МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 3

Издание выходит с 2003 года

Д. В. Аносов

О спектральных кратностях в эргодической теории

Москва
2003

УДК 519.2
ББК (В)22.162
С56

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2003. Вып. 3: О спектральных кратностях в эргодической теории / Д. В. Аносов. — 86 с.

ISBN 5-98419-004-4

Серия "Современные проблемы математики" — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-004-4

§ 1. Введение

Эргодическая теория (ЭТ) является частью теории динамических систем (ДС), имеющей дело с системами с инвариантной мерой. Последнее означает, что в фазовом пространстве X системы имеется некоторая мера μ, которая сохраняется при движении фазовых точек (точек X), соответствующем эволюции нашей ДС (т. е. изменению ее состояния, происходящему при возрастании времени t). Исторически главный стимул при возникновении ЭТ был вызван тем, что ДС, изучаемые в классической механике — так называемые гамильтоновы системы

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

— обладают этим свойством. В этом случае фазовая точка (p,q) за время t переходит в точку $T_t(p,q) = (p(t), q(t))$; здесь $(p(t), q(t))$ — это решение системы (1) с начальным значением $(p(0), q(0)) = (p,q)$. (Обратите внимание, что система (1) является автономной, т. е. ее правые части не зависят явно от t. Физически зависимость правых частей от t означала бы, что силы, действующие на нашу систему, не определяются полностью ее состоянием (p,q), но что при одном и том же (p,q) силы в различные моменты времени могут быть различными. Это может случиться, если имеются некоторые внешние силы, действующие на нашу систему. Таким образом, автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений возникает, когда мы рассматриваем изолированную физическую систему.) Известная теорема, приписываемая Лиувиллю, утверждает, что преобразования T_t сохраняют $2n$-мерный объем, т. е. $2n$-мерную меру Лебега. В то же время известно, что H является первым интегралом системы (1), т. е. $H(T_t(p,q)) = H(p,q)$ (здесь существенно, что H не зависит от t). Геометрически это означает, что гиперповерхности $M_E = \{(p,q), H(p,q) = E\}$ (с постоянными E) являются инвариантными многообразиями нашей системы, т. е. если $(p,q) \in M_E$, то $T_t(p,q) \in M_E$. Если рассматривать только ограничение нашей ДС на некоторую гиперповерхность M_E (т. е. преобразования $\{T_t | M_E\}$), то оказывается, что эта система сама имеет “хорошую” инвариантную меру μ_E, которая тесно связана с геометрическим $(2n-1)$-мерным “объемом” (“гиперплощадью”) S_E на M_E:

$$d\mu_E = \frac{dS_E}{|\mathrm{grad}\ H|}.$$

В классической ситуации p_i и q_i могут быть произвольными вещественными числами, т. е. фазовым пространством служит $\mathbb{R}^{2n}$. Его объем бесконечен. Но в то же время гиперповерхности постоянной энергии M_E вполне могут быть компактными. Если такая гиперповерхность не содержит критических точек функции H (точек, где $\operatorname{grad} H = 0$), что является типичным случаем, то она имеет конечный $(2n-1)$-мерный объем S_E и конечную меру μ_E. Мы видим, что разумно уделить особое внимание тем случаям, когда инвариантная мера всего фазового пространства конечна.

В этой брошюре речь идет о части ЭТ, которую можно назвать "абстрактной ЭТ", — части ЭТ, рассматривающей сохраняющие меру преобразования пространств X с мерами μ. В этой части теории единственная структура, которую мы принимаем во внимание, это структура пространства с мерой. (Когда же изучаются эргодические свойства ДС, которая определена в пространстве с некоторой дополнительной структурой и которая как-то связана с этой структурой, то это можно назвать "прикладной ЭТ", хотя термин "прикладная" используется здесь в смысле, отличном от его обычного смысла.) Мы будем рассматривать только тот случай, когда $\mu(X) = 1$[1], мера μ является "хорошей" (технически, (X, μ) является неатомистическим пространством Лебега), а изучаемые объекты суть такие биективные отображения $T\colon X \to X$, что для всякого измеримого подмножества $A \subset X$ множества TA, $T^{-1}A$ тоже измеримы и имеют ту же меру. Этот случай занимает центральное положение в абстрактной ЭТ, потому что многие вопросы проявляются уже в этом случае, тогда как технически он несколько проще[2]. Наконец, в абстрактной ЭТ мы обычно с

[1]Этим по существу покрывается формально более общий случай конечной меры, т. е. случай, когда $\mu(X) < \infty$, потому что тогда мы можем перейти к новой мере $\mu_1(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$, для которой $\mu_1(X) = 1$. Она также сохраняется нашей ДС и свойства ДС по отношению к мере μ_1 — те же, что и по отношению к мере μ, с точностью до небольших изменений некоторых формулировок. (Терминологическое замечание: Халмош [1] называет меру μ, для которой $\mu(X) < \infty$, "вполне конечной мерой" ("totally finite measure").)

[2]Конечно, "многие" не означает "все", особенно когда мы переходим к сохраняющим меру действиям групп и полугрупп, которые сильно отличаются от $\mathbb{Z}$. Имеются также и другие случаи, отличные от нашего в некоторых других отношениях: преобразование T может быть необратимым; преобразования могут зависеть от некоторых параметров и при этом надо уделять некоторое внимание характеру этой зависимости, тогда как нам об этом не надо заботиться. Обычно в конечном счете эти отличия сказываются менее

самого начала предполагаем, что рассматриваемые ДС являются эргодическими[3]. Для этого имеются два резона: а) применения ЭТ при исследовании "конкретной" ДС, которая определена в пространстве с некоторой дополнительной структурой и которая как-то связана с этой структурой, мы обычно особенно интересуемся эргодическими ДС (хотя может быть очень трудно доказать эргодичность данной ДС (или данного класса ДС)); б) для неэргодического T пространство X можно в некотором смысле разложить на "эргодические компоненты" таким образом, что (как подсказывает название) ограничения T на них эргодичны.

Нет нужды особенно пояснять, что мы пренебрегаем множествами меры нуль, как это часто делают при исследованиях, касающихся меры. Таким образом, изоморфизм двух пространств с мерой (X, μ) и (Y, ν) — это, строго говоря, изоморфизм T: $X \setminus M \to Y \setminus N$, где M и N суть некоторые множества меры нуль. Было бы точнее говорить об "изоморфизме mod 0" ("mod 0" — это более или менее стандартное сокращение для "по модулю множеств меры нуль"). Но я обычно опускаю такие уточнения, как это часто делают в подобных случаях. Поэтому я не колебался давать такое определение функции, которое предписывает для нее два различных значения в одной и той же точке (принимая во внимание опущенные слова "mod 0", это законно, если эти исключительные точки образуют множество меры нуль) или писать что-нибудь вроде $[0, 2] \setminus [1, 2] = [0, 1]$. (Первокурснику не позволили бы так писать, но он не знает волшебного заклинания "mod 0".)

Исторически, в развитии абстрактной ЭТ было три этапа. Я должен предупредить с самого начала, что это не надо понимать слишком буквально. На каждом этапе возникало новое направление, но старые направления оставались важными и в них продолжалась некоторая работа, хотя на некоторое время бóльшая часть исследований естественным образом переключалась на новое направление, где внезапно обнаружилось много вещей, которые надо сделать, причем многие из них можно было сделать немедленно. Кроме того, на каждом этапе делалась некоторая (иногда очень важная) работа, которая не соответствовала приводимой

радикально, и исследование нашего несколько более простого случая в какой-то степени можно рассматривать как "прототип" исследования этих случаев.

[3]В нашем случае это означает, что нет инвариантных множеств (таких измеримых множеств A, что $TA = A$) "промежуточной" меры — меры, отличной от 0 и 1.

ниже характеристике этого этапа[4]. Все же моя характеристика соответствует тому, что можно считать основным руслом исследований в течение соответствующего периода времени.

1) С сохраняющим меру преобразованием T пространства с мерой (X, μ) связывается оператор

$$U = U_T \colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu) \quad (Uf)(x) = f(Tx).$$

В нашем случае (когда обратное преобразование T^{-1} существует и сохраняет меру) U является унитарным линейным оператором в гильбертовом пространстве. Для таких операторов имеется общая спектральная теория. Ее можно развить для унитарных операторов в любом гильбертовом пространстве, но нам нужен только классический случай, когда гильбертово пространство сепарабельно, потому что оно оказывается сепарабельным для "хороших" пространств с мерой (X, μ). Эта спектральная теория не имеет отношения к тому факту, что мы имеем дело с операторами специального характера — с операторами, возникающими указанным выше способом. Но легко видеть, что если два автоморфизма пространств с мерой

$$T \colon (X, \mu) \to (X, \mu), \qquad T_1 \colon (X_1, \mu_1) \to (X_1, \mu_1)$$

сопряжены при помощи изоморфизма пространств с мерой $S\colon (X, \mu) \to (X_1, \mu_1)$[5]:

$$S \circ T = T_1 \circ S$$

(в каковом случае мы считаем, что T и T_1 — это, в сущности, одно и то же преобразование), то U_T и U_{T_1} сопряжены с помощью унитарного изоморфизма

$$U_S \colon L^2(X_1, \mu_1) \to L^2(X, \mu) \qquad (U_S f)(x) = f(Sx),$$

т. е. $U_T \circ U_S = U_S \circ U_{T_1}$. В этом случае спектральные свойства U_T и U_{T_1} — одни и те же. Таким образом, можно рассматривать спектральные свойства (инварианты) унитарного оператора U как свойства (инварианты) нашей ДС. Говоря более неопределенно,

[4] Пример: эргодическая теорема Биркгофа (являющаяся, возможно, самой знаменитой теоремой во всей абстрактной ЭТ) была доказана в самом начале первого этапа, но она находится вне его рамок.

[5] S является изоморфизмом пространств с мерой, если образы и прообразы измеримых множеств измеримы и имеют ту же меру.

на этом этапе использовалась спектральная идеология; а эта идеология восходит к анализу Фурье периодических и квазипериодических функций. Стоит заметить, что в то время движения, описываемые такими функциями, имели главное значение также и для теории гладких ДС и что первым примером такого анализа Фурье было приближение движения планет с помощью тригонометрических многочленов, которое, в сущности, было изобретено в древней Греции, где оно осуществлялось геометрическим способом (деференты и эпициклы)[6]. Во многих важных отношениях периодические и почти-периодические движения обладают некоторой “регулярностью”. Хотя спектральная теория ДС никоим образом не ограничивается движениями такого рода (и помимо рядов Фурье здесь встречается также и некоторая модификация интеграла Фурье), ее наиболее впечатляющие приложения имеют приблизительно такой характер (дискретный спектр; см. ниже).

Предупреждение: постоянные функции всегда инвариантны по отношению к U_T. Обычно опускают эту тривиальную часть гильбертова пространства $L^2(X,\mu)$ и рассматривают действие оператора U_T на ортогональном дополнении H к константам. Это означает, что наш оператор U часто действует только на L^2-функциях с нулевыми средними значениями. Но при чтении настоящего текста, как и практически любого текста по ЭТ, надо иметь в виду, что время от времени U по прежнему будет действовать на всем $L^2(X,\mu)$. Обычно “переключение” с гильбертова пространства $H = L^2(X,\mu) \ominus \{\text{constants}\}$ на $H = L^2(X,\mu)$ происходит без явного предупреждения; однако обычно из контекста ясно, какое функциональное пространство используется.

2) На втором этапе основную роль как в ЭТ, так и в теории гладких динамических систем играл противоположный случай ДС, напоминающих случайные процессы. Здесь движения можно охарактеризовать как нерегулярные. Я не буду останавливаться на этом, потому что это не связано с моей темой. Я только упомяну, что в ЭТ второй этап начал А. Н. Колмогоров, а в теории гладких ДС — несколькими годами позднее С. Смейлом. (Конечно, долгое время новая идеология постепенно вызревала внутри

[6] Для “широкой публики” они связаны с именем Птолемея. В действительности, менее совершенная геометрическая картина была предложена Евдоксом, а переход к эпициклам и деферентам осуществил Апполоний. Его идея была успешно развита, главным образом, Гиппархом и также Птолемеем, который подробно изложил ее и благодаря этому стал более знаменит, чем его предшественники.

прежней ЭТ и прежней теории гладких ДС, но именно Колмогоров и Смейл сказали нечто вроде "Да будет свет!" (и был свет).)

3) Я не могу охарактеризовать третий этап несколькими фразами, как в 1) и 2). Но в этой брошюре представлен пример работы, выполненной на этом этапе. В этой работе получено частичное решение проблемы спектральной кратности, которая логически принадлежит к первому этапу (хотя, по-видимому, она была сформулирована позднее). Вообще, в течение третьего периода был достигнут прогресс в возникших ранее проблемах; это особенно относится к спектральной теории. См. [2], [3], [4].

Я сформулирую рассматриваемую здесь задачу и полученные результаты в § 2, после того как я опишу некоторые понятия и утверждения из спектральной теории унитарных операторов.

До сих пор практически не было параллелизма между третьим этапом развития ЭТ и развитием теории гладких ДС. Долгое время исключение представляли только работы А. Б. Катка и мои [5], [6], [7], [8], [9], появившиеся в самом начале третьего этапа (даже до того, как был широко осознан сам факт, что начинается новый этап). Мы построили некоторые ДС класса C^∞ с неожиданными для гладких систем эргодическими свойствами. Мы смогли это сделать потому, что нам удалось "сымитировать" на гладком уровне некоторые построения, которые до некоторой степени можно считать принадлежащими к третьему этапу развития абстрактной ЭТ. (Сюда же примыкает работа Катка, сообщение о которой опубликовано в [10] и в которой та же техника использовалась для построения новых примеров гладких ДС, у которых каждая траектория всюду плотна[7].) Насколько мне известно, недавно наш подход вновь стал привлекать некоторое внимание, однако хотя я не следил внимательно за литературой по этому вопросу, мне кажется, что было бы преувеличением говорить о возникновении "гладкого партнера" третьего этапа абстрактной ЭТ. Но может быть, со временем он все-таки появится.

Результат, излагаемый в этой брошюре, — не мой. Он принадлежит О. Н. Агееву и В. В. Рыжикову — более молодым участникам московской исследовательской группы, официально возглавляемой А. А. Болибрухом и мной; в действительности А. М. Сте-

[7] [10] — это только краткий анонс. Соответствующие построения восстановлены в [11]. (Формально изложение в [11] по сравнению с [10] дается для частного случая, но отличия от общего случая не очень существенны.)

пин тоже играет руководящую роль[8]. (В отличие от меня, Степин стимулировал работу в этом направлении своими замечаниями в самом начале.) Я благодарен О. Н. Агееву, В. В. Рыжикову и А. А. Приходько за объяснение этого и смежных результатов как в докладах на нашем семинаре, так и в разговорах. Я благодарю С. П. Коновалова и Е. И. Иванникову за изготовление нескольких рисунков.

Этот текст является расширенным вариантом нескольких лекций, которые я прочел в Боннском, Эрлангенском и Бохумском университетах во время моей недавней поездки в Германию[9].

[8]Работа нашей группы частично поддерживалась грантом РФФИ 96-15-96135 (как раз в то время, когда был получен излагаемый здесь результат) и позднее грантом РФФИ 00-15-96107.

[9]Эта поездка поддерживалась Фондом Гумбольдта и программой Российской академии наук "Математические методы в нелинейной динамике". Во время этого визита я провел много времени в Математическом институте им. Макса Планка в Бонне, где была написана часть этого текста. Я благодарю персонал института, равно как и персонал упомянутых выше университетов, за гостеприимство.

§ 2. Спектральная теорема для унитарных операторов и задача о спектральной кратности

Я сформулирую спектральную теорему в такой форме, которая является более утонченной по сравнению с той формой, которая обычно фигурирует в элементарных учебниках функционального анализа. В нужной мне форме теорема утверждает, что сепарабельное гильбертово пространстве H, в котором действует унитарный оператор U, можно представить как конечную или бесконечную ортогональную прямую сумму инвариантных подпространств, в которых U действует очень специальным образом. (Ср. с разложением конечномерного векторного пространства, где действует линейный оператор A, в прямую сумму инвариантных подпространств, где действие A описывается блоками соответствующей жордановой матрицы.) Каждое слагаемое E унитарно изоморфно некоторому пространству $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ ($\mathbb{S}^1$ — стандартная окружность, а ν — некоторая конечная[10] мера на ней), причем при этом изоморфизме ограничение $U|E$ оператора U на инвариантное подпространство E переходит в отображение

$$V\colon L^2(\mathbb{S}^1,\nu)\to L^2(\mathbb{S}^1,\nu),\qquad f(z)\mapsto zf(z).$$

(Говоря более формально, если E — рассматриваемое инвариантное подпространство, то существует такой унитарный изомор-

[10] Для наших целей достаточно говорить только о конечных мерах, хотя можно использовать здесь также и сигма-конечные (в терминологии Халмоша [1] — “вполне сигма-конечные” (“totally sigma-finite”)) меры. Это приведет к небольшим изменениям в части формулировок, но никоим образом не является существенным, ибо пространство $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ с бесконечной сигма-конечной мерой ν можно заменить пространством $L^2(\mathbb{S}^1,\nu_1)$ с конечной мерой ν_1, которая эквивалентна ν (в смысле, напоминающем определяемую ниже эквивалентность конечных мер); при этой замене оператор V, играющий далее важную роль (он “представляет $U|E$ в терминах $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$” и действует, умножая функцию на ее аргумент), остается оператором того же вида. (В отличие от этого, в случае однопараметрических групп унитарных операторов (возникающих, когда мы имеем дело с потоками, т. е. с однопараметрическими группами сохраняющих меру преобразований) в “естественной” формулировке спектральной теоремы используются бесконечные меры. В этом случае вместо $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ имеют дело с $L^2(\mathbb{R},\nu)$ и вместо V — с однопараметрической группой операторов $V_t\colon f(\lambda)\mapsto e^{it\lambda}f(\lambda)$. В этом случае было бы неестественно (хотя все еще возможно) иметь дело только с конечными мерами ν — наиболее известной и естественной мерой в $\mathbb{R}$ является мера Лебега, которая только сигма-конечна.)

физм гильбертовых пространств $W\colon E \to L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$, что $W\circ(U|E) = V\circ W$.)[11]

Эти слагаемые отнюдь не определены единственным образом. Они становятся однозначно определенными после наложения следующих "нормализующих условий":

— для каждых двух слагаемых, изоморфных $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ и $L^2(\mathbb{S}^1,\nu_1)$ соответственно, соответствующие меры ν, ν_1 либо эквивалентны (тогда мы пишем $\nu \approx \nu_1$), либо взаимно сингулярны (тогда мы пишем $\nu \perp \nu_1$)[12];

— если $\nu \perp \mu$, то число слагаемых $L^2(\mathbb{S}^1,\nu_1)$ с $\nu_1 \approx \nu$ отлично от числа слагаемых $L^2(\mathbb{S}^1,\mu_1)$ с мерами $\mu_1 \approx \mu$.

Хотя эти условия однозначно определяют слагаемые[13], остается некоторая неопределенность в выборе "стандартных представлений" для этих слагаемых как некоторых пространств $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$

[11] Я буду всегда (за одним исключением в § 8) обозначать отображение, переводящее функцию $z \mapsto f(z)$ в функцию $z \mapsto zf(z)$, через V, хотя я буду рассматривать различные функциональные пространства и потому, строго говоря, V будет обозначать различные операторы (они определены одной и той же формулой, но действуют в различных пространствах). Подобная "вольность речи" не приносит вреда, если обращать внимание на контекст.

[12] Конечная мера ν_1 абсолютно непрерывна относительно конечной меры ν (определенной на той же сигма-алгебре $\mathfrak{B}$), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

(a) Если $A \in \mathfrak{B}$ и $\nu(A) = 0$, то $\nu_1(A) = 0$.

(b) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $A \in \mathfrak{B}$ и $\nu(A) < \delta$, то $\nu_1(A) < \varepsilon$.

(c) Существует такая измеримая неотрицательная функция $\rho \in L^1(X,\nu)$, что для любого $A \in \mathfrak{B}$

$$\nu_1(A) = \int_A \rho\, d\nu.$$

(Эквивалентность (a) и (b) получается несложно. Их эквивалентность (c) — это предмет теоремы Радона–Никодима. (b) напоминает определение абсолютной непрерывности функции.) В этом случае пишут $\nu_1 \ll \nu$. Функция ρ называется плотностью или производной Радона–Никодима меры ν_1 относительно ν; символически пишут $d\nu_1 = \rho d\nu$ и $\rho = \frac{d\nu_1}{d\nu}$. Меры ν_1 и ν эквивалентны, если $\nu_1 \ll \nu$ и $\nu \ll \nu_1$. Они (взаимно) сингулярны, если они, так сказать, "сосредоточены" на непересекающихся множествах; более подробно, если существует множество A, которое измеримо относительно обеих мер ν и ν_1 (в случае "хороших" пространств с мерой A можно считать борелевским множеством) и $\nu_1(A) = 0$, $\nu(X \setminus A) = 0$ (как и раньше, X — это все рассматриваемое пространство с мерой).

[13] Если имеется несколько слагаемых, изоморфных $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ с соответствующим V, то в H однозначно определена прямая сумма H' всех таких слагаемых и число таковых. Сами слагаемые в H' могут выделяться по-разному, но они всегда будут изоморфны $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ с одной и той же мерой ν и с соответсвующим V.

(с соответствующими ν). Эта неопределенность вызвана тем, что если другая мера ν_1 на $\mathbb{S}^1$ эквивалентна ν, то гильбертово пространство $L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1)$ унитарно изоморфно $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ посредством некоторого унитарного отображения, сопрягающего отображения V в обоих пространствах. Действительно, пусть $d\nu_1 = \rho\, d\nu$. Тогда для любых $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1)$

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\, d\nu_1 = \int f\overline{g}\rho\, d\nu = \int (f\sqrt{\rho}\,)\overline{(q\sqrt{\rho}\,)}\, d\nu,$$

и потому отображение $f \mapsto f\sqrt{\rho}$ является унитарным отображением $L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1) \to L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$, которое, очевидно, сопрягает отображение V, действующее в одном пространстве, с отображением V, действующем в другом пространстве. Мы видим, что если прямое слагаемое E в разложении H, о котором говорится в спектральной теореме, унитарно эквивалентно $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ и при этом $U|E$ представляется отображением V, то то же самое E унитарно эквивалентно любому пространству $L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1)$ с $\nu_1 \approx \nu$ (и $U|E$ по прежнему представляется как V). Нет оснований предпочесть одну меру ν другим. Таким образом, E соответствует целому классу $[\nu]$ мер ν_1, которые эквивалентны ν. Вообще (независимо от спектральной теории) такой класс называется "метрическим типом", а в нашем случае мы называем меру ν спектральной мерой (для U) и $[\nu]$ — "спектральным метрическим типом".

Заметим, что если $\nu \perp \mu$, то $\nu_1 \perp \mu_1$ для всех $\nu_1 \approx \nu$, $\mu_1 \approx \mu$. Поэтому можно говорить о взаимно сингулярных метрических типах и писать $[\nu] \perp [\mu]$.

Может иметься несколько (даже бесконечное счетное число) ортогональных прямых слагаемых E, отвечающих некоторому спектральному метрическому типу $[\nu]$. Число таких слагаемых (которое может быть обычным числом или символом ∞) называется (спектральной) кратностью спектральной меры ν и спектрального метрического типа $[\nu]$. Для других спектральных метрических типов $[\nu_1]$ их спектральные кратности будут другими.

После всего сказанного видно, что унитарный оператор $U\colon H \to H$ полностью характеризуется с точностью до унитарной эквивалентности следующими "спектральными" данными:

1) конечным или счетным бесконечным множеством $\mathfrak{S}$ взаимно сингулярных спектральных метрических типов;

2) системой спектральных кратностей этих метрических типов. Это — некоторое инъективное отображение $\mathfrak{m}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Его образ $\mathfrak{m}(\mathfrak{S})$ называется множеством спектральных кратностей для U.

На первый взгляд все это может показаться громоздким, но в действительности сказанное доставляет для U модель (прямая сумма операторов V действующих в соответствующих пространствах L^2) которая является столь же явной, как в теореме о жордановой нормальной форме для обычных матриц. Другое дело, что последняя теорема является более эффективной, ибо ясно, что для нахождения жордановой нормальной формы надо сперва решить некоторое алгебраическое уравнение и затем решить несколько систем линейных уравнений. Нет нужды говорить, что практически это может оказаться в высшей степени нетривиальным — вычислительная алгебра имеет свои трудности и свои собственные нетривиальные идеи и методы, которые часто помогают преодолевать эти трудности. Но все же, для того чтобы установить жорданову нормальную форму заданной матрицы, надо ответить на несколько четко сформулированных алгебраических вопросов, в каждом из которых фигурирует конечное множество чисел, тогда как для нахождения спектральных данных для U с самого начала потребовалось бы отвечать на вопросы, в которых фигурируют бесконечные множества чисел и операций, и число таких вопросов может быть бесконечным.

Ясно, что для любых данных указанного выше характера — конечного или счетного бесконечного множества $\mathfrak{S}$ взаимно сингулярных метрических типов и инъективного отображения $\mathfrak{m}\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ — имеется такой унитарный оператор U, спектральными данными для которого служат как раз $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{m}$. (Действительно, возьмем для каждого $[\nu] \in \mathfrak{S}$ ортогональную прямую сумму $\mathfrak{m}([\nu])$ копий $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ и затем ортогональную прямую сумму всех предыдущих сумм; определим U как прямую сумму копий операторов V, действующих в соответствующих $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$.) Но мы интересуемся такими U, которые возникают как $(Uf)(x) = f(Tx)$ для эргодических автоморфизмов "хороших" пространств с мерой (X, μ), для которых $\mu(X) = 1$. Почти совершенно не известно, какие $(\mathfrak{S}, \mathfrak{m})$ могут быть спектральными данными для таких U. Но несомненно, что таким образом реализуются не все $(\mathfrak{S}, \mathfrak{m})$.

В элементарных курсах функционального анализа спектр ограниченного линейного оператора $A\colon H \to H$ определяется как множество тех комплексных чисел λ, для которых у линейного оператора $A - \lambda \cdot \mathrm{id}$ (id — тождественное отображение) нет ограниченного обратного оператора, определенного на всем H[14]. Любое замкнутое подмножество $\mathbb{S}^1$ может быть спектром некоторого унитарного оператора. Но известно, что для операторов $U = U_T$, связанных со многими автоморфизмами T неатомистических пространств Лебега, спектром является вся окружность $\mathbb{S}^1$ (это верно как для всех эргодических T, так и для довольно общих неэргодических T) [12], [13].

Другое ограничение касается собственных значений. В наших терминах они проявляются как такие точки $\zeta \in \mathbb{S}^1$, что $\nu(\zeta) > 0$ для некоторой меры $\nu \in \mathfrak{S}$ (в этом случае функция $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, равная 1 при $z = \zeta$ и 0 для всех остальных z, является ненулевым собственным вектором оператора V), но конечно проще говорить о них на обычном языке: ζ тогда и только тогда является собственным значением, когда существует такая ненулевая функция $f \in L^2(X, \mu)$ ("собственный вектор" или "собственная функция"), что $Uf = \zeta f$. В нашем случае (наши ограничения на T включают эргодичность) все собственные значения являются простыми и множество всех собственных значений является счетной бесконечной подгруппой $\mathbb{S}^1$. (Я не привожу простого доказательства этих фактов ради экономии места и потому, что оно имеется во многих учебниках по эргодической теории, см., например, [14], [15].)

Говорят, что U имеет дискретный спектр, если у U имеется полная система собственных функций, т. е. если линейные комбинации его собственных функций плотны в рассматриваемом гильбертовом пространстве (в этом случае лучше рассматривать $H = L^2(X, \mu)$). Тогда $\mathfrak{m}(\mathfrak{S}) = 1$; единственная спектральная мера дискретна в том смысле, что ее можно представить в виде (бесконечной) суммы "атомарных" мер, сосредоточенных на собственных значениях. В этом случае под спектром можно понимать просто множество S собственных значений (что не приведет ни к какой утрате информации; однако последнее относится именно к S, а не к его замыканию). Говорят, что U имеет непрерывный спектр, если у U нет собственных функций (кроме констант — но в этом случае удобнее выбросить константы из нашего гильбертова пространства). В этом случае

[14]Для унитарного оператора U спектр в этом смысле совпадает с наименьшим замкнутым множеством, на котором "сосредоточены" все спектральные меры. Видно, что при переходе к спектру в этом элементарном смысле утрачивается значительная часть информации, содержащейся в полной системе унитарных инвариантов оператора U — в том, что выше названо "спектральными данными".

все спектральные меры непрерывны. С первых лет эргодической теории известно, что U имеет непрерывный спектр тогда и только тогда, когда преобразование T слабо перемешивает[15]. Наконец, U имеет смешанный спектр, если его спектр не является ни дискретным, ни непрерывны, т. е. если имеются собственные значения (в $H = L^2(X,\mu) \ominus \text{constants}$), но линейные комбинации собственных функций не плотны в H. В этом случае собственные значения по прежнему являются простыми (из-за нашего обычного условия эргодичности), так что один из спектральных метрических типов имеет кратность 1 и множество спектральных кратностей содержит 1.

Отступая на момент в сторону, я напомню теорему Дж. фон Неймана и П. Халмоша: если эргодические автоморфизмы пространств с мерой $T\colon (X,\mu) \to (X,\mu)$ и $T_1\colon (X_1,\mu_1) \to (X_1,\mu_1)$ имеют одинаковый дискретный спектр (т. е. U_T и U_{T_1} имеют одинаковый дискретный спектр), то автоморфизмы пространств с мерой T и T_1 "одинаковы с точки зрения теории меры", т. е. они сопряжены с помощью некоторого автоморфизма пространств с мерой $S\colon (X,\mu) \to (X_1,\mu_1)$ (в предположении, что рассматриваемые пространства с мерой являются "хорошими"). Кроме того, для любой счетной подгруппы $S \in \mathbb{S}^1$ существует такой эргодический автоморфизм пространства с мерой T, что U_T имеет дискретный спектр S. (Доказательство можно найти в почти любом учебнике по эргодической теории, например в [14], [15].) Таким

---

[15] Нам это не понадобится, но все же я напомню определение. Сперва я напомню определение перемешивания ("не слабого"). T обладает этим свойством, если для любых двух измеримых множеств A, B

$$\mu(T^n A \cap B) \to \mu(A)\mu(B) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

В случае слабого перемешивания мы требуем ме́ньшего — требуется нечто, лежащее между (2) и сходимостью левой части (2) к правой части в смысле Чезаро (последнее было бы равносильно эргодичности):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(T^k A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(Обе формулировки даны при нашем обычном предположении, что $\mu(X) = 1$. Если мера μ только конечна, их надо слегка изменить.) Известно, что слабое перемешивание эквивалентно эргодичности декартова квадрата $T \times T\colon (X \times X, \mu \times \mu) \to (X \times X, \mu \times \mu)$ нашего автоморфизма пространства с мерой $T\colon (X,\mu) \to (X,\mu)$. Об этой эквивалентности, как и об эквивалентности слабого перемешивания непрерывности спектра, см., например, [14].

образом, спектральная идеология доставляет очень удовлетворительную трактовку ДС с дискретным спектром. В общем же случае из того факт, что два унитарных оператора U_T и U_{T_1} унитарно эквивалентны, не следует, что соответствующие T и T_1 сопряжены посредством некоторого автоморфизма пространств с мерой. Иными словами, в общем случае спектральные данные для U_T не характеризуют однозначно ДС $\{T^n\}$.

Если множество спектральных кратностей есть $\{1\}$, т. е. если в разложении пространства H, обеспечиваемом спектральной теоремой, все H изоморфно некоторому $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$, то говорят, что спектр простой. Если H является прямой суммой нескольких $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ с одной и той же ν, т. е. если $\mathfrak{S}$ состоит ровно из одного элемента, иными словами, если множество спектральных кратностей есть $\{n\}$ с некоторым $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, то говорят, что спектр однороден. Таким образом, простой спектр является однородным, но обратное неверно.

Ослабляя формулировку проблемы "какие $(\mathfrak{S}, \mathfrak{m})$ могут реализовываться как спектральные данные для некоторого U рассматриваемого типа", можно отказаться от предписывания спектральных мер и спрашивать только о множествах спектральных кратностей. Это значит, что дано непустое $\mathfrak{A} \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, и спрашивается, существует ли такой автоморфизм пространства с мерой T, что спектральные данные для $U = U_T$ — это некоторое $(\mathfrak{S}, \mathfrak{m})$ с $\mathfrak{m}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{A}$?

В. А. Рохлин поставил следующий вопрос[16], являющийся частным случаем этой проблемы: существует ли T, для которого множество спектральных кратностей есть $\{2\}$? В таком случае H было бы изоморфно прямой сумме двух экземпляров пространства $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ с некоторой мерой ν, причем этот изоморфизм (в понятном смысле) переводил бы U_T в наше обычное V. Таким образом, в этом вопросе речь идет об однородном спектре крат-

[16] А. М. Вершик, бывший студентом Рохлина, написал мне: "I am sure that there were no such questions in the papers by V.A.R. But on the seminar this question appeared." Согласно Вершику, это произошло в конце 60-х гг. Но Рохлин вполне мог и ранее обратить внимание на этот вопрос, и он мог сформулировать его не только на семинаре, о котором говорил Вершик (и который работал в Ленинграде), но и где-нибудь еще — скажем, при посещении Москвы (где однажды он даже прочел длинный курс лекций об ЭТ) или на какой-нибудь конференции. Мои "эргодические" приятели в Москве приписывают этот вопрос Рохлину; как могло бы случиться, что все они знают о замечании, сделанном в другом городе?

ности 2. Такой спектр заведомо был бы непрерывным — уже говорилось, что при наличии собственных значений некоторая спектральная мера имела бы кратность 1. В то время уже было известно, что $\{1\}, \{\infty\}$ и $\{1, \infty\}$ могут быть реализованы как множества спектральных кратностей для некоторых T; возможно, были известны и некоторые другие случаи (довольно изолированные). Не имелось глубоких причин рассматривать случай множества спектральных кратностей $\{2\}$ как нечто, имеющее особую важность. Если бы некий оракул сообщил вам ответ для этого случая, я не вижу, какие полезные выводы можно было бы сделать на основе этой информации. Но в некотором смысле случай $\{2\}$ выглядит как следующий случай после $\{1\}$, поэтому Рохлин интересовался специально случаем $\{2\}$. Я думаю, он чувствовал, что это первый случай, где для ответа на вопрос нужны какие-то новые идеи, построения и т. д., которые могут оказаться полезными и для других целей.

Положительный ответ на вопрос Рохлина получили одновременно и независимо О. Н. Агеев [16] и В. В. Рыжиков [17]. Их методы несколько различались. Я изложу несколько упрощенный вариант работы Агеева.

Помимо ответа на вопрос Рохлина, Агеев и Рыжиков получили несколько смежных результатов, подтвердив тем самым то представление о роли этого вопроса, которое, как я думаю, было у Рохлина. (Первый результат такого рода содержался уже в [16] и [17], см. ниже; другие результаты принадлежат Агееву [18], [19], [20].) Но здесь я рассматриваю только построение примера, о котором спрашивал Рохлин.

И Агеев, и Рыжиков построили желаемый автоморфизм пространства с мерой как декартов квадрат[17]

$$T\times T\colon (X\times X,\mu\times\mu)\to(X\times X,\mu\times\mu),\qquad (T\times T)(x,y)=(Tx,Ty)$$

некоторого вспомогательного автоморфизма пространства с мерой $T\colon (X,\mu)\to(X,\mu)$, имеющего следующие специальные свойства:

а) T эргодичен и имеет простой спектр (т. е. его множество спектральных кратностей — это $\{1\}$). Кроме того, его спектр чисто непрерывен (иными словами, T слабо перемешивает).

[17] Я думаю, А. Б. Каток первым заподозрил, что некоторый декартов квадрат может быть полезным в этом отношении.

b) Для $U = U_T$ существует такая последовательность натуральных чисел $l_k \to \infty$, что U^{l_k} слабо сходится к $\frac{1}{2}(\mathrm{id}\ + U)$ при $k \to \infty$. (Иными словами, для любых $f, g \in H$ скалярное произведение $\langle U^{l_k} f, g\rangle \to \langle \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} Uf, g\rangle$.)

Построение такого T целиком относится к тому, что выше я назвал третьим этапом развития ЭТ. Преобразование T, которое мы построим, — это частный случай так называемых "автоморфизмов ранга 1". Я не буду определять это понятие[18], но я отмечу без каких-либо объяснений, что a) свойственно всем таким автоморфизмам, за исключением утверждения о непрерывности спектра. Автоморфизм ранга 1 вполне может иметь дискретный спектр. Но часто построение автоморфизма ранга 1 включает "нечто", обеспечивающее непрерывность спектра. Поэтому замечание, что спектр T непрерывен, тоже может (неформально) рассматриваться как нечто, имеющее общий характер (при построении автоморфизмов ранга 1). Однако в нашем случае об этом не надо специально заботиться, потому что эргодичность и b) легко приводят к непрерывности спектра:

если $Uf = \lambda f$ и $\|f\| = 1$, то известно, что $|\lambda| = 1$; значит,

$$1 = |\lambda^{l_k}| = |\langle U^{l_k} f, f\rangle| \to \left|\left\langle \frac{1}{2}(\mathrm{id}\ + U)f, f \right\rangle\right|$$
$$= \left\|\frac{1}{2}(1+\lambda)f\right\| = \frac{1}{2}|1+\lambda|, \qquad \frac{1}{2}|1+\lambda| = 1.$$

Поскольку $|\lambda| = 1$, из последней формулы следует, что $\lambda = 1$. Но для эргодического T единственными собственными функциями с собственным значением 1 (т. е. единственными инвариантными функциями) являются константы, которые мы удалили из нашего пространства $H = L^2(X, \mu) \ominus \{\text{constants}\}$.

Во второй части решения задачи Рохлина доказывается, что если T имеет свойства a) и b), то у $T \times T$ множество спектральных кратностей есть $\{2\}$. Эта часть основана на функционально-аналитических идеях и методах спектрального характера. Если бы кто-нибудь знал о существовании T с подходящими свойства-

[18]См. [3], где дано несколько эквивалентных определений. (Излагая их, Ференчи говорит, что эта тема является "ночным кошмаром для лектора". Возможно, это так из-за того, что доказательство их эквивалентности — длинное и утомительное, тогда как на этой стадии аудитория еще не видит, действительно ли полезно иметь все эти определения, т. е. будут ли вознаграждены мучения слушателей.)

ми, он смог бы провести вторую часть рассуждений в 30-х гг. Но в то время не было даже известно, существует ли T с простым непрерывным спектром. Первые примеры такого рода появились около 1960 г. И даже в 60-х гг. свойства, аналогичные “$U^{l_k} \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\mathrm{id} + U)$” (где $\xrightarrow{w}$ обозначает, конечно, слабую сходимость) не обсуждались. По этой причине не было оснований обсуждать, какие заключения о $T \times T$ можно сделать, если у нас есть T, удовлетворяющее a) и b).

На самом деле в [16] и [17] доказано, что те T, для которых $T \times T$ имеет спектральную кратность 2, “типичны” в следующем смысле (обычном в абстрактной ЭТ): они образуют остаточное множество в пространстве всех автоморфизмов X (где X по прежнему изоморфно интервалу), снабженном известной слабой топологией. Это намного больше, чем только утверждение о существовании подходящего T, которое будет доказано в настоящей работе. Но будучи более сложными, построения в [16] и [17] тем не менее не очень далеки от наших: по существу, Агеев и Рыжиков доказывают, что любое T можно “слегка изменить” так, что оно станет напоминать то отображение, которое мы построим.

§ 3. Циклические элементы и циклические подпространства

Помимо самой спектральной теоремы, нам понадобится пара связанных с ней понятий и фактов; они фигурируют в ее доказательстве, но также могут и будут использоваться более или менее независимо от нее. Хотя для того, чтобы сформулировать задачу о спектральных кратностях и обсудить ее значение, было необходимо сперва сформулировать спектральную теорему, при доказательстве свойств T и $T \times T$, указанных в § 2, мы будем использовать не эту теорему, а содержание настоящего параграфа. Мы по прежнему имеем дело с унитарным линейным оператором $U\colon H \to H$.

Пусть $f \in H$. Замкнутое линейное подпространство H[19]

$$Z(f) = \operatorname{clos}\operatorname{Span}\{U^n f;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

называется циклическим подпространством, порожденным f, а f называется циклическим элементом, порождающим это подпространство. Эти понятия зависят также от оператора U. Если мы хотим указать эту зависимость, то можно писать $Z^U(f)$. Но обычно циклические подпространства и векторы используются в рассуждениях, в которых U все время одно и то же, так что нет нужды упоминать об U, говоря о $Z(f)$.

$Z(f)$ (двусторонне) инвариантно относительно U, т. е. $UZ(f) = Z(f)$. Действительно, $U^{\pm 1}$ переводит любую линейную комбинацию векторов $U^n f$ в аналогичную линейную комбинацию. Переходя к замыканию, мы видим, что $UZ(f) \subset Z(f)$ и $U^{-1}Z(f) \subset Z(f)$; из последнего следует, что $Z(f) \subset UZ(f)$.

[19] Здесь через $\operatorname{Span} B$ для любого $B \subset H$ обозначается векторное подпространство в алгебраическом смысле, порожденное элементами B, т. е. множество всех конечных линейных комбинаций этих элементов, а clos означает замыкание.

Имея дело с гильбертовым пространством, используют два типа сходимости: сходимость по норме ($f_n \to f$, если $\|f_n - f\| \to 0$) и слабую сходимость ($f_n \xrightarrow{w} f$, если $\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$ для всех $g \in H$). Стоит уже сейчас отметить, что замыкания алгебраического векторного подпространства $L \subset H$ в смысле этих двух типов сходимости совпадают. Действительно, пусть $\operatorname{clos} L$ означает замыкание в смысле сходимости по норме. Предел последовательности элементов L является также слабым пределом, так что замыкание в смысле слабой сходимости не может быть меньше, чем $\operatorname{clos} L$. Пусть теперь $f_n \in L$ и $f_n \xrightarrow{w} f$. Имеем $f = f' + f''$ с некоторыми $f' \in \operatorname{clos} L$, $f'' \perp \operatorname{clos} L$. Поскольку $f_n \in L$, то все $\langle f_n, f''\rangle = 0$. Но в то же время $\langle f_n, f''\rangle \to \langle f, f''\rangle = \|f''\|^2$, поэтому $f'' = 0$ и $f \in \operatorname{clos} L$.

Циклические подпространства пространства H суть в точности те подпространства E, которые изоморфны $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ (с некоторой мерой ν) посредством такого унитарного изоморфизма W, что $V \circ W = W \circ (U|E)$. В одну сторону это тривиально. Действительно, в $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ функции $V^n 1$ суть функции $z \mapsto z^n$ на $\mathbb{S}^1$, так что $\operatorname{Span} V^n 1$ является пространством тригонометрических полиномов, а замыкание последнего, как известно, совпадает со всем $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$. Мы видим, что $L^2(\mathbb{S}^1, \nu) = Z^V(1)$. Если $W\colon E \to L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$ — такой унитарный изоморфизм, что $V \circ W = W \circ (U|E)$, то линейные комбинации векторов $U^n W^{-1}(1) = W^{-1} V^n(1)$ плотны в E. Значит, $E = Z^U(f)$ с $f = W^{-1}(1)$.

Доказательство в другую сторону не столь тривиально. Здесь надо использовать теорему Герглотца о так называемых позитивных последовательностях. Я напомню это понятие и эту теорему.

"Двусторонняя" последовательность комплексных чисел $\{a_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ называется позитивной, если для любой последовательности $\{z_n \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{Z}\}$, в которой только конечное число $z_n \neq 0$,

$$\sum_{n,m} a_{n-m} z_n \overline{z_m} \geqslant 0 \tag{3}$$

(на самом деле это конечная сумма, так что не возникает вопроса о сходимости. (3), конечно, включает утверждение, что $\sum_{n,m} a_{n-m} z_n \overline{z_m} \in \mathbb{R}$.) Согласно Герглотцу, для любой такой последовательности $\{a_n\}$ существует единственная мера ν на $\mathbb{S}^1$, такая, что $a_n = \int_{\mathbb{S}^1} z^n \, d\nu(z)$ при всех n. (Для самого Герглотца ν была функцией распределения на $[0, 2\pi]$ (т. е. неубывающей функцией, которая непрерывна слева и для которой $\nu(0) = 0$); он писал $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} \, d\nu(\lambda)$, понимая интеграл как интеграл Стилтьеса.) В частности, $a_0 = \int d\nu = \nu(\mathbb{S}^1)$, так что мера ν конечна.

Пусть $E = Z(f)$. Последовательность чисел $a_n = \langle U^n f, f \rangle$ позитивна. Действительно, $a_{n-m} = \langle U^{n-m} f, f \rangle = \langle U^n f, U^m f \rangle$,

$$\sum_{n,m} a_{n-m} z_n \overline{z_m} = \left\| \sum z_n U^n f \right\|^2 \geqslant 0.$$

Значит, существует единственная мера на $\mathbb{S}^1$, которую мы теперь обозначим через σ_f (вместо ν) и для которой все $\langle U^n f, f \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} z^n \, d\sigma_f(z)$. В частности, эта мера конечна. Она называется спектральной мерой для элемента f, а ее максимальный спектральный тип $[\sigma_f]$ — спектральным метрическим типом циклического пространства E, порожденного f. (Этот метрический типа не зависит от выбора циклического элемента, порождающего E: можно доказать, что если $Z(f) = Z(g)$, то $\sigma_f \approx \sigma_g$.) Мы можем теперь уточнить утверждение, что циклическое пространство $Z(f)$ унитарно изоморфно некоторому $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$: оно изоморфно пространству $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_f)$, где σ_f — спектральная мера для циклического элемента f, порождающего E.

Мы хотели бы установить унитарный изоморфизм $W\colon E \to L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_f)$, продолжив отображение

$$U^n f \mapsto z^n \tag{4}$$

сперва линейно на $\mathrm{Span}\{U^n f\}$ и затем по непрерывности на его замыкание E. Это кажется удачной идеей, потому что[20]

$$\langle U^n f, U^m g\rangle_H = \langle z^n, z^m\rangle_{L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)}$$

(это просто перефразировка теоремы Герглотца), откуда легко следует, что для любых конечных линейных комбинаций

$$\left\|\sum_n a_n U^n f - \sum_m b_m U^m f\right\|_H = \left\|\sum_n a_n z^n - \sum_m b_m z^m\right\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)}. \tag{5}$$

Но имеется препятствие к этому плану: может случиться, что векторы $\{U^n f\}$ не являются линейно независимыми; даже хуже, может случиться, что некоторое $U^n f$ совпадает с некоторым $U^m f$, тогда как $n \neq m$, — тогда не ясно, является ли отображение (4) корректно определенным.

На самом деле такой случай для нас не интересен, ибо легко доказать, что в этом случае векторное пространство $\mathrm{Span}\{U^n f\}$ конечномерно. Следовательно, оно совпадает с E и $U|E$ является конечномерным унитарным оператором, который должен иметь полную систему собственных векторов. Но в настоящей работе мы интересуемся случаем, когда у U нет собственных значений.

Однако утверждение, которое гласило бы, что $E \approx L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_f)$, за исключением некоторого случая (причем этот случай — конечномерный и потому более простой!) выглядело бы несколько неестественным, неуклюжим и неприятным. Простой трюк позволяет обойти указанное препятствие и доказать наше утверждение

[20] Нижние индексы напоминают, где мы берем скалярное произведение или нормы.

(о функциональной модели для циклического пространства) без каких-либо исключений.

Обозначим через L векторное пространство таких “двусторонних” последовательностей $\{a_n \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{Z}\}$, у которых только конечное число “координат” $a_n \neq 0$. Пусть у $l_n \in L$ n-я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. Эти l_n образуют базис пространства L в алгебраическом смысле, т. е. любое $a \in L$ можно представить как линейную комбинацию нескольких l_n и это можно сделать единственным образом. Определим линейные отображения

$$A\colon L \to \operatorname{Span}\{U^n f\}, \qquad B\colon L \to \operatorname{Span}\{z^n\},$$

задав их на базисе:

$$A(l_n) = U^n f, \qquad B(l_n) = z^n.$$

Тогда (5) утверждает, что

$$\|A(a) - A(b)\|_H = \|B(a) - B(b)\|_{L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)} \quad \text{при любых} \quad a, b \in L,$$

и поэтому ядра $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$. Теперь у нас получаются биекции

$$\operatorname{Span}\{U^n f\} \leftarrow L/\operatorname{Ker} A = L/\operatorname{Ker} B \to \operatorname{Span} z^n,$$

и мы видим, что наша программа работает, т. е. что линейное отображение $W\colon \operatorname{Span}\{U^n\} \to \operatorname{Span}\{z^n\}$, удовлетворяющее (4), корректно определено, даже если $U^n f$ линейно зависимы. (5) означает, что это изометрия. Наконец, изометрическое линейное отображение единственным образом продолжается до изометрии замыканий

$$Z(f) = \operatorname{clos}\operatorname{Span}\{U^n f\} \xrightarrow{W} \operatorname{clos}\operatorname{Span}\{z^n\} = L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_f).$$

Так как W линейно на $\operatorname{Span}\{U^n f\}$ и является изометрией, то

$$W(\lim g_n + \lim h_n) = \lim W g_n + \lim W h_n,$$
$$W(\lambda \lim g_n) = \lambda W(\lim g_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

(предполагается, что пределы в левых частях существуют; тогда пределы в правых частях тоже существуют). Это означает, что W — линейное отображение. Но комплексно-линейное отображение, которое является изометрией и оттого сохраняет нормы векторов, сохраняет также эрмитово скалярное произведение (т. е. унитарно). Это следует из формул

$$\begin{aligned}\|g+h\|^2 &= \|g\|^2+\|h\|^2+\langle g,h\rangle+\langle h,g\rangle\\ &= \|g\|^2+\|h\|^2+2\operatorname{Re}\langle g,h\rangle,\\ \|g+ih\|^2 &= \|g\|^2+\|h\|^2+2\operatorname{Re}\langle g,ih\rangle\\ &= \|g\|^2+\|h\|^2+2\operatorname{Re}(-i\langle g,h\rangle)\\ &= \|g\|^2+\|h\|^2+2\operatorname{Im}\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

(сохранение $\|g\|, \|h\|, \|g+h\|$ и $\|g+ih\|$ при отображении W обеспечивает сохранение $\operatorname{Re}\langle g,h\rangle$ и $\operatorname{Im}\langle g,h\rangle$).

Мы резюмируем:

существует такой унитарный изоморфизм
$$W\colon Z(f)\xrightarrow{\approx} L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)$$
что
$$\langle U^n g,h\rangle=\int_{\mathbb{S}^1} z^n (Wg)\overline{(Wh)}\,d\sigma_f \quad \text{для всех } g,h\in Z(f). \tag{6}$$

Позднее мы используем следующее замечание. $Z(f)$ порождается не только элементом f, но и многими другими элементами — множество $\{g; Z(g)=Z(f)\}$ плотно в $Z(f)$. В терминах нашей “функциональной модели” $L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)$ (в которой U заменено на V) L^2-функция g на $\mathbb{S}^1$ порождает $L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)$ тогда и только тогда, когда произведения[21]

$$(\text{тригонометрический полином от } z)\cdot g(z) \tag{7}$$

плотны в $L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)$. (Такие произведения — это в точности линейные комбинации членов вида $V^n g$.) Ясно, что если $1\in Z^V(g)$, то любую линейную комбинацию функций $V^n 1=z^n$ можно приблизить функциями (7), и получается, что $Z(g)=Z(1)=L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)$. Если $g\in L^2(\mathbb{S}^1,\sigma_f)$ и

$$0<m\leqslant |g(z)|\leqslant M \quad \text{для всех} \quad z\in\mathbb{S}^1, \tag{8}$$

[21] Здесь я использую выражение “тригонометрический полином” для функции на $\mathbb{S}^1$, которая становится тригонометрическим полиномом от λ, если заменить z на $e^{i\lambda}$. Можно также сказать, что это — ограничение на $\mathbb{S}^1$ многочлена Лорана (т. е. многочлена от z, $\frac{1}{z}$).

то $\frac{1}{m} \geqslant \frac{1}{|g|}$, $\frac{1}{g} \in L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_f)$, и если $p(z)$ — тригонометрический полином, аппроксимирующий $\frac{1}{g}$ (в нашей L^2-норме) с точностью до $\frac{\varepsilon}{M}$, то

$$\begin{aligned}\|1 - p(z)g(z)\| &= \left\| \frac{1}{g(z)}\, g(z) - p(z)g(z) \right\| \\ &= \left\| g(z)\left(\frac{1}{g(z)} - p(z) \right) \right\| \leqslant M \left\| \frac{1}{g} - p \right\| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Но функции g, удовлетворяющие (8) с некоторыми $m > 0$ и M, плотны в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_f)$.

Мы используем это замечание, чтобы доказать следующее достаточное условие простоты спектра, в котором предполагается, что нам дано некоторое плотное подмножество $\mathcal{F} \in H$: для любых $f, g \in \mathcal{F}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h \in H$, что расстояния $d(f, Z(h)) < \varepsilon$, $d(g, Z(h)) < \varepsilon$. Ясно, что это условие является также и необходимым, ибо в случае простого спектра имеется даже такое h, что для любого $f \in H$ расстояние $d(f, Z(h)) = 0$! Последнее утверждение просто повторяет определение простого спектра. Наше достаточное условие ослабляет это утверждение в трех отношениях: f, g не должны быть произвольными элементами из H, но только из $\mathcal{F}$; h может зависеть от f, g, ε; вместо $d = 0$ мы требуем только, чтобы было $d < \varepsilon$. В то же время новой чертой нашего достаточного условия является то, что линейные комбинации элементов $U^n h$ аппроксимируют не отдельные элементы f, а пары f и g.

Чтобы доказать достаточность этого условия, мы покажем, что для любых $f \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ множество

$$\{h \in H;\ d(f, Z(h)) < \varepsilon\}$$

является открытым плотным подмножеством пространства H. То, что оно открытое, очевидно (если расстояние между f и некоторой линейной комбинацией элементов $U^n h$ меньше ε и если слегка изменить h, то эта линейная комбинация изменится столь мало, что расстояние останется $< \varepsilon$). Чтобы доказать плотность, надо показать, что возле заданного $g \in H$ можно найти такое h_1, для которого $d(f, Z(h_1)) < \varepsilon$. Будем обозначать r-окрестность точки p через $U_r(p)$. В $U_{\varepsilon/2}(g)$ имеется некоторое $g_1 \in \mathcal{F}$. При некотором h мы имеем $d(f, Z(h)) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ и $d(g_1, Z(h)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Из последнего неравенства вместе с $g_1 \in U_{\varepsilon/2}(g)$ следует, что множество $Z(h) \cap U_\varepsilon(g) \neq \varnothing$. Это множество является подмножеством подпространства $Z(h)$, открытым в топологии $Z(h)$ (ибо открытые множества этой топологии суть пересечения $Z(h)$ с открытыми подмножествами H). А раз те h_1, которые порождают $Z(h)$, плотны в $Z(h)$, то существует такое h_1, принадлежащее непустому открытому подмножеству $Z(h) \cap U_\varepsilon(g)$ подпространства $Z(h)$. Раз $Z(h_1) = Z(h)$, то расстояние $d(f, Z(h_1)) = d(f, Z(h)) < \varepsilon$.

Возьмем теперь счетное подмножество $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, плотное в H. Тогда множество

$$\bigcap_{n,m} \left\{ h;\ d(f_n, Z(h)) < \frac{1}{m} \right\}$$

является пересечением счетного числа открытых плотных подмножеств H. Такие пересечения называются остаточными множествами, и во всех полных метрических пространствах они не пусты (теорема Бэра). Если $h \in \bigcap_{n,m}\{h;\ d(f_n, Z(h)) < \frac{1}{m}\}$, то при любом n расстояния $d(f_n, Z(h))$ меньше любого $\frac{1}{m}$, а это означает, что эти расстояния равны нулю. Итак, все $f_n \in Z(h)$, а так как множество $\{f_n\}$ плотно в H, то $Z(h)$ оказывается замкнутым плотным подмножеством H, т. е. оно совпадает с H.

§ 4. Построение вспомогательного автоморфизма T

Пространство (X, μ), где будет определено T, является некоторым конечным отрезком $[0, a]$ с мерой Лебега. Конечно, $\mu(X) = a$, что $\neq 1$, но тривиально нормализовать меру после того, как все будет определено.

T будет определяться шаг за шагом на некоторых частях Y_n отрезка X, где $n \in \mathbb{Z}_+$; $\{Y_n\}$ — растущая система отрезков, причем $\bigcup Y_n = X$. На каждом шаге мы будем иметь дело преимущественно с несколько бо́льшим интервалом $X_n = [0, a_n]$. Здесь

$$0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots, \qquad a = \sup a_n < \infty.$$

Построение будет таким, что $Y_{n+1} \supset X_n$, так что в конце концов T будет определено всюду. На каждом шаге будет играть важную роль некоторое число d_n. Оно очень мало, т. е. числа d_n очень быстро стремятся к нулю при $n \to \infty$. В некоторых конструкциях такого типа практически невозможно сказать что-либо более конкретное о d_n, за исключением того, что при любом n они должны удовлетворять некоторым сильным условиям малости, зависящим от того, что было сделано на предыдущих шагах конструкции (в то же время на каждом шаге d_n подчинено только некоторым полуявным оценкам сверху; поэтому в выборе этих d_n остается большая свобода). В нашем случае мы можем быть более конкретными — можно взять $d_n = \frac{1}{(2n+1)!!}$. Мы начнем с $a_0 = d_0 = 1$ и примем

$$a_n = a_{n-1} + (n+1)d_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ясно, что разности $a_n - a_{n-1}$ убывают очень быстро, и потому $a < \infty$, как и было сказано. Что касается Y_n (где на n-м шаге будет определено T_n), то будет $Y_n = [0, a_n - d_n]$. Мы видим, что действительно $Y_{n+1} \supset X_n$.

До сих пор ничего не было сказано о нашем главном персонаже — отображении T. Мы определим некоторые $T_n \colon Y_n \to X_n$. На n-м шаге определение будет согласовываться с предыдущими шагами в том смысле, что $T_n | Y_{n-1} = T_{n-1}$. (На каждом шаге мы просто продолжаем определение уже построенного отображения на бо́льшее множество, не меняя его значений в тех точках, где отображение было определено раньше.)

Отображение $T_n\colon Y_n \to X_n$ будет линейным на некоторых подотрезках (с угловым коэффициентом 1) и разрывным в концах этих подотрезков. В принципе, его можно было бы определить в терминах, относящихся к X_n. Но такое определение было бы громоздким, запутанным и "ничего не говорило бы ни уму, ни сердцу", его "движущие пружины" оставались бы скрытыми.

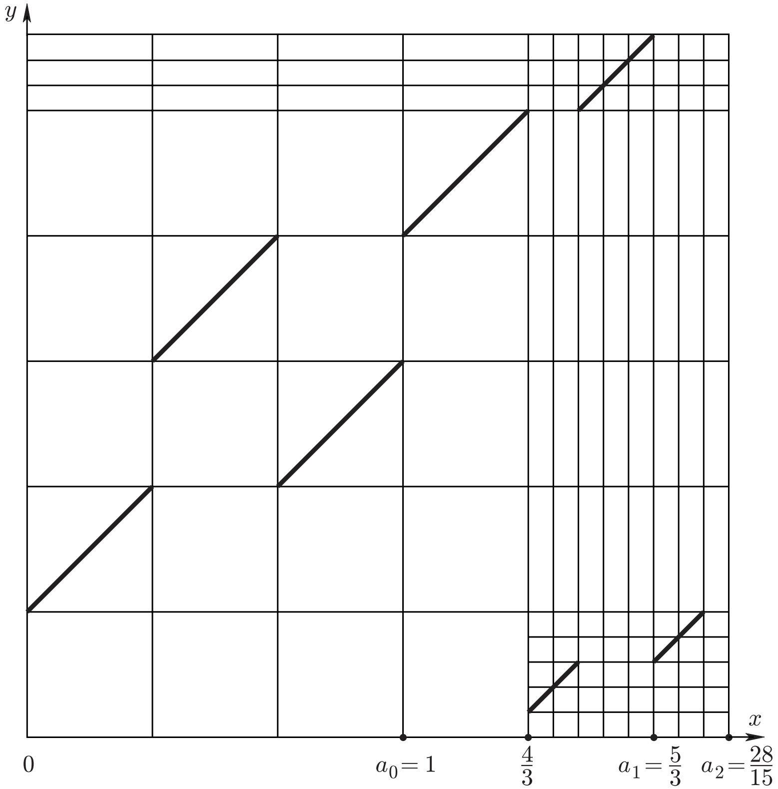

Рис. 1

Например, на рис. 1 я изобразил график T_2. Глядя на него, едва ли можно догадаться, как строить остальные T_n и почему T будет иметь желаемые свойства. Построение T_n легко понять в терминах, связанных с другими пространствами с мерой X'_n, X''_n, Y'_n, Y''_n, которые изоморфны X_n, Y_n. Эти новые пространства с мерой будут состоять из нескольких отрезков на плоскости; говоря о мере в них, мы имеем в виду меру, слагающуюся из мер Лебега на этих отрезках. (Но в то время как X_n и Y_n являются частями фиксированного пространства с мерой X, пространства "со штрихами" не являются частями каких-то X', X''. В этом отношении можно сказать, что они несколько "эфемерны" — они используются при построении отображений $T_n'\colon Y_n' \to X_n'$, $T_n''\colon Y_n'' \to X_n''$, которые, так сказать, являются отображением T_n, описанным в терминах пространств "со штрихами", но "штрихованные" пространства с следующим номером строятся заново на следующем шаге построения.) Построение осуществляется по индукции, его шаги нумеруются неотрицательными целыми числами. В принципе, надо описать только 0-й шаг и переход от $n-1$ к n, но чтобы дать некоторое ощущение того, что делается, мы рассмотрим также 1-й и 2-й шаги, прежде чем сформулируем, как происходит переход от $n-1$ к n.

На 0-м шаге мы полагаем $X_0' = X_0'' = X_0 \times \{0\} = [0,1] \times \{0\}$, $Y_0 = Y_0' = Y_0'' = \varnothing$, так что у нас нет отображений T_0, T_0' и T_0'', т. е. они вообще не определены. Обозначим через ξ_0, ξ_0' и ξ_0'' разбиения пространства X_0, соответственно, X_0' и X_0'', состоящие из единственного элемента — самого этого пространства.

На 1-м шаге мы имеем $X_1 = X_0 \cup \left[1, \frac{5}{3}\right]$, так что X_1 получается из X_0 добавлением отрезка, примыкающего к правому концу отрезка X_0 и имеющего длину $\frac{2}{3}$. Определим X_1' как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, получающееся из $X_0'' = X_0 \times \{0\}$[22] при добавлении отрезка, который имеет ту же длину $\frac{2}{3}$, но расположен над правой частью X_0' на уровне $y = 1$:

$$X_1' = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left(\left[\frac{1}{3}, 1\right] \times \{1\}\right).$$

На следующих шагах построения мы тоже будем добавлять нечто к X_{n-1}'' и это "нечто" тоже будет расположено над X_{n-1}''. В нашем построении это "нечто" будет отрезком, но в других конструкциях сходного характера добавляемое множество может иметь другую форму. Эти новые множества (которые добавляются к уже построенному на предыдущем шаге множеству X_{n-1}'' и которые расположены выше него) называются "прокладками"

[22] X_0'' — это то же самое, что и X_0', но я говорю об X_0'', потому что позднее мы будем строить X_n' с $n > 1$, добавляя нечто к множеству X_{n-1}'', которое на более поздних шагах нашей конструкции будет отличаться от X_{n-1}'.

("spacers")[23]. Обозначим очевидный изоморфизм пространств с мерой $X_0 \to X'_0$ через I_1:

$$I_1(x) = \begin{cases} (x, 0) & \text{при } x \in [0,1] = X_1, \\ \left(x - \dfrac{2}{3}, 1\right) & \text{при } x \in \left[1, \dfrac{5}{3}\right] = X_2 \setminus X_1. \end{cases}$$

Теперь разделим отрезок $[0,1]$ оси x на 3 подотрезка равной длины $d_1 = \frac{1}{3}$

$$[0, d_1], \quad [d_1, 2d_1], \quad [2d_1, 1]$$

и проведем вертикальные линии через концы этих подотрезков. Эти линии делят X'_1 на три подколонны

$$C_1^1 = [0, d_1] \times \{0,1\}, \quad C_1^2 = [d_1, 2d_1] \times \{0,1\}, \quad C_1^3 = [2d_1, 1] \times \{0,1\}.$$

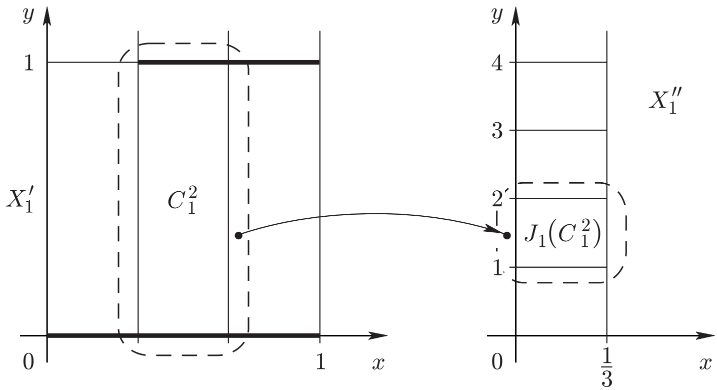

Рис. 2

Кроме X'_1, мы будем использовать также множество $X''_1 = [0, d_1] \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (рис. 2). Оно состоит из 5 "этажей" $[0, d_1] \times \{i\}$, $i \in \{0, \ldots, 4\}$. Обозначим через $h_1 = 5$ "вышину" "колонны"[24] X''_1

[23] В данный момент эта "прокладка" выглядит скорее как "покрышка", нежели прокладка (в обычном разговорном смысле). Позднее она будет перемещена внутрь рассматриваемого пространства и тогда станет больше напоминать обычную прокладку.

[24] Колонну называют также "башней". Однако последний термин иногда употребляют для системы из нескольких колонн, так что для безопасности я говорю о колоннах.

(в том же стиле мы могли бы принять $h_0 = 1$) и через ξ_1'' разбиение X_1'' на "этажи", которые в этой связи мы будем обозначать через $C^i_{\xi_1''}$:

$$C^i_{\xi_1''} = [0, d_1] \times \{i-1\}, \qquad i = 1, \ldots, 5.$$

Определим изоморфизм пространств с мерой $J_1 \colon X_1' \to X_1''$ очень естественным образом. C_1^1 является "дном" X_1'', и мы примем, что $J_1|C_1^1$ — тождественное отображение. Перемещая C_1^2 как твердое тело, поместим его над $J_1(C_1^1) = C_1^1$ так, что "нижний этаж" C_1^2 перейдет в $[0, d_1] \times \{1\}$ (т. е. в тот "этаж" колонны X_1'', который расположен непосредственно над единственным "этажом" "подколонны" C_1^1). Это приводит к отображению

$$J_1|C_1^2 \colon C_1^2 \to X_1'' \qquad (x, y) \mapsto (x - d_1, y + 1).$$

Перемещая C_1^3 как твердое тело, поместим его над $J_1(C_1^1 \cup C_1^2)$; тем самым J_1 продолжается на C_1^3 как

$$J_1|C_1^3 \colon C_1^3 \to X_1'' \qquad (x, y) \mapsto (x - 2d_1, y + 3).$$

Обозначим через ξ_1' разбиение X_1' , являющееся прообразом разбиения ξ_1'' при отображении J_1, т. е. разбиение множества X_1' на элементы $C^i_{\xi_1'} = J_1^{-1}(C^i_{\xi_1''})$, и через ξ_1 — разбиение X_1, являющееся прообразом разбиения ξ_1' при отображении I_1, т. е. разбиение X_1 на элементы $C^i_{\xi_1} = I_1^{-1}(C^i_{\xi_1'})$. Ясно, что

$$C^1_{\xi_1'} = [0, d_1] \times \{0\}, \quad C^2_{\xi_1'} = [d_1, 2d_1] \times \{0\}, \quad C^3_{\xi_1'} = [d_1, 2d_1] \times \{1\},$$
$$C^4_{\xi_1'} = [2d_1, 1] \times \{0\}, \quad C^5_{\xi_1'} = [2d_1, 1] \times \{1\}$$

и что ξ_1 является разбиением множества $X_1 = \left[0, \frac{5}{3}\right]$ на отрезки $[(j-1)d_1, jd_1] = \left[\frac{j-1}{3}, \frac{j}{3}\right]$. Но номер i элемента

$$C^i_{\xi_1} = [(j-1)d_1, jd_1] \tag{9}$$

может отличаться от j. $C^3_{\xi_1'}$ содержится в прокладке, которая является частью X_1', имеющей высоту $y = 1$; при отображении I_1^{-1} эта часть соответствует части X_1, добавленной к X_0; отсюда видно, что при $i = 3$ в (9) должно быть $j \geqslant 4$, а не $j = 3$. А следующий элемент $C^4_{\xi_1'}$ содержится в части X_1', имеющей высоту $y = 0$; при отображении I_1^{-1} эта часть соответствует X_0; поэтому при $j = 4$ в (9) должно быть $j \leqslant 3$. Легко найти соответствие между i и j — оказывается, что

$$C_{\xi_1}^1 = [0, d_1], \quad C_{\xi_1}^2 = [d_1, 2d_1], \quad C_{\xi_1}^3 = [3d_1, 4d_1],$$
$$C_{\xi_1}^4 = [2d_1, 3d_1], \quad C_{\xi_1}^5 = [4d_1, 5d_1].$$

Но нет необходимости подробно вникать в подобные детали. Важно только понимать, что j может отличаться от i. Конечно, для некоторых i может случиться, что $i = j$; позднее мы используем, что это так для первого и последнего элементов ξ_1, т. е. для $i = 1$ и $i = 5$.

Чтобы покончить с понятиями, связанными с первым шагом, положим $Y_1'' = [0, d_1] \times \{0, 1, 2, 3\}$ (это X_1'' без его "верхнего этажа" $[0, d_1] \times \{4\}$). Определим отображение $T_1''\colon Y_1'' \to X_1''$ как вертикальный сдвиг на 1:

$$T_1''(x, y) = (x, y + 1) \qquad (0 \leqslant y \leqslant 4).$$

Наконец, "перенесем" это отображения в X_1' и X_1, где получаются отображения T_1' и T_1, сопряженные с T_1'' посредством отображений J_1 и $J_1 I_1$. (T_1' и T_1 — это, так сказать, просто отображение T_1'', если отождествлять X_1' и X_1 с X_1'' посредством изоморфизмов J_1 и $J_1 I_1$.) Но здесь нужна некоторая осторожность, потому что T_1'' не определено на всем X_1'', поэтому нельзя просто написать $T_1' = J_1^{-1} T_1'' J_1$, $T_1 = I_1^{-1} T_1' I_1$. Или же, если мы все-таки так пишем, мы должны поинтересоваться, где определены эти композиции. T_1' определено на части $Y_1' = J_1^{-1}(Y_1'')$ пространства X_1', которая получается из X_1' при удалении правой части $[2d_1, 1] \times \{1\}$ "верхнего этажа" множества X_1'. Действительно, $[2d_1, 1] \times \{1\}$ — это "верхний этаж" в C_1^3, который является в точности прообразом "верхнего этажа" $[0, d_1] \times \{4\}$ множества $J_1(C_1^3)$ или, что то же самое, "верхнего этажа" колонны X_1''; а "верхний этаж" X_1'' — это единственная часть X_1'', где T_1'' не определено. Значит, мы вправе написать $T_1' = J_1^{-1} T_1''(J_1 | Y_1')$, и это можно понимать буквально. Также, отрезок $[2d_1, 1] \times \{1\}$ является образом правой части $[a_1 - d_1, a_1]$ отрезка X_1 при отображении I_1. Поэтому $Y_1' = I_1(Y_1)$ (напомним, что $Y_1 = [0, a_1 - d_1]$) и композиция T_1 определена на Y_1. Можно написать $T_1 = I_1^{-1} T_1'(I_1 | Y_1)$.

Как T_1 действует на элементы $C_{\xi_1}^i$ разбиения ξ_1? Элементы разбиения ξ_1'' суть "этажи" колонны X_1'' и номер i элемента $C_{\xi_1''}^i$

равен его “высоте” (над осью x) плюс 1. Вертикальный сдвиг увеличивает “высоту” этажей X_1'' на 1; значит, $T_1''C^i_{\xi_1''} = C^{i+1}_{\xi_1''}$, если только $1 \leqslant i < h_1$ (на последнем элементе $C^{h_1}_{\xi_1''}$ отображение T_1'' не определено). Кроме того, $(T_1'')^{-1}C^i_{\xi_1''} = C^{i-1}_{\xi_1''}$, если только $1 < i \leqslant h_1$ (обратное отображение $(T_1'')^{-1}$ не определено на “нижнем этаже” $[0, d_1] \times \{0\} = C^1_{\xi_1''}$, а вне этого этажа данное отображение — это в точности вертикальный сдвиг на -1 , уменьшающий высоту на 1). Отсюда следует, что действие T_1' и T_1 на элементы разбиений ξ_1' и ξ_1 описывается аналогичными формулами (суть дела в том, что эти отображения — те же самые, что T_1'', если отождествить X_1' и X_1 с X_1'' посредством изоморфизмов пространств с мерой J_1 и $J_1 I_1$, а ξ_1' и ξ_1 с этой точки зрения — те же самые разбиения, что и ξ_1''; нумерации их элементов тоже одинаковы). Отсюда следует, что

$$T_1^j(C^i_{\xi_1}) = C^{i+j}_{\xi_1}, \quad \text{когда} \quad 1 \leqslant i + j \leqslant h_1 = 5.$$

Описание T_1' лишь немногим сложнее описания T_1''. T_1' сдвигает точку $(x, y) \in X_1'$ на 1 по вертикали, если образ $(x, y+1)$ этой точки принадлежит X_1'. В противном случае T_1' переводит (x, y) в точку “нижнего этажа” X_1', увеличивая x на d_1, т. е. $T_1'(x, y) = (x + d_1, 0)$ (так что если точка (x, y) лежит на “верхнем этаже” подколонны C_1^i, то ее образ лежит в “нижнем этаже” следующей подколонны), если только последняя точка принадлежит X_1'. Для точек (x, y) “верхнего этажа” $[2d_1, 1] \times \{1\}$ подколонны C_1^3 ни одно из этих предписаний не работает — точки $(x, y+1)$ и $(x + d_1, 0)$ обе находятся вне X_1'. Для таких точек (x, y) мы не определяем $T_1'(x, y)$.

На 2-м шаге X_2' получается при добавлении к X_1'' прокладки — еще одного “этажа” $[2d_2, d_1] \times \{5\}$ (который не полностью покрывает X_1''). Имеем очевидные изоморфизмы $I_2 \colon X_2 \to X_2'$ пространств с мерой:

$$I_2(x) = \begin{cases} J_1 I_1(x) & \text{при } x \in X_1 = \left[0, \dfrac{5}{3}\right] = [0, a_1], \\ \left(x - \dfrac{23}{15}, 5\right) = (x - a_1 + 2d_2, 5) & \\ & \text{при } x \in X_2 \setminus X_1 = \left[\dfrac{5}{3}, \dfrac{28}{15}\right] = [a_1, a_2] \end{cases}$$

(вторая строчка означает, что мы передвигаем $[a_1, a_2]$ налево так, что он переходит в отрезок $\left[\frac{2}{15}, \frac{1}{3}\right] = [2d_2, d_1]$, помещаем его в плоскость ($x \mapsto (x, 0)$) и поднимаем на высоту $y = 5$; в итоге из $X_2 \setminus X_1$ получается $X_2' \setminus X_1''$).

Разделим отрезок $[0, d_1]$ оси x (который является “нижним этажом” X_1'') на 5 подотрезков равной длины $d_2 = \frac{1}{15}$:

$$[(i-1)d_2, id_2] \times \{0\}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

и проведем вертикальные линии через концы этих подотрезков. Эти линии делят X_2' на 5 подколонн

$$C_2^i = \begin{cases} [(i-1)d_2, id_2] \times \{0, \ldots, 4\} & (1 \leqslant i \leqslant 2), \\ [(i-1)d_2, id_2] \times \{0, \ldots, 5\} & (3 \leqslant i \leqslant 5). \end{cases}$$

Помимо X_2', мы будем также использовать $X_2'' = [0, d_2] \times \{0, 1, \ldots \ldots, h_2 - 1\}$, где “высота” h_2 “колонны” X_2'' такова, что ее мера (слагающаяся из мер Лебега на ее “этажах”) равна аналогичной мере X_2' и X_2, т. е. a_2. Равенство $d_2 h_2 = a_2$ означает, что $\frac{1}{15} h_2 = \frac{28}{15}$, потому $h_2 = 28$. Определим отображение $J_2\colon X_2' \to X_2''$ аналогично тому, как определялось J_1:

$J_2 | C_2^1$ — тождественное отображение;

$J_2 | C_2^2$ получается путем перемещения C_2^2 как твердого тела, в результате которого C_2^2 или, лучше сказать, его образ $J_2(C_2^2)$ помещается над $J_2(C_2^1)$, причем сохраняется порядок по высоте горизонтальных отрезков, из которых состоит C_2^2;

$J_2 | C_2^3$ получается путем перемещения C_2^3 как твердого тела, в результате которого C_2^3 или, лучше сказать, его образ $J_2(C_2^3)$, помещается над $J_2(C_2^2)$ с сохранением порядка по высоте соответствующих отрезков;

и так далее. Это наглядное определение J_2 приводит к следующим формулам:

$$J_2(x, y) = \begin{cases} (x - (i-1)d_2, y + 5(i-1)) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } (x, y) \in C_2^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2, \\ (x - (i-1)d_2, y + 10 + 6(i-3)) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } (x, y) \in C_2^i, \quad 3 \leqslant i \leqslant 5. \end{cases}$$

(разница между двумя формулами происходит оттого, что первые две подколонны имеют “высоту” 5, а три остальные — “высоту” 6 из-за добавления прокладки при переходе от X_1'' к X_2'). Обозначим через ξ_2'' разбиение колонны X_2'' на "этажи", которые в этой связи мы будем обозначать через $C^i_{\xi_2''}$:

$$C^i_{\xi_2''} = [0, d_2] \times \{i-1\}, \qquad i = 1, \dots, h_2 \quad (h_2 = 28),$$

и через ξ_2' и ξ_2 — разбиения пространств X_2' и X_2, являющиеся прообразами разбиения ξ_2'' при отображениях J_2 и $J_2 I_2$. Элементами этих разбиений служат $C^i_{\xi_2'} = J_2^{-1}(C^i_{\xi_2''})$ и $C^i_{\xi_2} = I_2^{-1}(C^i_{\xi_2'})$. Аналогично тому, что мы видели для ξ_1, элементы разбиения ξ_2 суть подотрезки $[(j-1)d_2, jd_2]$ отрезка $[0, a_2]$; номер j подотрезка, вообще говоря, отличается от его номера i как элемента $C^i_{\xi_2}$ разбиения ξ_2, но для $i = 1$ и $i = 28$ мы имеем $j = i$.

Чтобы покончить с понятиями, связанными со вторым шагом, положим $Y_2'' = [0, d_1] \times \{0, 1, \dots, 26\}$ (это X_2'' без его "верхнего этажа" $[0, d_2] \times \{27\}$). Определим отображение $T_2'' \colon Y_2'' \to X_2''$ как вертикальный сдвиг на 1:

$$T_2''(x, y) = (x, y+1) \qquad (0 \leqslant y \leqslant 26).$$

Наконец, "перенесем" это отображение в некоторые отображения T_2' и T_2 пространств X_2' и X_2, используя сопряжение с помощью J_2 и $J_2 I_2$. Опять-таки, здесь нужна некоторая осторожность — раз T_2'' не определено на всем X_2'', то надо поинтересоваться, где определены композиции $J_2^{-1} T_2'' J_2$, $I_2^{-1} J_2^{-1} T_2'' J_2 I_2$. Первая композиция определена на части $Y_2' = J_2^{-1}(Y_2'')$ пространства X_2', которая получается из X_2' при удалении правой части $[4d_2, d_1] \times \{5\}$ "верхнего этажа" множества X_2'. Действительно, $[4d_2, d_1] \times \{5\}$ является "верхним этажом" в C_2^5; этот "верхний этаж" является в точности прообразом "верхнего этажа" $[0, d_2] \times \{27\}$ множества $J_2(C_2^5)$ или, что то же самое, "верхнего этажа" колонны X_2''; а "верхний этаж" X_2'' — это единственная часть X_2'', где T_2'' не определено. Значит, мы вправе написать $T_2' = J_2^{-1} T_2''(J_2 | Y_2')$. Кроме того, отрезок $[4d_2, d_1] \times \{5\}$ является образом правой части $[a_2 - d_2, a_2]$ отрезка X_2 при отображении I_2. Поэтому $Y_2' = I_2(Y_2)$ (напомним, что $Y_2 = [0, a_2 - d_2]$), и можно написать $T_2 = I_2^{-1} T_2'(I_2 | Y_2)$.

Как и раньше, мы задаемся вопросом, как T_2 действует на элементы $C^i_{\xi_2}$ разбиения ξ_2? Элементы ξ_2'' суть "этажи" колонны X_2'' и номер i элемента $C^i_{\xi_2''}$ — это его "высота" (над осью x) плюс 1; T_2'' — вертикальный сдвиг на 1, действующий на эти "этажи", за исключением верхнего; $(T_2'')^{-1}$ — вертикальный сдвиг на -1, действующий на эти "этажи", за исключением нижнего. Отсюда следует, что $(T_2'')^j C^i_{\xi_2''} = C^{i+j}_{\xi_2''}$, коль скоро $1 \leqslant i+j \leqslant h_2 = 28$, а тогда, переходя к X_2, получаем

$$T_2^j(C^i_{\xi_2}) = C^{i+j}_{\xi_2}, \quad \text{когда} \quad 1 \leqslant i+j \leqslant h_2.$$

Можно также дать описание T_2', которое снова лишь слегка сложнее описания T_2''. Если точки (x,y) принадлежит X_2', мы сперва пробуем сдвинуть ее вертикально на 1. Иными словами, внутри подколонны C_2^i мы сдвигаем точку (x,y) вертикально на 1, если это можно сделать, но покидая подколонну. В самом деле, тогда точки $(x',y') = J_2(x,y)$ и $J_2(x,y+1)$ обе принадлежат одному и тому же образу подколонны $J_2(C_2^i)$, причем вторая точка — это $(x', y'+1) = T_2''(x,y)$. Это не проходит для точек "верхнего этажа" ($y = 4$ для $x \in [0, 2d_2]$ и $y = 5$ для $x \in [2d_2, d_1]$). Такие точки мы пробуем перенести в "нижний этаж" следующей подколонны, увеличивая x на d_2; т.е. $T_2'(x,y) = (x+d_2, 0)$. В самом деле, в этом случае T_2'' переводит точку $(x',y') = J_2(x,y)$, лежащую на "верхнем этаже" $J_2(C_2^i)$, в точку $(x', y'+1)$, лежащую в "нижнем этаже" $J_2(C_2^{i+1})$; а эта точка $(x', y'+1) = J_2(x+d_2, 0)$. Для точек (x,y) "верхнего этажа" $[4d_2, d_1] \times \{5\}$ подколонны C_2^5 ни одно из этих предписаний не работает, и для таких точек T_2' не определяется.

Мы дважды использовали прием, который называется "разрезание и штабелирование" ("cutting and stacking").[25] При построении T этот прием используется бесконечное число раз (хотя в

[25] Этот прием применяется для различных целей в различных конструкциях, свойственных третьему этапу развития ЭТ. Почти всегда разрезанию и штабелированию предшествует добавление прокладки, т.е. некоторого "нового материала" расположенного над "верхним этажом" пространства, построенного ранее. При переходе от X_0'' к X_1' мы добавили прокладку $\left[\frac{1}{3}, 1\right] \times \{1\}$, а при переходе от X_1'' к X_2' — прокладку $\left[\frac{2}{15}, \frac{1}{3}\right] \times \{5\}$. В других случаях может добавляться другое количество "нового материала" и он может располагаться иначе. Но называют данный прием "разрезанием и штабелированием", не упоминая о "добавлении прокладки".

Приводимое ниже общее описание касается только разрезания и штабелирования. Оно начинается с множества X', которым на n-м шаге индуктивного построения будет

$$X_n' = X_{n-1}'' \cup \{\text{прокладка, т.е. некоторый новый материал}\}$$

(таким образом, прокладка уже добавлена перед тем, как делается ссылка на это описание).

формальном изложении его можно использовать только однажды — при переходе от $n-1$ к n). Поэтому я опишу этот прием в более общем виде.

Допустим, что нам дано множество

$$X' = \{(x,i);\ 0 \leqslant x \leqslant D,\ i \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leqslant i \leqslant \varphi(x)-1\},$$

где φ — это функция $\varphi\colon [0,D] \to \mathbb{N}$ (т. е. ее значения суть натуральные числа). Пусть $D = kd$, где $k \in \mathbb{N}$, и пусть функция φ постоянная на каждом отрезке $[(i-1)d, id]$, $i = 1,\dots,k$. Ниже я пишу $\varphi_i = \varphi([(i-1)d, id])$. Разрезание и штабелирование приводят к новому пространству с мерой

$$X'' = [0,d] \times \{0,1,\dots,\varphi_1+\dots+\varphi_k-1\}$$

(имеющему $\varphi_1+\dots+\varphi_k$ "этажей" $[0,d]\times\{j\}$) и к изоморфизму пространств с мерой $J\colon X' \to X''$. Наглядно, мы сперва разрезаем X' на k "подколонн"

$$C^i = [(i-1)d, id] \times \{0,1,\dots,\varphi_i-1\}$$

(это и есть "разрезание"); отметим, что C^i имеет φ_i "этажей" $[(i-1)d, id]\times\{j\}$. Теперь мы перемещаем эти подколонны как твердые тела в $\mathbb{R}^2$ так, что порядок по высоте "этажей" подколонн сохраняется, C^1 не двигается, C^2 становится частью $J(C^2)$ строящейся колонны X'', расположенной сразу над C^1, C^3 становится частью $J(C^3)$ колонны X'', расположенной сразу над $J(C^2)$, и т.д. (это и называется "штабелированием"). Формально, нам нет нужды обращаться к геометрии плоскости и передвигать что-либо в $\mathbb{R}^2$, а можно просто рассматривать отображение $J\colon X' \to X''$, которое определяется следующим образом:

$$J(x) = \begin{cases} (x,y) & \text{при } (x,y)\in C^1,\\ (x-d, y+\varphi_1) & \text{при } (x,y)\in C^2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ (x-(i-1)d, y+\varphi_1+\dots+\varphi_{i-1}) & \text{при } (x,y)\in C^i,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

(Вновь обращаясь к геометрии плоскости, мы можем представить себе, что C^i сдвигается налево, становясь множеством $[0,d]\times\{0,1,\dots,\varphi_i-1\}$, и затем поднимается на $\varphi_1+\dots+\varphi_{i-1}$ (заметим, что "верхним этажом" множества $J(C^1\cup\dots\cup C^{i-1})$ является

$[0, d\,] \times \{\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1} - 1\}$, т. е. мы помещаем C^i как раз над этим "этажом"). Это объясняет формулу для J.)

X', X'' рассматриваются как пространства с мерой, которая является мерой Лебега на отрезках — "этажах" этих множеств. J биективно отображает каждый "этаж" множества C^i на некоторый "этаж" множества X'', при этом меры Лебега сохраняются. Образы различных "этажей" подколонны C^i или "этажа" C^i и "этажа" C^j, $j \neq i$, не пересекаются. Каждый "этаж" колонны X'' является таким образом, поэтому $J(X') = X''$. Это J является изоморфизмом пространств с мерой X', X''.

В нашем случае на n-м шаге мы добавляем к "колонне"

$$X''_{n-1} = [0, d_{n-1}] \times \{0, 1, \ldots, h_{n-1} - 1\}$$

прокладку — "$(h_{n-1} + 1)$-й этаж" $[nd_n, d_{n-1}] \times \{h_{n-1}\}$ и таким путем получаем пространство X'_n (оно играет роль X'). Изоморфизм пространств с мерой $J_{n-1}I_{n-1} \colon X_{n-1} \to X''_{n-1}$ очевидным образом продолжается до $I_n \colon X_n \to X'_n$ ($[a_{n-1}, a_n]$ отображается на прокладку (на новый этаж) "с угловым коэффициентом 1"; это есть отображение $x \mapsto (x - a_{n-1} + nd_n, h_{n-1})$). Зафиксируем тот факт, что I_n является продолжением отображения $J_{n-1}I_{n-1}$, с помощью формулы

$$I_n | X_{n-1} = J_{n-1}I_{n-1}. \tag{10}$$

После этого мы используем прием разрезания и штабелирования с

$$D = d_{n-1}, \qquad d = d_n, \qquad k = 2n + 1,$$
$$\varphi(x) = \begin{cases} h_{n-1} & \text{при } x \in [0, nd_n], \\ h_{n-1} + 1 & \text{при } x \in [nd_n, d_{n-1}], \end{cases}$$
$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = h_{n-1}, \qquad \varphi_{n+1} = \cdots = \varphi_{2n+1} = h_{n-1} + 1.$$

Таким образом, мы делим X'_n на $2n + 1 = \frac{d_{n-1}}{d_n}$ "подколонн" C^i_n равной ширины d_n посредством вертикальных линий, проходящих через точки $id_n \quad (i = 1, \ldots, 2n + 1)$ оси x. "Подколонны" нумеруются слева направо числами $i = 1, \ldots, 2n+1$. Роль X'' играет пространство с мерой $X''_n = [0, d_n] \times \{0, 1, \ldots, h_n - 1\}$, имеющее h_n этажей меры d_n. Здесь $h_n = \sum \varphi_i = (2n + 1)h_{n-1} + n + 1$. Мы строим изоморфизм пространств с мерой $J_n \colon X'_n \to X''_n$, передвигая эти подколонны как твердые тела одну за другой внутрь X''_n

так, что подколонна C_n^1 не двигается и C_n^i переходит в

$$J_n(C_n^i) = \begin{cases} [0, d_n] \times \{(i-1)h_{n-1}, ih_{n-1} - 1\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ [0, d_n] \times \{(i-1)h_{n-1} + i - n - 1, ih_{n-1} + i - n - 1\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1. \end{cases}$$

Положим теперь $Y_n'' = [0, d_n] \times \{0, \dots, h_n - 2\}$ (иными словами, это пространство X_n'' без его “верхнего этажа” $[0, d_n] \times \{h_n - 1\}$). Определим $T_n''\colon Y_n'' \to X_n''$ как $(x, y) \mapsto (x, y+1)$. Возвращаясь к X_n' и X_n, мы полагаем $T_n' = J_n^{-1} T_n'' J_n$, $T_n = I_n^{-1} T_n' I_n$, опять-таки делая некоторые оговорки об областях определения этих композиций. А именно, отображение T_n' определено вне “верхнего этажа” $[d_{n-1} - d_n, d_{n-1}] \times \{h_{n-1}\}$ последней подколонны C_n^{2n+1} (ибо при отображении J_n именно этот этаж соответствует “верхнему этажу” $[0, d_n] \times \{h_n - 1\}$ колонны X_n''); а T_n определено на $[0, a_n - d_n] = X_n \setminus [a_n - d_n, a_n] = Y_n$ (ибо $[a_n - d_n, a_n]$ соответствует при отображении I_n “верхнему этажу” подколонны C_n^{2n+1}). Поэтому без каких-либо оговорок можно написать

$$\begin{aligned} T_n' &= J_n^{-1} T_n'' (J_n | Y_n'), \\ T_n &= I_n^{-1} T_n' (I_n | Y_n) = I_n^{-1} J_n^{-1} T_n'' J_n (I_n | Y_n). \end{aligned} \tag{11}$$

Я сказал, что описание T_n в терминах, непосредственно относящихся к отрезку X_n, было бы запутанным и практически бесполезным. Но описание T_n' в терминах, относящихся к пространству X_n', не столь запутанно, и мы будем им пользоваться. С точностью до очевидных изменений, оно остается таким же, как описания T_1', T_2':

$$T_n'(x, y) = \begin{cases} (x, y+1) & \text{при } (x, y) \in [0, nd_n] \times \{0, 1, \dots, h_{n-1} - 2\} \\ & \quad \text{и при } (x, y) \in [nd_n, d_{n-1}] \times \{0, 1, \dots, h_{n-1} - 1\}, \\ (x + d_n, 0) & \text{при } (x, y) \in [0, nd_n] \times \{h_{n-1} - 1\} \\ & \quad \text{и при } (x, y) \in [nd_n, d_{n-1} - d_n] \times \{h_{n-1}\}. \end{cases}$$

Мы сперва прокомментируем это описание и затем проверим его. “Верхний этаж” множества X_n' состоит из двух частей: $[0, nd_n] \times \{h_{n-1} - 1\}$ и $[nd_n, d_{n-1}] \times \{h_{n-1}\}$. (Мы добавили к X_{n-1}'' прокладку $I_n([a_{n-1}, a_n])$, расположенную над $[nd_n, d_{n-1}]$ на высоте $y = h_{n-1}$, тогда как над $[0, nd_n]$ ничего не добавлялось.) Под этим “верхним этажом” T'_n всюду определено и под действием этого отображения вторая координата y точки (x, y) увеличивается на 1. На самом правом подотрезке $[d_{n-1} - d_n] \times \{h_{n-1}\}$ этого “верхнего этажа” (этот подотрезок является “верхним этажом” последней подколонны C_n^{2n+1}) отображение T'_n не определено. Вне этого подинтервала T'_n переводит точку $(x, h_{n-1} - 1)$ или (x, h_{n-1}) “верхнего этажа” в точку $(x + d_n, 0)$, лежащую на “нижнем этаже” множества X'_n и принадлежащую следующей подколонне.

T''_n увеличивает вторую координату любой точки колонны Y''_n (не меняя ее первой координаты) на 1. Если

$$(x, y) \in C_n^i \setminus \{\text{его “верний этаж”}\},$$

то

$$\begin{aligned}
&(x', y') = J_n(x, y) \in J_n(C_n^i) \setminus \{\text{его “верхний этаж”}\},\\
&(x', y' + 1) \in J_n(C_n^i) \quad \text{и} \quad (x', y' + 1) = J_n(x, y + 1).
\end{aligned}$$

Тем самым доказана первая формула для $T'_n(x, y)$.

Если (x, y) лежит на “верхнем этаже” подколонны C_n^i и $i < 2n+1$, то точка $(x', y') = J_n(x, y)$ принадлежит “верхнему этажу” образа $J_n(C_n^i)$ этой подколонны и точка $T''_n(x', y') = (x', y' + 1)$ принадлежит “нижнему этажу” образа $J_n(C_n^{i+1})$ следующей подколонны C_n^{i+1}. Поэтому вторая координата точки $J_n^{-1} T''_n J_n(x, y)$ равна 0. Для нашей точки $(x, y) \in C_n^i$ первая координата x' ее образа $J_n(x, y)$ равна $x' = x-(i-1)d_n$; для точки $(x_1, y_1) \in C_n^{i+1}$ первая координата ее образа $J_n(x_1, y_1)$ равна $x_1 - id_n$. Поэтому первая координата точки $J_n^{-1} T''_n J_n(x, y) = J_n^{-1}(x', y' + 1)$ равна $x + d_n$.

Наконец, если (x, y) принадлежит “верхнему этажу” $[d_{n-1} - d_n] \times \{h_{n-1}\}$ последней подколонны C_n^{2n+1}, то точка $J_n(x, y)$ принадлежит “верхнему этажу” $[0, d_n] \times \{h_n - 1\}$ колонны X''_n, где T''_n не определено. Тем самым мы проверили данное выше описание T'_n.

Обозначим через ξ''_n разбиение пространства X''_n на “этажи”, которые в этой связи мы будем обозначать через $C^i_{\xi''_n}$:

$$C^i_{\xi''_n} = [0, d_n] \times \{i - 1\}, \qquad i = 1, \ldots, h_n.$$

Очевидно,

$$T^j(C^i_{\xi''_n}) = C^{i+j}_{\xi''_n}, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant i + j \leqslant h_n. \tag{12}$$

Возвращаясь к пространствам с мерой X'_n и X_n, мы определим там разбиения ξ'_n и ξ_n, состоящие из элементов

$$C^i_{\xi'_n} = J_n^{-1}(C^i_{\xi''_n}), \qquad C^i_{\xi_n} = I_n^{-1}(C^i_{\xi'_n}) = I_n^{-1}J_n^{-1}(C^i_{\xi''_n}).$$

Элементы $C^i_{\xi'_n}$ суть некоторые отрезки вида $[kd_n, (k+1)d_n] \times \{l\}$ — напомним, что мы разделили "этажи" множества X'_n (это отрезки $[0, d_{n-1}] \times \{l\}$ и отрезок $[nd_n, d_{n-1}] \times \{h_n\}$) на части равной длины d_n. Элементы $C^i_{\xi_n}$ суть отрезки вида $[(j-1)d_n, jd_n]$, $j = 1, \dots, h_n$, — эти элементы являются прообразами предыдущих отрезков при линейных отображениях, сохраняющих меру, так что каждый элемент $C^i_{\xi_n}$ является некоторым отрезком $[c, c+d_n]$, и они покрывают $[0, a_n]$; для одного из этих отрезков должно быть $c = 0$, для другого $c = d_n$, и так далее. Вообще говоря, $j \neq i$, но для некоторых i оказывается, что $j = i$. В частности, это так для $i = 1$ и $i = h_n$; кроме того, $C^1_{\xi'_n} = [0, d_n] \times \{0\}$ и $C^{h_n}_{\xi'_n} = [d_{n-1}, d_n] \times \{h_n\}$; мы утверждаем также, что отображение

$$I_n | C^1_{\xi_n} : C^1_{\xi_n} = [0, d_n] \to C^1_{\xi'_n} = [0, d_n] \times \{0\}$$

— это $x \mapsto (x, 0)$, а отображение

$$I_n | C^{h_n}_{\xi_n} : C^{h_n}_{\xi_n} = [a_n - d_n, a_n] \to C^{h_n}_{\xi'_n} = [d_{n-1} - d_n, d_{n-1}] \times \{h_{n-1}\}$$

— это $x \mapsto (x - a_{n-1} + nd_n, h_{n-1})$. Последний факт мы уже знаем — отображение, о котором идет речь, является ограничением отображения

$$[a_n - a_{n-1}, a_n] \to h_{n-1}\text{-й "этаж" } X'_n.$$

Другое утверждение нам уже известно для малых n, и теперь надо использовать индукцию по n. Например, если утверждение уже доказано для $n-1$, то ясно, что когда мы делим отрезок $[0, d_{n-1}] \times \{0\}$ на $2n+1$ равных частей, то первая из них (являющаяся "нижним полом" подколонны C^1_n) есть $[0, d_n] \times \{0\}$, и так как отображение $J_n | C^1_n$ является тождественным, то $J_n[0, d_n] = [0, d_n] = C^1_{\xi''_n}$. Это доказывает, что $C^1_{\xi'_n} = [0, d_n] \times \{0\}$. Прообразом этого отрезка при отображении J_{n-1} служит тот же самый отрезок (ведь отображение J_{n-1} совпадает с тождественным на бóльшем отрезке $[0, d_{n-1}] \times \{0\}$); наконец, из нашего индуктивного предположения следует, что прообразом отрезка $[0, d_n] \times \{0\}$

при отображении I_{n-1} служит $[0, d_n]$. Отсюда видно, что $C^1_{\xi_n} = I_n^{-1}(C^1_{\xi'_n}) = I^{-1}_{n-1}J^{-1}_{n-1}(C^1_{\xi'_n}) = [0, d_n]$. Доказательства утверждений о $C^{h_n}_{\xi_n}$ и $C^{h_n}_{\xi'_n}$ проводятся аналогично; различие состоит в том, что в этих доказательствах мы обращаем внимание на то, что происходит возле правого конца отрезка $[0, a_n]$ (а не возле его левого конца) и возле правого верхнего угла X'_n (а не возле левого нижнего угла).

В § 5 нам пригодится следующее замечание об отношении между разбиениями ξ_n с различными n: если $n < m$, то элементы разбиения ξ_m суть части либо элементов разбиения ξ_n, либо множества $X \setminus X_n$. (Мы можем превратить ξ_n в разбиение η_n всего пространства X, элементами которого являются прежние $C^i_{\xi_n}$ и новый элемент $X \setminus X_n$. Тогда можно просто сказать, что при $m > n$ разбиение η_m является измельчением разбиения η_n.) Дабы убедиться в этом, достаточно рассмотреть отношение между ξ_{n-1} и ξ_n. Некоторые элементы $C^i_{\xi'_n}$ разбиения ξ'_n (они являются подмножествами множества X'_n) лежат вне X''_{n-1} (это некоторые отрезки вида $[jd_n, (j+1)d_n] \times \{h_{n-1}\}$). Для таких i имеем $C^i_{\xi_n} \subset X \setminus X_{n-1}$. Другие элементы $C^i_{\xi'_n}$ разбиения ξ'_n лежат в X'_{n-1}; это некоторые отрезки вида $[jd_n, (j+1)d_n] \times \{j\}$, $0 \leqslant j \leqslant h_{n-1} - 1$. Эти элементы являются подотрезками отрезков $[0, d_{n-1}] \times \{j\}$ (напомним, что мы разделили отрезок $[0, d_{n-1}]$ оси x на $2n+1$ частей равной длины d_n и провели вертикальные линии через их концы), являющихся элементами разбиения ξ''_{n-1}. Если $C^i_{\xi_n} \subset C^l_{\xi_{n-1}}$, то (учитывая, что $I_n | X_{n-1} = J_{n-1} I_{n-1}$, причем образ этого отображения есть X''_{n-1})

$$C^i_{\xi_n} = I_n^{-1}(C^i_{\xi'_n}) \subset I_n^{-1}(C^l_{\xi''_{n-1}}) = I^{-1}_{n-1}J^{-1}_{n-1}(C^l_{\xi''_{n-1}}) = C^l_{\xi_{n-1}}.$$

Перефразируя (12) в терминах X_n, T_n и ξ_n, получаем

$$T_n^j(C^i_{\xi_n}) = C^{i+j}_{\xi_n}, \quad \text{когда} \quad 1 \leqslant i + j \leqslant h_n. \tag{13}$$

После того как мы определили отображения T_n, мы хотели бы определить T как отображение, значения которого при $x \in Y_n$ совпадают с $T_n(x)$. Это будет корректным определением, если мы докажем, что

$$T_n | Y_{n-1} = T_{n-1}. \tag{14}$$

Прежде всего, проверим, что

$$T'_n | Y''_{n-1} = T''_{n-1}. \tag{15}$$

В самом деле,

$Y''_{n-1} = X''_{n-1} \setminus \{$его “верхний этаж”$\} \subset X'_n \setminus \{$его “верхний этаж”$\}$,

так что T'_n определено на Y''_{n-1} и действует там, увеличивая вторую координату на 1 и не меняя первую координату. Так же действует и T''_{n-1}.

(15) — это, в сущности, версия (14), написанная в терминах пространств “со штрихами”. Формальное доказательство (14) содержится в цепочке простых равенств. Я сперва напишу всю эту цепочку и затем дам необходимые разъяснения.

$$\begin{aligned} T_n|Y_{n-1} &\overset{(a)}{=} I_n^{-1}J_n^{-1}T''_nJ_n(I_n|Y_{n-1}) \overset{(b)}{=} I_n^{-1}J_n^{-1}T''_n(J_n|Y'_n)(I_n|Y_{n-1}) \\ &\overset{(c)}{=} I_n^{-1}T'_n(I_n|Y_{n-1}) \overset{(d)}{=} I_n^{-1}(T'_n|Y''_{n-1})(I_n|Y_{n-1}) \\ &\overset{(e)}{=} I_n^{-1}T''_{n-1}(I_n|Y_{n-1}) \overset{(f)}{=} I_n^{-1}T''_{n-1}J_{n-1}(I_{n-1}|Y_{n-1}) \\ &\overset{(g)}{=} I_{n-1}^{-1}J_{n-1}^{-1}T''_{n-1}J_{n-1}(I_{n-1}|Y_{n-1}) \overset{(h)}{=} T_{n-1}. \end{aligned}$$

В (a) мы используем, что $Y_{n-1} \subset X_{n-1} \subset Y_n$. Поэтому определено $T_n|Y_{n-1}$. (a) является, так сказать, ограничением на Y_{n-1} определения (11) отображения T_n.

В (b) мы заменили J_n на $J_n|Y'_n$ на том основании, что образ предшествующего отображения содержится в Y'_n. Действительно,

$$I_n(Y_{n-1}) = J_{n-1}I_{n-1}(Y_{n-1}) = J_{n-1}Y'_{n-1} = Y''_{n-1} \subset X''_{n-1} \subset Y'_n.$$

(Здесь только первый шаг требует некоторого пояснения. Мы используем (10). Поскольку в $I_n(Y_{n-1})$ речь идет только об значениях ограничения отображения I_n на подмножество Y_{n-1} пространства X_{n-1}, то мы действительно вправе применять (10).)

В (c) мы используем определение T'_n (см. (11)).

В (d) мы заменили T'_n на $T'_n|Y''_{n-1}$, основываясь на том, что при проверке (b) мы уже видели, что образ предшествующего отображения — это в точности Y''_{n-1}.

В (e) мы используем (15).

В (f) надо снова вспомнить, что $I_n|Y_{n-1} = J_{n-1}(I_{n-1}|Y_{n-1})$ (это равенство является, так сказать, ограничением (10) на Y_{n-1}).

В (g) мы используем соотношение $I_n^{-1}|X''_{n-1} = I_{n-1}J_{n-1}$, которое следует из (10), если учесть, что образом отображения $J_{n-1}I_{n-1}$ является X''_{n-1}. Мы можем применять это соотношение к (g), поскольку образ T''_{n-1} содержится в X''_{n-1}.

В (h) мы ссылаемся на (11).

После того, как мы построили T, мы докажем, что это действительно автоморфизм пространств с мерой, т. е. что у него имеется обратное отображение T^{-1} и что для любого измеримого множества $A \subset X$ как $T(A)$, так и $T^{-1}(A)$ измеримы и имеют ту же меру, что и A.

Обратное отображение T_n^{-1} определено на $X_n \setminus C^1_{\xi_n} = [d_n, a_n]$ (поскольку $(T''_n)^{-1}$ определено на $X''_n \setminus C^1_{\xi''_n} = [0, d_n] \times \{1, \dots, h_n - 1\}$). Имеем $T^{-1}_{n+1}|[d_n, a_n] = T_n^{-1}$ (поскольку $T_{n+1}|[0, a_n - d_n] = T_n$ и образ этого отображения есть $[d_n, a_n]$. Надо иметь в виду, что отображение T_{n+1} инъективно, и что если мы знаем, что у точки x имеется прообраз $T_n^{-1}(x)$, то у нее нет других прообразов при отображении T_{n+1}). Отрезки $[d_n, a_n]$ образуют возрастающую систему отрезков и $\bigcup [d_n, a_n] = X$. Поэтому можно корректно определить $T^{-1}(x)$, приняв, что при $x \in [d_n, a_n]$ это есть $T_n^{-1}(x)$. Обозначение T^{-1} намекает, что отображение T^{-1} является обратным по отношению к T. И действительно, для любого фиксированного x существует такое n, что $x \in [d_n, a_n - d_n]$, и для такого x равенство $TT^{-1}(x) = T^{-1}T(x) = x$ сводится к $T_n^{-1}T_n(x) = T_n T_n^{-1}(x) = x$.

Наконец, отображения T, T^{-1} измеримы и сохраняют меру Лебега. Пусть A — измеримое подмножество X. Я докажу, что $T(A)$ измеримо и имеет ту же меру, что и A. Мы используем, что вертикальный сдвиг T''_n отображает измеримое подмножество пространства Y''_n в измеримое подмножество пространства X''_n, имеющее ту же меру. Так как I_n и J_n являются изоморфизмами пространств с мерой, то T'_n и T_n отображают измеримые подмножества пространства Y'_n, соответственно. $Y_n = [0, a_n - d_n]$, в измеримые подмножества пространства X'_n, соответственно. X_n, имеющие ту же меру. Теперь для любого измеримого подмножества $A \subset X$

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_n (A \cap [0, a_n - d_n]), \\ T(A) &= \bigcup_n T(A \cap [0, a_n - d_n]) = \bigcup_n T_n(A \cap [0, a_n - d_n]). \end{aligned} \tag{16}$$

Из последней формулы следует измеримость $T(A)$. В (16) A и $T(A)$ представлены в виде объединений возрастающих последовательностей множеств (для A это ясно, для $T(A)$ следует из того факта, что $T_{n+1}|[0, a_n - d_n] = T_n$). Поэтому

$$\mu(A) = \lim \mu(A \cap [0, a_n - d_n]),$$
$$\mu(T(A)) = \lim \mu(T_n(A \cap [0, a_n - d_n])).$$

Но $\mu(T_n(A \cap [0, a_n - d_n])) = \mu(A \cap [0, a_n - d_n])$, ибо T_n сохраняет меру.

Аналогичным образом, используя вместо первой строки (16) тот факт, что $A = \bigcup_n (A \cap [d_n, a_n])$, и соответствующую формулу для $T^{-1}(A)$, можно доказать, что если $A \subset X$ измеримо, то $T^{-1}(A)$ измеримо и имеет ту же меру, что и A.

Последнее замечание в этом параграфе касается действия T^j на элементах разбиения ξ_n. Пока $T_n^j(x)$ определено (т. е. пока $(T_n'')^j(J_n I_n(x))$ определено), $T^j(x) = T_n^j(x)$. Если $x \in C^i_{\xi_n}$, то $J_n I_n(x) \in C^i_{\xi''_n} = [0, d_n] \times \{i-1\}$, и $(T_n'')^j(J_n I_n(x))$ определено, пока $0 \leqslant i - 1 + j < h_n$, т. е. пока $1 \leqslant i + j \leqslant h_n$. Вспоминая (13), мы видим, что

$$\begin{aligned} T^j|C^i_{\xi_n} &= T_n^j|C^i_{\xi_n}, \quad \text{когда} \quad 1 \leqslant i + j \leqslant h_n, \\ T^j(C^i_{\xi_n}) &= T_n^j(C^i_{\xi_n}) = C^{i+j}_{\xi_n} \quad \text{для таких } i, j, n. \end{aligned} \tag{17}$$

§ 5. Свойства T

Эргодичность. Пусть $A \subset X$ — инвариантное измеримое множество положительной меры. У любого множества A положительной меры имеются так называемые "точки плотности". Точка x_0 называется точкой плотности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если Δ — любой отрезок длины $\mu(\Delta) < \delta$, содержащий x_0, то $\frac{\mu(A\cap\Delta)}{\mu(\Delta)} > 1 - \varepsilon$. Пусть x_0 — точка плотности для нашего A. x_0 принадлежит всем отрезкам X_n с достаточно большими n и тем самым является точкой некоторых элементов $C^{i_n}_{\xi_n}$ разбиений ξ_n. $C^{i_n}_{\xi_n}$ является отрезком длины $d_n = \frac{1}{(2n+1)!!}$; при достаточно больших n будет $d_n < \delta$. Тогда $\mu(A\cap C^{i_n}_{\xi_n}) > (1-\varepsilon)\mu(C^{i_n}_{\xi_n})$. Но $T^j(A) = A$ и $T^j(C^{i_n}_{\xi_n}) = C^{i_n+j}_{\xi_n}$, пока $1 \leqslant i_n + j \leqslant h_n$, т. е. это так для тех j, для которых $1 - i_n \leqslant j \leqslant h_n - i_n$. Для таких j мы имеем $T^j(A \cap C^{i_n}_{\xi_n}) = A \cap C^{i_n+j}_{\xi_n}$, и (поскольку T сохраняет меру)

$$\mu(A \cap C^{i_n+j}_{\xi_n}) = \mu(A \cap C^{i_n}_{\xi_n}) > (1 - \varepsilon)\mu(C^{i_n+j}_{\xi_n}).$$

Раз $i + j$ с теми j, для которых $1 - i_n \leqslant j \leqslant h_n - i_n$, принимает все значения от 1 до h_n, то $X_n = \bigcup_j C^{i_n+j}_{\xi_n}$ и

$$\mu(A) \geqslant \mu(A \cap X_n) = \mu\Bigl(\bigcup_j \bigl(A \cap C^{i_n+j}_{\xi_n}\bigr)\Bigr) = \sum_j \mu\bigl(A \cap C^{i_n+j}_{\xi_n}\bigr)$$
$$> (1 - \varepsilon) \sum_j \mu\bigl(C^{i_n+j}_{\xi_n}\bigr) = (1 - \varepsilon)\mu(X_n).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым и после этого в качестве n можно взять произвольно большое целое число, то получается, что $\mu(A) \geqslant \mu(X)$, т. е. $\mu(A) = \mu(X)$. Мы видим, что любое инвариантное множество положительной меры имеет меру $\mu(X)$.

Простота спектра. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ множество тех функций $f \in L^2(X, \mu)$, которые постоянны на элементах разбиения ξ_n и равны нулю вне X_n. Примем $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$; ясно, что множество $\mathcal{F}$ плотно в $L^2(X, \mu)$. (Любую непрерывную функцию, равную нулю в точке a, можно равномерно приблизить функциями из $\mathcal{F}$; а такие непрерывные функции плотны в $L^2(X, \mu)$.) Мы докажем, что для любых $f, g \in \mathcal{F}$ существует такое $h \in L^2(X, \mu)$, что $d(f, Z(h)) = d(g, Z(h)) = 0$, — это даже больше, чем требуется в достаточном условии, приведенном в § 3.

Если функции $f, g \in \mathcal{F}$, они обе содержатся в некотором $\mathcal{F}_n$. Возьмем за h характеристическую (индикаторную) функцию $\chi_{C_{\xi_n}^{h_n}}$ элемента $C_{\xi_n}^{h_n}$. Для характеристической функции χ_B любого множества $B \subset X$

$$((U_T^i)\chi_B)(x) = (U_{T^i}\chi_B)(x) = \chi_B(T^i(x)) = \chi_{T^{-i}(B)}(x).$$

Для $B = \chi_{C_{\xi_n}^{h_n}}$ мы имеем

$$T^{-i}(B) = C_{\xi_n}^{h_n - i} \quad \text{при} \quad i = 0, \dots, h_n - 1$$

(см. (13)), так что линейные комбинации функций h, $U_T h, \dots$ $\dots, U_T^{h_n - 1} h$ — это то же самое, что линейные комбинации характеристических функций всевозможных элементов $C_{\xi_n}^k$ разбиения ξ_n. А ведь любая функция из $\mathcal{F}_n$ является такой линейной комбинацией.

Свойство $U^{l_n} \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\mathrm{id} \; + U)$. Мы докажем это свойство с $l_n = h_n + 1$.

Рассмотрим следующие функции на $H \times H$:

$$\begin{aligned} B_n(f, g) &= \langle U^{h_n+1} f, g\rangle - \frac{1}{2}\langle f, g\rangle - \frac{1}{2}\langle Uf, g\rangle \\ &= \left\langle U^{h_n+1} f - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} Uf, g \right\rangle. \end{aligned}$$

Это билинейные функционалы. Заметим, что они равномерно ограничены (в том смысле, в каком говорят об ограниченности билинейных функционалов, а не в смысле ограниченности функций!). Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| U^{h_n+1} f - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} Uf \right\| &\leqslant \left\| U^{h_n+1} f \right\| + \frac{1}{2}\|f\| + \frac{1}{2}\|Uf\| \\ &= \|f\| + \frac{1}{2}\|f\| + \frac{1}{2}\|f\| = 2\|f\|, \qquad (18) \end{aligned}$$

$$|B_n(f, g)| \leqslant \left\| U^{h_n+1} f - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} Uf \right\| \|g\| \leqslant 2\|f\| \, \|g\|.$$

Ввиду этой равномерной ограниченности B_n вместо

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f, g) = 0 \quad \text{для всех} \quad f, g \in H$$

достаточно доказать, что $\lim_{n\to\infty} B_n(f,g)=0$ для всех f,g из какого-нибудь плотного подмножества $\mathcal{F}\subset H$ (как и раньше, мы возьмем $\mathcal{F}=\bigcup_n \mathcal{F}_n$). Действительно, пусть $f,g\in H$. Возьмем любое $\delta>0$ и сперва найдем такие $f_1,g_1\in\mathcal{F}$, что $\|f-f_1\|<\delta$, $\|g-g_1\|<\delta$, затем возьмем столь большое $N=N(\delta)$, что $|B_n(f_1,g_1)|<\delta$ при всех $n>N$. Для такого n

$$\begin{aligned}|B_n(f,g)-B_n(f_1,g_1)| &\leqslant |B_n(f-f_1,g)|+|B_n(f_1,g-g_1)|\\ &\leqslant 2\|f-f_1\|\|g\|+2(\|f\|+\|f-f_1\|)\|g-g_1\|\\ &\leqslant 2\|f-f_1\|\delta+2(\|f\|+\delta)\delta=2\delta(\|f\|+\|g\|+\delta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|B_n(f,g)| &\leqslant |B_n(f_1,g_1)|+|B_n(f,g)-B_n(f_1,g_1)|\\ &\leqslant \delta+2\delta(\|f\|+\|g\|+\delta)=\delta(1+2\|f\|+2\|g\|+2\delta).\end{aligned}$$

Если дано $\varepsilon>0$, то возьмем такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $\delta(1+2\|f\|+2\|g\|+2\delta)<\varepsilon$, а затем возьмем $N=N(\delta(\varepsilon))$. При всех $n>N$ будет $|B_n(f,g)|<\varepsilon$. Это доказывает, что $\lim_{n\to\infty} B_n(f,g)=0$.

Итак, достаточно ограничиться функциями $f,g\in\mathcal{F}=\bigcup_n \mathcal{F}_n$.

Прежде всего, заметим, что если $n<m$, то $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_m$. Действительно, $f\in\mathcal{F}_n$ означает две вещи:

f постоянна на элементах разбиения ξ_n; тогда она постоянна на тех элементах разбиения ξ_m, которые являются частями предыдущих элементов;

f равна нулю вне X_n; тогда она равна нулю (в частности, постоянна) как на тех элементах разбиения ξ_m, которые являются частями множества $X\setminus X_n$, так и вне бóльшего, нежели X_n, множества X_m.

Мы докажем, что если $f,g\in\mathcal{F}_{n-2}$, то

$$|B_{n-1}(f,g)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\,\|f\|\,\|g\|. \tag{19}$$

Отсюда будет следовать желаемое утверждение

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,g)=0 \quad \text{для всех} \quad f,g\in\mathcal{F}. \tag{20}$$

Действительно, если даны $f,g\in\mathcal{F}$, $\varepsilon>0$, то можно найти такое N_1, что $f,g\in\mathcal{F}_{N_1-2}$, а затем такое $N\geqslant N_1$, что

$$\frac{2}{\sqrt{2N+1}}\,\|f\|\,\|g\|<\varepsilon.$$

При всех $n\geqslant N$ будет $f,g\in\mathcal{F}_{n-2}$ и $\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\,\|f\|\,\|g\|<\varepsilon$; согласно (19), $|B_{n-1}(f,g)|<\varepsilon$. Это и доказывает (20).

Если $f, g \in \mathcal{F}_{n-2}$, то

$$f, g \in \mathcal{F}_{n-1} \quad \text{и} \quad f = g = 0 \text{ на } C_{\xi_{n-1}}^{h_{n-1}}. \tag{21}$$

Первое уже объяснялось. Что касается второго, то мы уже видели, что последний элемент $C_{\xi_{n-1}}^{h_{n-1}}$ разбиения ξ_{n-1} является отрезком $[a_{n-1} - d_{n-1}, a_{n-1}]$, лежащим вне $X_{n-2} = [0, a_{n-2}]$; а по определению $\mathcal{F}_{n-2}$, $f|X \setminus X_{n-2} = g|X \setminus X_{n-2} = 0$.

Ниже используется только (21). Напомним, что

$$X''_{n-1} \setminus \{\text{его “верхний этаж” } C_{\xi''_{n-1}}^{h_{n-1}}\} = Y''_{n-1},$$

так что $X_{n-1} \setminus C_{\xi_{n-1}}^{h_{n-1}} = Y_{n-1}$. Значит,

$$f = g = 0 \quad \text{вне} \quad Y_{n-1}. \tag{22}$$

Отсюда видно, что для наших f, g

$$B_{n-1}(f, g) = \int_{Y_{n-1}} \left(f(T^{h_{n-1}+1}x) - \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(Tx) \right) \overline{g(x)}\, dx. \tag{23}$$

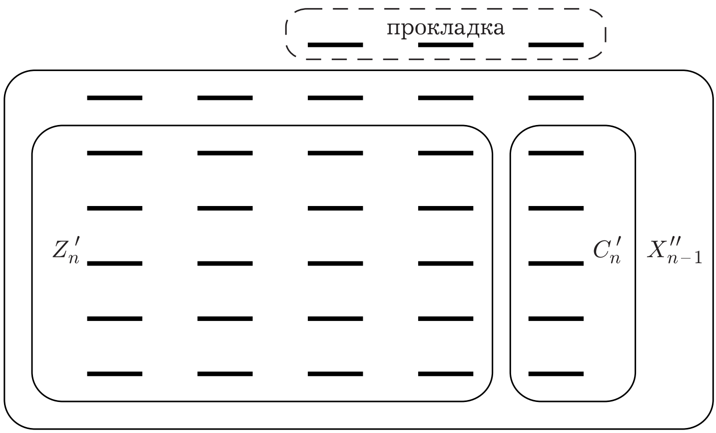

Рис. 3

Обозначим (рис. 3)

$$Z'_n = [0, d_{n-1} - d_n] \times \{0, \ldots, h_{n-1} - 2\} = Y''_{n-1} \setminus C_n^{2n+1},$$
$$C'_n = [d_{n-1} - d_n, d_{n-1}] \times \{0, \ldots, h_{n-1} - 2\} = C_n^{2n+1} \cap Y''_{n-1}$$

(напомним, что $C_n^{2n+1} = [d_{n-1} - d_n, d_{n-1}] \times \{0, \ldots, h_{n-1}\}$ является последней из подколонн, на которые мы "расщепили" X_n' при переходе к X_n''),

$$Z_n = I_n^{-1}(Z_n') = I_{n-1}^{-1} J_{n-1}^{-1}(Z_n'), \qquad C_n = I_n^{-1}(C_n') = I_{n-1}^{-1} J_{n-1}^{-1}(C_n').$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} &\int_{Y_{n-1}} \left(f(T^{h_{n-1}+1}x) - \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(Tx) \right) \overline{g(x)}\, dx \\ &\qquad = \int_{Z_n} \left(f(T^{h_{n-1}+1}x) - \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(Tx) \right) \overline{g(x)}\, dx \\ &\qquad\qquad + \int_{C_n} \left(f(T^{h_{n-1}+1}x) - \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(Tx) \right) \overline{g(x)}\, dx. \qquad (24) \end{aligned}$$

Мы увидим, что первый интеграл в правой части равен нулю, тогда как второй интеграл можно довольно непосредственным образом оценить сверху, и будет доказано, что при больших n он мал.

Зададимся вопросом о $\max\{i;\ C_{\xi_n}^i \subset Z_n\}$. $J_n(Z_n')$ является частью множества $X_n'' = [0, d_n] \times \{0, \ldots, h_n - 1\}$. $J_n(C_n^{2n+1})$ и два "этажа" колонны X_n'', расположенные сразу под $J_n(C_n^{2n+1})$ (они являются образами при отображении J_n некоторых частей множества X_{n-1}', имеющих высоту $y = h_{n-1} - 1$ и $y = h_{n-1}$), лежат над $J_n(Z_n')$. Поскольку $J_n(C_n^{2n+1})$ имеет $h_{n-1} + 1$ "этажей", то мы видим, что выше $J_n(Z_n')$ имеются $h_{n-1}+3$ "этажей". "Этаж" колонны X_n'' с высотой $y = i$ — это $C_{\xi_n''}^{i+1}$, так что упомянутые $h_{n-1} + 3$ "этажей" суть

$$C_{\xi_n''}^{h_n}, C_{\xi_n''}^{h_n - 1}, \ldots, C_{\xi_n''}^{h_n - h_{n-1} - 2}. \qquad (25)$$

Следовательно,

$$\max\{i;\ C_{\xi_n}^i \subset Z_n\} \leqslant h_n - h_{n-1} - 3 \qquad (26)$$

(на самом деле "этаж", расположенный непосредственно под "этажами" (25), уже принадлежит $J_n(Z_n')$, поэтому в (26) можно написать $=$ вместо $\leqslant$, но нам это не понадобится).

Если $C_{\xi_n''}^i \subset Z_n$ и $j \leqslant h_{n-1} + 3$, то $0 \leqslant i + j \leqslant h_n - h_{n-1} - 3 + h_{n-1} + 3 = h_n$. Учитывая (17), заключаем, что

$$T^j | Z_n = T_n^j | Z_n \quad \text{при} \quad j = 0, \ldots, h_{n-1} + 3 \qquad (27)$$

(этим сказано также, что $T_n^j|Z_n$ определено при таких j). Таким образом,

$$\int_{Z_n}\Big(f(T^{h_{n-1}+1}x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(Tx)\Big)\overline{g(x)}\,dx$$
$$=\int_{Z_n}\Big(f(T_n^{h_{n-1}+1}x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(T_nx)\Big)\overline{g(x)}\,dx. \qquad (28)$$

Поскольку мы знаем, что $T_n^j(x)$ определено при $x \in Z_n$, $0 \leqslant j \leqslant h_{n-1}+3$ (нам понадобится только $0 \leqslant j \leqslant h_{n-1}+1$), то мы можем перейти в (28) к $Z'_n \subset X''_{n-1} \subset X'_n$ и T'_n. Если $(x',y') \in Z'_n$, то точка (x',y') есть $I_n(x)$ с некоторым $x \in Z_n$, и $(T'_n)^j(x',y')$ определено для тех же j, для которых определено $T_n^j(x)$; в частности, оно определено при $0 \leqslant j \leqslant h_{n-1}+1$. Обозначим

$$f'(x,y)=f(I_n^{-1}(x,y)),\quad g'(x,y)=g(I_n^{-1}(x,y))\quad \text{для } (x,y)\in X'_n.$$

Тогда можно переписать интеграл в (28) как

$$\int_{Z'_n}\Big(f'((T'_n)^{h_{n-1}+1}(x,y))-\frac{1}{2}f'(x,y)-\frac{1}{2}f'(T'_n(x,y))\Big)\overline{g'(x,y)}\,d\mu(x,y). \qquad (29)$$

Здесь (как и во всем X'_n) мера μ является на каждом “этаже” мерой Лебега; результаты интегрирования по “этажам” надо сложить. Иными словами, мы рассматриваем

$$\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}\int_0^{2nd_n}\Big(f'((T'_n)^{h_{n-1}+1}(x,y)) - \frac{1}{2}f'(x,y)-\frac{1}{2}f'(T'_n(x,y))\Big)\overline{g'(x,y)}\,dx$$

(заметим, что $2nd_n=d_{n-1}-d_n$, т. е. это “ширина” Z'_n).

Функции f,g постоянны на элементах $C^i_{\xi_{n-1}}$; это равносильно тому, что f',g' постоянны на элементах $C^i_{\xi''_{n-1}}$, т. е. на “этажах” колонны X''_{n-1} (а на $X'_n \setminus X''_{n-1}$ они равны нулю). Это означает, что $f'(x,y)$ и $g'(x,y)$ зависят только от y: $f'(x,y)=\varphi(y)$, $g'(x,y)=\psi(y)$. В Z'_n мы имеем $T'_n(x,y)=(x,y+1)$, оттого $f(T'_n(x,y))=\varphi(y+1)$. Что можно сказать о $f((T'_n)^{h_{n-1}+1}(x,y))$?

Под действием $T'_n,(T'_n)^2$ и т.д. точка $(x,y)\in Z'_n$ перепрыгивает в точку $(x,y+1),(x,y+2)$ и т.д., пока она не достигает “верхнего этажа". Если $x \in [0, nd_n]$, то это происходит, когда $(x, y+j) = (x, h_{n-1} - 1)$, т. е. когда $j = h_{n-1} - 1 - y$. Если $x \in [nd_n, 2nd_n] = [nd_n, d_{n-1} - d_n]$, то это происходит, когда $(x, y+j) = (x, h_{n-1})$, т. е. когда $j = h_{n-1} - y$. После этого новое применение отображения T'_n переводит эту точку "верхнего этажа" в $(x + d_n, 0)$, т. е.

$$\begin{aligned} (T'_n)^{h_{n-1}-y}(x, y) &= (x + d_n, 0), \quad \text{когда} \quad x \in [0, nd_n], \\ (T'_n)^{h_{n-1}+1-y}(x, y) &= (x + d_n, 0), \quad \text{когда} \quad x \in [nd_n, 2nd_n]. \end{aligned}$$

После этого будет $(T'_n)^k(x + d_n, 0) = (x + d_n, k)$ вплоть до того момента, когда $(x + d_n, k)$ попадает на "верхний этаж". Это произойдет только когда $k = h_{n-1} - 1$ или даже $k = h_{n-1}$. Но нас сейчас интересуют $(T'_n)^j(x, y) = (T'_n)^k(x + d_n, y)$ с

$$\begin{aligned} &k \leqslant h_{n-1} + 1 - (h_{n-1} - y) = y + 1, \quad \text{если} \quad x \in [0, nd_n], \\ &k \leqslant h_{n-1} + 1 - (h_{n-1} + 1 - y) = y, \quad \text{если} \quad x \in [nd_n, 2nd_n]. \end{aligned} \tag{30}$$

В обоих случаях $k \leqslant y \leqslant h_{n-1} - 2 < h_{n-1} - 1$. Поэтому $(T'_n)^{h_{n-1}+1}(x, y)$ лежит на вертикальной линии, проходящей через точку $x + d_n$ оси x, и ее высота k дается правой частью (30). Иными словами,

$$T^{h_{n-1}+1}(x, y) = \begin{cases} (x + d_n, y + 1) & \text{при} \quad x \in [0, nd_n], \\ (x + d_n, y) & \text{при} \quad x \in [nd_n, 2nd_n]. \end{cases}$$

Таким образом,

$$f'(T^{h_{n-1}+1}(x, y)) = \begin{cases} \varphi(y + 1) & \text{при} \quad x \in [0, nd_n], \\ \varphi(y) & \text{при} \quad x \in [nd_n, 2nd_n]. \end{cases}$$

Теперь видно, что выражение (29) равно

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2} \int_0^{nd_n} \left(\varphi(i+1) - \frac{1}{2}\,\varphi(i) - \frac{1}{2}\,\varphi(i+1) \right) \overline{\psi(i)}\, dx \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{h_{n-1}-2} \int_{nd_n}^{2nd_n} \left(\varphi(i) - \frac{1}{2}\,\varphi(i) - \frac{1}{2}\,\varphi(i+1) \right) \overline{\psi(i)}\, dx. \end{aligned} \tag{31}$$

Подынтегральные выражения не зависят от x, так что интегрирование означает просто, что надо умножить подынтегральные выражения на nd_n. Значит, (31) равно

$$nd_n\Bigg(\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}\frac{1}{2}\left(\varphi(i+1)-\varphi(i)\right)\overline{\psi(i)} \\ +\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}\frac{1}{2}\left(\varphi(i)-\varphi(i+1)\right)\overline{\psi(i)}\Bigg)=0.$$

Мы доказали, что первый интеграл в правой части (24) равен нулю. Остается оценить сверху второй интеграл, стоящий в правой части (24). Имеем

$$\begin{aligned}&\left|\int_{C_n}\Big(f(T^{h_{n-1}+1}x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(Tx)\Big)\overline{g(x)}\,dx\right|^2\\ &\quad\leqslant\int_{C_n}\left|f(T^{h_{n-1}+1}x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(Tx)\right|^2dx\int_{C_n}|g(x)|^2\,dx\\ &\quad\leqslant\int_{X}\left|f(T^{h_{n-1}+1}x)-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}f(Tx)\right|^2dx\int_{C_n}|g(x)|^2\,dx\\ &\quad=\left\|U^{h_{n-1}+1}f-\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}\,Uf\right\|^2\int_{C_n}|g(x)|^2\,dx\\ &\quad\leqslant 4\|f\|^2\int_{C_n}|g(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

(см. (18)),

$$\begin{aligned}\int_{C_n}|g(x)|^2dx&=\int_{C'_n}|g'(x,y)|^2\,d\mu(x,y)=\\ &=\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}\int_{2nd_n}^{(2n+1)d_n}|\psi(i)|^2\,dx=d_n\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}|\psi(i)|^2.\end{aligned}$$

Сравним это с

$$\begin{aligned}\|g\|^2=\int_X|g(x)|^2dx&=\int_{X_{n-1}}|g(x)|^2\,dx=\int_{X''_{n-1}}|g'(x,y)|^2\,d\mu(x,y)\\ &=\sum_{i=0}^{h_{n-1}-1}\int_0^{d_{n-1}}|\psi(i)|^2\,dx=d_{n-1}\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}|\psi(i)|^2.\end{aligned}$$

(В последней сумме мы написали $\sum_{i=0}^{h_{n-1}-2}$ вместо $\sum_{i=0}^{h_{n-1}-1}$, потому что $\psi(h_{n-1}-1)=0$. Напомним, что $\psi(i)=g'(x,i)$ и что $g'=0$ вне Z'_n.) Ясно, что

$$\int_{C_n} |g(x)|^2\,dx = \frac{d_n}{d_{n-1}}\,\|g\|^2 = \frac{1}{2n+1}\,\|g\|^2.$$

Мы приходим к выводу, что

$$|B_{n-1}(f,g)| = \left|\int_{C_n}\left(f(T^{h_{n-1}+1}(x)) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(T(x))\right)\overline{g(x)}\,dx\right|$$

удовлетворяет (19).

§ 6. Функциональная модель для $U_{T\times T}$

Мы знаем, что пространство $L_0^2(X,\mu)$ функций класса L^2 со средним значением нуль (т. е. таких L^2-функций, что $\int_X f d\mu = 0$) унитарно эквивалентно некоторому пространству $L^2(\mathbb{S}^1,\sigma)$ посредством некоторого унитарного изоморфизма $W\colon L_0^2(X,\mu)\to L^2(\mathbb{S}^1,\sigma)$, который сопрягает $U=U_T$ с V (напомним, что $(V\varphi)(z)=z\varphi(z)$), т. е. $WUW^{-1}=V$. Это утверждение является упрощенным вариантом спектральной теоремы для того случая, когда в $L_0^2(X,\mu)$ имеется циклический вектор. По существу, этот частный случай доказан в § 3 (а в § 5 мы видели, что этот случай имеет место для нашего U_T). С этой (весьма ограниченной!) точки зрения роль спектральной теоремы в ее общем виде, обсуждавшемся в § 2, состоит только в том, чтобы разъяснить, почему этот частный случай называется случаем простого спектра.

Наша конечная цель — доказать утверждение, что пространство $L_0^2(X\times X,\mu\times\mu)$ (нижний индекс 0 снова указывает, что функции из этого пространства имеют средние значения 0) унитарно эквивалентно некоему $L^2(\mathbb{S}^1,\nu)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$ (прямая сумма — ортогональная; мера ν непрерывна) посредством некоего унитарного изоморфизма $\mathfrak{W}\colon L_0^2(X\times X,\mu\times\mu)\to L^2(\mathbb{S}^1,\nu)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\nu)$, сопрягающего U_T с оператором $V\oplus V$ (действующего следующим образом: $((V\oplus V)(\varphi,\psi))(z,w)=(z\varphi(z),w\psi(w))$. Как видно из этой формулы, я обозначаю элементы прямой суммы как пары (φ,ψ), а не как суммы $\varphi+\psi$. Использование сумм в данном тексте могло бы привести к недоразумениям. И ведь прямая сумма двух пространств есть не что иное, как их декартово произведение (только это произведение снабжено некоторой дополнительной структурой — структурой векторного пространства); обозначение элементов прямой суммы как пар согласуется с этим фактом.) Это утверждение, которое будет доказано в § 8, доставляет функциональную модель для $U_{T\times T}$ в духе спектральной теоремы, как она сформулирована в § 2. В терминах этой теоремы наше утверждение как раз и означает, что $U_{T\times T}$ имеет однородный непрерывный спектр кратности 2. (Опять-таки можно стать на ту точку зрения, что роль спектральной теоремы состоит только в том, чтобы объяснить спектральную терминологию.)

В этом параграфе мы построим некоторую “предварительную” функциональную модель для $U_{T\times T}$. В этой модели основную роль играет другое функциональное пространство (нежели в спектральной теореме) — пространство, состоящее из некоторых функций двух переменных $(z,w)\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, т. е. функций на двумерном торе. В этих терминах будет дано также простое представление для $U_{T\times T}$. (Кроме этого пространства, в "предварительной" модели будут два прямых ортогональных слагаемых, унитарно изоморфных $L^2(\mathbb{S}^1,\sigma)$ посредством оператора, "переводящего" ограничение $U_{T\times T}$ на эти слагаемые в V.)

При построении "предварительной" модели мы будем использовать только то, что было сказано в первом абзаце этого параграфа. На этом шаге мы не будем использовать свойства b) из § 2 [26]. Другое дело, что без этого (или, может быть, какого-то другого) дополнительного свойства невозможно доказать наше окончательное утверждение об $U_{T\times T}$. Но чтобы доказать это утверждение, удобнее работать с "предварительной" функциональной моделью (конечно, при этом принимается во внимание свойство b) из § 2, тоже переформулированное в терминах "предварительной" модели; эта переформулировка будет дана в § 8.)

Для читателя с подходящим тезаурусом (включающем тензорные произведения гильбертовых пространств) содержание этого параграфа более или менее очевидно. Но я хотел быть понятным также и для других читателей.

Первый шаг в направлении этой "предварительной" модели состоит в том, что мы разлагаем пространство $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ в ортогональную прямую сумму четырех замкнутых линейных подпространств, инвариантных относительно $U_T\times U_T$:

$$L^2(X\times X,\mu\times\mu)=\mathbb{C}\oplus L^2_{0x}\oplus L^2_{0y}\oplus L^2_{00}(X\times X,\mu\times\mu),\qquad(32)$$

где

$\mathbb{C}=\{\text{constants}\}$;

L^2_{0x} — подпространство $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$, состоящее из тех функций $f(x,y)$, которые в действительности зависят только от x ($f(x,y)=\varphi(x)$, где, конечно, $\varphi\in L^2(X,\mu)$) и имеют нулевое среднее значение (это значит, что $\varphi\in L^2_0(X,\mu)$, ибо

$$\int_X\int_X f(x,y)d\mu(x)d\mu(y)=\int_X\varphi(x)\,d\mu(x)^{27});$$

[26] Не считая, конечно, того факта, что мы использовали b), доказывая, что спектр U_T непрерывен.

[27] Здесь и далее я использую нормированную меру μ вместо обычной меры

L^2_{0y} — подпространство $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$, состоящее из тех функций $f(x,y)$, которые в действительности зависят только от y и имеют нулевое среднее значение ($f(x,y)=\psi(y)$, где $\psi\in L^2_0(X,\mu)$);

$L^2_{00}(X\times X,\mu\times\mu)$ — подпространство $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$, состоящее из таких функций $f(x,y)$, что

— при почти всех y функция $x\mapsto f(x,y)$ имеет нулевое среднее значение, т. е. $\int_X f(x,y)\,d\mu(x)=0$;

— при почти всех x функция $y\mapsto f(x,y)$ имеет нулевое среднее значение, т. е. $\int_X f(x,y)\,d\mu(y)=0$.

В связи с определением L^2_{00} надо заметить, что ввиду конечности меры

$$L^2(X\times X,\mu\times\mu)\subset L^1(X\times X,\mu\times\mu).$$

С учетом этого обстоятельства теорема Фубини утверждает, что для $f\in L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ при почти всех y, соответственно, при почти всех x функции

$$x\mapsto|f(x,y)|^2,\quad x\mapsto f(x,y),\quad y\mapsto|f(x,y)|^2,\quad y\mapsto f(x,y)$$

являются измеримыми и суммируемыми. Теорема утверждает также, что интегралы этих функций по X существуют и равны соответствующим двойным интегралам. Мы заключаем, прежде всего, что функции $\varphi(x)=\int_X f(x,y)\,d\mu(y)$, $\psi(y)=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ корректно определены (при почти всех x или y) и что два условия, наложенные в определении L^2_{00}, имеют смысл. Ясно, что L^2_{00} является линейным подпространством $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ в алгебраическом смысле. Докажем, что это замкнутое подпространство. При почти всех x

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|^2&=\left|\int f(x,y)\cdot 1\,d\mu(y)\right|^2\\&\leqslant\int|f(x,y)|^2\,d\mu(y)\cdot\int 1^2\,d\mu(y)=\int|f(x,y)|^2\,d\mu(y).\end{aligned}$$

$|\varphi(x)|^2$ — суммируемая (интегрируемая) функция (напомним, что согласно одному из утверждений теоремы Фубини функция $x\mapsto$

Лебега в X. Это не принципиально, но более удобно. (Например, в противном случае двойной интеграл в этой формуле равнялся бы (длина a отрезка X)$\times\int_X\varphi(x)\,dx$.)

$\int |f(x,y)|^2 \, d\mu(y)$ является суммируемой) и

$$\int |\varphi(x)|^2 d\mu(x) \leqslant \iint |f(x,y)|^2 \, d\mu(x) \, d\mu(y). \tag{33}$$

Поэтому $\varphi \in L^2(X,\mu)$; аналогично $\psi \in L^2(X,\mu)$. Мы видим, что отображения

$$P\colon L^2(X\times X, \mu\times\mu) \to L^2(X,\mu) \quad f \mapsto \varphi,\ \ \varphi(x) = \int_X f(x,y)\, d\mu(y),$$
$$Q\colon L^2(X\times X, \mu\times\mu) \to L^2(X,\mu) \quad f \mapsto \psi,\ \ \psi(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$

корректно определены. Ясно, что это линейные операторы, и так как (33) означает, что $\|\varphi\|, \|\psi\| \leqslant \|f\|$, то эти операторы являются ограниченными (и их нормы $\leqslant 1$). Теперь можно перефразировать определение пространства L^2_{00} следующим образом:

$$L^2_{00} = \{f \in L^2;\ Pf = Qf = 0\}.$$

Это делает очевидной замкнутость L^2_{00}.

Доказательство замкнутости линейных подпространств L^2_{0x}, L^2_{0y} еще проще (не надо использовать какой-либо “серьезной” теоремы вроде теоремы Фубини). Просто заметим, что отображение

$$I\colon L^2_0(X,\mu) \to L^2(X\times X, \mu\times\mu) \qquad \varphi \mapsto f, \quad f(x,y) = \varphi(x)$$

является линейным изометрическим отображением и что L^2_{0x} — его образ. Если теперь последовательность $f_n \in L^2_{0x}$ сходится в $L^2(X\times X, \mu\times\mu)$ к f, то последовательность соответствующих φ_n удовлетворяет критерию Коши и оттого она сходится в пространстве $L^2_0(X,\mu)$ (которое, очевидно, является замкнутым подпространством в $L^2(X,\mu)$) к некоторой функции φ. Тривиальным образом $I(\varphi) = \lim f_n$, так что $f = I(\varphi) \in L^2_{0x}$. Подпространство L^2_{0y} тоже является замкнутым по аналогичным соображениям.

Убедимся, что слагаемые в (32) взаимно ортогональны. Ясно, что $\mathbb{C}$ ортогонально другим слагаемым, ибо все они принадлежат пространству $L^2_0(X\times X, \mu\times\mu)$ функций с нулевым средним значением, а $L^2_0(X\times X, \mu\times\mu) \perp \mathbb{C}$. Далее, $L^2_{0x} \perp L^2_{0y}$:

$$\iint \varphi(x)\overline{\psi(y)}\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int \varphi \, d\mu \cdot \int \overline{\psi}\, d\mu = 0.$$

Наконец, $L^2_{0x} \perp L^2_{00}$ и $L^2_{0y} \perp L^2_{00}$: например, если $f \in L^2_{00}$ и $\varphi \in L^2_{0x}$, то

$$\iint f(x,y)\overline{\varphi(x)}\,d\mu(x)\,d\mu(y) = \int \overline{\varphi(x)}\left(\int f(x,y)\,d\mu(y)\right)d\mu(x)$$
$$= \int \overline{\varphi(x)}\cdot 0\,d\mu(x) = 0.$$

Тем самым доказано также, что в (32) действительно речь идет о прямой сумме. Остается проверить, что эта сумма есть все $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$, т. е. что

$$L^2_0(X\times X,\mu\times\mu) = L^2_{0x}\oplus L^2_{0y}\oplus L^2_{00}(X\times X,\mu\times\mu). \tag{34}$$

Пусть $f \in L^2_0(X\times X,\mu\times\mu)$, $\varphi(x) = (Pf)(x)$, $\psi(y) = (Qf)(y)$, $g(x,y) = f(x,y) - \varphi(x) - \psi(y)$. Так как $f \in L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ и φ, ψ принадлежат $L^2(X,\mu)$, откуда следует, что как функции от (x,y) они принадлежат $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$, то g тоже принадлежит $L^2(X\times X,\mu\times\mu)$. Надо проверить, что $g \in L^2_{00}$. При почти всех x

$$\int_X g(x,y)\,d\mu(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(y) - \int_X \varphi(x)\,d\mu(y) - \int_X \psi(y)\,d\mu(y)$$
$$= \varphi(x) - \varphi(x) - 0 = 0$$

($\int \psi\,d\mu = 0$, ибо ψ как функция от одной переменной принадлежит $L^2_0(X,\mu)$). Аналогично, $\int g(x,y)\,d\mu(x) = 0$ при почти всех y.

Все слагаемые в (32) инвариантны относительно $U_T\times U_T$. Для констант это очевидно. Для функции $f \in L^2_{0x}$ мы имеем $f(x,y) =$ некоторой $\varphi(x)$; поэтому

$$f(Tx,Ty) = \varphi\,(\text{первый элемент пары } (Tx,Ty)) = \varphi(Tx),$$

чем доказано, что $U_{T\times T}f \in L^2_{0x}$. Мы видим также, что по существу $U_{T\times T}$ действует на L^2_{0x} как U_T (более подробно, при естественном унитарном изоморфизме $L^2_{0x} \cong L^2(X,\mu)$ оператор $U_{T\times T}|L^2_{0x}$ переходит в U_T). То же самое верно для L^2_{0y}. Наконец, L^2_{00} является ортогональным дополнением к линейному подпространству $\mathbb{C}\oplus L^2_{0x}\oplus L^2_{0y}$, а так как последнее инвариантно относительно унитарного оператора $U_{T\times T}$, то его ортогональное дополнение также инвариантно.

Функциональными моделями для L^2_{0x}, L^2_{0y} и для ограничений оператора $U_{T\times T}$ на эти подпространства, конечно, служат

$L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$ и прежний оператор V. Новой для нас будет "предварительная" модель для $L^2_{00}(X \times X, \mu \times \mu)$ и для оператора $U_{T\times T}|L^2_{00}$. Этой моделью служит $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$, причем $U_{T\times T}$ представляется следующим оператором $\mathbb{V}$:

$$(\mathbb{V}\varphi)(z, w) = zw\varphi(z, w)$$

(который, конечно, унитарен, ибо $|zw| = 1$).

Приступим к построению такого унитарного изоморфизма

$$\mathbb{W}\colon L^2_{00}(X \times X, \mu \times \mu) \to L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma),$$

что $\mathbb{W}(U_{T\times T}|L^2_{00})\mathbb{W}^{-1} = \mathbb{V}$.

Пусть $\{f_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированный базис в $L^2_0(X, \mu)$ и $\varphi_i = Wf_i$ (где W, как и раньше, — такой унитарный изоморфизм $W\colon L^2_0(X, \mu) \to L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$, что $W(U_T|L^2_0(X, \mu))W^{-1} = V$). φ_i — ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$. Проверим, что $\{f_i(x)f_j(y);\ i, j \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированный базис пространства $L^2_{00}(X \times X, \mu \times \mu)$ и $\{\varphi_i(z)\varphi_j(w);\ i, j \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$.

Здесь мы снова почти на каждом шагу используем теорему Фубини. Я не буду указывать, где на самом деле она используется, потому что это совершенно очевидно.

Функции $f_i(x)f_j(y) \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$:

$$\begin{aligned}\iint |f_i(x)f_j(y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y)& \\ = \int |f_i(x)|^2\, d\mu(x) \cdot \int |f_j(y)|^2\, d\mu(y) &= 1 \cdot 1 = 1. \qquad (35)\end{aligned}$$

Точнее говоря, они лежат в $L^2_{00}(X \times X, \mu \times \mu)$. Например, при любом фиксированном y

$$\int f_i(x)f_j(y)\, d\mu(x) = f_j(y) \int f_i(x)\, d\mu(x) = f_j(y) \cdot 0 = 0.$$

$\{f_i(x)f_j(y),\ i, j \in \mathbb{N}\}$, — ортонормированная система функций в $L^2_{00}(X \times X, \mu \times \mu)$: (35) означает, что $\|f_i(x)f_j(y)\| = 1$, и если $i \neq k$ или $j \neq l$, то

$$\begin{aligned}\langle f_i(x)f_j(y), f_k(x)f_l(y)\rangle &= \iint f_i(x)f_j(y)\overline{f_k(x)f_l(y)}\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &= \int f_i(x)\overline{f_k(x)}\, d\mu(x) \cdot \int f_j(y)\overline{f_l(y)}\, d\mu(y),\end{aligned}$$

где по крайней мере один из множителей равен 0.

Остается проверить, что нет такой функции $g(x,y)\in L^2_{00}(X\times X, \mu\times\mu)$, которая была бы ортогональна ко всем $f_i(x)f_j(y)$. Положим $h_j(x)=\int g(x,y)\overline{f_j(y)}\,d\mu(y)$. h_j определена при почти всех x и является измеримой функцией от x; как обычно, доказывается, что $h_j\in L^2(X,\mu)$ (промежуточный шаг: почти всюду

$$|h_j(x)|^2\leqslant\int|g(x,y)|^2\,d\mu(y)\cdot\|f_j\|^2=\int|g(x,y)|^2\,d\mu(y)\ ).$$

Точнее говоря, $h_j\in L^2_0(X,\mu)$:

$$\begin{aligned}\int h_j(x)d\mu(x)&=\iint g(x,y)\overline{f_j(y)}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\&=\int\overline{f_j(y)}\left(\int g(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\mu(y)\\&=\int\overline{f_j(y)}\cdot 0\,d\mu(y)=0.\end{aligned}$$

Теперь для всех i

$$\begin{aligned}\langle h_j,f_i\rangle&=\int h_j(x)\overline{f_i(x)}\,d\mu(x)\\&=\iint g(x,y)\overline{f_i(x)f_j(y)}\,d\mu(x)\,d\mu(y)=0,\end{aligned}$$

ибо g ортогональна ко всем $f_i(x)f_j(y)$. Поскольку $\{f_i\}$ — базис в $L^2_0(X,\mu)$, то $h_j=0$. Значит, для почти всех x и всех j

$$\int g(x,y)\overline{f_j(y)}d\mu(y)=0,$$

т. е. функция $y\mapsto g(x,y)$ (которая принадлежит $L^2_0(X,\mu)$ при почти всех x) ортогональна всем $f_j(y)$. Поскольку $\{f_j\}$ — базис, то получается, что (при почти всех x) $g(x,y)=0$ для почти всех y. Тем самым доказано, что $g(x,y)=0$ почти всюду.

Так же можно доказать, что $\{\varphi_i(z)\varphi_j(w)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\mu\times\mu)$ (это доказательство даже несколько короче, так как не надо заботиться о средних значениях).

Определим теперь $\mathbb{W}\colon L^2_{00}(X\times X,\mu\times\mu)\to L^2(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\sigma\times\sigma)$ как линейный оператор, переводящий ортонормированный базис $\{f_i(x)f_j(y)\}$ в ортонормированный базис $\{\varphi_i(z)\varphi_j(w)\}$:

$$\mathbb{W}(f_i(x)f_j(y))=\varphi_i(z)\varphi_j(w).$$

Ясно, что это унитарный линейный оператор. Нам надо доказать, что

$$\mathbb{W}\left(U_{T\times T}|L^2_{00}\right)\mathbb{W}^{-1}=\mathbb{V}.$$

Известно, очевидно и т.д., что (ограниченный) линейный оператор A в гильбертовом пространстве однозначно определяется своими “матричными элементами” $\langle Ae_i, e_j\rangle$ относительно любого ортонормированного базиса $\{e_i\}$ этого пространства. (Это равносильно утверждению, что если все $\langle Ae_i, e_j\rangle = 0$, то $A = 0$. Но если при фиксированном i оказывается, что $\langle Ae_i, e_j\rangle = 0$ при всех j, то $Ae_i = 0$ ($\{e_j\}$ — базис!). А если все $Ae_i = 0$, то $A = 0$.) Значит, достаточно доказать, что для всех i, j, k, l

$$\begin{aligned}&\big\langle \mathbb{W}\big(U_{T\times T}|L^2_{00}\big)\mathbb{W}^{-1}\varphi_i(z)\varphi_j(w), \varphi_k(z)\varphi_l(w)\big\rangle\\&\qquad= \langle \mathbb{V}\varphi_i(z)\varphi_j(w), \varphi_k(z)\varphi_l(w)\rangle.\end{aligned}$$

Левая часть равна

$$\begin{aligned}&\big\langle \big(U_{T\times T}|L^2_{00}\big)\mathbb{W}^{-1}\varphi_i(z)\varphi_j(w), \mathbb{W}^{-1}\varphi_k(z)\varphi_l(w)\big\rangle\\
&\quad= \big\langle \big(U_{T\times T}|L^2_{00}\big) f_i(x)f_j(y), f_k(x)f_l(y)\big\rangle\\
&\quad= \int_X\int_X f_i(T(x))f_j(T(y))\overline{f_k(x)f_l(y)}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&\quad= \int_X f_i(T(x))\overline{f_k(x)}\,d\mu(x)\cdot\int_X f_j(T(y))\overline{f_l(y)}\,d\mu(y)\\
&\quad= \langle U_T f_i, f_k\rangle\langle U_T f_j, f_l\rangle.\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}&\langle \mathbb{V}\varphi_i(z)\varphi_j(w), \varphi_k(z)\varphi_l(w)\rangle\\
&\quad= \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} zw\varphi_i(z)\varphi_j(w)\overline{\varphi_k(z)\varphi_l(w)}\,d\sigma(z)\,d\sigma(w)\\
&\quad= \int_{\mathbb{S}^1} z\varphi_i(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\sigma(z)\cdot\int_{\mathbb{S}^1} w\varphi_j(w)\overline{\varphi_l(w)}\,d\sigma(w)\\
&\quad= \langle V\varphi_i, \varphi_j\rangle\langle V\varphi_k, \varphi_l\rangle = \langle U_T f_i, f_k\rangle\langle U_T f_j, f_l\rangle,\end{aligned}$$

и все доказано.

§ 7. Мера, индуцированная при отображении из другой меры

Содержание этого параграфа, в принципе, хорошо известно. Но для некоторых читателей оно может оказаться не столь хорошо известным (или забытым) — поэтому я и счел целесообразным написать этот параграф.

Пусть $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ — пространство с конечной мерой[28], т. е. $\mathfrak{B}$ — сигма-алгебра некоторых подмножеств X и μ — функция $\mu\colon \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, имеющая известные свойства, резюмируемые словами "сигма-аддитивная функция множеств с конечными неотрицательными значениями". (Обычно сигма-алгебра $\mathfrak{B}$ предполагается полной в том смысле, что если $A \in \mathfrak{B}$ и $\mu(A) = 0$, то все подмножества A тоже принадлежат $\mathfrak{B}$. Когда X снабжено "хорошей" топологией, то имеется другая возможность: $\mathfrak{B}$ часто является сигма-алгеброй борелевских множеств.) Пусть дано множество Y и сюръективное отображение (отображение "на") $F\colon X \to Y$. Тогда можно снабдить Y структурой пространства с мерой $(Y, \mathfrak{B}', \mu')$, определяя $\mathfrak{B}'$ как систему тех множеств B, прообразы которых $F^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$, а $\mu'\colon \mathfrak{B}' \to \mathbb{R}_+$ — как $\mu'(B) = \mu(F^{-1}(B))$. Почти очевидно, что $\mathfrak{B}'$ — сигма-алгебра и μ' — мера[29]. (Если сигма-алгебра $\mathfrak{B}$ полна в указанном смысле, то $\mathfrak{B}'$ тоже полна: если $A \in \mathfrak{B}'$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$, то $F^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$, $\mu(F^{-1}(A)) = 0$ и $F^{-1}(B) \subset F^{-1}(A)$; ввиду полноты $\mathfrak{B}$, $F^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$, а это означает, что $B \in \mathfrak{B}'$.) Очевидным обозначением для μ' является $\mu \circ F^{-1}$; часто употребляется также обозначение $F_*\mu$. Здесь я буду пользоваться последним. Мера $F_*\mu$ называется мерой, индуцированной на пространстве Y при отображении F из меры μ.

Функция $f\colon Y \to \mathbb{C}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого борелевского подмножества $B \subset \mathbb{C}$ множество $f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}'$. Это означает, что $F^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathfrak{B}$, т. е. что

[28] Нам нужен только случай конечной меры, так что мы можем им ограничиться. Модификации для случая бесконечной меры более или менее очевидны, но для них потребовалось бы некоторое место.

[29] Часто бывает, что заранее задана некоторая сигма-алгебра $\mathfrak{B}'$ подмножеств Y и что отображение F измеримо как отображение одного "измеримого пространства" (пространства с сигма-алгеброй подмножеств) в другое. Тогда определяют только μ' (так же, как и выше). Заметим, что в этом случае $\mathfrak{B}'$ тоже состоит из множеств с измеримыми прообразами, но могут существовать множества с измеримыми прообразами, не принадлежащие $\mathfrak{B}'$. Нам этот вариант не понадобится.

функция $f \circ F$ на X измерима. Проверим, что в этом случае справедлива формула

$$\int_Y f\, d(F_*\mu) = \int_X (f \circ F)\, d\mu \tag{36}$$

с дополнительным примечанием: при написании этой формулы имеется в виду, что интеграл в одной из сторон этой формулы существует; это гарантирует существование интеграла в другой стороне формулы. Проверка проводится в несколько шагов.

Сперва рассмотрим тот случай, когда f — "простая" функция $f = \sum f_i \chi_{A_i}$, где f_i — некоторые числа и χ_{A_i} — характеристические (индикаторные) функции некоторых множеств $A_i \in \mathfrak{B}'$. Тогда $f \circ F$ — тоже сумма характеристических функций некоторых множеств с некоторыми множителями, оба интеграла в (36) существуют и

$$\begin{aligned} \int_Y f d(F_*\mu) &= \sum f_i (F_*\mu)(A_i) \\ &= \sum f_i \mu(F^{-1}(A_i)) = \int_X \sum f_i \chi_{F^{-1}(A_i)}\, d\mu. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\chi_{F^{-1}(A_i)} = \chi_{A_i} \circ F$ ($x \in F^{-1}(A_i)$ тогда и только тогда, когда $F(x) \in A_i$); значит,

$$\sum f_i \chi_{F^{-1}(A_i)} = \sum f_i \chi_{A_i} \circ F = f \circ F.$$

Теперь рассмотрим тот случай, когда f — ограниченная измеримая функция на Y. Любую такую функцию можно равномерно приблизить "простыми" функциями, и оба интеграла $\int_Y f\, d(F_*\mu)$ и $\int_X (f \circ F)\, d\mu$ являются пределами соответствующих интегралов от этих приближающих функций. Тем самым формула (36) доказана для равномерно ограниченных измеримых функций.

Заметим, что в обоих рассмотренных выше случаях нам не надо специально заботиться о сходимости интегралов в (36) — они существуют автоматически.

Пусть, далее, функция $f \geqslant 0$ является измеримой и неограниченной. Обозначим через f_N ее "ограничение" ("срезку")

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N, \\ N, & \text{если } f(x) > N. \end{cases}$$

По определению, $\int_Y f(x)\, d(F_*\mu) = \lim_{N\to\infty} \int_Y f_N(x)\, d(F_*\mu)$, где предел может быть бесконечным. Очевидно, $(f \circ F)_N = f_N \circ F$, так что

$$\int_Y f(x)\,d(F_*\mu) = \lim_{N\to\infty}\int_Y f_N(x)\,d(F_*\mu)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_X (f_N\circ F)\,d\mu = \int_X (f\circ F)\,d\mu,$$

где первый и последний интегралы оба конечны или оба бесконечны.

Пусть f — измеримая функция с вещественными значениями. Обозначим

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0,\end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)>0.\end{cases}$$

Тогда функции $f_\pm$ измеримы и $f = f_+ + f_-$. Если хотя бы один из двух интегралов $\int_Y f_+\,d(F_*\mu)$ и $\int_Y |f_-|\,d(F_*\mu)$ конечен, то мы определяем $\int_Y f\,d(F_*\mu)$ как их разность (причем в том случае, когда один из этих двух интегралов бесконечен, а другой конечен, мы полагаем

$$\infty - \text{конечное число} = \infty, \qquad \text{конечное число} - \infty = -\infty).$$

Если оба интеграла бесконечны, то $\int_Y f\,d(F_*\mu)$ не определен. Очевидно, $(f\circ F)_+ = f_+\circ F$, $(f\circ F)_- = f_-\circ F$, и так как мы уже знаем, что $\int_Y f_+\,d(F_*\mu) = \int_X (f\circ F)_+\,d\mu$, где оба интеграла одновременно конечны или бесконечны, и так как аналогичное утверждение имеет место для интегралов от $(f\circ F)_-$ и $f_-\circ F$, то мы приходим к формуле (36) вместе со сделанным сразу после нее дополнительным примечанием.

Наконец, пусть f — измеримая функция с комплексными значениями. Тогда $f = g + ih$ с некоторыми вещественно-значными измеримыми функциями g и h. Мы определяем $\int_Y f\,d(F_*\mu) = \int_Y g\,d(F_*\mu) + i\int_Y h\,d(F_*\mu)$, в предположении, что это имеет смысл, т. е. что существуют оба интеграла в правой части и хотя бы один из них конечен. Применяя (36) к интегралам от g и h, мы получаем формулу (36) для f с тем же самым дополнительным примечанием. (Что касается последнего, заметим, что: а) интегралы $\int_Y g\,d(F_*\mu)$ и $\int_X (g\circ F)\,d\mu$ одновременно существуют или не существуют, а когда они существуют, то они оба конечны или бесконечны; b) то же самое относится и к интегралам от h и $h \circ F$.)

В § 8 нам понадобится, что если две (как обычно, конечные) меры μ и ν на X эквивалентны, то меры $F_*\mu$ и $F_*\nu$ на Y тоже эквивалентны. Достаточно доказать, что если $\nu \ll \mu$, то $F_*\nu \ll F_*\mu$. Здесь удобно обратиться к тому определению абсолютной непрерывности, в котором используются множества меры 0. Пусть $A \in \mathfrak{B}'$ и $(F_*\mu)(A) = 0$. Последнее означает, что $\mu(F^{-1}(A)) = 0$. Так как $\nu \ll \mu$, то $\nu(F^{-1}(A)) = 0$, а это и означает, что $(F_*\nu)(A) = 0$.

Мы применим понятие индуцированной меры к случаю, когда $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $Y = \mathbb{S}^1$, F является "отображением умножения" m, определенным как

$$m\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \qquad m(z, w) = zw,$$

и μ является прямым произведением $\sigma \times \sigma$ конечной меры σ, определенной на $\mathbb{S}^1$, на себя. (σ будет некоторой спектральной мерой.) В этом случае индуцированная мера $m_*(\sigma \times \sigma)$ обозначается через $\sigma * \sigma$ и называется сверткой[30]. Повторим, что[31]

$$\begin{gathered}
(\sigma * \sigma)(A) = (\sigma \times \sigma)(m^{-1}(A)), \\
\int_{\mathbb{S}^1} f\, d(\sigma * \sigma) = \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} (f \circ m)\, d(\sigma \times \sigma), \\
\int_{\mathbb{S}^1} f(z)\, d(\sigma * \sigma)(z) = \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} f(\zeta\omega)\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega).
\end{gathered} \tag{37}$$

Конечно, здесь предполагается измеримость множества A по мере $\sigma * \sigma$ и интегрируемость функции f по той же мере. Это эквивалентно измеримости множества $m^{-1}(A)$ и интегрируемости функции $(\zeta, \omega) \mapsto f(\zeta\omega)$ по мере $\sigma \times \sigma$.

Желательно было бы знать, что мера $\sigma * \sigma$ является обычной мерой Лебега–Стилтьеса[32] или, говоря точнее, что она станет

[30] В функциональном (или гармоническом) анализе это понятие определяется во много более общей ситуации. Я рассматриваю только специальный случай, который нам понадобится в § 8.

[31] Отныне в тех случаях, когда приходится иметь дело одновременно с $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, я обычно буду обозначать точки тора греческими буквами (ζ, ω), чтобы подчеркнут их отличие от точек окружности $\mathbb{S}^1$.

[32] В теореме Герглотца молчаливо подразумевается, что спектральная мера σ является мерой Лебега–Стилтьеса. Вообще, обычно в тех случаях, когда речь идет о мере на $\mathbb{S}^1$, она является мерой Лебега–Стилтьеса.

такой мерой, если, "разрезав" окружность $\mathbb{S}^1$, перейти к отрезку $[0, 2\pi)$. Определение меры Лебега–Стилтьеса λ выглядит совсем иначе, нежели наше определение $\sigma * \sigma$. Начинают с неубывающей функции ("функции распределения"), затем определяют меру λ интервалов, затем меру открытых и замкнутых множеств, и наконец определяют λ-измеримое множество как множество A, которое для любого $\varepsilon > 0$ можно так приблизить "сверху" открытым множеством $U \supset A$ и "снизу" — замкнутым множеством $F \subset A$, что $\lambda(U) - \lambda(F) < \varepsilon$; для измеримого A определяют $\lambda(A) = \sup_{F \subset A} \lambda(F) = \inf_{U \supset A} \lambda(U)$. Легко видеть, что мера λ, определенная на некоторой полной сигма-алгебре $\mathfrak{B}'$ подмножеств интервала, будет мерой Лебега–Стилтьеса, если $\mathfrak{B}'$ содержит все замкнутые множества (значит, и все множества типа F_σ) и если для любого множества $A \in \mathfrak{B}'$ существует такое F_σ-множество $B \subset A$, что $\mu(A \setminus B) = 0$. Проверим, что мера $\sigma * \sigma$ и соответствующая сигма-алгебра $\mathfrak{B}'$ имеют эти свойства.

Во-первых, сигма-алгебра $\mathfrak{B}'$ — полная. Действительно, если мера множества $A \in \mathfrak{B}'$ равна нулю и $B \subset A$, то $m^{-1}(B) \subset m^{-1}(A)$, $(\sigma \times \sigma)m^{-1}(A) = 0$, и множество $m^{-1}(B) \subset m^{-1}(A)$ принадлежит сигма-алгебре $\sigma \times \sigma$-измеримых множеств как подмножество множества меры 0; отсюда следует, что $B \in \mathfrak{B}'$. Во-вторых, раз отображение m непрерывно, то прообразы всех борелевских множеств, не только замкнутых, являются борелевскими множествами и поэтому $(\sigma \times \sigma)$-измеримы. Теперь я докажу, что если $A \in \mathfrak{B}'$, то существует такое F_σ-множество $B \subset A$, что $(\sigma * \sigma)(B) = (\sigma * \sigma)(A)$. Пусть $C = m^{-1}(A)$. Будучи $(\sigma \times \sigma)$-измеримым, оно содержит F_σ-подмножество D той же меры. Мы можем представить D как объединение $\bigcup_n D_n$ замкнутых множеств, которые компактны, поскольку компактен тор. Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен, в частности, замкнут. Стало быть, все $m(D_n)$ замкнуты, и если взять $B = m(D) = \bigcup_n m(D_n)$, то B будет F_σ-множеством, содержащимся в A. Очевидно, $D \subset m^{-1}(B) \subset C$, и поскольку $(\sigma \times \sigma)(D) = (\sigma \times \sigma)(C)$, то множество $m^{-1}(B)$ имеет ту же меру, что и $(\sigma \times \sigma)(C)$. Но $(\sigma * \sigma)(B) = (\sigma \times \sigma)m^{-1}(B)$ и $(\sigma * \sigma)(A) = (\sigma \times \sigma)(C)$. Поэтому $(\sigma * \sigma)(B) = (\sigma * \sigma)(A)$.

В качестве примера докажем, что в нашем случае (когда мера σ непрерывна) свертка $\sigma * \sigma$ тоже непрерывна. Для любой точки $a \in \mathbb{S}^1$

$$(\sigma * \sigma)(\{a\}) = (\sigma \times \sigma)(m^{-1}(\{a\})) = (\sigma \times \sigma)(\{(\zeta, \omega);\ \zeta\omega = a\})$$
$$= (\sigma \times \sigma)\left(\left\{(\zeta, \omega);\ \omega = \frac{a}{\zeta}\right\}\right).$$

Но для любой кривой $L \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ вида $\omega = W(\zeta)$ мы имеем $(\sigma \times \sigma)(L) = 0$, потому что (Фубини!)

$$(\sigma \times \sigma)(L) = \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \chi_L(\zeta, \omega)\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega)$$
$$= \int_{\mathbb{S}^1} \left(\int_{\mathbb{S}^1} \chi_L(\zeta, \omega)\, d\sigma(\omega)\right) d\sigma(\zeta)$$
$$= \int_{\mathbb{S}^1} \sigma(\{W(\zeta)\})\, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^1} 0\, d\sigma(\zeta) = 0.$$

Сказанное доказывает также, что

$$\text{для диагонали } D = \{(\zeta, \omega);\ \zeta = \omega\} \quad (\sigma \times \sigma)(D) = 0. \tag{38}$$

§ 8. Спектральная кратность автоморфизма $T \times T$

В этом параграфе мы будем иметь дело с нашей "предварительной" функциональной моделью, точнее, с моделями

$$(L^2(\mathbb{S}^1, \sigma), V) \text{ для } U_T \text{ в } L_0^2(X, \mu) \text{ и для } U_{T\times T}|L_{0x},\ U_{T\times T}|L_{0y} \tag{39}$$

и с моделью

$$(L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma), \mathbb{V}) \text{ для } U_{T\times T} \text{ в } L_{00}^2(X \times X, \mu \times \mu). \tag{40}$$

Так как мы собираемся использовать свойство b) из § 2, нам надо перефразировать его в терминах этих моделей. Для (39) перефразировка очевидна — слабая сходимость сохраняется при унитарном изоморфизме (ибо она определяется в терминах скалярных произведений). Поэтому $V^{l_n} \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\mathrm{id}\ + V)$, т. е. для любых $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$

$$\int_{\mathbb{S}^1} z^{l_n} \varphi(z)\overline{\psi(z)}\, d\sigma(z) \to \int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{2}(1+z)\varphi(z)\overline{\psi(z)}\, d\sigma(z). \tag{41}$$

Что влечет за собой b), т. е. (41), для "предварительной" модели (40)? Как мы увидим,

$$\mathbb{V}^{l_n} \xrightarrow{w} \text{ умножение на } \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega), \tag{42}$$

т. е.

$$\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} \zeta^{l_n}\omega^{l_n}\varphi_1(\zeta,\omega)\overline{\varphi_2(\zeta,\omega)}\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega)$$
$$\to \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega)\varphi_1(\zeta,\omega)\overline{\varphi_2(\zeta,\omega)}\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega) \tag{43}$$

при всех $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$.

(43) тривиально, когда каждая из функций φ_1 и φ_2 является произведением двух функций, одна из которых зависит только от ζ, другая — только от ω. Действительно, если

$$\varphi_1 = \psi_1(\zeta)\chi_1(\omega), \qquad \varphi_2 = \psi_2(\zeta)\chi_2(\omega),$$

то интеграл в левой части (43) равен

$$\int_{\mathbb{S}^1} \zeta^{l_n}\psi_1(z)\overline{\psi_2(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) \int_{\mathbb{S}^1} \omega^{l_n}\chi_1(\omega)\overline{\chi_2(\omega)}\, d\sigma(\omega).$$

Согласно (41), при $l_n \to \infty$ последнее выражение стремится к

$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{2}(1+\zeta)\psi_1(\zeta)\overline{\psi_2(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) \int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{2}(1+\omega)\chi_1(\omega)\overline{\chi_2(\omega)}\, d\sigma(\omega),$$

что равно интегралу в правой части (43).

Это рассуждение наталкивается на один “подводный камень”: можно ли утверждать, что функции $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ интегрируемы с квадратом? Обычно в подобных случаях приходится использовать теорему Фубини, возможно, вместе с какими-то другими соображениями, основанными на каких-то специфических особенностях рассматриваемого вопроса. Но мы можем избежать подобного обсуждения. Для нашей цели можно ограничиться тем случаем, когда с самого начала функции $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ предполагаются непрерывными. Тогда не возникает вопроса о корректности предыдущего рассуждения.

Если наше утверждение о сходимости (43) имеет место для функций вида $\psi(\zeta)\chi(\omega)$ (пусть даже только с непрерывными ψ и χ), то оно имеет место и для конечных линейных комбинаций таких функций. Множество $\mathcal{F}$ таких комбинаций (даже тех, в которых сомножители непрерывны) плотно в $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$. В § 5 мы видели, что если имеется такая последовательность $B_n(\psi, \chi)$ равномерно (по n) ограниченных билинейных функционалов, что $B_n(\psi, \chi) \to 0$ при всех ψ, χ из некоторого плотного множества $\mathcal{F}$, то $B_n(\psi, \chi) \to 0$ при всех ψ, χ. Поэтому нам надо проверить равномерную ограниченность билинейных функционалов

$$B_n(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} \left((\zeta\omega)^{l_n} - \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega)\right)\varphi_1(\zeta, \omega)\overline{\varphi_2(\zeta, \omega)}\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega).$$

Доводы здесь аналогичны тем, которые были использованы в § 5 для рассматривавшихся там B_n. Так как $|\zeta| = |\omega| = 1$, то

$$\left|(\zeta\omega)^{l_n} - \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega)\right| \leqslant |\zeta\omega|^{l_n} + \frac{1}{4}(1+|\zeta|)(1+|\omega|) = 1 + \frac{1}{4}(1+1)(1+1) = 2,$$

$$|B_n(\varphi_1, \varphi_2)| \leqslant 2\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} |\varphi_1||\varphi_2| d(\sigma \times \sigma) = 2\langle|\varphi_1|, |\varphi_2|\rangle \leqslant 2\||\varphi_1|\|\,\||\varphi_2|\| = 2\|\varphi_1\|\,\|\varphi_2\|.$$

В дальнейшем нам понадобятся гильбертовы пространства симметрических и антисимметрических функций на торе $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$:

$$H_s = \{f \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma);\ f(\zeta, \omega) = f(\omega, \zeta)\ \forall\, (\zeta, \omega) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\},$$

$$H_a = \{f \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma);\ f(\zeta, \omega) = -f(\omega, \zeta)\ \forall\, (\zeta, \omega) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\}.$$

Заметим, что $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma) = H_s \oplus H_a$ (ортогональная прямая сумма). Действительно, ввиду равенства

$$f(\zeta, \omega) = \frac{1}{2}(f(\zeta, \omega) + f(\omega, \zeta)) + \frac{1}{2}(f(\zeta, \omega) - f(\omega, \zeta))$$

(где первое слагаемое, очевидно, лежит в H_s, а второе — в H_a) ясно, что $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma) = H_s + H_a$. Слагаемые пересекаются только по $\{0\}$: если $f \in H_s \cap H_a$, то $f(\zeta, \omega)$ равняется одновременно $f(\omega, \zeta)$ и $-f(\omega, \zeta)$, откуда $f = 0$. Иными словами, $L^2 = H_s \oplus H_a$ в алгебраическом смысле. Слагаемые здесь ортогональны: если $f \in H_s$, $g \in H_a$, то

$$\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} f(\zeta, \omega)\overline{g(\zeta, \omega)}\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega) = -\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} f(\omega, \zeta)\overline{g(\omega, \zeta)}\, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega).$$

В последнем интеграле мы можем поменять обозначения переменных, что дает

$$-\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} f(\zeta, \omega)\overline{g(\zeta, \omega)}\, d\sigma(\omega)\, d\sigma(\zeta).$$

Интеграл здесь отличается от исходного интеграла только порядком интегрирования по $\sigma(\zeta)$ и $\sigma(\omega)$. Порядок можно обратить, и получится, что исходный интеграл равен самому себе со знаком минус. Значит, этот интеграл равен нулю. Из того, что $L^2 = H_s \oplus H_a$ и $H_s \perp H_a$, следует, что H_s, соответственно H_a, является ортогональным дополнением к H_a, соответственно к H_s. Отсюда следует также замкнутость H_s и H_a — ортогональные дополнения всегда замкнуты. (Конечно, замкнутость H_s, H_a легко доказать и непосредственно.)

Очевидно, что H_s и H_a инвариантны относительно $\mathbb{V}$ (в том смысле, что $\mathbb{V}H_s = H_s$, $\mathbb{V}H_a = H_a$). Действительно, $(\zeta\omega)^{\pm 1} f(\zeta, \omega)$ имеет те же "свойства симметрии", что и $f(\zeta, \omega)$.

Замечание об обозначениях: через $1_{\zeta,\omega}$ обозначается функция от (ζ, ω), тождественно равная 1. Подобного рода обозначение используется, чтобы отличить эту функцию от тождественно равной 1 функции 1_z от переменной z или обе эти функции — от числа 1.

Теперь мы можем анонсировать нашу программу. Мы докажем, что

$$H_s = Z(1) = Z^{\mathbb{V}}(1_{\zeta,\omega}), \tag{44}$$

$$H_a = Z(\zeta - \omega), \tag{45}$$

$$\sigma_{1_{\zeta,\omega}} = \sigma * \sigma, \tag{46}$$

$$\sigma_{\zeta-\omega} \cong \sigma * \sigma, \tag{47}$$

$$\sigma \perp \sigma * \sigma. \tag{48}$$

Отсюда будет следовать, что

$$\begin{aligned} &L_0^2(X \times X, \mu \times \mu) \\ &\quad \cong L^2(\mathbb{S}^1, \sigma) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \sigma) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma). \end{aligned} \tag{49}$$

Ясно, что если меры $\nu_1 \perp \nu_2$, то ортогональная прямая сумма

$$L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \nu_2) \cong L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1 + \nu_2),$$

причем при этом изоморфизме оператор $V \oplus V$ (эти “слагаемые” V действуют обычным образом на первом и втором слагаемом в стоящей слева прямой сумме) переходит в оператор V, действующий на третьем L^2. Поэтому

$$L_0^2(X \times X, \mu \times \mu) \cong L^2(\mathbb{S}^1, \sigma + \sigma * \sigma) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \sigma + \sigma * \sigma)$$
$$(\oplus \text{ — ортогональная прямая сумма}).$$

Тем самым доказано, что множеством спектральных кратностей для $U_{T\times T}$ является $\{2\}$[33].

[33] Существенно, что $\sigma \perp \sigma * \sigma$. В противном случае мы имели бы $\sigma = \nu + \nu_1$, $\sigma * \sigma = \nu' + \nu_2$ с некоторыми мерами $\nu \approx \nu'$, $\nu \perp \nu_1$, $\nu \perp \nu_2$, $\nu_1 \perp \nu_2$ (некоторые комментарии по этому поводу будут даны при доказательстве (48)). Тогда получилось бы, что

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{S}^1, \sigma) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma) &\cong L^2(\mathbb{S}^1, \nu) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \nu') \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \nu_2) \\ &\cong L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1 + \nu_2) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \nu) \oplus L^2(\mathbb{S}^1, \nu') \\ &\cong L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1 + \nu_2) \oplus \text{два слагаемых } L^2(\mathbb{S}^1, \nu), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &L_0^2(X \times X, \mu \times \mu) \\ &\quad \cong \text{два слагаемых } L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1 + \nu_2) \oplus \text{четыре слагаемых } L^2(\mathbb{S}^1, \nu) \end{aligned}$$

(прямая сумма $\oplus$ — все время ортогональная). Здесь $\nu_1 + \nu_2 \perp \nu$ и число слагаемых со спектральной мерой $\nu_1 + \nu_2$ отлично от числа слагаемых

Замечание. Если автоморфизм пространства с мерой T эргодичен и U_T имеет дискретный спектр, то

$$(L^2(X, \mu), U_T) \approx (L^2(\mathbb{S}^1, \sigma), V),$$

где мера σ "сконцентрирована" на счетном множестве Λ собственных значений, которое является подгруппой мультипликативной группы $\mathbb{S}^1$. В этом случае оказывается, что $\sigma * \sigma \ll \sigma$ — это просто перефразировка того факта, что произведение двух собственных значений является собственным значением. По этой причине в случае непрерывной меры σ свойство $\sigma * \sigma \ll \sigma$ (когда оно выполняется) может рассматриваться как аналог свойства Λ быть группой. В течение ряда лет в эргодической теории были известны только такие σ, для которых выполняется это свойство. Это привело Колмогорова к вопросу, не верно ли, что для меры σ, возникающей в спектральном разложении оператора U_T для эргодического T, всегда должно быть $\sigma * \sigma \ll \sigma$, т. е. не должен ли для спектра иметь место некоторый аналог "группового свойства".

Точнее говоря, Колмогоров задал вопрос об этом свойстве для так называемой "меры максимального спектрального типа" $\sigma_{\max}$. Последнее понятие относится к общему случаю унитарного оператора U в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Оказывается, что существует однозначно определенный спектральный тип $[\sigma_{\max}]$, такой, что для любой представляющей его меры $\sigma_{\max}$

существует такой элемент $f \in H$, что его спектральная мера
$$\sigma_f \approx \sigma_{\max}, \quad \sigma_g \ll \sigma_{\max} \quad \text{для любого} \quad g \in H.$$

Это объясняет, почему спектральный тип $[\sigma_{\max}]$ называется "максимальным спектральным типом" (и почему принадлежащие ему меры тоже называются максимальными). Если, в обозначениях § 2, $\mathfrak{S}$ состоит из спектральных типов $[\sigma_i]$ для оператора U, т. е. если меры σ_i суть представители всех спектральных типов, то легко доказать, что можно взять $\sigma_{\max} = \sum_i a_i \sigma_i$, где положительные коэффициенты a_i берутся такими, чтобы ряд сходился к конечной мере.

со спектральной мерой ν. Оператор $U_{T \times T}$ представлялся бы при этом обычным образом (V на каждом прямом слагаемом). Это разложение гильбертова пространства имело бы все свойства разложения, описанного в спектральной теореме из § 2, так что множеством спектральных кратностей для $T \times T$ было бы $\{2, 4\}$.

Похоже, Колмогоров подозревал, что (для эргодического T и соответствующего U_T) всегда $\sigma_{\max} * \sigma_{\max} \ll \sigma_{\max}$. (48) показывает, что наше T является противоречащим примером для такого утверждения. (В этом случае легко усмотреть, что $\sigma_{\max} \approx \sigma$.) На самом деле первый противоречащий пример был намного раньше найден на совсем другом пути. Но здесь мы "бесплатно" получаем другой противоречащий пример, занимаясь ответом на вопрос Рохлина.

Приступаем к доказательству (44)–(48).

Прежде всего, если E — такое замкнутое линейное подпространство, что $\mathbb{V}E = E$, то для любого $\varphi \in E$ будет $Z(\varphi) \subset E$ (поскольку линейные комбинации элементов $\mathbb{V}^n\varphi$ принадлежат E, равно как и их пределы). Ясно, что $1_{\zeta,\omega} \in H_s$ и $\zeta - \omega \in H_a$. Поэтому

$$Z(1) \subset H_s, \quad Z(\zeta - \omega) \subset H_a. \tag{50}$$

Теперь, используя (42), мы докажем, что для любого симметрического многочлена $p(\zeta, \omega)$ и любого $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$

$$p(\zeta, \omega)\varphi \in Z(\varphi) = Z^{\mathbb{V}}(\varphi).$$

Симметрический многочлен от двух переменных является многочленом от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1 = \sigma_1(\zeta, \omega) = \zeta + \omega$, $\sigma_2 = \sigma_2(\zeta, \omega) = \zeta\omega$. Умножение на σ_2 — это $\mathbb{V}$, так что

$$\sigma_2^i Z(\varphi) \subset Z(\varphi) \quad \text{для всех} \quad i \in \mathbb{Z} \tag{51}$$

(раз $Z(\varphi)$ инвариантно относительно $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{-1}$). Что же касается умножения на σ_1, это тот решающий шаг, где мы используем (42). Все $\mathbb{V}^{l_n}\varphi \in Z(\varphi)$. Но $V^{l_n}\varphi \xrightarrow{w} \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega)\varphi$ и $Z(\varphi)$ замкнуто относительно слабой сходимости. Значит, $\frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega)\varphi \in Z(\varphi)$. В то же время $(1+\zeta)(1+\omega) = 1 + \zeta + \omega + \zeta\omega = 1 + \sigma_1 + \sigma_2$ и $\varphi, \sigma_2\varphi \in Z(\varphi)$. Получается, что $\sigma_1\varphi \in Z(\varphi)$.

Если $\psi \in Z(\varphi)$, то $Z(\psi) \subset Z(\varphi)$ (любую линейную комбинацию элементов $\mathbb{V}^k\psi$ можно приблизить линейными комбинациями элементов $\mathbb{V}^k\psi'$, где ψ' — некоторая линейная комбинация элементов $\mathbb{V}^m\varphi$, приближающая ψ). Получается, что $\sigma_1^2\varphi \in Z(\sigma_1\varphi) \subset Z(\varphi)$, и так далее.

Как мы видим,

$$\sigma_1^j\varphi \in Z(\varphi) \quad \text{для всех неотрицательных целых чисел } j.$$

После этого можно сказать (со ссылкой на (51)), что

$$\sigma_2^i \sigma_1^j \varphi \in Z(\varphi) \quad \text{для всех неотрицательных целых чисел} \quad i, j.$$

Любой симметрический многочлен $p(\zeta, \omega)$ является линейной комбинацией некоторых $\sigma_1^i \sigma_2^j$, и мы приходим к включению $p(\zeta, \omega)\varphi \in Z(\varphi) = Z^{\mathbb{V}}(\varphi)$.

В случае одной переменной z мы уже дали название "тригонометрические полиномы" многочленам от z и $\frac{1}{z}$. Аналогично, мы будем называть многочлены от $\zeta, \frac{1}{\zeta}, \omega, \frac{1}{\omega}$ "тригонометрическими полиномами". (Если положить $\zeta = e^{i\lambda}$, $\omega = e^{i\mu}$, то наши "тригонометрические полиномы" действительно станут тригонометрическими полиномами от λ, μ.) Любой тригонометрический полином $t(\zeta, \omega)$ может быть записан в виде $t(\zeta, \omega) = \frac{1}{(\zeta\omega)^n} p(\zeta, \omega)$ с некоторыми многочленом p и числом $n \in \mathbb{Z}_+$. Если функция $t(\zeta, \omega)$ — симметрическая, то многочлен $p(\zeta, \omega)$ — тоже симметрический. Так как $\mathbb{V}Z(\varphi) = Z(\varphi)$, то приходим к выводу, что

$$(\text{симметрический тригонометрический полином от } \zeta, \omega)\varphi \in Z(\varphi). \tag{52}$$

В частности, взяв $\varphi = 1_{\zeta,\omega}$, мы видим, что

$$\text{симметрический тригонометрический полином от } \zeta, \omega \in Z(1). \tag{53}$$

Но

$$\text{симметрические тригонометрические полиномы плотны в } H_s. \tag{54}$$

Действительно, поскольку тригонометрические полиномы плотны в $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$, то для любого $\varphi \in H_s$, $\varepsilon > 0$ имеется такой тригонометрический полином t, что $\|\varphi - t\| < \varepsilon$. Тогда $\frac{1}{2}(t(\zeta, \omega) + t(\omega, \zeta))$ — симметрический тригонометрический полином, а $\varphi(\zeta, \omega) = \frac{1}{2}(\varphi(\zeta, \omega) + \varphi(\omega, \zeta))$. Значит,

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi(\zeta, \omega) - \frac{1}{2}(t(\zeta, \omega) + t(\omega, \zeta))\right\| \\
&\qquad = \left\|\frac{1}{2}(\varphi(\zeta, \omega) + \varphi(\omega, \zeta)) - \frac{1}{2}(t(\zeta, \omega) + t(\omega, \zeta))\right\| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi(\zeta, \omega) - t(\zeta, \omega)\| + \frac{1}{2}\|\varphi(\zeta, \omega) - t(\zeta, \omega)\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Теперь из (50), (53) и (54) следует (44).

Для доказательства (45) нам нужно простое алгебраическое утверждение: каждый антисимметрический многочлен $p(z,w)$[34] имеет вид $q(z,w)(z-w)$, где q — симметрический многочлен. Достаточно доказать это утверждение для однородных многочленов. Пусть $p(z,w)$ — однородный антисимметрический многочлен степени n. Тогда $p(z,w)=w^n p\left(\frac{z}{w},1\right)$. Разделим $p(t,1)$ (как многочлен от t степени n) на $t-1$. Априори при этом может получиться остаток r:

$$p(t,1)=Q(t)(t-1)+r, \tag{55}$$

где Q — некоторый многочлен от t степени $n-1$ и r — остаток. Поскольку $p(z,w)=-p(w,z)$, то

$$w^n p\left(\frac{z}{w},1\right)=-z^n p\left(\frac{w}{z},1\right),$$

и введя новую переменную $t=\frac{z}{w}$, это можно записать как

$$p(t,1)=-t^n p\left(\frac{1}{t},1\right).$$

Используя (55), получаем

$$Q(t)(t-1)+r=-t^n Q\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)-t^n r. \tag{56}$$

Но ведь $t^{n-1}Q\left(\frac{1}{t}\right)$ является многочленом от t и $t\left(\frac{1}{t}-1\right)=1-t$. Стало быть, в правой части (56) стоит

$$-(\text{многочлен от } t)(1-t)-t^n r.$$

При $t=1$ это равняется $-r$. При том же t левая часть (56) равна r, поэтому $r=-r,\ r=0$, и

$$p(t,1)=Q(t)(t-1), \qquad p\left(\frac{z}{w},1\right)=Q\left(\frac{z}{w}\right)\left(\frac{z}{w}-1\right),$$

$$\begin{aligned} p(z,w)=w^n p\left(\frac{z}{w},1\right)&=w^n Q\left(\frac{z}{w}\right)\left(\frac{z}{w}-1\right)=\\ &=w^{n-1}Q\left(\frac{z}{w}\right)w\left(\frac{z}{w}-1\right)=q(z,w)(z-w).\end{aligned}$$

[34]Здесь z и w суть независимые переменные в обычном алгебраическом смысле. Их абсолютные величины не обязаны равняться 1, (z,w) не является точкой $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Поэтому сейчас нет причины использовать греческие буквы.

Здесь $q(z,w) = w^{n-1} Q\left(\frac{z}{w}\right)$ — некоторый многочлен (однородный степени $n-1$). Будучи отношением двух антисимметрических функций $p(z,w)$ и $z-w$, он симметричен.

Применяя это утверждение вместе с (52) к $\varphi = \zeta - \omega$, заключаем, что

$$\{\text{антисимметрические тригонометрические полиномы от } \zeta, \omega\} \subset Z(\zeta - \omega).$$

Но эти тригонометрические полиномы плотны в H_a (аргументы аналогичны тем, которые использовались для симметрических полиномов и H_s; вместо полусуммы мы берем полуразность). Это вместе с (50) доказывает (45).

Доказательство (46) сводится к непосредственному использованию определения оператора $\mathbb{V}$, скалярного произведения в $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$ и (37):

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{V}^n 1_{\zeta,\omega}, 1_{\zeta,\omega} \rangle &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} (\zeta\omega)^n 1 \cdot 1 \, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} (\zeta\omega)^n \, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega) = \int_{\mathbb{S}^1} z^n \, d(\sigma * \sigma)(z).\end{aligned}$$

Доказательство (47) более сложно[35]. Введем следующую меру ν на $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$:

$$\nu(A) = \underbrace{\int \cdots \int}_{A} |\zeta - \omega|^2 \, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega).$$

Мы увидим, что $\sigma_{\zeta-\omega} = m_* \nu$ (где m — по прежнему отображение умножения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$). Из определения индуцированной меры $m_* \nu$ следует, что

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1} \varphi(z)\, d(m_* \nu) &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\zeta\omega)\, d\nu(\zeta,\omega) \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\zeta\omega) |\zeta - \omega|^2 \, d\sigma(\zeta)\, d\sigma(\omega)\end{aligned}$$

[35] Возможно, что изложение в этом месте стало бы более прозрачным, если бы я использовал понятие “функции $f(U)$ от унитарного оператора U”, соответствующей более или менее общей измеримой функции f, определенной на $\mathbb{S}^1$. Это позволило бы интерпретировать произведения $\varphi(\zeta\omega)(\zeta - \omega)$ с $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1, \sigma_{\zeta-\omega})$ как $\varphi(\mathbb{V})\sigma_{\zeta-\omega}$. (Точно так же в предыдущих соображениях о H_s можно было бы интерпретировать $\varphi(\zeta\omega)$ с $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$ как $\varphi(\mathbb{V}) \cdot 1_{\zeta,\omega}$.)

для любой функции φ, определенной на $\mathbb{S}^1$ и интегрируемой (суммируемой) по мере $m_*\nu$, в частности, для любой непрерывной функции. Из (6) с $\mathbb{V}$ вместо U и $\zeta - \omega$ вместо f (т. е. из самого определения $\sigma_{\zeta-\omega}$, основанного на теореме Герглотца) явствует, что

$$\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}(\zeta\omega)^n|\zeta{-}\omega|^2\,d\sigma(\zeta)\,d\sigma(\omega) = \langle \mathbb{V}^n(\zeta{-}\omega), \zeta{-}\omega\rangle = \int_{\mathbb{S}^1} z^n\,d\sigma_{\zeta-\omega}(z).$$

Первый двойной интеграл можно записать как $\int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1}(\zeta\omega)^n\,d\nu = \int_{\mathbb{S}^1} z^n\,d(m_*\nu)$. Отсюда следует, что для любого тригонометрического полинома $t(z)$ (который является конечной линейной комбинацией функций z^n)

$$\int_{\mathbb{S}^1} t(z)\,d(m_*\nu)(z) = \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} t(\zeta\omega)\,d\nu = \int_{\mathbb{S}^1} t(z)\,d\sigma_{\zeta-\omega}(z),$$

и мы видим, что для любой непрерывной функции $f \in C(\mathbb{S}^1)$

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(z)\,d(m_*\nu)(z) = \int_{\mathbb{S}^1} f(z)\,d\sigma_{\zeta-\omega}(z).$$

Таким образом, меры $m_*\nu$ и $\sigma_{\zeta-\omega}$ определяют один и тот же линейный функционал на $C(\mathbb{S}^1)$. Известно, что любая конечная мера μ на $\mathbb{S}^1$ однозначно определяется функционалом $f \mapsto \int_{\mathbb{S}^1} f d\mu$ на $C(\mathbb{S}^1)$ (аналогичное утверждение справедливо для мер на многих других топологических пространствах). Тем самым доказано, что $m_*\nu = \sigma_{\zeta-\omega}$.

Ясно, что мера ν абсолютно непрерывна относительно $\sigma \times \sigma$ и имеет плотность (производную Радона–Никодима)

$$\frac{d\nu}{d(\sigma\times\sigma)}(\zeta,\omega) = |\zeta-\omega|^2.$$

Эта плотность положительна почти всюду относительно $\sigma\times\sigma$ — она обращается в нуль только на диагонали $D = \{(\zeta,\omega);\ \zeta=\omega\}$, а мы видели в § 7, что $(\sigma\times\sigma)(D)=0$, — см. (38). Оттого меры ν и $\sigma\times\sigma$ имеют одни и те же множества меры 0, что означает их эквивалентность.

В § 7 мы видели, что меры, индуцированные из двух эквивалентных мер при одном и том же отображении, эквивалентны. Поэтому (47) следует из тех фактов, что $\sigma * \sigma = m_*(\sigma\times\sigma)$, $\sigma_{\zeta-\omega} = m_*(\nu)$, $\sigma\times\sigma \approx \nu$.

Наконец, надо доказать (48). Это будет сделано от противного. Допустим, что $\sigma \not\ll \sigma * \sigma$. Как известно из теории меры, тогда существуют такие меры ν, ν_1, ν', ν_2, что[36] ν и ν' нетривиальны и

$$\begin{gathered} \sigma = \nu + \nu_1, \quad \sigma * \sigma = \nu' + \nu_2, \\ \nu \approx \nu', \quad \nu_1 \perp \nu, \quad \nu_1 \perp \sigma * \sigma, \quad \nu_2 \perp \nu', \quad \nu_2 \perp \sigma. \end{gathered} \tag{57}$$

Можно перефразировать (57) в более наглядных терминах множеств, являющихся "носителями" этих мер. Существуют такие измеримые множества B, C, что

$$\nu_1(B) = 0, \quad (\sigma * \sigma)(\mathbb{S}^1 \setminus B) = 0, \quad \nu_2(C) = 0, \quad \sigma(\mathbb{S}^1 \setminus C) = 0.$$

Тогда ν является частью меры σ, "сконцентрированной" на множестве $A = B \cap C$, т. е.

$$\nu(E) = \sigma(E) \quad \text{для} \quad E \subset A, \qquad \nu(\mathbb{S}^1 \setminus A) = 0. \tag{58}$$

Кроме того,

$$\begin{array}{llll} \nu'(E) & = (\sigma * \sigma)(E) & \text{для } E \subset A, & \nu'(\mathbb{S}^1 \setminus A) = 0, \\ \nu_1(E) & = \sigma(E) & \text{для } E \subset \mathbb{S}^1 \setminus A, & \nu_1(A) = 0, \\ \nu_2(E) & = (\sigma * \sigma)(E) & \text{для } E \subset \mathbb{S}^1 \setminus A, & \nu_2(A) = 0. \end{array} \tag{59}$$

В самом деле,

$$\nu_1(A) = \nu_1(B \cap C) \leqslant \nu_1(B) = 0, \tag{60}$$

и при $E \subset A$

$$\sigma(E) = (\nu + \nu_1)(E) = \nu(E) + 0 = \nu(E).$$

Что касается второй из формул (58), $\mathbb{S}^1 \setminus A = (\mathbb{S}^1 \setminus B) \cup (\mathbb{S}^1 \setminus C)$, и надо доказать, что $\nu(\mathbb{S}^1 \setminus B) = 0$ и $\nu(\mathbb{S}^1 \setminus C) = 0$. Второе равенство получается непосредственно: $\nu(\mathbb{S}^1 \setminus C) \leqslant \sigma(\mathbb{S}^1 \setminus C) = 0$. Чтобы доказать первое равенство, начнем с ν' и $\sigma * \sigma$: $\nu'(\mathbb{S}^1 \setminus B) \leqslant (\sigma * \sigma)(\mathbb{S}^1 \setminus B) = 0$. Так как $\nu \approx \nu'$, то получается, что $\nu(\mathbb{S}^1 \setminus B) = 0$.

[36] См. [1], § 32, теорема 3 (теорема о лебеговском разложении мер). Мы сперва применяем эту теорему к $\sigma * \sigma$ и σ; это дает нам такие меры ν, ν_1, что $\sigma = \nu + \nu_1$, $\nu_1 \perp \sigma * \sigma$, $\nu \ll \sigma * \sigma$ (так что $\nu_1 \perp \nu$). Затем мы применяем ее к ν и $\sigma * \sigma$; это дает такие ν', ν_2, что $\sigma * \sigma = \nu' + \nu_2$, $\nu_2 \perp \nu$, $\nu' \ll \nu$ (так что $\nu_2 \perp \nu'$). Легко проверить, что меры ν, ν_1, ν', ν_2 удовлетворяют (57).

Равенства в первой строчке (59) доказываются аналогично. Рассмотрим вторую строчку. Второе из стоящих там равенств уже доказано (см. (60)). Если $E \subset \mathbb{S}^1 \setminus A$, то

$$\sigma(E) = (\nu + \nu_1)(E) \leqslant \nu(\mathbb{S}^1 \setminus A) + \nu_1(E) = 0 + \nu_1(E) = \nu_1(E).$$

Третья строчка равенств в (59) доказывается аналогично второй строчке.

Можно рассматривать ν и ν' как эквивалентные меры на A, ν_1 и ν_2 — как меры на $\mathbb{S}^1 \setminus A$. Пространства $L^2(A, \nu)$ и $L^2(\mathbb{S}^1 \setminus A, \nu_1)$, соответственно $L^2(A, \nu')$ и $L^2(\mathbb{S}^1 \setminus A, \nu_2)$, можно естественным образом рассматривать как замкнутые линейные подпространства в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$, соответственно, в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$. Например, в случае $L^2(A, \nu)$ мы просто рассматриваем функцию, принадлежащую $L^2(A, \nu)$, как продолженную на $\mathbb{S}^1$ таким образом, что она равна 0 вне A. (Точнее, элемент функционального гильбертова пространства $L^2(A, \nu)$ — это класс φ функций, любые две из которых совпадают друг с другом почти всюду. Вкладывая $L^2(A, \nu)$ в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$, мы продолжаем эти функции так, как было сказано, и тогда любые два такие продолжения являются представителями образа элемента φ при включении $L^2(A, \nu) \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$.) Кстати, такие же доводы позволяют отождествить $L^2(A, \nu)$, $L^2(A, \nu')$, $L^2(\mathbb{S}^1 \setminus A, \nu_1)$, $L^2(\mathbb{S}^1 \setminus A, \nu_2)$ также и с $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$, $L^2(\mathbb{S}^1, \nu')$, $L^2(\mathbb{S}^1, \nu_1)$, $L^2(\mathbb{S}^1, \nu_2)$.

Пусть $f \in L^2(A, \nu)$; будем теперь рассматривать $L^2(A, \nu)$ как подпространство пространства $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$. Оператор V, действующий в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$, переводит f в функцию, которая тоже принадлежит $L^2(A, \nu)$ (если $f(z) = 0$ вне A, то же верно и для $zf(z)$). Имея дело с пространством $L^2(A, \nu')$, являющимся подпространством в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$, я буду более формален: я буду обозначать включение $L^2(A, \nu') \hookrightarrow L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$ через J. Это линейный изометрический оператор. Его образ $J(L^2(A, \nu'))$ тоже инвариантен относительно оператора V, который теперь является умножением функций из $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$ на их аргумент. До сих пор мы обозначали такие операторы, действующие в различных пространствах, одной и той же буквой V, но теперь это будет неудобно. Обозначим через V_ν ограничение оператора V («прежнего V, действующего в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma)$») на $L^2(A, \nu)$, и через $V_{\nu'}$ — ограничение оператора V (теперь это другой оператор V — оператор V, действующий в $L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$) на $L^2(A, \nu')$. Можно сказать даже более формально: $V_{\nu'}$ — это оператор $(V_{\nu'} f)(z) = zf(z)$ в $L^2(A, \nu')$; его связь с V состоит в том, что $VJ = JV_{\nu'}$.

В § 3 мы уже упомянули (в несколько ином виде) унитарный изоморфизм

$$I\colon L^2(A,\nu) \to L^2(A,\nu') \quad (If)(z) = \sqrt{\rho(z)}f(z), \quad \text{где} \quad \rho = \frac{d\nu}{d\nu'}\,.$$

Очевидно, он переводит V_ν в $V_{\nu'}$, т.е. $V_{\nu'} = IV_\nu I^{-1}$. Но перефразировка (41) свойства b) из § 2 в терминах функциональной модели $(L^2(\mathbb{S}^1, \sigma), V)$ для $(L^2_0(X, \mu), U_T)$ гласит, что $V^{l_n} \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\mathrm{id} + V)$, и тогда то же самое тем более справедливо для ограничения V_ν этого оператора: $V_\nu^{l_n} \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\mathrm{id} + V_\nu)$. Отсюда следует, что $V_{\nu'}^{l_n} \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\mathrm{id} + V_{\nu'})$.

С другой стороны, ввиду (44) и (46) существует унитарный оператор $\mathfrak{W}\colon H_s \to L^2(\mathbb{S}^1, \sigma * \sigma)$, сопрягающий операторы $\mathbb{V}|H_s$ и V. Поэтому оператор $\mathbb{V}|\mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu'))$ унитарно сопряжен с оператором $V_{\nu'}$; это сопряжение осуществляется посредством $\mathfrak{W}^{-1}J$:

$$\mathbb{V}|\mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu')) = \mathfrak{W}^{-1}JV_{\nu'}(\mathfrak{W}^{-1}J)^{-1}.$$

Поэтому l_n-е степени левого оператора слабо сходятся в $\mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu'))$ к соответствующему пределу, т.е. для любых двух функций $\varphi, \psi \in \mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu'))$

$$\langle \mathbb{V}^{l_n}\varphi, \psi\rangle \to \left\langle \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \mathbb{V})\varphi, \psi \right\rangle. \tag{61}$$

Но то же самое верно также и тогда, когда $\varphi \in \mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu'))$ и $\psi \in L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma \times \sigma)$. Действительно, такую функцию ψ можно представить в виде суммы ее двух проекций на подпространство[37] $\mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu'))$ и на ортогональное дополнение к последнему подпространству:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_1 \in \mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu')), \quad \psi_2 \perp W^{-1}J(L^2(A,\nu')).$$

Имеем

$$\langle \mathbb{V}^{l_n}\varphi, \psi_1\rangle \to \left\langle \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \mathbb{V})\varphi, \psi_1 \right\rangle, \quad \langle \mathbb{V}^{l_n}\varphi, \psi_2\rangle = 0$$

[37] Поскольку $\mathfrak{W}^{-1}J$ — линейная изометрия и $L^2(A,\nu')$ полно, то $\mathfrak{W}^{-1}J(L^2(A,\nu'))$ является замкнутым подпространством.

и $\left\langle \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \mathbb{V})\varphi, \psi_2 \right\rangle = 0$, откуда вытекает (61) для $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Иными словами,

$$\begin{gathered} \text{если } \varphi \in \mathfrak{W}^{-1} J(L^2(A,\nu')), \text{ то} \\ \mathbb{V}^{l_n}\varphi \xrightarrow{w} \frac{1}{2}(\varphi + \mathbb{V}\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi(\zeta,\omega) + \zeta\omega\varphi(\zeta,\omega)). \end{gathered} \tag{62}$$

Сопоставляя (62) и (42), приходим к выводу, что если $\varphi \in \mathfrak{W}^{-1} J(L^2(A,\nu'))$, то

$$\frac{1}{2}(1+\zeta\omega)\varphi(\zeta,\omega) = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega)\varphi(\zeta,\omega)$$

почти всюду по мере $\sigma \times \sigma$. Так как

$$\frac{1}{2}(1+\zeta\omega) - \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\omega) = \frac{1}{4}(1-\zeta-\omega+\zeta\omega) = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\omega),$$

то получается, что

$$\begin{gathered} \text{если } \varphi \in \mathfrak{W}^{-1} J(L^2(A,\nu')), \text{ то} \\ (1-\zeta)(1-\omega)\varphi(\zeta,\omega) = 0 \quad \text{почти всюду по } \sigma \times \sigma. \end{gathered}$$

Но

$$(\sigma\times\sigma)\{(\zeta,\omega);\ \zeta = 1\} = (\sigma\times\sigma)(\{1\}\times\mathbb{S}^1) = \sigma(\{1\})\sigma(\mathbb{S}^1) = 0\cdot\sigma(\mathbb{S}^1) = 0$$

и аналогично $(\sigma \times \sigma)\{(\zeta,\omega);\ \omega = 1\} = 0$. Приходится признать, что почти всюду $\varphi(\zeta,\omega) = 0$, т. е. $\varphi = 0$ как элемент пространства $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \sigma\times\sigma)$. Но если $\sigma \not\perp \sigma * \sigma$, то в $\mathfrak{W}^{-1} J(L^2(A,\nu'))$ имеются ненулевые элементы.

Литература

[1] Халмош П., *Лекции по теории меры.* – М.: ИЛ, 1953.

[2] Nadkarni M.G., *Spectral theory of dynamical systems.* Birkhäuser Advanced Texts. – Basel: Birkhäuser, 1998.

[3] Ferenczi S., "Systems of finite rank" // *Colloq. Math.*, 1997. **73**(1), 35–65.

[4] Goodson G. R., "A survey of recent results in the spectral theory of ergodic dynamical systems" // *J. Dynam. Control Systems*, 1999. **5**(2), 173–226.

[5] Аносов Д. В., Каток А. Б., "Новые примеры эргодических диффеоморфизмов гладких многообразий" // *УМН*, 1970. **25**(4), 173–174.

[6] Аносов Д. В., Каток А. Б., "Новые примеры в гладкой эргодической теории. Эргодические диффеоморфизмы" // *Труды ММО*, 1970. **23**, 3–36.

[7] Аносов Д. В., "Существование гладких эргодических потоков на гладких многообразиях" // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1974. **38**(3), 518–545.

[8] Каток А. Б., "Эргодические возмущения вырожденных интегрируемых гамильтоновых систем" // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1973. **37**(3), 539–576.

[9] Каток А. Б., "Эргодические потоки, порождаемые системой слабо взаимодействующих осцилляторов" // *Труды* V *Международной конференции по нелинейным колебаниям* (*Киев*, 1969). *Т.* 2: *Качественные методы в теории нелинейных колебаний.* – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1970. 216–221.

[10] Каток А. Б., "Минимальные диффеоморфизмы на главных S^1-расслоениях" // *Тезисы* VI *Всесоюзной топологической конференции*, 63. – Тбилиси: Мецниереба, 1972.

[11] Бронштейн И. У., *Расширения минимальных групп преобразований.* – Кишинев: Штиинца, 1975.

[12] Ionescu Tulcea A., “Random series and spectra of measure-preserving transformation” // *Ergodic theory.* – New York: Academic Press, 1963. 273–292.

[13] Goldstein S., “Spectrum of measurable flows” // *Astérisque*, 1976. **40**, 95–98.

[14] Халмош П. Р., *Лекции по эргодической теории.* – М.: ИЛ, 1959.

[15] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., *Эргодическая теория.* – М.: Наука, 1980.

[16] Ageev O. N., “On ergodic transformations with homogeneous spectrum” // *J. Dynam. Control Systems*, 1999. **5**(1), 149–152.

[17] Ryzhikov V. V., “Transformations having homogeneous spectra” // *J. Dynam. Control Systems*, 1999. **5**(1), 145–148.

[18] Агеев О. Н., “О функции кратности спектра динамических систем” // *Матем. заметки*, 1999. **65**(4), 619–622.

[19] Агеев О. Н., “О спектре декартовых степеней классических автоморфизмов” // *Матем. заметки*, 2000. **68**(5), 643–647.

[20] Ageev O. N., “On the multiplicity function of generic group extensions with continuous spectrum” // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2001. **21**(2), 321–338.

Оглавление

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 3

Дмитрий Викторович Аносов

О спектральных кратностях в эргодической теории

Ответственный за выпуск *А. Д. Изаак*
Компьютерная верстка *Е. И. Иванникова*

Сдано в набор 15.09.2003. Подписано в печать 17.12.2003.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 6,1. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/spm/ e-mail: spm@mi.ras.ru