

А. Б. Скопенков

Основы дифференциальной геометрии  
в интересных задачах

Москва  
Издательство МЦНМО  
2009

УДК 271.21  
ББК 22.15  
С44

*Проведение Летних школ «Современная математика»  
и издание настоящей брошюры осуществлено  
при поддержке Департамента образования г. Москвы  
и фонда «Династия»*

**Скопенков А. Б.**  
С44 Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах. — М.: МЦНМО, 2009. — 72 с.

ISBN 978-5-94057-461-3

Настоящая брошюра возникла на основе курса лекций, прочитанных автором на летней математической школе «Современная математика» в Дубне в 2007 г. В ней показано, как при решении интересных геометрических проблем, близких к приложениям, естественно возникают различные понятия кривизны, отличающей изучаемую геометрию от «обычной». Приведены прямые элементарные определения этих понятий.

Брошюра предназначена студентам, аспирантам, работникам науки и образования, изучающим и применяющим дифференциальную геометрию. Для ее изучения достаточно владения основами анализа функций нескольких переменных (а во многих местах не нужно даже этого). Материал преподнесен в виде циклов задач.

ББК 22.15

Рисунки М. Вельтищева

Оперативную информацию о Летней школе «современная математика»  
можно посмотреть на сайте <http://www.mccme.ru/dubna>

ISBN 978-5-94057-461-3

© Скопенков А. Б., 2009.  
© МЦНМО, 2009.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
Зачем . . . . .	5
Советы и соглашения . . . . .	7
Литература . . . . .	8
<b>1. Кривизны кривых</b>	<b>9</b>
1.1. Кривые . . . . .	9
1.2. Кривизна кривых . . . . .	11
1.3. Кручение пространственных кривых . . . . .	14
<b>2. Числовые кривизны поверхностей</b>	<b>17</b>
2.1. Поверхности . . . . .	17
2.2. Объемлемая и внутренняя изометрии. Скалярная кривизна . . . . .	18
2.3. Площадь поверхности . . . . .	20
2.4. Скалярная кривизна (обобщение) . . . . .	21
2.5. Главные кривизны . . . . .	22
2.6. Полная средняя кривизна . . . . .	26
2.7. Средняя кривизна в точке . . . . .	28
2.8. Полная гауссова кривизна . . . . .	29
2.9. Гауссова кривизна в точке . . . . .	31
2.10. Геодезические . . . . .	33
2.11. Параллельный перенос . . . . .	36
2.12. Секционная кривизна . . . . .	38
<b>3. Полилинейные кривизны поверхностей</b>	<b>42</b>
3.1. Длины кривых на поверхностях . . . . .	42
3.2. Риманова метрика. Применение к внутренним изометриям . . . . .	43
3.3. Оператор кривизны Вейнгартена (вторая квадратичная форма) . . . . .	45
3.4. Билинейная форма кривизны Риччи . . . . .	48
3.5. Тензор кривизны Римана . . . . .	52

<b>4.</b>	<b>Ковариантное дифференцирование</b>	<b>58</b>
4.1.	Примеры тензорных полей . . . . .	58
4.2.	Ковариантное дифференцирование функций . . . . .	59
4.3.	Коммутатор векторных полей . . . . .	61
4.4.	Ковариантное дифференцирование векторных полей . . . . .	63
4.5.	Ковариантное дифференцирование тензоров . . . . .	64
<b>5.</b>	<b>Обобщение</b>	<b>68</b>
5.1.	Элементы гиперболической геометрии Лобачевского . . . . .	68
5.2.	Геометрия на римановых многообразиях . . . . .	69

*The modern world is full of theories which are proliferating at a wrong level of generality, we're so good at theorizing, and one theory spawns another, there's a whole industry of abstract activity which people mistake for thinking.*

I. Murdoch, The Good Apprentice

## Введение

### Зачем

Приводимые задачи подобраны так, что в процессе их решения (и обсуждения) читатель увидит, как при решении интересных геометрических проблем, близких к приложениям, естественно возникают различные понятия *кривизны*, отличающей изучаемую геометрию от «обычной».<sup>1</sup> Дальнейшие знания читатель сможет почерпнуть в книгах из списка литературы.

Особенность этого текста — возможность познакомиться с некоторыми *мотивировками* и *идеями* дифференциальной геометрии при сведении к необходимому минимуму её *языка*.

Я старался давать определения так, чтобы сразу было ясно, что определяемый объект интересен. А методы вычисления уже интересных (по самому их определению) объектов формулировать в виде теорем. (Часто изучение материала затрудняется тем, что *вычислительные формулы* преподносятся в виде *определений*, которые становятся немотивированными.) Вместо *абстрактных общих понятий* (например, тензора и ковариантного дифференцирования) рассматриваются их *конкретные используемые в курсе частные случаи*, а обобщение остаётся в виде задач, которые естественны и легки для читателя, разобравшегося с частными случаями. (Изучение «от общего к частному» часто приводит к абсурдному эффекту: сдающие курс воспроизводят громоздкое определение, но не могут по этому определению привести ни одного содержательного примера определяемого объекта.)

Простейшие кривизны — числовые поля, более сложные — поля квадратичных форм, а тензор кривизны Римана («это маленькое чудовище полилинейной алгебры» по словам М. Громова) — поле четырёхли-

---

<sup>1</sup> Тем самым он освоит основы дифференциальной геометрии (в частности, большую часть курса, изучаемого на механико-математическом факультете Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова — кроме интегрирования дифференциальных форм и основ топологии).

нейных форм. В этом курсе даются прямые геометрические определения сначала первых, затем вторых и потом третьего. Конечно, простейшие кривизны выражаются через более сложные (и такие выражения часто удобны для *вычисления* простейших кривизн), но *определение* простых понятий через более сложные затрудняет изучение материала.

Ввиду прозрачной геометрической мотивированности изучаемых понятий изложение в основном синтетично и бескоординатно. Несмотря на стремление к ясности и ориентированность на приложения (а точнее, как раз в силу такого стремления), я старался поддержать достаточно высокий уровень строгости. Например, чётко различаются параметризованные и непараметризованные кривые и поверхности (отсутствие их чёткого различения мешает начинающим, хотя допустимо и удобно для специалистов).

Принятый стиль изложения отвечает духу К. Ф. Гаусса (и других первооткрывателей), много занимавшегося приложениями и превратившего один из разделов географии в данный раздел математики. Изложение «от простого к сложному» и в форме, близкой к форме рождения материала, продолжает устную традицию, восходящую к Лао Цзы и Платону, положенную Гегелем в основу изложения философии, а в современном преподавании математики представленную, например, книгами Пойа и журналом «Квант».

Мне кажется, принятый стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое (бессознательное) сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах (происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями).

Чтение этого текста и решение задач потребуют от большинства читателей усилий (впрочем, некоторые читатели данного текста жаловались, что в нём нет серьёзных задач, а есть лишь тривиальные упражнения). Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками в процессе изучения интересных геометрических проблем читатель откроет некоторые основные понятия и теоремы дифференциальной геометрии. Надеюсь, это поможет читателю совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

Данный текст основан на лекциях и семинарах, которые автор вёл на мехмате МГУ в 2004 – 2007 годах и в Летней школе «Современная Математика» в 2007 году. Некоторые его фрагменты были представ-

лены на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (рук. акад. РАН А. Т. Фоменко) и на семинаре по геометрии в МЦНМО (рук. д.ф.м.н. В. Ю. Протасов). Благодарю А. Иванова, С. Маркелова, А. Ошемкова, А. Пляшечника, В. Прасолова, А. Толченникова, Г. Челнокова и всех слушателей (точнее, решателей) курсов за полезные замечания и обсуждения, а В. Прасолова за предоставление рисунка к [Pr].

## Советы и соглашения

Приводимые определения кривизн *независимы друг от друга*. Поэтому после изучения поверхностей можно сразу изучать *любую* из вводимых здесь кривизн (для скалярной, средней и гауссовой кривизн необходимо ещё понятие площади, для секционной и римановой — параллельного переноса, а для риччиевой — геодезических и экспоненциального отображения). При этом, естественно, задачи о связи изучаемой кривизны с ещё не изученными придётся отложить на потом.

Для понимания условий и для решения задач достаточно уверенного владения основами анализа функций нескольких переменных (и, чем дальше, тем больше, линейной алгебры). Все необходимые *новые* определения приводятся здесь. Кое-где требуется также теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие». Иногда подсказками являются соседние задачи; указания даются в конце каждой темы. Факты, для доказательства которых читателю может понадобиться литература (или консультация специалиста), приводятся со ссылками. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать.

Рассматриваемые понятия и факты интересны, полезны и нетривиальны даже для поверхностей вращения и графиков функций (в основном в трёхмерном пространстве), а также для поверхностей многогранников. Например, инвариант Дена, с помощью которого была решена 3-я проблема Гильберта, тесно связан со средней кривизной поверхности многогранника. Поэтому не приводится примеров более сложных поверхностей (кроме плоскости Лобачевского в самом конце). Однако для хорошего понимания материала читателю будет полезно изучить такие примеры [Ra03, MF04].

Заданные в условиях функции предполагаются бесконечно дифференцируемыми, если не оговорено противное. Определения даются в предположении, что используемые в них пределы (в частности, производные) существуют. Через  $\cdot$ ,  $\times$  и  $\wedge$  обозначаются скалярное, векторное и смешанное (не путать с внешним!) произведения, соответственно.

## Литература

- [BBB06] L. Bessieres, G. Besson, M. Boileau, La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman, Images des Mathematiques, 2006.  
<http://www.math.cnrs.fr/imagesdesmaths/IdM2006.htm>
- [Ca28] E. Cartan, Géométrie des espaces de Riemann. — Paris, 1928. Рус. перевод: Э. Картан, Геометрия римановых пространств. — Ленинград, 1936.
- [Gr90] A. Gray, Tubes. — Addison-Wesley, 1990. Рус. перевод: А. Грей, Трубки. — М.: Наука, 1997.
- [Gr94] M. Gromov, Sign and geometric meaning of curvature // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 61 (1991), 9-123 (1994). Рус. перевод: М. Громов, Знак и геометрический смысл кривизны. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
- [MSF04] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёв и А. Т. Фоменко, Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004.
- [MF04] А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко, Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Физматлит, 2004.
- [Pr] В. В. Прасолов, Курс дифференциальной геометрии (*готовится к публикации*).
- [Ra03] П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии. — М.: УРСС, 2003.
- [Ra04] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: УРСС, 2004.
- [Ta89] С. Л. Табачников, О кривизне // Квант, 1989, №5; Дифференциальная геометрия вокруг нас // Квант, 1989, №11.  
<http://kvant.mirror0.mccme.ru/>
- [To82] Дж. Торп, Начальные главы дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1982.
- [Vi92] Н. Я. Виленкин, О кривизне // Квант, 1992, №4.  
<http://kvant.mirror0.mccme.ru/>



# Глава 1. Кривизны кривых

## 1.1. Кривые

Будем обозначать точкой производную по  $t$ , а штрихом производную по *натуральному параметру* (когда это понятие появится).

1. Нарисуйте следующие кривые на плоскости (в пространстве) и найдите их параметрические уравнения:  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  или  $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$  в декартовых или полярных координатах на плоскости;  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  или  $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$ , или  $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), \theta(t))$  в декартовых, цилиндрических или сферических координатах в пространстве.

(а) Луч  $OA$  равномерно вращается вокруг своего неподвижного начала  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ . Точка  $M$  равномерно движется по лучу  $OA$ , начиная из точки  $O$ , со скоростью  $v$ . Описываемая точкой  $M$  кривая называется *спиралью Архимеда*.

(б) *Винтовая линия* — траектория конца стержня длины  $2r$ , равномерно со скоростью  $v$  падающего на землю, остающегося параллельным поверхности земли и одновременно вращающегося в горизонтальной плоскости вокруг своей середины равномерно с угловой скоростью  $\omega$ .

(с) Колесо радиуса  $R$  катится равномерно без проскальзывания по прямой. Описываемая точкой на ободе колеса кривая называется *циклоидой*.

(д) *Эллипс* — множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (*фокусов*) равна фиксированной величине  $d$ , большей расстояния  $f$  между фокусами.

(е) По какой кривой  $\gamma(t)$  движется электрон в постоянном магнитном поле, если начальная скорость электрона не параллельна и не перпендикулярна напряжённости  $H$ , где  $H$  — постоянный вектор? (Закон Био — Савара — Лапласа движения электрона утверждает, что  $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma} \times H$ .)

(f)\* *Локсодромия* — траектория путешественника, движущегося по поверхности Земли (которая считается сферой) из точки на пересечении экватора с Гринвичским меридианом всё время на северо-восток (то есть всё время под углом  $45^\circ$  к текущему меридиану). Широта путешественника возрастает равномерно. Перед выводом уравнения нарисуйте этот путь на сфере и на карте.

(g)\* *Цепная линия* — это кривая, форму которой под действием силы тяжести принимает нерастяжимая нить с закреплёнными концами.

(h) *Кривая Вивиани* — пересечение сферы радиуса  $R$  и прямого кругового цилиндра диаметра  $R$ , одна из образующих которого проходит через центр сферы.

(i)\* *Астроида* — кривая, для которой длина отрезка касательной в произвольной точке, заключённого между осями координат, постоянна и равна  $a$ .

(j) Окружность радиуса  $R$  катится без проскальзывания снаружи по окружности того же радиуса  $R$ . Описываемая точкой на внешней окружности кривая называется *кардиоидой*.

**Параметризованной гладкой регулярной кривой** на плоскости называется гладкое (т. е. бесконечно дифференцируемое) отображение  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которого скорость  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  при любом  $t$ .

**Непараметризованной гладкой регулярной кривой** на плоскости называется подмножество плоскости, являющееся образом некоторой параметризованной гладкой регулярной кривой.

Далее прилагательные «гладкая регулярная» опускаются.

*Параметризацией* непараметризованной кривой  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  называется любая параметризованная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которой  $\Gamma = \gamma[a, b]$ . Часто параметризованную кривую называют *параметризацией*, а непараметризованную кривую называют *кривой*.

Аналогично определяются кривые в пространстве.

2. (a) Приведите пример не взаимно однозначной параметризации  $\gamma$  окружности  $\Gamma$ .

(b) Приведите пример двух разных взаимно однозначных параметризаций  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  одной непараметризованной кривой  $\Gamma$ .

(c) Напишите определение параметризованной кривой, непараметризованной кривой и её параметризации в пространстве.

(d)\* Постройте гладкое (бесконечно дифференцируемое) отображение  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , образом которого является объединение отрезков  $\{(0, t)\}$  и  $\{(t, 0)\}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Длиной** параметризованной кривой  $\gamma = (x, y): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (или  $\mathbb{R}^n$ ) называется число

$$L(\gamma) := \sup\{|A_0A_1| + |A_1A_2| + \dots + |A_{n-1}A_n|, \\ a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b, \quad A_i := \gamma(a_i)\},$$

где  $\sup$  берётся по всем разбиениям отрезка  $[a, b]$ .

3. (a) Длина части графика дважды дифференцируемой функции равна  $\int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$ .

(b) **Теорема.** Длина плоской параметризованной кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , равна

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

4. Вычислите длины параметризованных кривых от  $\gamma(a)$  до  $\gamma(b)$  для некоторых параметризаций (а) винтовой линии; (б) параболы  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ; (в) спирали Архимеда; (г) циклоиды.

5. Найдите длину параметризованной кривой от  $\gamma(a)$  до  $\gamma(b)$  в (а) полярных; (б) сферических; (в) цилиндрических координатах.

**Длиной** непараметризованной кривой  $\Gamma$ , имеющей взаимно однозначную параметризацию  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (или  $\mathbb{R}^3$ ), называется длина параметризации  $\gamma$ .

**6. Теорема.** Приведённое определение корректно, т. е. если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — две взаимно однозначные параметризации одной непараметризованной кривой  $\Gamma$ , то  $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ .

*Предостережение:* если при доказательстве вы используете формулу для длины дуги, то не забудьте доказать, что отображение

$$\gamma_1 \gamma_2^{-1}: [a, b] \rightarrow [a, b]$$

имеет в каждой точке положительную производную. Впрочем, доказывать по определению длины дуги проще.

## 1.2. Кривизна кривых

0. Если велосипедист движется по криволинейной дороге с постоянной по модулю скоростью, то в любой точке его ускорение перпендикулярно его скорости, т. е. их скалярное произведение равно нулю.

1. (а) Мотоциклист<sup>1</sup> хочет проехать по винтовой линии с параметрами  $r = 10$  м,  $v = 100$  м/с и  $\omega = 2\pi c^{-1}$ , ось которой параллельна поверхности Земли. С какой постоянной скоростью он должен ехать, чтобы не упасть?

*Предостережение:* уравнение винтовой линии не обязательно будет уравнением движения мотоциклиста.

(б) Американская горка имеет форму циклоиды, находящейся в вертикальной плоскости. Вагончик движется по ней со скоростью 1 м/с. При какой высоте циклоиды в её верхней точке клиент будет чувствовать невесомость? Почему нереалистичен полученный Вами ответ?

(в) Автомобиль едет по отрезку спирали Архимеда  $r = \varphi \cdot 1$  м со скоростью 1 м/с, не пересекая реку — луч  $\varphi = 0$ . С какой угловой скоростью вращается берег реки в системе отсчёта автомобиля, когда тот находится в точке с  $\varphi = \pi/2$ ?

(г) Дан эллипс с параметрами  $d = 2$  и  $f = 1$ . Найдите радиус соприкасающейся окружности в точке эллипса, равноудалённой от фокусов.

---

<sup>1</sup>В задачах с явным физическим содержанием следует пренебрегать размерами (т. е. считать объекты материальными точками) и т. п.

Окружность с уравнением  $y = g(x)$  называется *соприкасающейся* с кривой  $y = f(x)$  в точке  $A$ , если она лучше всех окружностей приближает эту кривую, т. е. если эта окружность проходит через точку  $A$ , имеет общую касательную с кривой в точке  $A$  и общую с кривой проекцию ускорения на нормаль в точке  $A$ .

*Скоростью (или производной)* параметризованной кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , в точке  $t \in [a, b]$  называется вектор  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ .

Параметризованная кривая называется *натуральной*, если модуль её скорости равен 1 в любой точке или, эквивалентно, если её длина от 0 до  $s$  равна  $s$  для любого  $s$ . Натурально параметризованную кривую будем обозначать через  $\sigma$  (а не  $\gamma$ ).

2. (а) Для натуральной кривой ускорение перпендикулярно скорости в любой точке.

(б) Найдите натуральную параметризацию винтовой линии в виде  $\sigma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ .

(с) То же для циклоиды, в виде  $\sigma(s) = (x(s), y(s))$ .

(д) Любая непараметризованная кривая, имеющая взаимно однозначную параметризацию (т. е. без самопересечений), имеет единственную (с точностью до сдвига) натуральную параметризацию.

(е) Приведите пример непараметризованной кривой с одной точкой самопересечения, имеющей более одной натуральной параметризации.

*Ускорением (или второй производной)* параметризованной кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  в точке  $t \in [a, b]$  называется вектор  $\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ .

Зафиксируем ориентацию плоскости.



Рис. 0. Кривизна кривой

**Кривизной** в точке  $s_0$  плоской натуральной параметризованной кривой  $\sigma$  называется число  $k(s_0)$ , равное по модулю числу  $|\sigma''(s_0)|$  и совпадающее с ним (или противоположное ему) по знаку, если векторы  $\sigma'(s_0)$  и  $\sigma''(s_0)$  образуют положительный (отрицательный) базис. Иными словами,  $k(s_0) := \sigma'(s_0) \wedge \sigma''(s_0)$ . **Кривизной** в точке  $A = \sigma(s_0)$  непараметризованной кривой  $\Gamma$  с натуральной параметризацией  $\sigma$  называется число  $k(A) := k(s_0)$ .

3. (а) Кривизна натурально параметризованной кривой равна угловой

скорости вращения вектора скорости.

(b) **Теорема.** Кривизна непараметризованной кривой с произвольной параметризацией  $\gamma$  в точке  $\gamma(t)$  равна проекции ускорения  $\ddot{\gamma}(t)$  на прямую, перпендикулярную скорости  $\dot{\gamma}(t)$ , делённой на квадрат модуля скорости:

$$k(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^3} = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|^{3/2}},$$

где аргумент  $t$  функций в правых частях пропущен.

Два подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$  называются *объемлемо изометричными*, если между ними существует *объемлемая изометрия* (движение), т. е. сохраняющее расстояния (в  $\mathbb{R}^n$ !) отображение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , переводящее первое подмножество во второе.

4. (a) **Теорема.** Для любой функции  $\bar{k}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  существует и единственна (с точностью до объемлемой изометрии) плоская естественно параметризованная кривая  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которой  $k(\sigma(s)) = \bar{k}(s)$ .

(b) **Следствие.** Две ориентированные плоские несамопересекающиеся непараметризованные кривые объемлемо изометричны тогда и только тогда, когда функции кривизны их натуральных параметризаций отличаются сдвигом и, возможно, знаком, т. е. когда существует число  $a$ , для которого либо  $k(\sigma_2(s)) = k(\sigma_1(s + a))$  при любом  $s$ , либо  $k(\sigma_2(s)) = k(\sigma_1(-s + a))$  при любом  $s$ .

Длина непараметризованной кривой, скорость параметризованной кривой и натуральная параметризация определяются для пространства аналогично случаю плоскости.

*Кривизной* в точке  $s_0$  пространственной натуральной параметризованной кривой  $\sigma$  называется число  $k(s_0) := |\sigma''(s_0)|$ . Кривизна пространственной непараметризованной кривой определяется дословно так же, как плоской.

Заметим, что кривизна кривой, рассматриваемой как кривая в плоскости, может отличаться знаком от кривизны той же кривой, рассматриваемой в пространстве.

5.  $k(\gamma(t)) = \frac{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}$  для пространственной параметризованной кривой  $\gamma = (x, y, z)$ .

*Указание к 1b.* Пусть уравнение циклоиды  $\gamma(t)$ , а уравнение движения вагончика по ней  $\sigma(s)$ , причём  $\sigma(0) = \gamma(0)$ . Далее см. указание к 3b.

*Указание к 3b.* В этом решении производные вектор-функции  $\gamma$  берутся по параметру  $t$  в точке  $t$ , а производные вектор-функции  $\sigma$  берутся по параметру  $s$  в точке  $l(t) := \int_0^t |\dot{\gamma}(t)| dt$ .

Так как  $|\sigma'| = 1$ , то  $\dot{\gamma} = \sigma'|\dot{\gamma}|$ . Интегрируя это соотношение, имеем  $\sigma(l(t)) = \gamma(t)$ . Из этого и  $\dot{l} = |\dot{\gamma}|$  вытекает  $\ddot{\gamma} = \sigma''|\dot{\gamma}|^2 + \sigma'|\dot{\gamma}'|_t$ . Из этого и  $\sigma'' \perp \dot{\gamma}$  вытекает  $\ddot{\gamma} \wedge \dot{\gamma} = \sigma''|\dot{\gamma}|^2 \wedge \dot{\gamma} = -k|\dot{\gamma}|^3$ .

*Указание к 4а.* Пусть  $\sigma = (x, y)$  — искомая кривая. Возьмём систему координат  $Oxy$ , для которой  $\sigma(0) = (0, 0)$  и ось  $Ox$  сонаправлена с  $\sigma'(0)$ . Обозначим  $\alpha(s) := \angle(\sigma'(s), Ox)$ . Тогда  $\sigma'(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ . По За (ср. с 1с)  $\alpha'(s) = k(\sigma(s))$ .

Поэтому для построения искомой кривой  $\sigma = (x, y)$  нужно взять

$$\alpha(s) = \int_0^s k(s)ds, \quad x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s)ds \quad \text{и} \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s)ds.$$

### 1.3. Кручение пространственных кривых

1. В невесомости мотоциклист едет со скоростью 1 по винтовой линии с параметрами  $r, v$  и  $\omega$ . Найдите угловую скорость  $\Omega(t)$  вращения плоскости колеса (содержащей векторы скорости и ускорения) в зависимости от времени.

Параметризованная кривая  $\gamma$  называется *бирегулярной*, если векторы  $\dot{\gamma}(t)$  и  $\ddot{\gamma}(t)$  линейно независимы для любого  $t$ .

Непараметризованная кривая  $\gamma$  называется *бирегулярной*, если она имеет бирегулярную параметризацию.

2. (а) Приведите пример (гладкой регулярной) непараметризованной кривой, не являющейся бирегулярной.

(б) Две параметризованные кривые с одинаковым образом бирегулярны или нет одновременно.

3. (а) При каких  $a$  образ параметризованной кривой, заданной уравнением  $\gamma(t) = (e^t, 2e^{-t}, e^{at})$ , лежит в некоторой плоскости?

(б) Образ параметризованной бирегулярной кривой  $\gamma$  лежит в некоторой плоскости тогда и только тогда, когда  $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t) \wedge \dddot{\gamma}(t) = 0$  для любого  $t$ .

**Кручением** в точке  $s_0$  пространственной бирегулярной натуральной параметризованной кривой  $\sigma$  называется угловая скорость  $\chi(s_0)$  вращения *соприкасающейся* плоскости (т.е. плоскости, содержащей векторы скорости и ускорения). Эта скорость берётся со знаком плюс (минус), если векторы скорости, ускорения и производной от ускорения образуют положительный (отрицательный) базис.

4. Напишите определение кручения непараметризованной бирегулярной кривой.

5. Пусть  $\sigma$  — бигулярная натуральная параметризованная кривая. В этой задаче производные берутся по её параметру  $s$ . Обозначим  $v := \sigma'$  и  $n := \sigma''/|\sigma''|$ ;  $v$  и  $n$  называются векторами *скорости* и *нормали* и вместе с  $v \times n$  образуют *репер Френе*.

(а)  $\sigma'' \neq 0$  (т. е. определение вектора нормали корректно).

(б)  $n' = -kv$  (формула Френе для плоского случая).

(с)  $\chi$  равно проекции вектора  $n'$  на направленную ось, перпендикулярную векторам скорости и ускорения:  $\chi = n' \cdot (v \times n) = v \wedge n \wedge n'$ .

(д)  $n' = -kv + \chi(v \times n)$ .

(е)  $b' = -\frac{\chi}{k}\sigma''$ , где  $b := \frac{\sigma' \times \sigma''}{|\sigma''|}$ .

Формулы из п. д) и е) вместе с формулой  $v' = kn$  называются *формулами Френе в пространстве*.

6. (а)  $\chi = \frac{\sigma' \wedge \sigma'' \wedge \sigma'''}{k^2}$  для натуральной параметризованной кривой  $\sigma$ .

(б)  $\chi(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \wedge \ddot{\ddot{\gamma}}}{|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|^2}$  для бигулярной параметризованной кривой  $\gamma$  (не обязательно натуральной; аргумент  $t$  функций в правой части пропущен).

(с)\* **Теорема.** Для любых функций  $\bar{k}: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  и  $\bar{\chi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  существует и единственна пространственная бигулярная натурально параметризованная кривая  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , для которой  $k(\sigma(s)) = \bar{k}(s)$  и  $\chi(\sigma(s)) = \bar{\chi}(s)$ .

*Указание.* Для заданных функций  $\bar{k}$  и  $\bar{\chi}$  пара векторов  $(v, n)$  однозначно определена ввиду формул Френе  $v' = kn$  и  $n' = -kv + \chi(v \times n)$ .

(д) Сформулируйте и докажите аналог следствия 4б из предыдущей темы для пространственных кривых.

*Указание к 1.* Угловая скорость вращения плоскости равна угловой скорости вращения вектора, нормального к этой плоскости. Если плоскость содержит векторы скорости и ускорения, то этот нормальный вектор равен векторному произведению векторов скорости и ускорения. Уравнение винтовой линии  $\gamma(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, vt)$ . Обозначим

$$\bar{\omega} := \frac{\omega}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\omega}{\sqrt{r^2\omega^2 + v^2}}.$$

Тогда уравнение движения мотоцикла

$$\sigma(s) = \left( r \cos \bar{\omega}s, r \sin \bar{\omega}s, \frac{vs\bar{\omega}}{\omega} \right).$$

Находим

$$\begin{aligned}\sigma'(s) &= (-r\bar{\omega} \sin \bar{\omega}s, r\bar{\omega} \cos \bar{\omega}s, \frac{v\bar{\omega}}{\omega}), \\ \sigma''(s) &= (-r\bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega}s, -r\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}s, 0).\end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ  $\Omega(t) = \frac{v\omega}{\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}}$ .

*Указание к 2а.* Прямая.

*Указание к 2б.* Замена параметра меняет только касательную составляющую вектора скорости.

*Указание к 5б.* Угловая скорость вращения вектора  $n$  равна угловой скорости вращения вектора  $v$ , поскольку эти векторы перпендикулярны.

*Указание к 6б.* В этом решении производные вектор-функции  $\gamma$  берутся по параметру  $t$  в точке  $t$ , а производные вектор-функций  $\sigma$  и  $b$  берутся по параметру  $s$  в точке  $l(t) := \int_0^t |\dot{\gamma}(t)| dt$ .

Кручение равно угловой скорости вращения (по параметру  $s$ ) вектора  $b(s) := \frac{\sigma' \times \sigma''}{|\sigma''|}$ . Так как  $|b(s)| = 1$ , то  $\chi(\gamma(t)) = |b'|$ . Так как плоскости, образованные парами векторов  $(\sigma', \sigma'')$  и  $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ , совпадают, то  $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \nu b$ , где  $\nu := |\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}|$ . Дифференцируя по  $t$ , получаем  $\dot{\gamma} \times \dddot{\gamma} = \nu b' |\dot{\gamma}| + \nu' b$ . Умножая скалярно на  $\ddot{\gamma}$ , получаем

$$\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \wedge \dddot{\gamma} = \nu |\dot{\gamma}| b' \cdot \ddot{\gamma} = \frac{\nu |\dot{\gamma}| \chi \nu}{|\dot{\gamma}|} = \nu^2 \chi.$$

Здесь последнее равенство выполнено, поскольку  $b' \perp \dot{\gamma}$  и  $b' \perp b$ , откуда  $b' \parallel \sigma''$ .



## Глава 2. Числовые кривизны поверхностей

### 2.1. Поверхности

Под (*непараметризованной*) *поверхностью* далее можно понимать поверхность вращения (графика бесконечно дифференцируемой положительной функции).

Приведём общие определения. Пусть  $D$  — замкнутый круг или прямоугольник на плоскости.

**Несамопересекающейся компактной гладкой регулярной параметризованной поверхностью с краем** называется такое бесконечно дифференцируемое отображение  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  (или, что то же самое, упорядоченная тройка отображений  $x, y, z: D \rightarrow \mathbb{R}$ ), которое инъективно (т. е. взаимно-однозначно с образом) и производная которого (т. е. пара векторов  $(r_u, r_v)$ ) линейно независима при любых  $(u, v) \in D$ .

Все встречающиеся параметризованные поверхности считаются несамопересекающимися компактными гладкими регулярными с краем, и эти прилагательные опускаются (смысл каждого из этих прилагательных по отдельности в курсе не используется и потому не определяется).

*Элементарной (несамопересекающейся компактной гладкой регулярной) непараметризованной поверхностью с краем* называется образ  $r(D)$  параметризованной поверхности  $r$ . Эту параметризованную поверхность называют *параметризацией* образа  $r(D)$ , или *параметрическим уравнением* образа  $r(D)$  (или *системой координат* с координатным пространством  $D$  на  $r(D)$ ).

*Непараметризованной поверхностью (несамопересекающейся компактной гладкой регулярной)* называется ограниченное подмножество  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ , для любой точки  $P \in \Pi$  которого существует такая её окрестность  $OP$  в  $\mathbb{R}^3$ , что  $\Pi \cap OP$  является элементарной непараметризованной поверхностью. Далее *несамопересекающаяся компактная гладкая регулярная непараметризованная поверхность* называется сокращённо **поверхностью**.

Поверхности произвольной размерности в евклидовом пространстве произвольной размерности определяются аналогично. Далее, если не оговорено противное, рассматриваются двумерные поверхности в  $\mathbb{R}^3$ .

1. Дайте геометрические или кинематические определения следующих подмножеств в  $\mathbb{R}^3$  и докажите, что они являются (непараметризованными) поверхностями.

- квадрат на плоскости;
- боковая поверхность прямого кругового цилиндра;
- боковая поверхность прямого кругового усечённого конуса;

- (d) сфера;
- (e) тор;
- (f) лист Мёбиуса;
- (g) поверхность вращения;
- (h) седлообразная поверхность  $z = xy$ .

## 2.2. Объемлемая и внутренняя изометрии. Скалярная кривизна

Напомним, что два подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$  называются *объемлемо изометричными*, если между ними существует *объемлемая изометрия* (движение), т. е. сохраняющее расстояния (в  $\mathbb{R}^n$ !) отображение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , переводящее первое во второе.

Две (непараметризованные) поверхности называются *внутренне изометричными*, если между ними существует *внутренняя изометрия*, т. е. отображение одной в другую, сохраняющее длины всех кривых.

Большая часть дальнейшего материала мотивирована следующими двумя проблемами: определить, являются ли данные (непараметризованные) поверхности

- а) внутренне изометричными?
- б) объемлемо изометричными?

2. (а) Прямоугольник на плоскости внутренне изометричен некоторой части любого такого цилиндра, у которого диаметр больше стороны прямоугольника.

(б) Единичный квадрат на плоскости внутренне изометричен некоторой части тора, задаваемого в  $\mathbb{R}^4$  уравнениями  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ ,  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$ .

(с) Прямоугольник на плоскости не является объемлемо изометричным никакой части никакого цилиндра.

3. (а) Сфера и плоскость не являются внутренне изометричными.

(б) Никакой круг на плоскости не является внутренне изометричным никакой части сферы.

(с) Никакой круг на сфере одного радиуса не является внутренне изометричным никакой части сферы другого радиуса.

*Расстоянием по поверхности*  $\Pi$  между точкам  $P, X \in \Pi$  называется инфимум  $|P, X|$  длин кривых на этой поверхности, соединяющих  $P$  и  $X$ . Ясно, что *внутренняя изометрия сохраняет расстояния по поверхности*. Обратное (т. е. то, что отображение, сохраняющее расстояния на поверхности, сохраняет длины всех кривых на поверхности) будет доказано ниже с использованием римановой метрики.

Круг и окружность на поверхности определяются аналогично случаю плоскости (через расстояние *на поверхности*). Для поверхности  $\Pi$  и точки  $P \in \Pi$  обозначим через  $L_{\Pi,P}(R)$  длину окружности на  $\Pi$  радиуса  $R$  с центром в точке  $P \in \Pi$ .

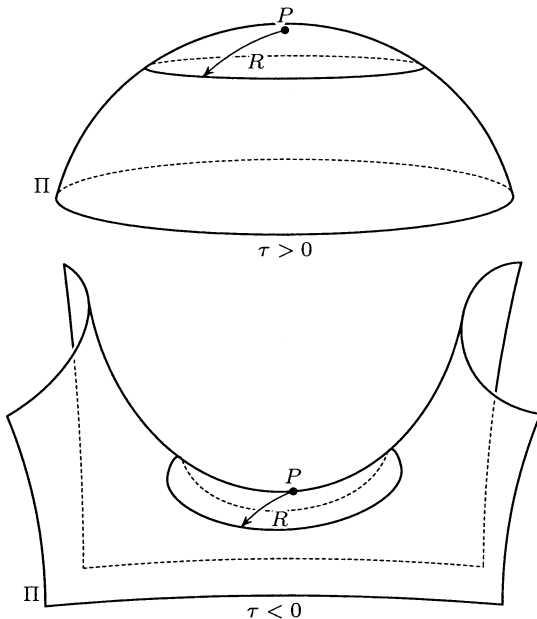


Рис. 1. Скалярная кривизна поверхности

При решении задачи 3 естественно возникает следующее важное понятие. **Скалярной кривизной** поверхности  $\Pi$  во внутренней точке  $P$  называется число

$$\tau = \tau_{\Pi,P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2\pi R - L_{\Pi,P}(R)}{\pi R^3}.$$

Это и следующее определения даются в предположении, что пределы в правой части существуют; далее доказывается, что они действительно существуют.

Далее для скалярной и других кривизн индексы  $P$  и  $\Pi$  пропускаются из обозначений, поскольку ясны из контекста.

4.\* (a) Такой предел существует.

(b)  $L_{\Pi,P}(R) = 2\pi R - \frac{\pi\tau R^3}{6} + O(R^5)$  [Gr90, BVB06].

*Указание.* Если не получается, то вернитесь к задаче после изучения темы «Риманова метрика и применение к изометриям».

5. (abcd) Вычислите скалярную кривизну в каждой точке для поверхностей из задачи 1abcd темы «Поверхности».

(е)\* Скалярная кривизна в точке  $(0, 0, 0)$  отрицательна для седлообразной поверхности  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

6. (а) Как изменяется скалярная кривизна при гомотетии пространства?

(б) Внутренняя изометрия сохраняет скалярную кривизну.

(с)\* Существует ли отображение поверхностей, сохраняющее скалярную кривизну, но не являющееся внутренней изометрией?

(d)\* **Теорема.** Элементарная непараметризованная двумерная поверхность внутренне изометрична некоторой части плоскости тогда и только тогда, когда её скалярная (или секционная, или гауссова, см. далее) кривизна равна нулю в каждой точке [MF04, Ra04].

Для доказательства этой просто формулируемой теоремы (как и для получения формул для вычисления скалярной кривизны) нужно изучить почти весь настоящий курс!

## 2.3. Площадь поверхности

**Площадью** называется отображение  $S$  из семейства всех двумерных поверхностей в луч  $[0, +\infty)$ , для которого выполнены следующие условия.

(аддитивность) Если  $\Pi, \Pi'$  и  $\Pi \cup \Pi'$  — поверхности, причём  $\Pi \cap \Pi'$  является объединением не более чем счётного семейства кривых, то

$$S(\Pi \cup \Pi') = S(\Pi) + S(\Pi').$$

(монотонность) Если  $f: \Pi \rightarrow f(\Pi)$  — не увеличивающее длины кривых отображение между поверхностями, то  $S(f(\Pi)) \leq S(\Pi)$ .

(нормировка) Площадь единичного квадрата на плоскости равна 1.

**Теорема о площади.** *Такое отображение существует и единственно.*

В следующих задачах<sup>1</sup> (кроме 4bd) можно пользоваться *существованием* из теоремы о площади (а также аналогичной теоремой и всеми другими результатами для площадей плоских фигур). В предположении существования можно найти площадь произвольной поверхности и этим доказать *единственность*. *Не используя предположение о существовании*, можно проверить выполнение свойств площади для найденного отображения  $S$  и этим доказать существование.

---

<sup>1</sup>Решения задач из этой темы *особенно полезно* проверить с преподавателем.

1. Внутренняя изометрия сохраняет площади.

2. (a) Площадь сферического двуугольника с углом  $\alpha$  и диаметрально противоположными вершинами равна  $2\alpha$ .

(b) **Теорема.** Площадь сферического треугольника с углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  равна  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ .

(c) **Теорема.** Площадь сферического многоугольника с углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  равна  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi$ .

3. (a) Площадь круга радиуса  $R$  на сфере равна  $2\pi(1 - \cos R)$ .

(b) Площадь поверхности, образованной вращением графика функции  $f: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  вокруг оси  $Ox$ , равна  $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

4. (a)\* **Теорема.** Площадь элементарной непараметризованной поверхности  $r(D)$  равна  $S(r(D)) = \iint_D |r_u \times r_v| du dv$  [Ra03].

(b) Докажите без использования теоремы о площади, что предыдущее выражение не зависит от выбора параметризации  $r$ .

(c) Докажите *единственность* в теореме о площади (предполагая существование).

(d)\* Докажите *существование* в теореме о площади (не предполагая единственности!). Для проверки монотонности полезно понятие римановой метрики, определённое ниже, см. [Gr94].

5. Обозначим через  $S_{\Pi, P}(R)$  площадь круга на  $\Pi$  радиуса  $R$  с центром в точке  $P \in \Pi$ .

(a)  $L_{\Pi, P}(R) = S'_{\Pi, P}(R)$ .

(b)  $\tau = 24 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\pi R^2 - S_{\Pi, P}(R)}{\pi R^4}$ .

(c)\*  $S_{\Pi, P}(R) = \pi R^2 - \frac{\pi \tau}{24} R^4 + O(R^6)$  [Gr90].

## 2.4. Скалярная кривизна (обобщение)

Для трёхмерной поверхности  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$  и точки  $P \in \Pi$  обозначим через  $S_{\Pi, P}(R)$  площадь сферы на  $\Pi$  радиуса  $R$  с центром в точке  $P \in \Pi$ . **Скалярной кривизной** поверхности  $\Pi$  в точке  $P$  называется число

$$\tau = \tau_{\Pi, P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{4\pi R^2 - S_{\Pi, P}(R)}{(4/3)\pi R^4}.$$

1. Вычислите скалярную кривизну точек следующих трёхмерных поверхностей в  $\mathbb{R}^4$ :

(a) гиперплоскости  $\mathbb{R}^3$ ; (b) цилиндра  $S^2 \times \mathbb{R}$ ; (c) цилиндра  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ; (d) конуса  $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ; (e) сферы  $S^3$ ; (f)\* тора  $S^2 \times S^1$ .

Аналогично площади двумерных поверхностей определяется  **$n$ -мерный объём**  $n$ -мерных поверхностей. Аналогично двумерному случаю доказывается теорема о существовании и единственности  $n$ -мерного объёма, а также следующий результат:  $n$ -мерный объём элементарной непараметризованной поверхности  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  равен

$$V(r(D)) = \int \dots \int_D |r_1 \wedge \dots \wedge r_n| du_1 \dots du_n.$$

Здесь  $D$  — единичный куб в  $\mathbb{R}^n$  и  $|r_1 \wedge \dots \wedge r_n|$  —  $n$ -мерный объём  $n$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $r_1, \dots, r_n$ .

Пусть  $n \geq 2$  и  $\Pi$  —  $n$ -мерная поверхность в многомерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Обозначим через  $V_n$  и  $S_n = nV_n$   $n$ -мерный объём и  $(n-1)$ -мерный объём шара радиуса 1 в  $\mathbb{R}^n$ , а через  $V_{\Pi,P}(R)$  и  $S_{\Pi,P}(R)$   $n$ -мерный объём и  $(n-1)$ -мерный объём шара на  $\Pi$  радиуса  $R$  с центром в точке  $P \in \Pi$ . **Скалярной кривизной** поверхности  $\Pi$  в точке  $P$  называется число

$$\tau = \tau_{\Pi,P} := 6 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{S_n R^{n-1} - S_{\Pi,P}(R)}{V_n R^{n+1}}.$$

2. (a) Такой предел существует.

(b)  $S_{\Pi,P}(R) = V'_{\Pi,P}(R)$ .

(c)  $S_n = nV_n$ .

(d)  $\tau = 6(n+2) \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V_n R^n - V_{\Pi,P}(R)}{V_n R^{n+2}}$ .

(e)\*  $V_P(R) = V_n R^n - \frac{\tau}{6(n+2)} V_n R^{n+2} + O(R^{n+4})$  [Gr90].

**3. Теорема.** Внутренняя изометрия сохраняет скалярную кривизну. (Докажите с использованием теоремы об  $n$ -мерном объёме.)

## 2.5. Главные кривизны

Пусть задана система точек  $A_1, \dots, A_s$  с массами  $m_1, \dots, m_s$ . *Моментом инерции этой системы относительно прямой  $l$*  называется число  $I(l) = m_1 |A_1 l|^2 + \dots + m_s |A_s l|^2$ , где  $|A_i l|$  — расстояние от точки  $A_i$  до прямой  $l$ .

1. (a) Пусть  $I_+$  и  $I_-$  — наибольшее и наименьшее значения моментов инерции относительно прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку  $O$  (возможно,  $I_+ = I_-$ ). Возьмём одну из прямых  $l_+$ , для которой  $I(l_+) = I_+$ . Тогда  $I(l) = I_+ \cos^2 \varphi + I_- \sin^2 \varphi$ , где  $\varphi = \angle(l, l_+)$ .

(b)\* В пространстве существуют три такие прямые  $l_1, l_2, l_3$ , проходящие через  $O$ , что для любой прямой  $l$ , проходящей через  $O$ , выполнено  $I(l) = I(l_1) \cos^2(\angle l, l_1) + I(l_2) \cos^2(\angle l, l_2) + I(l_3) \cos^2(\angle l, l_3)$ .

**Коориентацией** поверхности  $\Pi$  называется поле единичных нормальных (т. е. перпендикулярных) к поверхности векторов  $n(P)$ , непрерывно зависящих от точки  $P \in \Pi$ .

*Кривизной* (непараметризованной) кривой на коориентированной поверхности называется проекция ускорения на нормаль при движении по этой кривой с единичной скоростью.

(Кривизна в указанном смысле совпадает по модулю, но не обязательно по знаку, с кривизной соответствующей непараметризованной кривой.)

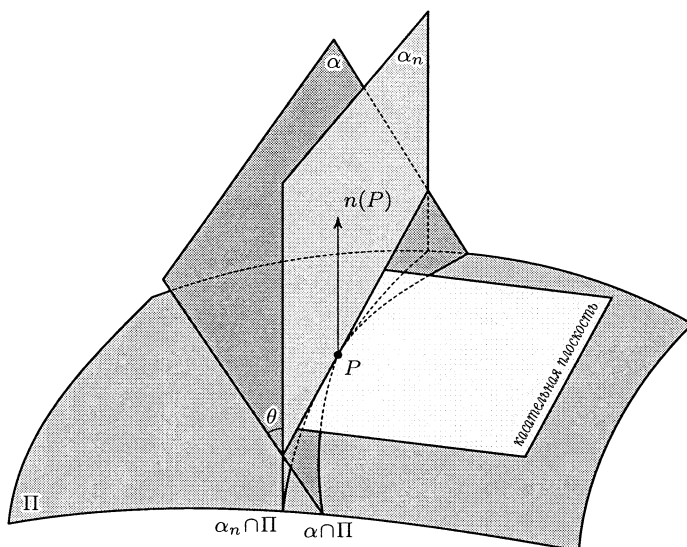


Рис. 2. Нормальное и «косое» сечения поверхности

Простейшие инварианты объемлемой изометрии появились ещё в XVIII веке при решении следующей проблемы. Выберем коориентированную поверхность  $\Pi$  и точку  $P$  на ней. Как зависит от плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $P$ , кривизна в точке  $P$  (непараметризованной) кривой  $\alpha \cap \Pi$  (см. рис. 2)?

**Главными кривизнами**  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  коориентированной поверхности  $\Pi$  в точке  $P \in \Pi$  называются наибольшее и наименьшее значения кривизн в точке  $P$  (непараметризованных) кривых пересечения поверхности с плоскостями, проведёнными через нормаль в точке  $P$ .

*Главным направлением* коориентированной поверхности  $\Pi$  в точке  $P \in \Pi$ , отвечающим данной главной кривизне  $\lambda_{\pm}$ , называется направление той прямой (в касательной плоскости к  $\Pi$  в точке  $P$ ), для которой кривизна пересечения поверхности с плоскостью, проходящую через эту

прямую и нормаль, равна  $\lambda_{\pm}$ .

2. Задав коориентацию, найдите главные кривизны и главные направления в точках поверхностей из задачи 1abcdef из темы «Поверхности».

3. Как изменяются главные кривизны при

(a) изменении коориентации на противоположную?

(b) гомотетии пространства?

4. (a) Объемлеяемая изометрия сохраняет главные кривизны.

(b) Внутренняя изометрия может не сохранять главные кривизны.

5. **Теорема.** (a) Если в точке  $P$  поверхности  $\Pi$  главные кривизны одного знака, то для некоторого  $\varepsilon > 0$  пересечение  $\Pi$  и шара  $B(P, \varepsilon)$  в  $\mathbb{R}^3$  с центром в  $P$  и радиуса  $\varepsilon$  лежит по одну сторону от касательной плоскости к  $\Pi$  в точке  $P$ .

(b) Если в точке  $P$  поверхности  $\Pi$  главные кривизны разного знака, то ни для какого  $\varepsilon > 0$  пересечение  $\Pi \cap B(P, \varepsilon)$  не лежит по одну сторону от касательной плоскости к  $\Pi$  в точке  $P$ .

6. (a) Найдите кривизну  $k(\varphi)$  в начале координат кривой пересечения поверхности  $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$  с плоскостью, проведённой через ось  $Oz$  под углом  $\varphi$  к оси  $Ox$ .

(b) Для поверхности  $z = f(x, y)$  предположим, что она касается плоскости  $z = 0$ , т. е.  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  и обозначим через  $h = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$  гессиан. Тогда главные кривизны являются корнями уравнения  $(\lambda - f_{xx})(\lambda - f_{yy}) = f_{xy}^2$ , т. е.  $\det(h - \lambda E) = 0$ , а главные направления соответствуют собственными векторами оператора  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , матрица которого в стандартном базисе является гессианом (инвариантное определение и геометрический смысл этого оператора приведены в пункте «Оператор кривизны Вейнгартена»).

(c) **Формула Эйлера.** Пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  — коориентированная поверхность и  $P \in \Pi$ . Пусть  $k(\varphi)$  — кривизна в точке  $P$  кривой пересечения поверхности с плоскостью, проведённой через нормаль в точке  $P$  под углом  $\varphi$  к тому лучу, для которого эта кривизна максимальна (т. е. к главному направлению, отвечающему  $\lambda_+$ ). Тогда  $k(\varphi) = \lambda_+ \cos^2 \varphi + \lambda_- \sin^2 \varphi$ .

(d) Если главные кривизны различны, то главные направления ортогональны.

(e)\* Как вычислять главные кривизны для поверхностей, заданных в параметрическом виде?

7. (a) Как отличаются (для поверхностей, рассмотренных в задаче 2) кривизны кривых пересечения поверхности с двумя плоскостями ( $\alpha$  и  $\alpha_n$  на рис. 2), содержащими точку  $P$  и пересекающими касательную плоскость к поверхности по одной и той же прямой, одна из которых проходит



через нормаль, а другая под углом  $\theta$  к нормали?

*Указание.* Если не получается, то см. следующий пункт.

(b) Проекция на нормаль в точке  $P = \gamma(0)$  ускорения параметризованной кривой  $\gamma$  на поверхности  $\Pi$  зависит только от скорости  $\gamma'(0)$  этой кривой в точке  $P$ .

(c) **Теорема Менье.** Обозначим через  $k$  и  $k_n$  кривизны кривых пересечения поверхности с двумя плоскостями ( $\alpha$  и  $\alpha_n$  на рис. 2), содержащими точку  $P$  и пересекающими касательную плоскость к поверхности по одной и той же прямой, одна из которых проходит через нормаль, а другая под углом  $\theta$  к нормали. Тогда  $k \cos \theta = k_n$ .

(d) Определим отображение  $d(\varepsilon): \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$  формулой  $d(\varepsilon)(P) = P + \varepsilon n(P)$ . Тогда проекция из (b) равна  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|d(\varepsilon)'_P(a)|^2 - |a|^2}{2\varepsilon}$ , где  $a = \gamma'(0)$ .

Главные кривизны многомерных коориентированных поверхностей определяются более сложно (см. пункт «Вторая квадратичная форма»).

*Указание к 1а и 6с.* Утверждения вытекают из того, что момент инерции и кривизна есть функции вида  $f(\varphi) = A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi$ .

*Указание к 1b.* Эти прямые попарно ортогональны.

*Указание к 2f.* Глобально главные кривизны не определены.

*Указание к 6b.* Проверяется вычислениями. Прямое доказательство этого результата (а также формул для  $H$  и  $K$  далее) получается, если интерпретировать гессиан как матрицу *второго дифференциала* функции  $f$ , или *второй квадратичной формы* задаваемой ей поверхностью.

*Указание к 6с.* Достаточно доказать для поверхности  $z = f(x, y)$ , касающейся плоскости  $Oxy$  в начале координат  $O$ .

*Указание к 6d.* Следует из 6с.

*Указание к 6е.* Напишите уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности  $r(u, v)$  и используйте 6b.

*Указание к 7b.* Обозначим  $n = n(\gamma(t))$ . Тогда

$$n \cdot \gamma' = 0 \quad \Rightarrow \quad n' \cdot \gamma' + n \cdot \gamma'' = 0 \quad \Rightarrow \quad n \cdot \gamma'' = -\gamma' \cdot \frac{\partial n}{\partial \gamma'}.$$

*Указание к 7ас.* Следует из 7b.

*Другое указание к 7b.* Можно считать, что поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , а уравнение плоскости  $z = x \operatorname{ctg} \theta$ . На кривой пересечения рассмотрим параметр  $y$ . Дифференцируя, получаем  $z_y = f_x x_y + f_y$  и  $z_y = x_y \operatorname{ctg} \theta$ . Поэтому в точке  $(0, 0, 0)$  имеем  $y_y = 1$ ,  $z_y = 0$  и  $x_y = 0$ , т. е. скорость кривой пересечения

единичная. Проекция ускорения кривой пересечения на ось  $Oz$  равна  $z_{yy} = (f_{xy} + f_{xx}x_y)x_y + f_{xxyy} + f_{yx}x_y + f_{yy}$ . В точке  $(0, 0, 0)$  имеем  $z_{yy} = f_{yy}$ , что не зависит от  $\theta$ . Поэтому проекция на ось  $Oz$  ускорения кривой пересечения в начале координат не зависит от  $\theta$ . А поскольку это ускорение лежит в проведённой плоскости, оно равно  $k(\varphi, \theta) = k(\varphi, 0)/\cos \theta$ .

## 2.6. Полная средняя кривизна

$\varepsilon$ -окрестностью фигуры  $M$  (на плоскости или в пространстве) называется множество  $M_\varepsilon$  точек, удалённых от некоторой точки фигуры  $M$  не более, чем на  $\varepsilon$ :

$$M_\varepsilon := \{x : |x - y| < \varepsilon \text{ для некоторой } y \in M\}.$$

1. Нарисуйте  $\varepsilon$ -окрестность в плоскости и найдите её периметр и площадь для

- (a) квадрата со стороной 1;
- (b) выпуклого многоугольника площади  $S$  и периметра  $P$ .

2. Нарисуйте  $\varepsilon$ -окрестность в пространстве и найдите её объём и площадь её поверхности для

- (a) куба с ребром 1;
- (b) правильной треугольной призмы с длинами рёбер 1;
- (c) правильного тетраэдра с ребром 1;
- (d) произвольного выпуклого многогранника (решите сами, какие нужно задавать данные; аккуратно докажите ваше утверждение о коэффициенте при  $\varepsilon^2$ ).

3. (abcd) Нарисуйте  $\varepsilon$ -окрестность в пространстве и найдите её объём  $V(M_\varepsilon)$  для тех же случаев, что в задаче 2.

(e) Коробки имеют форму прямоугольных параллелепипедов. Можно ли в одной коробке пронести другую коробку с большей суммой измерений по длине, ширине и высоте?

(f) Если выпуклый многогранник  $M$  с длинами рёбер  $l_i$  и двугранными углами  $\alpha_i$  содержится в шаре радиуса  $R$ , то  $\sum l_i(\pi - \alpha_i) \leq 8\pi R$ .

Поверхность (граница) фигуры  $F$  обозначается  $\partial F$ .

Полной средней кривизной выпуклого многогранника  $M$  называется число

$$H(\partial M) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\partial M_\varepsilon) - S(\partial M)}{\varepsilon}.$$

В задаче 2d вы доказали, что

$$H(\partial M) = \sum l_i(\pi - \alpha_i).$$

Теперь рассмотрим коориентированную поверхность  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ . Поверхность, образованная концами векторов  $\varepsilon n(P)$ , отложенных от точек  $P$  поверхности  $\Pi$ , обозначим  $\Pi_\varepsilon := \{P + \varepsilon n(P)\}_{P \in \Pi}$  (рис. 3).

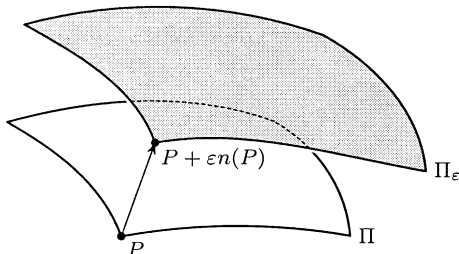


Рис. 3. Сдвиг поверхности вдоль семейства нормалей

**Полной средней кривизной** коориентированной поверхности  $\Pi$  называется число

$$H(\Pi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\Pi_\varepsilon) - S(\Pi)}{\varepsilon}.$$

Можно эвристически «доказать», что средняя кривизна мыльной плёнки (т. е. поверхности минимальной площади с данной границей) равна 0.

4. Задав ориентацию, найдите полную среднюю кривизну поверхностей из задачи 1abcde из темы «Поверхности».

5. Как изменяется полная средняя кривизна при  
 (а) изменении ориентации на противоположную?  
 (б) гомотетии пространства?

6. (а) Полная средняя кривизна аддитивна, т. е.  $H(\Pi_1 \cup \Pi_2) = H(\Pi_1) + H(\Pi_2)$  (если  $\partial\Pi_1$  и  $\partial\Pi_2$  — замкнутые кривые, пересекающиеся по кривой).

(б) Объемлея изометрия сохраняет полную среднюю кривизну.

(с) Внутренняя изометрия не обязательно сохраняет полную среднюю кривизну.

7. Пусть  $r(D)$  — элементарная непараметризованная поверхность с ориентацией  $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ . Будем пропускать в формулах аргумент  $(u, v)$  функций  $r_u$  и  $r_v$ , а также вместо  $n(r(u, v))$  писать  $n$ .

(а)  $S(r(D)) = \iint_D r_u \wedge r_v \wedge n \, du \, dv$ .

(б)  $r(D)_\varepsilon = r_\varepsilon(D)$ , где  $r_\varepsilon(u, v) := r(u, v) + \varepsilon n$ .

(с)  $H(r(D)) = \iint_D (r_u \wedge n_v \wedge n + n_u \wedge r_v \wedge n) \, du \, dv$ . В частности, предел, определяющий полную среднюю кривизну, действительно существует.

8.\* Для выпуклого ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^3$  и его  $\varepsilon$ -окрестности  $M_\varepsilon$

$$(a) \quad V(M_\varepsilon) = V(M) + S(\partial M)\varepsilon + \frac{1}{2}H(\partial M)\varepsilon^2 + \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3.$$

$$(b) \quad S(\partial M_\varepsilon) = S(\partial M) + H(\partial M)\varepsilon + 4\pi\varepsilon^2.$$

$$(c) \quad H(\partial M) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(M_\varepsilon) - V(M) - S(\partial M)\varepsilon}{\varepsilon^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V(M_R) - 4\pi R^3/3}{R^2}.$$

*Указание к 2d.* Перенесём параллельно каждый сферический сектор (являющийся частью  $\varepsilon$ -окрестности) так, чтобы вершина перешла в начало координат. Докажите, что почти все лучи, выходящие из начала координат, пересекают ровно один из перенесённых сферических секторов.

Другое решение получается, если построить на сфере точки, соответствующие (нормальям к) граням многогранника и дуги, соответствующие (нормальям к) рёбрам многогранника.

$$\text{Указание к 7a. } r_u \wedge r_v \wedge n = (r_u \times r_v) \cdot n.$$

## 2.7. Средняя кривизна в точке

Приведём физическое определение. Возьмём распределение масс на коориентированной поверхности, при котором масса каждого её куска равна полной средней кривизне этого куска (таким образом, масса куска может быть отрицательной). Тогда *средней кривизной* поверхности в точке называется плотность в этой точке.

Формально, **средней кривизной** коориентированной поверхности  $\Pi$  в точке  $P$  называется число

$$H = H_{\Pi, P} := \lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{H(\Pi_P)}{S(\Pi_P)},$$

где  $\Pi_P$  — образы прямоугольников, содержащие точку  $P$  при всевозможных параметризациях поверхности. Полученное число характеризует *плотность* полной средней кривизны относительно площади.

1. Задав ориентацию, найдите среднюю кривизну в точках поверхностей из задачи 1abcde темы «Поверхности».

2. Задав ориентацию, найдите знак средней кривизны точек (a) тора; (b) поверхности вращения функции  $f$ .

3. Как изменяется средняя кривизна при гомотетии пространства?

4. (a) Напишите определение предела  $\lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{H(\Pi_P)}{S(\Pi_P)}$  «на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ».

(b) Напишите определения полной средней кривизны плоской кривой и средней кривизны плоской кривой в точке.

(c)\* Последняя равна обычной кривизне.

5. (abc) **Теорема.**

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{r_u \wedge n_v \wedge n + n_u \wedge r_v \wedge n}{|r_u \times r_v|} = \\ &= \frac{(r_v^2 r_{uu} + r_u^2 r_{vv} - 2(r_u \cdot r_v) r_{uv}) \wedge r_u \wedge r_v}{|r_u \times r_v|^3} = \\ &= -f_{xx} - f_{yy}, \end{aligned}$$

где первая и вторая формулы выполнены для ориентации  $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ , а последняя формула выполнена в точке  $O$  для поверхности  $z = f(x, y)$ , касающейся плоскости  $Oxy$  в начале координат и той ориентации, для которой  $n_O = (0, 0, 1)$ .

При доказательстве первой формулы не забудьте доказать существование предела, определяющего среднюю кривизну в точке.

(d) Вычислите среднюю кривизну в каждой точке поверхности вращения.

6. **Теорема.** Минус половина средней кривизны равна полусумме главных кривизн и равна среднему значению кривизны сечения:

$$-\frac{H}{2} = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k(\varphi) d\varphi.$$

*Указание к 5а.* Примените теорему о среднем.

*Указание к 5с.* Используйте  $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ . Или сначала напишите уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности  $r(u, v)$ .

## 2.8. Полная гауссова кривизна

Коориентированная поверхность  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  называется *выпуклой*, если лучи, определённые (закреплёнными) нормальными в разных точках, не пересекаются. (Это определение не согласуется с определением выпуклости множества, но это не должно привести к путанице.) Следующий материал интересен даже для выпуклых поверхностей.

*Полной гауссовой кривизной* выпуклой коориентированной поверхности  $\Pi$  называется число

$$K(\Pi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{S(\Pi_R)}{R^2}.$$

1. Задав коориентацию, найдите полную гауссову кривизну поверхностей из задачи 1abcde\* темы «Поверхности».

(f) то же для произвольной замкнутой выпуклой (т. е. ограничивающей выпуклое тело) поверхности.

**Полной гауссовой кривизной** коориентированной поверхности  $\Pi$  называется число  $K(\Pi)$ , для которого

$$S(\Pi_\varepsilon) = S(\Pi) + H(\Pi)\varepsilon + K(\Pi)\varepsilon^2 \quad (*)$$

при достаточно малых  $\varepsilon$  (при которых поверхность  $\Pi_\varepsilon$  несамопересекающаяся).

2. (a) Это определение совпадает с предыдущим для выпуклых поверхностей.

(b) Найдите полную гауссову кривизну тора.

3. Как изменяется полная гауссова кривизна при

(a) изменении коориентации на противоположную?

(b) гомотетии пространства?

4. (a) Полная гауссова кривизна аддитивна, т. е.

$$K(\Pi_1 \cup \Pi_2) = K(\Pi_1) + K(\Pi_2)$$

(если  $\partial\Pi_1$  и  $\partial\Pi_2$  — замкнутые кривые, пересекающиеся по кривой).

(b) Объемлема изометрия сохраняет полную гауссову кривизну.

Далее (с использованием римановой метрики и теоремы Egregium Гаусса) будет доказано, что *внутренняя изометрия сохраняет полную гауссову кривизну*.

Если отложить нормали к коориентированной поверхности  $\Pi$  от начала координат, то их концы будут лежать на единичной сфере. Построенная поверхность  $G(\Pi) \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$  называется *сферическим* или *гауссовым* образом коориентированной поверхности  $\Pi$  (рис. 4).

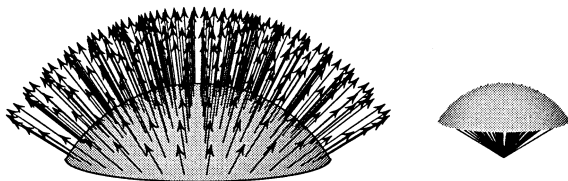


Рис. 4. Сферический образ поверхности

5. Площадь сферического образа выпуклой поверхности равна её полной гауссовой кривизне.

Пусть нормали к различным точкам коориентированной элементарной поверхности не сонаправлены. Определим *площадь со знаком* сферического образа как его площадь со знаком плюс (или минус), если при обходе границы поверхности по часовой стрелке (относительно нормалей) граница сферического образа обходится по часовой стрелке (или против часовой стрелки).

6. Площадь сферического образа со знаком отрицательна для седлообразной поверхности  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Если коориентированную поверхность  $\Pi$  можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых нормали к различным точкам не сонаправлены, то площадью со знаком её сферического образа называется сумма площадей со знаком этих частей.

7. (а) Это определение корректно, т. е. не зависит от разбиения поверхности.

(б) **Теорема.** Площадь со знаком сферического образа поверхности равна её полной гауссовой кривизне.

Далее  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  — коориентированная параметризованная поверхность. Её *площадью со знаком* называется число

$$S_n(r(D)) := \iint_D r_u \wedge r_v \wedge n \, du \, dv.$$

8.  $K(r(D)) = \iint_D n_u \wedge n_v \wedge n \, du \, dv$  для коориентации  $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ . В частности, определение гауссовой кривизны осмысленно, т. е.  $S(\Pi_\varepsilon)$  действительно выражается формулой (\*) с некоторыми (не зависящими от  $\varepsilon$ )  $H(\Pi)$  и  $K(\Pi)$ .

Если отложить вектор  $n(r(u, v))$  от начала координат, то его конец будет лежать на единичной сфере. Построенное отображение  $n \circ r: D \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  называется *сферическим* или *гауссовым*.

9. (а) Вектор  $n(r(u, v))$  перпендикулярен поверхности  $n \circ r(D)$  в её точке  $n \circ r(u, v)$ , т. е. поле нормалей  $m(n \circ r(u, v)) := n(r(u, v))$  задаёт коориентацию поверхности  $n \circ r(D)$ .

(б) Площадь со знаком образа сферического отображения параметризованной поверхности равна полной гауссовой кривизне образа этой поверхности.

## 2.9. Гауссова кривизна в точке

Вновь начнём с физического определения. Возьмём распределение масс на коориентированной поверхности, при котором масса каждого

её куска равна полной гауссовой кривизне этого куска (таким образом, масса куска может быть отрицательной). Тогда *гауссовой кривизной* поверхности в точке называется плотность в этой точке.

Формально, **гауссовой кривизной** коориентированной поверхности  $\Pi$  в точке  $P$  называется число

$$K = K_{\Pi, P} := \lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{K(\Pi_P)}{S(\Pi_P)}$$

где  $\Pi_P$  — образы прямоугольников, содержащие точку  $P$  при всевозможных параметризациях поверхности. Полученное число характеризует *плотность* полной гауссовой кривизны относительно площади.

1. Найдите гауссову кривизну в точках поверхностей из задачи 1abcde из темы «Поверхности».

2. Найдите знак гауссовой кривизны точек  
(а) тора; (б) поверхности вращения.

3. (а) Напишите определения «окружностного образа» плоской кривой, полной гауссовой кривизны плоской кривой и гауссовой кривизны плоской кривой в точке.

(б) Последняя равна обычной кривизне.

4. Как изменяется гауссова кривизна в точке при гомотетии пространства?

5. (abc) **Теорема.**

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{n_u \wedge n_v \wedge n}{|r_u \times r_v|} = \\ &= \frac{(r_{uu} \wedge r_u \wedge r_v)(r_{vv} \wedge r_u \wedge r_v) - (r_{uv} \wedge r_u \wedge r_v)^2}{|r_u \times r_v|^4} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2, \end{aligned}$$

где первая и вторая формулы выполнены для ориентации  $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ , а последняя формула выполнена в точке  $O$  для поверхности  $z = f(x, y)$ , касающейся плоскости  $Oxy$  в начале координат.

При доказательстве первой формулы не забудьте доказать существование предела, определяющего гауссову кривизну в точке.

(д) Вычислите гауссову кривизну в каждой точке поверхности вращения.

6. (а) **Следствие.** Главные кривизны являются корнями уравнения  $\lambda^2 + H\lambda + K = 0$ .

(б) **Следствие.** Гауссова кривизна равна произведению главных кривизн:  $K = \lambda_+ \lambda_-$ .



(с) В теореме 5аб из темы «Главные кривизны» можно заменить условие одинаковости (различности) знака главных кривизн на условие  $K > 0$  ( $K < 0$ ).

(d) Если гауссова и средняя кривизны каждой точки поверхности равны нулю, то эта поверхность является частью плоскости.

**7.\* Теорема.** Для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  имеем  $\tau = 2K$  (где  $\tau$  — скалярная кривизна) [Gr90, MF04, Ra04].

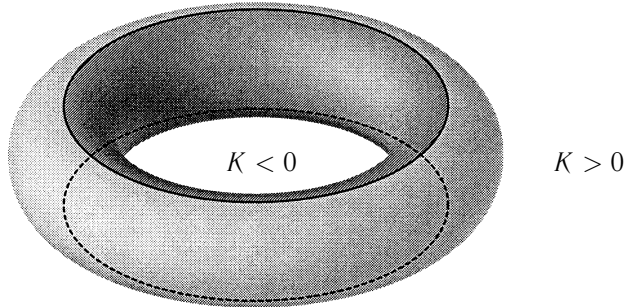


Рис. 5. Гауссова кривизна точек тора

Ответ к 2: см. рис. 5.

Указание к 5а. Примените теорему о среднем.

Указание к 5с. Используйте  $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ . Или сначала напишите уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности  $r(u, v)$ .

## 2.10. Геодезические

Непараметризованная кривая  $\Gamma \subset \Pi$  называется **геодезической** на поверхности  $\Pi$ , если она *локально кратчайшая*, т.е. если любая точка  $x \in \Gamma$  имеет такую окрестность  $U$  на поверхности, что расстояние на поверхности между любыми точками  $y_1, y_2 \in U \cap \Gamma$  равно длине отрезка кривой  $\Gamma$  от  $y_1$  до  $y_2$ .

В следующей задаче рассматриваются геодезические на поверхностях многогранников. Их определение аналогично.

1. (а) Нарисуйте на кубе геодезическую, соединяющую его противоположные вершины.

(б) Нарисуйте геодезическую на прямоугольном параллелепипеде  $a \times b \times c$ , соединяющую середины параллельных рёбер, не лежащих в одной грани.

(с) Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла не превосходит  $2\pi$ .

(д) Геодезическая на поверхности выпуклого многогранника не проходит через его вершины (т. е. может в них только начинаться или заканчиваться) и проходит через рёбра по закону «угол падения равен углу отражения».

2. (а) Кратчайшая кривая является геодезической.

(б) Геодезическая не обязательно является кратчайшей.

(с)\* Любые две точки можно соединить кратчайшей кривой (напомним, что рассматриваемая поверхность компактна).

3. (а) Внутренняя изометрия переводит геодезические в геодезические.

(б)\* **Теорема.** Образ параметризованной кривой  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Pi$  с постоянной по модулю скоростью является геодезической на поверхности  $\Pi$  тогда и только тогда, когда вектор ускорения  $\gamma''(t)$  перпендикулярен (плоскости, касательной к) поверхности в точке  $\gamma(t)$  для любого  $t$ .

*Указание к простому доказательству части «тогда».* Если в точке  $t$  это не так, то проекция кривой  $\gamma$  на касательную плоскость в точке  $\gamma(t)$  имеет ненулевую кривизну. Значит, эту проекцию можно «спрямить». Тогда и исходную кривую можно «спрямить».

Сложное доказательство части «тогда» получается из уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала длины [Ra03].

(с)\* При движении по геодезической правое и левое колёса узкого автомобиля проделают одинаковый путь с точностью до малых порядка квадрата ширины автомобиля. (Это следует из минимальности геодезических.)

(д)\* Нарисуем на яйце (гладкой поверхности, лежащей по одну сторону от любой касательной плоскости и пересекающей эту плоскость ровно в одной точке; например, поверхности вращения графика выпуклой функции) произвольную кривую. Прокатим яйцо по плоскости (без вращения) вдоль этой кривой. Кривая на яйце является геодезической тогда и только тогда, когда соответствующая кривая на плоскости является прямой.

Параметризованная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Pi$  называется *параметризованной геодезической на поверхности  $\Pi$* , если вектор ускорения  $\gamma''(t)$  перпендикулярен поверхности  $\Pi$  в точке  $\gamma(t)$  для любого  $t$ .

Теорема 3б означает, что *непараметризованная кривая  $\Gamma$  на поверхности  $\Pi$  является геодезической, тогда и только тогда, когда она имеет параметризацию, являющуюся параметризованной геодезической.*

Ясно, что параметризованная геодезическая имеет постоянную по модулю скорость (от величины постоянного модуля скорости свойство па-

раметризованной кривой быть параметризованной геодезической не зависит). В дальнейшем имеются в виду параметризованные геодезические и это прилагательное опускается. На непараметризованных геодезических (локально кратчайших) рассматриваются параметризации с постоянной по модулю скоростью.

4. (а) Прямая на поверхности — геодезическая.

(б) Меридиан поверхности вращения — геодезическая.

(с) Параллель поверхности вращения является геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в её точках параллельна оси вращения.

(d)\* Кривая, являющаяся связной компонентой множества неподвижных точек некоторой изометрии поверхности, является геодезической.

5. Найдите все геодезические на

(а) плоскости; (б) цилиндре; (с) сфере (используйте 7f);

(д) конусе (используйте инвариантность при изометрии).

**6. Теорема Клеро.** В точках геодезической  $\gamma$  на поверхности вращения величина  $r \sin \angle(\gamma', m)$  одинакова. Здесь  $r$  — расстояние до оси вращения и  $m$  — меридиан.

7. Пусть  $x_1, x_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , а  $\gamma = r(x_1, x_2)$  — параметризованная кривая на параметризованной поверхности  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Будем далее пропускать аргумент  $(x_1(t), x_2(t))$  у функции  $r$  и её частных производных и обозначать штрихом дифференцирование по  $t$ , а индексами у  $r$  (но не у  $\Gamma$  и  $g$ ) — частное дифференцирование по соответствующей переменной (решателю будет полезно первое время кроме индексов писать ещё штрихи).

(а) Кривая  $\gamma$  является геодезической тогда и только тогда, когда  $\gamma'' \cdot r_1 = \gamma'' \cdot r_2 = 0$  для любого  $t$ .

(б)  $\gamma' = r_1 x'_1 + r_2 x'_2$  — вектор скорости кривой  $\gamma$  в точке  $r(x_1(t), x_2(t))$ .

(с)  $\gamma'' = x''_1 r_1 + x'_1 r'_1 + x''_2 r_2 + x'_2 r'_2$ .

(д)  $r'_1 = r_{11} x'_1 + r_{12} x'_2$ .

(е) **Теорема.** Уравнение геодезической (на функции  $x_1$  и  $x_2$  через данную функцию  $r$ ) имеет вид

$$\begin{cases} -x''_1 = \Gamma_{11}^1 (x'_1)^2 + (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^1) x'_1 x'_2 + \Gamma_{22}^1 (x'_2)^2, \\ -x''_2 = \Gamma_{11}^2 (x'_1)^2 + (\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2) x'_1 x'_2 + \Gamma_{22}^2 (x'_2)^2 \end{cases}$$

или

$$x''_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x'_i x'_j = 0,$$

где  $g_{ij} = r_i \cdot r_j$  и  $\Gamma_{ij}^k := \frac{g_{3-k,3-k} r_k \cdot r_{ij} - g_{k,3-k} r_{3-k} \cdot r_{ij}}{\det g}$  — символы Кристоффеля.

(f) **Теорема.** Через каждую точку в каждом направлении на поверхности проходит ровно одна геодезическая.

(g) Вычислите символы Кристоффеля для сферической системы координат на сфере.

*Указание к 1с.* Проведите через вершину угла луч, лежащий внутри угла, и через точку на этом луче (отличную от вершины угла) плоскость, перпендикулярную лучу.

*Указание к 6.* Утверждение равносильно тому, что  $e \wedge \gamma \wedge \gamma' = \text{const}$ , где  $\gamma$  — геодезическая и  $e$  — единичный вектор, параллельный оси вращения. Последнее условие доказывается дифференцированием по правилу Лейбница, так как  $e \wedge \gamma \wedge \gamma'' = 0$ .

## 2.11. Параллельный перенос

Все знают, что такое параллельный перенос на плоскости. Можно определить параллельный перенос и на искривленной поверхности. Более того, это определение необходимо для решения интересных задач из географии и физики.

Начнем с поверхности многогранника. (Заметим, что она не является поверхностью в смысле определения, принятого в данной книге.) Рассмотрим две соседние грани данного многогранника. Если повернуть плоскость одной из них вокруг их общего ребра, то она совместится с плоскостью другой грани. Этот поворот можно рассматривать как перекатывание многогранника с одной грани на другую через его ребро. Если на первой грани нарисовать вектор, то после поворота он отпечатается на плоскости второй грани. Такой перенос вектора с одной грани на другую называется *параллельным переносом* вектора через ребро.

1. (a) Если замкнутая ломаная на многограннике не содержит вершин и ограничивает область с вершинами  $A_1, \dots, A_n$ , суммы плоских углов в которых равны  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , то после параллельного переноса вдоль этой ломаной вектор повернется на угол  $-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ .

(b)\* Этот угол поворота равен (с точностью до  $2\pi n$ ) сумме величин телесных углов, *двойственных* к многогранным углам  $A_1, \dots, A_n$ .

Приведем неформальное описание параллельного переноса на поверхностях (уже в смысле этой книги). Нарисуем на поверхности кривую и проведем касательную к поверхности плоскость в некоторой точке кривой. Параллельный перенос касательной плоскости вдоль кривой на поверхности — это качение касательной плоскости вдоль кривой без проскальзывания (при котором плоскость остается касательной). Это движение касательной плоскости по неподвижной поверхности задаётся

следующим условием: *мгновенная ось вращения касательной плоскости касается поверхности и перпендикулярна данной кривой.*

Формально, пусть дана поверхность  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  и параметризованная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Pi$ . Касательное к поверхности  $\Pi$  векторное поле  $v(t) \in T_{\gamma(t)}$  на кривой  $\gamma[a, b]$  называется **параллельным вдоль данной параметризованной кривой** (в смысле Леви—Чивита), если вектор  $v'_i(t_0)$  перпендикулярен плоскости  $T_{\gamma(t_0)}$ , касательной к поверхности в точке  $\gamma(t_0)$  при любом  $t_0$ .

Векторное поле на поверхности называется *параллельным вдоль непараметризованной кривой*, если оно параллельно вдоль любой ее параметризации (это определение корректно ввиду задачи 2с ниже).

Вектор  $v(b)$  называется *вектором, полученным из вектора  $v(a)$  параллельным переносом вдоль данной кривой.*

2. (а) Какие касательные векторы к плоскости, лежащей в трёхмерном пространстве, получаются друг из друга параллельным переносом?

(б) Поле векторов скорости параметризованной кривой на поверхности является параллельным вдоль этой кривой тогда и только тогда, когда эта кривая является параметризованной геодезической.

(с) Параллельность вдоль кривой не зависит от выбора параметризации этой кривой.

(д) Результат параллельного переноса вдоль кривой с данными концами зависит от выбора кривой.

3. (а) Непрерывное семейство векторов одинаковой длины на меридиане поверхности вращения, касающихся параллели, параллельно вдоль меридиана.

(б) Дана поверхность вращения гладкой положительной функции  $f$ . На какой угол в  $\mathbb{R}^3$  повернётся вектор, касательный к меридиану, при параллельном переносе из точки  $(a, f(a), 0)$  в точку  $(b, f(b), 0)$  вдоль меридиана?

4. Если на данной поверхности семейства векторов  $u$  и  $v$  параллельны вдоль данной кривой, то

(а)  $|v(x)| = |v(y)|$ ;

(б)  $u(x) \cdot v(x) = u(y) \cdot v(y)$ ;

(с)  $\angle(u(x), v(x)) = \angle(u(y), v(y))$ .

(д) Семейства  $u + v$  и  $3u$  параллельны вдоль той же кривой.

5. (а) **Теорема.** Параллельный перенос на данной поверхности вдоль данной кривой определяет ортогональное отображение касательных пространств.

(б) Семейство векторов является параллельным вдоль геодезической тогда и только тогда, когда модуль вектора семейства и угол между век-

тором семейства и вектором скорости геодезической постоянной вдоль геодезической.

6. Пусть  $v(t) = a_1(t)r_1(x_1(t), x_2(t)) + a_2(t)r_2(x_1(t), x_2(t))$  — касательный к поверхности вектор в точке  $r(x_1(t), x_2(t))$ . Будем далее обозначать штрихом производную по  $t$  и пропускать аргументы функций.

(a)  $v' = a'_1 r_1 + a_1 r'_1 + a'_2 r_2 + a_2 r'_2$ .

(b) Семейство  $v$  параллельно вдоль кривой  $\gamma = r(x_1, x_2)$  тогда и только тогда, когда  $v' \cdot r_1 = v' \cdot r_2 = 0$ .

(c) **Теорема.** Уравнение параллельного переноса (на функции  $a_1$  и  $a_2$  через данные функции  $r, x_1, x_2$ )

$$\begin{cases} -a'_1 = (\Gamma_{11}^1 x'_1 + \Gamma_{21}^1 x'_2) a_1 + (\Gamma_{12}^1 x'_1 + \Gamma_{22}^1 x'_2) a_2, \\ -a'_2 = (\Gamma_{11}^2 x'_1 + \Gamma_{21}^2 x'_2) a_1 + (\Gamma_{12}^2 x'_1 + \Gamma_{22}^2 x'_2) a_2 \end{cases}$$

или, сокращенно,

$$a'_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x'_i a_j = 0.$$

(d) Любой вектор можно параллельно перенести вдоль любой кривой.

Далее (с использованием римановой метрики) будет доказано, что *при внутренней изометрии поверхностей семейство векторов, параллельное вдоль некоторой кривой, переходит в семейство векторов, параллельное вдоль образа этой кривой.*

## 2.12. Секционная кривизна

Объяснение феномена маятника Фуко с использованием параллельного переноса по замкнутому контуру приводится в [Та89].

1. На какой угол повернется касательный вектор при параллельном переносе вдоль

- (a) параллели на цилиндре?
- (b) контура треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  на сфере?
- (c) параллели  $z = 1$  на конусе  $z^2 = x^2 + y^2$ ?
- (d) параллели  $\theta = \theta_0$  на сфере?
- (e) данной параллели данной поверхности вращения?

*Указание к 1с и 3б.* Используйте (доказанную ниже) инвариантность параллельного переноса при внутренней изометрии.

2. Пусть  $N, N'$  — поверхности, касающиеся вдоль кривой  $\gamma$ . Докажите, что результат параллельного переноса вдоль кривой  $\gamma$  одинаков для  $N$  и  $N'$ .

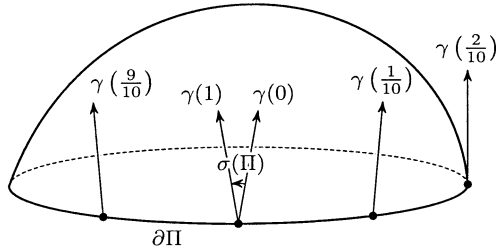


Рис. 6. Параллельный перенос вектора по замкнутому контуру

**Полной секционной кривизной**  $\sigma(\Pi)$  двумерной поверхности  $\Pi$  с гладкой границей называется угол поворота касательного вектора при обходе по её границе.

3. (а) Объемлемая изометрия сохраняет полную секционную кривизну.

(б) **Теорема.** Внутренняя изометрия сохраняет полную секционную кривизну.

(с) Полная секционная кривизна аддитивна, т. е.  $\sigma(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \sigma(\Pi_1) + \sigma(\Pi_2)$  (если  $\partial\Pi_1$  и  $\partial\Pi_2$  — замкнутые кривые, пересекающиеся по кривой).

4. Определение сферического отображения  $G: \Pi \rightarrow S^2$  дано в пункте «Гауссова кривизна». По сферическому отображению можно построить семейство отображений  $dG_P: T_P \rightarrow T_{G(P)}$  на касательных к поверхности векторах: для  $P \in \Pi$  образом (закреплённого) касательного вектора  $\overrightarrow{PX}$  назовём вектор  $\overrightarrow{G(P)dG_P(X)}$ , равный вектору  $\overrightarrow{PX}$  как свободный вектор. Построенное отображение  $dG_P$  называется *сферическим отображением касательных пространств*.

(а) Это отображение корректно определено, т. е.  $\overrightarrow{G(P)dG_P(X)}$  действительно касается гауссова образа  $G(\Pi)$ .

(б)\* Это отображение совпадает с дифференциалом сферического отображения.

(с) При сферическом отображении касательных пространств семейство векторов, параллельное вдоль некоторой кривой, переходит в семейство векторов, параллельное вдоль её образа (при сферическом отображении).

(д) Угол поворота вектора при параллельном переносе вдоль замкнутого контура равен углу поворота вектора при параллельном переносе вдоль сферического образа этого контура:  $\sigma(\Pi) = \sigma(G(\Pi))$ .

(е) **Теорема Гаусса (Egregium).** Угол поворота касательного к двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  вектора при параллельном переносе вдоль границы поверхности равен площади со знаком сферического образа этой

поверхности:  $\sigma(\Pi) = K(\Pi)$ . (См. также теорему 7 в пункте «Полная гауссова кривизна».)

Возьмём распределение масс на коориентированной поверхности, при котором масса каждого её куска равна полной секционной кривизне этого куска (таким образом, масса куска может быть отрицательной). Тогда *секционной кривизной* поверхности в точке называется плотность в этой точке.

Формально, **секционной кривизной** поверхности  $\Pi$  в точке  $P$  называется число

$$\sigma(P) := \lim_{\text{diam}(\Pi_P) \rightarrow 0} \frac{\sigma(\Pi_P)}{S(\Pi_P)},$$

где  $\Pi_P$  — части поверхности  $\Pi$ , содержащие точку  $P$ . Это *плотность* полной секционной кривизны относительно площади.

**5.** Как изменяется секционная кривизна при гомотетии пространства?

Итак, для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  скалярная, секционная и гауссова кривизны совпадают (с точностью до множителя 2). Заметим, что в этой книге скалярная и секционная кривизны определены для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$  при  $m > 3$ , а гауссова — нет.

**6.\***  $\tau = 2\sigma$  для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$ .

*Указание к 1де.* Используйте 1с и 2.

*Указание к 4е.* Ввиду предыдущего пункта достаточно доказать эту теорему для сферы. Это делается при помощи аппроксимации сферической области сферическими многоугольниками.

*Другое указание к 4е.* Пусть  $v_P$  — семейство единичных векторов на  $\partial\Pi$ , параллельное вдоль  $\partial\Pi$ , и  $a_P$  и  $b_P$  — произвольная ортонормированная пара векторных полей на  $\Pi$ . Имеем (опуская аргумент  $P$ )

$$\begin{aligned} -\sin \angle(v, a) d \angle(v, a) &= d(\cos \angle(v, a)) = d(v \cdot a) = \\ &= v \cdot da + dv \cdot a = v \cdot da = \sin \angle(v, a) b \cdot da. \end{aligned}$$

Тогда искомый угол равен

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi} d \angle(v, a) &= - \int_{\partial\Pi} b \cdot da = - \int_{\partial D} b \cdot a_u du + b \cdot a_v dv = \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial(b \cdot a_v)}{\partial u} - \frac{\partial(b \cdot a_u)}{\partial v} \right) du dv = \iint_D (b_u \cdot a_v - b_v \cdot a_u) du dv = \\ &= \iint_D n_u \wedge n_v \wedge n du dv = S(G(r(D))). \end{aligned}$$



Здесь предпоследнее равенство справедливо, поскольку

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & \omega'_1 & \omega'_2 \\ -\omega'_1 & 0 & \omega'_3 \\ -\omega'_2 & -\omega'_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ n \end{pmatrix},$$

откуда  $b_u \cdot a_v - b_v \cdot a_u = \omega_2 \omega'_3 - \omega'_2 \omega_3 = n_u \wedge n_v \wedge n$ .

*Указание к 6.* См. указание к задаче 5е темы «Билинейная форма Риччи».

## Глава 3. Полилинейные кривизны поверхностей

### 3.1. Длины кривых на поверхностях

Обозначим  $S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Расстоянием по сфере между точками сферы называется длина наименьшей дуги большого круга, соединяющей эти точки. *Круг* и *окружность* на сфере определяются аналогично случаю плоскости (через расстояние по сфере).

1. (а) Длина окружности радиуса  $R$  на сфере равна  $2\pi \sin R$ .

(б) Найдите формулу для длины параметризованной сферической кривой  $\gamma = (\varphi, \theta): [a, b] \rightarrow S^2$  в сферических координатах  $\varphi, \theta$ .

(с) То же в декартовых координатах  $\gamma = (x, y)$ .

(д) То же в *стереографических координатах*: паре чисел  $(p, q)$  соответствует точка сферы, которая переходит в точку  $(p, q, 0)$  при центральной проекции из точки  $(0, 0, 1)$ .

(е)\* То же в *меркаторовских координатах*, которые определяются так. На карте вводятся прямоугольные координаты  $(u, v)$  такие, что любая прямая на карте соответствует линии постоянного азимута (фиксированного положения стрелки компаса) на поверхности земного шара (т. е. локсодромии).

*Указание.* Сначала выразите сферические координаты  $(\varphi, \theta)$  через меркаторовские координаты  $(u, v)$ .

2. Выразите длину дуги  $[a, b] \xrightarrow{(u,v)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$  через функции  $u$  и  $v$  (в формуле можно использовать не только алгебраические выражения, но производные и интегралы) для

(а)  $r(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  — цилиндр с цилиндрической системой координат.

(б)  $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$  — конус с конической системой координат.

(с)  $r(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$  — тор с торической системой координат.

(д)  $r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, h(v))$  — поверхность вращения.

**3. Теорема.** Длина кривой  $r \circ (u, v): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  равна

$$\int_a^b \sqrt{r_u^2(u'_t)^2 + 2r_u \cdot r_v u'_t v'_t + r_v^2(v'_t)^2} dt.$$

В этой формуле пропущены аргументы  $t$  функций  $u, v, u'_t, v'_t$ ;  $r_u = r_u(u(t), v(t))$  и аналогично для  $r_v$ .

*Углом* между пересекающимися параметризованными кривыми в их общей точке  $A$  называется угол между их касательными в этой точке.

4. (а) Угол между параметризованными кривыми не зависит от их параметризации.

(б) Найдите угол между  $r$ -образами кривых  $v = u + 1$  и  $v = 3 - u$  для  $r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2)$  ( $r$ -образом области  $D$  является часть параболоида  $z = x^2 + y^2$ ).

### 3.2. Риманова метрика. Применение к внутренним изометриям

1. Дайте определение производной отображения  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Для поверхности  $\Pi$  и точки  $P \in \Pi$  обозначим через  $T_P = T_{P, \Pi}$  касательную плоскость к  $\Pi$  в точке  $P$ .

**Римановой метрикой**<sup>1</sup> (или первой квадратичной формой) на  $\Pi$  называется семейство билинейных форм  $g_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$  ( $P \in \Pi$ ), определённых формулой  $g_P(a, b) = a \cdot b$ .

На непараметризованной поверхности, не являющейся элементарной (например, на сфере или листе Мёбиуса) риманову метрику нельзя задать семейством матриц  $2 \times 2$ .

Риманова метрика на непараметризованной поверхности задаётся сопоставлением каждой параметризации  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  некоторого куска этой поверхности семейства матриц  $g_{ij}$  (в стандартном базисе  $(0, 1), (1, 0)$ ) билинейных форм, являющихся обратными  $r$ -образами римановой метрики на  $r(D)$ , т. е. билинейных форм

$$r'(X)^* g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (X \in D),$$

определённых формулой

$$r'(X)^* g(a, b) = r'(X)a \cdot r'(X)b.$$

(Эти матрицы должны быть связаны на пересечениях кусков, как в задаче 2f ниже.) Далее через  $\det g$  обозначается определитель *матрицы*  $g_{ij}$  (но не билинейной формы  $g$  или  $r'(X)^* g$ ).

2. (а) **Теорема.** Матрица  $g_{ij}$  в точке  $(u, v)$  в стандартном базисе есть матрица скалярных произведений (т. е. матрица Грама) базиса  $(r_u, r_v)$ .

(б) **Следствие.** Длина образа кривой  $\gamma = (u_1, u_2): [a, b] \rightarrow D$  на па-

---

<sup>1</sup> Более точно, римановой метрикой, индуцированной из  $\mathbb{R}^3$ .

раметризованной поверхности  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  равна

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} u'_i u'_j} dt = \int_a^b \sqrt{r'^* g_{r(\gamma)}(\gamma', \gamma')} dt = \int_a^b \sqrt{g_{r(\gamma)}(r'^* \gamma', r'^* \gamma')} dt.$$

В этой формуле пропущены аргументы  $t$  функций  $\gamma$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  и аргумент  $(u_1(t), u_2(t))$  функций  $r'^*$ ,  $g_{ij}$ .

(с) Вычислите матрицу  $g_{ij}$  в точке в стандартном базисе для параметризованной поверхности  $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$  (через функцию  $f$  и её частные производные).

(d) То же для параметризованной поверхности

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

(через функции  $x, y, z$  и их частные производные).

(e)  $\det g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0$  в любой точке.

(f) **Теорема.** Для разных параметризаций  $r, \tilde{r}$  одной поверхности и соответствующих матриц  $g, \tilde{g}$  выполнено  $\tilde{g} = J^T g J$ , где  $J = (r^{-1} \circ \tilde{r})'$ .

**3. (a) Теорема.** Отображение поверхностей является внутренней изометрией (т. е. сохраняет длины кривых) тогда и только тогда, когда оно переводит риманову метрику на первой в риманову метрику на второй.

(b) Для поверхности  $\Pi$  и точки  $P \in \Pi$  определим функцию

$$f = f_{\Pi, P}: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$$

формулой  $f(X) = |P, X|^2$ , где  $|P, X|$  — расстояние по поверхности. Тогда  $f'(P) = 0$  и второй дифференциал функции  $f$  совпадает с римановой метрикой.

(с) **Теорема.** Отображение поверхностей является внутренней изометрией тогда и только тогда, когда оно сохраняет расстояния.

**4. (a)** Пусть  $\gamma, \beta: [-1, 1] \rightarrow D$  — параметризованные кривые, причём  $\gamma(0) = \beta(0) = X$ . Обозначим  $(a_1, a_2) := \gamma'(0)$  и  $(b_1, b_2) := \beta'(0)$ . Тогда косинус угла между кривыми  $r \circ \gamma$  и  $r \circ \beta$  (на параметризованной поверхности  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) в точке  $r(X)$  равен

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i,j} g_{ij} a_i b_j}{\sqrt{(\sum_{i,j} g_{ij} a_i a_j)(\sum_{i,j} g_{ij} b_i b_j)}} &= \frac{r'^* g(\gamma', \beta')}{\sqrt{r'^* g(\gamma', \gamma') r'^* g(\beta', \beta')}} = \\ &= \frac{g_r(r' \gamma', r' \beta')}{\sqrt{g_r(r' \gamma', r' \gamma') g_r(r' \beta', r' \beta')}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma'$  и  $\beta'$  берутся в точке 0, а  $r, r', g_{ij}$  в точке  $X$ .

(b) Внутренняя изометрия сохраняет углы между кривыми.

5. (a)  $|r_u \times r_v|^2 = \det g$ .

(b) Площадь поверхности  $r(D)$  равна  $\iint_D \sqrt{\det(r^*g)_{(u,v)}} du dv$ , где  $(r^*g)_{(u,v)}$  — матрица формы  $(r^*g)_{(u,v)}$  в базисе  $(0, 1), (1, 0)$ .

6. (a) Выразите  $r_k \cdot r_{ij}$  через  $g_{ij}$ .

(b) Выразите символы Кристоффеля через риманову метрику.

(c) **Теорема.** При изометрии поверхностей параметризованные геодезические переходят в параметризованные геодезические. (Докажите без использования задачи 3б из пункта «Геодезические».)

(d) **Теорема.** При внутренней изометрии поверхностей семейство векторов, параллельное вдоль некоторой кривой, переходит в семейство векторов, параллельное вдоль её образа.

(e) **Следствие.** Внутренняя изометрия сохраняет гауссову кривизну.

*Указание к 3а.* Сначала докажите для элементарных непараметризованных поверхностей. Для доказательства в нетривиальную сторону продифференцируйте интеграл, выражающий длину кривой, по верхнему пределу, и используйте тождество поляризации.

*Ответ к 6а.* Знак скалярного произведения опускается.  $2r_i r_{ii} = (g_{ii})'_i$ ,  $2r_i r_{ij} = (g_{ij})'_j - (g_{ij})'_i$ , где  $i \neq j$ .

Другой способ:  $g_{ij} = r_i r_j$ , значит  $2r_k r_{ij} = (g_{ki})'_j + (g_{kj})'_i - (g_{ij})'_k$ .

### 3.3. Оператор кривизны Вейнгартена (вторая квадратичная форма)

**Оператором Вейнгартена** (или оператором формы) коориентированной поверхности  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  называется семейство операторов

$$\tilde{q}_P: T_P \rightarrow T_P \quad (P \in \Pi),$$

определённых формулой

$$\tilde{q}_P(a) := -\frac{\partial n}{\partial a} = -(n_{\gamma_a(t)})'_t \Big|_{t=0}.$$

Здесь  $\gamma_a(t)$  — такая кривая, что  $\gamma_a(0) = P$  и  $\gamma'_a(0) = a$ . Эта *дериационная формула Вейнгартена* записывается также в виде  $n_i = -q^1_i r_1 - q^2_i r_2$ .

1. (a) Приведённое определение корректно, т. е.  $\frac{\partial n}{\partial a}$  лежит в  $T_P$  и не зависит от выбора кривой  $\gamma_a$ .

(b) Найдите оператор Вейнгартена сферы и цилиндра.

(c) Найдите матрицу оператора Вейнгартена в базисе  $r_u, r_v$ .

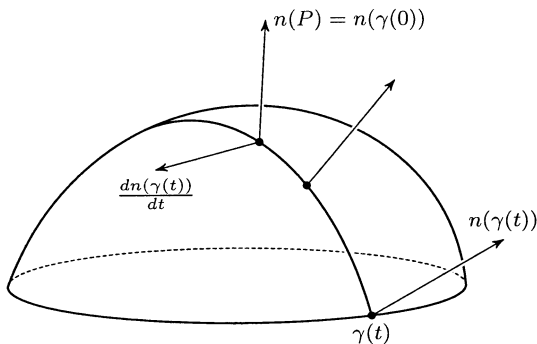


Рис. 7. Оператор Вейнгартена

Второй квадратичной формой координированной непараметризованной поверхности  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  называется семейство билинейных форм

$$q_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}, \quad (P \in \Pi),$$

определённых формулой

$$q_P(a, b) := \tilde{q}_P(a) \cdot b = -b \cdot \frac{\partial n}{\partial a}.$$

(Формально, это семейство лучше было бы называть *второй билинейной формой*.)

2. (а) Вторая квадратичная форма единичной сферы равна римановой метрике.

(б) Найдите вторую квадратичную форму цилиндра.

(с) **Теорема.** Матрица второй квадратичной формы поверхности  $z = f(x, y)$ , касающейся плоскости  $Oxy$  в начале координат  $O = P$ , в стандартном базисе является гессианом функции  $f$ .

(д) Найдите матрицу второй квадратичной формы в базисе  $r_u, r_v$ .

(е) Докажите, что матрица отображения  $q_P$  симметрична.

3. Рассмотрим координированную поверхность  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ .

(а) Проекция ускорения параметризованной кривой  $\gamma$  на поверхности на нормаль в точке  $P = \gamma(0)$  равна второй квадратичной форме от вектора скорости этой кривой в точке  $P$ :

$$n \cdot \gamma''(0) = q_P(\gamma'(0), \gamma'(0)).$$

(б) Определим отображение  $d(\varepsilon): \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$  формулой

$$d(\varepsilon)(P) = P + \varepsilon n(P).$$

Тогда

$$2q_P(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(\varepsilon)'_P(a) \cdot d(\varepsilon)'_P(b) - a \cdot b}{\varepsilon}.$$

Вторая квадратичная форма на коориентированной поверхности задаётся сопоставлением каждой параметризации  $r: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  куска этой поверхности семейства матриц  $q_{ij}$  (в стандартном базисе  $(0, 1), (1, 0)$ ) билинейных форм, являющихся обратными  $r$ -образами второй квадратичной формы на  $r(D)$ , т. е. билинейных форм

$$r'^*q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (X \in D),$$

определённых формулой

$$r'^*q(a, b) = q_{r(X)}(r'a, r'b),$$

где  $r'$  берётся в точке  $X$ . (Матрицы должны быть согласованы на пересечениях кусков.)

**4.** Вычислите матрицу  $q_{ij}$  в стандартном базисе для

(a)  $r(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ ;

(b)  $r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)$ ;

(c)  $r(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$ ;

(d)  $r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, \sin u)$ .

**5. Теорема.** Главные кривизны и направления поверхности являются собственными числами и направлениями оператора Вейнгартена (или пары первой и второй квадратичных форм  $g$  и  $q$ , т. е. корнями уравнения  $\det(g - \lambda q) = 0$ ).

*Главными кривизнами и главными направлениями* многомерной поверхности называются собственные значения и собственные векторы её оператора Вейнгартена (который определяется аналогично).

**6.** Сформулируйте и докажите аналоги известных вам теорем о главных кривизнах и направлениях для трёхмерных поверхностей в  $\mathbb{R}^4$ .

**7.\*** Пусть  $q_{ij}$  — матрица второй квадратичной формы в стандартном базисе.

(a) *Деривационные формулы Гаусса.*  $r_{ij} = \Gamma_{ij}^1 r_1 + \Gamma_{ij}^2 r_2 + q_{ij} n$  [Ra03, с. 528].

(b) **Теорема Бонне.** Две элементарные непараметризованные поверхности в  $\mathbb{R}^3$  объемлемо изометричны тогда и только тогда, когда они имеют параметризации, индуцирующие одинаковые первые и вторые квадратичные формы (или одинаковые римановы метрики и операторы Вейнгартена) [Ra03, §81].

*Указание.* Примените теорему единственности для системы уравнений, составленных из дериационных формул Гаусса и Вейнгартена.

Заметим, что реализуются не все пары форм, а только удовлетворяющие уравнениям Гаусса и Петерсона – Кодацци [Ra03, §82, §83].

*Указание к За.* Доказано в теме «Главные кривизны».

### 3.4. Билинейная форма кривизны Риччи

В этом пункте  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$  — поверхность размерности  $n$ .

Для  $P \in \Pi$  определим (геодезическое) экспоненциальное отображение

$$\exp = \exp_P: X \rightarrow \Pi$$

формулой  $\exp(u) := \gamma_{P,u}(1)$ , где  $\gamma_{P,u}: [-1, 1] \rightarrow \Pi$  — та геодезическая, для которой  $\gamma_{P,u}(0) = P$  и  $\gamma'_{P,u}(0) = u$ . Здесь  $X \subset T_P$  — множество тех векторов  $u$ , для которых существует  $\gamma_{P,u}(1)$ .

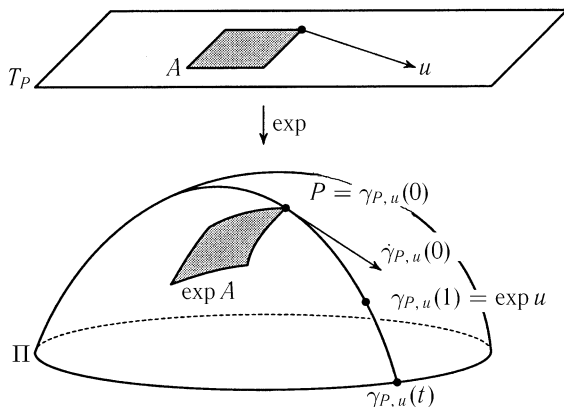


Рис. 8. Экспоненциальное отображение и квадратичная форма Риччи

1. (а) Для единичной сферы  $S^2$  при экспоненциальном отображении  $T_{(1,0,0)} \rightarrow S^2$  полярные координаты переходят в сферические:  $\exp(1, \rho, \varphi) = (\cos \rho, \sin \rho \cos \varphi, \sin \rho \sin \varphi)$ .

(б) Обобщите этот результат для поверхностей вращения.

2. (а) Прямая, проходящая через  $P$ , переходит при экспоненциальном отображении  $\exp_P$  в геодезическую.

(б) Верно ли, что для любой поверхности и точки на ней образ любой прямой при экспоненциальном отображении является геодезической?

(с) Образом шара (в  $T_P$ ) радиуса  $R$  с центром в  $P$  при экспоненциальном отображении  $\exp_P$  является шар (на поверхности) радиуса  $R$ .



(d) Верно ли, что для любой поверхности и точки на ней образ любого шара при экспоненциальном отображении является шаром?

3. (a) Система координат экспоненциального отображения  $\exp$  является *евклидовой* в точке  $P$ , т. е.  $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$  и  $g'_{ij}(P) = 0$ .

(b) Внутренняя изометрия сохраняет экспоненциальное отображение: если  $f: \Pi \rightarrow \Pi_1$  — внутренняя изометрия, то  $\exp_{f(P)}(f'(P)u) = f(\exp_P u)$ .

4. Напомним, что *скалярной кривизной* поверхности  $\Pi$  в точке  $P$  называется число

$$\tau = \tau_{\Pi, P} := 6(n+2) \lim_{R \rightarrow 0} \frac{V_n R^n - V_{\Pi, P}(R)}{V_n R^{n+2}},$$

где  $V_{\Pi, P}(R)$  — объём шара на  $\Pi$  радиуса  $R$  с центром в точке  $P \in \Pi$ .

(a) Докажите, что такой предел существует.

(b) Выразите скалярную кривизну через  $g_{ij,kl}$  (где нижние индексы  $k$  и  $l$  означают дифференцирование по  $k$  и  $l$ ).

Билинейная форма Риччи описывает искажение объёма при экспоненциальном отображении. **Билинейной формой (тензором) Риччи**  $n$ -мерной поверхности  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$  в точке  $P \in \Pi$  называется такая симметричная билинейная форма  $\rho = \rho_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$V(\exp(A)) = V(A) - \frac{1}{6} \int_A \rho(u, u) du + O(h^{n+3}), \quad h = \text{diam}(A \cup P) \rightarrow 0$$

по измеримым множествам  $A \subset T_P$ .

Или, эквивалентно, что для любого единичного  $n$ -мерного куба  $A \subset T_P$  с вершиной в  $P$  выполнено

$$V(\exp(hA)) = h^n - \frac{h^{n+2}}{6} \int_A \rho(u, u) du + O(h^{n+3}) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Аналогичная формула справедлива с заменой куба  $A$  на любое измеримое множество  $A \subset T_P$  и  $h^n$  на  $h^n V(A)$  ( $h^{n+2}$  и  $h^{n+3}$  не меняются).

5. (a) Такая симметричная билинейная форма существует и единственна.

(b) Выразите билинейную форму Риччи через  $g_{ij,kl}$ .

(c) Внутренняя изометрия сохраняет билинейную форму Риччи.

Пусть  $B^n$  — единичный шар в  $\mathbb{R}^n$  и  $V_n$  — его  $n$ -мерный объём.

6. Для симметричной билинейной формы  $\omega: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(a) существует и единственен оператор  $\tilde{\omega}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которого  $\tilde{\omega}(u) \cdot v = \omega(u, v)$ .

(b) доказать, что

$$(n+2) \int_{B^n} \omega(u, u) du = V_n \operatorname{tr} \tilde{\omega} = V_n \sum_i \omega(e_i, e_i).$$

(c) доказать, что

$$\int_A \omega(u, u) du = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \tilde{\omega} + \frac{1}{4} \sum_{i < j} \omega(e_i, e_j),$$

если куб  $A$  натянут на ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$ .

**7. (a) Теорема.**  $\tau = \operatorname{tr} \tilde{\rho}$ .

(b) Доказать, что

$$2\rho_P(u, u) = \sum_i \tau_{\exp_P \langle u, e_i \rangle, P},$$

где  $|u| = 1$  и  $e_1, \dots, e_{n-1}$  — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к  $u$  в  $T_P$  и  $\langle u, e_i \rangle$  — двумерная плоскость в  $T_P$ , натянутая на векторы  $u$  и  $e_i$  [BBV06].

(c) Если  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис в  $T_P$ , то

$$\tau_{\Pi, P} = \sum_{i < j} \tau_{\exp_P \langle e_i, e_j \rangle, P}.$$

(d)\* **Теорема.** Для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$  имеем

$$S(\exp(A)) = S(A) - \frac{\tau}{12} \int_A u^2 du + o(h^4) \quad \text{при} \quad h = \operatorname{diam}(A \cup P) \rightarrow 0$$

по измеримым множествам  $A \subset T_P$ . Иными словами, билинейная форма Риччи пропорциональна римановой метрике с коэффициентом  $\tau/2$ :  $2\rho(u, v) = \tau u \cdot v$  [Gr90, MF04, Ra04].

Вычислительные формулы для билинейной формы Риччи появятся далее.

*Указание к За.* Возьмём ортонормированный базис  $v_1, \dots, v_n$  в  $T_P$ . Обозначим  $e := \exp_P$ . Тогда  $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ . Здесь и далее штрихом обозначается производная по  $u$ , а нижним индексом — аргумент.

Так как  $e_i = v_i$  в точке  $P$  (т. е.  $e'_P = E$ ), то  $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ .

Так как  $\gamma(t) := e(at, bt, 0, \dots, 0)$  — геодезическая для любых  $a$  и  $b$ , то  $(a^2 e_{11} + 2abe_{12} + b^2 e_{22}) \cdot e_k = 0$  для любого  $k$ . Отсюда  $e_{11} \cdot e_k = e_{12} \cdot e_k = e_{22} \cdot e_k = 0$ . Аналогично  $e_{ij} \cdot e_k = 0$  для любых  $i, j, k$ . Тогда в этом базисе  $(g_{ij})'_k = (e_i \cdot e_j)'_k = e_{ik} \cdot e_j + e_{jk} \cdot e_i = 0$ .

Другое доказательство равенства  $g'_{ij} = 0$ . Так как  $\gamma_u(t) := e(ut)$  — геодезическая, то  $e''_p(u, u) = \gamma''_u(0) \perp T_p$  для любого  $u \in T_p$ . Тогда  $e''_p(u, v) \perp T_p$  для любых  $u, v \in T_p$ . Значит,

$$(g(u, v))_\omega = (e'_p u \cdot e'_p v)'_\omega = e''_p(u, \omega) \cdot e'_p v + e'_p u \cdot e''_p(v, \omega) = 0.$$

*Замечание.* Равенство  $g'_i(P) = 0$  равносильно тому, что в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $P$  с точностью до  $o(\varepsilon)$  параллельный перенос коммутирует с экспоненциальным отображением, или тому, что оператор  $e'_u$  ортогонален.

*Указание к 4.* (а) Возьмём ортонормированный базис  $v_1, \dots, v_n$  в  $T_p$ . Поскольку геодезическая система координат евклидова (3а), то  $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + o(|u|)$ . Поэтому  $\det g_{ij}(u) = 1 + o(|u|)$ . Значит,

$$V_{\Pi, P}(R) = \int_{B(R)} \sqrt{\det g_{ij}(u)} du = V_n R^n + o(R^{n+1}).$$

Ввиду бесконечной дифференцируемости функции  $V_{\Pi, P}(R)$  получаем требуемое.

(б) Аналогично, начиная с равенства

$$g_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{k,l} g_{ij,kl} u_k u_l + o(|u|^2).$$

*Указание к 5аb.* Возьмём ортонормированный базис  $v_1, \dots, v_n$  в  $T_p$ .

(а) Поскольку геодезическая система координат евклидова (3а), то  $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + o(|u|)$ . Поэтому  $\sqrt{\det g_{ij}(u)} = \sqrt{1 + o_1(|u|)} = 1 + o_2(|u|)$ . Так как  $V(\exp(A)) = \int_A \sqrt{\det g_{ij}(u)} du$ , то ввиду бесконечной дифференцируемости функции  $V(\exp(hA))$  получаем нужное.

(б) Поскольку геодезическая система координат евклидова (3а), то  $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + R_{ij}(u, u) + o(|u|^2)$ , где  $R_{ij}$  — квадратичная форма по  $u$  ( $R_{ij}(u, u) = \sum_{k,l} g_{ij,kl} u_k u_l$ ). Поэтому

$$\det g_{ij}(u) = 1 + \sum_i R_{ii}(u, u) + o(|u|^2) = 1 + \frac{1}{2} \sum_i R_{ii}(u, u) + o(|u|^2).$$

Так как  $V(\exp(A)) = \int_A \sqrt{\det g_{ij}(u)} du$ , то формула из определения билинейной формы Риччи верна для

$$\rho(u, v) := \frac{1}{2} \sum_i R_{ii}(u, u).$$

*Замечание к 5а.* Используем указание к задаче 3а. Поскольку геодезическая система координат евклидова, то по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} e'_u v_i &= v_i + \frac{e'''(u, u, v_i)}{2} + o(|u|^2), \\ 2R_{ij}(u, u) &= v_j \cdot e'''(u, u, v_i) + v_i \cdot e'''(u, u, v_j), \\ 2\rho(u, u) &= \sum_i v_i \cdot e'''(u, u, v_i). \end{aligned}$$

Объясним смысл формулы Тейлора. Обозначим через  $[L, L']$  векторное пространство линейных операторов из векторного пространства  $L$  в векторное пространство  $L'$  (все векторные пространства рассматриваются над  $\mathbb{R}$ ). Тогда

$$e': T_P \rightarrow [T_P, T_P]$$

( $e'$  не обязательно линейно). Значит,  $e''_u: T_P \rightarrow [T_P, T_P]$  — линейный оператор, или отображение

$$e''_u: T_P \times T_P \rightarrow T_P,$$

линейное по второму аргументу. Тогда

$$e'': T_P \rightarrow [T_P, [T_P, T_P]]$$

( $e''$  не обязательно линейно). Поэтому

$$e'''_u: T_P \rightarrow [T_P, [T_P, T_P]]$$

является линейным оператором, или отображением  $e'''_u: (T_P)^3 \rightarrow T_P$ , линейным по второму и третьему аргументам.

*Указание к 7.* (а) Следует из 6б.

(с) Следует из 7аб.

(д) Из задач 1а и 7д следующей темы вытекает  $\rho = \sigma g$ , т. е.  $\tilde{\rho} = \sigma E$ . Отсюда и из  $\tau = \text{tr } \tilde{\rho}$  (7а) получаем  $\tau = 2\sigma$  и  $2\rho = \tau g$ . Было бы интересно найти прямое доказательство (ср. с 5а).

### 3.5. Тензор кривизны Римана

В этом пункте  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$  — поверхность размерности  $n$ .

Пусть  $A \subset T_P$  — область с кусочно гладкой границей, содержащей точку  $P$ . Обозначим через  $\sigma(A): T_P \rightarrow T_P$  линейный оператор, сопоставляющий вектору  $x \in T_P$  вектор, полученный из  $x$  параллельным

переносом вдоль ориентированной кривой  $\exp_P(\partial A)$ . (Область  $A$  считается настолько малой, что  $\exp_P(\partial A)$  определено.)

**Оператором секционной кривизны** поверхности  $\Pi$  в точке  $P \in \Pi$ , отвечающим паре  $u, v \in T_P$  линейно независимых векторов, называется такой линейный оператор

$$R(u, v) = R(u, v)_P: T_P \rightarrow T_P,$$

что для параллелограмма  $A_{u,v}$ , натянутого на  $u, v$ , имеем

$$\sigma(hA_{u,v}) = E + h^2 R(u, v) + o(h^2) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Здесь ориентированная кривая  $\partial A_{u,v}$  выходит из  $P$  в направлении вектора  $u$ .

Если  $u$  и  $v$  линейно зависимы, то положим  $R(u, v) = 0$ .

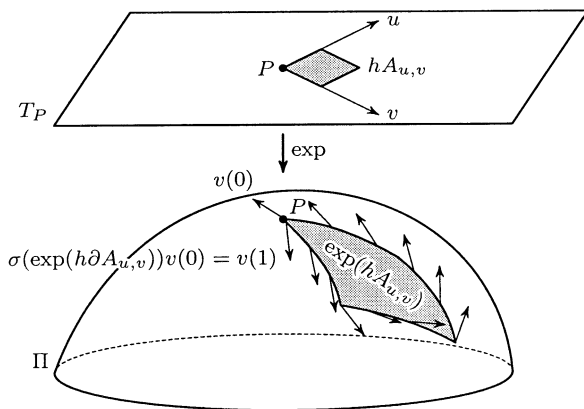


Рис. 9. Оператор секционной кривизны

Для двумерной поверхности  $\Pi$  и точки  $P \in \Pi$  обозначим через  $R_P^\alpha: T_P \rightarrow T_P$  поворот на  $\alpha$  относительно точки  $P$ .

В задачах 1 и 2 надо, в частности, доказать, что  $R(u, v)$  существует.

1. (а) Для  $n = 2$  имеем  $\sigma(hA_{u,v}) = R_P^{S(\exp(hA_{u,v}))}$ .

(б) Для  $n = 2$  имеем  $R(u, v)_P = (\sigma_P u \wedge v) R_P^{\pi/2}$ .

(с) При параллельном переносе вдоль кривой, лежащей на двумерной подповерхности в нашей поверхности, параллельность к подповерхности касательного к поверхности вектора не обязательно сохраняется.

(д)\*  $u \cdot R(u, v)v = \sigma(\exp \langle u, v \rangle)u \wedge v$ . (Число  $\sigma(\exp \langle u, v \rangle)$  называется *секционной кривизной* поверхности  $\Pi$  в точке  $P$ , отвечающей паре линейно независимых векторов  $u, v$ .)

2. (a) Верно ли, что для  $n = 3$  выполнено

$$R(u, v) = \sigma(\exp \langle u, v \rangle)(u \wedge v)R_P^{\pi/2} \circ \text{pr}_{\langle u, v \rangle},$$

где  $\langle u, v \rangle$  — плоскость в пространстве  $T_P$ , натянутая на вектора  $u, v$ , а  $\text{pr}: T_P \rightarrow \langle u, v \rangle$  — ортогональная проекция?

(b) Для стандартной сферы  $S^n = \{x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  в точке  $(0, \dots, 0, 1)$  выполнено

$$R(u, v)\omega = (v \cdot \omega)u - (u \cdot \omega)v,$$

где  $u, v, \omega$  — касательные векторы к  $S^n$ .

3. (a)\* Оператор  $R(u, v)$  секционной кривизны существует и единственен.

(b) Он линейно зависит от  $u, v$ .

(c) **Теорема.**

$$\sigma(A) = E + S(A)R(u, v) + o(S(A)) \quad \text{при} \quad \text{diam } A \rightarrow 0$$

по областям  $A \subset T_P$  с кусочно гладкой границей, содержащей точку  $P$ .

(d) Внутренняя изометрия сохраняет оператор секционной кривизны.

#### 4. Теорема о симметриях тензора Римана.

(a)  $R(u, v)$  кососимметричен, т. е.  $[R(u, v)x] \cdot y = -[R(u, v)y] \cdot x$ .

(b)  $R(u, v)$  кососимметричен по  $u, v$ :  $R(u, v) = -R(v, u)$ .

(c) *Тождество Бьянки (алгебраическое)*.  $R(u, v)x + R(v, x)u + R(x, u)v = 0$ .

(d)  $[R(u, v)x] \cdot y = [R(x, y)u] \cdot v$ .

5. **Теорема.** (a) Существует и единственно такое 4-линейное отображение  $\widehat{R} = \widehat{R}_P: (T_P)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\exp'(u)x \cdot \exp'(u)y = x \cdot y + \frac{1}{3}\widehat{R}(u, x, u, y) + o(|u|^2)$$

при любых постоянных  $x, y \in T_P$ . Здесь  $\exp'(u): T_P \rightarrow T_{\exp(u)}$ .

(b) Существует и единственно такое трилинейное отображение

$$\widetilde{R}_P: (T_P)^3 \rightarrow T_P,$$

что  $\widetilde{R}_P(u, x, v) \cdot y = \widehat{R}_P(u, x, v, y)$ .

(c)\*  $R_P(u, x)v \cdot y = \widehat{R}_P(u, x, v, y)$ .

(Это даёт эквивалентное определение оператора секционной кривизны и, значит, тензора кривизны Римана, см. ниже. Именно так его определял Риман [Ca28, 9.1, с. 204].)

(d) В системе координат экспоненциального отображения  $\widehat{R}_{ijkl} = g_{ij,kl}$ .

(e) Найдите компоненты  $\widehat{R}_{ijkl}$  для поверхности  $r: D \rightarrow \Pi$  в базисе  $(r_x, r_y)$ .

**6.\*** (a) [MF04, Ra04] **Теорема.** Следующие условия на элементарную  $n$ -мерную поверхность равносильны:

(1) она изометрична некоторой части пространства  $\mathbb{R}^n$ ;

(2) параллельный перенос по замкнутому контуру переводит каждый вектор в себя;

(3) все её операторы секционной кривизны в любой точке нулевые (или один тензор кривизны Римана нулевой, см. ниже).

(b) Если на односвязной поверхности выполнено (3), то поверхность параллелизуема.

**Тензором кривизны Римана** в точке  $P$  непараметризованной (многомерной) поверхности  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$  называется трilinearное отображение

$$R: (T_P)^3 \rightarrow T_P,$$

определённое формулой  $R(u, v, x) := R(u, v)x$ .

**7.** (a) Вычислите компоненты  $R_{jkl}^i$  на двумерной сфере в сферических координатах.

(b) **Теорема.** Для двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$  тензор Римана выражается через риманову метрику и секционную кривизну:

$$R(u, v, x) = \sigma u \wedge v R_P^{\pi/2}(x).$$

(Или, в системе координат экспоненциального отображения,  $R_{1212} = \sigma \det(g_{ij})$ ; остальные компоненты нулевые или равны  $\pm R_{1212}$  ввиду симметрий тензора Римана.)

(c) **Теорема.** Для трёхмерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$  тензор Римана выражается через риманову метрику и билинейную форму Риччи:

$$R(u, v)x = \rho(u, x)v - \rho(v, x)u + (u \cdot x)\tilde{\rho}(v) - (v \cdot x)\tilde{\rho}(u) + \frac{\tau}{2}[(v \cdot x)u - (u \cdot x)v].$$

(d)\* **Теорема.** Билинейная форма Риччи равна свёртке тензора Римана:  $\rho(u, v) = \sum R(e_i, u)v \cdot e_i$ .

В определении оператора секционной кривизны (и некоторых задачах этого, но не предыдущего, пункта) экспоненциальное отображение можно заменить на произвольное отображение  $f: A \rightarrow \Pi$  ( $A \subset T_P$ ), для которого  $f(tv)'_t|_{t=0} = v$  при любом  $v \in A$  (ввиду гладкости достаточно выполнения этого условия для базисных векторов). Например, на отображение, локально обратное проекции на касательную плоскость.

Указание к 1. (а) По теореме Egregium Гаусса.

(б) Аналогично предыдущему пункту  $S(\exp(hA_{u,v})) = h^2 u \wedge v + o(h^2)$ .

(с) Рассмотрите сферу в  $\mathbb{R}^3$  (или окружность в  $\mathbb{R}^2$ ).

Указания к 3а. Возьмём «естественную» кривую  $\gamma: [0, 4h] \rightarrow D$ , для которой  $\gamma(0) = \gamma(4h) = P$  и  $\gamma[0, 4h] = \exp_P(h\partial A_{u,v})$ . Обозначим через  $\omega(t) = \sum a_i(t)r_i(\gamma(t))$  результат переноса вектора  $\omega(0)$  вдоль отрезка  $\gamma[0, t]$ . Далее пропускаем аргумент  $t$  функций  $\omega(t)$ ,  $a(t)$ ,  $\gamma(t)$  и их производных, а также аргумент  $\gamma(t)$  отображений  $r_i$  и  $dr_i = r'_i$ . Далее штрих обозначает производную по  $t$ .

Напомним, что  $r'_i(\gamma(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\gamma(t)}$  — линейный оператор. Для любого  $j$  имеем

$$0 = \omega' \cdot r_j = \sum_i [a'_i r_i \cdot r_j + a_i (r'_i \gamma') \cdot r_j].$$

Для фиксированной параметризации  $r$  это уравнение параллельного переноса можно представить в виде  $a' = F_\gamma(\gamma')a$ , где  $F_P(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейный оператор. Тогда  $\omega(1) = \exp[-\int_0^{4h} F_\gamma(\gamma') dt] \omega(0)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{4h} F_\gamma(\gamma') dt &= \int_0^h F_{vh-vt}(v) dt + \int_0^h F_{uh+vh-ut}(u) dt - \\ &\quad - \int_0^h F_{uh+vt}(v) dt - \int_0^h F_{ut}(u) dt. \end{aligned}$$

Теперь нужное утверждение получится путём взятия начальных членов ряда Тейлора экспоненты оператора и оператора  $F_P(x)$ .

Указание к 3д. Используйте инвариантность параллельного переноса.

Указание к 4. (а) Оператор  $\sigma(A)$  ортогонален.

(б) Имеем  $\sigma(A_{v,u})\sigma(A_{u,v}) = E$ . Разлагая с точностью до  $o(h^2)$  получаем требуемое.

(с) Следует из 4abc.

Указание к 5. (а) Следует из евклидовости метрики.

(б) Достаточно доказать для  $(u, v, x, y) = (he_k, he_l, e_i, e_j)$ . Используйте 1b и 2a.

Указание к 7. (а) Используйте 7b.

(б) Вытекает из 1a.

(с) Вытекает из 2a и 7d.

(д) Достаточно доказать для  $(u, v) = (e_k, e_l)$ . Используйте 1b, 2a, равенство  $\tau = 2\sigma$  и выражение квадратичной формы Риччи через скалярные кривизны.



*Другое указание.* Поскольку геодезическая система координат евклидова, то  $g_{ij}(u) = \delta_{ij} + R_{ij}(u, u) + o(|u|^2)$ . Из решения задачи 3а предыдущего пункта получаем

$$2\varphi(u, u) = \sum_i R_{ii}(u, u).$$

Поэтому нужное утверждение вытекает из 5б.

## Глава 4. Ковариантное дифференцирование

### 4.1. Примеры тензорных полей

*Собираются, стягиваются с разных мест вызываемые предметы, причём иным приходится преодолевать не только даль, но и давность...*

В. Набоков, Королёк.

*Векторным полем* на поверхности  $\Pi$  называется семейство касательных векторов  $v_P \in T_P$  ( $P \in \Pi$ ), непрерывное по  $P$ .

1. На сфере без северного и южного полюсов задано векторное поле. При стереографической проекции из *северного* полюса (точнее, при отображении, индуцированном этой проекцией) это поле переходит в постоянное векторное поле на плоскости. Обязательно ли это поле переходит в постоянное векторное поле на плоскости при стереографической проекции из *южного* полюса?

*Операторным полем* на поверхности  $\Pi$  называется семейство линейных операторов  $A_P: T_P \rightarrow T_P$  ( $P \in \Pi$ ), непрерывное по  $P$ .

*Ковекторным полем* на поверхности  $\Pi$  называется семейство ковекторов (= линейных функционалов)  $\varphi_P: T_P \rightarrow \mathbb{R}$  ( $P \in \Pi$ ), непрерывное по  $P$ .

*Полем билинейных отображений* (= *форм*) на поверхности  $\Pi$  называется семейство билинейных отображений  $\omega_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$  ( $P \in \Pi$ ), непрерывное по  $P$ .

*Полем  $k$ -линейных отображений* (= *форм*) на поверхности  $\Pi$  называется семейство  $k$ -линейных отображений  $\omega_P: (T_P)^k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $P \in \Pi$ ), непрерывное по  $P$ .

Более точно, определенные векторные поля называют *касательными* векторными полями. Аналогичное замечание справедливо для операторных и других рассматриваемых полей.

2. Существует ли на торе в  $\mathbb{R}^3$  поле

(а) ненулевых векторов?

(б) ненулевых ковекторов?

(с) невырожденных операторов?

(д) положительно определённых симметричных билинейных форм (билинейная форма  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется *положительно определённой*, если  $B(a, a) > 0$  для любого  $a \in V \setminus \{0\}$ )?

(е) невырожденных кососимметричных билинейных форм (билинейная форма  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется *невырожденной*, если для любого  $a \in V \setminus \{0\}$  найдётся такой  $x \in V$ , что  $B(a, x) \neq 0$ )?

(f)\* операторов  $I_P: T_P \rightarrow T_P$ , для которых  $I_P^2 = -E$ ?

3. (abcdef) То же, что и в задаче 2, но для листа Мёбиуса.

4. (a)\* **Теорема о еже.** На сфере  $S^2$  не существует касательного векторного поля из ненулевых векторов.

(b) Выведите из (a), что на сфере  $S^2$  не существует касательного ковекторного поля из ненулевых ковекторов.

(def) То же, что в задаче 2 (def), но для сферы  $S^2$ .

5. (abef) То же для сферы

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

плюс

(g) невырожденных трilinearных форм;

(h) невырожденных векторных произведений.

Ответ к 2а, 3а и 5а. Да.

Указание к пунктам (b) всех задач. Если  $\{v_P\}$  векторное поле, то ковекторное поле можно определить формулой  $\varphi_P(u) := u \cdot v_P$ .

Указание к пунктам (c) всех задач. Да,  $A_P(v) := v$ .

Указание к пунктам (d) всех задач. Да,  $B_P(u, v) := u \cdot v$ .

Указание к 2е и 4е. Да. Возьмите ориентированную площадь.

Указание к 2f и 4f. Да. Возьмите поворот касательной плоскости на  $\pi/2$  относительно выбранной ориентации тора или сферы.

Ответ к 3ef и 5е. Нет.

Указание к 2 и 5. Постройте два или три векторных поля, линейно независимых в каждой точке. Тогда нужные объекты достаточно построить в одной точке.

## 4.2. Ковариантное дифференцирование функций

0. Для функции  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  напишите определения частной производной, производной в направлении вектора  $(a, b)$ , градиента и производной — все в точке  $(x_0, y_0)$ . Имеют ли эти определения смысл для функции  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?

Здесь и далее  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$  — поверхность и  $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  — функция.

Для  $P \in \Pi$  и  $u \in T_P$  через  $\gamma_u = \gamma_{u,P}: [-1, 1] \rightarrow \Pi$  обозначается произвольная кривая, для которой  $\gamma_u(0) = P$  и  $\gamma'_u(0) = u$ .

**Производной функции  $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $P \in \Pi$  по направлению касательного вектора  $u \in T_P$**  (точнее, по касательному вектору  $u \in T_P$ )

называется число

$$(\nabla_u f)_P := [f(\gamma_u(t))]'_t \Big|_{t=0}.$$

1. (а) Приведённое определение производной корректно, т. е. не зависит от выбора кривой  $\gamma_u$ . (Рекомендуется сначала решить следующие пункты в предположении корректности.)

(б) Зададим функцию  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  формулой  $f(P) = \sin \angle POZ$ , где  $Z = (0, 0, 1)$  и  $O = (0, 0, 0)$ . Найдите производную этой функции в точке  $(x, y, z) = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$  по направлению касательного вектора  $(0, 1, 0)$ .

(с)  $\nabla_u(f_1 + f_2) = \nabla_u f_1 + \nabla_u f_2$ .

(д)  $\nabla_u(fg) = (\nabla_u f)g + f\nabla_u g$ .

(е) Пусть  $r: D \rightarrow \Pi$  — параметризация поверхности. Выразите  $(\nabla_u f)_P$  через координаты  $(a, b)$  вектора  $u$  в базисе  $(r_x, r_y)$ .

**Производной (= дифференциалом) функции  $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  называется семейство (= поле)  $\nabla f$  ковекторов (= линейных функционалов)**

$$\{(\nabla f)_P\}_{P \in \Pi},$$

заданных формулой  $(\nabla f)_P(u) := (\nabla_u f)_P$ .

2. (а) Отображение  $(\nabla f)_P: T_P \rightarrow \mathbb{R}$  действительно является линейным функционалом, т. е.  $(\nabla f)_P(\lambda a + \mu b) = \lambda(\nabla f)_P(a) + \mu(\nabla f)_P(b)$ .

(б) Найдите координаты производной функции из задачи 1б в произвольной точке  $P$  сферы и некотором базисе в  $T_P^*$  (выберите и укажите базис сами).

(с)  $\nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2$ .

(д)  $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$ .

(е) Пусть  $r: D \rightarrow \Pi$  — параметризация поверхности. Найдите координаты линейного функционала  $(\nabla f)_P$  в базисе  $(r_x, r_y)_P$ .

(ф) Пусть  $\varphi: D \rightarrow D$  — замена координат. Выразите базис  $(\varphi \circ r)_x$ ,  $(\varphi \circ r)_y$  через производную отображения  $\varphi$  и базис  $r_x, r_y$ .

(г) Как преобразуются координаты производной при замене координат  $\varphi: D \rightarrow D$ ?

3. (а) Существует единственный касательный *вектор градиента*  $(\text{grad } f)_P$  в точке  $P$ , для которого  $(\nabla_u f)_P = u \cdot (\text{grad } f)_P$  при любом  $u$ .

(б) Запишите градиент функции в полярных координатах в  $\mathbb{R}^2$ , в сферических координатах на сфере  $S^2$  и в сферических координатах в  $\mathbb{R}^3$  (последнее — для функции  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ).

(с) Направление наибольшего роста функции в некоторой точке задаётся вектором её градиента в этой точке.

(д) *Линией уровня* функции  $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$  называется множество  $f^{-1}(c)$ , где  $c \in \mathbb{R}$ . Градиент перпендикулярен линии уровня.

(е) Как преобразуются координаты градиента при замене координат?

(f) Запишите в произвольной системе координат формулу для производной функции  $f$  в направлении вектора градиента функции  $g$ .

Указание к 1.  $\gamma_u(t) = r(a(t), b(t))$ ,  $a = a'(0)$ ,  $b = b'(0)$ .

(b)  $(\nabla_u f)_P = [f(r(a(t), b(t)))]'_t \Big|_{t=0}$ .

(е) Ответ: если  $u = ar_x + br_y$ , то

$$(\nabla_u f)_P = a(f \circ r)_x \Big|_{r^{-1}(P)} + b(f \circ r)_y \Big|_{r^{-1}(P)}.$$

Ответ к 2е.

$$(\nabla f)_P = ((f \circ r)_x \Big|_{r^{-1}(P)}, (f \circ r)_y \Big|_{r^{-1}(P)}).$$

Указание к 2г. От производной требуется только то, что она является ковектором. Используйте предыдущий пункт.

### 4.3. Коммутатор векторных полей

Пусть  $u$  и  $v$  — векторные поля на плоскости (или в  $\mathbb{R}^n$ , или на  $n$ -мерной поверхности в  $\mathbb{R}^m$ ). При каких условиях существует система координат  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (или  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ ), для которой эти поля являются координатными (т. е.  $u = r'(1, 0)$  и  $v = r'(0, 1)$ )? Решение этой просто формулируемой, но важной задачи приводит к следующему понятию.

**Коммутатором** векторных полей  $u$  и  $v$  на поверхности  $\Pi$  называется такое векторное поле  $[u, v]$ , что

$$\nabla_u \nabla_v f - \nabla_v \nabla_u f = \nabla_{[u, v]} f \quad \text{для любой функции } f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}.$$

1. (а) Такое поле  $[u, v]$  существует и единственно.

(b) Коммутатор обладает свойствами

$$[u, v] = -[v, u],$$

$$[\lambda u, v] = \lambda [u, v],$$

$$[u_1 + u_2, v] = [u_1, v] + [u_2, v].$$

(с) Векторное поле  $v$  в  $\mathbb{R}^n$  с декартовыми координатами  $(x^1, \dots, x^n)$  называется *линейным*, если  $v^i(x^1, \dots, x^n) = A^i_k x^k$ , где  $A$  — некоторая постоянная матрица. Докажите, что коммутатор линейных векторных полей есть снова линейное векторное поле, и выразите его матрицу через матрицы исходных полей.

(d) Найдите выражение для коммутатора в произвольных координатах.

2. Пусть  $u_1$  и  $u_2$  — векторные поля на  $\mathbb{R}^n$ .

(а) Обозначим через

$a_1(t)$  интегральную кривую поля  $u_1$ , для которой  $a_1(0) = P$ ,

$b_{2,t}(s)$  интегральную кривую поля  $u_2$ , для которой  $b_{2,t}(0) = a_1(t)$ ,

$a_2(t)$  интегральную кривую поля  $u_2$ , для которой  $a_2(0) = P$ ,

$b_{1,s}(t)$  интегральную кривую поля  $u_1$ , для которой  $b_{1,s}(0) = a_2(s)$ .

Докажите, что  $[u_1, u_2] = 0$  тогда и только тогда, когда  $b_{1,s}(t) = b_{2,t}(s)$  для любых  $P \in \mathbb{R}^n$  и достаточно малых  $t, s \in \mathbb{R}$ .

(б) Система координат  $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которой  $u_1 = r'(1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $u_2 = r'(0, 1, 0, 0, \dots, 0)$  и т. д. существует тогда и только тогда, когда все эти векторные поля линейно независимы в каждой точке и все их попарные коммутаторы нулевые.

3. (а) Пусть  $u, v$  — векторные поля на  $\mathbb{R}^m$ , касающиеся поверхности  $\Pi \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда векторное поле  $[u, v]$  тоже касается поверхности  $\Pi$  и его ограничение  $[u, v]|_{\Pi}$  на  $\Pi$  совпадает с полем  $[u|_{\Pi}, v|_{\Pi}]$ , где  $u|_{\Pi}$  и  $v|_{\Pi}$  — ограничения на  $\Pi$  полей  $u$  и  $v$ .

(б) На единичной сфере

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

рассмотрим векторные поля

$$u = (-y, x, -w, z), \quad v_1 = (-w, -z, y, x) \quad \text{и} \quad v_2 = (-w, z, -y, x).$$

Вычислите коммутаторы  $[u, v_1]$  и  $[u, v_2]$ .

4. (а) Любое ли ненулевое векторное поле на  $\mathbb{R}^m$  можно «выпрямить», т. е. найти систему координат, в которой компоненты этого поля будут постоянны?

(б) А ковекторное?

(с)\* Пусть  $A$  — операторное поле на  $\mathbb{R}^n$ . Каждой паре векторных полей  $u, v$  на  $\mathbb{R}^n$  сопоставим векторное поле

$$N(u, v) = A^2[u, v] - A[Au, v] - A[u, Av] + [Au, Av].$$

Ясно, что отображение  $N: T_P \times T_P \rightarrow T_P$  является билинейным. Докажите, что если существует система координат, в которой матрицы операторов семейства  $A$  одинаковы, то  $N = 0$ .

5. (а) Приведите пример двух коммутирующих векторных полей на  $S^3$ , линейно независимых во всех точках.

(б)\* Любые три попарно коммутирующие векторные поля на трёхмерной сфере  $S^3$  линейно зависимы в некоторой точке сферы  $S^3$ .

Указание к 5б. Иначе  $S^3 \cong S^1 \times S^1 \times S^1$ .

#### 4.4. Ковариантное дифференцирование векторных полей

Обозначим через  $\text{pr}_{T_P}$  ортогональную проекцию на касательную плоскость  $T_P$ .

**Ковариантной производной векторного поля  $v$  на поверхности  $\Pi$  в точке  $P \in \Pi$  по направлению касательного вектора  $u \in T_P$  называется вектор**

$$(\nabla_u v)_P := \text{pr}_{T_P} [v_{\gamma_u(t)}]' \Big|_{t=0}.$$

1. (b) Найдите ковариантную производную векторного поля

$$v(r, \varphi) = \left( \cos \varphi, -\frac{\sin \varphi}{r} \right)$$

на плоскости в точке  $(0, 2)$  в направлении вектора  $(1, 1)$ .

(acd1d2e1e2) Сформулируйте и докажите аналоги задач 1acde из пункта «Ковариантное дифференцирование функций» для векторных полей.

У задачи 1d два аналога:

$$\nabla_u (fv) = (\nabla_u f)v + f\nabla_u v$$

$$\nabla_u (v_1 \cdot v_2) = (\nabla_u v_1) \cdot v_2 + v_1 \cdot \nabla_u v_2.$$

Формулу, аналогичную 1e, найдите

(e1) при условии  $g_{ij} = \delta_{ij}$  в данной точке.

(e2) для общего случая.

(f) Даны линейно независимые вектора  $u, v$  и  $x$  в  $\mathbb{R}^3$ . Выразите через их попарные скалярные произведения коэффициенты разложения по базису  $u, v$  ортогональной проекции вектора  $x$  на плоскость, содержащую вектора  $u$  и  $v$ .

(g) Как преобразуются координаты ковариантной производной векторного поля при замене координат  $\varphi: D \rightarrow D$ ?

2. (a) Кривая на поверхности является геодезической тогда и только тогда, когда равна нулю ковариантная производная вектора её скорости вдоль неё.

(b) Семейство векторов является параллельным вдоль кривой на поверхности тогда и только тогда, когда ковариантная производная этого семейства вдоль этой кривой равна нулю.

(c)  $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u$ .

3. (a) Если риманова метрика евклидова в точке  $P$  (см. определение в задаче 3(a) п. 3.4), то

$$\nabla_u \nabla_v \omega - \nabla_v \nabla_u \omega = \nabla_{[u, v]} \omega.$$

$$(b)^* R(u, v)\omega = \nabla_v \nabla_u \omega - \nabla_u \nabla_v \omega + \nabla_{[u, v]}\omega.$$

(с) Для поверхности  $r: D \rightarrow \Pi$  в базисе  $(r_x, r_y)$  найдите (используя (b)) компоненты  $R_{jkl}^i$ .

**Ковариантной производной векторного поля  $v$  на поверхности  $\Pi$  называется семейство линейных операторов**

$$(\nabla v)_P: T_P \rightarrow T_P,$$

заданных формулой  $(\nabla v)_P(u) := \nabla_u v$ .

4. (b) Найдите ковариантную производную векторного поля

$$v(r, \varphi) = \left( \cos \varphi, -\frac{\sin \varphi}{r} \right)$$

на плоскости.

(acd1d2e1e2g) Сформулируйте и докажите аналоги задач 2асdeg из пункта «Ковариантное дифференцирование функций» для векторных полей.

*Указание к 1.* (e1) Пусть  $v_{r(x,y)} = p(x, y)r_x(x, y) + q(x, y)r_y(x, y)$  — векторное поле на поверхности  $r(x, y)$  и  $\gamma_u(t) = r(a(t), b(t))$ . Тогда  $u = r_x a'(0) + r_y b'(0)$  и

$$\nabla_u v = r_x \left( [v_{r(a(t), b(t))}]'_t \Big|_{t=0} \cdot r_x \right) + r_y \left( [v_{r(a(t), b(t))}]'_t \Big|_{t=0} \cdot r_y \right).$$

(e2) Аналогично (e1) используя (f). Или используйте (e1) и (g).

(g) От производной требуется только то, что она является оператором. Используйте закон изменения базиса в касательном пространстве при замене переменных на поверхности (т. е. задачу 2f из темы «Ковариантное дифференцирование функций»).

## 4.5. Ковариантное дифференцирование тензоров

Пусть дана поверхность  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  и параметризованная кривая  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Pi$ . Операторное поле  $A(t): T_{\gamma(t)} \rightarrow T_{\gamma(t)}$  называется **параллельным вдоль кривой  $\gamma$**  (в смысле Леви—Чивита), если для любого векторного поля  $v(t) \in T_{\gamma(t)}$ , параллельного вдоль кривой  $\gamma$ , векторное поле  $A(v(t))$  параллельно вдоль кривой  $\gamma$ .

0. (a) Придумайте пример касательного операторного поля, параллельного вдоль любой кривой.

(b) Для любых точки  $P$  ориентированной единичной сферы в  $\mathbb{R}^3$  и касательного вектора  $v$  в этой точке обозначим через  $R_P^{\pi/2}(v)$  вектор, полученный из  $v$  поворотом в касательной плоскости на  $\pi/2$  в положительном



направлении. Тогда операторное поле  $R_P^{\pi/2}$  параллельно вдоль любой кривой на сфере.

(с) Сформулируйте и докажите аналоги теорем из темы «Параллельный перенос» для операторных полей.

Пусть  $u, v \in T_P$  — касательные векторы. Здесь и далее  $v_u(t) \in T_{\gamma_u(t)}$  — касательное векторное поле, параллельное вдоль кривой  $\gamma_u$ , для которого  $v_u(0) = v$ .

**Ковариантной производной операторного поля  $A$  на поверхности  $\Pi$  в точке  $P \in \Pi$  по направлению  $u \in T_P$**  называется оператор, сопоставляющий вектору  $v$

$$(\nabla_u A)_P(v) := \text{pr}_{T_P} [A_{\gamma_u(t)}(v_u(t))]'_t \Big|_{t=0}.$$

**Ковариантной производной** операторного поля  $A$  на поверхности  $\Pi$  называется семейство билинейных отображений

$$(\nabla A)_P: T_P \times T_P \rightarrow T_P,$$

заданных формулой  $(\nabla A)_P(u, v) := (\nabla_u A)(v)$ .

1. (b) Для любых точки  $P = (x, y, z)$  ориентированной единичной сферы в  $\mathbb{R}^3$  и касательного вектора  $v$  в этой точке обозначим через  $A_P(v)$  вектор, полученный из  $xv$  поворотом в касательной плоскости на  $\pi/2$  в положительном направлении. Найдите ковариантную производную операторного поля  $A$  на сфере в точке  $(1, 0, 0)$  по направлению вектора  $(0, 1, 0)$ .

(acd1d2e1e2) Сформулируйте и докажите аналоги задачи 1acd1d2e1e2 из предыдущего пункта для операторных полей.

(f) Если  $v(t) \in T_{\gamma_u(t)}$  — произвольное касательное векторное поле (не обязательно параллельное вдоль кривой  $\gamma_u$ ), для которого  $v(0) = v$ , то

$$(\nabla_u A)(v) = [A_{\gamma_u(t)}(v(t))]'_t \Big|_{t=0} - A_P(\text{pr}_{T_P} [v'(0)]).$$

2. (abcd1d2e1e2g) Сформулируйте и докажите аналоги 4abcd1d2e1e2g из предыдущего пункта для операторных полей. В  $e1, e2$  обязательно укажите базис!

3. (a) Дайте определение параллельности ковекторного поля вдоль кривой на поверхности.

(b) Сформулируйте и докажите аналоги теорем из темы «Параллельный перенос» для ковекторных полей.

**Ковариантной производной** ковекторного поля  $\varphi$  на поверхности  $\Pi$  называется поле  $(\nabla\varphi)_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$  ( $P \in \Pi$ ) билинейных отображений, заданных формулой

$$(\nabla\varphi)_P(u, v) = (\nabla_u \varphi)_P(v) := [\varphi_{\gamma_u(t)}(v_u(t))]'_t \Big|_{t=0}.$$

4. (b) Найдите матрицу (с указанием базиса) ковариантной производной ковекторного поля, являющегося производной функции  $f(x, y, z) = x$  на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в произвольной точке сферы.

(acd1d2e1e2g) Сформулируйте и докажите аналоги 2acd1d2e1e2g для ковекторных полей.

5. Если  $v(t) \in T_{\gamma_u(t)}$  — произвольное касательное векторное поле (не обязательно параллельное вдоль кривой  $\gamma_u$ ), для которого  $v(0) = v$ , то

$$(\nabla_u \varphi)(v) = [\varphi_{\gamma_u(t)}(v(t))]'_t \Big|_{t=0} - \varphi_P(\text{pr}_{T_P}[v'(0)]).$$

6. (a) Дайте определение параллельности поля билинейных форм вдоль кривой на поверхности.

(b) Сформулируйте и докажите аналоги теорем из темы «Параллельный перенос» для полей билинейных форм.

**Ковариантной производной поля  $\omega$  билинейных отображений** на поверхности  $\Pi$  называется семейство трilinearных отображений  $(\nabla \omega)_P: T_P \times T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$  ( $P \in \Pi$ ), заданных формулой

$$(\nabla \omega)_P(u, v, \omega) = (\nabla_u \omega)(v, \omega) := [\varphi_{\gamma_u(t)}(v_u(t), \omega_u(t))]'_t \Big|_{t=0}.$$

7. (b) Найдите какую-нибудь строку (из трёх элементов) трёхмерной матрицы  $3 \times 3 \times 3$  (с указанием базиса) ковариантной производной билинейной формы  $x_1 x_2 dx_3 \wedge dx_4$  на сфере  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  в точке  $(0, 0, 0, 1)$  сферы. По определению, эта билинейная форма сопоставляет паре касательных векторов  $(a, b)$  в точке  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  сферы число  $x_1 x_2 (a_3 b_4 - a_4 b_3)$ .

(acd1d2e1e2g) Сформулируйте и докажите аналоги 2acd1d2e1e2g для полей билинейных отображений.

(h) Найдите значение формы  $\varphi d\varphi \wedge d\theta$  на паре касательных векторов  $(a, b, c)$  и  $(a', b', c')$  в точке  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  единичной сферы в  $\mathbb{R}^3$ .

8. Дайте определение параллельности вдоль кривой на поверхности и ковариантной производной поля

(a)  $k$ -линейных отображений.

(b) полилинейных отображений  $(T_P)^k \rightarrow (T_P)^l$ , т. е. *тензоров типа*  $(k, l)$ .

(c)\*  $\nabla_m R^i_{jkl} + \nabla_k R^i_{jlm} + \nabla_l R^i_{jmk} = 0$ .

9. (acd1d2e1e2g) Сформулируйте и докажите аналоги 2acd1d2e1e2g для тензоров типа  $(k, l)$ .

*Симметризацией* поля  $\psi_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$  билинейных отображений называется поле билинейных отображений  $(\text{Alt } \psi)_P: T_P \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$ , определённых формулой  $2(\text{Alt } \psi)_P(u, v) := \psi_P(u, v) - \psi_P(v, u)$ .

**10.** (а) Система дифференциальных уравнений  $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  на плоскости разрешима тогда и только тогда, когда  $\text{Alt}(\nabla\varphi) = 0$  (где  $\varphi$  рассматривается как ковекторное поле).

(б) Выведите формулу для  $\text{Alt}(\nabla\varphi)$  в произвольных координатах.

(с)  $\text{Alt}(\nabla\varphi) = \nabla_u(\varphi(v)) - \nabla_v(\varphi(u)) - \varphi([u, v])$ .

*Дифференциалом* поля  $\omega$  дифференциальных  $k$ -форм (= кососимметричных  $k$ -линейных отображений) называется поле  $d\omega$  дифференциальных  $(k + 1)$ -форм, определённых формулой

$$(d\omega)_P(u_0, \dots, u_k) := \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\text{sgn } \sigma} (\nabla\omega)_P(u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(k)}).$$

**11.** (а)  $d\varphi = \text{Alt}(\nabla\varphi)$  для ковекторного поля  $\varphi$ .

(б) Выведите формулу для  $d\omega$  в произвольных координатах.

*Общее указание.* Аналогично результатам о ковариантном дифференцировании функций и векторных полей.

*Указание к 4e1e2, 7e1e2.* Используйте уравнение параллельного переноса векторных полей.

## Глава 5. Обобщение

### 5.1. Элементы гиперболической геометрии Лобачевского

Назовём *плоскостью Лобачевского* половинку  $z \geq 0$  двуполостного гиперboloида  $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ . Назовём *прямыми Лобачевского* сечения этой половинки плоскостями, проходящими через начало координат.

1. (а) Через точку плоскости Лобачевского, не лежащую на данной прямой Лобачевского, проходит более одной прямой Лобачевского, не пересекающей данной прямой Лобачевского.

(б) Через любые две точки плоскости Лобачевского проходит ровно одна прямая Лобачевского.

(с) Для любой кривой  $(x(t), y(t), z(t))$  на плоскости Лобачевского  $x_t(t)^2 + y_t(t)^2 - z_t(t)^2 > 0$ .

*Длиной Лобачевского* кривой  $(x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , на плоскости Лобачевского называется число  $\int_a^b \sqrt{x_t(t)^2 + y_t(t)^2 - z_t(t)^2} dt$ . (Или, выражаясь научно, назовём *римановой метрикой Лобачевского* сужение псевдоримановой метрики  $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$  на плоскость Лобачевского.)

Далее риманова метрика  $g_{ij}$  записывается в виде  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ .

2. (а) Плоскость Лобачевского изометрична верхней полуплоскости с римановой метрикой Лобачевского

$$ds^2 = -4 \frac{d\omega d\bar{\omega}}{(\omega - \bar{\omega})^2}$$

(модель Пуанкаре в верхней полуплоскости). Далее *плоскостью Лобачевского* называется верхняя полуплоскость с римановой метрикой Лобачевского.

(б) Верхняя полуплоскость с метрикой Лобачевского инвариантна относительно преобразований  $p(\omega) = \omega + a$  и  $q(\omega) = -\frac{1}{\omega}$ .

$$(с) \operatorname{ch} |z_1, z_2| = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\operatorname{Im}z_1 \operatorname{Im}z_2}.$$

*Указание.* Точки  $z_1$  и  $z_2$  переводятся изометрией в точки с одинаковыми абсциссами.

(с) Выведите *теорему Пифагора* для плоскости Лобачевского:  $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ .

*Указание.* Можно считать  $C = i$ ,  $A = ki$  и  $B = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

(д) Окружность Лобачевского является евклидовой окружностью.

(е)\* Найдите длину окружности Лобачевского радиуса  $R$ .

*Указание.* Движением плоскости Лобачевского центр окружности можно перевести в центр модели Пуанкаре в круге, затем найти связь евклидова радиуса и радиуса Лобачевского...

(f)\* Сфера, плоскость и плоскость Лобачевского попарно локально не изометричны.

(g)\* Любая внутренняя изометрия метрики Лобачевского, сохраняющая ориентацию, является дробно-линейным преобразованием  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  с определителем  $ad - bc = 1$  (и вещественными  $a, b, c, d$ ).

## 5.2. Геометрия на римановых многообразиях

**Римановым многообразием** (локальным) называется пара  $(M, g)$  из открытого множества в  $\mathbb{R}^n$  и римановой метрики  $g$  на нём.

При этом изометрического вложения  $M \subset \mathbb{R}^m$  не задано!

*Длины кривых и площади* определяются через риманову метрику формулами, полученными ранее.

*Касательным пространством*  $T_P$  в точке  $P \in M$  называется пространство  $\mathbb{R}^n$ .

*Скалярная кривизна, геодезические, экспоненциальное отображение, тензор Риччи, ковариантное дифференцирование функций, касательные векторные и тензорные поля* на  $(M, g)$  определяются дословно так же, как для поверхностей в  $\mathbb{R}^m$ .

1. Вычислите скалярную кривизну в точках

(a) плоскости Лобачевского, т. е. верхней полуплоскости с римановой метрикой  $ds^2 = -4 \frac{d\omega d\bar{\omega}}{(\omega - \bar{\omega})^2}$ .

(b) плоскости римановой с метрикой  $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ .

(c)\* пространства  $\mathbb{R}^n$  с римановой метрикой  $ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}$ .

(d)\* произвольного риманова многообразия.

2. (a)\* Уравнение геодезической

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k x_i' x_j' = 0,$$

где

$$2\Gamma_{ij}^k = \sum_l g^{kl} ([g_{lj}]_{x_i} + [g_{li}]_{x_j} - [g_{ij}]_{x_l}).$$

(b) Через каждую точку в каждом направлении на поверхности проходит ровно одна геодезическая.

3. Найдите геодезические на верхней полуплоскости с римановой метрикой

$$(a) ds^2 = y(dx^2 + dy^2);$$

$$(b) ds^2 = -4 \frac{dwd\bar{w}}{(w - \bar{w})^2};$$

$$(c) ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2}.$$

4.\* Найдите все функции  $\lambda(x, y, z)$ , для которых все кривые  $\{y=c_1, z=c_2\}$  являются геодезическими римановой метрики  $e^{\lambda(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$  на  $\mathbb{R}^3$ .

5. Сформулируйте и докажите аналоги всех определений и теорем из темы «Тензор кривизны Риччи».

Касательное к  $M$  векторное поле  $v$  на кривой

$$\exp_P \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow M$$

называется **параллельным вдоль кривой**  $\exp_P \circ \gamma$ , если его прообраз

$$[\exp'_P(\gamma(t))]^{-1} v_{\exp_P(\gamma(t))}$$

при производной экспоненциального отображения параллелен.

6. (a) Это определение совпадает с прежним для поверхностей в  $\mathbb{R}^m$ .

(b) Выпишите явно и решите уравнение параллельного переноса вдоль горизонтальной прямой для плоскости Лобачевского.

(c) То же вдоль данной окружности.

Определение *параллельного переноса, секционной кривизны, тензора Римана и ковариантной производной поля  $k$ -линейных форм* на  $(M, g)$  повторяет приведённое выше.

7.\* (a) Для двумерного риманова многообразия  $\tau = 2\sigma$ , т. е. угол поворота касательного вектора при параллельном переносе вдоль замкнутой кривой (ориентированной согласованно с ориентацией многообразия) и ограничивающей область  $A$  равен  $\frac{1}{2} \int_A \tau dS$ .

(b) Сформулируйте и докажите аналоги всех определений и теорем из тем «Оператор секционной кривизны» и «Тензор кривизны Римана».

**Ковариантной производной векторного поля  $v$  на  $M$  в точке  $P \in M$  по направлению вектора  $u$**  называется вектор

$$\nabla_u v := [(\exp'_P(ut))^{-1} v_{\exp_P(ut)}]_t \Big|_{t=0},$$

т. е. производная (в точке  $0 \in \mathbb{R}^n$  по направлению вектора  $u$ ) прообраза векторного поля  $v$  при производной экспоненциального отображения.

8.\* (а) Это определение совпадает с прежним для поверхностей в  $\mathbb{R}^m$ .

(б) Напишите определение ковариантной производной векторного поля на римановом многообразии.

(с) Матрица ковариантной производной векторного поля  $v$  в точке  $P$  в системе координат экспоненциального отображения есть  $\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)$ .

(д) Найдите эту матрицу (с указанием базиса) для плоскости Лобачевского.

(е) Найдите эту матрицу в произвольных координатах.

(ф) Докажите эквивалентность приведённого определения определению ковариантного дифференцирования векторов из [Gr90, 2.2].

(г) Разности  $\Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k$  символов Кристоффеля двух римановых метрик  $g_{ij}$  и  $\tilde{g}_{ij}$  на одном и том же  $M$  образуют тензор типа  $(1, 2)$ .

(х) Любой тензор типа  $(1, 2)$  может быть представлен таким образом.

9.\* Сформулируйте и докажите аналоги всех определений и теорем из тем «Ковариантное дифференцирование».

10.\* Определения аффинной связности и заданного ей ковариантного дифференцирования см. в [Ra04, MF04].

(а) На плоскости с координатами  $u, v$  найдите аффинную связность, относительно которой векторные поля  $\xi = (e^u, 1)$  и  $\eta = (0, e^v)$  ковариантно постоянны (т. е. их ковариантная производная равна нулю).

(б) Найдите (тензор кручения)  $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$  для этой связности.

(с) Существует ли риманова метрика, порождающая эту аффинную связность?

Указание к 2а. Доказывается при помощи вариационного исчисления.

Ответ к 8е.

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \sum_k \Gamma_{kj}^i v^k\right).$$

Здесь символы Кристоффеля определяются по метрике теми же формулами, что и для поверхностей в  $\mathbb{R}^m$ .

*Скопенков Аркадий Борисович*

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ  
В ИНТЕРЕСНЫХ ЗАДАЧАХ

Подписано в печать 01.12.2008 г. Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 4.5. Тираж 1000 экз. Заказ № 1663.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в ООО «Типография „САРМА“»