

Летняя школа «Современная математика»  
Дубна, июль 2008

А. М. Райгородский

# Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике

Москва  
Издательство МЦНМО  
2011

УДК 519.1  
ББК 22.15  
P18

P18 **Райгородский А. М.**

Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2011. — 32 с.

ISBN 978-5-94057-839-0

На примере гипотезы Кнезера автор рассказывает о топологических методах современной комбинаторики. Книга основана на лекциях, которые автор читал в 2008 г. в Дубне на школе «Современная математика». Книга будет интересна всем, кто интересуется современной комбинаторикой и ее приложениями.

ББК 22.15

# 1. Введение

Комбинаторика — это один из самых увлекательных разделов современной математики. И один из самых бурно развивающихся. Если еще каких-то 100 лет назад можно было сказать, что комбинаторика — это набор красивых, но разрозненных утверждений о перечислении объектов того или иного вида, то сейчас комбинаторика — это полноценная дисциплина, которая постепенно вырабатывает свой собственный язык и систему *методов*, позволяющих собирать воедино всё то многообразие задач, которые совсем недавно казались никак не связанными между собой.

Когда говорят о комбинаторных методах, обычно вспоминают только метод производящих функций, который действительно играет огромную роль при решении *перечислительных* задач. Однако не менее значимы в комбинаторике и задачи *экстремальные*, т. е. задачи отыскания наибольших (наименьших) в том или ином смысле систем объектов. И здесь, конечно, производящие функции ни к чему. На смену им приходят инструменты, которые появились буквально в последние десятилетия. Среди них *вероятностный метод* (см. [1, 2]), активно разрабатываемый с середины XX века (во многом благодаря классику венгерской и мировой комбинаторики Полу Эрдешу), *линейно-алгебраический метод* (см. [3]), возникший и вовсе около тридцати лет назад, и *топологический метод* — метод столь же молодой и в то же время столь же перспективный.

В этой книге мы хотим рассказать об исторически первой задаче, которая была решена с помощью топологической технологии. Это так называемая *гипотеза Кнезера*, сформулированная Мартином Кнезером в 1955 году и доказанная Ласло Ловасом в 1977 году. Пафос в том, что постановка задачи исключительно проста и доступна школьнику, а решение ее выходит далеко за рамки школьной программы. Тем не менее мы построим книгу так, что практически всё в ней при желании сможет понять заинтересованный старшеклассник. Наша цель — на примере одной конкретной задачи продемонстрировать силу и красоту топологического метода: рассуждение, которое мы в конечном счете проведем, — это поистине *жемчужина* (ср. [4]) комбинаторики, одно из самых элегантных рассуждений в математике, которые известны автору. И значимость его не только в исключительном изяществе, но и в том, что оно как нельзя лучше свидетельствует о единстве математики: зачастую глубокое знание одного предмета позволяет достичь неожиданно ярких результатов в совершенно иной области; именно так возникают *методы*.

Отметим, что имеется прекрасная книга [5], в которой дается обзор некоторых наиболее употребительных топологических методов в комбинаторике.

## 2. Парно пересекающиеся множества и возникновение гипотезы

Рассмотрим произвольное натуральное число  $n$  и множество  $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$ . Пусть  $k \leq \frac{n}{2}$ , а  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{C_n^k}\}$  — совокупность всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ . Иными словами, каждое  $K_i$  — это подмножество множества  $\mathcal{R}_n$ , имеющее мощность  $k$ . В 1955 году Кнезер установил следующий очень простой факт.

**Теорема 1.** *Совокупность  $\mathcal{K}$  можно представить в виде объединения  $n - 2k + 2$  совокупностей, элементы каждой из которых попарно пересекаются. Иначе говоря,*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_{n-2k+2}, \tag{1}$$

причем для любого  $i \in \{1, \dots, n - 2k + 2\}$  и любых двух множеств  $K_a, K_b \in \mathcal{K}_i$  выполнено  $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ .

Понятно, откуда взялось условие  $k \leq \frac{n}{2}$ . Во-первых, при  $k > \frac{n}{2}$  величина  $n - 2k + 2$  становится меньше единицы, что в контексте соотношения (1) нелепо. Во-вторых, при таком  $k$  любые два множества из самой совокупности  $\mathcal{K}$  имеют непустое пересечение, так что и впрямь говорить о каком-либо объединении вида (1) смысла нет.

Доказательство теоремы исключительно легкое, но мы приведем его во всех подробностях.

**Доказательство теоремы 1.** В качестве совокупности  $\mathcal{K}_1$  возьмем совокупность, состоящую из всех  $K_a \in \mathcal{K}$ , которые содержат элемент 1 множества  $\mathcal{R}_n$ :

$$\mathcal{K}_1 = \{K_a \in \mathcal{K} : 1 \in K_a\}.$$

Очевидно, множества, принадлежащие совокупности  $\mathcal{K}_1$ , попарно пересекаются — как минимум по элементу 1. Аналогично положим

$$\mathcal{K}_2 = \{K_a \in \mathcal{K} : 2 \in K_a\},$$

.....

$$\mathcal{K}_{n-2k+1} = \{K_a \in \mathcal{K} : n - 2k + 1 \in K_a\}.$$

Какие множества из совокупности  $\mathcal{K}$  еще не задействованы? Разумеется, те, которые целиком содержатся в множестве  $\{n - 2k + 2, \dots, n\}$ .

Это множество имеет мощность  $2k - 1$ , и, стало быть, любые два его  $k$ -элементных подмножества пересекаются. В итоге мы вольны положить

$$\mathcal{K}_{n-2k+2} = \{K_a \in \mathcal{K} : K_a \subset \{n - 2k + 2, \dots, n\}\},$$

и теорема 1 доказана. □

Отметим, что суть доказательства теоремы не изменится, коль скоро мы потребуем, чтобы для любых  $i, j \in \{1, \dots, n - 2k + 2\}$ ,  $i \neq j$ , было выполнено  $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$ . Просто тогда надо брать

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 &= \{K_a \in \mathcal{K} : 2 \in K_a\} \setminus \mathcal{K}_1, \\ \mathcal{K}_3 &= \{K_a \in \mathcal{K} : 3 \in K_a\} \setminus \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

В этом случае напишем

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{K}_{n-2k+2}, \tag{1'}$$

подчеркивая с помощью значка « $\sqcup$ », что объединение (1') теперь *дизъюнктное*, т. е. его элементы попарно не пересекаются. Такая запись будет нам полезна чуть позже.

При всей простоте доказательства теоремы 1 любые попытки уточнить его, т. е. заменить величину  $n - 2k + 2$  на что-либо меньшее, не приводят к успеху, и читатель может сам, вслед за Кнезером, убедиться в этом. Возникает любопытная гипотеза.

**Гипотеза 1.** *Совокупность  $\mathcal{K}$  нельзя представить в виде объединения  $n - 2k + 1$  совокупностей, элементы каждой из которых попарно не пересекаются.*

Это и есть гипотеза Кнезера. Отныне нам предстоит понять, как она связана с теорией графов, почему обычные комбинаторные средства не помогают ее доказать и какую роль в ее доказательстве играет топология.

### 3. Небольшой экскурс в теорию графов и переформулировка гипотезы

Мы предполагаем знакомство читателя с простейшими понятиями теории графов, которые легко найти, например, в книге [6]. Тем не менее, давайте аккуратно договоримся о том, что такое *граф*. В этой книге мы будем считать, что у графа не может быть ни петель, ни кратных ребер, ни ориентации. Иными словами, граф — это пара

$G = (V, E)$ , в которой  $V$  — это конечное множество *вершин*, а  $E$  — это любой набор *ребер*  $\{x, y\}$ ,  $x, y \in V$ , с условиями:

(i)  $\{x, x\} \notin E$  (нет петель);

(ii) каждая пара  $\{x, y\}$  входит в  $E$  не более одного раза (нет кратных ребер);

(iii)  $\{x, y\} = \{y, x\}$  (нет ориентации).

Изображать графы мы будем совершенно стандартно — точками и соединяющими их отрезками (или дугами). Скажем, на рисунке 1 приведены примеры некоторых возможных изображений полного графа  $K_4$ , т. е. графа, у которого на четырех вершинах присутствуют («проведены») все возможные шесть ребер. На рисунке 2 указан объект, который мы в дальнейшем графом считать не будем.

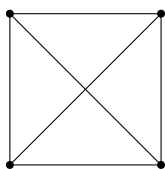


Рис. 1

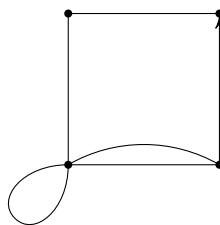


Рис. 2

Нам понадобятся три тесно связанных между собою «экстремальных» характеристики графа.

Назовем *числом независимости* графа  $G = (V, E)$  величину

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \{x, y\} \notin E\}.$$

Иными словами, речь идет о размере самого большого множества вершин графа, внутри которого отсутствуют ребра. Любое такое множество называется *независимым*, и именно отсюда идет название величины  $\alpha(G)$ . На рисунке 3 приведены примеры графов с числами независимости 2 и 3 соответственно. В первом случае независимых множеств максимальной мощности 2, во втором — 3.

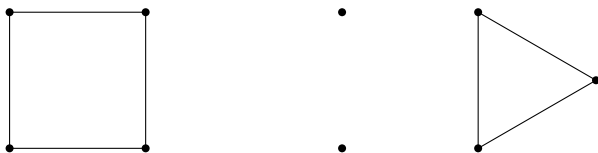


Рис. 3

Назовем *кликковым числом* графа  $G = (V, E)$  величину

$$\omega(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \{x, y\} \in E\}.$$

Это величина, в некотором смысле противоположная числу независимости. Действительно, если в графе  $G$  удалить все ребра и провести вместо них все те ребра, которых в  $G$  не было, то получится граф  $\bar{G}$ , у которого  $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$  и  $\alpha(\bar{G}) = \omega(G)$ . Фактически  $\omega(G)$  — это количество вершин в любом максимальном (по числу вершин) полном подграфе графа  $G$ . Именно такой полный подграф и называется *кликкой* в графе.

Назовем *хроматическим числом* графа  $G = (V, E)$  величину

$$\chi(G) = \min\{\chi : V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall x, y \in V_i \{x, y\} \notin E\}.$$

Обычно говорят так: хроматическое число — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Из определения видно, что каждый «цвет» (т. е. каждое множество  $V_i$ ) — это независимое множество. Таким образом, хроматическое число — это еще и наименьшее количество независимых множеств, на которые можно разбить множество вершин графа.

Из последнего рассуждения ясно, что имеет место неравенство  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ . Действительно, даже если сделать каждый «цвет» максимальным по мощности, то эта мощность будет равна  $\alpha(G)$ , и стало быть, даже в таком случае потребуется  $\frac{|V|}{\alpha(G)}$  цветов. Еще проще неравенство  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , ведь на покраску всего графа уйдет никак не меньше цветов, чем на покраску любой клики в нем. А на клику нужно столько цветов, сколько в ней вершин.

Какое же все это имеет отношение к гипотезе Кнезера? Глядя на определение хроматического числа, можно заподозрить, что в нем есть нечто общее с выражением (1'). И это правда; стоит только ввести в рассмотрение *кнезеровский граф*, и все окончательно прояснится.

Итак, пусть по-прежнему  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq \frac{n}{2}$ . Назовем кнезеровским графом граф  $KG_{n,k} = (V, E)$ , у которого

$$V = \mathcal{K}, \quad E = \{\{K_a, K_b\} : K_a, K_b \in \mathcal{K}, K_a \cap K_b = \emptyset\}.$$

Иными словами, вершинами кнезеровского графа служат  $k$ -элементные подмножества множества  $\mathcal{R}_n$ , а ребра кнезеровского графа образованы парами непересекающихся  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ .

Независимые множества в таком графе — это, конечно же, совокупности, состоящие из попарно *пересекающихся* множеств  $K_a \in \mathcal{K}$ , т. е. в аккурат совокупности типа  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-2k+2}$ . А значит, гипотеза в новых терминах звучит так: *хроматическое число кнезеровского графа равно  $n - 2k + 2$ :  $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$* . При этом неравенство  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$  есть тривиальное следствие соотношения (1'), и лишь оценка  $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$  является предположительной. В ней вся загвоздка.

В последующих разделах мы попробуем установить искомое неравенство с помощью стандартных оценок  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$  и  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Но прежде обсудим простейшие примеры кнезеровских графов (с конкретными  $n$  и  $k$ ).

#### 4. Несколько простых примеров

Есть два простейших частных случая, которые в некотором смысле противоположны друг другу. В первом из них  $k = 1$ . Тогда вершины кнезеровского графа (т. е. графа  $KG_{n,1}$ ) суть одноэлементные множества  $\{1\}, \{2\}, \dots \subset \mathcal{R}_n$ . Разумеется, эти множества попарно не пересекаются, так что ребра в графе  $KG_{n,1}$  соединяют каждые две вершины. Иначе говоря, граф  $KG_{n,1}$  — это полный граф  $K_n$  на  $n$  вершинах. Его хроматическое число равно  $n$ , и это прекрасно согласуется с гипотезой:

$$\chi(KG_{n,1}) = \chi(K_n) = n = n - 2 \cdot 1 + 2.$$

Во втором случае  $k = \frac{n}{2}$  (здесь мы считаем, что число  $n$  четно). Тогда кнезеровский граф  $KG_{n,n/2}$  представляет собой *паросочетание*, т. е. имеет вид графа с рисунка 4 (паросочетанием называется набор ребер, никакие два из которых не имеют общих вершин; это своего рода независимое множество ребер). Очевидно теперь, что

$$\chi(KG_{n,n/2}) = 2 = n - 2 \cdot \frac{n}{2} + 2,$$

и это снова подтверждает гипотезу.

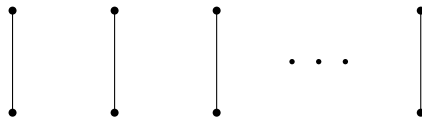


Рис. 4



Есть еще один симпатичный пример — совсем частный, но любопытный. Это граф  $KG_{5,2}$ . У него  $10 = C_5^2$  вершин, являющихся парами элементов из  $\{1, \dots, 5\}$ . Если «правильно» изобразить этот граф, то получится картинка с рисунка 5. В теории графов эта картинка хорошо известна. Она называется *графом Петерсена*. Ясно, конечно, что хроматическое число такого графа равно трем. Верхнюю оценку мы давно знаем:  $\chi(KG_{5,2}) \leq 5 - 2 \cdot 2 + 2 = 3$ . Нижняя же следует хотя бы из наличия нечетного цикла в нашем графе.

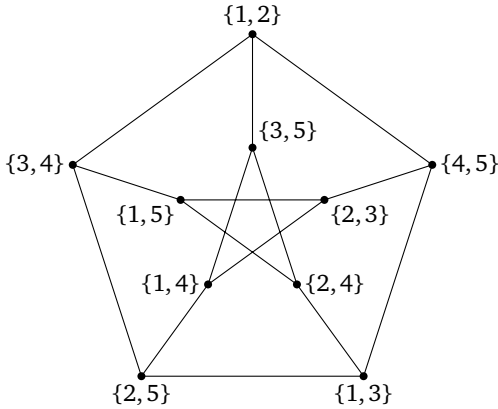


Рис. 5

О графе Петерсена можно почитать в замечательной книге [6].

### 5. Применим оценку $\chi(G) \geq \omega(G)$

Ну, это совсем легко. Действительно, что такое клика в графе  $KG_{n,k}$ ? Это, по сути, любой набор попарно непересекающихся  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ . Естественно, типичная клика выглядит так, как показано на рисунке 6. И размер ее заведомо не превышает  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ , где через  $\lfloor x \rfloor$  мы обозначаем максимальное целое число, не превосходящее  $x$ . В итоге имеем неравенство

$$\chi(KG_{n,k}) \geq \omega(KG_{n,k}) = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor.$$



Рис. 6

Абсолютно ничего хорошего. Вместо желаемой оценки вида  $n - 2k + 2$  имеем примерно в  $k$  раз худший результат.

Стоит отметить еще одно любопытное обстоятельство. Допустим,  $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$ . Тогда

$$\omega(KG_{n,k}) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil < 3,$$

т. е. в кнезеровском графе нет даже треугольников. Тем не менее мы верим, что хроматическое число такого графа равно

$$n - 2 \cdot \left( \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1 \right) + 2 \geq n - 2 \cdot \left( \frac{n}{3} + 1 \right) + 2 = \frac{n}{3}.$$

Это, на первый взгляд, довольно удивительно: граф без треугольников и со сколь угодно большим хроматическим числом. Что ж, тем интереснее.

## 6. Применим оценку $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$

Здесь тоже все легко. Мы ведь отлично знаем, что

$$\alpha(KG_{n,k}) \geq C_{n-1}^{k-1} = |\mathcal{X}_1|$$

(см. доказательство теоремы 1). А стало быть, самое лучшее, на что мы можем теперь рассчитывать, — это оценка

$$\chi(KG_{n,k}) \geq \frac{C_n^k}{C_{n-1}^{k-1}} = \frac{n}{k}.$$

Даже если бы мы доказали, что  $\alpha(KG_{n,k}) = C_{n-1}^{k-1}$ , это нам не помогло бы<sup>1</sup>.

Получается весьма забавная ситуация. Обе известные нам комбинаторные оценки хроматического числа приводят к практически одному и тому же результату. В первом случае мы имели неравенство  $\chi(KG_{n,k}) \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ . Во втором случае мы получили неравенство  $\chi(KG_{n,k}) \geq \frac{n}{k}$ . С учетом того, что хроматическое число всегда целое, можно написать  $\chi(KG_{n,k}) \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ , где  $\lceil x \rceil$  — это минимальное целое число, большее  $x$ . Таким образом, вторая оценка только на единицу больше первой, да и то лишь при тех  $k$ , которые не делят  $n$ . Мало мы приблизились к заветной цели, пора переходить к топологии.

<sup>1</sup> Этот факт верен. Он называется теоремой Эрдеша—Ко—Радо. Доказательство этой теоремы (не вполне тривиальное) можно найти в книге [2].

## 7. Теоремы Борсука — Улама — Люстерника — Шнирельмана

Мы предполагаем знакомство читателя с самыми азами математического анализа. По существу, нам нужны лишь следующие совсем базовые объекты и понятия. Во-первых, нам потребуется пространство  $\mathbb{R}^d$ . Во-вторых, в этом пространстве мы рассмотрим сферу. Сфера — это, разумеется, поверхность шара. Если размерность шара естественно считать равной размерности всего пространства, то размерность сферы полагают на единицу меньшей. Скажем, круг на плоскости (в пространстве  $\mathbb{R}^2$ ) — это двумерное множество, а его граница — окружность — одномерна: это попросту отрезок со склеенными концами. Посему обозначим шар единичного радиуса в  $\mathbb{R}^d$  через  $B^d$ , а его сферу — через  $S^{d-1}$ :

$$B^d = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\},$$

$$S^{d-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1\}.$$

В-третьих, назовем  $A \subset S^{d-1}$  *открытым множеством*, если для любого  $\mathbf{x} \in A$  найдется достаточно маленький шарик  $B$  с центром в  $\mathbf{x}$ , у которого все точки, лежащие на сфере, содержатся и в  $A$ :  $(B \cap S^{d-1}) \subset A$ . Назовем  $A \subset S^{d-1}$  *замкнутым*, если его дополнение до всей сферы открыто.

Еще следует иметь представление о плоскостях в многомерных пространствах. Под (*гипер*)плоскостью мы будем понимать аналог обычной плоскости в  $\mathbb{R}^3$ . Если в  $\mathbb{R}^3$  любая плоскость задается уравнением  $ax + by + cz = m$ , то в общем случае плоскость — это множество

$$\Pi = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = m\}.$$

В этом смысле прямая на обычной плоскости  $\mathbb{R}^2$  — это тоже своего рода гиперплоскость в двумерном пространстве. Размерность гиперплоскости равна  $d - 1$ .

В 1930 году Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман доказали следующую замечательную теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $A_1, \dots, A_d$  — замкнутые множества на сфере  $S^{d-1}$ , причем  $S^{d-1} = A_1 \cup \dots \cup A_d$ . Тогда одно из множеств обязательно содержит пару противоположных точек сферы, т. е. существует  $A_i$  и такая точка  $\mathbf{x} \in A_i$ , что  $-\mathbf{x} \in A_i$ .

Теорема 2 в случае плоскости ( $d = 2$ ) очень проста, и мы надеемся, что читатель сам ее докажет. Уже случай обычного пространства ( $d = 3$ ) совсем не тривиален. В прекрасной книге [7] содержится элементарное рассуждение, которое доказывает утверждение теоремы 2

при  $d = 3$ . Для полноты картины и большей замкнутости изложения мы приведем подобное рассуждение в первом параграфе последнего раздела. Общий случай элементарному изложению не поддается, и мы лишь можем отослать заинтересованного читателя к книге [5].

Теорема 2 в некотором смысле не может быть улучшена. А именно, в ней нельзя заменить  $d$  на  $d + 1$ . Иными словами, сферу  $S^{d-1}$  можно покрыть  $d + 1$  замкнутым множеством, ни одно из которых не содержит противоположных точек. Во втором и третьем параграфах последнего раздела мы расскажем, почему это так.

Стоит отметить, что из последнего обстоятельства (возможности покрыть сферу  $d + 1$  множеством) возникла знаменитая гипотеза Борсука, о которой есть масса литературы, в том числе популярной: см. [7, 8].

В 1932 году К. Борсук, не зная о работе Люстерника и Шнирельмана, доказал ряд утверждений, равносильных теореме 2. Он исходил из соображений, высказанных незадолго до того С. Уламом. Именно поэтому все вариации на тему теоремы 2 принято сейчас называть *теоремами Борсука — Улама* (в западной традиции) и *теоремами Борсука — Улама — Люстерника — Шнирельмана* (в российской традиции).

Для доказательства гипотезы 1 нам потребуется следующий вариант теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть  $A_1, \dots, A_d$  — множества на сфере  $S^{d-1}$ , причем часть из них замкнута, часть открыта, и  $S^{d-1} = A_1 \cup \dots \cup A_d$ . Тогда одно из множеств обязательно содержит пару противоположных точек сферы, т. е. существует  $A_i$  и такая точка  $x \in A_i$ , что  $-x \in A_i$ .

Теорема 3 сильнее теоремы 2. В ней мы не предполагаем, что все множества, покрывающие сферу, замкнуты; мы разрешаем им также быть открытыми. Отметим, что случай, когда все множества открыты, равносильен случаю, когда все множества замкнуты (см. [5]).

В четвертом параграфе последнего раздела мы обсудим еще несколько формулировок, равносильных теореме 2. А в следующем разделе мы приведем поистине удивительное рассуждение, которое с помощью теоремы 3 доказывает гипотезу Кнезера.

## 8. Доказательство гипотезы

Как мы уже говорили, первым гипотезу доказал Л. Ловас в 1977 году. Однако рассуждение, которое мы изложим ниже, предложил в 2002 году студент Джошуа Грин. В параграфе 8.1 мы определим ряд вспомогательных понятий, а в параграфе 8.2 проведем обещанное рассуждение.

### 8.1. Вспомогательные понятия

Пусть  $\Pi$  — любая гиперплоскость в  $\mathbb{R}^d$ , проходящая через центр сферы  $S^{d-1}$ , т. е. через точку  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . Тогда множество  $S^{d-1} \cap \Pi$  представляет собой сферу  $S^{d-2}$ . Для случаев  $d = 2$  и  $d = 3$  это наглядно очевидно. В первом случае мы пересекаем окружность прямой и получаем две точки, но

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$$

и все в порядке. Во втором случае мы получаем окружность, и снова нет проблем. В общем случае картина аналогичная.

Любую сферу  $S^{d-2} = S^{d-1} \cap \Pi$  назовем *экватором* на сфере  $S^{d-1}$ . Множество точек сферы  $S^{d-1}$ , которые лежат по одну сторону от некоторого экватора, назовем *полусферой*. Если полусфера не включает в себя свой экватор, то она открыта, и мы будем явно говорить о ней как об *открытой полусфере*. Точку полусферы, которая равноудалена от всех точек соответствующего экватора, назовем *эпицентром* этой полусферы (см. рисунок 7). Для данной точки  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$  (открытая) полусфера  $H(\mathbf{x})$  с эпицентром в точке  $\mathbf{x}$  задается однозначно.

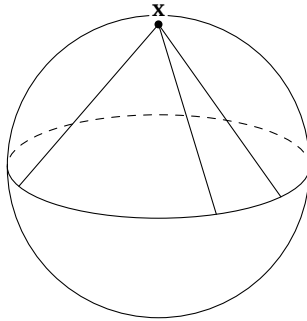


Рис. 7

### 8.2. Основное рассуждение

Нам хочется доказать, что  $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$ . Предположим противное и придем в конечном счете к противоречию. Итак, допустим,  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 1$ . Это означает, что каждой вершине кнезеровского графа (т. е. каждому множеству  $K_a \in \mathcal{K}$ ) присвоен некоторый цвет, причем всего цветов (в худшем случае)  $n - 2k + 1$  и вершины, соединенные ребром (т. е. множества  $K_a, K_b \in \mathcal{K}$  со свой-

ством  $K_a \cap K_b = \emptyset$ ), покрашены в разные цвета. Введем обозначение  $d = n - 2k + 1$  и обозначим цвета, в которые покрашены вершины графа, через  $\chi_1, \dots, \chi_d$ .

Теперь рассмотрим множество  $\mathcal{R}_n$ , в котором «живут» все множества  $K_a \in \mathcal{K}$ , служащие вершинами кнезеровского графа. Каждому элементу этого множества мы хотим поставить в соответствие некоторую точку на сфере  $S^d$ , лежащей в  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Иными словами, мы хотим заменить множество натуральных чисел  $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$  на множество точек  $\mathcal{X}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ , считая, что каждому числу  $i \in \mathcal{R}_n$  соответствует точка  $x_i$ . Разумеется, это можно сделать бесконечным количеством способов. Однако мы внесем одно важное дополнительное ограничение. А именно, мы потребуем, чтобы на любом экваторе сферы  $S^d$  лежало не более  $d$  точек из множества  $\mathcal{X}_n$ .

На первый взгляд, требование пугает, и неискушенному читателю должно показаться, что удовлетворить этому требованию очень трудно. В действительности всё весьма просто, и мы сейчас попробуем (не вдаваясь, впрочем, в технические детали) создать ощущение того, что «почти всякое» расположение  $n$  точек на сфере  $S^d$  обладает нужным свойством.

Рассмотрим понятный и наглядный пример: положим  $d = 2$ . Тогда  $n = d + 2k - 1 \geq d + 1$ . Скажем,  $n = 3$ . Естественно, сейчас речь идет о размещении трех точек на обычной сфере  $S^2$  в трехмерном пространстве. Представим себе, что эти три точки мы выбираем наугад. Если угодно, мы закрываем глаза и, повертев пальцем в воздухе, тыкаем в случайную точку сферы (палец «бесконечно тонкий»). Это точка  $x_1$ . Точно так же находим точки  $x_2, x_3$ . Давайте подумаем, с какой «вероятностью» эти точки попадут на один экватор. Коль скоро точки  $x_1, x_2$  уже выбраны, они вместе с центром  $\mathbf{0}$  нашей сферы однозначно определяют некоторую плоскость  $\Pi$ . И окружность  $S^1 = \Pi \cap S^2$  — это тот самый *единственный* экватор, на котором одновременно лежат  $x_1, x_2$ . Стало быть, если мы хотим, чтобы точка  $x_3$  попала на этот экватор, мы вынуждены выбирать ее из *одномерного* множества. Однако изначально выбор точки  $x_3$  ничем ограничен не был, и мы вольны были тыкать в любую точку *двумерной* сферы. Ясно, что в любом разумном смысле вероятность попадания в одномерное подмножество при случайном выборе из двумерного множества равна нулю. Таким образом, мы и впрямь можем утверждать, что вероятность размещения трех точек на сфере  $S^2$  с условием, что все они не лежат на одном и том же экваторе, равна единице. А это и значит, по сути, что почти любое расположение точек  $x_1, x_2, x_3$  нас устраивает. Очевидно, при  $n > 3$  рассуждение по-прежнему в силе.

В общем случае работают совершенно аналогичные соображения. Ключевой момент ведь был в том, что любые три точки в  $\mathbb{R}^3$  однозначно задают плоскость. Так вот в  $\mathbb{R}^{d+1}$ , где разворачиваются наши события, любые  $d + 1$  точек однозначно задают гиперплоскость. А это нам и нужно.

Итак, мы выбрали на сфере  $S^d$  множество точек  $\mathcal{X}_n$ , и никакие  $d + 1$  точек из  $\mathcal{X}_n$  не лежат на одном экваторе. При этом  $\mathcal{X}_n$  находится во взаимно однозначном соответствии с  $\mathcal{R}_n$ . Это, в частности, означает, что каждому множеству  $K_a \in \mathcal{K}$  однозначно соответствует множество  $L_a \subset \mathcal{X}_n$ , имеющее мощность  $k$ . При этом мы можем считать, что  $L_a$  покрашено в тот же цвет, что и  $K_a$ , и, более того, если  $L_a \cap L_b = \emptyset$ , то и цвета множеств  $L_a, L_b$  различны.

Сейчас будет основной трюк. Мы чудесным образом увяжем все, о чем до сих пор шла речь, с теоремой 3. Для этого нам нужно будет покрыть сферу  $S^d$  некоторыми множествами  $A_1, \dots, A_{d+1}$ , часть из которых замкнута, а часть — открыта. Что ж, за дело.

Пусть  $\mathbf{x} \in S^d$ . Рассмотрим открытую полусферу  $H(\mathbf{x})$  с эпицентром в точке  $\mathbf{x}$ . Если в  $H(\mathbf{x})$  содержится меньше  $k$  точек из множества  $\mathcal{X}_n$ , то скажем, что точка  $\mathbf{x}$  принадлежит множеству  $A_{d+1}$ . Если же  $m = |H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| \geq k$ , то в множество  $H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n$  попадает  $s = C_m^k$  множеств  $L_{a_1}, L_{a_2}, \dots, L_{a_s}$ . У каждого из них есть свой цвет  $\chi_j$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$ . В соответствии с этим скажем, что точка  $\mathbf{x}$  принадлежит множеству  $A_j$  с каждым из индексов  $j$ , участвующих в упомянутой раскраске. Формально можно написать так:

$$A_{d+1} = \{\mathbf{x} \in S^d : |H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| < k\},$$

$$A_i = \{\mathbf{x} \in S^d : \text{в } H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n \text{ есть подмножество } L_a \text{ цвета } \chi_i\},$$

$$i = 1, \dots, d.$$

Разумеется, множества  $A_1, \dots, A_d$  могут иметь взаимные пересечения. Однако очевидно, что  $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$ , и наличие пересечений нас не смущает.

Надо еще понять, какие из множеств  $A_1, \dots, A_{d+1}$  замкнуты, а какие открыты. Пусть точка  $\mathbf{x}$  принадлежит любому из  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Это значит, что  $H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n$  представляет собой конечное множество точек  $U$  на сфере, причем, безусловно,  $U$  вложено в *открытое* множество  $H(\mathbf{x})$ . Если взять точку  $\mathbf{x}' \in S^d$ , достаточно близкую к  $\mathbf{x}$ , то, как нетрудно понять,  $H(\mathbf{x}')$  целиком накроет множество  $U$ . Наглядная иллюстрация этому факту дана на рисунке 8. Суть в том, что точки из  $U$  не лежат на экваторе полусферы  $H(\mathbf{x})$ . Именно поэтому можно столь мало пошевелить полусферу, чтобы и после этого шевеления

точки из  $U$  не вышли на новый экватор или за его пределы. Таким образом, любая точка  $x'$ , близкая (в известном смысле) к точке  $x$ , принадлежит тому же множеству  $A_i$ , что и  $x$ . Следовательно, множества  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ , открыты. В то же время вся сфера  $S^d$  замкнута, а значит, множество  $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$  тоже замкнуто (как разность замкнутого и открытого множеств).

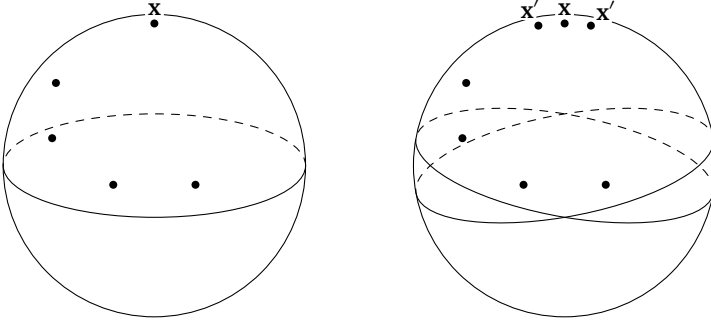


Рис. 8

Применима теорема 3. Она говорит, что в одном из множеств  $A_1, \dots, A_{d+1}$  есть пара противоположных точек  $x$  и  $-x$ . Рассмотрим два случая: в первом случае  $x \in A_i$ , где  $i \in \{1, \dots, d\}$ ; во втором случае  $x \in A_{d+1}$ .

*Случай 1.* В этом случае полусферы  $H(x)$  и  $H(-x)$  содержат множества  $L_a$  и  $L_b$  соответственно, каждое из которых имеет цвет  $\chi_i$  (раз уж и  $x$ , и  $-x$  сидят в одном и том же  $A_i$ ). Но полусферы  $H(x)$  и  $H(-x)$  не пересекаются (они ведь не содержат общего экватора), а стало быть, не пересекаются и множества  $L_a, L_b$ . Так ведь у нас непересекающиеся множества не могут иметь одного цвета! Противоречие.

*Случай 2.* В этом случае

$$|H(x) \cap \mathcal{X}_n| \leq k-1 \quad \text{и} \quad |H(-x) \cap \mathcal{X}_n| \leq k-1.$$

Обозначим через  $S$  общий экватор полусфер  $H(x)$  и  $H(-x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} |S \cap \mathcal{X}_n| &= |\mathcal{X}_n| - |H(x) \cap \mathcal{X}_n| - |H(-x) \cap \mathcal{X}_n| \geq \\ &\geq n - (k-1) - (k-1) = n - 2k + 2 = d + 1, \end{aligned}$$

т. е. на экваторе  $S$  лежит не меньше  $d + 1$  точек, что также невозможно. Опять противоречие, и гипотеза Кнезера доказана.



## 9. Дополнение

Для понимания этого раздела потребуется слегка больше навыков, чем прежде. Например, необходимо знать определения непрерывной функции и непрерывного отображения. Следует знать также, что непрерывная функция достигает своего максимального (минимального) значения на замкнутом ограниченном множестве. Понадобится представление о связности множеств. Но это и все, пожалуй.

### 9.1. Доказательство теоремы 2 при $d = 3$

Предположим,  $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , причем все множества  $A_i$  замкнуты и, вопреки утверждению теоремы, ни одно из них не содержит пары противоположных точек сферы. Наша цель — прийти к противоречию.

Разобьем сферу на очень маленькие кирпичики и две шапочки, как показано на рисунке 9. Чуть позже мы скажем, что именно означает выражение «очень маленькие». Все кирпичики одинаковы, шапочки тоже совпадают по форме, и для дальнейшего крайне важно, что мы располагаем кирпичики на сфере в стиле обычной кирпичной кладки: мы будем существенно опираться на то, что ни в одной точке сферы не сходятся сразу четыре отрезка, служащие границами кирпичиков (ситуация с рисунка 10 невозможна).

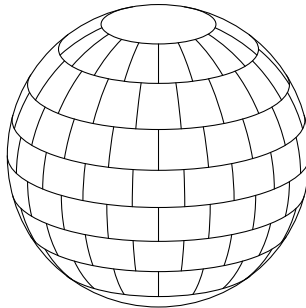


Рис. 9

Объединим все кирпичики, каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с множеством  $A_1$ . Полученное множество назовем  $B_1$ . Аналогично поступим с  $A_2$  и  $A_3$ , образуя множества  $B_2$  и  $B_3$  соответственно. Поскольку множества  $A_i$  замкнуты, то, выбрав кирпичики с самого начала достаточно мелкими, мы добьемся того, что и множества  $B_i$  не будут содержать противоположных точек сферы.

Разумеется,  $S^2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ . Рассмотрим пока только множество  $B_1$ . Его граница — это система ломаных линий на сфере. Назовем эти ломаные  $L_1, \dots, L_k$ , где  $k$  — это просто обозначение для числа наших ломаных. Благодаря способу укладки кирпичиков на сфере, мы можем утверждать, что любая из ломаных замкнута, не пересекает саму себя и не пересекается ни с одной из оставшихся ломаных. Именно ради этого мы так старательно избегали ситуаций с рисунка 10. В итоге граница множества  $B_1$  имеет весьма приятный вид, чего нельзя было сказать, вообще-то, о границе исходного множества  $A_1$ . Затевая кирпичную кладку и заменяя  $A_1$  на  $B_1$ , мы как раз стремились к тому, чтобы от одного замкнутого множества без противоположных точек перейти к другому замкнутому множеству без противоположных точек, улучшив при этом свойства границы множества.

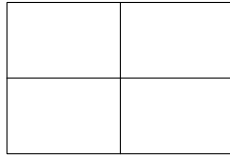


Рис. 10

Отразим множество  $B_1$  относительно центра сферы. Получится множество  $B'_1$ , которое не пересекается с множеством  $B_1$ , так как иначе в  $B_1$  нашлись бы противоположные точки сферы. Граница множества  $B'_1$  образована ломаными  $L'_1, \dots, L'_k$ , которые симметричны ломаным  $L_1, \dots, L_k$ . Итого у нас на сфере есть уже  $2k$  ломаных, которые замкнуты, не пересекают самих себя и не пересекаются друг с другом. Хорошо известно, что такие ломаные делят сферу на  $2k + 1$  связных кусков. Этот факт интуитивно понятен: одна замкнутая ломаная разбивает сферу на два куска, две замкнутых ломаных разбивают сферу на три куска, и т. д. В действительности этот факт крайне нетривиален, ведь замкнутая ломаная может быть сколь угодно сложной (см. рисунок 11). Он называется теоремой Жордана. Однако мы применим этот факт, по-прежнему надеясь на интуицию читателя.

Итак, на сфере есть  $2k + 1$  связных множеств, которые ее покрывают. По построению, среди этих множеств могут быть либо пары множеств, симметричных друг другу, либо множества, которые симметричны относительно центра сферы. Поскольку  $2k + 1$  — нечетное число, хотя бы одно центрально-симметричное множество найдется. Назовем его  $C$ .

В множестве  $C$  есть, конечно, пары противоположных точек сферы. Возьмем любую из них: скажем,  $u$  и  $-u$ . Ввиду связности множе-

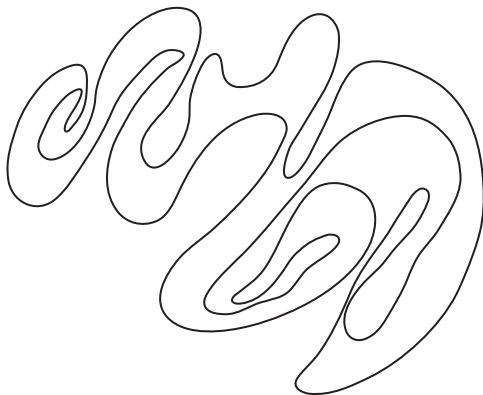


Рис. 11

ства  $C$ , существует непрерывная кривая  $\gamma$ , соединяющая точки  $u$  и  $-u$  и целиком лежащая внутри множества  $C$ .

Заметим, что внутренность множества  $C$  не имеет общих точек с множеством  $B_1$ . Поэтому кривая  $\gamma$  покрыта только множествами  $B_2$  и  $B_3$ . Но кривая непрерывна, а множества  $B_2$  и  $B_3$  замкнуты. Следовательно, корректно говорить о *последней* точке множества  $B_2$  на кривой (при движении вдоль кривой от  $u$  к  $-u$ ). Обозначим эту точку через  $z$ . Естественно,  $z \in B_2$ . Однако в то же время  $z \in B_3$ : иначе можно было бы еще чуть-чуть продвинуться, оставаясь внутри  $B_2$ . Получается, что точка  $-z$ , принадлежащая внутренности множества  $C$ , не может находиться ни в  $B_2$ , ни в  $B_3$ . А это и есть противоречие.

Теорема доказана.

## 9.2. Покрытие окружности и двумерной сферы

Здесь мы хотим разобраться с тем, как можно покрыть окружность  $S^1$  тремя, а сферу  $S^2$  четырьмя замкнутыми множествами без противоположных точек.

С окружностью все тривиально. Покрытие имеет вид значка «Мерседеса», и оно изображено на рисунке 12. Очевидно, что в каждом из секторов нет противоположных точек. Более того, максимальное расстояние между парами точек в любом из секторов (оно называется *диаметром* сектора) равно  $\sqrt{3}$ , и это, разумеется, намного меньше двух (диаметра окружности).

На значок «Мерседеса» можно посмотреть и по-другому. А именно, его можно получить так: вписываем в  $S^1$  правильный треуголь-

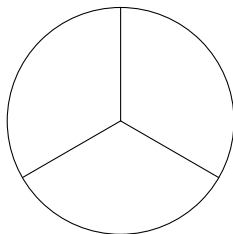


Рис. 12

ник со стороной  $\sqrt{3}$ ; «смотрим» из центра окружности на каждую из сторон треугольника и получаем те самые три сектора, которые покрывают  $S^1$ .

Последнее рассуждение полезно с той точки зрения, что в случае  $\mathbb{R}^3$  мы его обобщим, и тем самым трехмерная конструкция окажется понятнее.

Итак, впишем в  $S^2$  правильный тетраэдр, служащий естественным аналогом правильного треугольника. Посмотрим из центра на каждую из его четырех граней. Получатся трехгранные углы с общей вершиной в центре сферы (см. рисунок 13). Каждый из углов имеет в сечении одну из граней тетраэдра. Пересечения углов со сферой и суть искомые четыре замкнутых множества, покрывающие сферу. Ясно, что все эти множества геометрически одинаковы. В сущности, ясно и то, что такие множества не содержат противоположных точек сферы. Интереснее подсчитать их диаметры.

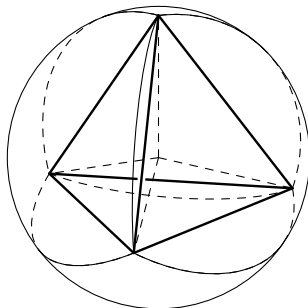


Рис. 13

Заметим, что в случае плоскости диаметры искали тривиально: максимум расстояний в секторах достигался на парах вершин вписанного треугольника. Возникает гипотеза, что и в трехмерной ситуации

следует просто найти длину стороны тетраэдра. Однако такая интуиция неверна, и это здесь самое забавное.

Дабы описать положения наиболее удаленных точек данного множества в покрытии сферы, введем некоторые обозначения. Пусть вершины тетраэдра — это  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , а его центр — это  $O$  (см. рисунок 14). Для определенности рассмотрим множество, порожденное трехгранным углом  $OA_1A_2A_3$ . Пусть  $B$  — середина стороны  $A_2A_3$ . Проведем радиус  $OB$ . Обозначим через  $C$  его конец, лежащий на сфере. Утверждение состоит в том, что диаметр — это длина отрезка  $A_1C$ . Мы не станем доказывать этот несложный факт, оставляя читателю хорошую пищу для размышлений.

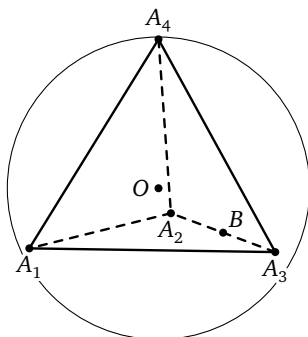


Рис. 14

Посчитать длину отрезка  $A_1C$  большого труда не составляет. Давайте все же проделаем это. Прежде всего найдем длину  $x$  стороны тетраэдра. Рассмотрим высоту тетраэдра, опущенную из вершины  $A_4$  на плоскость  $A_1A_2A_3$ . Обозначим ее основание через  $D$ . Понятно, что  $D$  — центр окружности, описанной вокруг треугольника  $A_1A_2A_3$ . Длина отрезка  $DA_1$  равна  $\frac{x}{\sqrt{3}}$  (по теореме косинусов). Значит, высота  $A_4D$  имеет длину  $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{3}} = x\sqrt{\frac{2}{3}}$  (по теореме Пифагора).

В то же время  $OD = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$ . В итоге

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}},$$

так что  $x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Далее, по теореме Пифагора  $DB = \sqrt{\frac{2}{9}}$  и  $OB = \sqrt{\frac{1}{3}}$ . Мы знаем длины всех сторон треугольника  $OA_1B$  ( $OA_1 = 1$ ,  $OB = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $A_1B = \sqrt{2}$ ). По теореме косинусов косинус угла  $A_1OB$  равен  $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

Берем треугольник  $A_1OC$ , и по теореме косинусов находим

$$A_1C = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \approx 1,776... < 2.$$

### 9.3. Покрывтие многомерной сферы

В покрытиях из предыдущего параграфа есть важные общие черты. А именно, мы вписывали в  $S^1$  правильный треугольник, а в  $S^2$  — правильный тетраэдр. Разумно предположить, что и в больших размерностях мы поступим как-то аналогично. Но для этого нам нужны аналоги треугольника и тетраэдра в произвольном  $\mathbb{R}^d$ .

Давайте подумаем, как образуется треугольник. Например, можно действовать следующим образом. Берем три точки  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , не лежащие на одной прямой. Эти точки можно складывать (как векторы на плоскости, т. е. по координатам) и умножать на числа (опять же по координатам). Так, для

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (1, 1), \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 2$$

запись  $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3$  обозначает точку с координатами (5, 1).

Нетрудно понять, что треугольник с вершинами  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  — это множество точек вида  $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3$ , где  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$ ,  $c_3 \geq 0$  и  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ .

Совершенно аналогично устроен любой тетраэдр. Берем точки  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$ , не лежащие на одной плоскости, и рассматриваем множество, состоящее из точек вида  $c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_4\mathbf{x}_4$ , где  $c_1 \geq 0, \dots, c_4 \geq 0$  и  $c_1 + \dots + c_4 = 1$ . Это и есть тетраэдр с вершинами в точках  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$ .

В многомерном случае соответствующий объект называют *симплексом*. А именно, берут точки  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1}$ , не лежащие ни в какой  $(d-1)$ -мерной гиперплоскости в  $\mathbb{R}^d$ , и рассматривают множество

$$T = \{c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_{d+1}\mathbf{x}_{d+1}, c_1 \geq 0, \dots, c_{d+1} \geq 0, c_1 + \dots + c_{d+1} = 1\}.$$

Множество  $T$  — это симплекс с вершинами в точках  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1}$ .

Если попарные расстояния между вершинами симплекса одинаковые, то симплекс называется *правильным*. Нетрудно убедиться в том, что в  $\mathbb{R}^d$  существуют правильные симплексы. Благо в  $\mathbb{R}^2$  есть правильные треугольники, а в  $\mathbb{R}^3$  — правильные тетраэдры. Более того, правильный симплекс можно вписать в сферу  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

Гранями симплекса называются симплексы, построенные на любых его  $d$  вершинах. Иными словами, у симплекса  $d + 1$  граней, и все они суть симплексы на единицу меньшей размерности. Например, грани тетраэдра — это треугольники (двумерные симплексы), а «грань» треугольника — это его стороны, т. е. отрезки, которые вполне можно интерпретировать как симплексы размерности 1.

Теперь мы готовы дать общую конструкцию покрытия сферы  $S^{d-1}$  замкнутыми множествами. Впишем в сферу правильный симплекс  $T$  с вершинами  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{d+1}$ . Обозначим через  $\mathbf{0}$  центр сферы. Как и в предыдущем параграфе, «посмотрим» из точки  $\mathbf{0}$  на каждую из граней симплекса  $T$ . Что это значит? Пусть, скажем, грань образована точками  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ . Тогда мы рассмотрим симплекс с вершинами в  $\mathbf{0}$  и в  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ . «Продолжая» этот симплекс за грань с вершинами  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ , получим многогранный угол, служащий аналогом двугранного угла на плоскости и трехгранного угла в  $\mathbb{R}^3$ . В общей сложности у нас возникнет  $d + 1$  многогранный угол  $U_1, \dots, U_{d+1}$ . Искомое покрытие примет вид

$$S^{d-1} = (S^{d-1} \cap U_1) \cup \dots \cup (S^{d-1} \cap U_{d+1}).$$

Ясно, что оно полностью соответствует своим предшественникам из размерностей 2 и 3.

Понятно сразу, что множества  $S^{d-1} \cap U_i$  в покрытии геометрически одинаковы и что все они свободны от противоположных точек сферы. А чему равны их диаметры? Ниже мы укажем пару точек, на которых достигается диаметр одного из множеств, и вычислим этот диаметр. Однако мы снова не станем доказывать, что это именно диаметр, а не просто очень большое расстояние.

Сперва напомним еще ряд сведений из геометрии. *Скалярным произведением* векторов  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  называется число  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ . Расстояние  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  между точками  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  можно измерить по формуле

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2)$$

Запись  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  называется *скалярным квадратом* вектора  $\mathbf{x}$ . Она выражает квадрат длины  $|\mathbf{x}|$  этого вектора. Косинус угла между векторами  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  можно вычислить по формуле  $\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}$ . Таким образом, соотношение (2) — это просто теорема косинусов:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}). \quad (2')$$

Абсолютно то же самое можно сказать и про  $\mathbb{R}^d$ , где скалярное произведение векторов  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$  задается выра-

жением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d.$$

Что ж, вычислим диаметр одного из множеств  $S^{d-1} \cap U_i$ . Пусть это множество  $D$ , порожденное вершинами  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$  симплекса  $T$ . Нетрудно заметить, что  $\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_{d+1} = \mathbf{0}$  (ср. двумерный и трехмерный случаи). Значит,

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i) + \dots + (\mathbf{x}_{d+1}, \mathbf{x}_i) = (\mathbf{0}, \mathbf{x}_i) = 0$$

для любого  $i$ . Поскольку, далее,  $|\mathbf{x}_1| = \dots = |\mathbf{x}_{d+1}| = 1$  (все вершины симплекса лежат на нашей сфере радиуса 1), имеем  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 1$ . Наконец, из соображений симметрии следует, что все углы  $(\widehat{\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i})$  при  $i \neq j$  равны между собой. Стало быть, при  $i \neq j$  получаем

$$0 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_i) + \dots + (\mathbf{x}_{d+1}, \mathbf{x}_i) = 1 + d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i),$$

т. е. для всех  $i \neq j$  выполнено  $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = -\frac{1}{d}$ .

Заметим, что последнее наблюдение сразу же позволяет нам найти длину стороны симплекса  $T$  (расстояние между любыми двумя его вершинами). По теореме косинусов (соотношение (2')) имеем

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{d}\right) = 2 + \frac{2}{d}, \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \sqrt{\frac{2d+2}{d}}.$$

В частности, при  $d=2$  получается  $\sqrt{3}$ , а при  $d=3$  выходит  $2\sqrt{\frac{2}{3}}$  (ср. предыдущий параграф).

Вернемся к поиску диаметра. Здесь есть два случая:  $d=2k$  и  $d=2k-1$ . Рассмотрим их по отдельности.

*Случай 1.* Возьмем точки  $\xi = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k$  и  $\eta = \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \mathbf{x}_{2k}$ . Эти точки при  $k > 1$  не принадлежат интересующему нас множеству  $D$ , но сперва мы поработаем с ними. Итак,

$$\cos(\widehat{\xi, \eta}) = \frac{(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \mathbf{x}_{2k})}{|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k| \cdot |\mathbf{x}_{k+1} + \dots + \mathbf{x}_{2k}|} = \frac{(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \mathbf{x}_{2k})}{|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k|^2}.$$

Числитель в последнем выражении представляет собой (после раскрытия скобок) сумму  $k^2$  слагаемых, каждое из которых есть  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  с разными  $i$  и  $j$ . Значит, числитель равен  $k^2 \cdot \left(-\frac{1}{2k}\right) = -\frac{k}{2}$ . Перепишем знаменатель:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k|^2 &= |\mathbf{x}_1|^2 + \dots + |\mathbf{x}_k|^2 + \sum_{i \neq j} (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \\ &= k + k \cdot (k-1) \cdot \left(-\frac{1}{2k}\right) = k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$



В итоге

$$\cos(\widehat{\xi, \eta}) = -\frac{k}{k+1}.$$

Положим теперь  $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|}$ ,  $\eta' = \frac{\eta}{|\eta|}$ . Эти точки уже лежат на сфере, и, более того, обе они находятся в множестве  $D$ . По теореме косинусов расстояние между ними равно величине

$$\begin{aligned} |\xi' - \eta'| &= \sqrt{|\xi'|^2 + |\eta'|^2 - 2 \cdot |\xi'| \cdot |\eta'| \cdot \cos(\widehat{\xi', \eta'})} = \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(\widehat{\xi, \eta})} = \sqrt{2 + \frac{2k}{k+1}}. \end{aligned}$$

В случае 1 диаметр мы нашли. Отметим, что при  $k=1$  (т. е. в размерности 2)  $\xi' = \mathbf{x}_1$ ,  $\eta' = \mathbf{x}_2$ , т. е. действительно диаметр достигается на стороне (см. § 9.2). Однако при  $k > 1$  длина стороны равна

$$\sqrt{\frac{4k+2}{2k}} = \sqrt{2 + \frac{1}{k}} < \sqrt{2 + \frac{2k}{k+1}}.$$

Более того, длина стороны стремится с ростом  $k$  к корню из двух, а диаметр множества  $D$  стремится к двум, т. е. к диаметру всей сферы (оставаясь всегда чуть меньше двойки).

*Случай 2.* Возьмем точки  $\xi = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k$  и  $\eta = \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \mathbf{x}_{2k-1}$ . Опуская выкладки, которые полностью аналогичны выкладкам из случая 1, получаем

$$\cos(\widehat{\xi, \eta}) = -\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}.$$

Снова полагая  $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|} \in D$ ,  $\eta' = \frac{\eta}{|\eta|} \in D$ , имеем окончательно

$$|\xi' - \eta'| = \sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}}.$$

В случае  $k=2$  (т. е. при  $d=3$ ) выполнено

$$\sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}.$$

В точности то же, что и в § 9.2! Нетрудно заодно осознать и тот факт, что точки  $\xi'$  и  $\eta'$  суть, в обозначениях параграфа 9.2, точки  $C$  и  $A_1$  соответственно. Такая вот (вполне ожидаемая) аналогия.

### 9.4. Вокруг теоремы 2

Полезно понимать, что следующая формулировка равносильна утверждению теоремы 2.

**Теорема 4.** Для любого непрерывного отображения  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  существует точка  $\mathbf{x} \in S^d$  с  $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ .

В двумерном случае теорема 4 говорит о том, что нельзя непрерывно растянуть обычную сферу на обычную плоскость, не склеив при этом какие-нибудь две противоположные точки. Интуитивно это довольно понятно, а доказательство, по очевидным причинам, то же самое, что и в параграфе 9.1. Ниже мы объясним, как из теоремы 4 вывести теорему 2. Рассуждение в обратную сторону мы предложим читателю в качестве упражнения.

Итак, пусть теорема 4 верна. Рассмотрим произвольное покрытие  $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$  сферы замкнутыми множествами. Нам хочется доказать, что найдется индекс  $i$  и такая точка  $\mathbf{x} \in A_i$ , что  $-\mathbf{x} \in A_i$ . Построим отображение  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  по следующему правилу:

$$f(\mathbf{x}) = (\text{dist}(\mathbf{x}, A_1), \dots, \text{dist}(\mathbf{x}, A_d)).$$

Здесь  $\mathbf{x} \in S^d$ , а  $\text{dist}(\mathbf{x}, A_i) = \min_{\mathbf{y} \in A_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  (минимум достигается, поскольку множество  $A_i$  замкнуто).

Очевидно, отображение  $f$  непрерывно. Из теоремы 4 мы, стало быть, знаем, что для некоторой точки  $\mathbf{y} \in S^d$  выполнено  $f(\mathbf{y}) = f(-\mathbf{y})$ . Если  $i$ -я координата точки  $\mathbf{y}$  равна нулю, то  $\text{dist}(\mathbf{y}, A_i) = 0$ , т. е.  $\mathbf{y} \in A_i$ , а значит, и  $-\mathbf{y} \in A_i$ . Если же все координаты  $\mathbf{y}$  точки  $\mathbf{y}$  ненулевые, то  $\mathbf{y}$  не принадлежит ни одному из множеств  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ , т. е.  $\mathbf{y} \in A_{d+1}$ . Но тогда и  $-\mathbf{y} \in A_{d+1}$ . В обоих случаях все доказано.

Назовем отображение  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  *антиподальным*, если  $f$  непрерывно и для любого  $\mathbf{x} \in S^d$  выполнено  $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ . Еще один важный вариант теоремы 2 мы приводим ниже.

**Теорема 5.** Не существует антиподального отображения  $f: S^d \rightarrow S^{d-1}$ .

Равносильность теорем 5 и 4 почти тривиальна, и мы ее не обсуждаем. Зато, отталкиваясь именно от теоремы 5, очень удобно получать обобщения результата Борсука—Улама—Люстерника—Шнирельмана. Одно из таких (наиболее широких и важных) обобщений мы приведем ниже, не комментируя терминологию, которая в его рамках возникает. Читатель, знающий продвинутую алгебру, поймет, о чем речь, а читатель, который с подобными вопросами еще не знаком, получит стимул к дальнейшему изучению науки.

**Теорема 6.** Пусть  $G$  — нетривиальная конечная группа, которая действует свободно на топологических пространствах  $X$  и  $Y$ . Предположим, что  $X$  —  $(n - 1)$ -связное пространство, а размерность пространства  $Y$  равна  $m < n$ . Тогда не существует  $G$ -эквивариантного отображения из  $X$  в  $Y$ .

Следовало наложить некоторые дополнительные ограничения на пространства  $X, Y$  в формулировке теоремы, но мы не стали этого делать, дабы совсем уж не загромоздить утверждение. Можно считать, что  $X$  и  $Y$  — «достаточно хорошие». Например, если  $X = S^n$ , а  $Y = S^m$ , то  $X$  имеет связность  $n - 1$ , а  $Y$  имеет размерность  $m$ . Если к тому же  $G = \mathbb{Z}_2$ , то  $G$ -эквивариантность и антиподальность отображения суть одно и то же. Таким образом, при  $X = S^n, Y = S^{n-1}, G = \mathbb{Z}_2$  теорема 6 влечет теорему 5.

## Литература

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
2. Райгородский А. М. Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.
3. Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007.
4. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М.: Наука, 1979.
5. Matoušek J. Using the Borsuk — Ulam theorem. Berlin: Universitext, Springer, 2003.
6. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
7. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
8. Райгородский А. М. Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2006.

Райгородский Андрей Михайлович

Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике

Подписано в печать 13.07.2011 г. Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 2. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография „САРМА“».

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: [biblio@mcsme.ru](mailto:biblio@mcsme.ru)

---