsilon}),$$

где

$$R\ll\sum_{n<n_1}\frac{\tau(n)}{n}+T^{2\varepsilon}\sum_{n<n_1}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}\frac{1}{\ln\frac{n_1}{n}}$$
$$\ll n_1^{\varepsilon}\ln n_1+T^{2\varepsilon}\sum_{n<\frac{n_1}{2}}\frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}}+T^{2\varepsilon}{n_1}^{-\frac{\varepsilon}{2}}\sum_{0\leqslant k\leqslant\frac{n_1}{2}}\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\ll T^{2\varepsilon}.$$

Наконец, применим к интегралу от a до b теорему 20, полагая $\varphi(t)=t^{2\varepsilon}$, $A=U=t_1$ и $H={t_1}^{2\varepsilon}$. Это приводит к равенству

$$\int_{a}^{b}t^{2\varepsilon}e^{2\pi i f(t)}\,dt={t_1}^{2\varepsilon}\sqrt{\pi t_1}e^{-2it_1+i\frac{\pi}{4}}+O({t_1}^{2\varepsilon}).$$

Отделяя вещественную часть, подставляя в вышеприведенную формулу и пользуясь явным выражением для t_1, получим

$$j=\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}}\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}(\frac{T}{2\pi})^2}\frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)+O(T^{2\varepsilon}).$$

Этим доказательство завершается. ■

Следствие. *Имеет место формула*

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = x\ln x + (2C-1)x + O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}).$$

Доказательство. Оценивая выражение для остаточного члена тривиально, при $T \geqslant 100\sqrt{x}$ получим

$$R(x) \ll x^{\frac{1}{4}} \sum_{n\leqslant \frac{1}{x}(\frac{T}{2\pi})^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}$$
$$\ll x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\int_1^{T^2x^{-1}} \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \ll x^{\varepsilon}\sqrt{T} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}.$$

Выбирая $T = x^{\frac{2}{3}}$, получаем требуемое. ■

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 2

Марис Евгеньевич Чанга

Метод комплексного интегрирования

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 01.02.2006. Подписано в печать 26.04.2006.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 3,625. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pavlov@mi.ras.ru`