Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2005

В. О. Бугаенко

Обобщённая теорема Ван дер Вардена

Москва, 2006
Издательство МЦНМО

УДК 519.112.6
ББК 22.176
Б90

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского комитета образования.

Бугаенко В. О.

Б90 Обобщённая теорема Ван дер Вардена. — М.: МЦНМО, 2006.— 12 с.

ISBN 5-94057-226-X

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором в летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2005 г. Она посвящена доказательству обобщённой теоремы Ван дер Вардена. Эта теорема является обобщением следующей элементарной задачи: если множество целых чисел покрашено в конечное число цветов, то найдётся арифметическая прогрессия сколь угодно большой конечной длины, члены которой раскрашены в один цвет.

Брошюра адресована старшим школьникам и студентам младших курсов. Никаких предварительных знаний от читателя не требуется.

ББК 22.176

Вадим Олегович Бугаенко

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА ВАН ДЕР ВАРДЕНА

Редактор: *Д. Вельтищев*
Тех. редактор: *М. Вельтищев*
Обложка: *М. Вельтищев*

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 21.02.2006 г.
Формат 60 × 88/16. Печать офсетная. Печ. л. 0,75. Тираж 2000 экз. Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга».
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 5-94057-226-X
9 785940 572268

© Бугаенко В. О., 2005.
© МЦНМО, 2006.

Введение

В двадцатых годах прошлого века внимание математиков привлекла задача с элементарной формулировкой, решение которой длительное время найти не удавалось. Вот эта задача.

Пусть множество целых чисел раскрашено в конечное число цветов. Тогда найдётся арифметическая прогрессия сколь угодно большой конечной длины, члены которой окрашены в один цвет.

После упорных усилий задачу удалось решить молодому голландскому математику Б. Л. Ван дер Вардену. Решение оказалось элементарным, но достаточно сложным. История этого доказательства приведена в книге А. Я. Хинчина [3], а в изложении самого Ван дер Вардена — в дополнении к книге Р. Грэхема [1]. В обеих этих книгах можно также найти доказательство теоремы.

Как часто бывает в математике, чтобы упростить решение задачи, нужно сформулировать её для более общего случая. Первым шагом к доказательству, предложенному самим Ван дер Варденом (и, по-видимому, ко всем известным доказательствам), была догадка о том, что доказывать нужно более сильное утверждение, а именно: предполагать, что раскрашивается не вся числовая прямая, а лишь некоторый её конечный кусок, размер которого зависит от количества цветов раскраски и длины прогрессии.

Мы обобщим задачу сразу в нескольких направлениях, главным из которых будет выход из числовой прямой на плоскость. Вместо раскраски множества целых чисел рассмотрим раскраску целочисленной решётки на плоскости в конечное число цветов. Выбрав в этой решётке *конечную фигуру M* (конечное множество точек), мы будем доказывать существование подобной ей одноцветной фигуры. Наше доказательство будет в основных идеях повторять доказательство, данное Ван дер Варденом, но приобретёт геометрическую наглядность, утерянную в вырожденном одномерном случае.

Сформулируем другие обобщения, которые будут сделаны. Во-первых, ясно, что перейдя от размерности один к размерности два, можно двинуться и дальше к случаю решётки в пространстве любой размерности. Во-вторых, условие подобия можно заменить на более сильное — гомотетичность с целым положительным коэффициентом. (В дальнейшем, говоря о гомотетии, мы всегда будем иметь в виду гомотетию с целым положительным коэффициентом.) Достаточно изящное доказательство такого обобщения теоремы было приведено П. Андерсоном в [4], который, ссылаясь на Р. Радо, приписывает исходное доказатель-

ство Г. Грунвальду. Затем доказательство Андерсона было пересказано на русском языке В. В. Прасоловым в книге [2].

Мы пойдём несколько дальше и будем предполагать, что «объектом раскраски» может служить не только решётка, но и всё пространство (при этом рассматриваемая фигура M может не вкладываться ни в какую решётку в этом пространстве). Вообще говоря, такое обобщение можно вывести из теоремы для решётки. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно (см. упражнение 4). Мы же, модернизировав доказательство Андерсона, добьёмся того, чтобы оно сразу годилось для случая не только решётки, но и всего пространства.

Аналогично уже упомянутому усилению исходной (одномерной) теоремы Ван дер Вардена, будем предполагать в условии, что красится не всё пространство, а лишь конечная фигура в нём (зависящая от данной в условии фигуры и количества цветов раскраски).

Обозначим через L объект раскраски — либо пространство любой размерности, либо целочисленную решётку в пространстве.

Определение. Будем говорить, что фигура $\widehat{M} \subset L$ является *монохроматической накрывающей ранга k* фигуры $M \subset L$, если для любой раскраски пространства (или решётки) L в k цветов существует одноцветная фигура $F \subset \widehat{M}$, гомотетичная M.

Заметим, что образы монохроматической накрывающей при сдвиге и гомотетии также являются монохроматическими накрывающими той же фигуры того же ранга. Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема. *Для любой конечной фигуры $M \subset L$ и любого натурального числа k существует её конечная монохроматическая накрывающая ранга k.*

Частные случаи

В этом параграфе мы докажем несколько частных случаев основной теоремы. Начав с простейшего случая теоремы Ван дер Вардена для двух цветов и прогрессии из трёх членов, мы обобщим его в трёх направлениях: выход на плоскость, увеличение количества цветов и увеличение количества точек. В результате мы получим доказательство того, что в раскрашенной в два цвета целочисленной решётке на плоскости найдётся одноцветный квадрат. Тем самым, с одной стороны, будет решена непростая задача, представляющая самостоятельный интерес, а с другой стороны, будут представлены все основные идеи, необходимые для

доказательства теоремы в общем случае, которое будет приведено в следующем параграфе. Иллюстрациями к нему смогут служить нижеприведённые примеры. Желающие сразу перейти к общему случаю, могут этот параграф пропустить.

1. *В раскрашенном в два цвета множестве целых чисел найдутся три одноцветных числа, образующие арифметическую прогрессию.*

Эта простая задача допускает много различных решений. Мы приведём решение, которое станет основой для дальнейшего обобщения.

Рассмотрим на числовой прямой (тем самым, вместо чисел будем говорить о точках) девять троек точек вида $(x, x+1, x+2)$ (например, для $1 \leqslant x \leqslant 9$). Существует $2^3 = 8$ способов раскраски такой тройки точек, поэтому, согласно принципу Дирихле, какие-то две из рассматриваемых троек раскрашены одинаково. С другой стороны, в каждой тройке найдутся две одноцветные точки. Таким образом, мы получили четыре точки A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22}, раскрашенные одинаково (для определённости, скажем, в белый цвет), причём $\overrightarrow{A_{11}A_{12}} = \overrightarrow{A_{21}A_{22}}$ (рис. 1). Отметим также точки A_{13} и A_{23} так, чтобы тройки A_{11}, A_{12}, A_{13} и A_{21}, A_{22}, A_{23} образовывали арифметические прогрессии. Если какая-то из этих двух точек белая, то искомая тройка найдена. Если же они обе чёрные, то рассмотрим точку A_{33}, образующую арифметическую прогрессию с точками A_{13} и A_{23}. Если точка A_{33} чёрная, то одноцветной будет тройка точек (A_{13}, A_{23}, A_{33}), а если белая, то тройка (A_{11}, A_{22}, A_{33}).

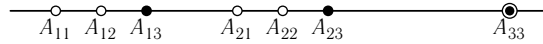

Рис. 1

Координаты всех точек приведённой выше конструкции лежат в интервале между 1 и 21, поэтому монохроматической накрывающей ранга 2 для трёх последовательных целых точек на прямой является множество из 21 последовательной целой точки.

2. *В раскрашенной в два цвета целочисленной решётке на плоскости найдётся одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник.*

Рассмотрим прямую, параллельную оси решётки, и на ней найдём четыре одноцветные точки A_{11}, A_{12}, A_{21} и A_{22}, расположенные так же, как и в предыдущем примере. Точки A_{13}, A_{23} и A_{33} выберем так, чтобы треугольники $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$ и $A_{13}A_{23}A_{33}$ были прямоугольными равнобедренными (рис. 2). Дальнейшее доказательство повторяет рас-

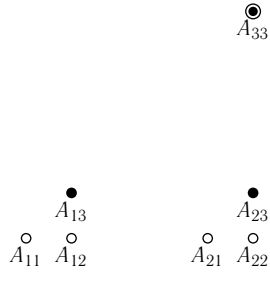

Рис. 2

суждения из п. 1. Все построенные точки лежат внутри квадрата 11×11, поэтому монохроматической накрывающей ранга 2 для равнобедренного прямоугольного треугольника будет множество точек целочисленной решётки, заполняющих квадрат 11×11.

Замечание. Нетрудно заметить, что случай произвольного треугольника фактически не отличается от разобранного. Действительно, условие теоремы инвариантно относительно аффинных преобразований, а все треугольники аффинно эквивалентны. Следует лишь уточнить в условии, что в качестве решётки нужно взять целочисленную решётку в некоторой косоугольной системе координат.

3. *В раскрашенной в три цвета целочисленной решётке на плоскости найдётся одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник.*

Рассмотрим на плоскости достаточно большой (смысл слов «достаточно большой» будет уточнён ниже) квадрат, «нижняя» сторона которого лежит на оси абсцисс, и его всевозможные сдвиги на целочисленные векторы вдоль этой оси. Среди полученных квадратов найдутся два одинаково окрашенных, поскольку количество всевозможных раскрасок квадрата конечно. Обозначим эти квадраты Φ_1 и Φ_2. Аналогично, внутри квадрата Φ_1 найдём два одинаково раскрашенных квадрата Φ_{11} и Φ_{12} меньшего размера (у которых одна из сторон тоже лежит на оси абсцисс). Соответствующие им квадраты внутри квадрата Φ_2 обозначим Φ_{21} и Φ_{22} соответственно. На стороне квадрата Φ_{11}, лежащей на оси абсцисс, найдём две одноцветные точки A_{111} и A_{112} (условием их существования и определяются размеры всех упоминаемых квадратов, в частности, квадрат Φ_{11} должен иметь размер 4×4). Соответствующие одноцветные пары (A_{121}, A_{122}), (A_{211}, A_{212}) и (A_{221}, A_{222}) будут внутри квадратов Φ_{12}, Φ_{21} и Φ_{22} (рис. 3). Построим точки $A_{i_1 i_2 3}$ $(1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant 2)$ так, чтобы треугольники $A_{i_1 i_2 1} A_{i_1 i_2 2} A_{i_1 i_2 3}$ были равнобедренными прямоугольными. Далее строим точки $A_{i_1 33}$ $(1 \leqslant i_1 \leqslant 2)$ так, чтобы треугольники $A_{i_1 13} A_{i_1 23} A_{i_1 33}$ были равнобедренными прямоугольными. Наконец, находим точку A_{333}, чтобы треугольник $A_{133} A_{233} A_{333}$ был равнобедренным прямоугольным. Получившаяся конструкция из 15 точек $A_{i_1 i_2 i_3}$ содержит 8 точек, индексы которых равны 1 или 2 (их мы назовём *основными*), и 7 точек, имеющих хотя бы один индекс, равный 3 (а их назовём *доба-*

вочными). Все основные точки являются одноцветными. Если хотя бы одна из добавочных точек имеет тот же цвет, то одноцветный треугольник легко находится. В противном случае каждая из них покрашена в один из оставшихся двух цветов, при этом к конструкции из добавочных точек можно применить рассуждение из п. 2.

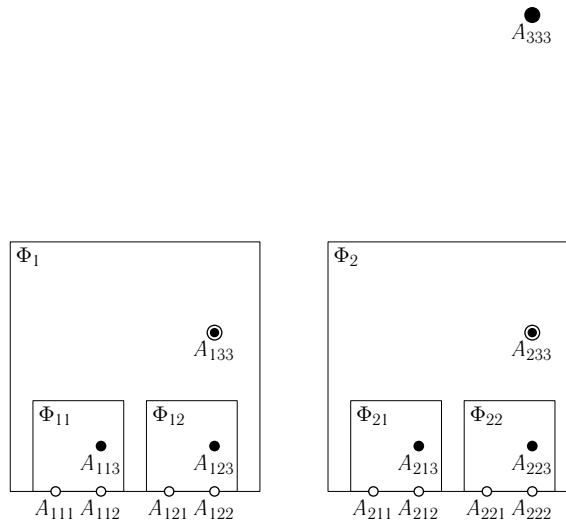

Рис. 3

Замечание. Аналогичным образом наращивая приведённую здесь конструкцию, можно доказать, что одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник существует при раскраске решётки в любое конечное число цветов. Мы будем использовать этот факт в п. 4, хотя строгое его доказательство отложим до общего случая.

4. *В раскрашенной в два цвета целочисленной решётке на плоскости найдётся одноцветный квадрат.*

Рассмотрим новую раскраску решетки, получаемую из данной следующим образом. Цвет точки определяется цветом квадрата 11×11 с левым нижним углом в ней. Количество цветов такой раскраски равно 2^{121}. Найдётся одноцветный (в смысле этой раскраски) равнобедренный прямоугольный треугольник. Это значит, что существуют три равных одинаково окрашенных квадрата 11×11, расположенных в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. В любом из них, согласно п. 2, найдётся одноцветный равнобедренный прямоугольный треугольник. Вы-

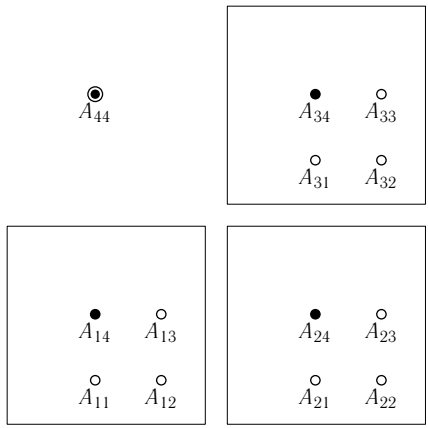

Рис. 4

берем такой треугольник в одном из квадратов, в остальных рассмотрим треугольники, соответствующие ему при наложении квадратов. Мы получаем три одноцветных (белых) равнобедренных прямоугольных треугольника $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$ и $A_{31}A_{32}A_{33}$ (рис. 4). Дополним каждый из них до квадрата точками A_{14}, A_{24} и A_{34} соответственно. Если одна из этих точек белая, то искомый одноцветный квадрат найден. Если же все они чёрные, то рассмотрим точку A_{44}, дополняющую до квадрата треугольник $A_{14}A_{24}A_{34}$. Если эта точка чёрная, то искомым одноцветным квадратом будет $A_{14}A_{24}A_{34}A_{44}$, а если белая — то $A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}$.

Доказательство основной теоремы

Перейдём к доказательству основной теоремы, сформулированной во введении. Будем использовать индукцию по количеству точек фигуры M, которое мы обозначим через n.

База индукции ($n = 2$) почти очевидна. Действительно, пусть множество M состоит из двух точек. На соединяющей их прямой отложим $k + 1$ точку так, чтобы расстояния между соседними точками были равны расстоянию между точками фигуры M. Согласно принципу Дирихле, среди этих точек найдутся две одноцветные. Они и будут составлять фигуру, гомотетичную M. Значит, построенное множество из $k + 1$ точки и будет монохроматической накрывающей ранга k.

Шаг индукции. Пусть мы имеем натуральное число k и фигуру $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}\}$, содержащую $n + 1$ точку. Зафиксируем в L точку O, которую будем называть началом координат. Радиус-векторы точек фигуры M обозначим $\vec{v}_i = \overrightarrow{OM_i}$. Согласно предположению индукции, для фигуры $M' = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, содержащей n точек, монохроматическая накрывающая любого ранга (а не только ранга k) существует.

При наличии начала координат любая конечная фигура может быть задана набором векторов, а именно, множеством радиус-векторов её то-

чек. Будем называть конечную фигуру в пространстве с фиксированным началом координат *шаблоном*. Шаблон может быть «приложен» к любой точке плоскости. Эта операция означает его сдвиг на вектор, соединяющий начало координат с точкой приложения. Всякий шаблон из n точек в пространстве, раскрашенном в k цветов, естественным образом порождает новую раскраску в k^n цветов. Цвет каждой точки определяется набором цветов (в исходной раскраске) приложенного к ней шаблона.

Выберем в L конечную последовательность шаблонов $\Phi^{(j)}$ ($j = 0, \ldots, k$) следующим образом. Шаблон $\Phi^{(0)}$ является *тривиальным* (состоит из одной точки — начала координат). При $j \geqslant 1$ шаблон $\Phi^{(j)}$ строим (используя уже построенный шаблон $\Phi^{(j-1)}$) следующим образом. Сначала определим фигуру $\Phi''^{(j)}$ как монохроматическую накрывающую ранга $k^{|\Phi^{(j-1)}|}$ фигуры M' (знак модуля означает количество точек, составляющих фигуру). Затем построим фигуру

$$\Phi'^{(j)} = \bigcup_{A \in \Phi''^{(j)}} \Phi_A^{(j-1)},$$

являющуюся объединением шаблонов $\Phi^{(j-1)}$, приложенных ко всем точкам фигуры $\Phi''^{(j)}$. Наконец расширим $\Phi'^{(j)}$ до $\Phi^{(j)}$ так, чтобы для любого гомотетичного образа $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ множества M, для которого $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Phi'^{(j)}$, было выполнено $A_{n+1} \in \Phi^{(j)}$.

Докажем, что $\Phi^{(k)}$ и будет монохроматической накрывающей ранга k фигуры M. Для этого мы построим последовательность фигур C_j ($j = 0, \ldots, k$), которые мы назовём *конструкциями*. Каждая конструкция C_j состоит из точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_j}$ (иными словами, точки конструкции C_j мы будем обозначать буквой A с j индексами). Индексы изменяются от 1 до $n+1$, но со следующим ограничением, которое мы назовём *условием мажорирования*: если какой-либо индекс равен $n+1$, то и все последующие также равны $n+1$. Точки, все индексы которых не превосходят n, будем называть *основными*, а имеющие индекс, равный $n+1$, — *добавочными*. При построении конструкции мы будем добиваться выполнения *условия изотропности*, то есть того, чтобы шаблон $\Phi^{(k-j)}$ был окрашен одинаково, будучи приложенным ко всем основным точкам фигуры C_j.

Построение будем опять осуществлять по индукции. Конструкция C_0 состоит из одной точки A (без индексов). Условие изотропности для одноточечной конструкции, очевидно, выполняется. Без ограничения общности можно считать, что точка A совпадает с началом координат O. Опишем построение конструкции C_j в предположении, что C_{j-1} уже по-

строена. К каждой точке конструкции C_{j-1} приложим шаблон $\Phi^{(k-j+1)}$. Для всех основных точек эти шаблоны окрашены одинаково, поскольку по предположению индукции условие изотропности для C_{j-1} выполняется. Сузим один из этих шаблонов (пусть он приложен к некоторой выбранной основной точке T) до шаблона $\Phi'^{(k-j+1)}$, а в нём найдём одноцветную с точки зрения раскраски, порождённой шаблоном $\Phi^{(k-j)}$ (это обеспечит изотропность конструкции на следующем шаге), гомотетичную M' фигуру. Затем получившуюся фигуру дополним до фигуры, гомотетичной M, принадлежащей исходному несуженному шаблону $\Phi^{(k-j+1)}$. Вектор, соединяющий точку приложения шаблона с центром гомотетии, обозначим через u_j, а коэффициент гомотетии обозначим через λ_j. Перенесём параллельно полученную фигуру всевозможными сдвигами, переводящими выбранную точку T во все остальные точки конструкции C_{j-1} (в том числе и добавочные). Таким образом, каждая точка конструкции C_{j-1} породит $n+1$ дочернюю точку. Обозначим их, приписывая к обозначению соответствующей материнской точки очередной j-й индекс, изменяющийся от 1 до $n+1$. Тогда векторы, соединяющие точки конструкции C_{j-1} с дочерними точками, выражаются формулой

$$\overrightarrow{A_{i_1 i_2 \ldots i_{j-1}} A_{i_1 i_2 \ldots i_{j-1} i_j}} = \vec{u}_j + \lambda_j \vec{v}_{i_j},$$

откуда легко получить формулу для радиус-вектора любой точки:

$$\overrightarrow{OA_{i_1 i_2 \ldots i_j}} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_j) + \lambda_1 \vec{v}_{i_1} + \lambda_2 \vec{v}_{i_2} + \cdots + \lambda_j \vec{v}_{i_j}. \qquad (1)$$

Наконец, из всех полученных точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_j}$ сотрём те, чей набор индексов не удовлетворяет условию мажорирования. В результате мы получим искомую конструкцию C_j.

Нам понадобятся три вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Точка $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ при любом j принадлежит шаблону $\Phi^{(j)}$, приложенному к точке $A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-j}}$. В частности (при $j = k$), все точки конструкции C_k принадлежат $\Phi^{(k)}$.*

Доказательство. Применим индукцию по j. База ($j = 0$) очевидна: любая точка принадлежит приложенному к ней тривиальному шаблону. Шаг индукции следует из того, что шаблон $\Phi^{(j)}$, приложенный к точке $A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-j}}$, содержит в себе объединение фигур, полученных приложением шаблона $\Phi^{(j-1)}$ к нескольким точкам, в том числе и к $A_{i_1 i_2 \ldots i_{k-j+1}}$. Доказательство леммы 1 закончено.

Лемма 2. *Пусть среди точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ выбрано упорядоченное множество из $n+1$ точки так, что для каждого индекса выпол-*

нено одно из двух: либо он одинаков для всех точек множества, либо для каждой точки он равен её номеру. Тогда выбранное множество гомотетично M.

Доказательство. Обозначим выбранные точки $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$. Пусть индексы (в исходных обозначениях), для которых выполняется второй из указанных в условии случаев, имеют номера $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Тогда из формулы (1) следует

$$\overrightarrow{F_sF_t} = \overrightarrow{OF_t} - \overrightarrow{OF_s} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{j_i}(\vec{v}_t - \vec{v}_s) = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_{j_i}\right) \overrightarrow{M_sM_t}.$$

А это и означает, что выбранные точки составляют фигуру, гомотетичную M с коэффициентом $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_{j_i}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Изменение не равного $n+1$ значения любого индекса любой точки на другое значение, также не равное $n+1$, не меняет её цвета.*

Доказательство. Точки $A_{i_1\ldots i'_j\ldots i_k}$ и $A_{i_1\ldots i''_j\ldots i_k}$, отличающиеся лишь в j-м индексе, являются соответствующими точками шаблона $\Phi^{(k-j)}$, приложенного к точкам $A_{i_1\ldots i'_j}$ и $A_{i_1\ldots i''_j}$. Но по условию изотропности эти шаблоны раскрашены одинаково, значит и соответствующие их точки одноцветны, что и требовалось доказать.

Перейдём к завершению доказательства основной теоремы. Согласно лемме 1, шаблон $\Phi^{(k)}$ содержит в себе конструкцию C_k. Из леммы 3 следует, что все основные точки этой конструкции окрашены в один цвет. Назовём этот цвет первым. Рассмотрим некоторую добавочную точку $A_{i_1i_2\ldots i_k}$. Введём для неё альтернативное обозначение F_{n+1} и построим n основных точек F_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), получаемых из F_{n+1} заменой в индексах её исходного выражения $A_{i_1i_2\ldots i_k}$ всех чисел $n+1$ на s. По лемме 2, полученное множество точек $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}\}$ гомотетично M. Значит, если хотя бы одна добавочная точка окрашена в первый цвет, то искомое одноцветное множество найдено. В противном случае рассмотрим множество таких добавочных точек, у которых только последний индекс равен $n+1$. Опять же, по лемме 3 они все окрашены в один цвет; назовём его вторым. Рассуждая аналогично, получим, что если во второй цвет окрашена хотя бы одна из точек, у которой числу $n+1$ равны два последних индекса, то утверждение доказано. Продолжая эти рассуждения (строго говоря, применяя индукцию), мы приходим

к выводу, что утверждение доказано, если при некотором $s \leqslant k$ в один из первых s цветов (порядок на множестве цветов возникает при этом естественным образом) окрашена хотя бы одна точка, у которой последние s индексов равны $n+1$. Последнее же, очевидно, справедливо при $s = k$, поскольку точка $A_{n+1,n+1,\ldots,n+1}$ окрашена в один из данных k цветов. Теорема доказана.

Упражнения

1. Покажите, что теорема Ван дер Вардена является частным случаем доказанной теоремы.

2. Можно ли при доказательстве теоремы в качестве базы индукции взять более простой случай $n = 1$?

3. Некоторые из точек $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ из приведённой в доказательстве конструкции могут совпадать. Покажите, что и в этом случае доказательство остаётся в силе.

4. В предположении, что теорема доказана только для случая целочисленной решётки, приведите короткое рассуждение, доказывающее её в полной общности.

Указание: решётка бóльшей размерности может быть вложена (например, с помощью проецирования) в пространство меньшей размерности.

Благодарности

Автор благодарит В. А. Клепцына и М. Н. Вялого за полезные обсуждения.

Литература

[1] *Р. Грэхем.* Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984.

[2] *В. В. Прасолов.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. — М.: Фазис, 1997.

[3] *А. Я. Хинчин.* Три жемчужины теории чисел. — М.: Наука, 1979.

[4] *P. G. Anderson.* A generalization of Baudet's conjecture (Van der Waerden theorem). — Amer. Math. Monthly, 1976, **83**, 359—361.