Д. В. Аносов

Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 22.161.6
ББК 517.91
А69

Аносов Д. В.
А69 Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем — М.: МЦНМО, 2008. — 200 с.

ISBN 978-5-94057-398-8

В книге рассказывается о дифференциальных уравнениях. В одних случаях автор объясняет, как решаются дифференциальные уравнения, а в других — как геометрические соображения помогают понять свойства их решений. (С этим и связаны слова «то решаем, то рисуем» в названии книги.) Рассмотрено несколько физических примеров. На максимально упрощённом уровне рассказано о некоторых достижениях XX века, включая понимание механизма возникновения «хаоса» в поведении детерминированных объектов.

Книга рассчитана на интересующихся математикой школьников старших классов. От них требуется лишь понимание смысла производной как мгновенной скорости. Книга не заменяет вузовские учебники, но так как в ней затрагиваются и не освещаемые в них вопросы, а часть других вопросов освещается иначе, то она может заинтересовать и студентов вузов со значительной математической программой.

ББК 517.91

ISBN 978-5-94057-398-8

Оглавление

Предисловие

Мне всегда казалось, что популярная литература по математике страдает одним существенным недостатком. Ориентируясь на читателя, находящегося на уровне хорошего школьника, она его знакомит с разнообразным материалом, вполне доступном на этом уровне, и даёт ему возможность попробовать свои силы на задачах, связанных с таким материалом. Всё это бывает увлекательно (для читателя, не страдающего идиосинкразией к самостоятельной умственной работе вообще и к занятиям математикой в частности). Но... Но бо́льшая часть этого материала не имеет отношения к тому, чем на самом деле занимаются математики. Сравните это с литературой по физике, рассказывающей как о повседневных проявлениях «физики вокруг нас», так и о самой актуальной научной тематике (атомном ядре, элементарных частицах, полупроводниках, лазерах и прочих чудесах современной электроники, имеющих, в конце концов, квантовую природу), а также с литературой по астрономии (новейшие исследования Солнечной системы, образование и жизнь звёзд и галактик, пульсары и квазары...).

Правда, читатель может хорошо разобраться с какими-нибудь свойствами треугольника, не входящими в школьную программу, или с той физикой в повседневной жизни, которой посвящены, например, книги Я. И. Перельмана, но не верится, чтобы он своими силами запустил космическую ракету с рентгеновским телескопом на борту... (Или, не дай бог, построил ядерный реактор.) Так что самые захватывающие физические и астрономические знания поневоле носят более опосредованный характер. Но всё же это знания.

Не уверен, что популярная математическая литература может в этом отношении полностью сравняться с литературой по физике или астрономии. Боюсь, что попытка сравняться приведёт к разговорам о том, какая замечательная это наука, к биографиям великих учёных и подчас к формулировкам отдельных результатов вроде Великой теоремы Ферма в тех случаях, когда для понимания формулировок особых знаний не нужно (а вот для понимания доказательств может оказаться недостаточно даже обычного университетского математического образования). Но всё же можно рассказать кое о чём не слишком далёком от текущей исследовательской работы. Эта книжка — одна из попыток такого рода.

Она посвящена дифференциальным уравнениям. Математическое описание физических законов (и прежде всего фундаментальных законов, т. е. тех, которые лежат в основе нашего понимания природных процессов) чаще всего даётся именно дифференциальными уравнениями. Естественно, последние важны также для многих вопросов техники, прежде всего тех, где играет большую роль физика. Дифференциальные уравнения встречаются и за пределами физики, и если здесь их роль несколько меньше, то это просто потому, что за пределами физики вообще меньше используется математика. Но это всё разговоры о важности нашего предмета, а не о его содержании. Я попытался дать некоторое представление о части этого содержания.

Данная книжка — не попытка заменить учебники по нашему предмету. В самом скромном учебнике есть многое, о чём я даже не упоминаю. Я и не ставил себе цели научить пользоваться дифференциальными уравнениями хотя бы на самом начальном уровне — это, повторяю, задача учебника. Зато кое-что, о чём я пытаюсь рассказать, отражает (на максимально упрощённом уровне) более сложные и более новые вещи [1]. Порой я именно рассказываю, а не доказываю, что опять-таки связано с характером книжки. Однако кое-что я доказываю — иначе здесь вообще была бы не математика, а одни разговоры о ней. (Так что читать эту книжку надо всё-таки с листом бумаги и ручкой. Мне кажется, что какой-то работы с этими предметами требует даже часть материала, излагаемого без доказательств.)

Для понимания книжки достаточны знания, которыми обладают учащиеся физико-математических школ или специализированных классов. Она должна быть доступна и интересующимся математикой более или менее подготовленным учащимся общеобразовательных школ. Самое сложное, что здесь требуется — это понимание смысла понятия производной и начальное умение дифференцировать. (Только в части текста, набранной петитом, порой упоминается кое-что ещё, но ведь на то он и петит...)

К сведению читателя, которому эта книжка покажется слишком толстой, чтобы читать её всю подряд: параграфы 1, 2 являются основой для всего дальнейшего, и без них не обойтись. Далее же имеются две независимые друг от друга части. В параграфах 4, 5 рассказано, как решаются некоторые дифференциальные уравнения, и сказано об их физических приложениях, — здесь мы «решаем». В параграфах 3,

[1] Основное содержание книжки (не считая пары «разговорных» упоминаний о более новых вещах) заканчивается примерно там, где могли бы начаться мои личные воспоминания. Конечно, для молодого читателя это куда более давнее прошлое, чем для меня, но всё же это не невесть какой ...надцатый век.

6, 7, 8 мы «рисуем» — привлекаем геометрические соображения для ответа на некоторые важные вопросы, обычно ничего не решая; здесь тоже говорится о физических приложениях. В § 2 подробнее характеризуется содержание следующих параграфов.

Насчёт имеющихся в книге упражнений: некоторые из них как бы ответвляются от основной линии, однако большинство существенно для этой самой линии. Но так как данная книга — не учебник, то решение упражнений не обязательно. Читатель с ленцой или с ограниченным временем может просто ознакомиться с содержащимися в них утверждениями, запомнить таковые (хотя бы на короткое время — пока он будет читать пару следующих страниц) и идти дальше. Ведь всё равно кое-что я сообщаю без доказательств. (Но я это делаю преимущественно тогда, когда доказательства либо слишком громоздки, либо требуют знаний, которых у читателя не предполагается. Для решения упражнений таких знаний не требуется, и соответствующие рассуждения, как мне кажется, не являются слишком длинными.)

Перед тем как я написал эту книжку, я прочёл в 2005 и 2006 годах на эту тему несколько лекций для старшеклассников и студентов младших курсов в летней школе «Современная математика» в Ратмино (около Дубны). Как это часто бывает в подобных случаях, по сравнению с лекциями текст стал длиннее (и, я надеюсь, аккуратнее), хотя по существу в лекциях в той или иной степени уже затрагивались все рассматриваемые здесь вопросы. Я благодарю руководителей школы за приглашение и за хорошие условия для работы (настоящий текст я начал писать уже там).

Я благодарю также О. Д. Аносову и В. А. Курлина, убедивших меня выбрать именно эту тему для лекций, и А. В. Клименко, А. А. Корнева, А. А. Лосева, В. Н. Сальникова и А. Г. Хованского за полезные замечания по рукописи и (или) обсуждение затронутых в ней тем. В этом отношении особенно большую роль сыграл А. В. Клименко, под влиянием которого я полностью пересмотрел текст конца § 5 (окончательный вариант отличается от его предложений, но без них не было бы этого варианта). Наконец, я благодарю А. В. Клименко, А. А. Корнева и сотрудников МЦНМО за изготовление рисунков.

Д. В. Аносов

§ 1. Введение

Уравнение — это равенство, в котором что-то известно, а что-то нет, и требуется это неизвестное определить или, по крайней мере, узнать о нём нечто новое. Например, в школе решают линейные и квадратные уравнения, скажем, $x^2 - 4x - 5 = 0$. Это уравнение имеет два решения, т. е. неизвестное x может быть одним из двух чисел: $x = 5$ или $x = -1$. Как и в этом примере, в школьных уравнениях неизвестное — это какое-то число. Иногда надо найти не одно число, а сразу несколько чисел, скажем, x и y. Это бывает, когда решают систему уравнений, например,

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Ответ (в данном случае он единственный): $x = 2$, $y = 1$.

Но бывает, что неизвестная величина (или неизвестные величины) — это не число (числа), а функция (несколько функций). Вероятно, наиболее важные и наиболее распространённые задачи такого рода — это дифференциальные уравнения. В школьном курсе математики о них нет речи, но простейшие примеры дифференциальных уравнений нелегально фигурируют в школьном курсе физики. Например, изменение со временем высоты x свободно падающего тела определяется таким законом[2]:

ускорение постоянно и равно некоей известной величине g. (1)

Здесь g — ускорение свободного падения, примерно равное 9,8 м/с^2; более точное значение для g зависит от места на Земле, где падает тело. Мы рассматриваем тело как материальную точку, размерами которой сравнительно с высотой можно пренебречь (в противном случае разные части тела могли бы находиться на разной высоте). Кроме того, подразумевается, что высота x мала по сравнению с радиусом Земли, вследствие чего можно пренебречь зависимостью ускорения от x, и скорость падения невелика, что позволяет пренебречь сопротивлением воздуха.

Ускорение — это скорость изменения скорости (точнее: мгновенная скорость изменения мгновенной скорости). Мгновенную скорость изменения какой-нибудь величины (в данном случае высоты x),

[2] Закон открыт Г. Галилеем (1564—1642).

зависящей от времени t (что, как известно, выражают словами «x есть функция от t» и при случае отражают в обозначениях, записывая $x = x(t)$), часто обозначают, ставя точку над символом, обозначающим эту величину. В нашем случае скорость падения есть $\dot{x}$, а ускорение тогда надо обозначить через $\ddot{x}$. Теперь словесную формулировку (1) можно заменить символьной

$$\ddot{x} = -g. \tag{2}$$

(Положительное направление на оси координат x — это направление вверх, ведь x — это высота. Ускорение же имеет противоположное направление — вниз. В то же время под g принято понимать положительную величину. Поэтому в правой части (2) стоит знак минус.) Нас интересует, как высота x меняется со временем t, т. е. x — это какая-то функция от t, которую мы хотим найти.

Обсуждение математического смысла физического (кинематического[3]) понятия *мгновенной скорости* приводит к выводу, что скорость $\dot{x}$ в момент t — это производная $\frac{dx(t)}{dt}$ функции $x(t)$ по t. Это прекрасно пояснено в известной книге Фейнмана[4], и я не вижу нужды в повторении сказанного там. Таким образом, в левой части (2) стоит *вторая производная* $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, т. е. производная $\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)$ от производной $\frac{dx(t)}{dt}$. Математическая операция, состоящая в переходе от $x(t)$ к $\dot{x}(t)$, называется *дифференцированием* (подробнее: дифференцированием функции $x(t)$ по t)[5]. Коль скоро привлекается дифференцирование, понятно, что уравнение (2) называют *дифференциальным* — вот мы и пояснили это название на простейшем примере.

У понятий, связанных с дифференцированием, имеется и другой аспект, при котором на первый план выходит не скорость, а главная линейная часть приращения функции, именуемая (с точностью до оттенков) *дифференциалом* этой функции. Исторически понятия производной и дифференциала возникли одновременно и, в конечном счёте, как бы эквивалентны. Они отражают одну и ту же идею локально

[3] Кинематика — раздел механики, который изучает движения тел только с геометрической стороны и не вникает во взаимодействия тел, силы, определяющие движения; это, так сказать, «геометрия плюс время».

[4] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1: Современная наука о природе. Законы механики. М.: Мир, 1965 (были и переиздания).

[5] Не у каждой функции существует производная, да ещё при всех t, при которых эта функция определена. Когда производная существует, то говорят, что функция является *дифференцируемой*.

(на малом отрезке времени) «хорошая» (дифференцируемая) функция «ведёт себя почти так же», как и простейшая функция — линейная. Но в то же время мгновенная скорость воспринимается как-то легче, чем главная линейная часть приращения. Даже кажется, будто скорость — что-то само по себе ясное, не о чем и разговаривать. Между тем у древних греков, кои были неглупыми, понятия мгновенной скорости не было! (Имеется подозрение, что Архимед представлял себе мгновенную скорость, но ничего о ней не писал, по-видимому считая подобные вещи только эвристическими и оставляя их «для себя».) Нам легче, чем древним грекам, усвоить, что имеет смысл говорить о мгновенной скорости движения, потому что каждый видел спидометр автомобиля, тогда как на колесницах и конях спидометров не ставили.

Разумеется, о производной можно говорить и тогда, когда независимая переменная не имеет физического смысла времени. Когда этой переменной служит x, производную часто обозначают штрихом: $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$. Таким образом, выражения $\ddot{f}(t)$, $\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)$, $f''(x)$ означают одно и то же — так называемую «вторую производную» (т. е. производную от производной) функции f.

Мы будем использовать следующие свойства производных[6]:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)' = f' + g',\\
&(af)' = af', \quad \text{если } a = \mathrm{const}, \text{ т. е. } a \text{ — постоянное число;}\\
&(fg)' = f'g + fg' \text{ (формула Лейбница),}\\
&\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ при } g \neq 0;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\text{если } x = at, \text{ где } a = \mathrm{const}, \text{ то } \frac{df(at)}{dt} = af'(x) = a\frac{df(at)}{d(at)}; \tag{4}
$$

и, наконец, формула для производной сложной функции: если $x = g(t)$, то

$$
\frac{df(g(t))}{dt} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f'(x)\Big|_{x=g(t)}\dot{g}(t). \tag{5}
$$

В последней формуле обозначение $|_{x=g(t)}$ после производной $f'(x)$ указывает, что надо взять значение этой производной при $x = g(t)$. (В записи $\dfrac{df(x)}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ это подразумевается без особого на то указания, поскольку это было сказано с самого начала.) О сложной функции

[6] Самыми сложными из них являются (3) и (5). Многое можно понять и без этих свойств.

$f(g(t))$ говорят, что она является *композицией* или *суперпозицией* функций f и g, и обозначают её знаком $f \circ g$; тогда (5) можно записать ещё так: $(f \circ g)' = f'g'$ (ради единообразия здесь производная по t тоже обозначена штрихом) или подробнее, указывая, каким должен быть аргумент у f':

$$(f \circ g)' = f'(g)g' = (f' \circ g)g'.$$

С этим, вероятно, и связано название этой формулы — «цепное правило» (дифференцирование «идёт по цепочке» — сперва дифференцируется f, затем g).

Формула (4), очевидно, является частным случаем (5), когда $g(t) = at$, и этот частный случай намного проще общего: в *разностном отношении* $\frac{f(a(t+h)) - f(at)}{h}$ мы заменяем в знаменателе h на ah и «для компенсации» умножаем всё на a. А отношение

$$\frac{f(a(t+h)) - f(at)}{ah} = \frac{f(at+ah) - f(at)}{ah}$$

является разностным отношением $\frac{f(at+k) - f(at)}{k}$ для функции $f(x)$ в точке $x = at$ с *приращением аргумента* $k = ah$. Совершенно всё равно, говорим ли мы, что $h \to 0$ или что $k \to 0$, поэтому предел $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a(t+h)) - f(at)}{ah}$ существует и равен значению $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=at}$ производной $\frac{df(x)}{dx}$ при $x = at$.

В общем случае в доказательстве (5) имеется небольшой «подводный камень», который, впрочем, не вызывает трудностей — надо только его заметить. Мы, конечно, начинаем с равенства

$$\frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{h} = \frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{g(t+h) - g(t)} \cdot \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

и делаем предельный переход при $h \to 0$, но где гарантия, что $g(t+h) - g(t) \neq 0$? Если $\dot{g}(t) \neq 0$, то это действительно гарантировано при достаточно малых (по абсолютной величине) ненулевых h (почему?). Случай же $\dot{g}(t) = 0$ приходится рассматривать отдельно (что совсем не трудно; в этом случае и левая, и правая части (5) равны нулю, — почему?)

В учебниках эти формулы сопровождаются стандартным припевом: «если существуют производные, фигурирующие в правой части, то существует и производная, стоящая в левой части».

Общее понятие дифференциального уравнения таково: это уравнение, содержащее искомые (неизвестные) функции, их производные различных порядков и независимые переменные. Большое значение дифференциальных уравнений объясняется тем, что очень часто (и притом в очень важных случаях) законы природы выражаются в форме дифференциальных уравнений.

Если независимая переменная только одна, как в (2), то о производной по этой переменной говорят как об обыкновенной производной, а если независимых переменных несколько, то производные по ним называют частными производными[7]. О соответствующих дифференциальных уравнениях говорят: обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение с частными производными. С этими названиями связаны различные шутки и анекдоты. В записях Пушкина анекдотами называются короткие рассказы о различных подлинных (или слывущих подлинными) случаях, в чём-то выразительных, но не обязательно смешных. В наши дни анекдот может быть вымышленным, но должен быть смешным.

Анекдот, который я сейчас расскажу, является анекдотом в обоих смыслах. Лет 20—30 назад в Екатеринбурге (тогда — Свердловск) местная газета опубликовала статью о работавшем и по сей день работающем в этом городе математике — академике Н. Н. Красовском. Помимо общих слов, какой он замечательный (что, кстати, правда, но без дальнейших пояснений звучит голословно), там была и конкретика, о которой Николай Николаевич поведал своим сотрудникам, а они рассказали мне. Вот как они пересказали слова Красовского.

— Приходит корреспондент одной из местных газет ко мне в кабинет. На доске в кабинете написаны уравнения. Корреспондент спрашивает: «Чем Вы занимаетесь?». Я отвечаю — мы занимаемся изучением обыкновенных дифференциальных уравнений. На другой день в газете появилась статья, в которой, в частности, говорилось: «На доске были написаны сложнейшие уравнения, которые академик по своей скромности с легкостью называет обыкновенными».

Если Красовский такой скромный, то нам и сам бог велел. У нас будут только обыкновенные дифференциальные уравнения. Причём, в отличие от Красовского, отнюдь не сложнейшие.

Самый высокий из порядков всех производных, входящих в уравнение, называется порядком этого уравнения. Таким образом, (2) — это дифференциальное уравнение второго порядка, равно как и фигурирующее ниже уравнение (7), а $\dot{x} = x$ — уравнение первого порядка.

Из школьного учебника известно, что изменение высоты при свободном падении, соответствующее закону (1), т. е. дифференциально-

[7] Для частных производных принято слегка модифицированное обозначение — скажем, частная производная функции $f(x, y)$ по x обозначается через $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

му уравнению (2), задается равенством:

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{6}$$

Здесь x_0 — высота в начальный момент времени $t=0$, а v_0 — скорость в тот же момент (*начальная скорость*), то есть, на чисто математическом языке, $\dot{x}(0)$. Доказательство, собственно, уже никак не связано с представлением о свободном падении или чем-нибудь ещё «физическим» — речь идёт просто о решениях дифференциального уравнения (2) (см. ниже). Таким образом, дифференциальное уравнение (2) имеет не одно решение, а бесконечное семейство таковых, причём каждое решение однозначно определяется своими *начальными значениями* x_0 и v_0.

Эти наблюдения относятся к очень простому дифференциальному уравнению, но сделанные выводы, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, имеют гораздо более общее значение.

Фактически процесс решения дифференциального уравнения (2) заключается в самом обычном интегрировании, т. е. нахождении функции с заданной производной (к тому же очень простой). Действительно, (2) означает, что у скорости $v(t) = \dot{x}(t)$ производная $\dot{v}(t) = -g$. Отсюда $v(t) = v_0 - gt$. После этого надо найти функцию $x(t)$, имеющую производную $\dot{x}(t) = v_0 - gt$. Ответ даётся формулой (6).

Конечно, дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = \text{известная функция от } t,$$

когда всё сводится к обычному интегрированию, — это очень специальный частный случай. Но по аналогии с этим примером процесс решения более общих дифференциальных уравнений тоже называют *интегрированием*, даже когда в этом процессе никак не участвуют те интегралы, о которых говорится в интегральном исчислении. А полученные решения дифференциального уравнения называют его *интегралами*. Почему-то эта старинная терминология дожила до наших дней. (Она используется даже группой Бурбаки, даром что та известна своей тенденцией к терминологическим изменениям.) Казалось бы, почему бы попросту не называть решения решениями? Видимо, этому препятствует обстоятельство чисто словесной природы: слово «решение» означает и процесс решения, и его результат, тогда как «интегрирование» и «интеграл» — различные слова, означающие различные вещи. Я, как и многие мои современные коллеги, изберу компромиссный вариант и буду часто называть процесс решения интегрированием, а функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению, буду называть его решениями (а не интегралами).

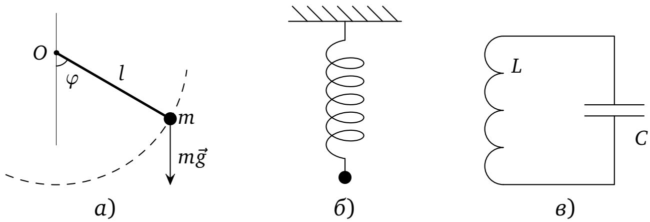


Рис. 1. Осцилляторы: а) математический маятник; б) грузик на пружинке; в) электрический колебательный контур

Другое дифференциальное уравнение, которое если и не совсем встречается, то «почти встречается» в курсе физики, описывает гармонические осцилляторы. Гармонический осциллятор — это колебательная физическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{7}$$

(Здесь ω — некоторый постоянный коэффициент.)

Примерами с известной точностью могут служить: обыкновенный маятник при небольшом отклонении от наинизшего возможного положения равновесия; массивный шарик на невесомой пружинке, подчиняющейся закону Гука (в этих двух случаях на систему, отклонившуюся от равновесного положения с $x = 0$, действует возвращающая сила, пропорциональная x, но имеющая противоположный знак); электротехнический колебательный контур, состоящий из конденсатора и индуктивности (катушки индуктивности) (рис. 1). Физический смысл x и ω в этих трёх случаях различен, как различны соответствующие физические процессы и указания, при каких условиях эти процессы описываются уравнением (7).

Так называемый *математический маятник* состоит из тяжёлой материальной точки, которая подвешена к некоторой неподвижной точке O с помощью невесомого, нерастяжимого и несгибаемого стержня длины l; стержень колеблется в некоторой вертикальной плоскости, проходящей через O. Величина x характеризует отклонение маятника от направленной вниз вертикали, проходящей через O; обычно за x принимают угол отклонения, выраженный в радианах. Отклонения в одну сторону от вертикали считаются положительными, а в другую — отрицательными. Подразумевается, что x мало и что на маятник действует только сила тяжести (нет ни трения в точке подвеса, ни сопротивления воздуха). При этом оказывается, что $\omega^2 = g/l$. (Повторяю, что сейчас мы рассматриваем только *малые колебания* маятника, при которых угол φ на рис. 1*а* мал по абсолютной величине. Вывод уравнения (7) для математического маятника приводится в § 3.)

В физике маятник — это твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса. Маятник, состоящий из грузика, подвешенного на верёвке, собственно, не вполне соответствует данному определению; другое дело, если он подвешен с помощью невесомого, нерастяжимого и несгибаемого стержня. Но практически годится и грузик, подвешенный на нерастяжимой нити, если размеры груза очень малы по сравнению с длиной нити, а масса нити очень мала по сравнению с массой груза. Никаких таких оговорок не надо, если, как было сказано вначале, маятник является твёрдым телом. Можно показать, что физический маятник колеблется так же, как математический маятник с некоторой длиной l, которая зависит от распределения массы в физическом маятнике. В принципе l можно вычислить (точно или приближённо), зная это распределение, но практически при точных измерениях пользуются физическими маятниками специальной конструкции, для которых придуманы остроумные приёмы, как с большой точностью экспериментально определять это l.

Будучи школьником, я узнал, что период колебаний маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; до сих пор помню, что меня удивило — откуда здесь взялось π? Те, кто учится в физико-математических школах, возможно, уже знают, откуда. В обычной же школе не говорят об уравнении (7), но всё же сообщают кое-что о его решении, а именно, период решения; поэтому я и сказал, что (7) «почти встречается» в школе.

На маятник действует сила тяжести, возвращающая отклонённый маятник на вертикаль, проходящую через O, но и после возвращения на неё маятник, обладая некоторой скоростью, по инерции продолжает двигаться и снова отклоняется от вертикали в сторону, противоположную той, откуда он пришёл.

На шарик, висящий на пружинке, действует сила тяжести и упругая сила сжатой или растянутой пружины; эти две силы действуют так же, как если бы силы тяжести не было, но равновесное состояние пружинки (когда она не сжата и не растянута) было бы несколько другим (она была бы в нём несколько удлинённой по сравнению со своей настоящей длиной). Упругая сила пружины вместе с силой тяжести возвращают шарик в положение равновесия, в котором упругая сила в точности уравновешивает силу тяжести (пружинка при этом несколько растянута), но шарик по инерции проскакивает через это положение.

В этих двух примерах мы имеем дело с механическими колебаниями, т. е. с колебаниями, происходящими под действием механических сил. В электрическом контуре разность потенциалов между обкладками заряженного конденсатора вызывает появление тока в катушке; он не прекращается в тот момент, когда конденсатор полностью разряжен, а благодаря индуктивности катушки продолжает течь дальше, перезаряжая конденсатор. В этом случае за x можно принять заряд на конденсаторе, так что напряжение между обкладками конденсатора ёмкости C равно x/C, а $\ddot{x}$ — это скорость изменения тока $\dot{x}$, ей пропорционально падение напряжения $L\ddot{x}$ на индуктивности L. Суммарное падение напряжения вдоль этих двух элементов замкнутой цепи равно нулю, что и приводит к уравнению (7) с $\omega^2 = 1/(LC)$. В электротехническом примере точность описания физической системы уравнением (7) может быть намного выше, чем в предыдущих механических примерах.

Оказывается, решение дифференциального уравнения (7) имеет вид[8]:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha), \tag{8}$$

где A и α — некоторые константы, свои для каждого решения. Они называются, соответственно, амплитудой и фазой. При желании можно выразить их через начальные значения, т. е. через $x_0 = x(0)$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$. Однако в данном случае чаще бывает удобнее пользоваться амплитудой и фазой.

Обратите внимание, что для обоих дифференциальных уравнений второго порядка, с которыми мы пока встречались, семейство решений — двухпараметрическое, т. е. решение зависит от двух параметров. В (6) параметрами служат x_0 и $v_0 = \dot{x}_0$, а в (8) — A и α, но, как говорилось, можно было бы выразить решение через начальные значения x_0 и $\dot{x}_0$.

Это не случайное совпадение: в теории дифференциальных уравнений доказывается, что для мало-мальски «хороших» уравнений n-го порядка $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ (позднее я уточню, что здесь значит «хорошее») решение полностью определяется своими начальными значениями[9], каковыми для уравнения n-го порядка являются зна-

---

[8] Это несколько по-разному доказывается в § 3 и в § 5, причём в последнем непосредственно доказывается также, что других решений нет, а в § 3 то же объясняется со ссылкой на общие результаты теории дифференциальных уравнений.

[9] С формулами (9) связан также термин *начальное условие*. При его использовании имеется некоторый разнобой. Иногда под этим названием понимают всю систему n равенств (9). Иногда же каждое из них называют начальным условием, и тогда можно сказать, что решение полностью определяется n начальными условиями. (Я в основном придерживаюсь первого варианта, но иногда отхожу от него.)

чения в начальный момент времени (этим моментом может служить $t=0$, а может и какое-нибудь другое $t=t_0$) самого решения и его производных первых $n-1$ порядков, т. е.

$$x(t_0)=x_0^{(0)},\quad \dot{x}(t_0)=x_0^{(1)},\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)}. \tag{9}$$

Здесь верхний индекс указывает порядок соответствующей производной. Часто, впрочем, вместо $x_0^{(0)}$ и $x_0^{(1)}$ пишут короче x_0, $\dot{x}_0$.

Если, к примеру, взять уже упоминавшееся дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}=x, \tag{10}$$

то его решение зависит только от одного параметра, за каковой можно взять x_0. Это решение имеет вид $x(t)=x_0e^t$, где $e=2{,}718\ldots$ — основание натуральных логарифмов. Студентам, как, вероятно, и учащимся физико-математических школ, должно быть сразу понятно, что это действительно решение указанного уравнения с начальным значением x_0; тех, кто ещё не имеет соответствующих знаний, отсылаю к § 4, 5 (возможно, данное там изложение может быть небезынтересным и для студентов). Но что, может быть, и для студентов не совсем очевидно — это что других решений с данным начальным значением нет.

Утверждение о единственности решения уравнения $\dot{x}=x$ — это, конечно, частный случай некоей общей теоремы, но оно допускает такое простое отдельное доказательство, что стоит это доказательство привести. Пусть $x(t)$ — решение с начальным значением x_0. Рассмотрим вспомогательную величину $y(t)=e^{-t}x(t)$. Простое упражнение (предоставляемое читателю) — проверить, что $\dot{y}=0$. Значит, y — константа. Но когда $t=0$, то $y=x_0$ (почему?). А раз y — константа, то она равна x_0 и при всех t. Итак, $e^{-t}x=x_0$ при всех t. Но это и означает, что $x(t)=x_0e^t$.

Из (8) видно, что решения (7) суть периодические функции от t с периодом $2\pi/\omega$. Заметим, что все колебания гармонического осциллятора — и большие, и малые — имеют один и тот же период (это свойство называют изохронностью колебаний). Это связано с *линейностью*[10] уравнения (7), т. е. с тем, что согласно этому уравнению $\ddot{x}$ можно выразить как линейную функцию от x. Для нелинейных урав-

[10] В более общем случае уравнение $x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)})$ называется линейным, если в его правую часть неизвестная x и её производные входят линейно, то есть f является суммой x и её производных, взятых с какими-то не зависящими от них множителями. Эти множители — их называют коэффициентами данного уравнения — вполне могли бы зависеть от t, но мы будем рассматривать только уравнения с постоянными коэффициентами.

нений (т. е. уравнений, не являющихся линейными) изохронности почти никогда нет, что становится заметным при достаточно больших колебаниях.

Легенда гласит, что Галилей установил независимость периода колебаний маятника от амплитуды, наблюдая колебания люстры в церковном соборе и подсчитывая число ударов своего пульса, приходящихся на определённое число колебаний. Трудно представить себе, чтобы в соборе амплитуда колебаний люстры была заметной по сравнению с длиной её подвески, исключая разве случай землетрясения, не очень подходящий для спокойных наблюдений. Таким образом, Галилей находился в «области применимости линейного приближения» — на самом деле движение маятника описывается нелинейным дифференциальным уравнением, с которым мы познакомимся в § 3, но когда колебания достаточно малы, это уравнение с довольно большой точностью можно заменить линейным. При больших колебаниях такая замена не годится, надо пользоваться самим нелинейным уравнением, а для него изохронности нет.

Колебания маятника с большим (лучше сказать, с не обязательно малым) размахом рассматривал Х. Гюйгенс (1629—1695). Как известно, он изобрёл и построил в 1657 г. часы с маятником, в которых сразу же была достигнута невиданная ранее точность хода. Идею таких часов высказал ещё Галилей, но он их не построил. У Гюйгенса так называемый часовой ход (устройство, обеспечивающее взаимодействие маятника или балансира с прочим механизмом) был иной, нежели предлагал Галилей, так что Гюйгенс скорее всего не знал о предложении Галилея.

Впоследствии выяснилось, что у маятниковых часов был ещё один изобретатель — астроном, математик, механик и часовой мастер И. Бюрги (1552—1632). Он даже вроде бы построил такие часы. Но Бюрги почти ничего не публиковал, и его достижения нередко оставались его личным делом, не влияя на развитие науки и техники. О его часах стало известно много позднее, когда давным-давно были созданы часы Гюйгенса[11]. Не в пример Бюрги, Гюйгенс написал книгу «Маятниковые часы», где, кстати, говорилось не только о самих часах, но и о вопросах механики, имеющих отношение к маятнику.

[11] Бюрги также изобрёл логарифмы и даже опубликовал таблицу антилогарифмов, но опубликовать удосужился только тогда, когда все уже знали об изобретении логарифмов Дж. Непером (1550—1617). Боюсь, что если не считать нескольких музейных экспонатов, от Бюрги реально до нас дошла только... запятая. Биографический словарь сообщает, что Бюрги вместе с Кеплером (1571—1630) (одно время они оба работали в Праге) ввёл запятую для отделения в десятичной дроби её целой части от дробной.

В частности, во втором издании в 1673 г. Гюйгенс впервые заговорил о центробежной и центростремительной силе.

Гюйгенса беспокоила обнаруженная им неизохронность колебаний маятника (т. е. зависимость периода колебаний от их размаха) — ему казалось, что она должна вредно отражаться на точности хода часов, ведь (думал Гюйгенс) размах колебаний маятника может быть различным. Он даже придумал некое приспособление (так называемый циклоидальный маятник), обеспечивавшее изохронность. Но часы с этим приспособлением если и были построены, то в единичных экземплярах и надежд не оправдали. А в то же время маятниковые часы работали неплохо.

Много лет спустя, в конце XIX века или даже в XX веке, стало понято, что опасения Гюйгенса были напрасны. Галилей и Гюйгенс говорили о свободных колебаниях маятника, т. е. маятника, на который не действуют никакие внешние силы (кроме, конечно, силы тяжести); он, так сказать, «предоставлен самому себе». В часах же маятник взаимодействует с часовым ходом, и это принципиально меняет дело: там происходят не свободные колебания, а так называемые автоколебания (§ 6), размах и период которых определяются устройством часов и не зависят от первоначального размаха колебаний маятника (если только первоначальный размах был достаточен для того, чтобы часы вообще пошли).

§ 2. Кинематическая интерпретация дифференциальных уравнений

Начнём с нескольких общих замечаний и названий, которые относятся к более общим дифференциальным уравнениям, нежели те, которыми мы намерены заниматься, но которые нисколько не упростились бы, если бы мы делали эти замечания применительно к нашим уравнениям.

В теории дифференциальных уравнений основную роль играют системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \end{cases} \tag{11}$$

сокращённо $\dot{x} = f(t, x)$. О такой системе говорят, что она имеет *нормальную форму* или является системой в нормальной форме[12]. Как видно, в ней имеется n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и система указывает явные выражения для первых производных этих неизвестных через независимую переменную t и сами x_i. Число n в (11) — это и число неизвестных, и число уравнений. Его называют порядком системы (11). (В § 1 мы ввели термин «порядок» для другого объекта — для одного уравнения.)

Мы обозначили независимую переменную в (11) через t и будем называть её временем. В двух примерах из § 1 — (2) и (7) — независимая переменная обозначалась так же и действительно имела физический смысл времени. Для системы (11) можно наглядно представлять себе t как время, зависящие от t величины $x_i(t)$ — как переменные величины, изменяющиеся со временем, а их производные $\dot{x}_i(t)$ — как скорости изменения этих величин. Опыт показывает, что такое наглядное представление обычно подталкивает наше воображение в правильном направлении, помогая освоиться со свойствами (11), и в этом смысле можно сказать, что оно полезно и удобно. Однако надо оговориться, что даже в задачах физического происхождения

[12] Предупреждение: словосочетание «нормальная форма» употребляется по самым различным поводам, в том числе и в теории дифференциальных уравнений (что порой приводит к нелепым недоразумениям). Но мы с этим не встретимся.

независимая переменная иногда не имеет физического смысла времени.

Большинство практически встречающихся дифференциальных уравнений и систем таковых либо имеют нормальную форму, либо эквивалентны некоторым системам в нормальной форме, причём эту эквивалентность установить легко. Встретившиеся нам раньше дифференциальные уравнения второго порядка (2) и (7) не являются системами в нормальной форме, как и более общее уравнение $\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$. Но если принять $\dot{x}$ за новую неизвестную y и написать, что указывают определение y и наше уравнение насчёт производной каждой из неизвестных, то получится система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(t,x,y), \end{cases} \tag{12}$$

которая имеет нормальную форму и в то же время эквивалентна уравнению $\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$. Как видно, от уравнения второго порядка мы перешли к системе второго же порядка.

Вообще, уравнение n-го порядка $x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)})$ перефразируется как система в нормальной форме, если ввести неизвестные

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad \ldots, \quad x_n = x^{(n-1)}.$$

Последнее уравнение этой системы имеет вид $\dot{x}_n = f(t,x_1,\ldots,x_n)$, а предыдущие — вид $\dot{x}_i = x_{i+1}$. Заметим, что от уравнения n-го порядка мы перешли к системе тоже n-го же порядка — своего рода согласованность терминологии.

В школе встречаются системы линейных алгебраических уравнений, например,

$$\begin{cases} x+y = 3, \\ 2x+y = 4. \end{cases}$$

Решение данной системы таково: $x=1$, $y=2$ (проверьте!). Значит, решение — не одно число, а пара чисел: одно число — это x, а другое — это y.

Точно так же решение системы дифференциальных уравнений (11) — это не одна функция, а набор n функций $(x_1(t),\ldots,x_n(t))$. Например, возьмём систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g, \end{cases} \tag{13}$$

которая эквивалентна уравнению свободного падения (2). Как видно, мы добавили к неизвестной x новую неизвестную y, которая равна $\dot{x}$, т. е. скорости падения. Ранее скорость обозначалась через v, как это принято в физике, но теперь мы переключаемся на чистую математику, в которой «традиционным партнёром» буквы x является y.

Любое решение системы (13) имеет вид

$$x(t) = x_0 + y_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad y(t) = y_0 - gt,$$

где $x_0 = x(0), y_0 = y(0)$. (В сущности, мы это уже обсуждали. Раз $\dot{y} = -g$, то выражение для y очевидно. Для x мы попросту повторили формулу (6), заменив в ней, как только что было сказано, букву v на y.) Иными словами, решение системы (13) — это набор двух функций от t:

$$(x(t), y(t)) = \left(x_0 + y_0 t - \frac{gt^2}{2}, y_0 - gt\right).$$

Отметим ещё раз (но не на прежнем языке, когда говорилось о функциях $x(t)$, являющихся решениями (2), а на языке, связанном с системами в нормальной форме и с несколькими неизвестными), что (13) имеет бесконечное семейство решений, зависящее от двух параметров.

Аналогично уравнение гармонического осциллятора (7) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases} \tag{14}$$

Зная, что решения (7) имеют вид (8), можно заключить, что решения (14) суть пары функций[13]

$$(x(t), y(t)) = (A\cos(\omega t + \alpha), -A\omega\sin(\omega t + \alpha)). \tag{15}$$

Решения снова образуют бесконечное семейство, зависящее от двух параметров.

Пока ничего не было сказано о функциях f_i — правых частях системы (11). В данной книжке нет необходимости то и дело отвлекать внимание читателя, педантично уточняя различные детали (включая обсуждение, где задана функция f). Но не надо и делать вид, будто такие уточнения вообще не нужны. При случае я буду их делать, часто вынося их в подстрочные примечания.

[13] Для перехода к (15) надо уметь дифференцировать косинус. Ниже в этом параграфе его производная фактически находится заново (в качестве упражнения читателю предоставляется убедиться в этом самому).

Сейчас нам разумно исходить из того, что f задана на некоторой области[14] G пространства переменных $(t, x_1, \ldots, x_n)$. Читатель может представлять себе G как область на плоскости, ограниченную некоторой кривой (это относится к случаю $n = 1$) или как область в пространстве, ограниченную некоторой поверхностью (это относится к случаю $n = 2$). Забегая вперёд, отмечу, что далее основным для нас будет тот случай, когда f_i не зависят от t, а зависят только от $(x_1, \ldots, x_n)$. В этом случае при $n = 2$ правые части f_1 и f_2 определены в какой-то области G' на плоскости переменных (x_1, x_2), которую при желании можно снова представлять себе как область на плоскости, ограниченную некоторой кривой Г. В этом случае прежняя G является областью в пространстве переменных (t, x_1, x_2), ограниченной цилиндрической поверхностью, образованной проходящими через Г прямыми, параллельными оси t. Читатель может даже игнорировать G, как будто f задана на всей плоскости (подчас это и впрямь так).

При обсуждении вопросов общего характера употребляют сокращённую запись, уже использованную в (11):

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n) = f(t, x).$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что если правые части $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ системы (11) являются «мало-мальски хорошими» — скажем, гладкими[15], — то для любых начальных данных[16] $(t_0, x_0) = (t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$, лежащих в области G, существует

[14] Вообще под областью понимают открытое связное множество. Открытым называется множество, содержащее вместе с каждой своей точкой все достаточно близкие к ней точки, т. е. если какая-то точка принадлежит G, то имеется такое $\varepsilon > 0$, что весь кружок (в случае плоскости) или шар (в случае пространства) радиуса ε с центром в этой точке содержится в G. Связность же множества G наглядно означает, что G не распадается на несколько «отдельных кусков», никак не соединяющихся друг с другом (в противном случае получилось бы, что система (11) — это как бы отдельные системы, заданные в этих «кусках»). Формальное определение связности открытого множества G таково: оно связно, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком содержащейся в G.

[15] Гладкость функции f означает, что во всех точках области G существуют первые производные этой функции $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ и эти производные непрерывны по совокупности своих аргументов (что, кстати, гарантирует непрерывность и самой f). Подробнее в подобных случаях говорят о *гладкости класса* C^1 или о C^1-*гладкости*. Если помимо первых производных существуют ещё и вторые производные (т. е. производные первых производных), которые тоже непрерывны всюду в G, то говорят о *гладкости класса* C^2, и т. д.

[16] Во избежание путаницы стоит особо отметить, что раньше x_i означало i-е число, входящее в набор чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, но x_0 само является некоторым набором чисел — набором $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$.

ровно одно решение $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (11), принимающее при $t = t_0$ начальное значение $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, т. е. для этого решения $x(0) = x_0$ (иными словами, все $x_i(t_0) = x_{i0}$). О последнем равенстве (в сокращённой или подробной записи) говорят также как о *начальном условии* для данного решения.) Заметим кстати, что когда описанным выше способом переходят от уравнения $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ к системе в нормальной форме, то начальные данные для решения $x(t)$ этого уравнения очевидным образом перефразируются как начальные данные для соответствующего решения $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (x(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$ этой системы.

Строго говоря, если имеется решение $x(t)$ с начальным значением $x(t_0) = x_0$, определённое на некотором интервале времени, то ведь можно ту же самую функцию от t рассматривать на любом меньшем интервале времени, и если этот меньший интервал содержит t_0, то функция $x(t)$, рассматриваемая на этом уменьшенном интервале, конечно, снова будет решением (11) с тем же начальным значением; какая же тут единственность? Формально ведь это будет другое решение. «Формально правильно, а по существу безобразие», как было сказано по совсем другому поводу. В теории дифференциальных уравнений «безобразие» устраняется путём обсуждения вопроса о возможности продолжения решения, заданного на некотором интервале времени, на бóльшие интервалы.

Оказывается, формально различные решения с одним и тем же начальным значением всегда получаются так, как только что было сказано (уменьшением интервалов, где они определены) из некоего решения, определённого на самом большом интервале. (Самом большом по сравнению со всеми остальными решениями с данным начальным значением. Этот самый большой интервал может быть и конечным, и бесконечным в одну или обе стороны.) Последнее решение называют *максимальным* или *непродолжаемым*. Именно о нём я и говорю как о решении. Согласно теореме о продолжении решения до границы области (название неточное, хотя и отражающее суть дела) если интервал, где определено (непродолжаемое далее) решение $x(t)$, ограничен (слева или справа), то при приближении t к этому концу или решение принимает значения, сколь угодно большие по абсолютной величине, или соответствующая интегральная кривая подходит сколь угодно близко к границе области G (где определено наше уравнение)[17].

Для дифференциальных уравнений (2), (7), (10) нетрудно найти решения в явном виде. Опираясь на § 4, мы остановимся в § 5 на интегрировании этих и родственных дифференциальных уравнений.

---

[17] Для достаточно подготовленных студентов, по-моему, более удобна следующая формулировка: если K — любое компактное подмножество G, то при всех t, достаточно близких к рассматриваемой конечной границе, точка $(t, x(t))$ оказывается вне K.

Но даже для немногим более сложных уравнений это, вообще говоря, невозможно. В подобных случаях дело не в том, что нам до сих пор не удалось найти формулу для решения, а в том, что таких формул вообще не может быть — решение не может быть выражено никакой комбинацией известных читателю (так называемых *элементарных*) функций[18] (степенных, показательных, логарифмов и тригонометрических функций), причём даже в сочетании с операцией интегрирования из интегрального исчисления. А так как запросы и самой математики, и её приложений приводят к тому, что всё-таки приходится иметь дело с многочисленными дифференциальными уравнениями, которые невозможно проинтегрировать в явном виде, и невзирая на эту неинтегрируемость надо всё-таки быть в состоянии сказать нечто об их решениях, то в ответ на эти запросы развились три направления.

1. В дополнение к известным нам элементарным функциям был введён ряд других функций, известных под общим названием *специальные функции*. Наиболее употребительные из них изучены столь же подробно, как и привычные элементарные функции. Имеются относящиеся к этим спецфункциям теоремы, формулы, таблицы, им посвящены специальные книги... Используя специальные функции, можно явно выразить решения многих дифференциальных уравнений, для которых с помощью прежних средств это было невозможно. Однако всё равно остаются многочисленные уравнения (в том числе встречающиеся в приложениях), решения которых невозможно выразить в виде явных формул даже с привлечением спецфункций.

2. Были разработаны различные и разнообразные по своему характеру методы приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти методы бывают двух типов.

В некоторых из них строятся приближённые формулы, выражающие решение с некоторой допустимой погрешностью в виде комбинации хорошо известных элементарных функций. Например, если в формуле (15) мы приближённо заменим $\cos(\omega t+\alpha)$ на некоторый многочлен от $\omega t+\alpha$ (в § 4 фактически получено приближённое выражение $1-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{24}\varphi^4$ для $\cos\varphi$ при малых φ, которым можно воспользоваться), то получим приближённую формулу для решения. В данном случае польза от этого сомнительна.

Во-первых, наша приближённая формула годится только при небольших t, потому что приближённое равенство $\cos\varphi\approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{24}\varphi^4$

[18] А также и алгебраических функций, но я не уверен, что читатель с ними настолько знаком, чтобы это замечание сказало ему достаточно много.

пригодно только при небольших φ; в связи с этим стоит ещё отметить что приближённая формула не передаёт важнейшего свойства решения — его периодичности по времени (оно не меняется, когда t увеличивается на $2\pi/\omega$), которое в свою очередь отражает колебательный характер соответствующего физического процесса. Во-вторых, мы же имеем точную формулу для решения, и она очень проста, свойства фигурирующего в ней косинуса хорошо известны, а для его вычисления имеются таблицы и программы. (На самом деле cos и sin тоже включаются в «джентльменский набор» элементарных функций, через которые стараются приближённо выразить решения.) Но как бы то ни было, это всё-таки пример приближённой формулы для решения, которая худо ли, хорошо ли, но всё же годится в каком-то интервале изменения t.

В узком смысле под приближёнными методами понимают именно методы, приводящие к приближённым формулам для решений — может быть, не для всех решений, а для тех, которые почему-либо представляют особый интерес; зато обычно речь идёт о формулах, дающих хорошее приближение к истинному решению при всех t или по крайней мере «довольно долго», т. е. в довольно большом интервале изменения t.

Другие методы имеют численный характер (их так и называют *численными*). Они позволяют составить таблицу, довольно точно указывающую, чему равно решение $x(t)$ в моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ (обычно $t_i = t_0 + ih$ с некоторым небольшим шагом h, но впрочем шаг может быть и переменным, так что, скажем, $t_1 = t_0 + h_1$, а $t_2 = t_1 + h_2$ с $h_1 \neq h_2$). Если t_i достаточно близки друг к другу, то знание значений $x(t_i)$ даёт хорошее представление о решении. При этих методах $x(t_i)$ вычисляются последовательно, шаг за шагом. Сперва, отправляясь от заданного $x(t_0)$ и зная функцию $f(x, t)$, вычисляют по определённому «рецепту» приближённое значение $x(t_1)$. Далее повторяют этот процесс и, зная $x(t_1)$, вычисляют $x(t_2)$, и т. д. В идеале значения $x(t_i)$ должны вычисляться с назначенной заранее точностью. Практически бывает сразу гарантирована требуемая малость погрешности в несколько первых моментов $t_0, t_1, t_2, \ldots$, но при большом числе шагов ошибка может накапливаться. С накоплением ошибок можно бороться, но это отдельная и непростая тема.

Стандартные пакеты компьютерных программ типа Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad включают методы численного интегрирования. Однако в сложных задачах приходится составлять специальные программы с учётом специфики решаемой задачи.

3. Возникла так называемая *качественная теория дифференциальных уравнений*, цель которой состоит в том, чтобы, не решая ни точно, ни приближённо дифференциального уравнения и по возможности вообще избегая вычислений, определить ряд качественных свойств решений, причём часто именно эти свойства как раз и представляют особый интерес для самой математики и её приложений. Этому направлению преимущественно посвящена настоящая книжка. Оно весьма геометрично, что нашло отражение в заглавии.

В качественной теории (по крайней мере, в основной её части) рассматриваются системы в нормальной форме, правые части которых не зависят от t (я уже упомянул мельком, что именно с такими системами мы будем иметь дело; исключением будет часть § 5, вообще отличающегося по своему характеру от остальных параграфов):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n); \end{cases} \tag{16}$$

сокращённо $\dot{x} = f(x)$.

Такие системы называют *автономными*[19]. Они дают математическое описание физических (в широком смысле[20]) систем, которые или являются изолированными, или находятся под воздействием каких-то внешних факторов, но действие этих факторов зависит только от состояния нашей системы. Второй случай имеет место для физических (уже́ в узком смысле слова — изучаемых в физике) систем, находящихся под воздействием постоянных во времени силовых полей; примером может служить свободное падение или качание маятника — и то, и другое происходит в поле земного тяготения, так что падающее тело или маятник отнюдь не изолированы, однако ускорение $\ddot{x}$, создаваемое полем земного тяготения, в первом случае вообще постоянно, а во втором не постоянно, но зависит только от x. (А вот если бы действующие на систему силы зависели, скажем, от положения каких-

[19] Системы же вида (11), правые части которых явным образом зависят от t, называют *неавтономными*. Аналогичную терминологию применяют и для дифференциальных уравнений n-го порядка: уравнение $x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ — автономное, а $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ — неавтономное.

[20] Не только «чисто физических», но и химических, биологических, экологических, экономических... Ради точности надо добавить, что мы говорим о системах, состояние которых характеризуется конечным числом величин (в механике это системы с конечным числом степеней свободы). Иначе понадобились бы уравнения с частными производными, а то и что-нибудь посложнее.

то внешних тел, которые как-то движутся, то в один момент времени положение внешних тел было бы одним, а в другой — другим, и их воздействие на нашу систему при одном и том же её состоянии, вообще говоря, оказывалось бы различным.) Понятно, что с этим связано и прилагательное «автономная» в названии системы (16).

Переменные $(x_1, \ldots, x_n)$ характеризуют состояние рассматриваемой физической системы, так что введённое выше сокращённое обозначение x для набора чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ можно понимать и как обозначение для состояния — физически это более содержательно, чем просто обозначение n чисел одной буквой. Тогда $\dot{x}$ обозначает скорость изменения состояния, а сокращённая запись системы (16) прямо утверждает (не ссылаясь на переменные x_i), что скорость изменения состояния зависит только от него и что эта зависимость даётся функцией $f(x)$. (Функция эта не скалярная[21], а векторная.)

Под влиянием этих (квази)физических соображений при чисто математических рассмотрениях автономной системы (16) об $x = (x_1, \ldots, x_n)$ тоже часто говорят как о *состоянии*.

Теперь я буду считать, что порядок автономной системы (16) $n = 2$. В этом случае состояния математически представляются точками $x = (x_1, x_2)$ области G на плоскости двух переменных. Эту плоскость называют *фазовой плоскостью* (рассматриваемой физической системы или математической системы (16)), а её точки, особенно лежащие в той области G, где определены правые части нашей системы дифференциальных уравнений, — *фазовыми точками*. (Прилагательное фазовая связано с тем, что некогда состояния системы назывались её фазами; ср. с фазами Луны).

Вектор $f(x)$, имеющий координаты $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, уместно представлять себе начинающимся в точке x, так что в области G из каждой её точки «торчит» вектор $f(x)$. Наглядное (но в то же время совершенно точное) представление об изменении со временем состояния нашей системы таково: состояние описывается движущейся фазовой точкой $x(t)$; движение происходит по правилу: когда $x(t)$ попадает в точку x области G, её мгновенная скорость равна «торчащему» из этой точки вектору $f(x)$. Вектор $f(x)$ называют *вектором фазовой скорости* и говорят, что в G задано *векторное поле* фазовой скорости (рис. 2).

[21] Слово «скаляр» — синоним «числа», различие только в контексте, в котором эти слова употребляются. Скаляры как бы противопоставляются векторам и оттого о скалярах говорят, когда «где-то рядом имеются векторы». В школе (более в физике, чем в математике) вектор — это направленный отрезок, он характеризуется своими координатами (их две на плоскости и три в обычном пространстве, где мы живём).

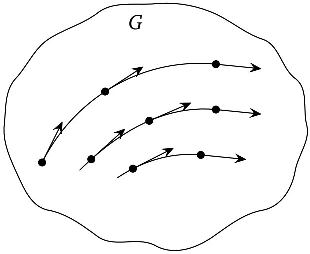


Рис. 2. Векторное поле и траектории

Здесь имеется некоторое терминологическое неудобство: говоря о фазовой точке, мы можем иметь в виду как движущуюся точку, изображающую решение $x(t)$, т. е. меняющееся со временем состояние системы, так и «стоящую на месте» точку — пару постоянных чисел $x=(x_1, x_2)$. (Первая точка как бы движется в толпе вторых.) Если есть возможность путаницы, надо говорить «движущаяся фазовая точка» (подразумевая, что она изображает $x(t)$ или — при обычном (хотя и несколько условном) отождествлении точек плоскости с парами чисел — сама есть $x(t)$) или «неподвижная фазовая точка».

Движущаяся фазовая точка вычерчивает при движении некоторую кривую, которую называют *фазовой траекторией*. При обычных предположениях о функциях $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ через каждую неподвижную точку фазового пространства проходит фазовая траектория (как говорят, фазовая траектория этой точки) и фазовые траектории двух точек либо совпадают, либо не пересекаются (см. ниже). Впрочем, некоторые «движущиеся» точки (напоминаю — так мы назвали точки, изображающие решения $x(t)$) могут стоять на месте — соответствующие решения суть константы; обычно это исключения, так называемые *положения равновесия*[22] или *неподвижные точки*, но, как мы увидим, они играют важную роль. Такую точку a часто называют также *особой точкой*, имея в виду не то, будто у правых частей

[22] Педантизма ради в связи с термином «положение равновесия» уместно сказать, что в механике слово «положение» часто имеет другой смысл — оно относится только к расположению частей физической системы, тогда как её состояние характеризуется также и скоростями этих частей. Говоря о маятнике, мы мельком упомянули о «положении равновесия» — положении, при котором центр тяжести маятника находится на вертикали, проходящей через точку подвеса. О скорости при этом нет речи. Если она ненулевая, то маятник, конечно, только на момент попадает в положение равновесия и затем проходит дальше. Если же скорость равна нулю, то состояние маятника не меняется — соответствующая фазовая точка является положением равновесия в том смысле, как говорилось выше.

системы (16) имеется в этой точке особенность в аналитическом смысле (т. е. особенность в том смысле, как это понимается для функций — скажем, будто там нарушается непрерывность или хотя бы дифференцируемость), а то, что в такой точке вектор $f(a)$, будучи нулевым, не задаёт никакого направления. Пожалуй, ещё чаще точки a, где $f(a) \neq 0$, называют *неособыми*.

Надо объяснить, почему фазовые траектории либо не пересекаются, либо совпадают. Сперва отметим такое свойство решений автономной системы: если $x(t)$ — решение, то $x(t+c)$, где c — константа, — тоже решение. Обозначим $x(t+c) = y(t)$. Надо доказать, что если $x(t)$ удовлетворяет (16), то и $y(t)$ тоже. А это очевидно[23]:

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+c) = f(x(t+c)) = f(y(t)).$$

(Здесь молчаливо подразумевается, что

$$\frac{dx(t+c)}{dt} = \frac{dx(t+c)}{d(t+c)}, \tag{17}$$

это и позволяет приравнять данную производную $f(x(t+c))$. Почему (17) справедливо?).

А теперь допустим, что траектории, зачерчиваемые решениями $x(t)$ и $y(t)$ системы (16), пересекаются. Это значит, что в какие-то моменты времени t_1 и t_2 будет $x(t_1) = y(t_2)$. Надо доказать, что тогда $x(t)$ и $y(t)$ при изменении t пробегают одну и ту же кривую.

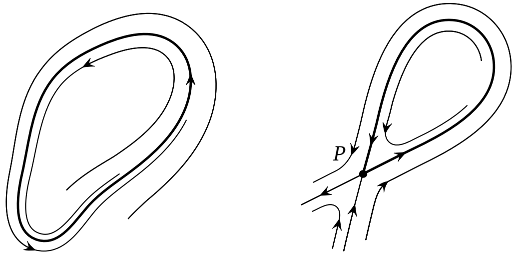
Рассмотрим решения $u(t) = x(t+t_1)$, $v(t) = y(t+t_2)$ системы (16). При $t = 0$ они принимают одни и те же начальные значения: $u(0) = x(t_1) = y(t_2) = v(0)$. Ввиду единственности решения, удовлетворяющего данному начальному условию, всё время $u(t) = v(t)$, т. е. $x(t+t_1) = y(t+t_2)$. Следовательно, $x(t+t_1)$ и $y(t+t_2)$ при изменении t пробегают одну и ту же кривую. Но ведь $x(t)$ пробегает ту же кривую, что и $x(t+t_1)$ (любое $t+t_1$ есть некое новое t и любое t можно представить в виде $t+t_1$ с некоторым новым t), а $y(t)$ — ту же, что и $y(t+t_2)$.

В связи с понятием фазовой траектории стоит заметить, что в основном нас будет интересовать поведение решений при $t \to \infty$, поэтому на первый план нередко будут выступать не столько сами фазовые траектории — кривые $\{x(t);\ -\infty < t < \infty\}$, — сколько их *положительные полутраектории* — кривые $\{x(t);\ t_0 \leqslant t < \infty\}$. Положительная полутраектория — это часть всей траектории, проходимая движущейся фазовой точкой $x(t)$ после некоторого начального момента t_0 (выбор

[23] Данное рассуждение очень просто, но стоит проверить, что для неавтономной системы (11) оно не проходит. Для неё

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+c) = f(t+c, x(t+c)) = f(t+c, y(t)),$$

а чтобы $y(t)$ было решением (11), надо было бы получить в правой части $f(t, y(t))$. Но когда f действительно зависит от t, то, вообще говоря, $f(t+c, y) \neq f(t, y)$.



а) *б*)

Рис. 3

которого несуществен). Иными словами, положительная полутраектория состоит из точек, расположенных на траектории, после[24] точки $x(t_0)$. Естественно, предшествующая $x(t_0)$ часть $\{x(t);\ -\infty < t \leqslant t_0\}$ той же траектории называется *отрицательной полутраекторией*. Если траектория является замкнутой кривой C (тогда говорят о замкнутой траектории[25]), то любая её отрицательная или положительная полутраектория — это всё та же кривая C. Если же траектория незамкнутая, то любая точка траектории разбивает последнюю на положительную и отрицательную полутраектории, общей для которых является эта точка — для отрицательной полутраектории это конец, а для положительной начало.

Наглядное представление о движении фазовой точки в области G на фазовой плоскости, изображающем изменение состояний физической системы и описываемом системой (16), можно назвать кинематической интерпретацией этой системы. Кинематической, а не геометрической, по двум причинам.

Во-первых, подразумевается, что фазовые точки движутся. Впрочем, мы можем нарисовать фазовые траектории, но не можем нарисовать процесс движения по ним (можем только указать стрелками направление движения); так что на рисунке получается всё-таки статичная картина. Стало быть, на рисунке у нас более геометрия, чем кинематика (а кинематику мы «держим в уме»).

Во-вторых (и это главное), под геометрической интерпретацией системы (11) (не обязательно автономной) понимают нечто иное. (А именно, при геометрической интерпретации речь идёт о графиках

[24] На траектории ведь выделено определённое направление — направление движения $x(t)$ с возрастанием t.

[25] Стоит пояснить, что на рис. 3 *а* изображена замкнутая траектория, а на рис. 3 *б* — нет: траектория не содержит точки P, которая сама является другой траекторией (положением равновесия), и потому не является замкнутой кривой.

решений $x = x(t)$ в пространстве переменных (t, x); практически рисовать можно только при $n = 1$, что в общем-то малоинтересно, хотя и небесполезно в учебных целях в самом начале изучения теории дифференциальных уравнений.)

В фазовой плоскости возникает своеобразная картина, которую А. А. Андронов[26] образно назвал «фазовым портретом». Это не термин, имеющий точное определение, а образное выражение. Имеется в виду, что на фазовом портрете выделены траектории, играющие особо важную роль, и в дополнение к этим «ярким солистам» — ещё, возможно, несколько траекторий, дающих хорошее представление о поведении всего оставшегося «молчаливого большинства».

Перелистав эту книжку, читатель найдёт в ней несколько простейших фазовых портретов. Они нарисованы на основании теоретических соображений, но их рисуют, так сказать, и эмпирически. Взяв в области G несколько точек $x^{(i)}$, мы можем в каждой из них нарисовать (не мысленно, а карандашом на бумаге) исходящий из неё вектор фазовой скорости $f(x^{(i)})$. Если точки $x^{(i)}$ выбраны подходящим образом (о чём придётся подумать) или если просто повезёт, то полученная картина даст хорошее представление обо всём векторном поле фазовой скорости.

Можно также попробовать нарисовать кривые, касающиеся этого векторного поля, т. е. фазовые траектории. Разработаны приёмы довольно точного осуществления такого графического построения, но обычно для начала рисуют просто «по вдохновению» (тем паче, что если это делает человек, уже накопивший какой-то опыт в таком деле, то ведь этот опыт, на основе которого сложилась некоторая интуиция, тоже чего-нибудь да стоит).

А теперь для таких рисунков имеются компьютерные программы. Однако от человека и его интуиции всё же зависит многое — работа программы зависит от ряда параметров, задаваемых человеком; кроме того, ввиду отсутствия у машины интуиции, программа с самого начала использует численное интегрирование дифференциального уравнения, к чему работающий без компьютера человек обратился бы позднее; но раз уж компьютер будет использовать какой-то метод численного интегрирования и если можно выбирать между различными методами, каким из них пользоваться на данном эта-

[26] Физик по образованию, занимавшийся теорией колебаний, А. А. Андронов (1901—1952) оказал значительное влияние на развитие теории дифференциальных уравнений не только (и даже, может быть, не столько) своими конкретными математическими результатами, но и благодаря стимулирующей роли предложенных им новых подходов и постановок задач.

пе? Слишком примитивный метод, работая быстро, почти столь же быстро и наделает ошибок; со слишком точным методом неизвестно, когда закончишь — ведь на этом этапе просчитывается много решений! Пожалуй, всё закончится, когда компьютер зависнет... Впрочем, насколько я понимаю, такая опасность невелика — стандартные программы графических построений не предусматривают обращения к очень уж точным методам численного интегрирования, а чтобы эти программы переписывали, встраивая в них обращение к подобным методам — такое в принципе возможно, но к этому прибегают редко, разве что в некоторых промышленных пакетах...

Конечно, реально нарисовать можно только несколько конечных дуг нескольких фазовых траекторий, но, если повезёт, они могут создать представление о поведении всех траекторий. (А если не так повезёт, но и не то, чтобы совсем не повезёт — что-то начнёт вырисовываться, но не очень уверенно, — придётся нарисовать ещё несколько дуг.) А когда возникнет более или менее чёткое представление обо всём фазовом портрете, его можно начать проверять, обратив особое внимание на выделившихся «солистов». Может быть, кое-что о них — особенно о положениях равновесия — удастся узнать с помощью разработанных в качественной теории дифференциальных уравнений приёмов локального исследования. Если нет, то надо, по крайней мере, просчитать решения, близкие к заинтересовавшим нас «солистам», более точными численными методами, чтобы проверить, действительно ли «солисты» играют, как нам показалось, «руководящую и направляющую роль». На протяжении XX века накопилось немало исследований такого характера о различных системах, возникающих из приложений.

Физическое осуществление подобной конструкции при $n>3$ невозможно — понадобилось бы n-мерное пространство, которого, увы, в нашем распоряжении нет. Да и при $n=3$ её практическая осуществимость сомнительна — как прикрепить стрелки, изображающие векторы фазовой скорости, к соответствующим точкам? С помощью каких-то стерженьков-подставок или подвесив их на какие-то проволочки?[27] Можно ещё вообразить изготовление такого рода моделей

[27] С появлением компьютеров появились новые возможности. Я пока не слышал об их использовании для создания трёхмерных фазовых портретов (хотя стереоскопические изображения некоторых кривых в трёхмерном пространстве уже видел), но представляется вполне реальной перспектива как создания с их помощью плоских рисунков трёхмерной ситуации, так и стереоскопического воспроизведения таковой. Стереоскопический эффект возникал бы при рассматривании через специальные очки особого изображения на экране. Иллюзии трёхмерности какой-нибудь кривой или гео-

для учебных целей, но мне не случилось их видеть. А чтобы они изготовлялись в ходе исследовательской работы — это уж совсем нереально. Андронов и его сотрудники, как и другие исследователи, успешно изучили ряд систем с $n \geqslant 3$, но пространственных моделей никто при этом не изготовлял.

Остаётся, однако, возможность использования геометрического языка в формулировках и рассуждениях. В наши дни мало-мальски образованный человек не подумает о мистике, услышав о «точке n-мерного евклидова пространства». Такая точка — это вполне реальный объект, а именно — набор n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, n-мерное же пространство — это совокупность всевозможных таких наборов. Единственный содержательный вопрос, который здесь может возникнуть, состоит в том, зачем нужна подобная игра слов? Во-первых, она сразу приводит к заметному сокращению формулировок; а во-вторых, со временем становится всё более существенным, что при этом в работу вовлекается наше геометрическое воображение. Оно, конечно, основано на опыте нашей жизни в физическом трёхмерном пространстве, но довольно многое из этого опыта имеет аналоги в свойствах арифметического n-мерного пространства, состоящего из наборов n чисел. Если читатель — студент, то он, несомненно, уже мог убедиться в полезности геометрической терминологии и соответствующих понятий в других разделах математики, с которыми он уже успел в какой-то степени познакомиться (в анализе и алгебре).

В соответствии с этим мы говорим, что состояние физической системы, описываемой автономной системой (16), изображается точкой $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, что такая точка называется *фазовой точкой*, что всевозможные состояния физической системы соответствуют всевозможным точкам области[28] G (где определены правые части (16)) и что последнюю область поэтому называют *фазовым пространством*[29]. В области G мы рассматриваем *векторное*

метрического тела можно добиться также, обеспечив непрерывное вращение на экране изображения этой кривой или тела, но я не уверен, что такой приём подойдёт для фазового портрета.

[28] Здесь уже проще прибегнуть к общему понятию области, как оно сформулировано в одном из предыдущих подстрочных примечаний, а не говорить, что область чем-то ограничена — объяснять, чем она могла бы быть ограничена и что это значит, было бы сложнее.

[29] Под таковым может пониматься и всё n-мерное пространство переменных $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$, как оно и было сказано о фазовой плоскости. Это не более чем терминологическая условность, но мне кажется, что при $n = 2$ под фазовой плоскостью чаще понимают всю плоскость переменных (x_1, x_2), хотя бы область G была только её частью, а при $n \geqslant 3$ — область G.

поле фазовой скорости, сопоставляющее (в сокращённых обозначениях) точке x вектор $f(x)$, и в понятном смысле говорим о его интегральных кривых и фазовых траекториях.

Мы рассматриваем в фазовом пространстве движение, происходящее согласно уравнению (16). Можно представить себе, что так движется не одна какая-то точка, но все точки фазового пространства. При этом вновь приходится посетовать на то, что в терминологии не отразилось различие между фазовыми точками, которые мы представляем себе стоящими на своих местах, и точками, движущимися по соответствующим траекториям согласно (16). Казалось бы, первые можно назвать «неподвижными», однако обычно так называют те точки, где вектор фазовой скорости $f(x)=0$. Так что «неподвижные фазовые точки — это те движущиеся точки, которые неподвижны». Получилось как-то коряво...

Как сказать коротко на наглядном языке движущихся точек, что рассматривается решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0)=x_0$ — «рассматривается движущаяся точка, которая в начальный момент времени совпадала с точкой x_0»? Подразумевается, что движущаяся точка затем куда-то ушла (исключая тот случай, когда $f(x_0)=0$), а x_0 так и осталась стоять, где была. А теперь представьте себе, что мы воображаем такое движение для всех фазовых точек одновременно. В литературе это поясняется с помощью наглядного образа — стационарного течения жидкости.

Вообразим, что фазовое пространство заполнено жидкостью, причём частица жидкости, занимающая в данный момент положение x, имеет скорость $f(x)$, так что частица, занимавшая при $t=0$ положение x_0, перемещается за время t в положение $x(t)$ (где по-прежнему $x(t)$ — решение (16) с начальным значением... каким?) Здесь найдены слова для моих «движущихся фазовых точек» и «фазовых точек, остающихся на месте» — «частицы жидкости» и «положения в фазовом пространстве», и притом речь идёт о движении, охватывающем всё фазовое пространство[30]. Эта аналогия плоха тем, что у воображаемой фазовой жидкости нет никакого взаимодействия между соседними частицами, которое у настоящих жидкостей определяет все их свойства, включая и то, каким в том или ином случае окажется течение...

До сих пор мы обычно говорили о решении $x(t)$ системы (16), имеющем начальное значение $x(0)=x_0$. Но оно, конечно, зависит от x_0, поэтому можно подробнее писать $x(t, x_0)$.

Можно доказать, что областью определения $x(t, x_0)$ является некоторое открытое подмножество U в $(n+1)$-мерном пространстве переменных (t, x_0), а $x(t, x_0)$ является непрерывной функцией на U (принимающей значения в n-мерном пространстве).

[30] Всё течёт, как говорил ещё Гераклит. Возможно, впрочем, что он имел в виду не течение воображаемой фазовой жидкости, а вполне реальное состояние сантехники.

В частности, если решение $x(t, x_0)$ определено при $a \leqslant t \leqslant b$, то при достаточной близости x_0' к x_0 решение $x(t, x_0')$ тоже определено при тех же t и близко к $x(t, x_0)$. (Степень близости зависит не только от близости x_0' к x_0, но и от a и b, не говоря уже о том, что она зависит от f.) Всё это в равной степени справедливо и для неавтономной системы (11).

И если раньше мы говорили о зависимости $x(t, x_0)$ от t при неизменном x_0, то ведь можно встать и на другую точку зрения — обратить внимание на зависимость $x(t, x_0)$ от x_0 при неизменном t. (В терминах упоминавшейся гидродинамической аналогии — как за время t изменилось положение различных частиц фазовой жидкости?) Возникает однопараметрическое семейство отображений S_t (t — параметр семейства) области G в себя: $S_t(x_0) = x(t, x_0)$ (вроде бы ничего нового в $S_t(x_0)$ по сравнению с $x(t, x_0)$ не содержится, но несколько изменились акценты. Разумеется, это далеко не произвольное семейство отображений. Оно обладает интересными свойствами, важнейшее из которых — свойство $S_t(S_s(x)) = S_{t+s}(x)$. Оно связано с автономностью системы (16) и выражает уже отмечавшийся факт, что решения $x(t)$ и $y(t)$, удовлетворяющие начальным условиям $x(s) = y(0)$, отличаются только «сдвигом по времени»: $y(t) = x(t + s)$ (где это было сказано? и почему отсюда следует написанное свойство отображений S_t?). Кроме того, $S_0(x) = x$ (почему?). Наконец, говорится о свойствах непрерывности и дифференцируемости $S_t(x)$ как функции от (t, x). Отображение S_t можно назвать *отображением сдвига по времени на* t, а всё семейство отображений $\{S_t\}$ (или, если угодно, отображение, зависящее от t) — *оператором эволюции системы* (16).

Вероятно, читателю термин «отображение» знаком, но на всякий случай сделаю несколько замечаний по его поводу, тем более что он используется также в § 3 и 8, причём в последнем — довольно активно.

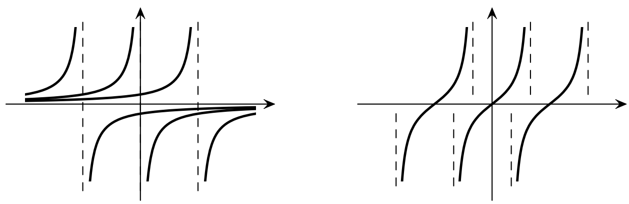
Отображение $f\colon A \to B$ (пишут также $A \xrightarrow{f} B$) множества A в множество B, или функция, определённая (заданная) на A и принимающая значения в B, — это соответствие, при котором каждому элементу x множества A сопоставляется некоторый элемент $f(x)$ из B. Последний элемент обозначают через $f(x)$ и называют образом элемента x при отображении f или значением функции f на элементе x; говорят также, что отображение f переводит x в $f(x)$ и пишут $x \mapsto f(x)$. Элементы области определения называют *аргументами* функции f. Называя f отображением, тоже (как и о функции) говорят, что оно определено или задано на A. Наряду с предлогом «на» употребляют «в»: функция задана в A и принимает значение $f(x)$ в x. В данном случае никакой смысловой нагрузки замена одного предлога другим не несёт. А вот в выражении «f отображает A на B» предлог «на» указывает на то, что каждый элемент $y \in B$ получается как образ какого-то $x \in A$; здесь «на» нельзя заменить предлогом «в».

Отображения и функции — это, собственно, синонимы, но первый термин возник в геометрии, а второй — в математическом анализе. Это до некоторой степени отображается в употреблении данных терминов. Функции чаще всего принимают числовые значения или, во всяком случае, такие значения (скажем, векторные), над которыми можно производить какие-то алгебраические операции. Значения, принимаемые отображениями, чаще, чем значения функций, бывают элементами каких-то множеств, где ни о каких алгебраических операциях говорить не приходится.

И ещё одно обстоятельство, скрытое за невинными словами: говоря об отображении S_t всей области G в G, я молчаливо подразумеваю, что при любом x_0 определено $x(t, x_0)$. Вообще говоря, может случиться, что решения (16) (все или некоторые) определены на ограниченных (с той или иной стороны, или с обеих сторон) интервалах времени и что конец такого интервала зависит от x_0. Тогда, вообще говоря, при данном t для одних x_0 решение $x(t, x_0)$ существует, а для других — нет.

Это не надуманная абстрактная возможность, а физическая реальность. Химическая реакция в пробирке может закончиться взрывом, после чего система, состоящая из смеси веществ в пробирке, перестанет существовать — её содержимое разлетится по комнате и его дальнейшая судьба будет частью судьбы всего, что там находится (тогда как до взрыва можно было отдельно говорить об изменениях только того, что в пробирке). Подобные реакции описываются системами нескольких дифференциальных уравнений, содержащих члены второго порядка; «взрыв» (а математически — уход части переменных x_i в бесконечность) связан именно с такими членами. Что от них можно этого ожидать, видно на самом простом уравнении с квадратичным членом $\dot{x} = x^2$. Одно из его решений $x(t) \equiv 0$, а другие имеют вид $x(t) = \frac{1}{c-t}$ с различными константами c. (См. рис. 4 a.) Обратите внимание, что это — рисунок в плоскости переменных (t, x), а не в фазовом пространстве, которое в данном случае сводится к прямой.) Функция $\frac{1}{c-t}$ определена при всех $t \neq c$, но решение, по определению, должно быть дифференцируемой функцией, определённой всюду на соответствующем интервале, поэтому формула $x(t) = \frac{1}{c-t}$ — это не одно решение, а два: одно — это данная функция на интервале $(-\infty, c)$, другое — та же функция на (c, ∞).

Кстати, как получены эти решения? Идея такова: если $\frac{dx}{dt} = x^2$, то $\frac{dx}{x^2} = dt$, но $\frac{dx}{x^2} = d\left(-\frac{1}{x}\right)$, а следовательно $d\left(-\frac{1}{x}\right) = dt$; дальше, я надеюсь, ясно. Всё это совершенно строго, но... Всё это делается совершенно строгим при наличии надлежащих разъяснений, определений и соглашений. А как быть, если у читателя имеются какие-то сомнения? (На начальном уровне они должны иметься! Крупные учёные, читавшие курс обыкновенных дифференциальных уравнений на механико-математическом факультете МГУ, не будучи увере-



а) *б*)

Рис. 4

ны, что студенты автоматически всё поймут правильно и не желая тратить драгоценное время на соответствующие разъяснения, излагали это (вернее, имевшее аналогичный, но более общий характер) место иначе и, увы, более громоздко. Что и отражено в их учебниках. «Пусть тот, кто сам без греха, кинет камень», а я не уверен, что если бы сам читал этот курс, то не последовал бы их примеру.) Предлагаю ему смотреть на сказанное как на наводящие соображения, получив же с их помощью предполагаемый ответ, его уже нетрудно проверить.

В том же духе получается, что решения уравнения $\dot{x}=1+x^2$ суть $x(t)=\operatorname{tg}(t+c)$ со всевозможными константами c (рис. 4 *б*) и что все они определены на интервалах конечной длины (какой?).

Такая особенность (решения определены не для всех t), конечно, является качественным свойством соответствующих уравнений, и качественная теория дифференциальных уравнений должна была бы ею заниматься. Но не занимается. При случае, конечно, стараются выяснить, как на сей счёт обстоят дела с той или иной исследуемой системой, но это как-то не принято включать в качественную теорию. Что и отразилось в моих невинных словах, подразумевающих, будто S_t всюду определено. Это не общий факт, а предположение, ограничение на рассматриваемые системы. (По большей части достаточно, чтобы решения были определены при всех $t \geqslant 0$, но это уж слишком тонкая тонкость.)

Надо сказать, что вопрос о том, определено ли решение на бесконечном интервале времени, становится очень важным (и может оказаться очень трудным), когда от обыкновенных дифференциальных уравнений переходят к уравнениям с частными производными. (Там становится важным и замечание о $t \geqslant 0$ — это уже не тонкость, а суть дела.) Имеются статьи и книги на сей счёт. Когда решения определены на ограниченном интервале, говорят о «взрыве» (более мягкий вариант — «раздувание» (blow up)), «коллапсе» (этимологически это вроде бы противоположные вещи?), «режиме с обострениями» (летальными?). Но мы решили быть скромными (в смысле свердловской газеты) и говорить об этом не будем.)

В некоторых разделах качественной теории отображения S_t выступают на первый план, но мы до этого не дойдём. Однако мы можем извлечь из них «словесную» пользу. Часто говорят, а нередко и пишут что-нибудь вроде «точка $x_0 = x(0)$ за время t_1 переходит в $x_1 = x(t_1)$, а та за время t_2 — в $x_2 = x(t_1 + t_2)$)». Посмотрим на эту фразу непредубеждённым взглядом, забыв о том, что мы знаем, и попробуем понять её буквально. Раз обе точки x_1, x_2 во что-то переходят, значит, это движущиеся точки? Обе они являются решениями (16)? А как решение может во что-то переходить? Так что данную фразу надлежит понимать не буквально, а в некоем пиквикском смысле. Между тем небольшое её изменение, сводящееся к своевременному упоминанию об отображениях S_t, приводит к корректной формулировке: «Под действием отображения S_{t_1} точка $x_0 = x(0)$ переходит в $x_1 = x(t_1)$, а та под действием S_{t_2} — в $x_2 = x(t_1 + t_2)$».

С кинематической интерпретацией связан термин *динамическая система*. Название сначала относилось к механической системе, математическое описание изменения состояния которой со временем даётся системой вида (16). Потом так стали говорить и о физических (в широком смысле слова) системах, описываемых аналогичными уравнениями, а затем и вообще о процессе движения в фазовом пространстве G (теперь это стало просто условным названием), описываемом таким же уравнением (заданным в G), безотносительно к тому, связано ли это с какой-нибудь физической системой. Процесс движения — выражение описательного характера, взывающее к наглядности; в точной формулировке (в достаточной для нас степени общности) говорится о семействе отображений $\{S_t\}$ с определёнными свойствами. Ещё одно название, происходящее от гидродинамической аналогии (это, по существу, всё, что от неё остаётся) — *поток*.

В заключение остановимся на содержании дальнейших параграфов. В § 3 приведены простые примеры геометрической трактовки дифференциальных уравнений. Он примыкает к § 2, иллюстрируя сказанное там о качественной теории. Ей посвящены более сложные § 6, 7, 8, в последнем из которых на предельно упрощенном (до самой грани вульгаризации) примере разъясняется суть тех явлений в поведении динамических систем, по поводу которых говорят о «хаосе». Как уже упоминалось, § 5, имеет иной характер — он посвящен интегрированию линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь постоянно используется показательная функция e^x, причем не только для вещественных, но и для комплексных x. Читатель вполне может быть знаком с ней для вещественных x, но мне казалось не лишним заново дать ее определение и установить основные свойства, приняв иную точку зрения[31].

[31] Надо сказать, что показательная функция нужна не только для решения дифференциальных уравнений, но и вообще играет в математике столь же важную роль, что и многочлены (а о последних читателю, несомненно, известно из алгебры).

§ 3. Примеры фазовых портретов

После этих общих разговоров познакомимся с простейшими фазовыми портретами систем физического происхождения.

При $n=1$ фазовый портрет выглядит неинтересно. Это прямая, на которой отмечены точки, являющиеся положениями равновесия (в них, напомню, $f(x)=0$); они разбивают прямую на некоторые интервалы; на последних поставлены стрелки[32], указывающие направление движения при увеличении t.

Так что интересными бывают фазовые портреты для систем второго порядка. Системы (13) и (14), описывающие свободное падение и гармонический осциллятор, как раз являются автономными системами второго порядка. В древности наивно полагали, будто состояние движущегося тела сводится к его положению, что приводило к парадоксу, известному под названием «стрела». Чем отличается летящая стрела от покоящейся, которая занимала бы то же положение, какое в данный момент занимает летящая стрела? Если они находятся в одном и том же состоянии, а никакие внешние факторы на них не действуют, то почему же одна летит, а другая неподвижна? Автор этого парадокса, Зенон (ок. 490—430 до н. э.), приводил его в защиту того мнения, что на самом деле движение — это одна видимость («движенья нет, сказал мудрец брадатый...»). Но со времён Галилея и особенно Ньютона мы понимаем[33], что состояние движущегося тела характеризуется не только его положением, но и скоростью (физик вместо скорости предпочёл бы говорить об импульсе, но нам это всё равно). Переписывая уравнения (2) и (7) в виде систем (13), (14), мы как раз и добавили к переменной x новую переменную y, равную скорости изменения x.

[32] Пожалуй, в одномерном случае самое интересное качественное явление — «взрыв», но он-то и не виден непосредственно на фазовой прямой. Если, скажем, $f(a)=0$ и справа от a всюду $f(x)>0$, то решения с начальными значениями в интервале (a,∞) неограниченно возрастают (почему неограниченно?); на их возрастание указывает стрелка, которая на этом интервале направлена направо; однако на рисунке никак не отражается, уходит ли решение в бесконечность за конечное или бесконечное время.

[33] Некоторые представители средневековой схоластики того времени, когда европейцы уже познакомились (хотя, по-видимому, ещё не полностью) с античными и арабскими достижениями, а творческий дух ещё не покинул тогдашних схоластов, уже приближались к тому же пониманию. Но это, по-видимому, не оказало влияния на развитие науки.

Нарисуем фазовый портрет для гармонического осциллятора[34], т. е. для системы (14). Сперва мы чуть-чуть упростим эту систему, причём начнём упрощение не с неё самой, а с уравнения (7). Сделаем «замену времени», приняв вместо t за независимую переменную «новое время» $\tau = at$, где a — постоянное число, которое мы сейчас подберём. Так как согласно (4)

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a^2\frac{d^2x}{d\tau^2},$$

то уравнение (7), записанное в терминах нового времени, имеет вид $a^2\dfrac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2 x = 0$. Возьмём $a = \omega$ и обозначим новое время τ снова через t; тогда на ω^2 можно сократить, и получится уравнение $\ddot{x} + x = 0$. Соответствующая система в нормальной форме есть

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{18}$$

(Вопрос к читателю: совпадают ли переменные x и y, фигурирующие в (18), с прежними x и y из (14)?) Так как x теперь — это первая координата фазовой точки, то во избежание путаницы саму эту фазовую точку я теперь обозначу не через x (как раньше), а через z. Её координаты суть x и y, т. е. $z = (x, y)$. Вектор фазовой скорости в этой точке $f(z) = (y, -x)$. Как получить вектор $f(z)$ из радиус-вектора z (я, как видно, несколько небрежно позволяю себе считать z то точкой на плоскости, то радиус-вектором этой точки[35])? Оказывается, он получается поворотом радиус-вектора z на 90° по часовой стрелке. Сейчас мы поясним это геометрическое утверждение.

Пусть сперва точка z лежит в первом квадранте[36], где $x, y \geqslant 0$. Обозначим через z' её проекцию на ось x, через w — её образ при отображении f, которое переводит точку (x, y) в $(y, -x)$ (как видно, я вектор фазовой скорости на минуту готов представлять себе как точку, являющуюся концом этого вектора, если отложить его не от z, как говорилось выше, а от O), так что для координат u и v точки w имеем $u = y$, $v = -x$) и через w' — проекцию w на ось y

[34] Фазовый портрет для свободного падения, т. е. для системы (13), менее интересен. При желании читатель легко нарисует его сам, что, как обычно, может быть рекомендовано в порядке тренировки.

[35] Радиус-вектор точки A — это вектор $\overrightarrow{OA}$, проведённый из начала координат O в точку A. Он имеет те же координаты, что и A.

[36] Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, называемые квадрантами. Их принято нумеровать, как показано на рис. 5 (где стрелки на координатных осях указывают принятые на них положительные направления).

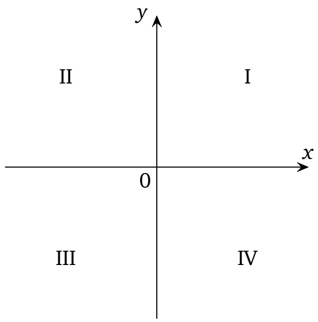


Рис. 5

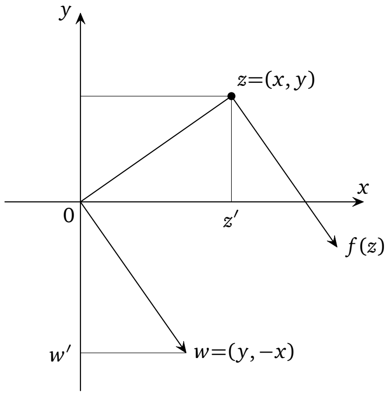


Рис. 6

(эта проекция находится на отрицательной полуоси). (См. рис. 6.) Ясно, что длины $|Oz'|=x$, $|z'z|=y$,

$$|Ow'| = |v| = |-x| = x = |Oz'|,$$

$$|ww'| = |u| = |y| = y = |zz'|.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники $\triangle Oz'z$ и $\triangle Ow'w$ имеют одинаковые катеты, и потому равны. Значит, $\angle z'Oz = \angle w'Ow$ (это углы между гипотенузой и равными катетами). Отсюда следует, что

$$\angle wOz' = 90^\circ - \angle w'Ow = 90^\circ - \angle z'Oz$$

$$\text{и } \angle wOz = \angle wOz' + \angle z'Oz = 90^\circ.$$

Наконец, поворот на 90° от Oz к Ow происходит по часовой стрелке (а не против неё), ибо именно при таком повороте точка попадает из первого квадранта в четвёртый, где лежит точка w (ведь её координаты $u=y\geqslant 0$, $v=-x\leqslant 0$).

К сожалению, частый недостаток геометрических рассуждений, привязанных к рисунку, состоит в том, что рисунок относится к некоторому частному случаю (у нас — к тому случаю, когда z лежит в первом квадранте). При другом расположении тех или иных деталей рисунок получается несколько иным (у нас это будет, когда z лежит в других квадрантах), и приходится начинать с начала.

Читатель может сам провести (всё ради тренировки!) геометрические рассуждения для оставшихся трёх случаев (различающихся тем, в каком квадранте лежит z). Мне же кажется, что в этом месте проще «переключиться» на более алгебраический образ мыслей. Приводимое ниже рассуждение, может быть, выглядит не короче геометрического, но уж точно бóльшую часть места в соответствующем тексте занимает алгебраизированное резюме ситуации, а та часть текста, которая может претендовать на нечто новое сравнительно с предыдущим[37], занимает всего несколько строк.

[37] Если хорошо подготовленный читатель скажет, что такой части нет, я не буду возражать. Я, пожалуй, был бы не прочь подвести и менее подготовленного читателя к такой мысли.

Итак, резюмирую. Наша цель — сравнить отображение f плоскости в себя (переводящее, повторяю, точку (x, y) в $(y, -x)$) с поворотом R плоскости на $90°$ по часовой стрелке. (Буква R призвана напоминать о rotation.) Заметим, что итерации[38] f^2 и R^2 этих отображений (как только что объяснялось в подстрочном примечании, это отображения, получающиеся при повторении f и R ещё один раз), совпадают с центральной симметрией S с центром симметрии в начале координат. S переводит точку (x, y) в $(-x, -y)$, т. е. z в $-z$ (опять рассматриваем z как вектор! «А ну, порося, превратись в карася!») Для R это геометрически очевидно (два поворота подряд на $90°$ — это поворот на $180°$, а он и есть S), для f же видно из той формулы, которая определяет f: $f(f(z)) = f(f(x, y)) = f(y, -x) = (-x, -y)$. Наконец, обозначим первый квадрант через Q. Нам известно, что в точках Q отображения f и R совпадают, а мы хотим доказать, что они совпадают во всех точках плоскости.

Сперва мы докажем, что в точках Q совпадают итерации f^i и R^i с $i = 1, 2, 3, 4$. (Ещё раз напоминаю, что, например, $f^3(z) = f(f(f(z)))$.) При $i = 1$ это нам известно, а при $i = 2, 4$ данные итерации совпадают вообще во всех точках плоскости (ведь $f^2 = R^2 = S$, а тогда и $f^4 = S^2 = R^4$; последнее отображение является тождественным отображением плоскости, т. е. оно оставляет каждую точку на месте). Остаётся $i = 3$. Если z лежит в Q, то

$$f^3(z) = f^2(f(z)) = S(f(z)) = S(R(z)) = R^2(R(z)) = R^3(z)$$

(мы сперва заменили f^2 на S, затем $f(z)$ на $R(z)$ — ведь z лежит в Q, где f и R совпадают, — и, наконец, S на R^2).

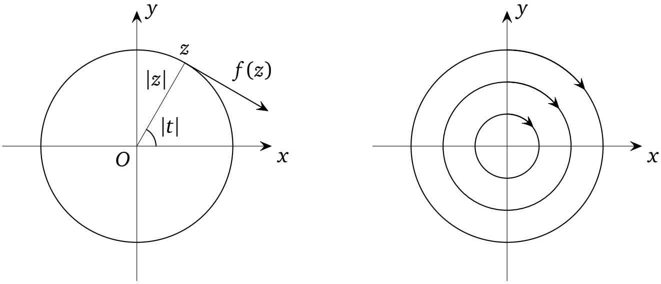
А теперь заметим, что точка z, лежащая во втором, третьем или четвёртом квадранте, является образом некоторой точки z' из Q при отображении f^3, f^2 или f соответственно. Короче, $z = f(z')$, где $i = 3, 2$ или 1. По доказанному, $z = R^i(z')$ с тем же i. А тогда $f(z) = f^{i+1}(z')$, причём $i + 1 = 4, 3$ или 2. По доказанному, $f^{i+1}(z') = R^{i+1}(z') = R(R^i(z')) = R(z)$. Приехали!

Что же это за кривая, касательная к которой в каждой её точке перпендикулярна радиус-вектору этой точки? Такая кривая известна из школьного курса геометрии — это окружность с центром в O. Итак, фазовая траектория точки z — это окружность радиуса $|z|$ с центром в O (рис. 7).

[38] Итерировать отображение — это значит повторить его несколько раз; n-кратная итерация — это

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ раз}}(x))\ldots)).$$

Таким образом, здесь f^n обозначает не n-ю степень, а n-кратную итерацию. Обозначения итераций похожи на обозначения степеней, но сейчас опасность путаницы будет исключена по той причине, что $f(z)$ или $R(z)$ — это точка плоскости; как её возводить в квадрат? Но если бы говорилось об отображениях числовой оси в себя, то $f^2(x)$ могло бы обозначать и $f(f(x))$, и квадрат числа $f(x)$; в подобных случаях приходится специально оговаривать, что имеется в виду; впрочем, это обычно понятно из контекста.



а) *б*)

Рис. 7

Сейчас мы говорили о направлении вектора фазовой скорости $f(z)$; что можно сказать о его длине? Раз он получается из вектора z при каком-то повороте, то длина его та же, т. е. $|f(z)| = |z|$. А длина окружности радиуса $|z|$, по которой движется точка z, равна $2\pi|z|$. Значит, z проходит всю эту окружность за время 2π.

Мы пришли к такому фазовому портрету. В точке O имеется положение равновесия (там вектор фазовой скорости нулевой и точка стоит на месте). Все остальные фазовые траектории — это окружности с центром в O и всевозможных радиусов. Движение происходит по часовой стрелке, а время, за которое z пробегает свою окружность и возвращается в исходное положение (как говорят, период фазовой траектории или период соответствующего решения), равно 2π.

Движущаяся фазовая точка $z(t)$, которая при $t = 0$ находится в положении $z(0) = (A, 0)$ на положительной полуоси, за время $t > 0$ вычерчивает дугу длины tA на окружности радиуса A и потому угол равен t по абсолютной величине. Но надо помнить, что направление по часовой стрелке считается отрицательным, поэтому при обычных соглашениях этот угол равен $-t$. Если же время убывает от 0 до некоторого отрицательного $t < 0$, то точка z движется по окружности в положительном направлении, вычерчивая дугу длины $A|t|$, так что $\angle z(0)Oz(t) = |t| = -t$, т. е. угол равен $-t$ и при положительных, и при отрицательных t. Если бы при этом точка $z(t)$ находилась на окружности единичного радиуса с центром в O, то её координатами[39] были бы $(\cos t, -\sin t)$. А так как $z(t)$ находится на окружности радиуса A с тем же центром, то $z(t) = (A\cos t, -A\sin t)$.

Далее, если начальное положение точки $z(t)$ какое-нибудь другое, то всё равно спустя некоторое время она попадёт в некоторую точ-

[39] Ср. с окончанием § 4.

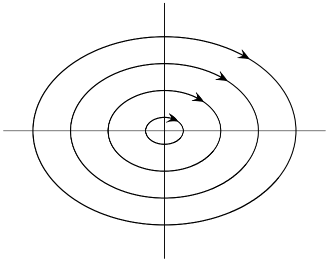


Рис. 8. Фазовый портрет гармонического осциллятора

ку $(A, 0)$ на положительной полуоси. Обозначим это время через $-\alpha$. Ввиду автономности нашей системы, коль скоро $z(t)$ — решение, то и $z_1(t) = z(t-\alpha)$ тоже решение. Но это второе решение удовлетворяет начальному условию $z_1(0) = (A, 0)$ и потому $z_1(t) = (A\cos t, -A\sin t)$. Отсюда для $z(t)$ получается

$$z(t) = (A\cos(t+\alpha), -A\sin(t+\alpha)).$$

Кстати, здесь уместно вспомнить об отображении сдвига по времени S_t: читатель легко сообразит, что оно является поворотом фазовой плоскости вокруг начала координат на угол $|t|$ по часовой стрелке, если $t > 0$, и против неё, если $t < 0$. (К сожалению, во всех остальных наших примерах нельзя столь же просто охарактеризовать S_t.)

Наконец, вернёмся к началу наших рассуждений. Мы начали с уравнения (7), произвели некую замену времени и уже после этого перешли к системе, поэтому при использовании нового времени одна из координат на фазовой плоскости — скорость — отличается множителем (каким?) от прежней скорости. Величина 2π — это период в терминах «нового времени». В терминах же прежнего времени получается $T = \frac{2\pi}{\omega}$. (Проверьте! Вот откуда взялось когда-то удивлявшее меня 2π.) При возвращении к прежним переменным для $z(t)$ получится ответ

$$z(t) = (A\cos(\omega t+\alpha), -A\omega\sin(\omega t+\alpha)),$$

как и утверждалось в (8) и (15), а из окружностей получатся эллипсы (рис. 8), имеющие уравнения

$$y^2 + \omega^2 x^2 = \mathrm{const} \qquad (19)$$

(проверьте!).

Мы припомнили, что у окружности с центром в O во всех точках касательная перпендикулярна радиус-вектору, и так как фазовая траектория должна обладать таким же свойством, то сделали вывод, что она является окружностью. Исходя из этого, мы пришли к выводу, что решения (7) и (14) даются формулами (8) и (15). Но, строго говоря, это не совсем логично. Может быть, имеются и другие кривые, кроме окружности, которые обладают указанным свойством? Если да, то, может быть, с их помощью тоже можно найти какие-то решения рассматриваемых уравнений? Может быть, на самом деле решения вовсе не имеют вида (8) и (15), а получаются с помощью этих гипотетических кривых? А может быть, (8) и (15) — настоящие решения, но существуют и другие решения?

На самом деле никаких других кривых с упомянутым свойством не существует и это нетрудно доказать, слегка продолжив излагаемые ниже рассуждения, но мы так далеко не пойдём, а ограничимся тем, что относится непосредственно к сфере наших интересов — к решениям. Прежде всего, (15) — всё-таки решение (14) (и значит, (8) — решение (7)). Чтобы убедиться в этом, мы «прокручиваем в обратную сторону» прежние рассуждения. По-прежнему заменой времени всё сводится к случаю $\omega = 1$. В этом случае точка $z(t) = (A\cos(t+\alpha), -A\sin(t+\alpha))$ движется (с возрастанием t) по окружности радиуса A по часовой стрелке со скоростью A (радиус и величина скорости получаются из того, что $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$). Значит, вектор её скорости $\dot{z}(t)$ перпендикулярен радиус-вектору, равен ему по длине и направлен по часовой стрелке, т. е. $\dot{z}(t)$ получается из вектора $z(t)$ поворотом на $90°$ по часовой стрелке. А мы выяснили, какой формулой описывается такой поворот. Прибегнув к ней, получим, что $z(t)$ удовлетворяет (14).

Остаётся заметить, что для любого наперёд заданного начального значения (x_0, y_0) найдётся решение вида (15) именно с таким начальным значением. Положив $A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, и заменив (x_0, y_0) на $\left(\frac{x_0}{A}, \frac{y_0}{A}\right)$, сведём данный вопрос к тому случаю, когда (x_0, y_0) — точка единичной окружности, а любая такая точка может быть записана в виде $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$. (Нужны ли подробности? Если да, то восстановите их самостоятельно.) Завершающий штрих — ссылка на единственность решения с заданными начальными значениями.

В § 5 иным способом доказано не только, что (8) суть решения (7), но и что других решений нет.

Говоря о маятнике, мы считали, что его отклонение от полупрямой, направленной из O вертикально вниз, мало. Что получится, если не считать это отклонение малым, а остальные предположения сохранить? Напоминаю, в чём они состояли. Маятник — это материальная точка P на конце невесомого стержня, столь жёсткого, что его длина l не меняется; другой конец стержня находится в точке подвеса O. Стержень может свободно вращаться вокруг O в некоторой вертикальной плоскости, так что P перемещается по окружности C радиуса l с центром в O. Нет ни трения в O, ни сопротивления воздуха. Добавлю ещё, что масса P будет обозначаться через m.

Угол отклонения стержня от направленной вниз вертикали, начинающейся в O, обозначим через φ (раньше он обозначался через x; он по-прежнему измеряется в радианах и может быть как положительным, так и отрицательным.) Мы увидим, что при сделанных предположениях дифференциальное уравнение движения маятника таково[40]:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \quad \text{где } \omega^2 = \frac{g}{l}. \tag{20}$$

(Когда φ мало, то $\sin\varphi \approx \varphi$, и (20) с большой точностью совпадает с (7).) Обычным образом это уравнение можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin\varphi. \end{cases} \tag{21}$$

Скорость точки P направлена по касательной к окружности и по величине равна $l\dot{\varphi}$. (Величина здесь — это не просто длина вектора скорости, но длина, взятая со знаком).

Не повторяя тех соображений, которыми в школьном курсе физики обосновывалось это выражение (если гнаться за полной строгостью, то оно, как и объяснения по поводу ускорения, о котором речь зайдёт чуть ниже, может нуждаться в уточнениях, не затрагивающих существа дела, но затягивающих изложение). Отмечу, что оно получается в два слова, если воспользоваться комплексными обозначениями и простейшими сведениями о показательной функции в комплексной области (см. § 4).

Примем O за начало координат, направим положительную полуось x вертикально вниз и ось y — горизонтально, причём положительное направление на оси y подразумевается согласованным с положительным направлением для отклонений OP от вертикали (последнее определяет положительное направление на касательной к окружности C в её нижней точке $(l, 0)$ и оно должно совпадать с положительным направлением оси y.) Использую единичный вектор (вектор единичной длины) $\mathbf{e}$, касающийся окружности и направленный в стороны возрастания φ, можно сказать, что скорость равна $l\dot{\varphi}\mathbf{e}$. Для ускорения g мы сейчас получим выражение

$$l\ddot{\varphi}\mathbf{e} - \dot{\varphi}^2\overrightarrow{OP}.$$

Если точка вертикальной плоскости качаний маятника имеет координаты (x, y), то будем характеризовать положение этой точки комплексным числом

[40] При изрядном педантизме можно спросить: если существуют производные $\dot{x}, \dot{y}$ и $\ddot{x}, \ddot{y}$ (их существование подразумевается самими понятиями скорости и ускорения, фигурирующими в законах механики), то существуют ли производные $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$? Ответ — да, но я не буду на этом останавливаться. Станем на наивную точку зрения, что у любой «разумной» величины, связанной с движением, существуют все нужные нам производные.

$z = x + iy$. Тогда положение точки P на окружности C характеризуется числом $z = le^{i\varphi}$, её скорость — числом $\dot{z} = i\dot{\varphi}le^{i\varphi} = i\dot{\varphi}z$, а ускорение — числом

$$\ddot{z} = il\ddot{\varphi}e^{i\varphi} - l\dot{\varphi}^2 e^{i\varphi} = i\ddot{\varphi}z - \dot{\varphi}^2 z.$$

Это совпадает с указанной выше формулой для ускорение, поскольку введенной там вектор **e** представляется комплексным числом $ie^{i\varphi}$. Первое слагаемое в полученной формуле для $\ddot{z}$ — это есть вектор длины $l|\dot{\varphi}|$, направленный по касательной к C в точке P в сторону увеличения или уменьшения φ в зависимости от знака $\dot{\varphi}$. Чтобы выразить это совершенно чётко и в то же время не слишком пространно, целесообразно использовать единичный вектор (вектор единичной длины) **e**, касающийся окружности и направленный в сторону возрастания φ. Тогда скорость равна[41] $l\dot{\varphi}\mathbf{e}$. Первое слагаемое здесь — это компонента ускорения, направленная по касательной к C, а второе — компонента, направленная по OP. Вторая компонента нам не понадобится, но раз уж она получена, стоит заметить, что она представляет собой центростремительное ускорение. Знак минус показывает, что его направление противоположно направлению радиус-вектора OP, а $l\dot{\varphi}^2$ — это известная из физики формула для величины центростремительного ускорения. (Почему-то более запоминается формула $ml\dot{\varphi}^2 = \dfrac{m(\text{скорость})^2}{l}$ для величины центробежной силы, направленной противоположно этому ускорению. Последняя сила равна сумме той силы, с которой P действует на стержень, как бы стремясь растянуть его, и направленной по OP компоненты веса точки P.)

С течением времени скорость изменяется и по величине, и по направлению; первое связано с изменением $\dot{\varphi}$, второе — с изменением **e**. Соответственно, ускорение разлагается на две компоненты, направленные по касательной и по прямой[42] OP (рис. 9). Нам нужна только первая компонента, ибо только она «отвечает» за изменение величины скорости $l\dot{\varphi}$, т. е. равна (по величине) производной $\dfrac{dl\dot{\varphi}}{dt} = l\ddot{\varphi}$ (подробнее: данная компонента есть $l\ddot{\varphi}\mathbf{e}$.)

Второй закон Ньютона гласит, что

$$m \cdot \text{ускорение} = \text{сила}. \tag{22}$$

Ускорение и сила суть векторы, так что (22) — векторное равенство. Спроектируем обе его части на касательную к C. О проекции ускорения на касательную уже говорилось — это $l\ddot{\varphi}\mathbf{e}$. Сила, действующая на материальную точку P, — это сумма веса P и реакции связи, т. е. той

[41] В комплексных терминах фигурирующий далее в основном тексте вектор **e** изображается числом $ie^{i\varphi}$.

[42] В более общем случае, когда точка движется не по окружности, а по некоторой кривой, в связи с изменением величины и направления скорости надо было бы рассматривать компоненты ускорения, направленные по касательной и по нормали к кривой.

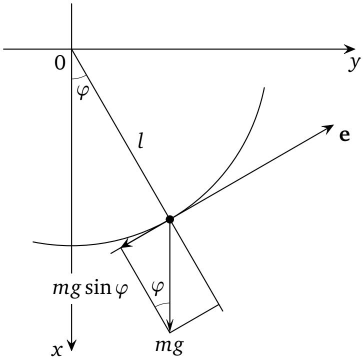


Рис. 9. Силы в маятнике

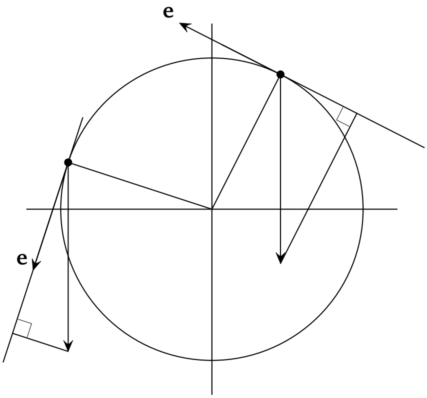


Рис. 10

силы, с которой стержень действует на P. Последняя сила направлена по OP и оттого её проекция на касательную равна нулю. Вес же равен mg и направлен вертикально вниз. Его проекция на касательную равна по абсолютной величине $|mg\sin\varphi|$ (см. рис. 9). А каково направление этой проекции?

Вертикальный диаметр (ось x) делит окружность C на две полуокружности. На одной из них $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (а если учитывать, что φ может принимать значения за пределами отрезка[43] $[-\pi, \pi]$, то $2\pi n \leqslant$

[43] Значений φ на отрезке $[-\pi, \pi]$ (собственно, даже на $(-\pi, \pi]$) достаточно для всех точек C. Но если допускать к рассмотрению только такие значения, то получится, что когда P проходит через верхнюю точку $(-l, 0)$ окружности C, надо изменять φ скачком. Поэтому целесообразно допускать к рассмотрению и другие углы.

$\leqslant \varphi \leqslant 2\pi n + \pi$, где n — целое) и $\sin\varphi \geqslant 0$. Когда P находится на этой полуокружности, проекция веса на касательную направлена противоположно $\mathbf{e}$ (рис. 10). На второй полуокружности $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$ (а если допускать и другие значения φ, то $2\pi n - \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n$, где n — целое) и $\sin\varphi \leqslant 0$. Когда P находится на этой полуокружности, проекция веса на касательную направлена одинаково с $\mathbf{e}$. Получается, что компонента веса в направлении касательной в обоих случаях равна $-mg\sin\varphi$. Итак, проектирование (22) на касательную приводит к равенству $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$, что равносильно (20).

В физике давно известно, что если в физической системе нет ни потерь энергии, ни её поступления извне, то энергия системы остаётся неизменной. Это может показаться чем-то самоочевидным до тривиальности: если что-то не убавляется и не прибавляется, то его остаётся столько же, сколько было. Но откуда можно заранее знать, что в физических системах имеется это «что-то», которое убавляется только тогда, когда оно как-то переходит в другие физические системы? И почему увеличение этого «чего-то» в одной системе в точности равно его убыли в другой? Как найти для него количественное выражение (без чего, кстати, нельзя было бы сравнивать его убыль в одной системе и увеличение в другой системе)?

Энергия может быть механической, электромагнитной, химической, тепловой... Причём одна из них может превращаться в другую. Поэтому о законе сохранения энергии не могло быть и речи, пока не были изучены совершенно различные по своему характеру физические процессы, пока не обнаружилось, что для каждого из них имеется некая существенная характеристика — та величина, которую мы теперь называем энергией с добавлением соответствующего прилагательного. (Причём вначале эти различные виды энергии появились и измерялись независимо друг от друга.) Пока не оказалось, что если измерять эти различные виды энергии некоторой «общей мерой», то получается, что энергия сохраняется при превращениях различных видов энергии друг в друга.

Не случайно закон сохранения энергии был открыт сравнительно поздно — в середине XIX века. До того он и не мог быть сформулирован, а могли быть только натурфилософские высказывания качественного характера вроде известного высказывания М. В. Ломоносова (1711—1765).

В техническом устройстве потери энергии могут быть связаны с самим его назначением, подразумевающим, что оно должно совершать некоторую работу. Другим источником потерь могут быть диссипативные процессы (в механике — сопротивление движению из-за вязкости или трения, в электротехнике — омическое сопротивление прохождению электрического тока)[44]. Наш маятник никакой полезной работы не совершает и диссипативным процессам не подвержен. Это серьёзно упрощает дело.

Для «чисто механических» систем такого типа (я не буду уточнять, какого именно) закон сохранения энергии был (под другим названием) установлен намного раньше, чем общий закон — в нетривиальном частном случае (движение планеты вокруг Солнца) это впервые сделал И. Ньютон (1643—1727) около 1685 г.[45], в довольно общей ситуации — представители семейства Бернулли (Якоб, 1654—1705, и Иоанн, 1667—1748) в начале XVIII века и затем более отчётливо Л. Эйлер (1707—1783) в середине того же века[46].

Тогда это выглядело как некая математическая теорема. Действительно, пусть нам известно, как (какими величинами $(x_1, \ldots, x_n) = x$) характеризуются состояния системы и как характеризуется изменение состояния со временем (что практически означает знание дифференциальных уравнений для $(x_1, \ldots, x_n)$). Механическая энергия E зависит от состояния системы и ни от чего больше, т. е. E есть функция от x: $E = E(x)$. Сохранение энергии означает, что если $x = x(t)$ изменяется согласно соответствующей системе дифференциальных уравнений, то $E(x(t))$ остаётся постоянной. Ньютон установил данный факт для некоторой конкретной системы дифференциальных уравнений и конкретной функции $E(x)$; последующие авторы распространили этот результат на более общую и менее конкретную ситуацию, установив его справедливость для определённого класса дифференциальных уравнений и определённым образом связанной с ним функции $E(x)$.

Обычно в механике энергия является суммой кинетической и потенциальной энергий. Материальная точка, имеющая массу m и движущаяся со скоростью v, имеет кинетическую энергию $mv^2/2$. По-

[44] Вообще, диссипация энергии в физических системах — это переход части энергии упорядоченного процесса (например, механической или электрической энергии) в энергию неупорядоченного процесса — в конечном счёте в тепло.

[45] Примерно тогда же несколько намного более простых примеров рассмотрел Г. Лейбниц (1646—1716). Его заслугой можно считать и то, что он придал сохранению механической энергии бóльшее значение, чем Ньютон, для которого это был просто математический результат, полученный в определённой задаче и позволяющий эту задачу решить.

[46] Ещё более общие результаты о сохранении механической энергии получили позднее Ж. Лагранж (1736—1813) и У. Гамильтон (1805—1865). Но уже после Бернулли и тем более Эйлера стало ясно, что сохранение энергии — это свойство весьма общих механических систем, а не каких-то специальных примеров.

тенциальная энергия в различных случаях различна. В механике она обычно зависит только от расположения частей механической системы, говоря математически — не от всех величин, характеризующих состояние системы, а только от той части их, которая характеризует положение, но не скорость. При свободном падении она равна mgx (произведение веса тела mg на его высоту x). Впрочем, потенциальная энергия бывает определена с точностью до константы, однозначно же определена разность потенциальных энергий для двух состояний системы.

Во многих случаях имеется более или менее общепринятое соглашение, что в таком-то положении потенциальная энергия считается нулевой; например, часто принимают, что она нулевая на нулевой высоте. Выражение mgx для потенциальной энергии написано с учётом этого соглашения, тогда как ни от каких соглашений не зависит утверждение, что mgx — это разность между потенциальной энергией на высоте x и потенциальной энергией на высоте 0. (Когда тело спускается с высоты x на высоту 0, оно теряет потенциальную энергию и за счёт этого может произвести равную этой потере работу, а та равна произведению веса mg на высоту x.) Итак, закон сохранения энергии в данном случае утверждает, что сумма $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx = \frac{my^2}{2} + mgx$ сохраняет постоянное значение, когда $x = x(t)$ есть решение (2) или, что то же самое, $(x(t), y(t))$ есть решение (13). Проверим:

$$\frac{dE}{dt} = my\dot{y} + mg\dot{x} = my(-g) + mgy = 0.$$

Перейдём к маятнику. Раз скорость $v = |l\dot{\varphi}|$, то кинетическая энергия равна $\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2$. Потенциальная энергия, если считать её равной нулю в наинизшей точке $(l, 0)$ окружности C, в точке с координатами (x, y) равна $mgl - mgx = mgl(1 - \cos\varphi)$ (ведь разность высот точек (x, y) и $(l, 0)$ есть $l - x$ — надо иметь в виду, что у нас вертикальной является ось x и что положительная полуось x направлена вниз, высота же — это «настоящая» высота, так что точка (x, y) находится выше $(l, 0)$ на $-x - (-l) = l - x$). Полная энергия маятника

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi). \tag{23}$$

Проверим, что E действительно не меняется, когда φ изменяется согласно (20):

$$\frac{dE}{dt} = ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\dot{\varphi}\sin\varphi = ml\dot{\varphi}(l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi) = 0.$$

При малых φ мы вместо (20) использовали уравнение гармонического осциллятора (7). Переход от первого ко второму был основан на том, что $\sin\varphi \approx \varphi$. Аналогичный переход можно провести и в выражении для E. Представим $1-\cos\varphi$ как $2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ и заменим $\sin\frac{\varphi}{2}$ на $\frac{\varphi}{2}$. Очевидное вычисление приводит к выводу, что

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2} = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\varphi^2).$$

Предоставляю читателю проверить, что когда φ изменяется согласно уравнению (7) (в котором, конечно, надо x заменить на φ), то E действительно не меняется.

Фактически последнее нам известно. Мы знаем, что решения $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (14) движутся по эллипсам (19), т. е. по эллипсам $\dot{\varphi}^2 + \omega^2\varphi^2 = \mathrm{const}$ в терминах переменных $(\varphi, \dot{\varphi})$. Выражение для энергии отличается от сохраняющейся при движении левой части уравнения эллипса (19) только постоянным множителем $\frac{ml^2}{2}$. Раньше такой множитель, конечно, не мог у нас появиться — ведь m вообще не фигурирует в уравнении (14), l же входит туда не отдельно, а только в комбинации $\frac{g}{l} = \omega^2$. При электрических колебаниях в электротехническом колебательном контуре тоже сохраняется величина $\omega^2x^2 + \dot{x}^2$; не удивительно, что эта величина отличается от энергии колебаний E только постоянным множителем (а именно, как устанавливают в физике, $E = \frac{L\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2C}$, что совпадает с $\frac{L}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2)$).

В случае гармонического осциллятора мы смогли нарисовать фазовый портрет, не пользуясь сохранением механической энергии — всё и так было просто. Для маятника (20), колебания которого не предполагаются малыми, мы нарисуем фазовый портрет, пользуясь сохранением механической энергии (23). Скорость $\dot{\varphi}$ я буду теперь обозначать через y (что уже принято в (21)), но угол отклонения маятника от вертикали буду по-прежнему обозначать через φ, дабы обозначение напоминало нам об «угловой природе» этой переменной.

В основном, как мы увидим, всё сводится к тому, чтобы нарисовать линии уровня функции $h(\varphi, y) = \frac{1}{2}y^2 + \omega^2(1-\cos\varphi)$ на плоскости переменных (φ, y) (т.е линии, вдоль которых эта функция постоянна). Заметим, что $h(\varphi, y) = \frac{1}{2}y^2 + u(\varphi)$, где $u(\varphi) = \omega^2(1-\cos\varphi)$. С точностью до постоянного множителя $u(\varphi)$ совпадает с потенциальной энергией маятника, а $h(\varphi, \dot{\varphi})$ с точностью до того же множителя — с его полной энергией (23). Именно, потенциальная энергия равна

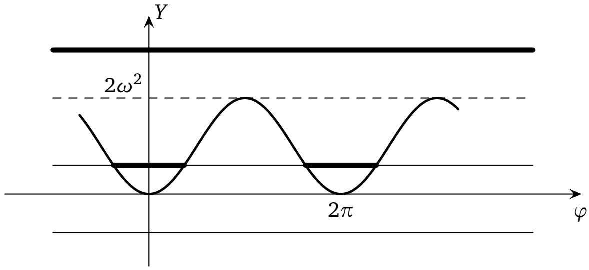


Рис. 11

$mgl(1-\cos\varphi)=ml^2u(\varphi)$, а полная энергия $E=ml^2h(\varphi,\dot\varphi)$ (проверьте).

На рис. 11 изображён график функции $u(\varphi)$. По горизонтальной оси на рисунке отсчитывается величина φ, а величину, отсчитываемую по вертикальной оси, я обозначил через Y, чтобы не путать её с решением y уравнения $h(\varphi,y)=c$. Зафиксируем на минуту c (физически — зададимся полной энергией E). При данном c уравнение $h(\varphi,y)=c$ имеет решение $y=y(\varphi)$, только если $c\geqslant u(\varphi)$, т. е. если прямая $Y=c$ лежит выше точки $(\varphi,u(\varphi))$ графика $Y=u(\varphi)$ функции $u(\varphi)$ (при таких φ у маятника имеется состояние с полной энергией E, т. е. такова его энергия при какой-то скорости y). Сразу видно, что надо различать три случая.

Случай $c<0$. В этом случае прямая $Y=c$ всюду (при всех φ) лежит ниже графика функции $u(\varphi)$, т. е. не существует такого φ, при котором данное уравнение имело бы решение y. Физически это означает, что ни при каком состоянии маятника его энергия не может быть отрицательной.

Случай $0<c<u(\pi)=2\omega^2$. В этом случае прямая $Y=c$ местами лежит выше графика функции $u(\varphi)$, а местами — ниже. Значит, уравнение $h(\varphi,y)=c$ при одних φ разрешимо (при таких φ существует состояние маятника с полной энергией $E=ml^2c$), а при других φ — нет.

Случай $c>2\omega^2$. В этом случае прямая $Y=c$ всюду лежит выше графика функции $u(\varphi)$. Уравнение $h(\varphi,y)=c$ разрешимо при всех φ, т. е. при любом φ у маятника имеется состояние с полной энергией $E=ml^2c$.

Имеются также «переходные» случаи $c=0$ и $c=2\omega^2$.

Остановимся подробнее на характере зависимости функций

$$y(\varphi)=\pm\sqrt{2(c-u(\varphi))}=\pm\sqrt{2(c-\omega^2(1-\cos\varphi))}$$

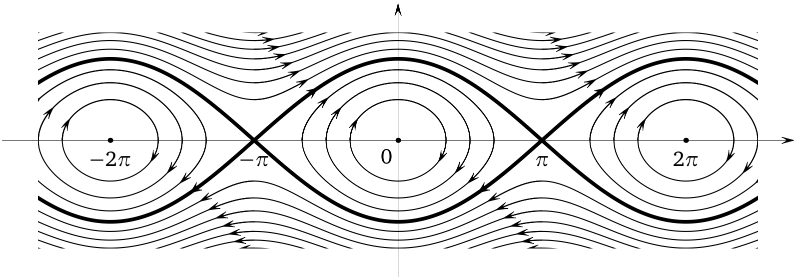


Рис. 12. Фазовый портрет маятника на плоскости

от φ при различных c, т. е. проследим, говоря более геометрически, за видом линий уровня, начав с больших по абсолютной величине отрицательных c и увеличивая c (рис. 12).

При $c<0$ они, как поручик Киже, «вида не имеют», т. е. (как и он) не существуют — подкоренное выражение отрицательно (ибо вычитаемое $1-\cos\varphi \geqslant 0$). При $c=0$ появляются первые игреки: когда $1-\cos\varphi=0$, то подкоренное выражение равно 0 и $y=0$. Это так при $\varphi=2\pi n$ (n — целые), а при остальных φ подкоренное выражение <0 и не существует игреков, удовлетворяющих уравнению $h(\varphi, y)=0$. Точки $(2\pi n, 0)$ являются положениями равновесия (неподвижными точками) — непосредственно видно, что в этих точках правые части системы (21) равны нулю. (Да и как такая точка могла бы сдвинуться с места, если при этом величина $h(\varphi, y)$ должна остаться той же самой, что и в этой точке, т. е. нулём, а между тем рядом с точкой $(2\pi n, 0)$ нет других точек с $h(\varphi, y)=0$?)

При дальнейшем увеличении c множество тех φ, для которых подкоренное выражение неотрицательно, расширяется, но пока $0<c<$ $<2\omega^2$, оно ещё не содержит всех φ. А именно, подкоренное выражение неотрицательно тогда и только тогда, когда $\cos\varphi \geqslant \frac{\omega^2-c}{\omega^2}$, что при наших c больше -1. Если ограничиться на один момент значениями φ из интервала $(-\pi, \pi)$, то там последнему неравенству удовлетворяют те φ, для которых $|\varphi| \leqslant \arccos\frac{\omega^2-c}{\omega^2}$. При таких φ определены (вещественные) функции

$$y=\sqrt{2(c-\omega^2(1-\cos\varphi))}$$

и

$$y=-\sqrt{2(c-\omega^2(1-\cos\varphi))}.$$

Эти функции обращаются в 0 в концах отрезков, где эти функции определены $\left(\varphi = \pm \arccos \dfrac{\omega^2 - c}{\omega^2}\right)$, так что часть линии уровня $h(\varphi, y) = c$, лежащая в полосе $|\varphi| \leqslant \pi$, состоит из двух дуг, которые соединяют концы отрезка $|\varphi| \leqslant \arccos \dfrac{\omega^2 - c}{\omega^2}$, и одна из которых лежит в верхней полуплоскости, а другая лежит в нижней полуплоскости и симметрична первой относительно оси φ. Объединение этих дуг является замкнутой кривой Г, окружающей начало координат O и целиком заключённой в вертикальной полосе $|\varphi| \leqslant \arccos \dfrac{\omega^2 - c}{\omega^2}$. На рис. 12 кривая Г показана жирной линией.

Кривая Г является гладкой (даже аналитической, если читатель знаком с этим понятием). Вместо того чтобы рассматривать поведение составляющих её двух дуг возле их концов (только там вопрос о гладкости заранее не ясен), проще сослаться на общий факт, известный из курса анализа и основанный на теореме о неявных функциях: если $h(x, y)$ — гладкая функция своих аргументов, $h(x_0, y_0) = c$ и в точке (x_0, y_0) так называемый вектор градиента[47]

$$\operatorname{grad} h(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial h(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial h(x_0, y_0)}{\partial y}\right) \neq (0, 0),$$

то достаточно близкая к этой точке часть множества уровня $h(x, y) = c$ является гладкой кривой. Более высокая гладкость h гарантирует и более высокую гладкость этой кривой. А если $\operatorname{grad} h(x, y) \neq 0$ на всём этом множестве, то оно целиком является гладкой кривой (возможно, несвязной, т. е. состоящей из отдельных связных «ветвей»). В нашем случае роль (x, y) играют (φ, y) и $\operatorname{grad} h = (\omega^2 \sin\varphi, y)$. Градиент обращается в нуль только в тех точках, где $\sin\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \pm\pi$, и $y = 0$. Но тогда $\cos\varphi = -1$, а на Г таких точек нет — если $h(\varphi, y) = c$ и $y = 0$, то $\cos\varphi = \dfrac{\omega^2 - c}{\omega^2}$, что по модулю меньше 1, ибо сейчас $0 < c < 2\omega^2$.

Так как $h(\varphi \pm 2\pi, y) = h(\varphi, y)$, то при горизонтальных смещениях, кратных 2π, часть Г кривой $h(\varphi, y) = c$, лежащая в полосе $|\varphi| \leqslant \pi$, переходит в часть той же кривой, лежащую в другой полосе, где $2\pi n - \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n + \pi$. Итак, линия уровня $h(\varphi, y) = c$ распадается в бесконечное число замкнутых кривых, каждая из которых лежит в своей полосе $2\pi n - \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n + \pi$ и окружает там точку $(2\pi n, 0)$. Замкнутые кривые с бóльшими c содержат внутри себя кривые с меньшими c. При увеличении c от 0 до $2\omega^2$ эти кривые сплошь заполняют

[47] Напоминаю, что с помощью символа ∂ вместо d обозначаются частные производные.

в своих полосах области, ограниченные кривыми

$$y = \pm\sqrt{2\omega^2(1+\cos\varphi)} = \pm\sqrt{4\omega^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \pm 2\omega\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| \tag{24}$$

(последние две кривые, отвечающие знакам плюс и минус в (24), образуют линию уровня $h(\varphi, y) = 2\omega^2$).

Замкнутая кривая Γ (на этой кривой $c < 2\omega^2$) и её горизонтальные сдвиги на $2\pi n$ являются траекториями системы (21) — как говорят, *замкнутыми* или *периодическими* траекториями. (Почему замкнутыми, понятно, а периодическими их называют потому, что им соответствуют периодические решения $(\varphi(t), y(t))$ системы (21). Ведь если после одного обхода по замкнутой траектории точка $(\varphi(t), y(t))$, выйдя при $t = 0$ из исходной точки (φ_0, y_0), спустя некоторое время T вернётся в (φ_0, y_0), то после этого решение «пойдёт по своим следам», а говоря более формально, тогда при всех t будет $(\varphi(t+T), y(t+T)) = (\varphi(t), y(t))$ (почему?).) Движение по замкнутым фазовым траекториям системы (21) происходит по часовой стрелке — в верхней полуплоскости φ возрастает и точка движется направо, в нижней φ убывает и точка движется налево.

При $c = 2\omega^2$ линия уровня $h(\varphi, y) = c$, как уже говорилось, состоит из двух кривых (24). Эти кривые проходят через точки $(\pi + 2\pi n, 0)$, являющиеся положениями равновесия (почему?). Последние точки разбивают данную линию уровня на бесконечное число дуг. Одна из этих дуг — та часть графика функции $y = 2\omega\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, где $-\pi < \varphi < \pi$. Эта дуга является траекторией, исходящей из положения равновесия $(-\pi, 0)$ и входящей в положение равновесия $(\pi, 0)$.

Слова «исходящая» и «входящая» не следует понимать буквально: ввиду единственности решения с данным начальным значением, если бы некоторое решение $(\varphi(t), y(t))$ в некоторый момент времени $t = \tau$ действительно вошло бы в положение равновесия $(\pi, 0)$, т. е. если бы было $(\varphi(\tau), y(\tau)) = (\pi, 0)$, то, поскольку у (21) имеется решение, тождественно (при всех t) равное $(\pi, 0)$, решение $(\varphi(t), y(t))$ должно было бы совпадать с этим решением. Иными словами, единственное решение, которое в какой-то момент времени попадает в положение равновесия — это решение, которое постоянно там пребывает. Но решение вполне может стремиться к положению равновесия при $t \to \infty$ (тогда и говорят, что решение «входит» в это положение равновесия) или при $t \to -\infty$ (тогда говорят, что решение оттуда «выходит»).

Данное замечание совершенно аналогично тому, которое выше было сделано по поводу рис. 3.

При сдвигах данной траектории в горизонтальном направлении получаются траектории, «соединяющие» соответствующие положения равновесия. При отражении этих траекторий в оси φ получаются снова траектории, которые «соединяют» те же положения равновесия, что и отражаемые дуги, но в обратном порядке (например, из нашей исходной траектории получается траектория, «исходящая» из $(\pi, 0)$ и «входящая» в $(-\pi, 0)$).

Наконец, когда $c > 2\omega^2$, линия уровня $h(\varphi, y) = c$ распадается на две кривые $y = \pm\sqrt{2(c - \omega^2(1 - \cos\varphi))}$. Одна их них расположена выше оси φ (причём «строго выше» — на оси y неё нет точек), другая — ниже. Каждая из этих линий является траекторией. Направление движения — в верхней полуплоскости направо, в нижней налево.

Положения равновесия $(2\pi n, 0)$ и $(2\pi n + \pi, 0)$ имеют качественные отличия друг от друга. Разумеется, сами они как отдельные точки ничем не различаются, а различным является поведение траекторий возле этих положений равновесия. Некоторая окрестность любого из положений равновесия $(2\pi n, 0)$ сплошь заполнена замкнутыми траекториями, окружающими это положение равновесия. Качественно картина похожа на фазовый портрет для гармонического осциллятора, только замкнутые траектории теперь не являются окружностями. Такое положение равновесия называется *центром*. В некоторой окрестности любого из положений равновесия $(2\pi n + \pi, 0)$ траектории (точнее, попавшие в эту окрестность дуги траекторий) образуют семейство кривых, похожее на семейство гипербол $xy = \text{const}$. Такое положение равновесия называется *седлом*.

Траектории, получающиеся при $0 < c < 2\omega^2$, описывают колебательные движения маятника. При них угол $\varphi(t)$ изменяется периодически, оставаясь заключённым в определённых пределах. (И, скажем, при этих движениях маятник никогда не становится вертикально вверх.) Траектории, получающиеся при $c > 2\omega^2$, описывают вращательные движения маятника. При них угол $\varphi(t)$ либо возрастает «от $-\infty$ до ∞», либо убывает «от ∞ до $-\infty$». (В частности, при этих движениях маятник бесконечное число раз становится вертикально вверх.) Области фазовой плоскости, соответствующие этим качественно различным типам движений, разделяются траекториями, лежащими на кривых (24). Мы видели, что эти траектории (не считая сёдел) суть траектории, стремящиеся в ту или иную сторону по времени к сёдлам. В связи с тем, что такие траектории делят фазовую плоскость на области с различным поведением траекторий, их называют *сепаратрисами* (ср. с английским словом to separate, имеющим то же латинское происхождение).

На первый взгляд положения равновесия типа седла являются чем-то исключительным. Физически ясно, что в нашем случае сёдла описывают маятник, застывший в положении «вертикально вверх». Хотя это и положение равновесия, оно неустойчиво — при малейшем «сотрясении» маятник начнёт падать. Математически неустойчивость седла проявляется в том, что подавляющее большинство решений, которые в начальный момент времени близки к седлу, со временем от него уходят (причём так происходит в обе стороны по времени). Но сёдла играют, так сказать, «диспетчерскую» роль — из них выходят и к ним стремятся сепаратрисы, которые, повторяю, делят фазовую плоскость на области с различным поведением траекторий.

Уже говорилось, что малые колебания маятника напоминают колебания гармонического осциллятора (ибо $\sin\varphi \approx \varphi$). В частности, нетрудно доказать, что когда «размах» колебаний стремится к нулю, период $T \to \dfrac{2\pi}{\omega}$. С другой стороны, когда c, возрастая, приближается к $2\omega^2$, соответствующая замкнутая траектории всё ближе подходит к седлу, а там скорость движения делается всё меньше и меньше (в самом седле она равна нулю). Отсюда легко вывести, что участок, близкий к седлу, будет проходиться всё медленнее и медленнее, из-за чего период T стремится к бесконечности[48]. По той же причине при вращательном движении, отвечающем $c > 2\omega^2$, один оборот совершается очень медленно, когда c близко к $2\omega^2$, тогда как понятно, что при большом c маятник вертится быстро. Возникает предположение, что когда c возрастает, оставаясь меньше $2\omega^2$, период тоже возрастает, и что при всех $c > 2\omega^2$ время одного оборота, напротив, убывает с увеличением c. Это предположение справедливо, но доказательство не самоочевидно.

Мы описали траектории — не только качественно описали, но и явно указали уравнения для этих кривых. Уравнения содержат только косинус и простейшие алгебраические действия. А как количественно описать процесс движения по этим траекториям? Нельзя ли получить явную формулу для решений? Оказывается, можно, но для этого нужны некоторые специальные функции, так что здесь мы переходим к тому направлению в теории дифференциальных уравнений, которое выше было названо направлением 1. Специальные функции, используемые в данной задаче — это так называемые эллиптические функции. Они принадлежат к числу наиболее изученных специальных функций. С их помощью получаются столь же явные формулы

[48] Контрольный вопрос: почему же у траекторий, близких к центру, где скорость движения тоже мала, период не стремится к ∞?

для решений, как формулы (8),(15) для решений дифференциального уравнения (7) и системы (14).

До сих пор мы считали, что переменная φ может быть любым вещественным числом. Но ведь её значениям φ и $\varphi + 2\pi n$ соответствует одно и то же положение маятника. Из-за этого в фазовой плоскости (φ, y) у нас бесконечное число раз повторяется та картина, которая имеет место в полосе $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ (повторение происходит при изменении координаты φ на целочисленное кратное $2\pi n$ числа 2π).

Чтобы избавиться от этого излишества, вырежем из плоскости вертикальную полосу, где $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и «склеим» её левый край, т. е. прямую $\varphi = -\pi$, с правым краем, т. е. с прямой $\varphi = \pi$, соединяя каждую точку $(-\pi, y)$ с точкой (π, y). Получится цилиндр, точки которого уже взаимно однозначно изображают состояния маятника: скорость по-прежнему характеризуется вещественным числом, но положение маятника — точкой окружности, получающейся при соединении друг с другом концов отрезка $[-\pi, \pi]$. (Раньше говорилось, что если бы для характеризации положений маятника мы решили использовать только такие числа φ, которые взаимно однозначно соответствуют его положениям, — например, только числа φ из $(-\pi, \pi]$, — то нажили бы себе неприятностей из-за того, что, как уже говорилось, функция $\varphi(t)$, описывающая непрерывное вращение маятника вокруг O, была бы разрывной. Склеив друг с другом концы отрезка $[-\pi, \pi]$, мы избавились от этих разрывов.)

Таким образом, настоящее фазовое пространство маятника, точки которого изображают его состояния и каждое состояние изображается ровно одной точкой — не фазовая плоскость, а фазовый цилиндр.

Конечно, точки окружности — не числа, обращаться с ними несколько менее удобно. Но они не так уж далеки от чисел, если смотреть на эту окружность не как на обычную геометрическую окружность на плоскости, а как на так называемую факторгруппу $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ по подгруппе $2\pi\mathbb{Z}$ (состоящей из умноженных на 2π целых чисел)[49]. Мы как бы отождествляем друг с другом любые два числа, отличающиеся на целое кратное числа 2π; говоря более формально, в качестве элементов $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ мы берём классы чисел вида $\{x + 2\pi n; n$ — всевозможные целые$\}$[50].

[49] $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ — это более или менее стандартные обозначения множеств всех вещественных и целых чисел соответственно, причём подразумевается, что эти множества наделены обычными алгебраическими операциями и понятиями «больше, меньше» (имеющаяся тем самым в $\mathbb{R}$ «структура» достаточно богата, чтобы можно было говорить о непрерывности и пределах, а значит и вообще обо всём, что входит в обычный курс математического анализа).

[50] Тривиальное упражнение для читателя, содержащегося на теоретико-множественной диете: покажите, что отношение «$x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x - y$ — целое

Сокращённо такой класс обозначается через $x+2\pi\mathbb{Z}$. Я назвал множество $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ факторгруппой; это значит, что для его элементов можно определить сложение, приняв, что суммой классов $\{x+2\pi\mathbb{Z}\}$ и $\{y+2\pi\mathbb{Z}\}$ является $\{x+y+2\pi\mathbb{Z}\}$, и что это сложение обладает определёнными свойствами, на которых нам незачем останавливаться.

Упражнение: проверьте, что тот же результат получится, если все числа из первого класса сложить со всеми числами из второго класса. Отсюда, кстати, видно, что наше определение суммы корректно, т. е. не зависит от выбора представителей x и y складываемых классов — если мы те же складываемые классы запишем в виде $\{x'+2\pi\mathbb{Z}\}$ и $\{y'+2\pi\mathbb{Z}\}$ с какими-то другими x' и y', то наше правило предпишет считать суммой класс $\{x'+y'+2\pi\mathbb{Z}\}$, а это тот же самый класс, что и $\{x+y+2\pi\mathbb{Z}\}$. Если же вы знакомы с понятием коммутативной группы, то, видимо, без всяких разъяснений понимаете, что по отношению к только что введённому сложению $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ как раз и является таковой. А если без разъяснений не понимаете, то найдите их сами.

В отличие от $\mathbb{Z}$, в $2\pi\mathbb{Z}$ у нас нет умножения (оно выводит за пределы $2\pi\mathbb{Z}$), но сложение и вычитание есть. Читатель, имеющий самые первоначальные сведения о группах, сразу поймёт, что по отношению к сложению $\mathbb{R}$ является группой, $2\pi\mathbb{Z}$ — её подгруппой, а окружность можно отождествить с факторгруппой $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Тот же, кто таких сведений не имеет, найдёт некоторые пояснения дальше.

Если настаивать на такой алгебраической точке зрения, то надо было бы ещё обсудить, как перенести на $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ понятия типа непрерывности, предела и т. п. Это можно сделать всё в тех же абстрактных терминах, но проще всё-таки не совсем забывать о геометрической окружности. На ней обо всём этом можно говорить без особых разъяснений, а между точками геометрической окружности C единичного радиуса с центром в O и элементами $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ имеется взаимно однозначное соответствие, которое позволяет всё, что относится к одному из этих объектов, сразу же относить ко второму.

Повторяю: это соответствие состоит в том, что классу $\{x+2\pi n\}$ сопоставляется точка окружности, имеющая «угловой координатой» φ числа из этого класса. Кстати, § 4 доставляет простую формулу для этого соответствия: это просто отображение $p\colon \mathbb{R}\to C$, переводящее число x в e^{ix} (точки C понимаются как комплексные числа). Данное отображение как раз и переводит весь класс $\{x+2\pi n\}$ в одну и ту же точку единичной окружности, а разные классы — в разные точки. Наглядно это выглядит так: прямая $\mathbb{R}$ «навивается» на окружность C, как нитка на катушку, см. рис. 13.

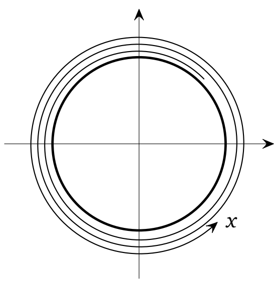


Рис. 13

число, умноженное на 2π», является отношением эквивалентности, и что наши классы суть классы эквивалентности по этому отношению.

На рис. 14 показано, как выглядит фазовый портрет маятника на фазовом цилиндре (который изображён слегка наклонённым к читателю). К сожалению, рисовать на цилиндре, даже когда мы имеем дело с настоящим цилиндром, склеенным из бумаги, не так удобно, как на плоскости. А когда мы пытаемся изобразить на плоскости, как выглядит нечто, нарисованное на цилиндре, то это ещё менее удобно. Поэтому в подобных случаях обычно рисунок делают на плоскости, но подразумевают, что имеется в виду рисунок на цилиндре, который получается, если вырезать соответствующую полосу и отождествить друг с другом её концы, или который в понятном смысле «накрывается» рисунком на плоскости, когда эта плоскость понятным образом «наматывается» на цилиндр.

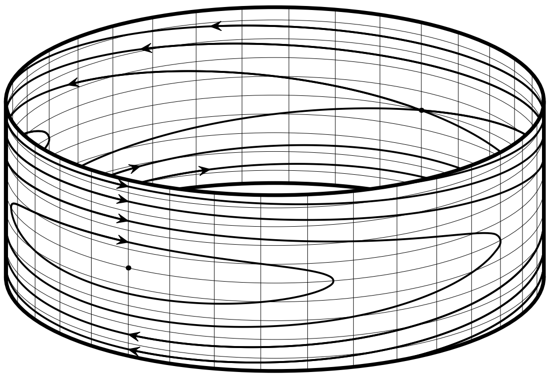


Рис. 14. Фазовый портрет маятника на цилиндре

Стоит отметить, что при переходе к фазовому цилиндру вращательные движения стали периодическими. Но эти периодические движения качественно отличны от тех, которые описывают колебания маятника. Замкнутая кривая, отвечающая вращательному движению, охватывает ось цилиндра и не может быть стянута в точку путём непрерывной деформации на самой поверхности цилиндра, тогда как замкнутую кривую, отвечающую колебательному движению, можно стянуть в точку. Так что сепаратрисы (теперь их стало всего две) по-прежнему отделяют друг от друга траектории с качественно различным поведением.

Данный пример приведён с целью показать, что хотя мы и говорили о фазовом пространстве как об области в евклидовом пространстве, иногда нужно обращаться к другим геометрическим фигурам, например, к поверхностям. (Нужное здесь общее n-мерное понятие — n-мерное гладкое многообразие.) Но сделав это отступление с примером неевклидова фазового пространства, в § 6, § 7 мы будем иметь дело только с привычной фазовой плоскостью.

Далее мы обсудим два других усложнения дифференциального уравнения (7). Силу, возвращающую систему из отклонённого положения, характеризуемого координатой x, будем считать пропорциональной x, как и для гармонического осциллятора, но учтём сперва диссипацию (рассеяние) энергии, т. е. влияние сопротивления движению (вязкость воздуха, трение, омическое сопротивление), из-за которого другие виды энергии (механическая, электрическая...) превращаются в тепло, а затем в § 6 добавим к этому ещё «подкачку» энергии в систему из какого-то внешнего источника (её сочетание с диссипативными процессами приводит к результатам, интересным и полезным для техники, да, вероятно, и для жизни[51]).

Простейший вид потерь энергии[52] — вязкое трение, пропорциональное скорости $\dot{x}$, или омическое сопротивление, на котором происходит падение напряжения, пропорциональное силе тока $\dot{x}$. Сила трения направлена противоположно скорости, а направление падения напряжения противоположно направлению тока, так что математическим выражением для силы трения или падения напряжения в обоих случаях служит $-k_1\dot{x}$ с некоторым положительным коэффициентом k_1. Это приводит к уравнению движения вида

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2x=0 \tag{25}$$

с прежним ω и некоторым положительным k. Как и раньше, с помощью подходящей замены времени обращаем ω в 1 (k при этом тоже изменится, но мы будем по-прежнему писать k)

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x-ky. \end{cases} \tag{26}$$

Вектор фазовой скорости системы (26) $f(x, y)$ получается из вектора фазовой скорости гармонического осциллятора (18) $g(x, y)=$

[51] Ван дер Поль, уравнением «имени которого» мы займёмся, предложил модель работы сердца, которая сложнее этого уравнения, но в которую в чисто математическом отношении, по существу, встроен тот же механизм.

[52] Под потерей энергии подразумевается, что «полезная» (для человека) энергия упорядоченного движения превращается в тепло — в энергию беспорядочного движения атомов и молекул (а также в тепловое излучение). За исключением нагревательных приборов, такое превращение противоречит интересам человека и оттого квалифицируется им как потеря энергии.

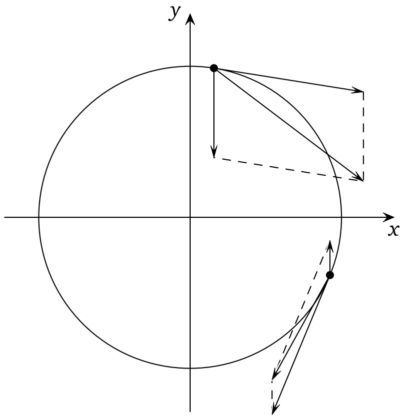


Рис. 15

$= (y, -x)$ добавлением вектора $(0, -ky)$ (рис. 15). Вектор $g(x, y)$, как мы видели, направлен по касательной к окружности с центром в O, а «добавка» направлена вертикально, причём на верхней полуокружности она направлена вниз, а на нижней — вверх. И там, и тут получается, что всюду вне точек оси иксов направление вектора $g(x, y)$ изменилось таким образом, что новый вектор $f(x, y)$ уже не перпендикулярен радиус-вектору (x, y), а образует с ним тупой угол, так что $f(x, y)$ направлен внутрь указанной окружности. (Вероятно, это станет яснее, если отметить, что вектор $f(x, y)$ образует острый угол с вектором, направленным по радиусу из точки (x, y) в O.) Это значит, что траектория системы (26) всюду приближается к началу координат. Можно показать (мы пока этого делать не будем, но в § 5 это станет достаточно ясным), что при не слишком большом трении (при $k < 2$, а в терминах исходного уравнения (25) — при $k < 2\omega$) решения приближаются к O по спирали, делая бесконечное число оборотов вокруг O (рис. 16 *а*). Положение равновесия O называют в этом случае *устойчивым фокусом*). (Если бы при той же форме траекторий решения не стремились к O, а, наоборот, «выходили из O», т. е. если бы они стремились к O при $t \to -\infty$, то O называлось бы *неустойчивым фокусом*.)

Если же трение слишком велико, то «сил на вращение вокруг O уже не хватает» и траектории расположены на кривых, проходящих через точку O и имеющих в ней касательные (рис. 16 *б*, *в*). (Но, как уже говорилось по другому поводу, траектории не входят в O в буквальном смысле слова! Каждая из кривых, изображённых на рис. 16 *б* и 16 *в*, состоит из двух траекторий, стремящихся к O, и ещё из третьей траектории — самой точки O.)

При $k > 2$ (а в терминах исходного уравнения (25) — при $k > 2\omega$) семейство траекторий напоминает семейство парабол $v = cu^2$ с различными c на плоскости с координатами (u, v), только вместо квадрата в уравнении, описывающем траектории, могут стоять другие степени (рис. 16 *в*). (Я не буду уточнять, какое отношение эти u и v имеют к исходным x и y.)

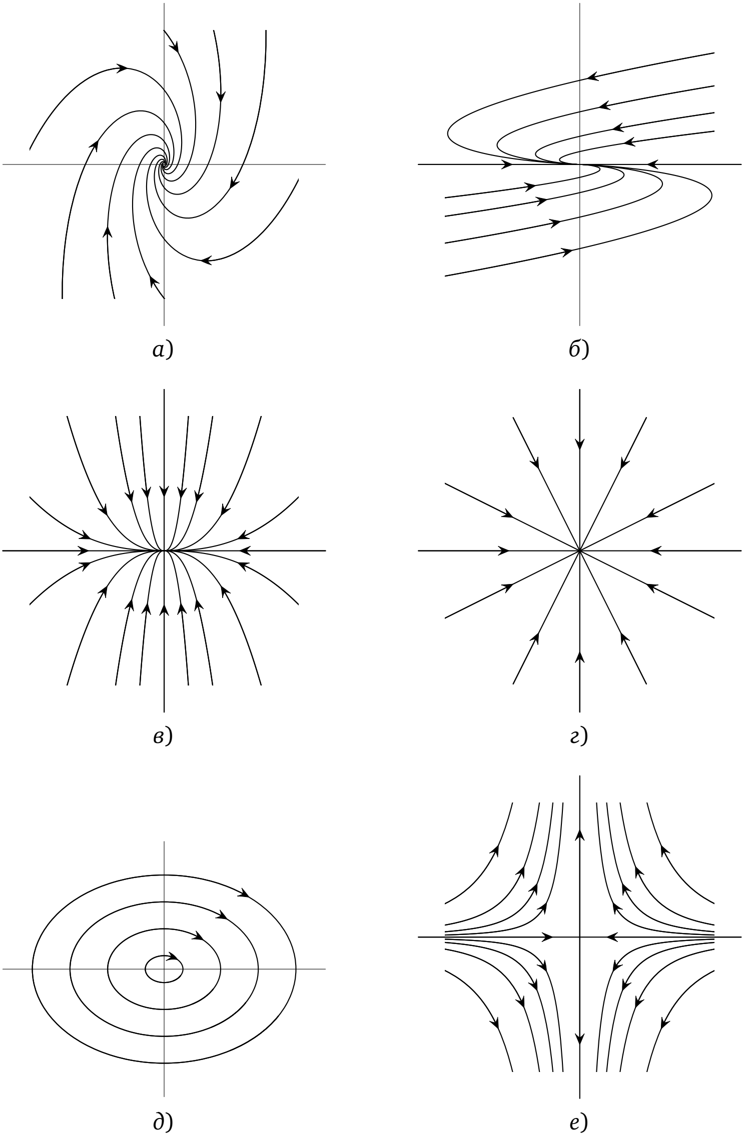


Рис. 16. Фазовые портреты линейных систем: а) фокус; б) вырожденный узел; в) узел; г) дикритический узел; д) центр; е) седло

В исключительном случае, когда $k = 2$ (а в терминах исходного уравнения (25) — когда $k=2\omega$), траектории выглядят несколько иначе — они лежат на кривых семейства $v = u\ln|u| + cu$, к которому надо добавить ещё ось u (рис. 16 *б*; я опять не буду уточнять расположение осей u, v). Положение равновесия с таким расположением траекторий, как на рис. 16 *б* или 16 *в*, называют *узлом*, причём имеется ещё третий тип узла (рис. 16 *г*), когда траектории выглядят как семейство прямых $v = cu$ плюс ещё ось v. Такой узел — это совсем уж исключительный случай, для (26) он вообще не реализуется, а реализуется для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ \dot{y} = ay \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

Общим для всех типов узлов является то, что все траектории лежат на кривых, которые проходят через O и имеют в ней касательные. Если, как у нас, решения с ростом t стремятся к O, то узел называют *устойчивым*, а если они, наоборот, «выходят» из O (не буду повторять, как сие надлежит понимать), то узел называют *неустойчивым*.

На рис. 12 (фазовый портрет для математического маятника без трения) имеются положения равновесия двух типов — центры и сёдла. Среди положений равновесия линейной системы (26), соответствующей линейному обыкновенному дифференциальному уравнению[53] (25), седло не было упомянуто (тогда как центр возникает при $k = 0$). Оказывается, оно встречается в системе, соответствующей линейному дифференциальному уравнению $\ddot{x} + k\dot{x} - lx = 0$ при $l > 0$ (которое отличается от (25) знаком при x), причём независимо от знака k. Фазовый портрет седла для линейной системы представлен на рис. 16 *е*).

Мы познакомились с несколькими типами положений равновесия — центром, фокусом, седлом и узлом. Оказывается, этим исчерпываются все возможности для изолированного положения равновесия $O = (0, 0)$ линейной системы второго порядка (буквально «линейность» означает, что вектор фазовой скорости $f(x, y)$ линейно зависит от (x, y), но в данном случае обычно молчаливо подразумевается, что эта зависимость не только линейная, но и однородная, т. е. $f(0, 0) = 0$; иными словами, речь идёт о системе вида

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \tag{27}$$

[53] Напомню, что при переходе от (25) к (26) мы избавились от ω^2 с помощью замены времени, так что (26) непосредственно соответствует уравнению $\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$.

где a, b, c, d — постоянные коэффициенты). Выше сказано, что положение равновесия подразумевается изолированным. В общем (нелинейном) случае об изолированности говорят, когда в некотором круге с центром в O нет других положений равновесия, но в данном случае (для линейной системы) изолированность равносильна тому, что $f(x, y) = 0$ (т. е. $ax + by = cx + dy = 0$) только тогда, когда $x = y = 0$. Впрочем, при желании нетрудно было бы ради полноты перебрать все возможные типы фазового портрета также и для неизолированных положений равновесия линейных систем, но нам это не понадобится, равно как не понадобится и формулировка условия изолированности[54] положения равновесия O в терминах коэффициентов a, b, c, d.

Имеется существенное различие между центром, с одной стороны, и тремя остальными типами изолированных положений равновесия системы (27) — с другой. Мы видели, что при добавлении в уравнение гармонического осциллятора (7) сколь угодно малого слагаемого $k\dot{x}$ центр превращается в фокус. Аналогично можно показать, что если у системы (27) в начале координат находится центр, то при сколь угодно малом изменении коэффициентов a, b, c, d этой системы начало координат может стать фокусом (который может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, как именно изменились коэффициенты). Если же у этой системы в начале координат находится узел, фокус или седло, то при достаточно малом изменении коэффициентов характер положения равновесия не изменится, т. е. оно так и останется узлом (хотя один тип узла может перейти в другой), фокусом или седлом.

Далее, нечто аналогичное наблюдается и тогда, когда мы пытаемся судить о поведении траекторий нелинейной системы

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (\text{короче, } \dot{z} = f(z)) \tag{28}$$

возле её положения равновесия $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$. Если положить $x = x_1 - a_1$, $y = x_2 - a_2$, то для x, y получается система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(a_1 + x, a_2 + y) = ax + by + \left(\begin{matrix}\text{члены высших}\\ \text{порядков малости}\end{matrix}\right), \\ \dot{y} &= f_2(a_1 + x, a_2 + y) = cx + dy + \left(\begin{matrix}\text{члены высших}\\ \text{порядков малости}\end{matrix}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

[54] Студенту должно быть сразу ясно, что оно гласит: $ad - bc \neq 0$.

(малость означает малость при малых x, y). Здесь

$$a = \frac{\partial f_1(a_1, a_2)}{\partial x_1}, \qquad b = \frac{\partial f_1(a_1, a_2)}{\partial x_2},$$
$$c = \frac{\partial f_2(a_1, a_2)}{\partial x_1}, \qquad d = \frac{\partial f_2(a_1, a_2)}{\partial x_2}.$$

(В этой записи подразумевается, что частные производные $\dfrac{\partial f_i(x_1, x_2)}{\partial x_j}$ вычисляются в точке $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$.)

Возникает желание сравнить поведение её траекторий возле положения равновесия (a_1, a_2) с поведением траекторий системы (27) с указанными выше коэффициентами a, b, c, d (говорят, что эта линейная система является линейным приближением к (28) возле (a_1, a_2) или что она получается при линеаризации системы (28) в точке (a_1, a_2); как видно, при линеаризации мы попросту откидываем нелинейные члены высшего порядка в (29)).

Оказывается, если линеаризованная система (27) имеет узел, фокус или седло, то поведение траекторий нелинейной системы (28) с правой частью вида (29) возле положения равновесия (a_1, a_2) аналогично поведению траекторий линеаризованной системы (27) возле начала координат. Так, в случае седла у (28) по-прежнему имеются две траектории, которые стремятся к положению равновесия при $t \to -\infty$ (т. е. к нему стремятся решения с начальными значениями на этих траекториях) — о них несколько вольно говорят, что они «выходят» из этого положения равновесия. Возле (a_1, a_2) эти траектории (т. е. некоторые их отрицательные полутраектории) вместе с точкой (a_1, a_2) образуют некоторую гладкую кривую. Далее, имеются две траектории, которые стремятся к (a_1, a_2) при $t \to \infty$ (что уточняется аналогичным образом). Между этими «входящими в положение равновесия» и «выходящими из него» траекториями возле (a_1, a_2) находятся четыре сектора, заполненные траекториями (точнее, дугами таковых), которые ведут себя аналогично гиперболам: решения $(x_1(t), x_2(t))$ сперва приближаются к положению равновесия, затем удаляются от него и со временем отходят настолько, что нелинейные члены в (29) уже не будут малыми для $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$. По сравнению с седлом для линейной системы (27) положение равновесия (a_1, a_2) системы (29) (не само оно как точка, а «кусочек» фазового портрета возле него) может выглядеть как бы несколько «помятым», но в качественном отношении это несущественно.

Читатель сам без труда сообразит, какие особенности поведения траекторий я имею в виду, говоря, что если начало координат — фокус или узел для системы (27), то при добавлении нелинейных членов эти особенности сохраняются. В этих случаях положение равновесия (a_1, a_2) системы (29) тоже называют седлом, фокусом или узлом.

Если же положением равновесия для (27) является центр, то сходства между поведением траекторий исходной нелинейной системы (28) и линеаризованной системы (27) может и не быть. Мы говорили об изменении фазового портрета системы (14), соответствующей гармоническому осциллятору (7), при добавлении к вектору фазовой скорости вектора $(0, -ky)$ (что соответствует добавлению слагаемого $k\dot{x}$ в левую часть (7). Но ведь то же самое произойдёт возле начала координат и при добавлении вектора $(0, -ky^3)$, имеющего в точности то же самое направление! Вместо окружностей траекториями станут спирали, приближающиеся к началу координат при $k > 0$ и удаляющиеся от него при $k < 0$, т. е. картина будет такой же, как для фокуса (в связи с чем в данном случае тоже говорят, что положение равновесия нелинейной системы является фокусом).

Можно показать, что приближение решений к началу координат при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$ будет происходить медленнее, чем это происходит в случае фокуса для линейной системы[55], но нужно очень тщательно выполнить рисунок (и пристально его разглядывать), чтобы это различие стало заметным.

Ввиду отмеченного различия между седлом, фокусом и узлом (когда они проявляются в линейном приближении!), с одной стороны, и центром — с другой, первые три типа положений равновесия стоит объединить под каким-то общим названием. С 1960-х гг. установилось название «гиперболическое положение равновесия», которое может удивить: ясно, что седло уместно назвать гиперболическим, но что гиперболического в фокусе или узле? Ровно столько же, сколько элементов в пустом множестве и зерновых культур в «поле», будь то поле в алгебре или физике. В подобных случаях ничего иного не остаётся, как просто запомнить название, отрешившись от тех ассоциаций, которые раньше были с ним связаны.

Но поскольку фокус и узел стали «гиперболическими» на моих глазах, то я знаю, как и почему это произошло (тогда как происхождение названий вроде полей, колец и групп мне неизвестно). Появились новые объекты — гиперболические множества (некоторое понятие о которых даётся в конце § 7 и в § 8), безусловно заслуживающие название гиперболических, и оказалось, что в ряде формулировок старые добрые положения равновесия типа узла и фокуса фигурируют наравне с этими новоявленными гиперболическими

[55] Соответствующее заклинание гласит: для неё скорость приближения экспоненциальная, а в нашем случае — степенная.

объектами и с привычными сёдлами. Вот и решили для сокращения формулировок считать узлы и фокусы тоже гиперболическими. Ещё раз: их, как и сёдла, называют гиперболическими только тогда, когда их природа проявляется уже в линейном приближении, т. е. когда соответствующая линеаризованная система имеет узел, фокус или седло. «Нелинейный фокус», который может существовать в системе (29) в том случае, когда у соответствующей системы линейного приближения (27) имеется центр, гиперболическим не называется.

Замечание для студентов: гиперболичны те положения равновесия, для которых собственные значения матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ линеаризованной системы лежат вне мнимой оси.

Качественное и количественное исследование поведения решений возле положений равновесия (не обязательно гиперболических, причём для систем как второго, так и бо́льшего порядка), а также исследование поведения решений возле замкнутых траекторий (на чём мы пока не останавливались и чего едва коснёмся в дальнейшем), составляет обширную и важную (как в теоретическом, так и в прикладном отношении) часть теории обыкновенных[56] дифференциальных уравнений. Эту часть называют локальной теорией.

[56] И не только обыкновенных: на моих глазах возникло нечто аналогичное в теории уравнений с частными производными.

§ 4. Показательная функция

Этот и следующий параграфы отчасти являются отступлениями от нашей «основной линии»: в них нет речи о геометрической или кинематической интерпретации дифференциальных уравнений (за исключением самого конца § 5, который, в свою очередь, является отступлением от основной темы этого параграфа) и вообще почти нет геометрических соображений; вместо этого в § 4 мы займёмся показательной функцией e^x (экспонентой), а в § 5 приведём пример её использования в теории дифференциальных уравнений. При желании эти два параграфа можно пропустить. Но, с другой стороны, роль экспоненты в этой теории настолько велика, что было бы странно говорить о дифференциальных уравнениях, совсем не упоминая о e^x. Тем более, что и вообще в математике и в её приложениях экспонента играет столь же важную роль, что и всем известные многочлены.

Если с многочленами худо ли, хорошо ли учащийся знакомится ещё в школе на протяжении нескольких лет, то знакомство с экспонентой является намного менее основательным. Это до некоторой степени неизбежно — само определение экспоненты, не говоря уже об исследовании её свойств, требует использования понятия предела, а его невозможно ввести до последних классов. А важнейшее свойство экспоненты, на котором основано большинство её применений, касается её производной. Интуитивно производная, может быть, проще предела, потому что, как уже подчёркивалось, производная — это попросту мгновенная скорость (о которой что-то знает всякий, видевший спидометр автомобиля), но при аккуратном определении этого понятия и при обсуждении его свойств приходится привлекать пределы. Из-за этого знакомство с экспонентой тоже приходится на самый конец обучения в школе, даже если это специализированная физматшкола. А может быть, окончательное знакомство читателя с ней состоялось, только когда он стал студентом.

Но помимо этих неизбежных причин, из-за которых экспонента «появляется на сцене» довольно поздно, есть и другая причина, замедляющая ознакомление с нею. Оно обычно происходит в порядке, более или менее соответствующем истории. Традиционно показательная функция a^x вводится в несколько шагов (при этом определяется также степенная функция x^a, о чём нет необходимости говорить особо).

1) Степень a^n с натуральным (т. е. положительным целым) показателем n определяется как

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

2) Степень a^n с отрицательными целыми n определяется как $a^n = \frac{1}{a^{|n|}}$. Принимается также, что $a^0 = 1$. В 1) и 2) число a вполне могло бы быть отрицательным (во втором пункте исключается только $a = 0$), но далее приходится ограничиваться положительными a.

3) Доказывается существование положительного корня n-й степени (n — произвольное натуральное числа) $\sqrt[n]{a}$, после чего вводится a^r для рационального r.

4) С помощью предельного перехода от рациональных чисел к иррациональным определяется a^x с произвольным вещественным x.

На каждом шаге надо проверять, что при произведенном расширении понятия степени по-прежнему сохраняются основные правила $a^{x+y} = a^x a^y$ и $a^{xy} = (a^x)^y$.

5) Проверяется непрерывность и дифференцируемость x^a и a^x как функций от x (в первой из них $x > 0$, во второй $a > 0$).

6) Доказывается существование предела $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а также, возможно, и то, что $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

7) Доказывается, как говорят в вузах, «замечательный предел»

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{30}$$

8) После этого уже сравнительно быстро получается, что $\frac{de^x}{dx} = e^x$, $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln x$, где $\ln$ — натуральный логарифм, и $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$.

Всё это читатель осваивал постепенно, отнюдь не в один год, а закончил, может быть, уже в вузе. Очень возможно, что на самом деле кое-где при этом полных доказательств не приводилось — для целей всеобщего образования порой неизбежно приходится кое-что тактично обходить, но применительно к образованию будущего специалиста, который будет иметь дело с математикой, а тем более собирающегося заниматься этой наукой, тактичные умолчания или бодрые внушения, что всё ясно, тогда как в действительности нечто было пропущено, смахивают на то, что в старину называлось благочестивым обманом.

Если ради того, чтобы в сознании читателя понемногу поступавшие к нему сведения об экспоненте сложились в единую картину, заново изложить всё вместе с начала до конца, то сколько же времени на это понадобится? Вероятно, придерживаясь более высокого, чем в школе, университетского темпа и предоставляя слушателям самим проделать очевидные (действительно очевидные, без обмана!) выкладки или рассуждения, можно уложиться в три-четыре лекции, но не меньше. (Да и то, какого напряжения и какой самостоятельной работы это потребовало бы от слушателей?) Поистине, в математике нет царских дорог.

Царских нет, но скоростные хайвеи есть! Я хочу рассказать об одном таком хайвее.

Ньютон как-то сказал, что если он видел дальше других, то это потому, что он стоял на плечах гигантов[57]. Учитывая это высказывание, мы тоже вскарабкаемся на плечи одного из титанов прошлого — Леонарда Эйлера.

Эйлер (1707—1783) был едва ли не самым крупным математиком XVIII века. Некоторую конкуренцию ему может составить только более молодой Ж. Лагранж (1736—1813, итальянец по происхождению, работавший в Турине, Берлине и Париже), заслуги которого очень высоко оценивал сам Эйлер. Мне всё же кажется, что если сравнивать все достижения того и другого, Эйлеру, пожалуй, можно оказать некоторое предпочтение. Даже если признать уровень их исследования примерно одинаковым (по-моему, так оно и есть), надо учесть ещё и то, что научные интересы Эйлера были несколько шире. Во всяком случае, оба они были первыми в своих поколениях. И в то же время они различались по стилю своих работ. Эйлер с увлечением занимался специальными конкретными задачами, а Лагранж в бо́льшей степени стремился разрабатывать общие методы. Это, конечно, не означает, будто Лагранж не решал конкретных задач, но он предпочитал решать их на базе общих методов (часто им же и развитых), тогда как Эйлер чаще придумывал свой отдельный приём для очередной задачи (хотя, конечно, в его наследии тоже имеется немало общих соображений).

Эйлер был родом из Швейцарии, а работал в Петербургской (в 1727—1741 гг. и с 1766 г.) и в Берлинской Академии наук (в 1741—1766 гг.), причём и во время работы в Берлине он сохранял тесные связи с Петербургской АН. Незадолго до смерти Эйлер сказал, что на публикацию подготовленных им, но ещё не напечатанных статей уйдёт 20 лет. Редкий случай: Эйлер ошибся в 3 раза — понадобилось 60 лет! Это только для публикации законченных

[57] Впрочем, неизвестно, было ли это сочетанием известной скромности с подчёркиванием преемственности науки или это был намёк на то, что к числу тех, кому Ньютон обязан, не принадлежал Гук (1635—1703), отношения которого с Ньютоном почти всегда были натянутыми. Гук был весьма сутулым и потому не годился в гиганты. (Тем не менее Ньютон кое-чем обязан Гуку — во время «светлого промежутка», когда их отношения временно улучшились, переписка с Гуком стимулировала работу Ньютона о движении планет, что, как-никак, привело к созданию эпохального шедевра — «Математических начал натуральной философии».)

статей. А публикация всего его архива продолжалась свыше 200 лет и ещё не вполне закончена.

И Эйлер, и Лагранж внесли вклад не только в математику, но и в математическую физику, прежде всего — в механику и астрономию, а Эйлер также и в геометрическую оптику. Студент, изучавший механику на достаточно высоком уровне, знает, что после Лагранжа она приобрела другой вид. Менее известно, что та механика, которую столь значительно усовершенствовал Лагранж, — это была механика, физические основы которой заложил Ньютон, но математическую форму которой придал Эйлер.

Не только студенты-математики, но и школьники соприкасаются с наследием Эйлера, чаще всего не подозревая об этом, потому что Эйлер написал ряд учебников различного уровня, в которых изложение многих тем приобрело практически окончательный вид. В более сложных из них заметная часть материала основана на собственных исследованиях Эйлера. На первых двух курсах университета мы по сей день во многом следуем по проложенному им пути. На более элементарном уровне Эйлером была придана современная форма тригонометрии, и он был также автором предназначенного для школы учебника алгебры. Несмотря на своё предназначение, последний оказался слишком трудным для школы (где Эйлер не преподавал; должно быть, он наивно судил об учащихся по самому себе), но на основе его подхода рядом авторов были написаны успешно использовавшиеся учебники. Эйлером был предложен ряд обозначений, ставших общепринятыми, в том числе e, π и i.

Следуя Эйлеру, я сразу определю некоторую функцию, которая окажется функцией e^x. Но вначале отнюдь не будет ясно, какое отношение новая функция имеет к каким бы то ни было показателям (даже при натуральных x), поэтому вначале я обозначу её через $e(x)$. (Однако я всё же позволю себе с самого начала называть эту функцию экспонентой, хотя по своему происхождению это слово — сокращение от ‘экспоненциальная функция’, что является синонимом ‘показательной функции’.)

Если сразу привести определение $e(x)$, «взятое с потолка», то это будет выглядеть каким-то непонятным фокусом, вроде как в цирке. Я начну с предварительных соображений эвристического характера. Они ничего не доказывают, но кое-что подсказывают.

Одно из главных и особенно ценных для нас свойств функции e^x состоит в том, что она дифференцируема и $\frac{de^x}{dx} = e^x$. (Это свойство экспоненты тесно связано с другим важнейшим её свойством: $e^x e^y = e^{x+y}$ — одно из этих свойств легко вывести из другого; в одну сторону мы со временем это проделаем.) Отсюда, конечно, следует, что и все производные старших порядков $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$. В частности, при $x = 0$ все они равны 1. Вот мы и постараемся построить такую функцию $e(x)$, у которой все производные в точке $x=0$ равны 1. Конечно, таких функций много — Эйлер сказал бы, что, рисуя график подобного рода функции, мы можем произвольно изменить его в стороне от точки с абсциссой (x-координатой) 0. Но мы возьмём самую простую, самую естественную из них — авось повезёт и она окажется нужной нам $e(x)$.

Начнём с многочленов, которые, конечно, не годятся в $e(x)$, но могут (если повезёт) доставить для $e(x)$ некое приближённое выражение. Правила дифференцирования многочленов носят, по существу, алгебраический характер, и их вывод отнюдь не предполагает знакомства с функциями вроде x^a. Я считаю известным, что $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$. Отсюда следует, что

$$\frac{d^k x^n}{dx^k}=\begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}, & \text{когда } k\leqslant n,\\ 0, & \text{когда } k>n.\end{cases}$$

В частности, у одночлена $\frac{x^n}{n!}$ (здесь $n!$, как обычно, обозначает «n факториал», т. е. произведение всех натуральных чисел от 1 до n) в точке $x=0$ все производные, кроме n-й, равны нулю, а n-я производная равна 1. А у многочлена[58]

$$e_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

в точке $x=0$ производные (включая его нулевую производную, т. е. его самого) таковы:

$$e_n(0)=\frac{d}{dx}e_n(0)=\ldots=\frac{d^n}{dx^n}e_n(0)=1,\ \text{прочие производные равны } 0.$$

От $e(x)$ мы хотим, чтобы у неё все производные в точке $x=0$ равнялись 1. Пожалуй, $e_n(x)$ может служить приближённым выражением для нашей гипотетической $e(x)$. И можно надеяться, что чем больше n, тем точнее многочлен $e_n(x)$ приближает $e(x)$. Почему бы нам не попробовать определить $e(x)$ как[59]

$$e(x)=\lim_{n\to\infty}e_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}? \tag{31}$$

[58] Обозначение вида $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ используется как сокращение для $a_0+a_1+\ldots+a_n$.

[59] «Бесконечная сумма» $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ (пишут также $a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots$) — это, по определению, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$. Выражение $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ называется (бесконечным) рядом. Если указанный предел существует, то его называют суммой этого ряда и говорят, что ряд сходится к этой сумме.

Упражнение. Докажите, что при всех n

$$e'_n(x) = e_{n-1}(x). \tag{32}$$

Можно надеяться, что, переходя к пределу при $n \to \infty$, из этого удастся вывести основное свойство функции $e(x)$: $e'(x) = e(x)$.

Со времён Ньютона известен следующий способ интегрирования дифференциальных уравнений. Правая часть уравнения должна быть аналитической функцией своих аргументов (это условие практически не является серьёзным ограничением — в приложениях оно почти всегда выполнено). Решение ищется в виде степенного ряда от независимой переменной с неопределёнными коэффициентами. Подстановка этого ряда в уравнение вместе с использованием предписанных начальных условий позволяет определять эти коэффициенты один за другим. На первый взгляд может показаться, что это универсальный способ и ничего лучшего не надо, однако на самом деле он не всегда оказывается лучшим (чаще не оказывается) и потому практически используется в довольно ограниченной области[60]. Уже Ньютон, исследуя движения планет, дал блестящие примеры использования совсем других соображений.

Но для уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$ данный метод прекрасно работает. (А мы как раз и подозреваем, что функция $e(t)$ — будущая e^t — должна быть решением этого уравнения с этим начальным условием[61].) Ищем x в виде $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Известно, что у сходящегося степенного ряда существует производная и что она выражается аналогично производной многочлена: $\dot{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$ (член с $n = 0$ мы не пишем, ибо он входит с нулевым множителем). (Как это ни просто и ни естественно, это надо доказывать! Я, кстати, не уточнил, при каких t существует производная!) Имеем $x(0) = a_0$, поэтому $a_0 = 1$, а из $\dot{x} - x = 0$ получается, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_n)t^n = 0$. Известно (но опять-таки нуждается в доказательстве), что степенной ряд тождественно равен нулю только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Значит, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ при всех $n \geqslant 0$. Поскольку $a_0 = 1$, то далее получается

$$a_1 = \frac{a_0}{1} = 1, \quad a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1/2}{2+1} = \frac{1}{6}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{n!}, \quad \ldots$$

(проверьте!). Вот мы и пришли к ряду (31).

[60] Специальные функции, упоминаемые в части § 2, помеченной как 1), часто вводят в соответствии с этим способом. С другой стороны, он в принципе мог бы использоваться для численного решения дифференциальных уравнений, но здесь он уступает способам, общая схема которых описана в 2) из § 2, хотя иногда и играет некоторую вспомогательную роль.

[61] Так что здесь мы встречаемся с простейшим примером использования данного метода для определения некоторой специальной функции.

Если знать кучу разных фактов из матанализа и теории дифференциальных уравнений, то сказанное является строгим доказательством того, что уравнение $\dot{x}=x$ имеет ровно одно решение $x(t)$ с начальным значением $x(0)=1$ и что это решение при всех t представляется рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$. Но в этой книжке не предполагается, что читатель всё это знает. Поэтому у нас предыдущие соображения играют только эвристическую (наводящую) роль, а теперь начнётся настоящая работа.

Вот мы и вырулили на хайвей им. Эйлера — Эйлер как раз и предложил определять экспоненту именно таким способом. (С какой целью он это сделал, будет сказано позднее.)

Надо ясно понимать, что предыдущие соображения с многочленами не гарантируют ни сходимости ряда (31), ни того, что он сходится именно к e^x (предполагая, что мы всё-таки знакомы с этой функцией). Всё, что они могут дать — это что[62] $e^x-e_n(x)=o(x^n)$, т. е. что

$$\frac{e^x-e_n(x)}{x^n}\to 0 \text{ при } x\to 0.$$

Иными словами, для любого $\varepsilon>0$ имеется такое $\delta_n>0$, что при $|x|<\delta_n$ выполнено равенство $|e^x-e_n(x)|<\varepsilon|x^n|$. Но заранее не исключено, что чем больше n, тем меньшим надо брать δ_n (для некоторых функций так оно и есть). Тогда невозможно было бы сказать что-либо определённое о ряде (31). Однако предыдущие соображения — это не более чем наводящие соображения. Мы их используем только в том отношении, что они обратили наше внимание на этот ряд. А теперь займёмся им самим по себе, независимо от этих соображений.

В первую очередь нам надо доказать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ сходится (при всех x). Доказательство получается применением следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть имеются такие два ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$, *что при всех* n $|b_n|\leqslant a_n$ (*чем сказано также, что числа* a_n — *вещественные неотрицательные*); *тогда говорят, что первый ряд мажорирует второй* (*а второй — мажорируется первым*). *Если при этом первый ряд сходится, то и второй тоже сходится, причём абсолютно*[63].

[62] Я не буду этого доказывать, так как не буду и использовать. Пояснение для студентов, чтобы всё уложилось по полочкам: речь идёт об оценке остаточного члена в формуле Тейлора, а именно, об оценке в форме Пеано.

[63] Ряд $\sum b_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum|b_n|$.

Заметим, что условие $|b_n| \leqslant a_n$ при всех n, можно чуть ослабить: $|b_n| \leqslant a_n$ при всех достаточно больших n (т. е. при всех n, бóльших некоторого N).

Упражнение. Используя эту теорему, докажите сходимость ряда (31), сравнивая его слагаемые $x^n/n!$ со слагаемыми заведомо сходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C}{2^n}$ для подходящего C. (Почему он сходится?)

Замечание. Фактически при этом доказывается не только сходимость ряда (31), но и его абсолютная сходимость; это значит, что сходится ряд, члены которого суть абсолютные величины членов ряда (31). Абсолютная сходимость в ряде отношений лучше обычной, но я не буду этим пользоваться, чтобы сохранить независимость от университетского курса. Отмечу для особо продвинутых студентов, что абсолютная сходимость эквивалентна другому свойству, которое было введено в группе Бурбаки под названием «суммируемости ряда»[64] и которым иногда удобнее пользоваться.

Нужная нам теорема, в свою очередь, является простым следствием известного *критерия Коши*[65] *сходимости последовательности*:

Последовательность $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое натуральное число* N*, что для всех номеров* $m, n > N$ *будет* $|x_m - x_n| < \varepsilon$. (Говоря описательно, члены последовательности с достаточно большими номерами сколь угодно близки друг к другу.)

Заметим, что последовательность, удовлетворяющая указанному в этом критерии условию, называют *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*.

Упражнение. Выведите сформулированную выше теорему, дающую достаточное условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ из критерия Коши.

Указание. Сравните $\left|\sum\limits_{n=0}^{m} b_n - \sum\limits_{n=0}^{l} b_n\right|$ с аналогичной разностью для первого ряда.

---

[64] Этот термин имеет и иной смысл.

[65] О. Коши (1789—1857) — французский математик, одним из достижений которого было *наведение порядка* в математическом анализе. (Несмотря на замечательные успехи в этой области, до Коши в самых её основах оставались существенные пробелы.) Только по этому поводу он и упоминается в обычном курсе матанализа. В действительности деятельность Коши была многогранной, охватывая не только бóльшую часть математики, но и математическую физику (где всего важнее то, что он заложил основы теории упругости). Что же касается основной темы настоящей книжки, то Коши сформулировал и доказал первую общую теорему существования и единственности решения системы (11) (или уравнения n-го порядка) с заданными начальными значениями.

Несколько слов о доказательстве критерия Коши.

Упражнение. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной, иными словами, что условие Коши необходимо для сходимости.

Доказательство его достаточности намного сложнее. И это связано с существом дела. Формулируя критерий Коши, мы молчаливо подразумевали, что речь идёт о сходимости последовательности вещественных чисел к вещественному числу. Если бы мы, например, пожелали говорить о сходимости последовательности рациональных чисел к рациональному пределу (сходимость в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$), то теорема Коши была бы неверна (ведь последовательность рациональных чисел вполне может сходиться к иррациональному пределу; такая последовательность заведомо является последовательностью Коши (почему?), однако в $\mathbb{Q}$ она не сходится). Поэтому при доказательстве достаточности условия Коши для сходимости последовательности в множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ мы должны использовать какое-то существенное отличие $\mathbb{R}$ от $\mathbb{Q}$. Это отличие — так называемая *полнота* $\mathbb{R}$. Ей можно дать несколько равносильных формулировок. Одна из них — как раз сам критерий Коши. Но вначале учащийся, скорее всего, встретился с какой-то другой формулировкой (что может зависеть от того, как при его обучении вводились действительные числа).

Множество $\mathbb{Q}$, по сравнению с $\mathbb{R}$, как бы имеет «дыры», расположенные там, где в $\mathbb{R}$ находятся иррациональные числа. Один из вариантов определения полноты довольно наглядным образом утверждает, что в $\mathbb{R}$ «дыр» нет:

Пусть имеется убывающая последовательность отрезков (*замкнутых интервалов*)

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots, \quad \text{где } I_n = [a_n, b_n],$$

длины которых $b_n - a_n$ стремятся к нулю. Тогда существует число α, общее для всех этих отрезков, и притом ровно одно.

Упражнение. Справедливо ли аналогичное утверждение для открытых интервалов $I_n = (a_n, b_n)$?

Упражнение. Опираясь на полноту $\mathbb{R}$ в только что сформулированном смысле, докажите достаточность условия Коши для сходимости последовательности.

Если в процессе своей учёбы читатель познакомится с другим определением полноты $\mathbb{R}$, то ему стоит попробовать установить равносильность этого определения тому, которое было дано выше.

Мы видим, что $e(x)$ — это корректно определённая функция. Следующие её свойства очевидны: $e(0) = 1$, $e(x) > 0$ при $x > 0$, $|e(x)| \leqslant e(|x|)$. Почти столь же очевидно, что при $x > 0$ эта функция возрастает:

$$y > x > 0 \;\Rightarrow\; e(y) > e(x).$$

Действительно,

$$e(y)-e(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(y^n-x^n).$$

Все слагаемые в правой части положительны, так что ясно, что соответствующий ряд больше 0.

А важнейшее свойство, которое заранее не очевидно, состоит в том, что при всех x, y

$$e(x)e(y)=e(x+y). \tag{33}$$

Доказательство (это, так сказать, дорожное покрытие на части эйлеровского хайвея), возможно, является новым. Во всяком случае, я его не встречал в литературе, хотя нельзя поручиться, что за 150 лет его никто не придумал[66]. (Впрочем, непосредственно будет доказываться выглядящая внешне иначе теорема 2.) После этого прочие нужные свойства $e(x)$ получаются уже просто.

Нам понадобится одна простая лемма из той части «фундамента матанализа», которая связана с производной, — лемма 3. Основная работа по её доказательству перенесена в предшествующие ей две леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках отрезка $[a,b]$ и всюду $\varphi'(x)\geqslant 0$. Тогда $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)$.*

Лемма 2. *Та же формулировка с заменой условия «всюду $\varphi'(x)\geqslant 0$» более сильным условием «всюду $\varphi'(x)>0$».*

Лемма 2 ⇒ лемма 1: рассмотрим $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x)+\varepsilon x$ с $\varepsilon>0$. Для неё выполняются условия леммы 2, и если последняя верна, то $\varphi_\varepsilon(b)\geqslant\varphi_\varepsilon(a)$, т. е.

$$\varphi(b)-\varphi(a)\geqslant\varepsilon(a-b).$$

За ε здесь можно принять любое положительное число. Но если бы оказалось, что $\varphi(b)<\varphi(a)$, то при достаточно малых положительных ε число $\varepsilon(a-b)$ было бы больше отрицательного числа $\varphi(b)-\varphi(a)$.

Доказательство леммы 2. Допустим, что $\varphi(b)<0$, $\varphi(a)>0$ (функцию $\varphi(x)$ мы можем рассматривать с точностью до константы). Тогда

[66] Со времён Эйлера прошло ещё больше времени, но задумываться о безукоризненно строгом изложении соответствующего вопроса могли начать только позднее, когда вообще была проведена большая работа по укреплению фундамента матанализа и его перестройке на этом фундаменте. Раньше довольствовались несколько беззаботным перемножением рядов для $e(x)$ и $e(y)$ с перегруппировкой полученных слагаемых. Это можно проделать совершенно строго (чем вполне могли довольствоваться при перестройке), но мне кажется, что для школьника или студента младших курсов такое доказательство тяжеловато.

существовала бы такая последовательность отрезков[67]

$$I_0 = [a_0, b_0] = [a, b] \supset I_1 = [a_1, b_1] \supset I_2 = [a_2, b_2] \supset \ldots \quad ,$$

что длина I_n равна $(b_n - a_n)/2^n$ (т. е. при $n \geqslant 1$ эта длина равна половине длины I_{n-1}), $\varphi(a_n) \geqslant 0$, $\varphi(b_n) < 0$. Действительно, пусть I_i с $i \leqslant n-1$ уже построены. Если $\varphi\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) < 0$, положим $a_n = a_{n-1}$, $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, в противном случае положим $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$.

Отрезки I_n имеют единственную общую точку c. Сколь угодно близко к ней имеются точки a_n (с большими n), где $\varphi \geqslant 0$, и точки b_n, где $\varphi < 0$; значит, $\varphi(c) = 0$. Так как $\varphi'(c) > 0$, то имеется такое $\delta > 0$, что $\varphi(x) > \varphi(c) \geqslant 0$ для всех $x \in (c, c+\delta)$. А между тем точки b_n с достаточно большими n попадут в $(c, c+\delta)$. $\square$

Лемма 3. *Пусть функция* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *дифференцируема во всех точках отрезка* $[a, b]$ *и всюду* $|f'(x)| \leqslant M$. *Тогда*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a).$$

Наглядный смысл этой леммы очень прост: если скорость изменения f по абсолютной величине всё время не превосходит M, то за время от a до b функция f может измениться не более чем на

$$M \times \text{величина этого отрезка времени.}$$

Формальное же доказательство получается применением леммы 1 к функциям $Mx - f(x)$ и $Mx + f(x)$.

Теорема 2. *Если* $a+b+c=0$, *то* $e(a)e(b)e(c)=1$.

Доказательство. Продифференцируем по x функцию

$$f(x) = e_n(ax)e_n(bx)e_n(cx).$$

Нам нужна производная этой функции на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, но пока речь идёт о существовании этой производной и формуле для неё, x может быть любым, ибо $e_n(x)$ является многочленом от x. $f'(x)$ — это сумма трёх слагаемых, получающихся, когда дифференцируют один из сомножителей $e_n(ax), e_n(bx), e_n(cx)$. Заметим, что $\frac{d}{dx}e_n(x) = e_{n-1}(x)$ и $e_{n-1}(x) = e_n(x) - \frac{1}{n!}x^n$, поэтому

$$\frac{d}{dx}e_n(ax) = ae_{n-1}(ax) = ae_n(ax) - a\frac{(ax)^n}{n!}$$

[67] Как видно, ради единообразия a и b обозначены через a_0 и b_0.

и аналогично для производных от $e_n(bx), e_n(cx)$. Всего в выражении для $f'(x)$ будет шесть слагаемых, при этом три из них будут произведениями $e_n(ax)e_n(bx)e_n(cx)$ на a, b и c. Но $a+b+c=0$, так что слагаемые с тремя e_n пропадут. Останется

$$-a\,\frac{(ax)^n}{n!}\,e_n(bx)e_n(cx)-b\,\frac{(bx)^n}{n!}\,e_n(ax)e_n(cx)-c\,\frac{(cx)^n}{n!}\,e_n(ax)e_n(bx).$$

Обозначим $m=\max(|a|,|b|,|c|)$. Тогда при $0\leqslant x\leqslant 1$ (вот теперь уже существенно, какие x мы рассматриваем) каждое слагаемое не превосходит по модулю $m\dfrac{(mx)^n}{n!}e^2(m)$. Действительно, $|ax|$, $|bx|$, $|cx|\leqslant m$ и

$$|e_n(ax)|\leqslant e(|ax|)\leqslant e(m),$$

аналогично и $e_n(bx)\leqslant e(m)$, $e_n(cx)\leqslant e(m)$. В каждом из наших трёх слагаемых имеются два множителя вида $e_n(ax), e_n(bx), e_n(cx)$, и произведение этих двух множителей оценивается сверху числом $e^2(m)$. Для степенных же множителей

$$a\frac{(ax)^n}{n!},\quad b\frac{(bx)^n}{n!},\quad \frac{(cx)^n}{n!}$$

очевидно, что все они по модулю не превосходят $m\dfrac{(mx)^n}{n!}$. Так как $(mx)^n\leqslant m^n$, то окончательно приходим к оценке

$$|f'(x)|\leqslant 3e^2(m)\frac{m^{n+1}}{n!}.$$

Поэтому мы находимся в условиях леммы 3 с $M=3e^2(m)\cdot\dfrac{m^{n+1}}{n!}$. Значит,

$$|f(1)-f(0)|\leqslant 3e^2(m)\frac{m^{n+1}}{n!}.$$

Вспоминая определение f, приходим к выводу, что

$$|e_n(a)e_n(b)e_n(c)-1|\leqslant 3e^2(m)\frac{m^{n+1}}{n!}.$$

При $n\to\infty$ левая часть стремится к $|e(a)e(b)e(c)-1|$, а правая — к нулю (с точностью до не зависящего от n множителя $3me^2(m)$, правая часть совпадает со слагаемым $\dfrac{m^n}{n!}$, фигурирующим в ряде для $e(m)$). Следовательно, $|e(a)e(b)e(c)-1|=0$. (Почему из того, что $|a_n|\leqslant b_n$, $a_n\to a$ и $b_n\to 0$, следует, что $a=0$?) $\square$

Доказательство (33). Взяв $c=0$ (так что $e(c)=1$) и $b=-a$ (так что $a+b+c=0$) в теореме 2, получаем, что $e(a)e(-a)=1$. Значит, $e(x)>0$ не только при $x\geqslant 0$, но и при $x\leqslant 0$, и $e(-x)=\dfrac{1}{e(x)}$ при всех x. Взяв затем любые a, b и $c=-a-b$, получим $e(a)e(b)\dfrac{1}{e(a+b)}=1$, что равносильно доказываемому утверждению. □

Доказательство дифференцируемости $e(x)$. Сперва докажем, что функция $e(x)$ дифференцируема при $x=0$ и что $e'(0)=1$. Это означает, что

$$\left|\frac{e(h)-e(0)}{h}-1\right| \to 0 \quad \text{при } h\to 0,$$

т. е. что

$$\frac{e(h)-1-h}{h} \to 0 \quad \text{при } h\to 0. \tag{34}$$

1 и h — это первые два слагаемых в ряде $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{h^k}{k!}$ для $e(h)$, поэтому

$$e(h)-1-h=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^k}{k!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h^{j+2}}{(j+2)!}.$$

(Мы переобозначили числа $k=2, 3, \ldots$ как $k=j+2$, где $j=0, 1, \ldots$) j-е слагаемое в последнем ряде по модулю (абсолютной величине) оценивается так:

$$\left|\frac{h^{j+2}}{(j+2)!}\right| \leqslant |h^2|\frac{|h|^j}{j!},$$

следовательно, этот ряд по модулю не превосходит

$$|h^2|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|h|^j}{j!}=|h^2|e(1).$$

Получается, что

$$\left|\frac{e(h)-1-h}{h}\right| \leqslant |h|e(1),$$

откуда и следует (34).

Теперь докажем, что функция $e(x)$ дифференцируема при любом x и что $e'(x)=e(x)$. Преобразуем соответствующее разностное отношение с помощью (33):

$$\frac{1}{h}(e(x+h)-e(x))=\frac{1}{h}(e(x)e(h)-e(x))=e(x)\frac{1}{h}(e(h)-1).$$

Ввиду уже доказанной дифференцируемости $e(x)$ в точке $x=0$, существует предел $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(e(h)-1)=e'(0)$, и мы видели также, что он равен 1. Значит, существует предел при $h\to 0$ разностного отношения $\dfrac{1}{h}(e(x+h)-e(x))$ и он равен $e(x)$. А этот предел и есть $e'(x)$. □

Для решения дифференциальных уравнений нам нужна главным образом дифференцируемость $e(x)$ и свойство $e'(x) = e(x)$ вместе с предыдущими простыми свойствами, но стоит всё-таки убедиться, что функция $e(x)$ обладает и другими свойствами, которые мы привыкли связывать с функцией e^x, и что поэтому можно определить функцию e^x как $e(x)$. Определим число e как $e(1)$ и функцию e^x как $e(x)$. Из (33) видно, что при целом $n > 0$

$$e(n) = \underbrace{e \cdot \ldots \cdot e}_{n \text{ раз}},$$

поэтому для таких n наше определение e^n совпадает с известным из алгебры определением e^n как n-кратного произведения e на себя.

Упражнение. Проверьте другие «школьные» свойства степени (пока что степени числа e): n-я степень «дробной степени» $e^{m/n}$ равна e^m (что это означает на языке функции $e(x)$?); степень с отрицательным показателем $-x$ (где $x > 0$) — это число, обратное к e^x. Мы знаем, что $e^x > 0$ при $x > 0$; как убедиться, что при $x < 0$ тоже $e^x > 0$? (Кое-что их этого мы уже установили, — что и где?)

Для иррациональных x традиционное определение e^x таково: это предел чисел e^{x_n}, где x_n — какая-нибудь последовательность рациональных (дробных) чисел, стремящаяся к x. На традиционном пути здесь ещё доказывать и доказывать: существует ли предел? не зависит ли он от конкретного выбора последовательности x_n? верно ли, что не только для рациональных, но и вообще для любых показателей $e^{x+y} = e^x e^y$? У нас последнее равенство — это (33), а остальное тривиально ввиду непрерывной зависимости $e(x)$ от x (раз функция $e(x)$ дифференцируема, то она тем более непрерывна).

Нам ещё надо определить a^x для любых $a > 0$. Для этого вспомним, что по традиционной версии $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$, где $\ln x$ — натуральный логарифм числа x, т. е. логарифм x по основанию e. Значит, нам надо сперва определить, что такое натуральный логарифм (и убедиться в его существовании, т. е. в осмысленности определения), а после этого можно будет определить a^x для любого $a > 0$ как $e(x \ln a)$ (что на привычном языке как раз и означает формулу $a^x = e^{x \ln a}$ — у нас это будет не теорема, а определение функции a^x). Формула $a^{x+y} = a^x a^y$ при этом очевидна; читателю предоставляется самостоятельно убедиться в справедливости другой формулы, тоже играющей важную роль, когда имеют дело с a^x — формулы $(a^x)^y = a^{xy}$.

Напоследок стоит убедиться, что наше $e(= e(1))$ совпадает с традиционным $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Когда $x \to \infty$, то $e(x) \to \infty$ (потому что даже любое слагаемое, кроме самого первого, в выражении $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$ стремится к ∞).

Упражнение. Выведите отсюда и из (33), что когда $x \to -\infty$, то $e(x) \to 0$.

Поскольку всюду $e'(x) = e(x) > 0$, то функция $e(x)$ возрастает. Значит, при возрастании x она принимает всевозможные положительные значения и притом каждое значение — только один раз. Здесь в пояснении может нуждаться только первое утверждение — что каким бы ни было $y > 0$, имеется такое x, для которого $e(x) = y$. Раз пределы $\lim e(x)$ при $x \to \pm\infty$ суть ∞ и 0, то найдутся такие $a < b$, что $e(a) < y < e(b)$. Остаётся сослаться на общее и достаточно наглядное утверждение, что *непрерывная функция принимает все промежуточные значения*, т. е. что если на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f и, скажем, $f(a) < f(b)$, то для любого c, для которого $f(a) < c < f(b)$, в этом отрезке имеется такое x_0, что $f(x_0) = c$.

Данное утверждение относится к основам математического анализа и приводится в соответствующем университетском курсе. Вероятно, оно известно также физматшкольникам или, по крайней мере, заметной их части. Я всё же приведу его доказательство, благо оно короткое и простое. По-прежнему ограничимся тем случаем, когда $f(a) < f(b)$ (другой случай сводится к данному, если вместо f рассмотреть $-f$; кроме того, для $e(x)$ имеет место именно данный случай, — почему?).

Пусть $f(a) < c < f(b)$. Убедимся, что тогда существует такая последовательность отрезков[68]

$$I_0 = [a_0, b_0] = [a, b] \supset I_1 = [a_1, b_1] \supset I_2 = [a_2, b_2] \supset \ldots,$$

что длина n-го отрезка равна $(b_n - a_n)/2^n$ (т. е. при $n \geqslant 1$ эта длина равна половине длины I_{n-1}), $f(a_n) < c$, $f(b_n) \geqslant c$. Действительно, пусть I_i с $i \leqslant n-1$ уже построены. Если $f\left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right) < c$, положим $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = b_{n-1}$, в противном случае положим $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$. (Мы уже встречались с таким построением при доказательстве леммы 2, только там было $c = 0$). Отрезки I_n имеют единственную общую точку x_0. Сколь угодно близко к ней имеются точки a_n (с большими n), где $f < c$, и точки b_n, где $f \geqslant c$; значит, $f(x_0) = c$.

Теперь мы можем определить так называемый натуральный логарифм $\ln x$ положительного числа x как то единственное число y, для которого $e(y) = x$.

---

[68] Опять ради единообразия a и b обозначены через a_0 и b_0.

Упражнение. Докажите, что
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \tag{35}$$
что $\ln x$ — возрастающая функция на положительной числовой полуоси $x > 0$, равная нулю при $x = 1$ (значит, она положительна при $x > 1$ и отрицательна при $x < 1$), и что эта функция непрерывна.

Указание. Ввиду (35), непрерывность достаточно доказать только при $x = 1$ (почему?). При $y > 0$ имеем $e^y > 1 + y$ (почему?), откуда следует (как?), что когда $x > 1$, то $0 < \ln x < x - 1$. Для $x < 1$ используйте, что $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$.

Упражнение. Докажите, что функция $\ln x$ — не только непрерывная, но и дифференцируемая, причём $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Указание. Покажите, что достаточно установить её дифференцируемость в точке $x = 1$ и то, что её производная в этой точке равна 1. Последнее равносильно такому утверждению: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Положим $y = \ln(1 + h)$. Тогда при $h \to 0$ и $y \to 0$, поэтому достаточно доказать (почему?), что $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{e^y - 1} = 1$. Последнее равносильно «замечательному пределу» (30), который означает просто, что $e'(0) = 1$.

Заключительный штрих — доказательство того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует и совпадает с $e = e(1)$. Для этого мы установим, что
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{при } n \geqslant 1. \tag{36}$$
Когда это будет доказано, всё сведётся к следующему упражнению.

Упражнение. Пусть имеются такие две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что при всех n
$$0 < a_n \leqslant e \leqslant a_n b_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$
Докажите, что тогда $a_n \to e$.

Очевидно, (36) равносильно тому, что
$$1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{1/n} \tag{37}$$
и
$$1 + \frac{1}{n} \geqslant e^{1/(n+1)}. \tag{38}$$
Доказательство (37) совсем просто:
$$e^{1/n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k k!} \geqslant \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{n^k k!} = 1 + \frac{1}{n}$$

(отброшенные слагаемые все $\geqslant 0$). Доказательство (38) чуть сложнее. Когда $0<x<1$, то

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

(заполните пропущенные места в рассуждении). Возьмём $x = \frac{1}{n+1}$. Получим

$$e^{1/(n+1)} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}.$$

Экспонента в комплексной области

Фактически предложение Эйлера определять e^x как сумму соответствующего ряда относилось не к вещественным, а к комплексным x. Что такое e^x с вещественными x — это определили задолго до него на традиционном пути (пусть он и не был скоростным хайвеем); основные свойства этой функции, включая и формулу $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, тоже были известны. А вот придать какой-то смысл e^x с комплексными x до Эйлера, кажется, даже не пытались.

Напомню, что если обычные вещественные числа можно известным способом изображать точками прямой линии, на которой выбрано начало отсчёта (оно изображает нуль), указано положительное направление и установлен масштаб, то комплексные числа с тем же успехом можно изображать точками плоскости, на которой введены декартовы координаты, т. е. выбраны две взаимно перпендикулярные прямые, объявленные осями x и y, указано положительное направление на каждой из этих осей и установлен масштаб. Комплексное число $z = x + iy$ (с вещественными x и y) изображается точкой плоскости с координатами (x, y). Можно также пользоваться радиус-вектором этой точки (т. е. вектором $\overrightarrow{Oz}$ с началом в начале координат O и концом в точке z; в понятном смысле он тоже имеет координаты[69] (x, y)) для изображения того же комплексного числа. (Точки z и их радиус-векторы $\overrightarrow{Oz}$ «взаимно заменяемы», пока O остаётся на одном и том же месте.)

В геометрических терминах легко описываются сложение и умножение комплексных чисел. Так, сумма $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел изображается вектором $\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_2}$ (рис. 17). О геометрическом изображении произведения комплексных чисел будет сказано далее,

[69] То есть таковы его проекции на оси x и y, взятые с подходящими знаками.

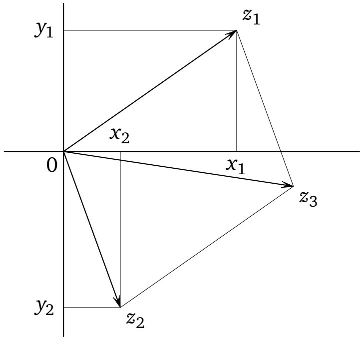


Рис. 17

вначале же обычно дают формальное определение: если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ (т. е. z_j изображается точками (x_j, y_j)), то z_1z_2 изображается точкой[70] $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Нужно, конечно, проверить, что введённая операция действительно обладает обычными алгебраическими свойствами — коммутативностью, ассоциативностью, дистрибутивностью, — и что при этом i^2, где i отвечает точке $(0, 1)$, действительно равно -1, т. е. точке $(-1, 0)$. Проверка требует некоторого места, но не вызывает затруднений. Наконец, напомню, что абсолютная величина (синонимы: норма, модуль) $|z|$ комплексного числа z — это расстояние от указанной точки до начала координат (или, что то же самое, длина радиус-вектора этой точки). Используя теорему Пифагора, легко найти, что $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Можно считать, что комплексные числа — это просто точки плоскости (или соответствующие радиус-векторы). При этом комплексные числа лишаются таинственности, которая была им присуща до того, как им была дана геометрическая трактовка.

По буквальному смыслу сказанного, здесь мы попадаем в «зависимость» от геометрии. Хорошо известно, однако, что хотя эта зависимость полезна для нашего воображения, её можно считать кажущейся, считая, что точка плоскости — это просто пара вещественных чисел (x, y). В терминах таких пар легко определяются сложение и умножение. Геометрия при этом остаётся весьма полезным языком (мы называем пары (x, y) точками, и т. д.),

[70] На всякий случай напоминаю, что это объясняется желанием иметь возможность перемножать $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, пользуясь обычными алгебраическими правилами — дистрибутивностью (правилом раскрытия скобок) и т. д., а также тем, что $i^2 = -1$. Значит, нам надо, чтобы было

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

но и только языком. Абсолютную величину комплексного числа z тогда надо с самого начала определять как $\sqrt{x^2+y^2}$.

Но возникает вопрос: а откуда мы знаем, что написанный квадратный корень существует? Теперь-то мы это знаем: квадратным корнем из положительного числа a служит $a^{\frac{1}{2}}=e\left(\frac{1}{2}\ln a\right)$. А что бы мы делали, если бы у нас не было экспоненты? Я говорю об этом потому, что в процессе учёбы комплексные числа появляются не только независимо от экспоненты, но обычно и раньше. Впрочем, в физматшколах (по крайней мере, некоторых) существование квадратного корня аккуратно доказывают тоже до появления экспоненты. С чисто логической точки зрения можно было бы этого не делать, а просто пользоваться квадратным корнем, сказав, что его существование будет доказано позднее. Не знаю, правда, насколько педагогически оправданным было бы такое построение курса математики, при которых некая (и немаловажная) его часть какое-то время оставалась условной, как бы подвешенной в воздухе.

По традиции во вводных курсах теории функций комплексного переменного независимую переменную (которая теперь может быть комплексным числом) обозначают через z (и при этом подразумевают, что $z=x+iy$ с вещественными x, y). На более поздних этапах соблюдение такого соглашения уже не считают обязательным. Но мы только начинаем работать с комплексными числами и функциями от них, поэтому давайте ему следовать.

Для комплексных z мы по-прежнему определяем $e(z)$ как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. Доказательство сходимости сохраняется дословно[71]. Небольшие изменения надо внести в доказательство дифференцируемости. Но до этого надо сказать, что понимают под производной для функции комплексного аргумента $f(z)$, принимающей (вообще говоря) комплексные значения. Наглядное представление о мгновенной скорости в этом случае отпадает, однако отсутствие такого наглядного смысла не мешает тому, чтобы по-прежнему определять производную $f'(z)$ как предел $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Понятие предела в комплексной области по существу не отличается от привычного «вещественного» определения. В данном случае развёрнутая формулировка гласит: f дифференцируема в точке z, если существует такое комплексное число a, что для любого $\varepsilon>0$ имеется такое $\delta>0$, что для всех h

[71] Использовавшаяся теорема, связанная со сравнением слагаемых двух рядов, справедлива и в комплексной области. (В этом можно убедиться, применяя эту теорему отдельно к рядам, составленным из вещественных (или мнимых) частей слагаемых исходного ряда.)

с $|h| < \delta$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - a\right| < \varepsilon.$$

Подобно тому как это имеет место в вещественной области, такое a может быть только одно. Оно называется производной функции f в точке z и обозначается через $f'(z)$. Известные нам утверждения о производной суммы или произведения сохраняются дословно и их доказательства не меняются.

В вещественном случае, говоря о пределах или непрерывности, часто употребляют более короткие формулировки, говоря о «всех достаточно малых h». Они сохраняются и в комплексной области, только надо иметь в виду, что эти h теперь подразумеваются комплексными (а малость понимается как малость $|h|$).

В нашем изложении свойств экспоненты главную роль играла теорема 2. Её формулировка дословно сохраняется и в комплексном случае. В доказательстве нужны небольшие пояснения и изменения. В нём фигурировала функция $f(x) = e_n(ax)e_n(bx)e_n(cx)$. Это многочлен от x, поэтому она определена при всех x, даже комплексных, но нам она нужны только при вещественных x из отрезка $[0, 1]$. Вычисление её производной сохраняется при всех x; неравенство $|f'(x)| \leqslant 3e^2(m)\dfrac{m^{n+1}}{n!}$ — при $0 \leqslant x \leqslant 1$. (В комплексной области по-прежнему справедливо утверждение, что если $|z| \leqslant m$, то $|e(z)| \leqslant e(m)$, — почему?) Теперь нужен был бы комплексный вариант леммы 3 (в нём речь должна идти о функции $f(x)$ от вещественного аргумента x, принимающей комплексные значения). На самом деле в комплексной области лемма 3 справедлива дословно, но доказательство такого утверждения потребовало бы от нас некоторых дополнительных усилий и места. Для наших целей вполне достаточно и более слабого варианта:

Лемма 4. *Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ дифференцируема во всех точках отрезка $[a, b]$ и всюду $|f'(x)| \leqslant M$. Тогда*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant 2M(b-a).$$

Упражнение. Докажите лемму 4, применяя лемму 3 к вещественной и мнимой частям функции f.

Лемма 4 позволяет сделать вывод, что при $a+b+c=0$

$$|e_n(a)e_n(b)e_n(c) - 1| \leqslant 6e^2(m)\frac{m^{n+1}}{n!}.$$

Это неравенство вдвое «хуже», нежели то, которое мы получили в вещественном случае, но с его помощью тоже можно (и притом точно таким же образом) прийти к заключению, что $e(a)e(b)e(c)=1$.

Далее дословно так же получается, что $e(z)\neq 0$, $e(-z)=\dfrac{1}{e(z)}$ и $e(z)e(w)=e(z+w)$. После этого дословно проходит доказательство дифференцируемости $e(x)$ и того, что $e'(x)=e(x)$.

Определив функцию e^z (наша $e(z)$) для комплексных z, Эйлер поинтересовался её значениями для чисто мнимых z. При подстановке $z=it$ в ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}$ члены с чётными $k=2n$ переходят в $(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$, а с нечётными $k=2n+1$ — в $i(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (проверьте!). Получается, что

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{39}$$

(почему законно представление ряда (31) в виде суммы двух рядов?). Эйлер знал, что[72]

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!},\quad \sin t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{40}$$

Таким путём он пришёл к «формуле Эйлера»

$$e^{it}=\cos t+i\sin t, \tag{41}$$

одной из самых замечательных формул во всей математике[73].

Но читатель может и не знать формулы (40), поэтому его вниманию предлагается следующее рассуждение. Временно забыв о триго-

---

[72] Здесь предполагается, что обе тригонометрические функции — это функции угла с радианной мерой t.

После этого Эйлер предложил определить для комплексных z функции $\cos z$ и $\sin z$ с помощью тех же рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. При таком определении оказывается, что $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ как для вещественных, так и для комплексных z. Но нам это не понадобится.

[73] А. Н. Крылов (1863—1945) — выдающийся прикладной математик, механик (и потому академик), корабельный инженер (и потому контр-адмирал и генерал-лейтенант), а также знаток истории физико-математических и примыкающих к ним технических наук, — сказал о формуле $e^{\pi i}=-1$ (получающейся из (41) при $t=\pi$), что она символизирует единство математики, ибо в ней «-1 представляет арифметику, i — алгебру, π — геометрию и e — анализ». Позволю себе добавить, что знак равенства можно считать представляющим математическую логику (она была далека от научных интересов Крылова, а её прикладное использование широко развернулось только после его смерти, так что когда он говорил о формуле $e^{\pi i}=-1$, о математической логике он, видимо, не подумал).

нометрии, определим функции $\cos t$ и $\sin t$ с помощью рядов (40), а затем докажем, что эти наши функции совпадают с теми, с которыми читатель познакомился в школе и которые обозначались точно так же. Пока мы не установили, что ряды в (40) представляют обычные тригонометрические функции, обозначим суммы этих рядов так:

$$\underline{\cos}\, t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \underline{\sin}\, t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тогда, конечно,

$$e^{it} = \underline{\cos}\, t + i\underline{\sin}\, t. \tag{42}$$

Функция $z(t) = e^{it}$ является решением дифференциального уравнения $\dot{z} = iz(t)$, точно так же, как раньше мы говорили, что $z(t) = e^{at}$ является решением дифференциального уравнения $\dot{z} = az$. Действительно, свойство (4) имеет место и в комплексной области, как видно из его доказательства. Поэтому

$$\frac{de^{it}}{dt} = \frac{de^x}{dx}\bigg|_{x=it} \frac{d(it)}{dt} = e^{it} i.$$

Производная по t комплексно сопряжённой функции $\overline{z(t)}$ является комплексно сопряжённой по отношению к $\dot{z}(t)$ (почему?), так что $\frac{d}{dt}\overline{z(t)} = -i\overline{z(t)}$. Применяя формулу Лейбница $\frac{d(uv)}{dt} = \dot{u}v + u\dot{v}$, получаем

$$\frac{d}{dt}|z|^2 = \frac{d}{dt}(z\bar{z}) = \dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}} = iz\bar{z} - iz\bar{z} = 0.$$

А когда $t = 0$, то $z(t) = e^{i0} = e^0 = 1$. Значит, при всех t точка $z(t)$ (точнее, изображающая её точка плоскости) находится на единичной окружности[74]. Вектор, изображающий скорость движения этой точки (с изменением t), — это вектор, отвечающий комплексному числу ie^{it}; он получается из вектора, отвечающего $z(t)$, поворотом на $90°$ против часовой стрелки[75] (рис. 18). Длина же этого вектора при $|z| = 1$ тоже равна 1. Стало быть, $z(t)$ (с изменением t) движется по единичной

[74] То есть окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

[75] Пусть $z = x + iy = x \cdot 1 + y \cdot i$. Число 1 изображается единичным вектором e_x оси иксов (исходящим из O вектором единичной длины, направленным по оси x в положительном направлении), а число i — единичным вектором e_y оси игреков. При умножении на i оба вектора поворачиваются на $90°$ против часовой стрелки (1 переходит в число i, изображаемое вектором e_y, а число i — в число -1, изображаемое вектором $-e_x$). Значит, так же поворачиваются векторы xe_x и ye_y, а следовательно, и их сумма.

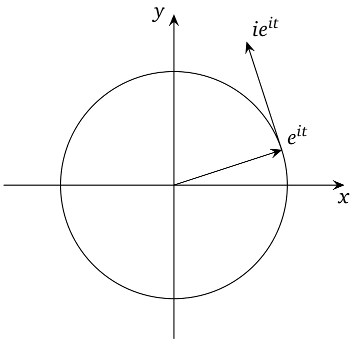


Рис. 18

окружности против часовой стрелки с единичной скоростью и проходит за время t дугу длины t. Величина центрального угла, стягиваемого этой дугой, тоже равна t.

В геометрии положение точки A единичной окружности характеризуется полярным углом φ этой точки — углом между положительной полуосью иксов и лучом OA. Насчёт угла принимаются обычные соглашения: положительный угол отсчитывается против часовой стрелки, так что если A лежит ниже оси иксов, то положительный угол, характеризующий направление OA, будет больше $180°$, или, выражая его в радианах, больше π; кроме того, допускается говорить об отрицательных углах и углах, бóльших $360°$, т. е., в радианной мере, бóльших 2π; углы φ и $\varphi \pm 2\pi$ характеризуют одну и ту же точку A. Таким образом, полярный угол φ точки e^{it} равен t. Наконец, обычные декартовы координаты x, y точки A (по-прежнему лежащей на единичной окружности) можно выразить через её полярный угол φ с помощью «школьных» тригонометрических функций[76]:

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi. \tag{44}$$

[76] Скорее всего, определение синуса и косинуса произвольного угла, с которым в своё время познакомился читатель, как раз и состояло в том, что $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ суть координаты той точки единичной окружности, у которой полярный угол равен φ. Если определение было каким-то другим, то всё-таки легко убедиться в (44). Опустим из A перпендикуляр на ось x и обозначим через A' основание этого перпендикуляра. Из треугольника $\triangle AOA'$

$$|x| = |OA'| = \cos\angle A'OA, \quad |y| = |AA'| = \sin\angle A'OA. \tag{43}$$

В первом квадранте (где x, $y \geqslant 0$) (43) совпадает с (44). Но надо посмотреть ещё, что получится, когда A лежит в других трёх квадрантах. Например, во втором квадранте, где $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, имеем

$$x = -|x|, \quad y = |y|, \quad \cos\angle AOA' = -\cos\varphi, \quad \sin\angle AOA' = \sin\varphi,$$

и (43) снова приводит к (44).

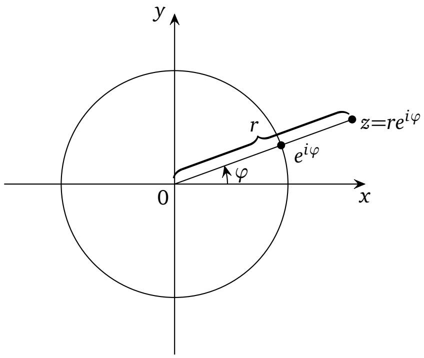


Рис. 19

А раз полярный угол точки e^{it} равен t, то $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Сравнивая это с (42), приходим к выводу, что $\underline{\cos}\, t = \cos t$, $\underline{\sin}\, t = \sin t$. И повторим еще раз, что комплексное число $e^{i\varphi}$ (с вещественным φ) представляется точкой единичной окружности с полярным углом φ. Число же $re^{i\varphi}$ представляется точкой с тем же полярным углом, лежащей на окружности радиуса r с центром в O (рис. 19).

После сказанного ясно, что при геометрической трактовке произведения комплексных чисел z_1 и z_2 надо пользоваться не декартовыми, а полярными координатами. Пусть z_j имеет полярные координаты (r_j, φ_j), т. е. $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$. Тогда $z_1 z_2$ имеет полярные координаты $(r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$, т. е. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

§ 5. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Исследование природных и технических процессов часто приводит к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, т. е. уравнениям вида

$$x^{(n)} = \text{ линейная функция от } x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)},$$

причём в этой линейной функции каждое $x^{(i)}$ (с $i=0, 1, \ldots, n-1$) фигурирует с некоторым постоянным множителем (коэффициентом). Такое уравнение принято записывать в несколько ином виде, собирая все слагаемые в его левой части:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = 0. \tag{45}$$

Если данное уравнение описывает изменение (со временем) состояния некоторой изолированной физической системы, то поведение той же системы под некоторым внешним воздействием часто описывается уравнением вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = f(t), \tag{46}$$

где $f(t)$ — это «внешняя сила», действующая на систему[77]. (В зависимости от физического смысла рассматриваемой задачи, $f(t)$ может быть настоящей силой, как это понимается в механике, а может иметь и иной физический смысл.)

Надо сделать оговорку, что в других случаях внешнее воздействие на систему может привести к тому, что параметры, характеризующие её «внутренние» свойства, становятся зависящими от времени. Эволюция (изменение со временем состояния) такой системы может описываться дифференциальным уравнением, которое сходно с (45), но в котором коэффициенты a_i зависят от t.

Такой пример нам доставляют самые обыкновенные качели: когда человек, качающийся на качелях, приседает и выпрямляется, расстояние между

[77] Данное дифференциальное уравнение является неавтономным (напомню, что этот термин введён в § 2 и означает, что время t явно фигурирует в уравнении). В других параграфах этой книжки рассматриваются только автономные уравнения и системы (стало быть, там речь идёт об изолированных физических системах). Но для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами всё обстоит так просто, что можно познакомиться и с простейшими неавтономными дифференциальными уравнениями, тем более что это представляет интерес с физической точки зрения.

точкой подвеса качелей и их центром масс (практически — центром масс человека) является переменной величиной. В линейном приближении и при пренебрежении трением соответствующее дифференциальное уравнение выглядит как (7), но ω теперь зависит от t, причём зависит периодически с некоторой частотой ν, поскольку человек приседает и выпрямляется периодически. (При учёте поглощения энергии из-за трения в левой части добавляется ещё слагаемое $k\dot{x}$ со сравнительно небольшим $k > 0$.)

Каждому известно из собственного опыта, что при $\nu = 2\omega$ (когда получается одно приседание и выпрямление за полупериод качания качелей) можно довольно сильно раскачаться на качелях. Это называют «параметрическим возбуждением колебаний». Оно остаётся вне содержания настоящей книжки, поскольку мы не будем рассматривать уравнений с непостоянными коэффициентами. В отличие от этого человек, качающий другого человека на качелях, раскачивает их (отталкивает или тянет к себе) с той же частотой, какова частота собственных колебаний качелей, т. е. качелей, предоставленных самим себе. В простейшем варианте математическое описание раскачивания качелей даётся в этом случае уравнением вида (46) с той же левой частью $\ddot{x} + \omega^2 x$ или $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x$, что и для изолированных качелей, и с периодически зависящей от t правой частью $f(t) = a\cos\omega t$. Подобные вопросы относятся к нашей компетенции.

В электро- и радиотехнике колебания, происходящие в колебательном контуре при воздействии на него внешней ЭДС (электродвижущей силы) в простейшем случае описываются дифференциальным уравнением $\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$, причём там весьма типична «синусоидальная» зависимость внешней ЭДС от времени: $f(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$. Хоть это и простейший случай, ему посвящены целые страницы в учебниках — не столько даже учебниках математики, сколько физики. Но «мы учебника не пишем» и потому затронем лишь некоторые — надеюсь, достаточно интересные — стороны дела.

Уравнение (45) называют *однородным* (в нём все слагаемые содержат неизвестную функцию x или некоторую её производную в одной и той же степени — первой), а (46) — *неоднородным* (в нём одни слагаемые содержат неизвестную функцию x или некоторую её производную в первой степени, а слагаемое $f(t)$ — в нулевой).

Физически бывает особенно интересным случай, когда уравнение (45) или (46) описывает некоторую колебательную систему (собственно, мы упоминали примеры именно такого рода). Колебания, описываемые (45) — это *свободные* (или *собственные*) колебания: система, так сказать, предоставлена самой себе, она свободна от внешних воздействий. Уравнение (46) с подходящей (особенно периодической по времени) правой частью $f(t)$ описывает *вынужденные* колебания, происходящие в системе под воздействием внешней силы. Вообще говоря, происходящие в системе движения вполне могут представлять собой некую комбинацию свободных и вынужденных колебаний, но в реальных условиях свободные колебания со временем затухают, а вынужденные остаются — ведь вызывающая их внешняя периодическая сила никуда не девается. В идеализированных системах вроде гармонического осциллятора, которые мы представляем себе лишёнными диссипации энергии и в которых свободные колебания не затухают, различие между вынужденными колебаниями и сочетанием вынужденных колебаний со свободными не столь очевидно, но можно сказать, что вынужденные колебания имеют период, совпадающий с периодом возбуждающей их внешней силы, который, вообще говоря, отличен от периода свободных колебаний. Когда же период внешней силы совпадает с периодом свободных колебаний, наблюдается интересное и практически весьма важное (иногда полезное, иногда вредное) явление резонанса, с примером которого мы встретимся далее.

Уравнение (45) мы рассмотрим в общем виде — общая теория в данном случае оказывается практически не сложнее, чем примеры частного характера; примеры мы будем рассматривать как раз на базе общей теории. Что касается (46), то мы тоже не будем ограничивать вида левой части этого уравнения, но с самого начала ограничимся правыми частями $f(t)$ некоторого специального характера — именно, у нас f будут так называемыми квазимногочленами (определение см. ниже). Этого достаточно для многих физических приложений.

В отличие от бо́льшей части этой книжки, в настоящем параграфе геометрические соображения не играют заметной роли — они используются только в той степени, в какой с ними связаны введённые в § 2 понятия — решение, начальное значение, существование и единственность решения. Конечно, уравнение (45) отличается от автономной системы (16), а (46) — от (11), но тем не менее понятия и утверждения, приведённые в § 2 для этих систем, можно с очевидными изменениями применять и к уравнениям (45), (46): надо просто заменить уравнение системой, посмотреть, что можно о ней сказать в свете § 2, и перефразировать наши выводы в терминах самих изучаемых уравнений. Однако в основном наша мини-теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами не зависит от общих сведений, приведённых в § 2 без доказательства. В основном её содержание будет аналитическим и даже алгебраическим; оно существенно опирается на материал § 4.

Опыт показывает, что проинтегрировать (решить) одно уравнение проще, чем систему того же порядка; это, понятно, используется в приложениях. Поэтому в учебниках часто об интегрировании линейных уравнений с постоянными коэффициентами говорят отдельно от обсуждения аналогичного вопроса для систем. Однако обсуждение теоретических сведений общего характера для линейных уравнений обычно проводят на базе того, что доказывается для систем. Это логично и придаёт известное единство учебному курсу дифференциальных уравнений, но, с другой стороны, естественно поинтересоваться, нельзя ли, так сказать, расширить «степень автономности» мини-теории линейных уравнений, не ограничивая её только прикладной стороной дела? Ничего принципиально нового в этом нет (тем более что в прошлом системы не играли столь центральной роли, как теперь), но возможно, некоторые методические детали в моём изложении окажутся (или всё-таки только покажутся?) новыми.

Переходя от общих разговоров к делу, начнём с простого замечания: решения (45) суть функции класса C^∞, т. е. функции, имеющие производные всех порядков[78]; короче о таких функциях говорят как о C^∞-функциях. Решения (46), если f — функция класса C^∞, тоже являются C^∞-функциями. Действительно, по самому смыслу понятия решения $x(t)$ дифференциального уравнения (45) или (46), у $x(t)$ имеются все производные до n-го порядка включительно. Значит, функции $x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}$ имеют по крайней мере производные первого порядка. Но ведь производная $x^{(n)}$ решения x является суммой этих $x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}$ с какими-то постоянными коэффициентами плюс, может быть, ещё f (если речь идёт о решении (46)). Стало быть, $x^{(n)}$ тоже имеет производную. А это уже $(n+1)$-я производная решения x. Функции $x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}$ имеют, выходит, не только первую, но и вторую производную. Но тогда из уравнения (46) видно, что у $x^{(n)}$ тоже имеется вторая производная, и т. д.[79]

Введём следующее обозначение для операции дифференцирования: $D = \dfrac{d}{dt}$. Пока это только символ. Но можно понимать его более содержательно как отображение совокупности всех C^∞-функций (с од-

[78] Имеется стандартное обозначение C^n для класса функций, имеющих производные до n-го порядка включительно, причём n-я производная непрерывна. (А предыдущие производные?). Если надо уточнить область определения рассматриваемых функций, то пишут $C^n[a, b]$, $C^\infty(\mathbb{R})$ и т. д.

[79] Данное рассуждение чем-то напоминает рассказ барона Мюнхгаузена о том, как он вытащил за волосы себя самого (да ещё вместе с конём) из болота. (Но едва ли Мюнхгаузен иносказательно намекал на это или какое-то другое математическое рассуждение. Скорее надо признать, что его спасение было проявлением телекинеза, вызванного его биополем и, может быть, биополем лошади. В то время телекинез встречался редко и потому вызывал недоверие, но в наши дни мы все о нём достаточно наслышаны благодаря средствам массовой «информации».)

ной и той же областью определения; у нас ею будет вся числовая прямая) в себя — при этом отображении функции f сопоставляется её производная. Это отображение обладает свойствами линейности: $D(af) = a\,Df$ при $a = \mathrm{const}$; $D(f+g) = Df + Dg$, что выражают словами: D является *линейным оператором*. Такие операторы можно умножать на числа, складывать, умножать друг на друга (композиция). Именно, для линейного оператора A через cA (где c — число) обозначается линейный оператор, переводящий f в cAf. Для двух линейных операторов A и B через $A+B$ обозначается линейный оператор, переводящий f в $Af + Bf$, а через AB — линейный оператор, переводящий f в $A(Bf)$. Для отображений, не предполагаемых линейными, мы в последнем случае говорили бы об их композиции или суперпозиции и обозначали бы её через $A \circ B$, но для линейных операторов говорят об их произведении и значка $\circ$ не пишут. Если $P(\lambda)$ — многочлен (от независимой переменной[80] λ),

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

то можно образовать такой же точно многочлен не от λ, а от D — ведь a_iD^i имеют понятный смысл, и их можно складывать. Таким образом,

$$P(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0,$$

и это означает в точности то, что

$$P(D)f = a_nD^nf + a_{n-1}D^{n-1}f + \ldots + a_1Df + a_0f.$$

Само по себе решение обозначать $\frac{d}{dt}$ символом D ничего не меняет по существу. Но когда сказано, что D — это линейный оператор, мы получаем возможность совершать над этим символом некоторые алгебраические действия, а читатель, конечно, на других примерах уже убедился, как сильно помогает алгебра. Помогает она и в нашем случае. Нужная нам алгебра — это алгебра, относящаяся к многочленам. Понятно, что такое сумма $P(\lambda) + Q(\lambda)$ двух многочленов. Это есть некий новый многочлен. Образовав такой же многочлен от D, получаем сумму $P(D) + Q(D)$. Далее, по определению, произведение двух многочленов P и Q есть третий многочлен R, такой, что $R(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$ при всех λ. Он обозначается через PQ. Легко проверить, что при этом $R(D) = (PQ)(D) = P(D)Q(D)$. Поскольку умножение многочленов коммутативно, то $P(D)Q(D) = Q(D)P(D)$.

[80] У нас t и x заняты, при случае в том же смысле, что и x, могут использоваться y, z и т. д. Вот и пришлось для обозначения переменной в многочлене выбрать букву, резко отличающуюся от употребительных латинских букв.

Замечание. В математике рассматривают и линейные дифференциальные операторы с переменными коэффициентами. Такой оператор A переводит функцию $x(t)$ в функцию

$$y(t) = a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t),$$

в связи с чем его можно сокращённо записать в виде

$$a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \ldots + a_1(t)D + a_0(t)$$

(при этом коэффициенты $a_i(t)$ можно понимать как операторы умножения на a_i и тогда в последней записи мы имеем некие алгебраические действия над этими операторами и операторами D^i). Но нужно сразу предупредить, что, в отличие от дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, дифференциальные операторы с переменными коэффициентами почти никогда не коммутируют друг с другом, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$ (приведите пример).

В левой части (45) и (46) фактически стоят многочлены от G со старшими коэффициентами 1. Это не ограничивает общности, потому что от деления $P(D)$ на a_n решения дифференциального уравнения $P(D)x = 0$ не изменятся. Ниже, говоря о дифференциальном операторе, мы тоже считаем, что при операторе старшего порядка D^n стоит коэффициент 1. Пусть многочлен $P(\lambda)$ имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ с кратностями $k_1, \ldots, k_m$. Как известно из алгебры[81],

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{k_i},$$

а потому и $P(D)$ разлагается в аналогичное произведение

$$P(D) = \prod_{i=1}^{m} (D - \lambda_i)^{k_i}.$$

Если $(D - \lambda_i)^{k_i} x = 0$, то и $P(D)x = 0$, так что научившись решать уравнение $(D - \lambda_i)^{k_i} x = 0$, мы найдём некоторые (как говорят, частные) решения уравнения $P(D)x = 0$.

Упражнение. Докажите *формулу смещения*:

$$P(D)(e^{\mu t}z) = e^{\mu t}P(D + \mu)z.$$

Указание. Начните с того, что $D(e^{\mu t}z) = e^{\mu t}(D + \mu)z$.

Отсюда можно сделать следующий вывод. Пусть $(D - \lambda_i)^{k_i} y = 0$. Так как всюду $e^{\lambda_i t} \neq 0$, то можно положить $y = e^{\lambda_i t}z$. Для z получится дифференциальное уравнение $e^{\lambda_i t}D^{k_i}z = 0$, т. е. $D^{k_i}z = 0$. Очевидно, z является многочленом от t степени, меньшей k_i.

[81] Символ $\prod_1^m$ обозначает произведение $a_1 \ldots a_m$ сомножителей $a_1, \ldots, a_m$ (употребление знака произведения $\prod$ аналогично употреблению знака суммы $\sum$).

Замечание. Умножение на $e^{\mu t}$ — это некоторый линейный оператор A в C^∞: Ax — это функция $e^{\mu t}x(t)$. (Можно сказать, что это есть дифференциальный оператор нулевого порядка с переменным коэффициентом.) Мы видим, что D и A не коммутируют ($AD \neq DA$), но у нас есть простая «формула коммутирования» $DA = AD + \mu A$, показывающая, как можно вынести A из-под знака действия D — оказывается, при этом появляется совсем простая добавка μA. В некоторых других случаях для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами тоже имеются «хорошие» формулы коммутирования, и это играет роль при исследовании этих операторов, связанных с ними дифференциальных уравнений и специальных функций (являющихся решениями таких уравнений).

Назовём *элементарными решениями* уравнения $P(D)x = 0$ его решения y_i вида $e^{\lambda_i t}p_i(t)$, где p_i — всевозможные многочлены степени, меньшей k_i. Тогда $y = \sum_i y_i$ — тоже решение. Позднее мы увидим, что для любого набора начальных данных $(x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$ (без ограничения общности можно считать, что они заданы при $t = 0$) найдётся такая сумма элементарных решений, которая имеет именно такие начальные данные, и что других решений нет. Тем самым, в частности, для уравнения $P(D)x = 0$ будет доказана теорема существования и единственности. Но будет доказано больше: не говоря уже о том, что наш результат «глобальный» — решение определено при всех t, — мы установим общий вид решения.

Сумма нескольких слагаемых вида $Ce^{\lambda t}t^k$ (где k неотрицательные целые) называется *квазимногочленом*. Ясно, что любая сумма $\sum e^{\lambda_i t}p_i(t)$, где p_i — многочлены, является квазимногочленом и что любой квазимногочлен приводится к такому виду с попарно различными λ_i, которые мы будем называть показателями квазимногочлена, подразумевая, конечно, что множитель p_i при соответствующем $e^{\lambda_i t}$ является ненулевым многочленом. Этот многочлен я буду называть многочленом, соответствующим (или отвечающим) показателю λ_i. Квазимногочлен вида $e^{\lambda t}p(t)$ (где p — многочлен) я буду иногда называть элементарным квазимногочленом, так что квазимногочлен является суммой элементарных квазимногочленов. Найденные нами решения уравнения $P(D)x = 0$ являются квазимногочленами, а элементарные решения являются элементарными квазимногочленами.

Здесь надо обратить внимание на следующий вопрос. Откуда следует, что показатели и соответствующие им многочлены однозначно определены? Они однозначно определены для выражения $\sum e^{\lambda_i t}p_i(t)$, где λ_i попарно различны, а p_i — многочлены; в этом случае показатели и соответствующие многочлены указаны в самом виде этого выражения. Но не может ли случиться, что одну и ту же функцию $x(t)$ можно представить в таком виде двумя различными способами?

Теорема 1. *Если два квазимногочлена* $\sum\limits_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t} p_i(t)$ *(где* λ_i *попарно различны, а* p_i *— ненулевые многочлены) и* $\sum\limits_{j=1}^{n} e^{\mu_j t} q_j(t)$ *(где* μ_j *тоже попарно различны, а* q_j *— ненулевые многочлены) при всех* t *принимают одинаковые значения, то они совпадают и по своему виду, т. е.* $m=n$ *и при подходящей нумерации*

$$\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_m = \mu_m, \quad p_1 = q_1, \ldots, p_m = q_m.$$

Замечание. Мы могли бы довольно долго обходиться без этой теоремы, считая, что когда речь идёт о показателях и соответствующих многочленах, то они сопоставляются не самой функции $x(t)$, а тому способу, каким она представлена в виде $\sum\limits_{i=1}^{m} e^{\lambda_i t} p_i(t)$. Тогда временно допускалась бы возможность, что $x(t)$ можно представить также и в виде другого квазимногочлена — другого выражения $\sum\limits_{j=1}^{n} e^{\mu_j t} q_j(t)$, и с этим другим представлением $x(t)$ в виде квазимногочлена могли бы связываться другие (хотя бы отчасти другие) показатели и многочлены. И только где-то в конце попутно с другими результатами мы убедились бы, что эти хитросплетения были излишни. Однако лучше убедиться в этом с самого начала.

Доказательство теоремы 1. Если бы два различных по своей форме квазимногочлена (у которых показатели и соответствующие многочлены не вполне совпадают) принимали при всех t одинаковые значения, то отсюда следовало бы (каким образом?), что при всех t имеет место равенство

$$e^{\nu t} p(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\nu_i t} r_i(t)$$

с какими-то числами ν, ν_i и многочленами p, r_i, причём ν отлично от всех ν_i, а многочлен $p(t)$ ненулевой,

$$p(t) = a_l t^l + a_{l-1} t^{l-1} + \ldots + a_1 t + a_0, \quad \text{где } a_l \neq 0.$$

Дабы убедиться в невозможности этого, мы подберём такой многочлен $Q(\lambda)$, что

$$Q(D)\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\nu_i t} r_i(t)\right) = 0 \quad \text{при всех } t,$$

$$Q(D)(e^{\nu t} p(t)) \neq 0 \qquad\qquad \text{при некоторых } t,$$

а точнее, $Q(D)(e^{\nu t} p(t)) = e^{\nu t} q(t)$, где q — некоторый многочлен той же степени l, что и p.

Если степень p_i равна l_i, то $(D-\nu_i)^{l_i+1}\big(e^{\nu_i t} p_i(t)\big) = e^{\nu_i t} D^{l_i+1} p_i(t) = 0$ (в последнем выражении порядок производной выше степени дифференцируемого многочлена). Стало быть, для оператора $Q(D) = (D-\nu_1)^{l_1+1}\ldots(D-\nu_k)^{l_k+1}$ будет $Q(D)\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\nu_i t} r_i(t)\right) = 0$. □

С другой стороны, имеет место

Лемма 1. *Пусть $R(\lambda)$ — многочлен. Под действием $R(D)$ квазимногочлен $e^{\nu t}p(t)$ переходит в квазимногочлен $e^{\nu t}q(t)$, где степень многочлена q не превосходит степени многочлена p. Если $R(\nu) \neq 0$, то эти степени равны. Если же ν является k-кратным корнем многочлена P, а многочлен $p(t)$ имеет степень l, то при $k > l$ под действием $R(D)$ элементарный квазимногочлен $e^{\nu t}p(t)$ переходит в тождественный нуль*[82]*, тогда как если $k \leqslant l$, то $R(D)(e^{\nu t}p(t)) = e^{\nu t}q(t)$, где q — многочлен степени*[83] *$l-k$.*

В доказательстве теоремы 1 мы ввели оператор $Q(D)$, для которого $Q(\nu) = \prod_{i=1}^{k}(\nu-\nu_i)^{l_i+1} \neq 0$. По лемме 1 выражение $Q(D)(e^{\nu t}p(t))$ не может тождественно равняться нулю (т. е. обращаться в нуль при всех t). Этим завершается доказательство теоремы 1 — если лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $p(t) = a_l t^l + a_{l-1}t^{l-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, где $a_l \neq 0$. Имеем

$$R(D)(e^{\nu t}p(t)) = e^{\nu t}R(D+\nu)p(t) = e^{\nu t}q(t),$$

где $q(t) = R(D+\nu)p(t)$. Поскольку

$$R(\lambda+\nu) = R(\nu) + \text{ сумма одночленов вида } b_j\lambda^j, \quad j \geqslant 1$$

(почему?), то

$$R(D+\nu) = R(\nu) + \text{ сумма операторов вида } b_j D^j, \quad j \geqslant 1.$$

Каждый одночлен $a_i t^i$ под действием $R(D)$ переходит в некоторую сумму слагаемых вида $c_j t^j$ с $j \leqslant i$ — ведь дифференцирование уменьшает степень многочлена, и только при умножении на $R(\nu)$ степень остаётся прежней, если только $R(\nu) \neq 0$. Поэтому

$$R(D+\nu)p(t) = \text{ сумма одночленов степени, не большей } l,$$

так что степень $q(t)$ не превосходит степени $p(t)$.

Если $R(\nu) \neq 0$, то $R(\nu)a_l t^l$ — (ненулевой) старший член многочлена $q(t)$, ибо остальные входящие в $R(D)$ операторы $b_j D^j$ переводят $a_l t^l$ в одночлены меньшей степени и каждый одночлен $a_i t^i$ с $i < l$ переводится оператором $R(D+\nu)$ в многочлен степени, меньшей l. Стало быть, степень q равна в этом случае l.

---

[82] При всех t $R(D)(e^{\nu t}p(t)) = 0$. В подобных случаях часто пользуются знаком $\equiv$, т. е. пишут $R(D)(e^{\nu t}p(t)) \equiv 0$. В настоящей книжке он не употребляется, хотя многие равенства являются тождественными равенствами — мне кажется, что обычно это само по себе должно быть понятно без особых разъяснений.

[83] Именно степени $l-k$, а не степени, не превосходящей $l-k$, т. е. коэффициент при t^{l-k} в $q(t)$ отличен от нуля.

Наконец, пусть ν — корень многочлена R кратности k, так что $R(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda-\nu)^k$, где $Q(\nu)\neq 0$. Тогда

$$R(D)(e^{\nu t}p(t)) = e^{\nu t}P(D+\nu)p(t) = e^{\nu t}Q(D+\nu)D^k p(t).$$

В результате k-кратного дифференцирования многочлена p, имеющего степень l, получается тождественный нуль, когда $k>l$, и некоторый многочлен $r(t)$ степени $k-l$, когда $k\leqslant l$. В последнем случае при применении к многочлену r оператора $Q(D+\nu)$ получится многочлен той же степени — в сущности, мы это уже видели выше, но при желании сейчас мы можем более формальным образом сослаться на уже доказанную часть леммы: многочлен r можно рассматривать как элементарный квазимногочлен с показателем 0, а 0 не является корнем многочлена от λ, равного $Q(\lambda+\nu)$, — при подстановке в этот многочлен 0 вместо λ получается отличное от нуля число $Q(\nu)$. $\square$

В $x=\sum y_i$, где y_i — элементарные решения, имеется n коэффициентов. Это коэффициенты многочленов $p_i(t)$, у p_i их k_i. (Столько коэффициентов имеется у многочлена степени k_i-1. У нас же p_i может иметь и ме́ньшую степень. Но такой многочлен можно записать как многочлен «якобы» (k_i-1)-й степени, у которого коэффициенты при старших степенях t равны нулю.) Всего n коэффициентов. Столько же бывает и начальных значений. А условие, что x имеет заданные начальные значения

$$x(0)=x_0^{(0)}, \quad \dot x(0)=x_0^{(1)}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)} \tag{47}$$

(в отличие от (9), мы теперь будем говорить только о начальных значениях в момент времени $t_0=0$), приводит к n линейным уравнениям для определения этих коэффициентов, потому что каждая из производных $x^{(i)}(0)$ является суммой этих коэффициентов с какими-то множителями.

Фактически это видно из доказательства леммы 1, но повторим ещё раз. Производная квазимногочлена сама является квазимногочленом с теми же показателями и с новыми множителями при экспонентах; эти множители снова являются многочленами от t и их коэффициенты линейно выражаются через коэффициенты первоначальных многочленов p_i. Действительно,

$$D\big(e^{\lambda_i t}p_i(t)\big) = e^{\lambda_i t}(\dot p_i(t)+\lambda_i p_i(t)).$$

Когда $\lambda_i\neq 0$, то $\lambda_i p_i(t)$ — многочлен той же степени, что и p_i, когда же λ_i равно нулю, такое слагаемое фактически отсутствует. Далее, $\dot p_i(t)$ — многочлен на единицу меньшей степени, нежели p_i, если только p_i не есть константа. Когда $\lambda_i=0$ и $p_i=\mathrm{const}$, то $D\big(e^{\lambda_i t}p_i(t)\big)=0$ и у производной дифференцируемого квазимногочлена x нет показателя λ_i. Продолжая дифференцировать x, получаем, что все его производные являются аналогичными квазимногочленами и что коэффициенты соответствующих многочленов линейно выражаются через коэффициенты первоначальных многочленов p_i. Значение же каждого квазимногочлена при $t=0$ является суммой свободных членов многочленов, соответствующих показателям квазимногочлена. Значит, начальные значения $x(0), \dot{x}(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)$ линейно выражаются через n коэффициентов тех p_i, которые фигурируют в исходной формуле $x=\sum e^{\lambda_i t} p_i(t)$.

Данная система — это необходимое и достаточное условие для того, чтобы решение $x=\sum e^{\lambda_i t} p_i(t)$ дифференциального уравнения $P(D)x=0$ удовлетворяло предписанным начальным условиям (47). Поскольку в нашей системе алгебраических линейных уравнений число уравнений равно числу неизвестных, то можно надеяться, что она имеет решение и притом только одно. Позднее на основании других соображений будет доказано, что соответствующее решение дифференциального уравнения (45) существует и единственно; значит, данная система линейных алгебраических уравнений разрешима и её решение (т. е. совокупность коэффициентов многочленов p_i) является единственным.

Практический вывод состоит в использовании метода неопределённых коэффициентов: если мы хотим найти решение конкретного уравнения с предписанными начальными данными, то надо составить и решить соответствующую систему. Если в каком-нибудь конкретном примере это удастся, то тем самым мы не только ещё раз убедимся, что при данных конкретных начальных условиях у данного уравнения имеется решение в виде суммы элементарных квазимногочленов, но и найдём это решение.

Решая в приводимом ниже примере эту линейную систему алгебраических уравнений, мы заодно увидим, что её решение единственно. Это будет означать единственность соответствующего квазимногочлена. Однако при этом останется неясным, нет ли у дифференциального уравнения ещё другого решения, удовлетворяющего тем же начальным условиям, которое не является квазимногочленом. Повторяю, что ниже иным способом будет доказано отсутствие таких решений.

Пока же рассмотрим пример — гармонический осциллятор (7). Для него $P(\lambda)=\lambda^2+\omega^2$, решения уравнения $P(\lambda)=0$ суть $\lambda=\pm i\omega$, поэтому $x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$. В физической задаче начальные данные обычно вещественны и нужно найти вещественное решение. Покажем, что оно получается при $C_2=\overline{C}_1$. Надо использовать вещественность x не при каком-то одном t, а при всех t. Дифференцируя, добавляем к равенству

$$\operatorname{Im}(C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t})=0 \tag{48}$$

ещё

$$\operatorname{Im}(i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{Re}(C_1 e^{i\omega t} - C_2 e^{-i\omega t}) = 0. \qquad (49)$$

Умножив (48) на i и прибавив обе части полученного равенства к соответствующим частям (49), заключаем, что

$$C_1 e^{i\omega t} - \overline{C_2 e^{-i\omega t}} = 0$$

(проверьте!) А вычитаемое здесь равно $\overline{C_2} e^{i\omega t}$, и …(Доделайте сами. В этом рассуждении подразумевалось (где?), что $\omega \neq 0$; как быть при $\omega = 0$?).

Упражнение. Покажите, что полученное вещественное решение может быть записано также в следующем виде:

$$A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(Ce^{i\omega t}),$$

где A_1, A_2, A, φ — вещественные, а C, вообще говоря, комплексное. Заметим, что, как показывает опыт, обычно при интегрировании как данного, так и других линейных дифференциальных уравнений выгоднее как можно дольше работать с решением в комплексной форме, поэтому представление вещественного решения как вещественной части комплексного решения часто оказывается всего удобнее.

В конце XIX — начале XX века расчёты с комплексными числами нашли широкое применение в электротехнике и радиотехнике. Как я слышал, в связи с этим Пуанкаре — самый выдающийся математик того времени — однажды напомнил, что всего несколькими десятилетиями ранее студенты парижской Высшей политехнической школы протестовали против попытки Коши ввести в практику преподавания начальные сведения о комплексных числах и функциях комплексного переменного, говоря, что это предмет сухой и практически бесполезный. Пуанкаре добавил, что как раз в то время общественное настроение было возбуждено картиной Жерико «Плот „Медузы“» (1819 г.) Современники и соотечественники Пуанкаре прекрасно понимали, о чём идёт речь, но читателю настоящей книжки могут понадобиться пояснения.

Фрегат «Медуза» потерпел кораблекрушение. Может быть, в том и не было особой вины капитана, получившего свой пост благодаря связям в правительственных кругах, — на море всякое бывает — но уж точно, что он не последовал предписанию морской этики: капитан покидает тонущее судно последним, а совсем наоборот, первым покинул корабль на шлюпке вместе с несколькими старшими офицерами, бросив остальных на произвол судьбы. Оставшиеся люди попытались спастись, сгрудившись на единственном плоту (при подготовке судна к плаванию капитан не позаботился о достаточном количестве аварийных плавсредств) и не имея почти никаких запасов еды и, главное, воды (тоже по вине капитана, не позаботившегося об НЗ). У них не было защиты от палящего солнца. В конце концов плот заметили с проходившего рядом корабля, но к этому моменту многие погибли, здоровье других было существенно подорвано... Мастерское изображение трагического положения погибающих людей выглядело обвинительным актом против правительства эпохи Реставрации.

Теперь, заметил Пуанкаре, комплексные числа используются при расчётах в радиотелеграфии, которая позволяет попавшим в беду людям дать весть о себе.

В фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ при $\omega = 1$ получаются окружности, проходящие через любую начальную точку. При $\omega \neq 1$ заменой времени уравнение сводится к предыдущему. В фазовой плоскости, отвечающей первоначальной задаче, получаются эллипсы.

Упражнение. Рассмотрите уравнение (25). Покажите, что при $0 < k < 2\omega$ (имеется небольшая диссипация энергии) вещественные решения имеют вид

$$Ae^{-\frac{kt}{2}} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}} \cdot t + \varphi\right)$$

с произвольными вещественными A, φ. Множитель с косинусом показывает, что в системе всё ещё происходят колебания, хотя и с изменённой (уменьшенной) по сравнению со случаем $k = 0$ частотой, а экспоненциальный множитель — что со временем колебания затухают. На фазовой плоскости фазовые траектории суть спирали, «навивающиеся» на положение равновесия, находящееся в начале координат (рис. 16 *а*; я уже говорил, что такое положение равновесия называется устойчивым фокусом). Покажите, далее, что при $k \geqslant 2\omega$ большое трение уже «не оставляет сил» для колебания — в фазовой плоскости получаются узлы (рис. 16 *б*, 16 *в*). Теперь читатель может проверить, что рис. 16 *б* действительно соответствует случаю $k = 2\omega$, как и говорилось ранее. Какие фазовые портреты получаются при $k < 0$ (что физически означает не поглощение энергии, а её поступление в систему)?

Займёмся теперь интегрированием дифференциального уравнения (46) с квазимногочленом f в правой части,

$$f = \sum g_j, \quad g_j = e^{\mu_j t} q_j(t),$$

где q_j — многочлен степени l_j. Достаточно найти частные решения уравнений

$$P(D)z_j = g_j \tag{50}$$

(очевидно, что достаточно?). Так как $(D-\mu_j)^{l_j+1}g_j = 0$ (почему?), то

$$(D-\mu_j)^{l_j+1}P(D)z_j = 0. \tag{51}$$

Итак, решения (50) надо искать среди решений (51). Конечно, годятся только некоторые из последних (для произвольного решения z_j уравнения (51) $P(D)z_j$ будет каким-то элементарным квазимногочленом с показателем μ_j, но не обязательно именно квазимногочленом g_j). Но раз мы знаем, как они выглядят, то мы можем использовать метод неопределённых коэффициентов. При этом приходится различать два случая: μ_j не равно никакому из λ_i, и $\mu_j = \lambda_i$. В первом $z_j = e^{\mu_j t}r_j(t)$, где r_j — многочлен степени l_j, т. е. той же степени, что и q_j. Во втором случае $z_j = e^{\lambda_i t}r_j(t)$, где r_j — многочлен степени $k_i + l_j$ (ведь $k_i + l_j + 1$ — кратность λ_i как корня многочлена $(\lambda - \lambda_i)^{l_j+1}P(\lambda)$). В нём можно не писать слагаемые степеней, меньших k_j, т.к. они дают (при умножении на соответствующую экспоненту) решение однородного уравнения. Поэтому в r_j имеется всего $l_j + 1$ слагаемых (со степенями $t^{k_j}, t^{k_j+1}, \ldots, t^{k_j+l_j}$).

Сказанное приводит к следующей рекомендации[84]. Решение дифференциального уравнения (46) — теперь уже с учётом начального условия (47) — надо искать в виде суммы $x = \sum z_j + y$ решений z_j уравнений (51) и решения y однородного уравнения $P(D)y = 0$. При этом надо записывать z_j и y с неопределёнными коэффициентами. Значения последних надо определять из двух условий. Во-первых, z_j должны удовлетворять уравнениям (51) с заданными g_j. (Как объяснено выше, в $z_j = e^{\mu_j t}r_j(t)$ можно не писать некоторых слагаемых. Проверьте, что для определения коэффициентов многочлена r_j получается $l_j + 1$ уравнений — столько же, сколько имеется этих коэффициентов.) Во-вторых, с помощью n неопределённых коэффициентов, фигурирующих в выражении для y, надо удовлетворить n начальным условиям.

Применим эти общие соображения к примеру

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a\cos(\nu t + \varphi), \tag{52}$$

[84] Которая у нас пока что отчасти остаётся недоказанной, так что успех при её применении пока что не гарантирован. Но это не мешает уже сейчас пробовать ей следовать в том или ином конкретном примере. Если в каком-то примере у нас «всё сойдётся», то тем самым мы всё-таки решим этот пример. В этом отношении ситуация здесь аналогична ситуации для однородного уравнения.

рассматриваемому в вещественной области (a, ν и φ вещественны). Конечно, ω тоже предполагается вещественным — это обычно подразумевается, когда пишут $\ddot{x}+\omega^2 x$.

При этом можно считать, что $\omega>0$ и $\nu>0$ (знак ω вообще не влияет на уравнение, раз $(-\omega)^2=\omega^2$, а изменение знака ν равносильно замене φ на $-\varphi$, — почему?). Согласно общей теории, надо взять решение уравнения

$$\ddot{x}+\omega^2 x = Ce^{i\nu t} \tag{53}$$

с подходящим C и перейти к его вещественной части.

Упражнение. Чему равно «подходящее» C в данном случае (когда мы начинаем с (52))? (Ответ: $C=ae^{i\varphi}$.)

Квазимногочлен $Ce^{i\nu t}$ является решением уравнения $(D-i\nu)y=0$. По общей теории решения (53) надо искать среди решений уравнения $(D-i\nu)(D^2+\omega^2)x=0$. При этом надо различать те случаи, когда $\nu\neq\omega$ и когда $\nu=\omega$.

В первом случае $(D-i\nu)(D^2+\omega^2)=(D-i\nu)(D+i\omega)(D-i\omega)$, и решения уравнения $(D-i\nu)(D^2+\omega^2)x=0$ суть суммы квазимногочленов $C_1e^{i\nu t}, C_2e^{-i\omega t}, C_3e^{i\omega t}$, являющихся решениями уравнений $(D-i\nu)y=0$, $(D+i\omega)y=0$, $(D-i\omega)y=0$. Однако решения последних двух уравнений нас сейчас не интересуют — это решения однородного уравнения (7). Остаются решения дифференциального уравнения $(D-i\nu)y=0$, являющиеся квазимногочленами вида $C_1e^{i\nu t}$. Константа C_1 определяется из условия, что $(D^2+\omega^2)y=Ce^{i\nu t}$. Подставив сюда $y=C_1e^{i\nu t}$, получаем

$$(-\nu^2+\omega^2)C_1e^{i\nu t}=Ce^{i\nu t}, \quad C_1=\frac{C}{\omega^2-\nu^2}.$$

Вещественное решение имеет вид:

$$x=\operatorname{Re} C_1e^{i\nu t}=\frac{1}{\omega^2-\nu^2}\operatorname{Re}(Ce^{i\nu t})=\frac{1}{\omega^2-\nu^2}a\cos(\nu t+\varphi).$$

Частота вынужденного колебания совпадает с частотой ν, с которой изменяется внешняя сила, амплитуда этого колебания отличается от амплитуды силы на множитель

$$A(\nu)=\frac{1}{|\omega^2-\nu^2|}, \tag{54}$$

а фаза колебания совпадает с фазой внешней силы при $\nu<\omega$ и противоположна ей (равна $\varphi+\pi$)[85] при $\nu>\omega$.

[85] Хотя выше фаза φ или весь аргумент у косинуса $\nu t+\varphi$ являются числами, фазу естественно изображать точкой единичной окружности с угловой координатой $\psi=\varphi$

Во втором случае (при $\nu=\omega$) x должно быть одним из решений уравнения $(D-i\omega)^2(D+i\omega)x=0$, причём элементарные квазимногочлены, являющиеся решениями уравнений $(D\pm i\omega)y=0$, нас сейчас не интересуют (они являются решениями однородного уравнения (7)). Остаются решения уравнения $(D-i\omega)^2y=0$, являющиеся квазимногочленами вида $C_1te^{i\omega t}$. Константа C_1 снова определяется из условия, что $(D^2+\omega^2)y=Ce^{i\omega t}$. Подставив $y=C_1te^{i\omega t}$ в левую часть последнего уравнения, получаем

$$(D^2+\omega^2)y=C_1e^{i\omega t}((D+i\omega)^2+\omega^2)t=C_1e^{i\omega t}(D^2+2i\omega D)t=2i\omega C_1e^{i\omega t}.$$

Это должно равняться $Ce^{i\omega t}$, так что $C_1=-i\frac{1}{2\omega}C$. В «вещественной» задаче (52) получаем, что при $\nu=\omega$ имеется частное решение $x=$ $=a\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t+\varphi)$ (почему?).

Упражнение. Рассмотрите вещественное уравнение

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2x=a\cos(\nu t+\varphi). \tag{55}$$

Покажите, что одно из его решений имеет вид

$$x=A(\nu)a\cos(\nu t+\varphi+\psi(\nu)), \tag{56}$$

где

$$A(\nu)=\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2+k^2\nu^2}}, \tag{57}$$

а $\psi(\nu)$ — это угловая координата точки $(\omega^2-\nu^2,k\nu)$ (или, если угодно, соответствующего комплексного числа — откуда оно взялось?). Остальные решения (55) отличаются от этого решения на решения однородного уравнения (25). (Так как последние затухают, то, как уже говорилось, естественно считать, что решение (56) описывает вынужденные колебания системы под действием внешней силы $a\cos(\nu t+\varphi)$.)

В (54) и (57) мы пишем $A(\nu)$, хотя в действительности A зависит также от ω и (если есть диссипация) от k. Это значит, что мы обращаем внимание на то, как зависят от частоты ν внешней силы вынужденные колебания одной и той же физической системы (так что ω и k фиксированы). На рис. 20 изображены графики функций $A(\nu)$ для

или $\psi=\nu t+\varphi$ (в комплексных терминах — как число $e^{i\psi}$). (Это может быть более наглядным, когда рассматриваются периодические функции. Функцию, периодически зависящую от ψ с периодом 2π, можно рассматривать как функцию f на этой окружности. А если рассматривается точка, вращающаяся по окружности по закону $\psi=\nu t+\varphi$, то значение f в этой точке является периодической функцией от времени.) При таком изображении фазы точка, изображающая фазу $\varphi+\pi$, диаметрально противоположна точке, изображающей фазу φ, отчего я и назвал эти фазы противоположными.

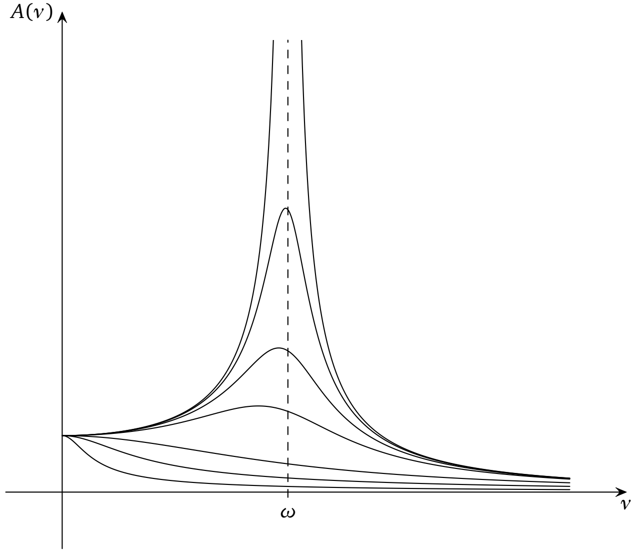


Рис. 20

нескольких различных k (а именно для $k=0$; 0,2; 0,4; 0,7; 2; 4; 10), построенные при одном и том же ω. Если попытаться нанести на тот же рисунок ещё и несколько графиков $A(\nu)$ для различных ω, то на нём получится слишком много пересекающихся линий и он станет неразборчивым. Более наглядным представляется утверждение, что при увеличении ω и k в α раз[86] график $A(\nu)$ сжимается в α^2 раз по вертикали и растягивается в α раз по горизонтали. (Проверьте!)

Упражнение. Когда $k \approx 0$, то $A(\nu)$ достигает максимума при некоторой частоте ν_k, примерно равной ω, — на графике $A(\nu)$ есть «горб». Покажите, что если увеличивать k, то, начиная с некоторого значения $k=k_0$, функция $A(\nu)$ станет монотонно убывающей, так что при фиксированной амплитуде a внешней силы вынужденные колебания имеют наибольшую амплитуду при $\omega=0$ (когда это, собственно, не колебания, а просто смещение x под действием постоянной силы). Чему равно k_0 (в зависимости от ω)?

Остановимся теперь на физическом значении полученных результатов. Самое интересное в них связано с явлением *резонанса*. Оно впервые привлекло внимание в акустике, с чем связано и название, происходящее от латинского resono — звучу в ответ, откликаюсь.

[86] При $\alpha<1$ это означает их уменьшение в $1/\alpha$ раз. (Аналогичное замечание относится и к «растяжениям» и «сжатиям» ниже.)

Впоследствии так же стали называть сходные явления, изучаемые в других разделах физики, и понятие резонанса приобрело широкий смысл, относясь ко всем тем случаям, когда результат периодического внешнего воздействия на колебательную систему (её «отклик») сильно зависит от темпа воздействия.

В широком смысле под резонансом понимают резкое возрастание вынужденных колебаний физической системы, которое происходит, когда частота периодически меняющегося со временем внешнего воздействия близка к некоторой «резонансной» частоте, связанной со свойствами самой этой системы. В примере (52) резонансной является частота ω, в примере (55) — частота, обозначенная в одном из упражнений через ν_k. Последняя, как там было отмечено, при малом k близка к ω, а ведь именно при таких k максимум функции $A(\nu)$ выражен настолько резко, что имеет смысл говорить о резонансе; поэтому практически и в этом случае резонансной является частота ω.

Но резонансы наблюдаются в поведении физических систем, описываемых не только уравнениями типа (46). В начале этого параграфа я говорил о параметрическом возбуждении колебаний и приводил пример качелей. Человеку на качелях удаётся сильно раскачаться, приседая и выпрямляясь в правильном темпе (когда частота его движений примерно равняется удвоенной частоте собственных колебаний качелей); если бы он это делал в другом темпе, сильно раскачаться ему не удалось бы. Поэтому в данном случае говорят о параметрическом резонансе. Конечно, человек становится на качели, чтобы покататься, а не для того, чтобы эмпирически исследовать зависимость колебаний качелей от темпа своих движений. Реально эксперименты с параметрическим резонансом производились не с качелями, а с электрическим колебательным контуром, в котором под внешним воздействием периодически изменялась ёмкость. Поскольку в нём диссипация энергии (ограничивающая нарастание колебаний[87]) сравнительно невелика, то дело доходило до пробоя.

[87] Мы это видим на примере (55): с увеличением k максимум функции $A(\nu)$ уменьшается и становится менее резко выраженным (рис. 20). Но понятно, что и в других случаях поглощение энергии должно сказываться примерно так же. В то же время стоит сказать, что нарастание колебаний может ограничиваться не поглощением энергии, а нелинейностью физической системы. Говоря нестрого, но наглядно, можно сказать, что нелинейная система может вести себя так, как будто она линейная, но резонансная частота зависит от амплитуды. При нарастании колебаний их частота оказывается вне того интервала частот, где сказывается резонанс (сама их частота не меняется, а меняется этот интервал). Ещё раз: ничего неверного я сейчас не сказал, но, строго говоря, я сделал хуже — сказанное мной бессмысленно (что значит моё «как будто»?). Буквально понимать то, что я сказал, нельзя, а чтобы объяснить, как же всё-таки это можно понимать (а понимать всё-таки можно), надо было бы по-настоящему углубиться в предмет.

Сильный резонанс (особенно приводящий к разрушениям) производит эффектное впечатление. Невольно думается, откуда в резонирующей физической системе берётся энергия, тем паче такая большая? Да оттуда же, откуда берутся деньги в копилке — извне. Энергия может поступать понемногу, но со временем её может накопиться немало. Точнее, если уж проводить такую аналогию, то надо вообразить копилку, в которую можно опускать лишь монеты определённого достоинства. (Что свойственно не копилке, а торговому автомату.) Аналогия была бы ещё точнее, если бы копилка всё-таки была способна принимать на хранение также и монеты иного достоинства, но в небольшом числе[88].

И ещё надо иметь в виду, что, как уже говорилось, в реальных физических системах встречаются нелинейные явления и потери энергии. Что раньше скажется при увеличении амплитуды колебаний — зависит от конкретных свойств системы. Если сперва скажутся потери энергии, то это ещё можно отобразить в «копилочной аналогии», приняв, что в копилке за определённое время исчезает некоторая доля хранящихся в ней денег («копилка взимает плату за хранение»). А вот убедительной «копилочной аналогии» нелинейных явлений я не вижу. Так что на этом мы расстанемся с копилкой.

Со временем в системе, описываемой уравнением с диссипацией (55), установится режим колебаний вида $Aa\cos(\omega t+\psi)$. «Установится» — это значит, что со временем любое решение дифференциального уравнения (55) приближается к решению $Aa\cos(\omega t+\psi)$, т. е. разность этих решений стремится к нулю. (Эта разность является решением однородного уравнения $\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2 x=0$ и описывает некое свободное колебание соответствующей физической системы, которое со временем убывает). Амплитуда Aa установившегося колебания зависит от a и от ν. При небольшом k явление резонанса всё ещё проявляется довольно чётко, приобретая следующий характер. Если $\nu\approx\omega$, то амплитуда Aa установившегося колебания намного больше, чем a, если же ν заметно отличается от ω, то Aa мала.

Академик Л. И. Мандельштам[89] (1879—1944) привёл в своих лекциях по теории колебаний[90] пример грубой ошибки в вопросе о резонансе, которую допустил английский специалист в области радио-

[88] Переходя от копилки к качелям, заметим, что всякий, кто качал другого человека на качелях и при этом толкал качели «не в такт», чувствовал по временам давление на свою руку со стороны качелей. Они возвращали обратно переданную им энергию.

[89] Он был специалистом по радиофизике и оптике и одним из первых, с кем связано формирование теории колебаний как отдельного раздела физики.

[90] См. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М., 1972. С. 180.

техники Дж. А. Флеминг (1849—1945). В книге «Волны в воде, воздухе и эфире» Флеминг написал, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Добро бы это написал какой-то малоизвестный автор, но Флеминг — человек с большими заслугами. В 1904 г. он создал первую электронную радиолампу (тогда это был ещё диод), с чего начался качественно новый этап в развитии радиотехники (причём электронные лампы доминировали в ней примерно полвека).

В примере с мостом Флеминг упустил из виду затухание колебаний. Можно вообразить, что если бы затухания не было, то со временем при обстреле из рогатки мост накопил бы такую энергию, которая могла бы его повредить, но сколько времени мальчику придётся стрелять? Я не пытался этого прикинуть, но несомненно стрелять придётся долго. Может, мальчик и не успеет за это время подрасти и, поумнев, отказаться от своей вредной затеи, но уж точно его заметят и совершить теракт ему не удастся. Однако всё это сказано в предположении, будто никакого затухания колебаний моста нет.

Психологически ошибка Флеминга, возможно, объясняется тем, что он имел дело с радиотехническими системами, в которых затухание колебаний за один период намного меньше, чем у большинства механических систем, а тем паче у моста. Поэтому там при малой амплитуде возмущения накапливается (причём по человеческим понятиям накапливается очень быстро) большая (по сравнению с амплитудой возмущающей силы) энергия — это может даже повредить неправильно рассчитанную систему. Для моста же (через Темзу ли, через скромный ли ручеёк), говоря на языке наших примеров, $A(\omega)$ не так уж велико, а так как при стрельбе из рогатки a несомненно мало, то мала и амплитуда вынужденных колебаний Aa.

И всё же мостам случалось разрушаться из-за резонанса. Два классических случая — разрушение моста в Испании в наполеоновские времена и разрушение Египетского моста через Фонтанку (С.-Петербург) в начале 1905 г. Оба моста были цепными; период собственных колебаний таких мостов близок к 1 секунде, а примерно с таким периодом шагают люди и лошади.

В Испании по мосту шёл отряд пехоты, шагая в ногу, и получилось, что мост подвергался довольно сильным толчкам, импульсным воздействиям с периодом, практически совпавшим с периодом его собственных колебаний. Несколько таких толчков ещё не повредили бы мост, но при сравнительно длинной их серии накопилась такая энергия колебаний, при которой мост разрушился. После этого при прохождении военных отрядов по мостам стали подавать команду «расстроить шаг», но в 1905 г. по Египетскому мосту шёл конный отряд, в котором лошади были обучены особенно стройному церемониальному шагу, команды же «расстроить шаг», если она и была подана, не понимали.

Понятно, что в этих случаях амплитуда внешней силы была куда больше, чем при стрельбе из рогатки — на языке наших примеров, $A(\omega)$ то же, что и раньше, но a гораздо больше, и Aa получилось недопустимо большим. (Могло сыграть свою роль и то обстоятельство, что Египтский мост, построенный в 1825 г., ни разу не ремонтировался; цепи вполне могли проржаветь и их прочность снизилась[91].) Теперь при строительстве цепных мостов специально вносят такие особенности в конструкцию, чтобы «отодвинуть» период собственных колебаний от вероятных периодов тех сил, которые предположительно будут на него действовать.

Читатель вправе выразить скептицизм насчёт того, насколько дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a\cos(\nu t + \varphi) \tag{58}$$

передаёт существенные черты колебаний моста, по которому идут в ногу люди или лошади. Речь идёт, конечно, не о буквальной точности описания колебаний моста — мост куда сложнее гармонического осциллятора.

Хорошо известно сравнение: теоретическая модель явления — это скорее карикатура или шарж, выпукло передающий какие-то существенные особенности изображаемого, а не фотография, воспроизводящая все его черты. Я не знаю точно, кто является автором этих слов. Достоверно известно, что такое сравнение проводил выдающийся советский физик-теоретик Я. И. Френкель, однако в моей памяти в этой связи почему-то осталось имя «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского. Но может быть сам он о «карикатурах» не говорил, а это сравнение употребил кто-то другой, говоря о работах Жуковского. В любом случае имена Френкеля и Жуковского всплывают здесь не случайно — они как раз придумали много «карикатур» для различных физических задач, в том числе задач технического происхождения (последнее особенно относится к Жуковскому).

Но если уж физическая система имеет период собственных колебаний[92] $\omega \approx \nu$, то кажется правдоподобным, что её реакция на внешнюю силу может напоминать реакцию гармонического осциллятора в аналогичных условиях. (Что и подтверждается более общей теорией,

[91] Мост был восстановлен только в 1956 г. с некоторым изменением конструкции и утратой части декора. Но он остался «египетским» — его цепи держат сфинксы.

[92] Период одного из её собственных колебаний — у системы, которая сложнее осциллятора, их может быть несколько.

о которой здесь, конечно, не может быть речи.) Далее, у нас не учтено затухание, даром что о нём говорилось, и кроме того вместо точного равенства частот $\nu = \omega$ скорее всего имеет место приближённое.

Качественно ответ состоит в том, что при малом затухании и при $\nu \approx \omega$ в течение некоторого времени колебания нарастают примерно так, как если бы затухания не было и частоты точно совпадали. А если за это время нарастание колебаний приведёт к разрушению моста или иного объекта, то уже не имеет значения, что кабы он не разрушился, то со временем различия между его колебаниями и решениями (58) стали бы заметными. И, наконец, самое серьёзное возражение: сила воздействия человеческих или лошадиных ног на мост не похожа на плавно изменяющуюся со временем величину $a\cos(\nu t + \varphi)$ — скорее воздействие ног на мост носит характер периодически повторяющихся толчков, да ведь я, собственно, уже и говорил о толчках, импульсном воздействии.

Давайте уточним, каким математическим образом надо описывать подобную силу. Мы, конечно, по-прежнему заменяем мост гармоническим осциллятором и толчки десятков ног — одной «общей» силой. Она отлична от нуля только в течение коротких отрезков времени вида $(t_0 + nT, t_0 + \Delta t + nT)$. ($T$ — тот период, с которым повторяются толчки. Он пока что может не совпадать с периодом $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ собственных колебаний гармонического осциллятора.) В течение каждого такого отрезка времени осциллятору (если понимать его как механическую систему) сообщается некоторый импульс P, не очень большой, но и не очень малый. За это время координата x не успевает заметно измениться, скорость же $\dot{x}$ увеличивается (или уменьшается, в зависимости от знака P) на некоторую величину V (в механическом случае $V = \dfrac{P}{m}$, где m — масса осциллятора).

В пределе при $\Delta t \to 0$ (и неизменном P) мы получаем такую картину[93]. Пока $t \neq t_0$, $t_0 \pm T$, $t_0 \pm 2T, \ldots$, фазовая точка $(x, \dot{x})$ движется, как при свободных колебаниях гармонического осциллятора, т. е. согласно дифференциальному уравнению $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. В моменты же времени $t_0 + nT$ координата x не меняется, а $\dot{x}$ увеличивается на V, так что фазовая точка мгновенно «перескакивает» из положения $(x(t_0 + nT), \dot{x}(t_0 + nT))$ в $(x(t_0 + nT), \dot{x}(t_0 + nT) + V)$. Таким образом, в момент времени $t_0 + nT$ надо, собственно, говорить о левой произ-

[93] Карикатуру, говоря словами не то Френкеля, не то Жуковского. Впрочем, и допредельная модель с гармоническим осциллятором и с охарактеризованной выше силой хотя и может быть довольно точной картиной для некоторых физических задач, но применительно к марширующему по мосту отряду является, конечно, карикатурой.

водной $\dot{x}_{\text{лев}}(t_0+nT)$ или правой производной $\dot{x}_{\text{пр}}(t_0+nT)$, при этом

$$(x(t_0+nT), \dot{x}_{\text{пр}}(t_0+nT)) = (x(t_0+nT), \dot{x}_{\text{лев}}(t_0+nT)+V).$$

После этого в течение времени T, т. е. когда t возрастает от t_0+nT до $t_0+(n+1)T$, фазовая точка движется, как при свободном колебании гармонического осциллятора, начавшемся в момент времени t_0+nT с начальными значениями $(x(t_0+nT), \dot{x}_{\text{пр}}(t_0+nT))$. В момент $t=t_0+(n+1)T$ происходит новый скачок, и т. д.

Упражнение. Покажите, что если подобные импульсные воздействия повторяются с периодом, равным T_0 (периоду свободных колебаний осциллятора), то колебания неограниченно возрастают (физически это означает, что со временем наше упрощённое описание поведения физической системы станет непригодным — например, мост обрушится).

Указание. Точки $(x(t_0+nT), \dot{x}_{\text{лев}}(t_0+nT))$ и $(x(t_0+nT), \dot{x}_{\text{пр}}(t_0+$ $+nT))$ расположены на одной и той же прямой.

Разрушение мостов — это всё-таки своего рода экзотика. Намного чаще резонанс приводил к нежелательным и даже опасным вибрациям в корабельном деле (да и на заводах тоже). Он может навредить и теперь, но теперь по крайней мере стало ясно, в чём тут дело, а потому можно сознательно принимать меры против резонанса. С другой стороны, резонанс, как и большинство природных явлений, будучи в одних случаях вредным, в других может быть очень полезным. В радиотехнике усиление амплитуды при резонансе — одно из основных явлений, на которых эта область техники основана. (Только он и позволяет «настроиться» на определённую длину волны и принимать соответствующую радиостанцию.) Резонанс также нередко используется в различных измерительных приборах.

Теперь мы докажем, что действительно для любых начальных данных найдётся решение $x=\sum y_j$ с элементарными квазимногочленами y_j и что никаких других решений нет. (При этом мы фактически вновь получим уже известный нам факт, что определённые квазимногочлены действительно являются решениями, но теперь наши рассуждения будут сложнее прежних, поэтому имело смысл установить данный факт независимо от этих рассуждений.)

Теорема 2. *Пусть квазимногочлен $f(t)$ имеет показатели $\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_m$, а степени соответствующих многочленов*[94] *суть $l_1, \ldots, l_m$, так*

[94] Напомню, что это название появилось у нас в том самом месте, где определялось понятие квазимногочлена. В (59) многочленом, соответствующим показателю μ_i, является $p_i(t)$.

что

$$f(t)=\sum_{i=1}^{m}e^{\mu_i t}p_i(t),\quad \textit{степень } p_1(t)=l_1,\dots,\textit{степень } p_m(t)=l_m. \quad (59)$$

Пусть $P(\lambda)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, различные корни которого суть $\lambda_1,\dots,\lambda_h$ и их кратности равны $k_1,\dots,k_h$, так что

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\dots(\lambda-\lambda_h)^{k_h}. \quad (60)$$

При произвольных заданных n числах $x_0,\dot{x}_0,\dots,x_0^{(n-1)}$ имеется ровно одно решение $x(t)$ дифференциального уравнения $P(D)x=f$, удовлетворяющее начальному условию (47) (т. е. начальные значения этого решения и его производных порядка меньше n суть как раз заданные числа $x_0^{(i)}$). Оно является квазимногочленом, показатели которого суть $\mu_1,\dots,\mu_m$ и, возможно, корни λ_i многочлена $P(\lambda)$ (все или часть корней)[95]. Степени соответствующих многочленов таковы. Если показатель μ_j квазимногочлена f не совпадает ни с одним из корней многочлена P, то эта степень равна l_j. Если μ_j совпадает с некоторым из корней многочлена P, скажем с λ_i, то эта степень равна l_j+k_i. Если, наконец, корень λ_i многочлена $P(\lambda)$ не совпадает ни с одним из показателей μ_j квазимногочлена $f(t)$, то степень многочлена, отвечающего λ_i в выражении для $x(t)$, не превосходит k_i-1.

В той части теоремы, где говорится о существовании и единственности решения $x(t)$ с данными начальными значениями и о том, что это решение является квазимногочленом, формулировка является простой и легко запоминающейся. Говоря о том, какие у x могут быть показатели, мы уже сталкиваемся с возможностью различных вариантов, но они действительно могут быть разными (приведите примеры), а формулировка при этом всё-таки остаётся достаточно простой и запоминающейся. Когда же речь заходит о степенях многочленов, отвечающих этим показателям, формулировка удлиняется (это связано с существом дела — приведите примеры), и возникает опасение, что если запомнить всё это и можно, то уж в доказательстве нам предстоит перебор различных возможностей — может быть, и не особенно сложный, но громоздкий. Перепробовав несколько вариантов, я нашёл самым простым вариант, в котором доказательство разбивается на две части.

[95] «Возможно» относится только к тем из λ_i, которые не совпадают ни с одним из μ_j. Те же корни, которые совпадают, обязательно являются показателями квазимногочлена x. На теоретико-множественном языке, вероятно известном части читателей,

$$\{\text{показатели } f\}\subset\{\text{показатели } x\}\subset\{\text{показатели } f\}\cup\{\text{корни } P\}.$$

Сперва мы докажем, что при любых числах $x_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ дифференциальное уравнение $P(D)x = f$ имеет ровно одно решение x, удовлетворяющее начальному условию (47), и что x является квазимногочленом, показатели которого содержатся среди показателей квазимногочлена f и корней многочлена P. Но этом этапе ничего не говорится о степенях многочленов, отвечающих показателям квазимногочлена x. Фактически из рассуждений данного этапа можно было бы извлечь и информацию об этих степенях, но это-то и сделало бы доказательство несколько громоздким. Затем, уже зная показатели, мы отдельно обсудим вопрос о степенях соответствующих многочленов (не обращаясь к предыдущим рассуждениям, а действуя иначе).

Главная часть первого этапа доказательства теоремы 2 содержится в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть квазимногочлен $f(t)$ имеет показатели $\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_m$, а степени соответствующих многочленов суть $l_1, \ldots, l_m$, так что*

$$f(t) = \sum e^{\mu_i t} p_i(t), \quad \textit{степень } p_1 = l_1, \ldots, \textit{степень } p_m = l_m.$$

При произвольно заданном числе x_0 имеется ровно одно решение $x(t)$ дифференциального уравнения $(D - \nu)x = f$, принимающее при $t = 0$ значение $x(0) = x_0$. Оно является квазимногочленом, показатели которого суть показатели квазимногочлена f и, возможно, ν.

Эта лемма является частным случаем утверждения теоремы 2 о показателях, получающимся при $n = 1$.

Доказательство леммы 2. Сперва мы построим некоторое *частное решение* $y(t)$ рассматриваемого уравнения (т. е. какое-то одно его решение), которое будет квазимногочленом с показателями μ_j.

Помимо термина *частное решение* имеется ещё термин *общее решение*. Это не одно решение, а семейство решений, зависящих от некоторых констант, которое содержит все решения данного уравнения (каждое конкретное решение получается при каком-то своём значении этих констант. Например, $Ce^{\nu t}$ — общее решение уравнения $(D - \nu)x = 0$. Что при каждом $C = \mathrm{const}$ получается решение, нам уже известно (но ничего не стоит проверить это ещё раз непосредственной подстановкой $x = Ce^{\nu t}$ в уравнение). Доказательство того факта, что других решений нет, фактически содержится в рассуждениях, проводившихся ранее для более общего уравнения $(D - \lambda_i)^{k_i} y = 0$, но так как там эта сторона дела не акцентировалась, я повторю: сделаем замену переменной $y = e^{\nu t} z$; для z получится уравнение $Dz = 0$; значит, $z = \mathrm{const}$. Для уравнения (7) нам фактически тоже известно общее решение — это решения, записанные выше в различных видах (с константами C_i, A_i, A, φ, C). Некоторые из этих общих решений относятся к комплексной области, другие — только к вещественной. Но мы пока не доказали ни того, что эти семейства содержат решение с наперёд заданными начальными условиями (в одних случаях комплексными, в других — вещественными), ни того, что у уравнения (7) нет других решений. Впрочем, геометрические соображения из § 3 несомненно доказывают первое и по крайней мере свидетельствуют в пользу второго; можно сомневаться, в какой степени они доказывают второе, но на самом деле их легко довести до полного доказательства. Всё это следует из теоремы 2.

Затем мы построим решение того же уравнения, удовлетворяющее произвольным наперёд заданным начальным условиям, которое будет квазимногочленом с теми же показателями и, возможно, ещё с показателем ν. И наконец, мы докажем, что никаких других решений нет.

Начнём с частного случая — уравнения $(D-\nu)y=e^{\mu t}p(t)$, где p — многочлен степени l,

$$p(t)=a_l t^l+a_{l-1}t^{l-1}+\ldots+a_1 t+a_0, \quad a_l\neq 0. \tag{61}$$

Поскольку $e^{\mu t}$ не обращается в нуль ни при одном t, можно перейти к новой независимой переменной z, приняв, что $y=e^{\mu t}z$. Для z получается уравнение

$$(D-\nu)(e^{\mu t}z(t))=e^{\mu t}(D+\mu-\nu)z(t)=e^{\mu t}p(t),$$

т. е.

$$(D+\mu-\nu)z(t)=p(t). \tag{62}$$

Попробуем найти какое-нибудь решение последнего уравнения в виде многочлена от t степени l, если $\mu-\nu\neq 0$, и степени $l+1$, если $\mu=\nu$.

При $\mu-\nu\neq 0$ мы подставляем в уравнение (62)

$$z(t)=b_l t^l+b_{l-1}t^{l-1}+\ldots+b_1 t+b_0.$$

Очевидно,

$$(D+\mu-\nu)z(t)=(\mu-\nu)b_l t^l+ \\ +[(\mu-\nu)b_{l-1}+lb_l]t^{l-1}+\ldots+[(\mu-\nu)b_1+2b_2]t+[(\mu-\nu)b_0+b_1]$$

(какой коэффициент стоит здесь при t^i?). Для того чтобы это выражение равнялось $p(t)$, необходимо и достаточно выполнение системы равенств

$$(\mu-\nu)b_l=a_l, \quad (\mu-\nu)b_{l-1}+lb_l=a_{l-1}, \quad \ldots, \\ (\mu-\nu)b_1+2b_2=a_1, \quad (\mu-\nu)b_0+b_1=a_0.$$

Идя по этой цепочке равенств слева направо, мы видим, что требуемые $b_l, b_{l-1}, \ldots, b_1, b_0$ существуют.

Когда же $\mu = \nu$, то $D + \mu - \nu = D$, т. е. z должно удовлетворять уравнению $Dz = p$. Было сказано, что мы намерены искать его решение в виде многочлена степени $l + 1$:

$$z(t) = b_{l+1}t^{l+1} + b_l t^l + \ldots + b_1 t \quad \text{(свободный член не понадобится).}$$

На сей раз подстановка выражения для z в дифференциальное уравнение приводит к выводу, что $z(t)$ является решением тогда и только тогда, когда выполняется система равенств

$$(l+1)b_{l+1} = a_l, \, lb_l = a_{l-1}, \ldots, b_1 = a_0.$$

Существование требуемых $b_{l+1}, b_l, \ldots, b_1$ очевидно.

Переходя к общему случаю, мы сперва убедимся, что уравнение $(D - \nu)y = f(t)$, где $f(t)$ — квазимногочлен общего вида, как указано в формулировке леммы (его показатели суть $\mu_1, \ldots, \mu_m$, соответствующие многочлены суть p_i), имеет решение $y(t)$, которое принимает заданное начальное значение x_0 и является квазимногочленом с показателями μ_j. Теперь это совсем просто. Мы уже знаем, что существуют решения y_j уравнений $(D - \nu)y_j = e^{\mu_j t}p_j(t)$, являющиеся квазимногочленами с показателями μ_j. Сумма $y = \sum y_j$ этих y_j, очевидно, является решением уравнения $(D - \nu)y = \sum e^{\mu_j t}p_j(t) = f(t)$, причём это решение — квазимногочлен с показателями μ_j.

Мы пока не заботились о начальном условии. Пусть задано начальное значение x_0. Заметим, что уравнение $(D - \nu)z = 0$ имеет решения вида $z = Ce^{\nu t}$, где C — произвольная константа. (Вообще-то это явно или неявно нам уже известно, а всё-таки — почему?) Наряду с построенным выше частным решением $y(t)$ уравнения $(D - \nu)x = f(t)$ функция $x = Ce^{\nu t} + y(t)$ тоже является решением последнего уравнения (почему?). Начальным значением этого решения является $x(0) = y(0) + C$; начальное значение будет равно x_0, если взять $C = x_0 - y(0)$. К прежнему набору показателей решения добавился ещё показатель ν, если $C \neq 0$ и если ν не совпадает ни с одним из μ_i.

Наконец, докажем единственность решения с заданным начальным значением. Допустим, что наряду с известным нам квазимногочленом $x(t)$ имеется ещё одна функция $y(t)$, для которой $(D - \nu)y = f$ и $y(0) = x_0$. Тогда функция $z = x - y$ удовлетворяет однородному уравнению $(D - \nu)z = 0$, а её начальное значение $z(0) = 0$ (это ясно?). Все решения уравнения $(D - \nu)z = 0$ имеют вид $z = Ce^{\nu t}$, а если $z(0) = 0$, то $C = 0$ и z тождественно (т. е. при всех t) равно нулю. □

Замечание. Выше мы использовали применительно к нашему уравнению два принципа, относящихся к общим линейным уравнениям $P(D)x = f$, где оператор $P(D)$ может даже иметь переменные коэффициенты (но должен быть линейным). Во-первых, если x — решение дифференциального уравнения $P(D)x = f$, а y — решение $P(D)y = g$, то $z = x + y$ — решение уравнения $P(D)z = f + g$. Во-вторых, общее решение неоднородного уравнения $P(D)x = f$ получается из любого частного решения y этого уравнения прибавлением к y общего решения z однородного уравнения $P(D)z = 0$.

Упражнение. Извлеките из приведённых рассуждений утверждение о степенях многочленов, фигурирующих в квазимногочлене $x(t)$:

1. Если ν не совпадает с показателем μ_i квазимногочлена f, то степень многочлена, отвечающих показателю μ_i — та же, что и в f. Если ν совпадает с одним из показателей квазимногочлена f, скажем, с μ_i, то степень соответствующего многочлена равна $l_i + 1$. Наконец, если ν не совпадает ни с одним из μ_i, а в $x(t)$ имеется слагаемое, отвечающее показателю ν, то степень соответствующего многочлена равна нулю (так что соответствующее слагаемое есть $Ce^{\nu t}$ с некоторой константой C); короче, в этом случае

$$x(t) = \sum e^{\mu_i t} q_i(t) + Ce^{\nu t},$$

где степени $q_i = l_i$, а $C = \mathrm{const}$ и может равняться 0.

2. Если ν совпадает с одним из показателей квазимногочлена f, скажем с μ_i, то степень соответствующего многочлена равна $l_i + 1$, так что

$$x(t) = \sum e^{\mu_j t} q_j(t), \quad \text{степень } q_j = l_j \text{ при } j \neq i, \text{ степень } q_i = l_i + 1.$$

(Вместе с настоящим утверждением лемма 2 составляет в точности частный случай теоремы 2 для $n = 1$).

Первый этап доказательства теоремы 2. По существу, он состоит в многократном применении леммы 2, но оформлен будет как рассуждение, ведущееся индукцией по степени n многочлена $P(\lambda)$, т. е. по порядку дифференциального оператора $P(D)$ — при этом, мне кажется, конец доказательства получается короче. При $n = 1$ теорема совпадает с леммой 3 и потому верна. Пусть теорема доказана для всех многочленов степени $n - 1$. Докажем её справедливость для многочлена $P(\lambda)$ степени n. Как обычно, мы считаем, что старший коэффициент $P(\lambda)$ равен 1, что не ограничивает общности.

Пусть λ_1 — один из корней $P(\lambda)$. Тогда $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)Q(\lambda)$, где $Q(\lambda)$ — многочлен степени $n - 1$. Он тоже имеет старший коэффициент 1, так что $Q(\lambda) = \lambda^{n-1} + R(\lambda)$, где $R(\lambda)$ — многочлен степени $n - 2$,

$$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-2} a_j \lambda^j.$$

Перепишем дифференциальное уравнение $P(D)x = f$ в виде $(D-\lambda_1)\times \times Q(D)x = f$ и введём новую неизвестную $y = Q(D)x$. Тогда наше уравнение сводится к двум

$$(D-\lambda_1)y = f, \quad Q(D)x = y. \tag{63}$$

Если y и x удовлетворяют этим уравнениям, то x является решением уравнения $P(D)x = f$. А если x является решением последнего уравнения, то $y = Q(D)x$ является решением первого из уравнений (63) и в то же время по самому определению y интересующая нас функция $x(t)$ является решением уравнения $Q(D)x = y$.

Посмотрим, какие будут начальные условия для решений x, y уравнений (63), если мы хотим, чтобы x удовлетворяло заданным начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{64}$$

Первые $n-1$ из этих условий являются начальными условиями для того же $x(t)$, рассматриваемого как решение второго из уравнений (63) (это уравнение $(n-1)$-го порядка). Что же до начального значения y_0 решения $y(t)$ первого из уравнений (63), то по самому определению

$$y = Q(D)x = D^{n-1}x + R(D)x = x^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^{(j)}.$$

Если производные $x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, то $y(0)$ должно равняться $x_0^{(n-1)} + \sum\limits_{j=0}^{n-2} a_j x_0^{(j)}$. Итак, в качестве начального условия для $y(t)$ надо принять такое условие: $y(0) = y_0$, где $y_0 = x_0^{(n-1)} + \sum\limits_{j=0}^{n-2} a_j x_0^{(j)}$.

По лемме 2 первое из уравнений (63) имеет единственное решение $y(t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$. Это решение является квазимногочленом, показатели которого суть показатели f и, возможно, λ_1. По предположению индукции, второе из уравнений (63) (с этим y) имеет единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \ldots, \quad x^{(n-2)}(0) = x_0^{(n-2)}. \tag{65}$$

Оно является квазимногочленом, показатели которого — это показатели y и, возможно, некоторые из корней многочлена $Q(\lambda)$. Стало быть, показатели x — это, во всяком случае, показатели f и ещё, может быть, корни Q и λ_1. А корни Q и λ_1 являются корнями многочлена P. Выходит, что x имеет как раз такие показатели, о каких говорится в теореме 2.

Надо ещё убедиться, что $x(t)$ удовлетворяет начальному условию (64). Ведь сейчас $x(t)$ — это решение второго из уравнений (63) и это решение, как и положено для решения уравнения $(n-1)$-го порядка, удовлетворяет начальному условию (65), предписывающему значения для производных $x^{(i)}(0)$ с $0 \leqslant i \leqslant n-2$, но ничего не говорящему об $x^{(n-1)}(0)$. Надо проверить, действительно ли другие детали построения обеспечивают, что $x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$.

Уравнение $Q(D)x = y$ равносильно тому, что $D^{(n-1)}x + \sum\limits_{j=0}^{n-2} a_j D^j x = y$, откуда

$$x^{(n-1)}(0) = y(0) - \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^{(j)}(0) = y_0 - \sum_{j=0}^{n-2} a_j x_0^{(j)},$$

а выше, обсуждая начальное условие для y, мы как раз и взяли такое y_0, что эта разность равна $x_0^{(n-1)}$. Утверждение теоремы 2 о показателях полностью доказано.

Доказательство той части теоремы 2, где говорится о степенях многочленов, отвечающих показателям квазимногочлена $x(t)$, основывается на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть $x(t)$ — квазимногочлен, у которого показатели суть $\nu_1, \ldots, \nu_s$ и соответствующие многочлены имеют степени $m_1, \ldots, m_s$. Тогда $P(D)x(t)$ — квазимногочлен, у которого показатели содержатся среди показателей квазимногочлена $x(t)$, и для любого из показателей $P(D)x(t)$ степень соответствующего многочлена не выше m_i. Если $P(\nu_i) \neq 0$, то ν_i заведомо является одним из показателей квазимногочлена $P(D)x(t)$ и степень отвечающего ей многочлена равна m_i. Если же ν_i является k_i-кратным корнем многочлена P, то при $m_i < k_i$ у квазимногочлена $P(D)x(t)$ нет показателя ν_i, а при $m_i \geqslant k_i$ такой показатель имеется и отвечающий ему многочлен имеет степень $m_i - k_i$.*

Действительно, если $x = \sum\limits_{i=1}^{s} e^{\nu_i t} p_i(t)$, то $P(D)x = \sum P(D)\big(e^{\nu_i t} p_i(t)\big)$. По лемме 1 каждое $P(D)\big(e^{\nu_i t} p_i(t)\big)$, если это не тождественный нуль[96], есть квазимногочлен вида $e^{\nu_i t} q_i(t)$, где степени многочленов q_i не выше степеней p_i и совпадают с последними, когда $P(\nu_i) \neq 0$ (уж в этом-то случае $P(D)\big(e^{\nu_i t} p_i(t)\big)$ не является тождественным нулём). Когда же ν_i является k_i-кратным корнем многочлена P, то по той же лемме

[96] Некоторые из выражений $P(D)\big(e^{\nu_i t} p_i(t)\big)$ вполне могут тождественно равняться нулю. В этих случаях ν_i не являются показателями $P(D)x(t)$.

$P(D)\big(e^{\nu_i t}p_i(t)\big)=0$ (тождественно) при $k_i>m_i$ и

$$P(D)(e^{\nu_i t}p_i(t)) = e^{\nu_i t} \quad (\text{многочлен степени } m_i-k_i)$$

при $k_i\leqslant m_i$. Тем самым лемма 3 доказана.

Упражнение. С помощью леммы 3 доведите до конца доказательство теоремы 2 (напоминаю, что в той её части, которая пока что не была доказана, речь идёт о степенях многочленов r_i, фигурирующих в представлении $x(t)=\sum e^{\mu_i}r_i(t)$).

Мы выяснили, какой вид имеют решения однородного дифференциального уравнения (45) — это квазимногочлены с определёнными показателями в экспоненциальных множителях и определёнными степенями многочленов, на которые эти экспоненты умножаются. В общей сложности у этих многочленов имеется n коэффициентов. Если нам заданы начальные условия, то потребовав, чтобы квазимногочлен с неопределёнными коэффициентами и его производные надлежащих порядков имели заданные начальные значения, мы получим систему n линейных алгебраических уравнений для определения этих неопределённых коэффициентов (мы об этом уже говорили — где?). Коль скоро соответствующий квазимногочлен существует и единствен, то данная система имеет единственное решение. С соответствующими изменениями сказанное относится и к неоднородному уравнению (46), в правой части которого стоит квазимногочлен. В этом случае мы ищем решение в виде некоторого выражения с бóльшим числом неопределённых коэффициентов, но уравнений для их определения получается столько же, сколько имеется коэффициентов. Мы по-прежнему можем заранее быть уверенными, что система имеет единственное решение (почему?). Тем самым вопрос об интегрировании уравнения (45) (или (46) с квазимногочленом $f(t)$) полностью решён.

К сожалению, практически это решение не всегда удовлетворительно. Дело в том, что при увеличении порядка n уравнения (45) или (46) решение соответствующей системы алгебраических линейных уравнений быстро становится всё более сложным делом. К счастью, имеется способ, позволяющий менее громоздким образом находить непосредственно решения, принимающие при $t=0$ заданные начальные условия, не обращаясь к общему виду всех решений и не подбирая соответствующих коэффициентов. Этот способ был открыт О. Хевисайдом и является составной частью предложенного им *операционного исчисления*.

О. Хевисайд (1850—1925) — английский инженер, физик и прикладной математик, занимавшийся более всего вопросами электротехники, техники связи и теории электромагнитного поля. Он не имел систематического математического образования и «доходил до всего своим умом». Поэтому у самого Хевисайда операционное исчисление не имело строгого математического обоснования и он даже не тревожился по этому поводу — ему приписывают слова: «Если суп вкусный, то какое мне дело, как он сварен»? (Можно возразить: «А тогда где гарантия, что в суп не залетела муха или, ещё хуже, не попала бледная поганка?».) Однако впоследствии хевисайдовская «рецептура» была оправдана.

Оправдания можно достичь несколькими способами. Мне известны пять. Они, правда, имеют различную степень общности, но все одинаково хорошо покрывают вопрос о решениях уравнения $P(D)=f$ с квазимногочленом f и с предписанными начальными значениями. Эти способы были предложены различными авторами в различное время; первые предложения появились примерно через четверть века после первых публикаций Хевисайда на эту тему. Впрочем, у О. Коши имелось нечто вроде довольно значительного и вполне строгого фрагмента операционного исчисления, причём он основывался, по существу, на одном из тех способов, которые впоследствии были привлечены для «реабилитации» Хевисайда. Как ни странно, я не встречал в литературе упоминаний об этом факте. Правда, этот способ менее удобен, чем другой, и был оставлен.

Однако я не буду об этом рассказывать — это завело бы нас слишком далеко. Я только приведу пример, показывающий, что действительно бывает возможно найти решение $x(t)$ уравнения (45) с заданными начальными значениями, не обращаясь к общему виду всех решений (45) и не определяя соответствующих коэффициентов с помощью системы n линейных уравнений. Я не буду объяснять, как в операционном исчислении получается приведённая ниже формула, но читатель при желании может её получить, используя только те сведения, с которыми он познакомился в настоящем параграфе.

Упражнение. Пусть все корни λ_i многочлена $P(\lambda)$ — простые, и пусть $x(t)$ — решение (45) с начальными данными $x^{(i)}(0))$, $0\leqslant i<n$. Обозначим через Q_i произведение $\prod\limits_{j\neq i}(\lambda-\lambda_i)=\dfrac{P(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}$. Заметим, что в $Q_i(0)$ входят только производные $x^{(i)}$, $0\leqslant i<n$, и поэтому при заданных начальных данных мы можем легко вычислить значение $(Q_i(D)x)(0)$ функции $Q_i(D)x$ при $t=0$. Докажите, что

$$x(t)=\sum_i \frac{Q_i(D)x(0)}{P'(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}.$$

Примените эту формулу к уже известной нам задаче о свободных колебаниях гармонического осциллятора с заданными начальными условиями.

§ 6. Автоколебания

То, что при наличии трения колебания со временем затухают, представляется физически очевидным. Можно представить себе обратный процесс — в систему всё время поступает дополнительная энергия (источник которой может быть встроен в саму систему, а может и быть внешним). Если без такого поступления физическая система описывалась системой вида (27), а поступление энергии связано (в механическом варианте) с действием силы, пропорциональной фазовым координатам x и y, то математическое описание системы с «подкачкой» энергии по-прежнему даётся некоторой линейной системой вида (27), только с изменёнными коэффициентами.

При достаточно большой «подкачке» энергии колебания в системе будут, наоборот, возрастать и, в частности, положение равновесия O станет неустойчивым. Но если физически вполне осмысленно говорить о неограниченном затухании колебаний в системе, то их неограниченное нарастание физически невозможно. В крайнем случае система сломается или сгорит, что, конечно, отнюдь не входит в расчёты создателей технических устройств. В более «умеренном» варианте происходит следующее: при достаточном размахе колебаний диссипация энергии возрастает настолько, что она полностью компенсирует поступление энергии извне и нарастание колебаний прекращается.

Но это может произойти только в нелинейной системе. Если, скажем, поступление энергии пропорционально x и y, а диссипация нелинейно зависит от x и y, то вполне может случиться, что при малых x, y «перевешивает» поступление энергии и колебания нарастают, а при больших x, y «перевешивает» диссипация и колебания затухают. Кажется правдоподобным, что тогда в системе со временем поступление энергии и её поглощение уравновешиваются, и в системе устанавливается колебательный режим с колебаниями какой-то «средней» амплитуды. Никакие внешние факторы не предопределяют периодического внешнего воздействия на систему, а между тем в системе устанавливается колебательный режим. Не было бы ничего особенного, если бы он установился под действием внешнего воздействия, периодически изменяющегося со временем (это были бы знакомые нам вынужденные колебания), но в данном случае это не так: колебательная система, так сказать, «сама решает колебаться и сама себе устанавливает параметр колебаний (их размах и период)».

Андронов предложил для таких колебательных процессов название *автоколебания*, которое стало общепринятым, поскольку оно указывает на важнейшую особенность — колебания возникают в самой системе, а не навязываются внешним воздействием. К этому надо ещё раз добавить, что автоколебания — это явление, которое принципиально нелинейно и принципиально неконсервативно (энергия при этом как бы протекает через систему, поступая из встроенного в неё источника энергии или откуда-то извне и отчасти превращаясь в тепло вследствие диссипативных процессов, отчасти совершая некоторую полезную работу).

Мы на каждом шагу встречаемся с автоколебательными системами, начиная с нашего собственного сердца. Автоколебаниями являются звучание скрипки или менее музыкальный скрип двери, автоколебательными системами являются часы. Конечно, математическое описание всех этих систем довольно сложно. Мы рассмотрим только одно простейшее дифференциальное уравнение, описывающее автоколебания — *уравнение ван дер Поля*

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{66}$$

Б. ван дер Поль (1889—1959) — голландский радиоинженер и прикладной математик. В ряде математических работ носящее его имя уравнение либо специально изучалось, либо фигурировало в качестве одного из главных примеров применения тех или иных результатов более или менее общего характера.

Одну из последних услуг математике уравнение (66) оказало, когда в 1938 г. исследовательское подразделение по радио английского департамента научных и технических исследований разослало английским учёным меморандум, где рекомендовало исследовать некоторые нелинейные дифференциальные уравнения, связанные с радиотехникой. В том числе было указано (не без подсказки со стороны ван дер Поля), что интерес представляет неавтономное уравнение

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = bk\cos\nu t,$$

отличающееся от (66) тем, что вместо нуля в правой части стоит выражение типа $a\cos\nu t$. При последующем обмене мнениями ван дер Поль указал, что особый интерес представляет изучение этого уравнения в определённой области значений параметров k, ω, b, ν.

Ответом явилось обширное исследование, проведенное Дж. Литтлвудом (1885—1977) и М. Картрайт (1900—1998) и опубликованное в нескольких статьях, начиная с 1945 г. Не знаю, принесло ли это пользу английской радиотехнике, но математике принесло — с исследования Литтлвуда и Картрайт начался «путь к хаосу» (не в переносном, а в буквальном смысле — начался цикл работ, приведших к открытию и исследованию движений хаотического характера в динамических системах). Это не единственный путь, ведущий к хаосу. В § 8 я расскажу о другом, куда более лёгком пути, на который вполне можно было вступить в начале XX века, но на который тогда не обратили внимания. На трудном же пути, на который вступили Литтлвуд и Картрайт не без совета ван дер Поля, движение порой надолго приостанавливалось, но о нём не забывали, и именно он и привёл нас к хаосу.

Сам ван дер Поль предложил уравнение (66) для описания работы лампового генератора радиоколебаний, но оно вообще хорошо отражает особенности простейших случаев автоколебаний (в связи с чем оно бегло упоминалось и до ван дер Поля, см. ниже). Применительно к ламповому генератору нелинейность уравнения (66) вызвана несколько иной причиной, нежели в «общих разговорах» выше — она обусловлена нелинейной зависимостью тока, идущего через электронную лампу, от напряжения на её управляющей сетке.

Формально это относится к простейшей электронной лампе — триоду. Однако в классической «Теории колебаний» А. А. Андронова, А. А. Витта (1902—1938) и С. Э. Хайкина (1902—1968) обсуждению математических свойств уравнения (66) посвящено меньше места (там, правда, отмечено только самое главное), чем обсуждению применимости этого уравнения для описания процесса генерации радиоколебаний. Оказывается, оно не очень-то применимо к генератору с триодом, потому что у триода имеются внутренние степени свободы и его работа отнюдь не сводится к тому, что при таком-то напряжении на сетке через него идёт такой-то ток. Впрочем, по той же самой причине генератор с триодом сочли неудовлетворительным, и он был заменён генератором с более сложно устроенной радиолампой — пентодом. Сложность пентода в основном направлена на то, чтобы подавить внутренние степени свободы лампы, поэтому, хотя это и может показаться парадоксальным, работа генератора с пентодом лучше описывается сравнительно простым уравнением (66), чем работа генератора с более простым триодом. Интересы математического описания в данном случае совпали с интересами техники: пентод описывается проще, а работает лучше триода.

Физическое понимание автоколебаний (тогда ещё без этого названия) было отчётливо высказано во второй половине XIX века Дж. У. Рэлеем (1841—1919) — английским физиком, с именем которого связано, в частности, формирование теории колебаний как самостоятельного научного направления[97]. Первое издание его «Теории

[97] Диапазон научных интересов Рэлея был весьма широк, причём он одинаково успешно проявил себя и как экспериментатор, и как теоретик. Широкой публике более всего известно открытие Рэлеем совместно с химиком У. Рамзаем (1852—1916) первого

звука» — фактически теории не только звука, но и вообще колебаний — вышло в 1877—1878 гг. В § 68а «Теории звука» Рэлей, отметив, что колебания, описываемые уравнением $\ddot{x} - k\dot{x} + \omega^2 x = 0$, при $k > 0$ возрастают (имеет место не диссипация, а «подкачка» энергии в систему), продолжал: «Вскоре, конечно, достигается момент, за которым... уравнения перестают быть справедливыми. Мы можем составить себе представление о том, как будет обстоять дело в этом случае, если прибавим к уравнению... член, пропорциональный более высокой степени скорости», каковой член он взял кубическим.

Полученное уравнение

$$\ddot{x} - k\dot{x} + l\dot{x}^3 + \omega^2 x = 0 \tag{67}$$

теперь так и называют уравнением Рэлея. Здесь k и l положительны — именно при таких знаках при малых $\dot{x}$ колебания возрастают, а при больших убывают. Относительно (67) Рэлей ограничился тем, что в предположении малости k и l указал приближённое выражение для периодического решения.

Как видно, если ван дер Поль предложил своё уравнение для математического описания работы реального устройства — радиоколебательного контура с электронной радиолампой, — то Рэлей предложил своё уравнение, так сказать, умозрительно. Возможно, это было связано с тем, что автоколебательные системы, которые его реально интересовали, описывались дифференциальными уравнениями третьего порядка (электрический звонок) или даже уравнениями с частными производными (струна, колебания которой возбуждаются смычком). Правда, он упоминал и об одной системе, где достаточно уравнения второго порядка (колебания маятника, качающегося на вращающемся валу), но упоминал вскользь, даже не выписывая дифференциальных уравнений (они в этом случае отличны от (66)) и довольствуясь только указанием на принципиальную природу явления. Возможно, такое его отношение к этой системе было опять-таки связано с тем, что она не имела практического значения, будучи не более чем демонстрационным устройством, в отличие от электрического звонка или струны. Впоследствии, правда, оказалось, что аналогичная система описывает некоторые явления в электротехнике, но это было намного позднее.

В известной степени ван дер Полю и Андронову повезло, что такая популярная в их время автоколебательная система, как радиогенератор с электронной лампой, хорошо описывается дифференциальным

инертного газа, аргона. Инициатива исходила от Рэлея, а вот в открытии других инертных газов, из коих наиболее известен гелий, он уже не участвовал.

уравнением второго порядка. Известны и другие автоколебательные системы, описываемые автономными системами (16) с $n=2$, но радиогенератор сыграл в своё время основную стимулирующую роль. Подробное исследование систем второго порядка дало хорошую подготовку для подхода к системам с $n>2$. Автоколебательных систем с $n>2$ не просто много, но, как мне кажется, системы, которые теперь вызывают наибольший интерес, как раз таковы.

Насколько я могу судить, для реалистического описания полупроводниковых колебательных систем нужна система дифференциальных уравнений по крайней мере третьего порядка. Тот же порядок требуется для описания работы электрического звонка (на него обратил внимание ещё Рэлей), а реалистическая математическая модель механических часов — это уже система четвёртого порядка[98]. Струна, колебания которой возбуждаются смычком — это одна из систем с распределёнными параметрами. Описание таких систем требует уравнений с частными производными[99].

И какой сюрприз: оказывается, «умозрительное» уравнение Рэлея (67) равносильно уравнению ван дер Поля (66), имеющему вполне «материальное» — радиотехническое — происхождение!

Я объясню, почему и в каком смысле эти два уравнения равносильны, но сперва приведу их к более удобному виду. При этом временно примем обозначение u для неизвестной в уравнении ван дер Поля, чтобы не путать её с неизвестной в уравнении Рэлея. В уравнении ван дер Поля мы избавимся от коэффициента ω^2 аналогично тому, как это делалось с уравнением гармонического осциллятора. Как и в том случае, введём новую независимую переменную $t_1=at$, где a — константа, которую надо подобрать так, чтобы избавиться от ω^2. Разделив левую часть (66) (в которой мы теперь пишем u вместо x) на a^2, от чего она не перестанет быть равной нулю, получим

$$\frac{\ddot{u}}{a^2}+\frac{k}{a}(u^2-1)\frac{\dot{u}}{a}+\frac{\omega^2}{a^2}u=0.$$

Приняв $a=\omega$, мы добьёмся того, чтобы при последнем слагаемом здесь не было множителя. Вместо константы k теперь в уравнении придётся использовать новую константу $k_1=\frac{k}{a}$. Наконец, $\frac{\ddot{u}}{a^2}=\frac{d^2u}{dt_1^2}$ и $\frac{\dot{u}}{a}=\frac{du}{dt_1}$. Обозначая отныне «новое время» t_1 прежней буквой t и соответственно обозначая дифференцирование по этому времени точкой, а k_1 обозначая снова через k, приходим к уравнению

$$\ddot{u}+k(u^2-1)\dot{u}+u=0. \tag{68}$$

[98] Математическое исследование работы часов было подробно проведено в школе Андронова, особенно Н. Н. Баутиным (1908—1993).

[99] Изучение автоколебаний систем с распределёнными параметрами тоже было начато в школе Андронова.

Что же до уравнения Рэлея, то его чаще записывают в виде

$$\ddot{x}+k\left(\frac{\dot{x}^3}{3}-\dot{x}\right)+x=0. \tag{69}$$

В (69) коэффициенты содержат всего одну константу k (играющую роль физического параметра колебательной системы), а не три (k, l и ω), как в (67). Переход от (67) к (69) сводится к введению новых переменных $t_1=at$ (это новая независимая переменная, производную по которой мы будем временно обозначать штрихом, чтобы отличать её от производной по прежней независимой переменной t) и $x_1=bx$; константы a и b будут специально подобраны. Умножив левую часть (67) на b и разделив на a^2, получим

$$\frac{b\ddot{x}}{a^2}-\frac{k}{a}\frac{b\dot{x}}{a}+l\frac{b\dot{x}^3}{a^2}+\frac{\omega^2}{a^2}bx=0.$$

Первое, второе и четвёртое слагаемые суть x_1'', $-\frac{k}{a}x_1'$ и $\frac{\omega^2}{a^2}x_1$. Чтобы последнее слагаемое сводилось к x_1, надо взять $a=\omega$. Во втором слагаемом $\frac{k}{a}$ (т. е. $\frac{k}{\omega}$) надо принять за новую константу k_1. Нам желательно, чтобы третье слагаемое приняло вид $\frac{k_1}{3}\dot{x}_1^3$. Переписав его в виде $\frac{la}{b^2}\left(\frac{b\dot{x}}{a}\right)^3$, видим, что b надо взять таким, чтобы было $\frac{la}{b^2}=\frac{k_1}{3}=\frac{k}{3a}$ (где, как мы решили, $a=\omega$), т. е. $b=\sqrt{\frac{3l}{k}}\omega$. При таких a и b в терминах новых переменных получится уравнение (69) (с новой константой k_1 вместо k). Далее мы обозначаем t_1, x_1 и k_1 снова через t, x и k (и, соответственно, дифференцирование по независимой переменной вновь обозначается точкой).

Переход от (69) к (68) до смешного прост: надо только обозначить $\dot{x}$ через u и посмотреть, какое получится уравнение для u. Продифференцируем уравнение Рэлея (69) (т. е. продифференцируем по t его левую часть и приравняем производную нулю. Коль скоро левая часть (69) тождественно по t равна нулю, то и её производная тоже). Получится, что u удовлетворяет уравнению (68) (проверьте!).

В § 3, исследуя свойства решений уравнений второго порядка, мы переходили от них к системам двух уравнений, что позволяло привлекать геометрию и говорить о «фазовом портрете». Так же мы поступим и на сей раз. С уравнениями (69) и (68) связаны системы

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x+k\left(y-\dfrac{y^3}{3}\right)\end{cases} \tag{70}$$

и

$$\begin{cases}\dot{u}=v,\\ \dot{v}=-u+k(1-u^2)v.\end{cases} \tag{71}$$

Раз (69) и (68) равносильны, то, конечно, системы (70) и (71) тоже должны быть равносильны. Но кажется несколько неожиданным, что переход от одной из этих систем к другой можно осуществить просто с помощью замены переменных, описываемой несложными алгебраическими формулами, а привлекать неалгебраическую операцию дифференцирования при этом не нужно.

Мы знаем, что если взять $u(t) = \dot{x}(t)$, где $x(t)$ является решением (69), а значит и первой координатой решения $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (70), то u будет удовлетворять уравнению (68), а значит будет первой координатой решения $w(t) = (u(t), v(t))$ системы (71). Из (70) $\dot{x} = y$, так что $u = y$. А согласно (71) $\dot{u} = v$, так что

$$w(t) = (u(t), v(t)) = (\dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = (y(t), \dot{y}(t)).$$

Наконец, согласно второму из уравнений (70) $\dot{y}(t)$ выражается через $x(t)$ и $y(t)$ по формуле $\dot{y} = -x + k\left(y - \frac{y^3}{3}\right)$. Мы приходим к выводу, что при замене переменных

$$u = y, \quad v = -x + k\left(y - \frac{y^3}{3}\right) \tag{72}$$

из решения $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (70) получается решение $w(t) = (u(t), v(t))$ системы (71).

Упражнение. Покажите, что замена переменных (72) обратима, т. е. x и y можно, в свою очередь, выразить через u и v с помощью алгебраических формул (столь же несложных). Проверьте, что при этом из решения $w(t) = (u(t), v(t))$ системы (71) получается решение $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (70).

Упражнение. Нельзя ли аналогичным образом перейти от уравнения Рэлея к уравнению ван дер Поля, т. е. не существует ли такой замены переменной $u = u(x)$, что если $x(t)$ — решение (69), то $u(x(t))$ будет решением (68)?

Упражнение. При прежнем переходе от (69) к (68) остался открытым вопрос, всякое ли решение второго уравнения можно получить таким способом? Используя переход от (70) к (71) и обратно с помощью замены переменных (72) и обратной к ней замены, покажите, что ответ на этот вопрос положительный.

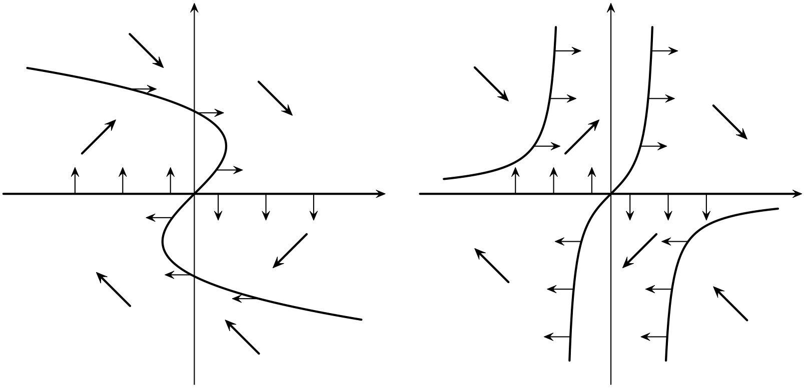
Вообразим два экземпляра $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_2$ плоскости $\mathbb{R}^2$, считая первый из них образованным всевозможными парами чисел (x, y), а второй — (u, v). Формулы (72) определяют взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_2$, причём из формул видно, что оба отображения $\varphi\colon (x, y) \mapsto (u, v)$ (определяемое формулами (72)) и обратное к нему отображение $\psi\colon (u, v) \mapsto (x, y)$ (определяемое формулами, найти которые было предоставлено читателю) являются гладкими. Это выражают словами: отображения φ и ψ суть диффеоморфизмы плоскостей $\mathbb{R}^2_1, \mathbb{R}^2_2$.

В $\mathbb{R}^2_1$ будем рассматривать («нарисуем») поле фазовых скоростей, отвечающее уравнению Рэлея (69) для x, т. е. поле, в котором точке (x, y) сопоставлен вектор $f(x, y) = \left(y, -x + k\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\right)$, а в $\mathbb{R}^2_2$ — поле фазовых скоростей, отвечающее уравнению ван дер Поля (68), т. е. поле $g(u, v) = (v, -u + k(1 - u^2)v)$. Мы видим, что если точка $z = (x, y)$ в $\mathbb{R}^2_1$ движется согласно системе дифференциальных уравнений $\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$ (это система (70)), то точка $w=(u,v)=\varphi(x,y)$ движется согласно системе $\dot w=(\dot u,\dot v)=g(u,v)$ (это система (71)). Обратно, если (u,v) движется согласно второй системе, то $(x,y)=\psi(u,v)$ движется согласно первой системе. В связи с этим говорят, что диффеоморфизм φ переводит векторы $f(x,y)$ в векторы $g(u,v)$ (где подразумевается, что $(u,v)=\varphi(x,y))$ и что в этом смысле он переводит векторное поле f в векторное поле g, а ψ, обратно, переводит векторное поле g в векторное поле f.

На сказанное можно посмотреть ещё и так. Можно считать, что с помощью формулы $(u,v)=\varphi(x,y)$ мы вводим новые координаты в плоскости $\mathbb{R}^2_1$, в которой первоначально использовались координаты (x,y). (С равным правом можно сказать, что с помощью формулы $(x,y)=\psi(u,v)$ мы вводим новые координаты в $\mathbb{R}^2_2$.) Тогда получается, что системы $(\dot x,\dot y)=f(x,y)$ и $(\dot u,\dot v)=g(u,v)$, отвечающие, соответственно, уравнениям Рэлея и ван дер Поля, — это одна и та же система, записанная в различных координатах. (Можно было бы сразу установить последнее, написав формулы, выражающие (x,y) и (u,v) друг через друга, и посмотрев, как связаны $(\dot x,\dot y)$ и $(\dot u,\dot v)$. Но эти формулы выглядели бы никак не мотивированными, «взятыми с потолка», а приведённые ранее рассуждения объясняют происхождение формул для φ и ψ.)

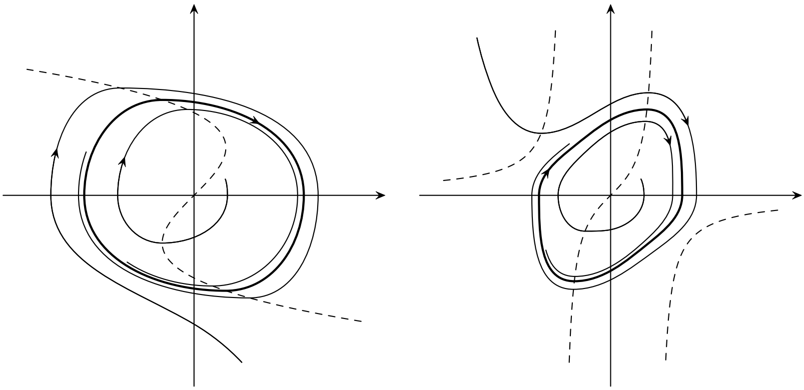
На рис. 21 *а* очень схематично показано направление вектора фазовой скорости для системы (70) (связанной с уравнением Рэлея), а на рис. 21 *б* — для системы (71) (связанной с уравнением ван дер Поля). На этих рисунках мы обращаем внимание только на то, направлен ли этот вектор вверх или вниз, направо или налево. Поэтому там изображена также кривая Г, в точках которой он горизонтален. На рис. 21 *а* Г имеет уравнение $x=k\left(y-\dfrac{y^3}{3}\right)$, на рис. 21 *б* — уравнение $v=\dfrac{u}{k(1-u^2)}$. Вместе с осью x на верхнем рисунке и с осью u на нижнем — в точках этой оси вектор фазовой скорости вертикален — кривая Г делит фазовую плоскость на четыре области, различающиеся знаками скоростей изменения координат. Например, на верхнем рисунке в части верхней полуплоскости, расположенной справа от Г, $\dot x=y>0$ и $\dot y=-x+k\left(y-\dfrac{y^3}{3}\right)<0$ (ведь если точка (x,y) расположена справа от Г, то в этой точке координата x больше, чем в точке кривой Г с тем же y). На рис. 22 столь же схематично изображены соответствующие фазовые портреты.

Для теоретического исследования качественного характера поведения траекторий (в основном для приводимого ниже доказательства существования замкнутой траектории и опущенного доказательства её единственности) той информации о движении фазовых точек, которая отражена на этих рисунках, вполне достаточно. Но у читателя может (пожалуй, даже должно) возникнуть желание посмотреть не на схематичные, а на более или менее точные изображения траекторий. На рис. 23 *а* изображён фазовый портрет для системы (70) с $k=1$, а на рис. 23 *б* — фазовый портрет для системы (71)



а) *б*)

Рис. 21. Строение векторного поля для уравнений Рэлея (а) и ван дер Поля (б)

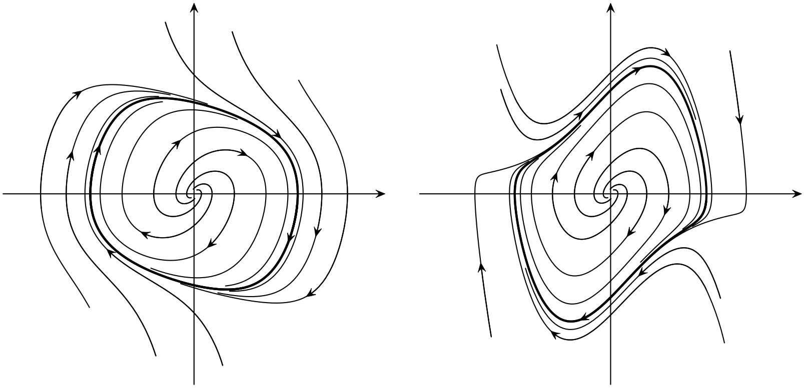


а) *б*)

Рис. 22. Эскизы фазовых портретов для уравнений Рэлея (а) и ван дер Поля (б)

с $k=1$. В обоих случаях траектории навиваются на некоторую замкнутую кривую, которая сама является траекторией и, как будет сказано ниже, называется предельным циклом. Когда фазовая траектория, навивающаяся на предельный цикл, подходит к нему достаточно близко, на рисунке их изображения сливаются.

Мне кажется, что фазовые портреты для системы (71) выглядят чуть более причудливо, нежели для системы (70) — видимо, из-за изгибов траекторий. Однако это не мешает диффеоморфизму φ переводить фазовый портрет системы (70) в фазовый портрет системы (71) (т. е. траектории первой системы в траектории второй).



а) *б*)

Рис. 23. Точные фазовые портреты уравнений Рэлея (а) и ван дер Поля (б)

У меня был выбор — писать ли о системе (70) или о (71). После некоторых колебаний я остановился на последней. Должен отметить, что часто предпочитают иметь дело с (70) (хотя имеются важные исследования, посвящённые непосредственно (66) и (71)) и что при этом имеются более изящные обоснования приводимых ниже утверждений о свойствах этой системы (а тем самым — и о свойствах (71)), нежели приводимые мной для (71) (не говоря уже о том, что я кое-что оставлю без доказательства). Но хотя в литературе соответствующие рассуждения выглядят не длиннее, мне кажется, что в книжке такого характера, как эта, они потребовали бы дополнительных разъяснений и места.

Что же до приводимых ниже доказательств, то учащемуся может оказаться небесполезным посмотреть, как довольно-таки неопределённые соображения обретают статут строгого рассуждения. Последнее слагается из нескольких шагов, одни из которых более или менее непосредственным образом оформляют те или иные из предыдущих высказываний, другие там не отражены, но сами по себе представляются вполне естественными. В целом переход к строгому рассуждению обладает известной универсальностью — примерно так же бывает нужно действовать и в других случаях. (Хотя, не спорю, это оформление можно вежливо квалифицировать как «прямолинейное», а менее вежливо — как «тупое».)

В конечном счёте речь будет идти об общих свойствах фазового портрета, не меняющихся при переходе к другим переменным (говоря точнее — к фазовому портрету той же системы на плоскости других переменных). Поэтому наши окончательные заключения будут справедливы и для системы (70). (К несколько причудливым изгибам траекторий это не относится — они исчезают при переходе от (71) к (70).) Однако непосредственно, как уже сказано, мы будем рассматривать только (71).

Поскольку больше я не буду говорить о (70), я заменю u и v в (71) «освободившимися» буквами x и y, так что речь будет идти о системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + k(1-x^2)y. \end{cases} \tag{73}$$

Когда мы рассматривали систему (26), мы говорили, что вектор $(y, -x)$ в точке (x, y) касается проходящей через неё окружности с центром в O, а из-за добавления к нему вектора $(0, -ky)$ вектор фазовой скорости системы (26) во всех точках этой окружности (кроме двух её точек, лежащих на оси абсцисс) направлен внутрь неё. В правой же части (73) к вектору $(y, -x)$ добавляется вектор $(0, k(1-x^2)y)$. Как и $(0, -ky)$, он имеет вертикальное направление, но иногда оно совпадает с направлением вектора $(0, y)$, а иногда противоположно ему. В тех точках $z = (x, y)$, где $|x| < 1$, направление вектора $(0, k(1-x^2)y)$ совпадает с направлением вектора $(0, y)$, так что при $|x| < 1$ в верхней полуплоскости вектор $(0, k(1-x^2)y)$ направлен вверх, а в нижней — вниз. В тех же точках $z = (x, y)$, где $|x| > 1$, направление вектора $(0, k(1-x^2)y)$ противоположно направлению вектора $(0, y)$. Значит, при $|x| < 1$ вектор фазовой скорости $f(x, y) = (y, -x + k(1-x^2)y)$ системы (73) образует острый угол с радиус-вектором (x, y), т. е. направлен вовне проходящей через (x, y) окружности C с центром в $O(0, 0)$, а при $|x| > 1$ вектор $f(x, y)$ образует тупой угол с радиус-вектором, т. е. направлен внутрь C. В первом случае в точке z траектория выходит наружу из области, ограниченной C, а во втором — входит внутрь этой области.

Начало координат O является положением равновесия (при $x = y = 0$ правые части (73) обращаются в нуль), а других положений равновесия нет (проверьте!). Как ведут себя траектории возле O? Когда положительное число r меньше 1, то во всех точках окружности C_r радиуса r с центром в O траектории выходят наружу из круга, ограниченного C_r. Мало сказать, что положение равновесия O — неустойчивое. Седло тоже неустойчиво, но возле седла большинство траекторий проходит мимо него — сперва приближаются, потом удаляются. В нашем же случае некоторый круг с центром в O целиком заполнен траекториями, «выходящими» из O. (Формально мы, может быть, этого не доказали до конца[100], но после сказанного это представляется достаточно ясным в наглядном отношении.) В связи с этим говорят, что O является *источником*[101]. Спрашивается, куда идут точки $z(t)$ (как выходящие из O, так и иные, если они есть) при возрастании t, имеется ли в нашей системе «сток» и если да, то каков он?

Разобраться в этом было бы легче, если бы вместо (73) речь шла о похожей системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + k(1 - x^2 - y^2)y. \tag{74}$$

В этом случае при $r < 1$ вектор фазовой скорости $f(x, y)$ направлен вовне окружности C_r (по-прежнему образованной точками z с $|z| = r$), а при $r > 1$ — внутрь неё (почему?). Исключение представляют точки $(\pm\sqrt{r}, 0)$, где f касается C_r. Однако при $r < 1$ траектория, касающаяся C_r в такой точке, всё-таки подходит к C_r изнутри и сразу же выходит вовне, а при $r > 1$ траектория, касающаяся окружности, всё-таки входит внутрь неё.

Окружность единичного радиуса C_1 сама является траекторией (почему?), причём это замкнутая траектория. Траектории, выходящие из источника O (где у системы (74), как и у (71), имеется положение равновесия), навиваются изнутри на окружность C_1, а траектории, «приходящие из бесконечности», навиваются на C_1 извне (рис. 24). В связи с этим говорят, что данная окружность является *стоком*.

А. Пуанкаре[102] назвал замкнутую траекторию, на которую (хотя бы с одной стороны) навиваются другие траектории, *предельным циклом*.

Почему «предельным», не нуждается в пояснении. Что же касается слова «цикл», то его первоначальный смысл — окружность. Поскольку замкнутые кривые — это как бы деформированные окружности, в математике их

[100] Доказали или нет — это зависит от того, сколь много мы согласны оставить «между строк». В научных статьях между строк оставляют гораздо больше, в начале учебника для второго курса — пожалуй, чуть меньше.

[101] Название, конечно, связано с гидродинамической аналогией из § 2.

[102] Будучи крупнейшим математиком своего времени, Пуанкаре (1854—1912) явился основоположником нескольких новых научных направлений, включая качественную теорию дифференциальных уравнений. Её основы он заложил в четырёх мемуарах под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», опубликованных в 1881—1885 гг. Позднее он вернулся к качественной теории в связи с небесной механикой (наукой о движении небесных тел, как естественных, так и (теперь) искусственных).

Пуанкаре активно интересовался физикой и фактически был одним из создателей специальной теории относительности, по крайней мере её математического аппарата. (Насколько полно он понимал её физическую сторону — в этом можно усомниться.)

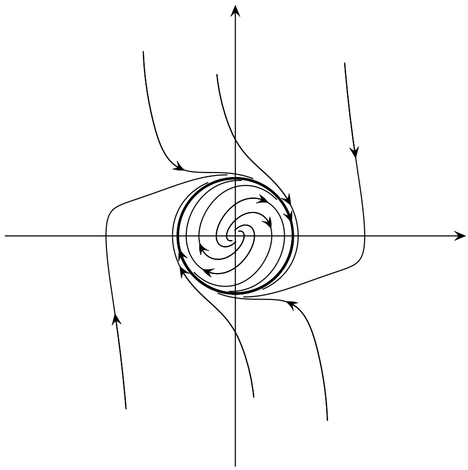


Рис. 24

тоже часто называют циклами. (Вне математики употребительны словосочетания вроде «циклический процесс», который тоже подразумевает не наличие какой-то окружности в буквальном смысле слова, а периодическое повторение этого процесса, наподобие периодического повторения одних и тех же точек замкнутой кривой при движении по ней.)

Я должен предупредить студента-математика, что в литературе (по которой ему, может быть, придётся сдавать экзамен) под «предельным циклом» иногда понимают замкнутую траекторию, сколь угодно близко к которой проходят незамкнутые траектории. Если правые части рассматриваемой системы являются аналитическими функциями от (x, y), оба варианта понятия «предельный цикл» совпадают, но даже при бесконечно дифференцируемых правых частях второй вариант является более широким.

В теории Пуанкаре—Бендиксона (§ 7) предельные циклы являются важными компонентами данного Пуанкаре (и, так сказать, «упорядоченного и разложенного по полочкам» И. Бендиксоном (1861—1935)) описания возможных типов поведения траекторий на фазовой плоскости.

Вернёмся к физически более осмысленной системе (73) и посмотрим, что происходит на окружности C_R большого радиуса R с центром в O. Часть C_R попадает в вертикальную полосу $-1 \leqslant x \leqslant 1$; эта часть состоит из двух дуг — δ_1 в верхней полуплоскости и δ_2 в нижней. На этих дугах вектор f направлен вовне C_R, а на двух других дугах, где $|x| > 1$, он направлен внутрь C_R. Если бы дуг δ_1, δ_2 не было, траектории входили бы в кольцеобразную область G, ограниченную снаружи окружностью C_R, а изнутри окружностью C_r, и вроде бы им там ничего не оставалось бы делать, как навиваться снаружи на некоторую замкнутую кривую L_1 и навиваться изнутри на некоторую замкнутую кривую L_2 (ведь положений равновесия, к которым они тоже могли бы стремиться, в G нет). Эти L_1, L_2 сами суть траектории (почему?).

Из одного того факта, что траектории входят в G и на что-то там навиваются, никак не следует, что $L_1 = L_2$, но при известном оптимизме можно надеяться, что в нашем случае это будет так, и тогда намечается картина, аналогичная фазовому портрету системы (74): одни траектории «выходят» из O, другие «приходят из бесконечности», и все они (кроме, конечно, положения равновесия O) «навиваются» на некоторый предельный цикл L.

Это прекрасно соответствует общим представлениям об автоколебаниях: при любом начальном значении $z(0) \neq (0, 0)$ решение $z(t)$ со временем становится неотличимым от периодического решения, отвечающего замкнутой траектории L; в системе устанавливаются периодические колебания, причём одни и те же при любом начальном состоянии системы. Таким образом, математическое описание автоколебаний доставляется предельными циклами.

Примерно тогда же, когда в физике Рэлей отметил принципиальные особенности тех колебательных процессов, которые мы теперь называем автоколебательными, в математике на предельные циклы обратил внимание А. Пуанкаре. Но только А. А. Андронов сопоставил в 1928 г. автоколебания и предельные циклы. Теперь это воспринимается как прописная истина. Кажется, живи я тогда, я бы сразу до этого додумался. Но ведь предшественники Андронова — Рэлей, Пуанкаре и ван дер Поль — были людьми неглупыми, образованными и не без способностей (дай бог каждому!), а вот о «прописной истине» не знали.

Говоря, что автоколебания математически отображаются предельными циклами (а при $n > 2$ — замкнутыми траекториями L, «притягивающими» к себе другие решения, по крайней мере решения, начальные значения которых находятся в некоторой области (практически — довольно большой области), содержащей[103] L), Андронов

[103] Механические часы надо встряхнуть, чтобы они пошли. Значит, в соответствующем фазовом пространстве имеются траектории, которые не стремятся к замкнутой траектории L, соответствующей нормальному ходу часов. И это не только положение равновесия z_0, соответствующее стоящим часам. Новое начальное значение, получающееся при встряхивании часов, не так уж близко к z_0. А решение со слишком близким к z_0 начальным значением стремится к z_0 — балансир или маятник чуть поколеблется, часы могут несколько раз «тикнуть», а потом остановятся.

имел в виду известные в его время «регулярные» автоколебания. Надо сказать, что при $n > 2$ в системах, в которых диссипация энергии сочетается с её постоянным притоком из какого-то источника, могут устанавливаться и режимы совсем иного типа — «стохастические» или «хаотические» автоколебания. Крайне упрощённому примеру такого рода, который далёк от реальных физических систем, но демонстрирует математическую сторону дела (если не всю, то по крайней мере заметную и важную её часть), посвящён § 8. Однако человек в своей практической деятельности почти всегда заинтересован не в хаотических автоколебаниях, а в регулярных, которые и реализуются в реальных технических устройствах, создаваемых на базе богатого опыта и теоретических исследований.

В известном рассказе М. Твена о том, как он ремонтировал свои часы, описан режим хаотических автоколебаний, достигнутый его часами после нескольких некомпетентных «ремонтов». (Хаотичность проявлялась в том, что часы, хотя они и тикали как нормальные, непредсказуемым образом то спешили, то отставали.) Там же описано, насколько такой режим не соответствует требованиям пользователя — герой рассказа убил очередного часовых дел «мастера».

В реальной жизни Н. Н. Баутин рассказывал историю с хаотической работой часов, завершившуюся более благополучно. Он пришёл к выводу, что при некоторых значениях параметров в его математической модели часов возникает режим хаотических автоколебаний. Инженеры, работавшие в часовой промышленности, отнеслись к этому выводу недоверчиво — мол, так не бывает; если анализ модели был правилен (они не пытались оспаривать математическую компетентность Баутина), то, значит, его модель не соответствует реальной физической системе (по крайней мере, соответствует не при всех значениях параметров, рассматривавшихся Баутиным). И каково же было их удивление, когда в один прекрасный день они нашли сломанный хронограф[104], работавший в соответствии с тем, о чём говорил Баутин! Happy end: Баутина, конечно, не только не убили, но его авторитет заметно вырос...

После этого длительного отступления отметим, что при исследовании системы (73) мы несколько поторопились, отмахнувшись от

[104] Хронограф — это прибор для точной регистрации момента времени какого-либо события. В то время это был механический хронограф, в котором запись момента времени события производилась при помощи специальных перьев на равномерно движущейся бумажной ленте. Часовой механизм и должен был обеспечивать её равномерное движение. Если я правильно понял, этот механизм, как и часы М. Твена, непредсказуемым образом менял свою скорость работы, причём изменения происходили чаще и были заметны «невооружённым глазом» — скорость менялась в два раза, если не больше.

дуг δ_1, δ_2. Пора принять их во внимание. Оказывается, аккуратное рассуждение приводит почти к тем же заключениям, что и выше, только область G надо ограничить снаружи не окружностью C_R, а несколько иной замкнутой кривой C'. (Изнутри же её по-прежнему ограничивает C_r.) Откуда берётся C', я объясню на пальцах в основном тексте и строго — в петите. Но я не буду объяснять другого — почему в G имеется только одна замкнутая траектория (на которую, стало быть, входящие в G траектории наматываются и снаружи, и изнутри)[105].

Начнём с того, что движение фазовых точек в верхней полуплоскости всюду направлено слева направо, т. е. x возрастает (ведь $\dot{x} = y > 0$), и чем выше, тем быстрее, а полоса $-1 \leqslant x \leqslant 1$ не такая уж широкая. При большом R дуга δ_1 находится высоко, и возникает надежда, что пока покинувшая её при $t = 0$ точка $z(t)$ пересекает эту полосу, $|z(t)|$ не успевает сильно увеличиться. А после этого $z(t)$ движется в области, где $x(t) > 1$, и там как $y(t)$, так и $|z(t)|$ убывают. Можно ожидать, что со временем $z(t)$ опустится на положительную горизонтальную полуось, т. е. в какой-то момент времени $t = a$ координата $y(t)$ впервые (после момента 0) обратится в нуль. Можно, далее, надеяться, что за это время $|z(t)|$ когда-то — скажем, при каком-то $t = b$, где $0 < b < a$, — сравняется со своим первоначальным значением $|z(0)| = R$ (после чего траектория всё-таки войдёт внутрь C_R).

Правда, быстрое уменьшение y и $|z|$ происходит, когда x и y велики, а тогда y убывает очень быстро (как видно из уравнения $\dot{y} = -x + k(1 - x^2)y$, при больших x и y скорость уменьшения y — порядка $x^2 y$), так что времени для существенного уменьшения $|z|$ не так уж много. Но ведь y надо уменьшиться от величины порядка R (или даже больше: в той точке, где $z(t)$ пересекает вертикаль $x = 1$, вторая координата $y(t) = \sqrt{|z(t)|^2 - 1} \geqslant \sqrt{R^2 - 1}$) до нуля, а насчёт $|z|$ нам надо удостовериться в меньшем — нам надо только, чтобы уменьшение величины $|z|$, происходящее при $x(t) > 1$, компенсировало бы то (сравнительно небольшое) увеличение $|z(t)|$, которое произошло, пока точка $z(t)$ пересекала полосу $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

[105] Это первое (после общих сведений в § 2) серьёзное место, где я не доказываю, а рассказываю. Доказательство, по существу, связано с важной общей концепцией устойчивости (на сей раз устойчивости не положения равновесия, чего мы очень бегло коснулись выше, а замкнутой траектории), а для её приложения к системе (73) нужны специальные рассуждения, использующие специфические свойства этой системы. И то, и другое поучительно, но при принятом здесь стиле неторопливого повествования потребовало бы слишком много места.

Итак, примем на веру, что если R достаточно велико и если фазовая точка $z(t)$ покидает при $t=0$ дугу δ_1, то во время движения этой точки в той области, где $y>0$ и $x>1$, величина $|z(t)|$ уменьшится до R. Рассмотрим решение $z_1(t)=(x_1(t), y_1(t))$ системы (73), начальная точка которого $z_1(0)$ является самой левой точкой дуги δ_1, т. е. $z_1(0)=(-1, \sqrt{R^2-1})$. Имеется (как мы думаем) такой момент времени $t=b$, что

$$|z_1(t)|>R \text{ при } 0<t<b, \quad |z_1(b)|=R, \quad y_1(t)>0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant b.$$

Заметим, далее, что векторное поле фазовой скорости $f(z)$ переходит в себя при центральной симметрии фазовой плоскости относительно центра симметрии O, т. е. $f(-x,-y)=-f(x,y)$. Иными словами, если положить $(u,v)=(-x,-y)$, то для (u,v) получится такая же система, как для (x,y). А потому если $z(t)$ — решение (73), то и $-z(t)$ — тоже решение. При центральной симметрии рассматривавшееся выше решение $z_1(t)$ переходит в решение $z_2(t)=(x_2(t), y_2(t))=-z_1(t)$, начальная точка которого $z_2(0)=(1, -\sqrt{R^2-1})$ является самой правой точкой дуги δ_2 и для которого

$$|z_2(t)|>R \text{ при } 0<t<b, \quad |z_2(b)|=R, \quad y_2(t)<0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant b.$$

Обозначим через Δ_1, Δ_2 дуги, заметаемые $z_1(t)$ и $z_2(t)$ за время от 0 до b.

Замкнутую кривую C', которая будет ограничивать область G снаружи, определим так: она состоит из дуги Δ_1, дуги окружности C_R от $z_1(b)$ до $z_2(0)$, дуги Δ_2 и дуги окружности C_R от $z_2(b)$ до $z_1(0)$ (рис. 25; дуги перечислены в том порядке, в котором они встречаются при обходе C' по часовой стрелке). Ни одна траектория не пересекает дуг Δ_i (ибо траектории вообще не пересекаются), а другую часть кривой C' составляют дуги окружности C_R, лежащие в областях, где $|x|\geqslant 1$; в точках этих дуг движение фазовых точек направлено внутрь C_R, и тем более внутрь[106] C'.

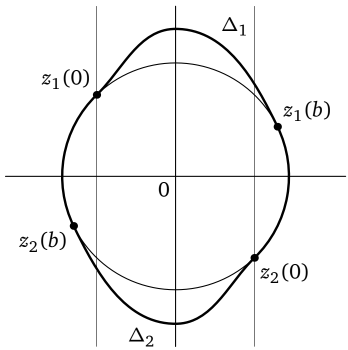


Рис. 25

[106] Могут возникнуть некоторые сомнения, не может ли точка изнутри области G выйти обратно на её границу в точке $z_i(0)$? Нет. Дело в том, что продолжение дуги Δ_i в сторону отрицательных значений t лежит вне области G (см. рис. 25). Это следует из

Занимаясь сперва гармоническим осциллятором, затем добавив к действующей в нём «восстанавливающей силе» ещё «вязкое трение» и, наконец, перейдя к уравнению ван дер Поля, мы использовали геометрические соображения, чтобы понять взаимное расположение траекторий и окружностей с центром в O. Но для маятника при больших колебаниях вместо окружностей у нас были кривые $h(\varphi, y) = \text{const}$, где $h(\varphi, y) = \frac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos\varphi)$, и непонятно, какие геометрические соображения могли бы нам помочь. Вместо геометрии мы посмотрели, как изменяется $h(\varphi(t), y(t))$ со временем, для чего вычислили производную $\frac{d}{dt}h(\varphi(t), y(t))$ (оказавшуюся нулём). Тот же приём годится и во многих других случаях и, честно говоря, даже в тех случаях, когда школьные познания позволили нам обсудить направление вектора фазовой скорости в точках окружности. Использование данного приёма оказывается более приятным делом — просто пишем себе формулы по стандартным правилам дифференцирования, не рисуя никаких картинок и не напрягая геометрическое воображение.

Скажем, раньше мы установили с помощью геометрических рассуждений, что решение $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (26) с ростом t приближается к O. Убедимся в том же самом с помощью простейших сведений из алгебры и анализа. Расстояние от точки z до O — это $|z|$, так что надо было бы продифференцировать по t функцию $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Это был бы не бог весть какой подвиг, но здесь возможно дополнительное упрощение — вместо $|z(t)|$ будем рассматривать функцию $w(t) = |z(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t)$.

В дальнейшем $w(t)$ будет всегда иметь именно этот смысл, хотя мы уже не будем заниматься (26).

Значение $\frac{1}{2}w$ может иметь физический смысл энергии. Правда, если говорить об идеализированном колебательном контуре, состоящем из отдельных индуктивности, конденсатора и сопротивления, то $\frac{1}{2}w$ — это энергия, сосредоточенная в индуктивности и конденсаторе, а неужели в сопротивлении, по которому течёт ток, так-таки и нет никакой энергии? А с более реалистическими моделями даже того же колебательного контура, не говоря уже о более сложных объектах вроде электронной радиолампы, дело должно обстоять ещё сложнее. Тем не менее с некоторой условностью $\frac{1}{2}w$ всё же называют энергией. Однако нам не понадобится привлекать никаких физических соображений, связанных с энергией; нам вполне достаточно того, что $w = |z|^2$.

того, что это продолжение лежит в области $|x| > 1$, а там $|z_i(t)|$ убывает, т. е. при малых по модулю отрицательных t выполнено $|z_i(t)| \geqslant |z_i(0)| = R$. Таким образом, оно лежит вне окружности C_R, а значит, и вне G.

Продифференцировать функцию $w(t)$ ничего не стоит[107]:

$$\dot{w}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) = 2xy - 2yx - 2yky = -2ky^2(t).$$

Эта производная отрицательна (за исключением отдельных моментов времени, когда $y(t)=0$, т. е. когда траектория пересекает ось Ox. Так как на этой оси $\dot{y} = -x$, то моменты времени, когда $y(t) = 0$, являются изолированными.) Значит, $w(t)$ убывает (чему изолированные моменты, где $\dot{w} = 0$, не мешают). Это вполне соответствует геометрическому факту, что во всех точках каждой окружности $|z| = r$ траектории входят внутрь неё (даже в лежащих на горизонтальной оси точках $(\pm r, 0)$ — там траектория «на один момент» касается окружности, а потом всё-таки входит внутрь неё).

Несложное дополнительное рассуждение показывает, что $w(t)$ не только убывает, но и стремится к нулю: если бы было $|z(t)| \to a > 0$, то из семейства точек $z(t)$ можно было бы выбрать последовательность $z(t_n)$, стремящуюся к некоторой точке $z' = (x', y')$ окружности $|z| = a$. Положительная полутраектория $z'(t)$, начинающаяся в этой последней точке, немедленно входит внутрь окружности $|z| = a$; иными словами, при $t > 0$ для этой траектории $w'(t) = |z'(t)|^2 < a^2$. Возьмём любое $t_1 > 0$ и обозначим через b число $\frac{1}{2}(a^2 - w'(t_1))$. Ввиду непрерывной зависимости решений от начальных данных, при достаточной близости точки $z(t_n)$ к z' решение $\zeta(t)$ с начальным условием $\zeta(0) = z(t_n)$ будет столь близким к $z'(t)$ при всех t из отрезка $0 \leqslant t \leqslant t_1$, что $|z'(t_1) - \zeta(t_1)| < b$. Стало быть, $|\zeta(t_1)| \leqslant |z'(t_1)| + b < a$. Но $\zeta(t) = z(t + t_n)$ (почему?). Получается, что $w(t)$ со временем становится меньше a^2. А раз функция $w(t)$ убывает, то отсюда видно, что стремиться к a^2 она не может.

Вернёмся к системе (73), соответствующей уравнению ван дер Поля (66). Посмотрим, как изменяется $w(t) = |z(t)|^2$ для её решений:

$$\dot{w}(t) = 2xy + 2y(-x + k(1 - x^2)y) = 2k(1 - x^2)y^2. \tag{75}$$

Мы снова видим, что при $|x| < 1$ величина $|z(t)|$ возрастает, а при $|x| > 1$ убывает (то и другое — вначале исключая точки оси Ox, где $y = 0$. Но $z(t)$ попадает на горизонтальную ось только в какие-то

[107] Ничего не стоит, ибо мы используем «цепное правило» для производной сложной функции:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dg(t)}{dt}, \quad \text{где } \frac{df(x)}{dx} \text{ вычисляется при } x = g(t)$$

(т. е. после вычисления $\frac{df(x)}{dx}$ в результат подставляется $x = g(t)$), так что за нас потрудились авторы этого правила, И. Ньютон и Г. Лейбниц. (До сих пор нам был нужен только простейший частный случай этого правила, когда функция $g(t)$ — линейная.)

изолированные моменты времени t (не говорилось ли о чём-то в этом духе раньше?), и в утверждении о возрастании или убывании можно не делать оговорки $y \neq 0$.)

Используем формулу (75) для доказательства того факта, что решение (73) с любым начальным значением $z(t_0) = z_0$ определено при всех $t \geqslant t_0$.

Раньше я это подразумевал настолько само собою разумеющимся, что даже не говорил, что это не мешало бы доказать. Благочестивый обман? Не без того, но он был не без некоего полуоправдания. Раз мы (следуя ван дер Полю) полагаем, что (68) описывает некий физический процесс — работу радиогенератора, которая отнюдь не должна заканчиваться взрывом, а вроде бы могла бы продолжаться вечно (износ оборудования не в счёт — он не предусмотрен в (68)), то и решения, которые сей процесс описывают, должны быть определены при всех $t \geqslant t_0$. Единственное возражение против этого резона состоит в том, что он основан на твёрдой уверенности в полном соответствии уравнения (68) физическому процессу, но ведь, вероятно, данное уравнение всё-таки приближённое (о чём бишь написано в «Теории колебаний» трёх авторов?), и вдруг небольшое поначалу несоответствие со временем может вырасти до того, что решение уйдёт в бесконечность, а генератор будет работать как ни в чём не бывало? В общем, предположение, что решение (68) определено при всех $t \geqslant t_0$, представляется физически разумным, но с математической точки зрения его всё же не мешало бы проверить.

Так как $1 - x^2 \leqslant 1$, то $\dot{w} \leqslant 2ky^2 \leqslant 2kw$. Отсюда получается, что

$$w(t) \leqslant e^{2k(t-t_0)} w(t_0) \tag{76}$$

при всех $t \geqslant t_0$, при которых $w(t)$ определено (т. е. определено решение $z(t)$). Действительно,

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-2kt} w(t)\big) = -2ke^{-2kt} w(t) + e^{-2kt} \dot{w}(t) \leqslant e^{-2kt}(-2kw(t) + \dot{w}(t)) \leqslant 0.$$

Значит, пока $z(t)$ определено, $e^{-2kt} w(t)$ убывает с ростом t, так что если $t \geqslant t_0$, то $e^{-2kt} w(t) \leqslant e^{-2kt_0} w(t_0)$, откуда, очевидно, следует неравенство (76).

Если бы правый конец максимального интервала существования решения $z(t)$ был конечным числом t_1, то по теореме о продолжении решений до границы области величина $|z(t)|$ стремилась бы к ∞ при $t \to t_1$ (ведь область определения системы (73) — вся плоскость). Но из (76) видно, что величина $w(t)$ (а значит и $|z(t)|$) остаётся ограниченной при $t \to t_1$.

Любопытно, что в другую сторону по времени это не так. Физическая мотивировка тут не помогает — в обратную сторону по времени процесс не пойдёт. А если сказать: «Но ведь раньше в системе что-то происходило? Вот это и описывается решением с $t<0$», то это не довод. Во-первых, у решения с $t<0$ могут быть слишком большие x и y, при которых либо наше описание физического процесса не годится, либо генератор сгорит, а если он не сгорел (уж верно не сгорел, если сейчас работает), то это просто потому, что никакого процесса при больших по модулю отрицательных t не было, а было то, что генератор тогда был выключен. Потом в какой-то момент времени t_0 пришёл человек и включил генератор, создав тем самым какое-то z_0, и только после этого «процесс пошёл».

Можно доказать, что решения, навивающиеся на предельный цикл изнутри, определены при всех t, но левый конец максимального интервала существования решения, навивающегося на предельный цикл снаружи, конечен, за исключением решений, отвечающих двум исключительным траекториям.

Любопытно и то, что когда я недавно беседовал с одним известным специалистом (причём он особенно отличился как раз исследованием автономных систем второго порядка), то оказалось, что он данного факта не знал. Конечно, ему хватило намёка, чтобы он подумал и быстро разобрался в ситуации. Но остаётся фактом, что раньше он об этом не задумывался и ни от кого никаких намёков на сей счёт не слышал. Это показывает, что хотя в принципе вопросы о конечности левого и правого концов максимального интервала существования решения равноправны, практически интересуются правым концом.

Использование для тех или иных целей различных вспомогательных функций и их производных «вдоль решений» (производных вида $\frac{dg(z(t))}{dt}$, где $z(t)$ — решение изучаемой системы дифференциальных уравнений) — широко практикуемый приём. Особенно интенсивно он применяется в теории устойчивости, начиная с А. М. Ляпунова (1857—1918) — основоположника этой теории и второго по времени основоположника качественной теории дифференциальных уравнений.

Конечно, вопросы об устойчивости затрагивались задолго до него. Заслугой Ляпунова является систематическое развитие теории устойчивости как строгой научной теории (до него не просто несколько строгих результатов соседствовали с рядом недостаточно обоснованных, но на различие между теми и другими обычно не обращали внимания) со своим комплексом понятий и методов, составляющей цельное направление в качественной теории дифференциальных уравнений. Теория устойчивости имеет большое теоретическое и практическое значение (в полной мере её практическая ценность проявилась после смерти Ляпунова).

Его работы по теории устойчивости появились после 1888 г. (основная монография «Общая задача об устойчивости движения» вышла в 1892 г.), т. е. после упоминавшегося выше мемуара Пуанкаре. Ляпунов отмечал, что у Пуанкаре уже можно найти идеи и методы, используемые Ляпуновым, хотя Пуанкаре ограничивается частными случаями. Между интересами Пуанкаре и Ляпунова имелось различие. Пуанкаре уделял внимание всем особенностям качественного поведения траекторий автономных систем второго порядка, особенно не интересуясь возможностью частичного переноса соответствующих результатов на системы более высокого порядка (вероятно понимая, что полной картины в многомерном случае это не даст). Ляпунов же особенно интересовался вопросами, связанными с устойчивостью, а их можно изучить и для систем более высоких порядков, исходя примерно из таких же идей, конечно должным образом развитых.

Высказывания Ляпунова о мемуаре Пуанкаре можно понять в том смысле, что Ляпунов заимствовал идеи у Пуанкаре и претендует только на дальнейшее (и весьма значительное) их развитие (что тоже немало). Но мне кажется, что Ляпунов скорее всего пришёл к бóльшей части этих идей независимо, а упоминания о Пуанкаре можно понимать в том смысле, что затем Ляпунов узнал о тех же идеях у Пуанкаре. Значительный объём работы, проделанной Ляпуновым, едва ли вместился бы в те несколько лет, которые отделяют начало его публикаций от времени публикации мемуара Пуанкаре. Либо Ляпунов начал эту работу независимо и ко времени появления мемуара Пуанкаре успел кое-чего достигнуть, либо, в крайнем случае, к этому времени он ещё не имел особых достижений, но, так сказать, «созрел» для них, так что идеи Пуанкаре попали на хорошо подготовленную почву. Думаю, что на самом деле у него в отношении к различным задачам сочеталось то и другое, но в какой пропорции, установить невозможно.

Заговорив о Ляпунове, надо сказать, что не будучи особенно разносторонним, он всё же внёс очень значительный вклад также в теорию вероятностей и в исследование вопроса о фигурах равновесия вращающейся жидкости, частицы которой удерживаются вместе силами тяготения. (Стоит добавить, что последним вопросом занимался также Пуанкаре, но Ляпунов продвинулся намного дальше.)

У нас использование вспомогательных функций вдоль решений будет носить ограниченный характер — приём этот будет привлекаться при аккуратном оформлении приведённых выше соображений о поведении упоминавшейся положительной полутраектории $\{z_1(t);\ t \geqslant 0\}$ системы (73), (эта полутраектория начинается в самой левой точке $(-1, \sqrt{R^2-1})$ дуги δ_1). Тем самым будет обосновано утверждение о существовании «кольцеобразной» области G, в которую траектории могут входить, но из которой они не могут выходить.

Итак, пусть $z(t) = (x(t), y(t))$ удовлетворяет система (73) и $z(0) = (-1, \sqrt{R^2-1})$. (Раньше мы писали $z_1(t)$, но теперь других z у нас не будет, так что можно не писать нижнего индекса.) Сразу после нулевого момента времени $z(t)$ входит в полосу $|x| \leqslant 1$ (ведь $\dot{x}(0) = y(0) > 0$), а там, ввиду равенства (75), величина $w(t) = |z(t)|^2$ возрастает. Значит, пока $|x(t)| \leqslant 1$, будет

$$y(t) = \sqrt{w(t) - x^2(t)} \geqslant \sqrt{w(0) - 1} = \sqrt{R^2 - 1},$$
$$\dot{x}(t) = y(t) \geqslant \sqrt{R^2 - 1}, \quad x(t) \geqslant x(0) + t\sqrt{R^2 - 1} = -1 + t\sqrt{R^2 - 1}.$$

Правая часть последней формулы обращается в 1 при $t = \dfrac{2}{\sqrt{R^2 - 1}}$, отчего и координата $x(t)$ (бывшая -1 при $t = 0$) должна обратиться в 1 при некотором $t = t_1 \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{R^2 - 1}}$. Как видно из неравенства (76) (с t_1 вместо t и $t_0 = 0$),

$$w(t_1) \leqslant e^{2kt_1} w(0) \leqslant R^2 e^{\frac{4k}{\sqrt{R^2 - 1}}},$$
$$w(t_1) - w(0) \leqslant R^2 \Big(e^{\frac{4k}{\sqrt{R^2 - 1}}} - 1\Big).$$

Умножив и разделив правую часть на $\dfrac{4k}{\sqrt{R^2 - 1}}$, и несколько перегруппировав сомножители, перепишем это неравенство в виде

$$w(t_1) - w(0) \leqslant 4kR \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - 1}} \cdot \frac{e^{\frac{4k}{\sqrt{R^2 - 1}}} - 1}{\frac{4k}{\sqrt{R^2 - 1}}}.$$

Когда $R \to \infty$, второй и третий сомножители в правой части стремятся к 1 (для второго это очевидно, а для третьего следует из замечательного предела (30), который при излагаемом в § 4 подходе к определению e^x почти столь же очевиден). Поэтому при достаточно больших R, скажем, при $R \geqslant R_0$, имеем

$$w(t_1) - w(0) \leqslant 5kR \tag{77}$$

(при умножении на второй и третий сомножители число $4kR$ может несколько увеличиться, но так как эти сомножители стремятся к 1 при $R \to \infty$, то при достаточно большом R произведение будет не больше, чем $5kR$).

После момента времени $t = t_1$ точка $z(t)$ входит в полуплоскость $x > 1$ и заведомо остаётся там, пока $y(t) > 0$, ибо $\dot{x} = y$, так что x возрастает. В это время

$$\dot{y} = -x + k(1 - x^2)y \leqslant -x \leqslant -1 \quad (\text{у нас } 1 - x^2 < 0 \text{ и } x \geqslant 1),$$

откуда следует, что
$$y(t) \leqslant y(t_1) - (t - t_1).$$
Правая часть со временем обращается в нуль. Поэтому и $y(t)$, убывая, достигает нуля при некотором $t = a$.

Мы хотим доказать, что если R достаточно велико, то на отрезке времени $t_1 \leqslant t \leqslant a$ имеется такое b, что $|z(b)| = R$, т. е. $w(b) = R^2$. Удобно рассуждать от противного, допустив, что при всех t из этого отрезка $w(t) > R^2$.

Когда $t = t_1$, то $y^2(t_1) = w(t_1) - 1$. При достаточно большом R будет выполнено неравенство $y^2(t_1) > \frac{2}{3}w(t_1)$ (это ведь означает, что $w(t_1) - 1 > \frac{2}{3}w(t_1)$, т. е. $w(t_1) > 3$; это заведомо так при $R^2 \geqslant 3$, ибо $w(t_1) > w(0) = R^2$. (Итак, отныне на R наложены два условия: $R \geqslant R_0$ и $R^2 \geqslant 3$. Позднее будут ещё два условия, и они тоже будут состоять в том, чтобы R было достаточно большим.) При $t = a$ имеем $y^2(a) = 0$, $w(a) = x^2(a) > 0$. Значит, существуют такие t_2 и t_3, что $t_1 < t_2 < t_3 < a$,
$$y^2(t_2) = \frac{2}{3}w(t_2), \quad y^2(t) < \frac{2}{3}w(t) \quad \text{при } t_2 < t \leqslant t_3,$$
$$y^2(t_3) = \frac{1}{3}w(t_3), \quad y^2(t) > \frac{1}{3}w(t) \quad \text{при } t_2 \leqslant t < t_3.$$

Наши основные рассуждения будут относиться к отрезку времени $[t_2, t_3]$. На нём $y^2(t)$ не слишком отличается от $x^2(t)$ и $w(t)$; это позволяет получить оценку убывания функции $w(t)$, показывающую, что пока t возрастает от t_2 до t_3, эта функция довольно существенно убывает. Данный отрезок составляет часть отрезка $[t_1, a]$ (напоминаю, что при $t = t_1$ точка $z(t)$ пересекает вертикаль $x = 1$ и входит в полуплоскость $x \geqslant 1$, а при $t = a$ эта точка впервые после момента t_1 попадает на ось иксов), который, в свою очередь, является частью того отрезка времени, на котором $x(t) > 1$, — ведь $x(t)$ возрастает, пока $y > 0$, и раз вначале было $x(t_1) = 1$, то потом всё время, пока $y(t) > 0$, координата $x(t)$ будет возрастать и, значит, будет больше 1. А пока $z(t)$ находится в полуплоскости $x > 1$, $w(t)$ убывает; значит, $w(t_1) - w(a) \geqslant w(t_2) - w(t_1)$, и если окажется, что последняя разность больше $5kR$, то тем самым будет установлено, что где-то на отрезке $[t_1, a]$ имеется такой момент времени b, что $w(b) = R^2$.

На рисунке 26 изображена гипотетическая траектория[108] $z(t) = (x(t), y(t))$, которая начинается в точке $z(0) = (-1, \sqrt{R^2 - 1})$ с большим R и для которой $|z(t)| > R$ при всех t, лежащих между t_1 и a, а на

[108] Повторяю, что мы сейчас рассуждаем от противного и хотим доказать, что при достаточно больших R таких траекторий нет.

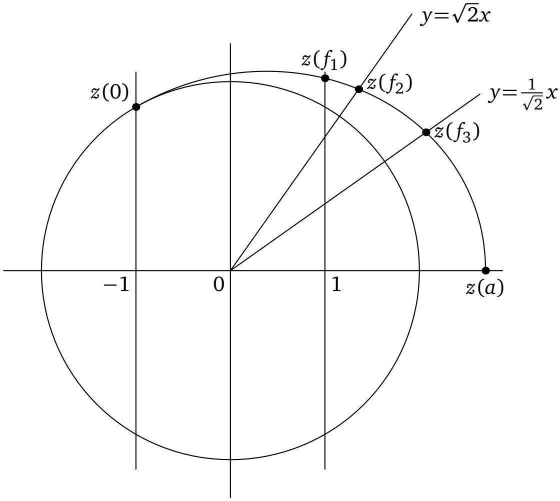


Рис. 26

ней отмечены точки $z(t_2)$ и $z(t_3)$ (в них $y^2(t_2)=2x^2(t_2)$ и $2y^2(t_3)=$ $=x^2(t_3)$ — проверьте!)

Рисунок подразумевает, что в при изменении t от t_1 до a отношение $\dfrac{x}{y}$ возрастает, поэтому имеется ровно один момент t_2, когда $y^2(t_2)=\dfrac{2}{3}w(t_2)$ (т. е. $y^2(t_2)=2x^2(t_2)$), и ровно один момент t_3, когда $y^2(t_3)=\dfrac{1}{3}w(t_3)$ (т. е. $2y^2(t_3)=x^2(t_3)$). Но и не предполагая такой монотонности, можно принять за t_2 последний момент времени между t_1 и a, в который $y^2(t_2)=\dfrac{2}{3}w(t_2)$ (после этого всё время до момента a будет выполнено неравенство $y^2(t)<\dfrac{2}{3}w(t)$), а за t_3 — первый момент времени между t_2 и a, в который $y^2(t_3)=\dfrac{1}{3}w(t_3)$ (значит, $y^2(t)>\dfrac{1}{3}w(t)$ при $t_2\leqslant t<t_3$).

На самом деле $\dfrac{x}{y}$ действительно возрастает при указанных t (так что уточнения о выборе t_2 и t_3 — последний момент … первый момент … — излишни). Но чтобы в этом убедиться, надо уметь дифференцировать дроби (тогда как, повторяю, с помощью сделанных выше оговорок о выборе t_2 и t_3 можно обойтись без ссылки на возрастание $\dfrac{x}{y}$). А именно, пока $x>1$ и $y>0$,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\cdot}=\frac{\dot{x}y-\dot{y}x}{y^2}=\frac{yy-(-x+k(1-x^2)y)x}{y^2}=\frac{y^2+x^2+k(x^2-1)xy}{y^2}>1.$$

Вместо $y(t)$ нам будет удобнее иметь дело с $v(t)=y^2(t)$. Заметим, что $v(t_2)=\frac{2}{3}w(t_2)$ и т. д. Для значений t из $[t_2, t_3]$ мы получим:

а) оценку сверху для скорости убывания $v(t)$ вида $|\dot v(t)|\leqslant V$ (так что $\dot v(t)\geqslant -V$);

б) оценку снизу для разности $v(t_2)-v(t_3)$ вида $v(t_2)-v(t_3)\geqslant \Delta v$;

в) оценку снизу для скорости убывания $w(t)$ вида $|\dot w(t)|\geqslant W$ (так что $\dot w(t)\leqslant -W$).

Величины V, Δv и W будут указаны в явном виде.

Если бы величина v уменьшалась со скоростью V, то она уменьшилась бы на Δv за время $\dfrac{\Delta v}{V}$. А так как при $t_2\leqslant t\leqslant t_3$ скорость уменьшения v меньше V, а изменение v за это время больше Δv, то $t_3-t_2\geqslant \dfrac{\Delta v}{V}$. Ввиду в) за это же время $w(t)$ уменьшается не менее чем на $\dfrac{W\Delta v}{V}$. Мы увидим, что если R достаточно велико, то

$$\frac{W\Delta v}{V}\geqslant 5kR. \tag{78}$$

А ведь $w(t_2)\leqslant w(t_1)\leqslant w(0)+5kR=R^2+5kR$. Поэтому получается, что $w(t_3)\leqslant R^2$ вопреки предположению.

К пункту а). Имеем $\dot v=2y\dot y=-2xy-2k(x^2-1)y^2$. Здесь оба слагаемых отрицательны (при рассматриваемых t), поэтому

$$|\dot v| = 2xy+2k(x^2-1)y^2 \leqslant 2xy+2kx^2y^2 \leqslant w+\frac{1}{2}kw^2 \leqslant \ldots$$

(используем тот факт, что $2xy\leqslant x^2+y^2$.) Продолжаем:

$$\ldots \leqslant w(t_1)+\frac{1}{2}kw^2(t_1) \leqslant (R^2+5kR)+\frac{1}{2}k(R^2+5kR)^2 = \\ = R^4\left[\frac{1}{R^2}+\frac{5k}{R^3}+\frac{1}{2}k\left(1+\frac{5k}{R}\right)^2\right].$$

При $R\to\infty$ выражение в квадратных скобках стремится к $\frac{k}{2}$. Поэтому в качестве величины V, оценивающей сверху $|\dot v|$ при больших R, мы можем взять $V=kR^4$.

К пункту б). Имеем

$$v(t_2)-v(t_3) = \frac{2}{3}w(t_2)-\frac{1}{3}w(t_3) \geqslant \frac{2}{3}w(t_3)-\frac{1}{3}w(t_3) = \frac{1}{3}w(t_3) \geqslant \frac{1}{3}R^2$$

(w убывает, $t_2<t_3$, и мы предполагаем, что всё время $w\geqslant R^2$). Берём $\Delta v=\frac{1}{3}R^2$.

К пункту в). Ввиду (75)

$$\dot w = 2k(1-x^2)y^2, \quad |\dot w| = 2k(x^2-1)y^2 \geqslant 2k\left(\frac{w}{3}-1\right)\frac{w}{3} \geqslant 2k\left(\frac{R^2}{3}-1\right)\frac{R^2}{3}$$

(раз $\frac{1}{3}w \leqslant y^2 \leqslant \frac{2}{3}w$ и $w = x^2 + y^2$, то $\frac{1}{3}w \leqslant x^2$). Берём $W = 2k\left(\frac{R^2}{3} - 1\right)\frac{R^2}{3}$.

А теперь проверяем (78):

$$\frac{W\Delta v}{V} = \frac{2k\left(\frac{R^2}{3} - 1\right)\frac{R^2}{3} \cdot \frac{1}{3}R^2}{kR^4} = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{R^2}\right)\frac{1}{9}R^2.$$

При большом R это имеет порядок $\frac{2}{27}R^2$, что больше, чем $5kR$.

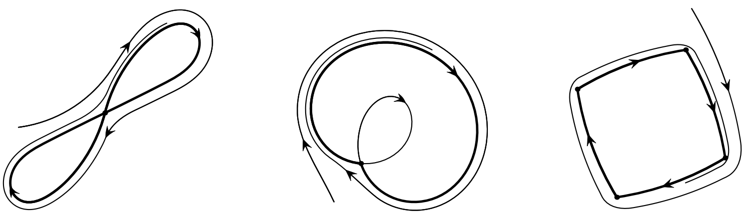
§ 7. Теория Пуанкаре–Бендиксона. Грубость и типичность

Теория Пуанкаре—Бендиксона описывает возможные типы предельного поведения траекторий на фазовой плоскости. Будем считать, что автономная система (28) задана в области G и имеет там конечное число положений равновесия (последнего для нас достаточно, а формулировки при этом упрощаются; вообще же в теории Пуанкаре—Бендиксона рассматривается и общий случай)[109]. Пусть положительная полутраектория $\{x(t);\ t \geqslant t_0\}$ является ограниченной (т. е. имеется такое $C > 0$, что $|x(t)| \leqslant C$ при всех $t \geqslant t_0$) и её замыкание содержится внутри G (т. е. там лежат все предельные точки — точки вида $\lim\limits_{t_n \to \infty} x(t_n)$)[110]. Тогда для поведения $x(t)$ при $t \to \infty$ имеются только следующие возможности:

1) $\{x(t)\}$ является положением равновесия или замкнутой траекторией;

2) $\{x(t)\}$ стремится к положению равновесия;

3) $\{x(t)\}$ навивается на предельный цикл;



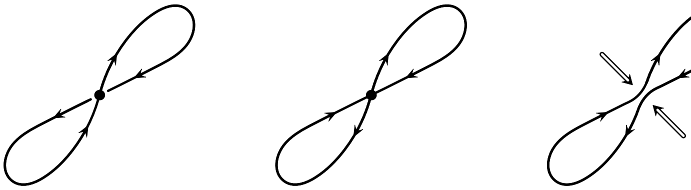
а) *б*) *в*)

Рис. 27. Навивание траектории на различные кривые

4) $\{x(t)\}$ навивается на замкнутую кривую L (так сказать, «криволинейную ломаную»), состоящую из одного или нескольких поло-

[109] Само собой разумеется, что на векторное поле фазовой скорости накладываются обычные ограничения типа гладкости, гарантирующие существование и единственность решений и надлежащие свойства решения как функции от времени t и начальных данных (свойства упоминавшегося в § 2 $x(t, x_0)$).

[110] Короткая формулировка для достаточно подготовленных студентов (включающая и ограниченность, и условие о предельных точках): полутраектория относительно компактна в G.



а) *б*) *в*)

Рис. 28

жений равновесия («вершины ломаной») и соединяющих их траекторий — сепаратрис («звенья ломаной»). Как видно из рис. 27, кривая L может иметь самопересечения. В соответствующих точках происходит не «настоящее» пересечение одной дуги кривой L с другой её дугой, вроде показанного на рис. 28 *а*, а, так сказать, «слипание» точек двух её дуг, как показано на рис. 28 *б*. Название «слипание» связано с тем, что — вне теории Пуанкаре—Бендиксона — такое самопересечение могло бы получиться при сближении двух частей одной замкнутой кривой, как показано на рис. 28 *в*. В этом случае L называют «сепаратрисным циклом (контуром)» или «ломаным предельным циклом».

Таким образом, список возможностей в теории Пуанкаре—Бендиксона невелик; добавлю, что доказательство его исчерпывающего характера не очень трудно. Совсем другая задача — выяснить, какие именно возможности реализуются для конкретного уравнения (или некоторого класса уравнений). Она может быть очень трудной.

Основная заслуга Пуанкаре в данном случае состояла в том, что он начал использовать в подобных вопросах геометрию. Теперь обращение к ней стало «само собой разумеющимся делом, а как же иначе»? К основному результату теории Пуанкаре—Бендиксона иначе, действительно, не подойдёшь (а ведь его можно сформулировать и независимо от геометрии как утверждение о поведении решений системы (28) при $t \to \infty$ — в случаях 1), 2) и 3) это достаточно очевидно, только формулировка случая 4) стала бы довольно громоздкой). Но и во многих других вопросах привлечение геометрии помогает — если и не столь существенным образом, то по крайней мере упрощая понимание ситуации. Так обстоит дело, например, в теории устойчивости. А между тем сам Ляпунов геометрическим языком совершенно не пользовался. Не то чтобы он его не понимал (как бы он смог в противном случае оценить работы Пуанкаре?), но, видимо, считал его излишним и, похоже, даже допускал, что привносимая этим языком ясность может быть обманчивой, особенно при $n > 2$. Если говорить о неосторожном обращении с геометрией, когда кажущееся принимается за доказанное, то Ляпунов, конечно, был прав, хотя это относится не только к геометрии, но и к чему угодно...

Только недавно удалось окончательно[111] доказать, что если в правых частях системы (28) стоят многочлены, то у системы может быть только конечное число предельных циклов. Даже когда f_1, f_2 — многочлены второй степени, этот результат весьма не тривиален и был получен сравнительно недавно (Р. Бамон, 1986). В общем же случае он был доказан разными способами Ю. С. Ильяшенко и Ж. Экалем в 1990—1992 гг. Как сказано в одной из недавних статей обзорно-программного характера, сообществу математиков, работающих в качественной теории дифференциальных уравнений, потребуется время, чтобы переварить эти работы[112].

Если у каждой системы (28) с многочленами k-й степени f_i число предельных циклов конечно, то всё же не исключено, что среди таких систем с одним и тем же k имеются системы со сколь угодно большим числом предельных циклов. Это до сих пор не известно (даже при $k = 2$.) Если же окажется, что у всех систем (28) с многочленами k-й степени f_i число предельных циклов не может быть сколь угодно большим, т. е. число предельных циклов у них не превосходит некоторого числа[113] a_k, то возникает ещё более непонятный вопрос, насколько велико это a_k.

Он составляет часть так называемой 16-й проблемы Гильберта. Гильберт, видимо, был настолько уверен в конечности a_k, что даже не сформулировал отдельно вопроса на сей счёт.

Д. Гильберт (1862—1943), как и Пуанкаре (которому Гильберт, по его собственному признанию, всё-таки несколько уступал), работал в различных разделах математики. (Но не во всех. Так, у него бывали серьёзные тематические «соприкосновения» с Пуанкаре, но настоящих «пересечений», кажется, не было или почти не было.)

В 1900 г. на II Международном математическом конгрессе Гильберт сделал доклад «Математические проблемы». После небольшой вводной части, где он говорил о роли конкретных проблем для развития математики, Гильберт сформулировал «как бы на пробу» 23 проблемы из различных разделов математики. Он сказал, что «названные проблемы — это только образцы про-

[111] Окончательно, потому что ещё в 1923 г. А. Дюлак (1870—1955) опубликовал доказательство, оказавшееся неполным. Его работа была вполне содержательной, но с заключительным выводом он поторопился.

[112] Автором цитированной статьи был С. Смейл, о вкладе которого в теорию динамических систем немного говорится в конце настоящего параграфа. Суждение такого эксперта нельзя не считать весомым, тем более что он, вероятно, выражал своё впечатление не только от этих работ, но и от бесед по их поводу со своими коллегами (а при его положении среди них, надо думать, были люди, тоже заслужившие немалый авторитет в данной области).

[113] Если среди систем (28) с многочленами k-й степени f_i имеются системы со сколь угодно большим числом предельных циклов, то можно сказать, что $a_k = \infty$.

блем». Но «образцы» оказались удивительно удачными и оказали большое стимулирующее влияние на развитие математики в XX веке, да и на XXI век кое-что осталось (хотя в основном с проблемами Гильберта сумел справиться XX век).

Теория Пуанкаре—Бендиксона говорит нам, какие вопросы можно задавать по поводу предельного поведения отдельных траекторий конкретного уравнения (вопросов оказывается не так уж много, и знать это весьма не лишне), но не очень-то помогает отвечать на них. Кроме того, на полном фазовом портрете мы видели бы предельное поведение всех траекторий, а между тем теория Пуанкаре—Бендиксона почти ничего не говорит о том, как могут сочетаться возможности, относящиеся к различным траекториям, потому что и на самом деле возможны почти любые сочетания.

Андронов обратил внимание, что в ряде интересовавших его вопросов теории автоколебаний многие типы фазовых портретов являются в известном смысле исключительными. Собственно, это относится к большинству формально возможных фазовых портретов. Так что число разумных вопросов сокращается. Точная реализация замысла Андронова была им достигнута совместно с Л. С. Понтрягиным[114] в 1937 г. В их окончательной формулировке выдвигаются две точки зрения, различающиеся по своему содержанию (это, так сказать, точки зрения с различных позиций), но замечательным образом приводящие к одному и тому же заключению.

Рассмотрим сперва пример. У гармонического осциллятора все траектории замкнутые, но стоит добавить хотя бы небольшое сопротивление движению, т. е. перейти от уравнения (7) к (25), добавив слагаемое $k\dot{x}$ с маленьким $k > 0$, — и все решения устремятся к началу координат. А если наряду с диссипацией энергии добавить

[114] Л. С. Понтрягин (1908—1988) в возрасте 14 лет ослеп в результате несчастного случая. Для слепого получить полноценное высшее образование — уже подвиг, а Понтрягин достиг гораздо большего, став одним из крупнейших российских математиков. До начала 1950-х гг. он занимался преимущественно топологией (это относительно новый раздел науки, окончательно сформировавшийся, кстати, благодаря Пуанкаре; некоторая (честно говоря, несколько примитивная) характеристика принятой в ней точки зрения (но, увы, не её результатов) содержится в одном из подстрочных примечаний далее). Здесь его достижения принадлежали к числу лучших мировых. Однако и тогда он порой отвлекался на дифференциальные уравнения (в основном не без влияния Андронова. В этот период появилась та их совместная работа, о которой я сейчас говорю.) Начиная с 1950-х гг. Понтрягин полностью переключился на теорию дифференциальных уравнений (в широком смысле слова — включая пограничную между нею и вариационным исчислением математическую теорию оптимальных процессов). На мой взгляд, второй период его творчества несколько уступает первому, но и одного второго периода достаточно для высокой оценки его достижений.

ещё небольшую «подкачку» энергии в систему, то может получиться уравнение ван дер Поля (66) с более сложным фазовым портретом. С другой стороны, если начать с уравнения (25) (т. е. с системы (26)) с $k > 0$ и немного изменить его коэффициенты, то фазовый портрет не изменится. Можно доказать, что он не изменится и при произвольном «малом возмущении», т. е. при добавлении в правые части (26) не только маленьких линейных функций от фазовых координат x, y, но и произвольных функций от x, y, если эти функции и их производные достаточно малы. Аналогичный факт имеет место и для системы (71), отвечающей уравнению ван дер Поля.

Замкнутость траекторий систем (14) и (21) связана с законом сохранения энергии, причём в данном случае одного из её видов (механической энергии, если понимать (14) как уравнения для малых колебаний маятника или грузика на пружинке). Вообще, если для физической системы (рассматриваемой как отдельный объект) справедлив какой-то физический закон, то это может налагать ограничения на то, какими могут быть правые части системы дифференциальных уравнений, описывающих эту систему. (Я не говорю, конечно, о нарушении физических законов — они на то и законы, чтобы не нарушаться, — но они могут относиться не к рассматриваемой нами отдельной физической системе, к её, так сказать, внутренней динамике, а к этой системе в связи с окружающей средой.) Пока мы имеем дело только с консервативными системами, возможность качественного изменения фазового портрета такой системы при произвольных малых возмущениях не должна нас смущать — произвольное возмущение, вообще говоря, нарушает консервативность.

Другое дело — автоколебательные системы, которыми особенно интересовался Андронов. Здесь есть ещё следующая сторона дела. Нет оснований утверждать, что работа лампового генератора описывается в точности уравнением (66) — это ведь не фундаментальный, «первичный» физический закон вроде закона Кулона взаимодействия электрических зарядов, математическое выражение которого можно считать точно известным (или по крайней мере известным с очень большой точностью). При выводе (66) предполагается, что зависимость проходящего через лампу тока от напряжения на сетке выражается определённой формулой. Эта зависимость была установлена в результате измерений и представлена графически, а затем для полученного графика подобрали функцию от напряжения, которой равен ток.

Ясно, что степень точности этой эмпирической формулы намного ниже, чем точность формул, выражающих фундаментальные законы природы. Да, может быть, к особой точности здесь и не стремились, а довольствовались приблизительным сходством между графиком f и графическим выражением зависимости тока от напряжения. Поэтому очень хорошо, что фазовый портрет для уравнения ван дер Поля не меняется при малых возмущениях — неточность, вероятно свойственная этому уравнению, не мешает тому, чтобы его фазовый портрет был правильным фазовым портретом лампового генератора[115].

В теории Андронова—Понтрягина рассматриваются системы (28), которые заданы в замкнутой области[116] D, ограниченной некоторой гладкой замкнутой кривой C без самопересечений[117], и у которых вектор фазовой скорости f нигде на кривой C не равен нулю и всюду на C направлен внутрь[118] D. Совокупность таких систем будем обозначать через $\mathscr{V}^1$ ($\mathscr{V}$ происходит, конечно, от vector (field), а верхний индекс напоминает о гладкости класса C^1). С физической точки зрения условие о поведении f на C можно понимать так, что при больших x_1 или x_2 преобладают диссипативные члены, и поэтому решения входят внутрь области D. Уже несколько раз говорилось, что для автоколебательных систем это обычная ситуация.

Занимаясь уравнением (66), мы встретились с формально несколько иной ситуацией. Во-первых, кривая C', ограничивавшая снаружи интересующую нас область, была не гладкой, а только кусочно-гладкой — она состояла из нескольких гладких дуг, примыкавших друг к другу под углом. Во-вторых, на части этих дуг фазовая скорость не была направлена внутрь C', а касалась этих дуг.

Однако можно показать, что кривую C' можно заменить близкой к ней гладкой кривой C, обладающей указанными выше свойствами. Я не буду этого доказывать. (Но мне кажется, что студент-математик довольно легко спра-

---

[115] На это можно возразить, что если мы не уверены в точном виде функции f, то надо рассмотреть тот специальный класс уравнений, который получается при различных f со сходными свойствами, а не произвольные малые возмущения уравнения (66). Что, конечно, давно сделано. Но если бы фазовый портрет для (66) существенно изменялся при сколь угодно малых возмущениях, то, во-первых, сомнительно, чтобы в пределах упомянутого специального класса фазовые портреты были бы одинаковыми, а во-вторых, не исключено, что есть какие-то ещё неучтённые нами обстоятельства, которые могли бы на этот портрет повлиять.

[116] Замкнутая область — это область в прежнем смысле, к которой присоединена её граница.

[117] Здесь произошло небольшое отступление от соглашений, принятых в § 2, где речь шла о системе, заданной в открытой области. Но когда граница области устроена столь просто, как у нашей D, не возникает вопроса, как понимать обычное условие гладкости векторного поля фазовой скорости f (т. е. функций f_i, служащих его координатами) в такой области.

[118] Имеется в виду «строго внутрь», т. е. f нигде не касается C.

вится с этим. Насчёт возможностей школьника, даже из физматшколы, я не так уверен.).

В предварительном порядке можно дать намёк на те две точки зрения, которые были выдвинуты в работе Андронова и Понтрягина. Первая состоит в том, что во главу угла ставится сохранение (или несохранение) фазового портрета при малом «возмущении» рассматриваемой системы из $\mathscr{V}^1$, т. е. при малом изменении её правой части. Система называется *грубой*[119], или *структурно устойчивой*, если при любых достаточно малых возмущениях её фазовый портрет не меняется, т. е. остаются неизменными все качественные свойства поведения её траекторий. В этом определении (конечно, нуждающемся в уточнениях, которые будут даны ниже) свойства рассматриваемой системы (28) сравниваются со свойствами «близких» к ней систем. А после этого Андронов и Понтрягин установили, как охарактеризовать грубую систему посредством свойств её собственного фазового портрета. При этом выяснилось, что при малом возмущении грубой системы снова получается грубая система и что любую систему из $\mathscr{V}^1$ можно слегка изменить таким образом, что получится грубая система («грубые системы плотны в $\mathscr{V}^1$»). Поэтому можно сказать, что грубые системы являются как бы «преобладающими», «типичными» в $\mathscr{V}^1$. Здесь первая точка зрения, выдвинутая Андроновым и Понтрягиным, смыкается со второй точкой зрения, которая как раз и состоит в том, чтобы охарактеризовать фазовые портреты систем из $\mathscr{V}^1$, являющихся преобладающими, типичными.

Слово «типичность», подобно «регулярности» и «хаотичности», является не точным термином, а неформальной характеристикой (подразумевая, хотя бы отчасти, и обращение к интуиции). Читателю-студенту, вероятно, известно, что нигде не плотное подмножество отрезка (вроде бы его надо считать «пренебрежимо малым», «исключительным»?) может иметь положительную меру Лебега, сколь угодно близкую к длине отрезка (какая уж тут «исключительность», разве можно пренебрегать таким множеством?). Таким образом, имеется несогласованность различных вариантов, какими можно уточнять смысл слова «типичность». В настоящей книжке «типичность» динамической системы всегда близка к первому варианту, использование которого в данной области восходит к работе Андронова и Понтрягина. (Близка, но не всегда соответствующие формулировки в точности такие же, как у них; я не останавливаюсь на уточнениях.)

Но и второй вариант имеет право на жизнь, и не только «вообще», но и в вопросах интересующей нас теории динамических систем. (Прошу пове-

[119] «Грубость» понимается в том же смысле, как в выражении «грубо, но надёжно», а не в смысле хамства.

рить мне на слово, даром что это слово здесь не только никак не мотивировано, но и звучит как-то приблизительно. Пояснения потребовали бы слишком много места.)

Студент поймёт, почему первый вариант называется топологическим, а второй — метрическим (метрическим не в смысле каких-то связей с метрическими пространствами, а в смысле теории меры). Насколько я знаю, на метрический вариант в теории динамических систем и на некоторую коллизию между двумя вариантами в этой теории впервые обратил внимание А. Н. Колмогоров в середине 1950-х гг.

Мне остаётся уточнить постановку задачи, а затем я сформулирую ответ (т. е. укажу свойства фазовых портретов грубых систем). Два момента в постановке нуждаются в уточнении. Во-первых, раз мы говорим о малых возмущениях, то надо объяснить, как мы будем характеризовать степень отличия[120] $\mathrm{Dist}(f, g)$ друг от друга двух систем из $\mathscr{V}^1$ — системы (28) и системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{79}$$

(короче, $\dot{z} = g(z)$)? И во-вторых, надо совершенно чётко указать, когда качественные свойства фазовых портретов двух систем из $\mathscr{V}^1$ считаются одинаковыми.

Итак, что принять за $\mathrm{Dist}(f, g)$? В основном всё сводится к подходящей характеризации $d(\varphi, \psi)$ разницы между двумя функциями φ, ψ (с обычными числовыми значениями), ибо если мы договоримся, что понимать под «расстоянием $d(\varphi, \psi)$ между φ и ψ», то для векторных полей $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ можно принять, скажем,

$$\mathrm{Dist}(f, g) = d(f_1, g_1) + d(f_2, g_2). \tag{80}$$

Здесь мы сталкиваемся с тем, что под «расстояниями» между двумя функциями можно понимать принципиально различные величины[121]. Вообще-то уже под «расстоянием» между точками $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ на плоскости можно понимать не только обычное геометрическое расстояние $d_{\text{геом}}(x, y)$ (равное $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

[120] Dist в обозначении $\mathrm{Dist}(f, g)$, конечно, связано со словом distance — расстояние. Дело в том, что некоторые свойства этого «расстояния» между f и g напоминают привычные свойства обычного расстояния между точками. Замечание для студентов: я здесь имею в виду, что $\mathscr{V}^1$, рассматриваемое с этим «расстоянием», является метрическим пространством.

[121] И это сказывается не только в теории дифференциальных уравнений (где, кстати, это сказывается отнюдь не только в интересующем нас вопросе), но и в ряде других разделов математики.

по теореме Пифагора), но и другие величины, ничуть не хуже говорящие об отличии x от y, например, $d' = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ или $d''=\max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$ (наибольшее из двух чисел $|x_1-y_1|$, $|x_2-y_2|$). Но различие между этими «расстояниями» всё же не настолько велико, чтобы сказываться на таких понятиях, как предел: если последовательность точек y_n стремится к точке x в смысле одного из этих «расстояний» (т. е. если выполняется одно из утверждений

$$d_{\text{геом}}(x, y_n) \to 0, \quad d'(x, y_n) \to 0, \quad d''(x, y^{(n)}) \to 0), \tag{81}$$

то $y_n \to x$ также и в смысле других «расстояний» (т. е. выполняются и два других из утверждений (81)). Различия же между различными «расстояниями» между функциями могут быть столь большими, что, как мы увидим, это сказывается и на понятии предела.

Казалось бы, всего естественнее принять $d(\varphi, \psi) = \max|\varphi(x_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)|$, причём максимум берётся по всем точкам замкнутой области D (где заданы φ и ψ). После этого мы могли бы измерять близость систем (28) и (79) величиной (80) (её малость означала бы просто малость $d(f_1, g_1)$ и $d(f_2, g_2)$). Но, как мы сейчас увидим, для наших целей такое «расстояние между векторными полями» не годится. Если бы мы его приняли, то оказалось бы, что качественные свойства (пусть не все, но некоторые) могут измениться при сколь угодно малом возмущении. Подробнее: какой бы ни была исходная «невозмущённая» система (28), сколь угодно близко к ней найдётся «возмущённая» система (79) с другими качественными свойствами. Получается, что грубых систем вообще не существовало бы.

Например, пусть у исходной системы (28) все положения равновесия являются изолированными и (a_1, a_2) — одно из них. У сколь угодно близкой к (28) системы (79) (близкой, повторяю, в смысле малости $\mathrm{Dist}(f, g)$) положение равновесия (a_1, a_2) вполне может не быть изолированным. Не вникая в детали, это можно пояснить на одномерном примере аналогичного характера. На рис. 29 изображены графики двух функций одной переменной φ и ψ, близких в смысле малости $d(\varphi, \psi)$. Функция φ имеет изолированный, а ψ — неизолированный нуль[122] в точке $x = 0$, т. е. система $\dot{x} = \varphi(x)$ имеет там изолированное положение равновесия, а система $\dot{x} = \psi(x)$ — неизолированное. А ведь является ли положение равновесия изолированным или неизолированным — это, несомненно, надо отнести к числу качественных свойств фазового портрета.

[122] Функция φ имеет нуль в точке a (а a является нулём функции φ), если $\varphi(a) = 0$. (Это, может быть, звучит как своего рода сленг, но так говорят.)

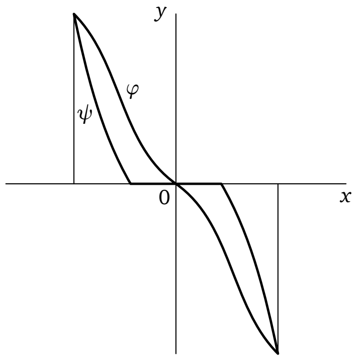


Рис. 29

Хотя изложенные соображения и не являются исчерпывающими[123], их достаточно, чтобы читатель согласился с выводом: расстояние $\mathrm{Dist}(f,g)$ (а с ним и $d(\varphi,\psi)$) для нас не годится[124].

Недостаток расстояния $d(\varphi,\psi)$ состоит в том, что близость функций φ и ψ друг к другу (в смысле малости этого «расстояния») ничего не говорит о близости их производных. Если нарисовать такой аналог рис. 29, на котором производная $\psi'(x)$ была бы близка к $\varphi'(x)$ (рис. 30), то видно, что ψ, монотонно убывая (при увеличении x), может иметь только один нуль a, причём он близок к точке $x=0$. Говоря на языке автономных систем: возмущённая система $\dot{x}=\psi(x)$ имеет единственное положение равновесия a и оно близко к положению равновесия 0 невозмущённой системы $\dot{x}=\varphi(x)$. Более того: у обеих систем вектор фазовой скорости слева от положения равновесия направлен направо, а справа — налево. Поэтому при $t\to\infty$ все решения стремятся к положению равновесия. А так как в качественном отношении ничего иного в этих системах не происходит, то обе системы имеют одинаковые качественные свойства. Значит, система $\dot{x}=\varphi(x)$ является грубой. (Когда мы по всей форме уточним, как

[123] Чтобы быть вполне аккуратным, надо было бы ответить ещё на пару вопросов: а что, если у исходной («невозмущённой») системы (28) положения равновесия не все являются изолированными? А что, если их нет? Ничего существенного эти вопросы не затрагивают, просто для их обсуждения требовалось бы место, да и читать скучно.

[124] Не годится, ибо мы хотели, чтобы при малом возмущении сохранялись все качественные свойства фазового портрета. Вполне разумна другая постановка вопроса: какие свойства всё-таки сохраняются при любых достаточно малых возмущениях, если близость «возмущённой» системы (79) к «невозмущённой» (28) понимать как малость только что отвергнутой величины $\mathrm{Dist}(f,g)$? Конечно, этим тоже занимались (и не только для систем второго порядка), но я на этом не останавливаюсь.

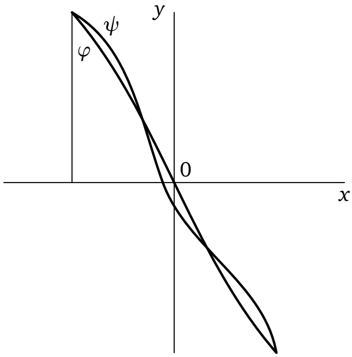


Рис. 30

понимать совпадение качественных свойств, читатель без труда убедится, что данный случай подпадает под это уточнение.)

На основании обсуждения поведения траекторий системы (28) возле положения равновесия в конце §3 тоже можно сделать вывод, что близость возмущённой системы (79) к невозмущённой системе (28) целесообразно понимать в том смысле, что не только g_i близки к f_i, но и первые производные $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ близки к $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. При таком понимании близости можно доказать, что если у (28) имеется гиперболическое положение равновесия (a_1, a_2), то у близкой к ней системы (79) имеется близкое к (a_1, a_2) положение равновесия, которое тоже гиперболично и имеет тот же тип (из перечисленных в §3), что и положение равновесия (a_1, a_2) исходной системы.

Примечание для студентов: часть только что сделанного утверждения относится, собственно говоря, не к теории дифференциальных уравнений, а к обычному курсу матанализа. Это часть, гласящая: «Пусть в некоторой области U возле точки (a_1, a_2) заданы две гладкие функции f_1, f_2, которые в этой точке обращаются в нуль, и пусть в ней же якобиан (функциональный определитель) $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0$. Тогда при достаточной близости к f_1, f_2 двух заданных в U гладких функций g_1, g_2 имеется точка (b_1, b_2), где обе функции g_i обращаются в нуль, и чем ближе g_1, g_2 к f_1, f_2, тем ближе (b_1, b_2) к (a_1, a_2), а других точек, где $g_1 = g_2 = 0$, возле (a_1, a_2) нет».

По существу, это вариант теоремы о неявных функциях, только в одном отношении отличающийся от того варианта, который, возможно, известен читателю. В обычном варианте речь не идёт о всевозможных функциях g_i, близких к f_i. Фактически там говорится о конечномерном семействе функций, зависящем от некоего параметра $u = (u_1, \ldots, u_k)$. (Обычно говорят о функциях $g_i(z, u)$, где $z = (x_1, x_2)$, а роль наших $f_i(z)$ играют функции $g_i(z, u^0)$, получающиеся при некотором фиксированном значении параметра $u = u^0$.) Мы же рассматриваем всевозможные функции g_i, близкие к f_i (если угодно, у нас семейство функций бесконечномерно — параметрами служат сами g_i).

Следующий шаг — сравнение поведения траекторий систем (28) и (79) возле (a_1, a_2) и (b_1, b_2). При линеаризации системы (79) возле её положения равновесия (b_1, b_2) получится система, коэффициенты которой близки к коэффициентам линеаризованной возле положения равновесия (a_1, a_2) системы (28) (почему?), а тогда, как видно из сказанного в конце § 3, оба положения равновесия имеют одинаковый тип.

Итак, мы принимаем такое определение расстояния $d(\varphi, \psi)$ между двумя гладкими функциями, заданными в D, при котором учитывается не только величина разности этих функций, но и величина разности их производных:

$$d(\varphi, \psi) = \max|\varphi - \psi| + \max\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right| + \max\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right|$$

(максимум опять берётся по всем точкам замкнутой области D, где заданы φ и ψ). После этого расстояние $\mathrm{Dist}(f, g)$ между системами (28) и (79) определяем согласно (80).

Различие между прежним и новым определениями $d(\varphi, \psi)$ сказывается даже на связанных с ними понятиях предела. Поясним это снова на примере функций от одной переменной. При первоначальном определении $d(\varphi, \psi)$ последовательность функций $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$, рассматриваемых на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, сходится к нулю (т. е. $d(\varphi_n, 0) \to 0$), тогда как при новом определении это не так — при нём она вообще не сходится (нет такой функции ψ, что $d(\varphi_n, \psi) \to 0$, — проверьте).

В определении $\mathscr{V}^1$ у нас было условие о значениях f на границе области D. Его аналогом было бы условие, что на концах отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ вектор[125] $\varphi(x)$ направлен внутрь этого отрезка, т. е.

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0. \tag{82}$$

Для функций, удовлетворяющих (82), тоже справедливо, что сходимость в смысле прежнего расстояния $d(\varphi, \psi)$ не гарантирует сходимости в смысле нового $d(\varphi, \psi)$. Только что обсуждавшаяся последовательность $\varphi_n(x)$, правда, не удовлетворяет (82), но содержит подпоследовательность $\psi_n(x) = \varphi_{4n+3}(x)$, удовлетворяющую этому условию.

[125] Хотя о $\varphi(x)$ мы говорили скорее как о функции с обычными числовыми значениями, $\varphi(x)$ в дифференциальном уравнении $\dot{x} = \varphi(x)$ играет роль векторного поля фазовой скорости. Переход от чисел к векторам на числовой прямой очевиден: от точки числовой прямой a, которая отождествляется с числом a, мы переходим к вектору $\overrightarrow{0a}$, который можно затем отложить не от нуля, а от любой другой точки этой прямой.

Второе необходимое разъяснение — разъяснение, когда качественные свойства фазовых портретов двух систем (28) и (79) из $\mathscr{V}^1$ считаются одинаковыми. В работе Андронова и Понтрягина они считаются одинаковыми в том и только том случае, когда существует такой гомеоморфизм χ области D на себя (гомеоморфизм — это взаимно однозначное и непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно[126]), который переводит траектории первой системы в траектории второй[127], сохраняя направление движения по ним. В таком случае говорят, что системы (28) и (79) *топологически эквивалентны*[128]. Данный термин употребляется вместо наглядного, но не очень-то точного оборота «системы имеют одинаковые качественные свойства фазового портрета», каким мы пользовались до сих пор. Гомеоморфизм χ устанавливает взаимно однозначное соответствие между такими важными элементами фазовых портретов топологически эквивалентных систем, как положения равновесия или замкнутые траектории. Если же (полу)траектория L системы (28) неограниченно приближается к траектории L_1 этой системы, то траектория $\chi(L)$ топологически эквивалентной системы (79) неограниченно приближается к траектории $\chi(L_1)$. В этом смысле у топологически эквивалентных систем предельное поведение траекторий одинаково.

Стоит добавить ещё несколько комментариев к определению топологической эквивалентности двух автономных систем, пояснив, почему в определении говорится, что χ переводит траекторию в траекторию, а не решение в решение, и почему отображение χ считается только непрерывным, а не гладким.

Пусть система (28) является грубой в усиленном смысле: для любой достаточно близкой к ней системы (79) имеется гомеоморфизм χ области D на себя, переводящий решения первой системы в решения второй. В частности, периодическое решение $z(t)$ первой системы, которое имеет период T (т. е. для которого $z(t+T)=z(t)$ при всех t;

[126] Замечание для студентов: ввиду компактности D непрерывность обратного отображения следует из непрерывности χ.

[127] Поскольку некоторые решения начинаются в точках кривой C (ограничивающей область D), то педантизма ради надо было бы говорить о полутраекториях.

[128] Почему эквивалентны — понятно, а почему топологически? Топология — это часть математики, которую можно назвать «геометрией непрерывности», одной только непрерывности, когда игнорируется всё остальное — расстояния, углы, прямолинейность и т. п. Ясно, что гомеоморфизм как раз и сохраняет все те свойства геометрических объектов, которые связаны с одной только непрерывностью. Это касается и свойств, связанных с такими важными понятиями, как предел и предельная точка — последние понятия тоже можно выразить в терминах, относящихся только к непрерывности.

напомню кстати, что T называют также периодом замкнутой траектории $\{z(t)\}$), переходит в решение $\chi(z(t))$ второй системы, очевидно, имеющее тот же период. Обратно, если $\chi(z(t))$ имеет период T, то таков же и период $z(t)$.

Итак, обе системы имеют одинаковое множество периодов своих периодических решений. Рассмотрим возмущённую систему $\dot{z} = (1+\varepsilon)f(z)$ с малым $\varepsilon > 0$. При возмущении направление вектора фазовой скорости не изменилось, а изменилась только величина этого вектора. Она увеличилась в $1+\varepsilon$ раз. Стало быть, замкнутые траектории у обеих систем одни и те же, но если замкнутой траектории первой системы отвечает периодическое решение с периодом T, то у второй системы ей отвечает периодическое решение с периодом $\frac{T}{1+\varepsilon}$.

Значит, периоды периодических решений второй системы суть в точности поделённые на $1+\varepsilon$ периоды первой системы. Но выше мы видели, что у этих систем одно и то же множество периодов! Выходит, что множество периодов периодических решений системы (28) взаимно однозначно отображается на себя, если каждый период разделить на $1+\varepsilon$. И вдобавок за ε можно принять произвольное достаточно малое положительное число! Этого, впрочем, даже и не нужно для того, чтобы прийти к проиворечию. Из того, что

$$\text{если } T \text{— период, то и } \frac{T}{1+\varepsilon} \text{— тоже период,}$$

следует, что имеются периодические решения со сколь угодно малыми периодами. Читатель может попытаться доказать, что при наших предположениях о системе (28) это невозможно.

Я же позволю себе «срезать угол» и сослаться на формулируемую ниже теорему Андронова—Понтрягина о системах, грубых в том смысле, как они это определили. Поскольку мы предполагаем, что система (28) является грубой в более сильном смысле, она должна обладать свойствами, указанными в этой теореме. А одно из них состоит в том, что замкнутых траекторий конечное число. Полученное противоречие показывает, что в «усиленно грубых» системах нет замкнутых траекторий. Это, конечно, не противоречит существованию таких систем, но исключает из рассмотрения слишком многое (включая системы, описывающие автоколебания, которыми особенно интересовался Андронов).

Теперь о том, почему в определении грубой системы χ считается гомеоморфизмом, т. е. взаимно однозначным отображением, от которого требуется только непрерывность в обе стороны, а не гладкость (кстати, гомеоморфизм, гладкий вместе с обратным к нему отображением, называется диффеоморфизмом). Оказывается, для гиперболической особой точки каждого из трёх типов (седла, узла и фокуса) можно указать некоторую величину, которая сохраняется при диффеоморфизмах, но изменяется при подходящем малом возмущении[129]. (Такая величина имеется и для гиперболического предельного цикла, см. ниже.)

В виде примера я опишу такую величину для узла. В случае узла «основного типа» (рис. 16*в*) все полутраектории, кроме двух (на рис. 16*в* исключительные полутраектории выглядят как ось v), лежат на семействе кривых, аналогичных семейству парабол $v = Cu^2$. Одни полутраектории подходят к положению равновесия O с одной стороны (на рис. 16*в* — с той стороны, где $u > 0$), другие — с другой. Полутраектории, подходящие к O с одной и той же стороны, касаются друг друга в этой точке. (Это несколько небрежная формулировка, поскольку сами полутраектории не проходят через точку O; имеется в виду, что после присоединения к ним этой точки получаются гладкие кривые, для которых утверждение о касании уже имеет смысл.)

Величина, о которой идёт речь, является так называемым порядком касания μ двух полутраекторий L и L_1, подходящих к O с одной и той же стороны (для любых L и L_1 он один и тот же). Этот порядок можно определить так: возьмём на L и L_1 точки $z(s)$ и $z_1(s)$, отстоящие от O на расстояние s; тогда расстояние $|z(s) - z_1(s)|$ имеет порядок s^μ. Сохранение μ при диффеоморфизме — довольно наглядный факт, который доказывается сравнительно просто. Чтобы убедиться в возможности изменения μ при подходящем малом возмущении, надо было бы несколько вникнуть в локальную теорию, чего мы делать не будем, но, по-видимому, возможность такого изменения тоже можно считать довольно наглядной.

Что касается исключительных случаев, изображённых на рис. 16*б*, *г*, то тут и без всяких порядков понятно, что, с одной стороны, при диффеоморфизме они должны переходить в такие же случаи, а с другой — что при малом возмущении узел станет узлом основного типа. Это очевидно, когда исключительный узел появляется в связи с известными нам линейными уравнениями, а тогда по поводу аналогичного утверждения относительно более общего

[129] Замечание для студентов: величиной такого характера является отношение собственных значений матрицы коэффициентов линеаризованной системы. Однако непосредственное доказательство её сохранения при диффеоморфизме, переводящем не решение в решение, а только траектории в траектории с сохранением направления движения по ним, не так уж просто. Пожалуй, проще связать это отношение с другими величинами более геометрического характера, об одной из которых говорится ниже в основном тексте. Недостаток такого подхода состоит в том, что тогда надо отдельно рассматривать узел, фокус и седло и в каждом из этих случаев утверждение о сохранении соответствующей величины хотя и является довольно наглядным, но всё же требует доказательства и, значит, места. Я не говорю уже о том, что всё это подразумевает некоторое, хотя и самое начальное, знакомство с локальной теорией.

(нелинейного) случая едва ли возникнут сомнения, хотя доказательство здесь не предъявлено.

Неожиданным может показаться тот факт, что узел и фокус топологически эквивалентны (считая, конечно, что они оба устойчивы или оба неустойчивы). Дело в том, что при гомеоморфизме образы гладких кривых, проходящих через точку O, вполне могут «закручиваться» вокруг неё, а при диффеоморфизме так не бывает. Правда, при малом возмущении грубой системы узлы остаются узлами, а фокусы — фокусами (почему?), так что эквивалентность узлов и фокусов остаётся как бы в стороне.

Как видно, говоря в определении грубых систем о сохранении качественных свойств, мы на самом деле имели в виду сохранение, собственно говоря, не всех качественных свойств (вращение траектории вокруг положения равновесия в случае фокуса — несомненно качественное свойство!), а только свойств топологического характера. Тот факт, что гиперболическое положение равновесия типа фокуса при малом возмущении остаётся таковым — это, так сказать, бесплатное приложение; мы заранее об этом не заботились.

Последнее замечание к определению грубости. До сих пор у нас намечалась такая формулировка: система (28) (из класса $\mathscr{V}^1$) называется грубой, если любая достаточно близкая к ней (в смысле расстояния Dist) система (79) топологически ей эквивалентна, т. е. если имеется такое $\delta > 0$, что при $\mathrm{Dist}(f, g) < \delta$ существует гомеоморфизм χ области D на себя, переводящий траектории первой системы в траектории второй. Этот гомеоморфизм, конечно, как-то зависит от систем (28) и (79). На самом деле Андронов и Понтрягин включили в определение ещё требование, чтобы гомеоморфизм χ мало сдвигал точки области D — тем меньше, чем меньше δ.

Таким образом подробное определение грубости системы (28) гласит: для любого $\varepsilon > 0$ имеется такое $\delta > 0$, что если $\mathrm{Dist}(f, g) < \delta$, то существует гомеоморфизм χ области D на себя, переводящий траектории (28) в траектории (79) и такой, что $\max|\chi(z) - z| < \varepsilon$. Стало быть, возмущение исходной системы должно быть малым в смысле окончательно принятого нами определения «расстояния» $\mathrm{Dist}(f, g)$ между векторными полями фазовой скорости, учитывающего производные, тогда как близость χ к тождественному отображению (оставляющему все точки на месте) понимается в смысле первоначально обсуждавшегося определения «расстояния», игнорировавшего производные, которых у χ может и не быть.

Позднее М. Пейксото установил, что в определении грубой системы можно отказаться от требования близости χ к тождественному отображению, т. е. что если принять определение, приведённое выше до слов «на самом деле», то такое определение будет равносильно определению Андронова—Понтрягина. Иными словами, можно не требовать заранее близости χ к тождественному отображению, но если при любом достаточно малом возмущении исходной системы существует какой-то гомеоморфизм χ, осуществляющий топологическую эквивалентность невозмущённой и возмущённой систем, то (опять-таки при достаточной малости возмущения — быть может, бóльшей малости, чем раньше) их топологическую сопряжённость можно осуществить и при помощи гомеоморфизма, который мало сдвигает точки.

Из теории Пуанкаре—Бендиксона ясно, что говоря о грубости, мы должны обратить особое внимание на положения равновесия и на замкнутые траектории — те и другие являются, так сказать, основными «структурными» (или даже «структурообразующими») элементами фазового портрета. О третьем элементе, играющем в этой теории аналогичную роль — о сепаратрисных контурах — заботиться, как мы увидим, не надо.

В свете конца § 3 можно догадаться, что нас должны интересовать гиперболические положения равновесия. Для замкнутых траекторий тоже имеется родственное понятие «гиперболичности» (таково его название, хотя гипербол тут не больше, чем в узле). Одно из возможных (эквивалентных друг другу) определений: замкнутая траектория L гиперболична, если она является «источником» или «стоком», причём в первом случае решения с достаточно близкими к L начальными значениями приближаются к L при $t \to -\infty$ с экспоненциальной скоростью (расстояние от $x(t)$ до L убывает не медленнее чем функция ae^{bt} с некоторыми $a, b > 0$), а во втором случае экспоненциальна скорость приближения $x(t)$ к L при $t \to \infty$ (соответствующее расстояние оценивается сверху некоторой функцией вида ae^{-bt}).

Можно доказать, что говоря здесь о всех решениях $x(t)$ с достаточно близкими к L начальными значениями, мы допускаем некоторое излишество: если хоть одно решение приближается к замкнутой траектории L при $t \to \infty$ (при $t \to -\infty$) с экспоненциальной скоростью, то и все решения с достаточно близкими к L начальными значениями тоже приближаются к L (в ту же сторону по времени) и тоже с экспоненциальной скоростью[130].

Теперь, наконец, я могу сформулировать теорему Андронова—Понтрягина. Она утверждает, что система из $\mathscr{V}^1$ является грубой тогда и только тогда, когда:

[130] Замечание для студентов: вот эквивалентное условие гиперболичности замкнутой траектории $\{x(t)\}$ с периодом T:

$$\int_0^T \operatorname{div} f(x(t))\, dt \neq 0.$$

1) её положения равновесия гиперболичны, т. е. в линейном приближении являются сёдлами, узлами или фокусами. (Отсюда легко вывести, что их конечное число);

2) её замкнутые траектории суть гиперболические предельные циклы. Их тоже конечное число (это не следует из одной только гиперболичности, но это можно вывести из неё в сочетании с 3));

3) у системы нет сепаратрис, идущих из седла в седло[131].

Как видно, фазовые портреты грубых систем выглядят довольно просто. И напомню, грубые системы в известном смысле являются преобладающими, типичными в $\mathscr{V}^1$. Всё это не может не вызывать удовлетворения. Естественно, возникает желание попробовать развить аналогичную теорию и для систем бо́льшего порядка.

Определение грубой системы переносится на этот случай дословно. Но дальше всё оказывается более сложным. Удалось дать полную характеризацию фазовых портретов грубых систем. (В 1988 и 1997 гг. были опубликованы работы Р. Мане (1948—1995) и Ш. Хаяши[132]. Их собственный вклад в это дело был достаточно велик, но в то же время они завершили труд многих людей.) Это связано с существенным расширением «запаса структурных элементов» (к прежним гиперболическим положениям равновесия и замкнутым траекториям добавились так называемые гиперболические множества, некоторый намёк на определение которых даётся ниже, а некоторый намёк на то, что происходит внутри такого множества — в § 8). Но ни грубые системы, ни системы из некоего более широкого класса, тоже описываемого в терминах гиперболических множеств, не являются «исключительно преобладающими». Что делается за их пределами — предмет современных исследований. Выяснилось многое, но ничего похожего на концепцию (парадигму, как это теперь принято называть), которая в многомерном случае могла бы играть роль, аналогичную теориям Пуанкаре—Бендиксона и Андронова—Понтрягина, пока не вырисовывается.

За пределами классической гиперболической теории имеется (в случае динамических систем с непрерывным временем, исключительно которыми

[131] По свидетельству сотрудников Андронова, на сепаратрисы обратил внимание Понтрягин. Андронов и раньше говорил о сохранении качественных свойств при малых возмущениях, но тогда его внимание было приковано к источникам и стокам. Вероятно, окончательная формулировка того, что понимается под «сохранением всех качественных свойств», была результатом совместных обсуждений.

[132] У Мане рассматривались динамические системы с дискретным временем, получающиеся при итерировании некоторого отображения f. Мы с ними пока не имели дела, но в § 8 рассмотрен один пример системы такого типа (только у Мане отображение f обратимо, а в нашем примере — нет). Потокам посвящена работа Хаяши, уточнённая самим Хаяши и Х. Тойошибой в 1999—2001 гг.

мы пока что и занимаемся) один чётко выраженный и хорошо изученный объект, «выдерживающий» малые возмущения — аттрактор Лоренца, о котором читатель, может быть, слышал. (Слово аттрактор происходит от attract — 'притягивать', и означает то же самое, что выше было названо стоком.) Э. Лоренц (1917—2008) обнаружил его в результате численных экспериментов, связанных с некоторой гидродинамической задачей, и опубликовал об этом сообщение в «Journal of the atmospheric sciences» (это не самый популярный среди чистых математиков научный журнал) в 1963 г. Теоретическая интерпретация этих результатов была дана примерно через 10 лет не без влияния развитой к тому времени в чистой математике концепции гиперболичности.

Аттрактор Лоренца оказался в некотором смысле близким родственником гиперболических множеств, но всё же не гиперболическим множеством. Отношение чистых и прикладных математиков к аттрактору Лоренца различно. Чистых математиков интересуют сравнительно тонкие детали, отличающие этот аттрактор от привычных для них гиперболических множеств. Прикладников же он убедил, что хаотичность в поведении динамических систем — это не абстрактный вымысел теоретиков, а может встречаться в реальных задачах. В связи с этим «концептуальным» значением работы Лоренца он был избран иностранным членом Российской Академии Наук.

Но и вместе с системами типа систем с аттрактором Лоренца современная гиперболическая теория не исчерпывает всех возможностей, которые могут представиться для «типичной» системы. В то же время в исследованиях, относящихся к тому, что находится за пределами области «гиперболичность плюс Лоренц», приходится привлекать «гиперболические» соображения. И кроме того, создаётся впечатление, что в неизученной области, во-первых, системам тоже присуща хаотичность и, во-вторых, там всё же остаётся нечто от гиперболичности. Собственно, кое-что в этом духе даже доказано, однако неясно, какие свойства фазового портрета эти «нечто» и «кое-что» могут обусловить.

Гиперболическое множество — это замкнутое ограниченное[133] подмножество фазового пространства, целиком состоящее из гиперболических траекторий (см. ниже), причём если оно содержит положения равновесия, то их конечное число и они находятся на положительном расстоянии от остальной части этого множества, с которой, собственно, и связана новизна этого понятия. Я попробую наглядно описать в общих чертах, когда траектория называется гиперболической, но это не будет точным определением. Должен сказать, что моё описание в общих чертах можно уточнять по-разному, так что гиперболическая траектория — это, по моему, не совсем точный термин[134]. Напротив, гиперболическое множество — термин совершенно точный и стандартный, так что при его определении чётко уточняется, в чём именно в дан-

[133] Для студентов: компактное.

[134] Однако когда речь идёт о положении равновесия или замкнутой траектории, их гиперболичность всегда понимается одинаково — так, как было описано ранее.

ном случае состоит гиперболичность. Поскольку мы не будем этим заниматься всерьёз, нам хватит и приблизительного понимания, намёка.

Траектория L называется гиперболической, если поведение соседних траекторий по отношению к ней в направлении «поперёк L» напоминает поведение траекторий возле седла. Вот как расшифровывается это заклинание.

Вообразим, что фазовые траектории — это настоящие траектории в нашем трёхмерном пространстве, по котором летят пушечные ядра, на одном из которых (летящем по траектории $L=\{z(t)\}$) сидит барон Мюнхгаузен, следящий за соседними ядрами (благо он ещё не долетел до неприятеля, расположение войск которого он вызвался разведать). Ядро, которое вылетело из той же пушки чуть раньше или чуть позже мюнхгаузеновского ядра, т. е. ядро, которое в данный момент времени занимает положение $z(t+\Delta t)$ с небольшим Δt, Мюнхгаузен всё время видит немного впереди или немного позади себя[135], ведь для летящего Мюнхгаузена направление «вперёд» — это направление его движения в данный момент времени t, т. е. направление вектора $f(z(t))=\dot z(t)$. Расстояние между $z(t+\Delta t)$ и $z(t)$ — это примерно $|f(z(t))\Delta t|$; со временем оно изменяется не очень значительно. А вот глядя на ядра, летящие сбоку от него, Мюнхгаузен, может быть, увидит, что со временем они приближаются к нему или удаляются, уходя куда-то из его поля зрения.

Гиперболичность траектории L означает, что те ядра, которые летят, скажем, слева или справа от Мюнхгаузена, и впрямь приближаются к нему, причём с экспоненциальной скоростью (как бы они его не придавили!), а ядра, летящие сверху и снизу от Мюнхгаузена, столь же быстро удаляются от него, в обратную же сторону по времени (при $t\to-\infty$) они к нему приближаются с экспоненциальной скоростью[136]. Из воспоминаний Мюнхгаузена не ясно, наблюдал ли он во время своего полёта такую гиперболичность во взаимном расположении летящих ядер; если и наблюдал, то не дал её точного математического описания — ему это не было нужно (его целью была рекогносцировка). Когда же это стало нужно математикам (в 60-х гг. XX века), то это и было сделано.

Обращаю внимание, что о гиперболичности приходится говорить как в связи с регулярными, так и в связи с хаотическими движениями. Характеризуя фазовые портреты самых что ни на есть регулярных грубых систем Андронова—Понтрягина, мы первым делом отметили гиперболичность положений равновесия и замкнутых траекторий. А хаотичность бывает связана с гиперболичностью более значительных множеств, тоже состоящих из целых траекторий. (Другое дело, что понятие гиперболического множества было введено в связи с такими «более значительными» множествами.)

---

[135] «Чуть», «небольшое Δt» и «немного» заставляют признать, что во времена Мюнхгаузена (середина XVIII в.) существовали весьма скорострельные пушки. Но если согласиться, что он мог вскочить на ядро, то почему бы не согласиться и со всем остальным?

[136] Как, а разве в обратную сторону по времени ядра не попадают в те пушки, откуда они вылетели? Вопрос, может быть, и резонный, только Мюнхгаузен не был склонен педантично придерживаться строгой логики...

§ 8. Хаос

Вероятно, одним из тех событий в математике второй половины XX века, которые вызывают интерес за её пределами, является обнаружение нового класса движений динамических систем — движений «(квази-)случайного, хаотического» характера — и понимание (хотя бы неполное), каким образом поведение систем, формально полностью детерминированных, может приобрести такой характер. В теоретическом плане это связано с пониманием того, что в некоторых системах имеются «большие» множества неустойчивых траекторий, говоря более точным «техническим» языком, траекторий, обладающих так называемой гиперболичностью[137]. (Поэтому я думаю, что события 1960-х гг., когда это было окончательно осознано, можно назвать гиперболической революцией).

Как может возникнуть что-то вроде хаоса, если начальное значение и закон движения (система дифференциальных уравнений (16)) полностью определяют решение? Беда в том, что в реальных («физических» в широком смысле) условиях начальное значение нам бывает известно с некоторой погрешностью. Может случиться, что погрешность не играет роли (как в случае уравнения ван дер Поля — всё равно все траектории, за исключением положения равновесия, наматываются на предельный цикл). Может случиться, что два решения с близкими начальными значениями так и остаются близкими если не всегда, то очень долго. Но может случиться, что с увеличением времени различие между решениями возрастает с экспоненциальной скоростью.

Допустим, что мы умеем совершенно точно вычислять решение с заданными начальными значениями, если последние известны абсолютно точно, но что две фазовые точки, первоначально отстоящие друг от друга на δ, через некую единицу времени могут отойти друг от друга на 2δ. Нам известно, что начальное значение есть x_0 с точностью до δ; на самом деле оно равно x_1 (причём эта точка отстоит от x_0 не более чем на δ). Состояние системы изменяется с течением времени согласно решению $x_1(t)$, принимающему при $t=0$ значение x_1, а мы предсказываем, что оно будет изменяться согласно решению

[137] Несколько менее «технически» говорят о «чувствительной зависимости от начальных условий».

$x_0(t)$, для которого $x_0(t)=x_0$. Тогда при $t=n$ ошибка в предсказании может вырасти до $2^n\delta$. Допустим, что $\delta=10^{-8}$ см (величина порядка размера атома). Так как $2^{10}=1024\approx 1000$, то за 30 единиц времени неопределённость вырастет в миллиард (10^9) раз и будет порядка 10 см. Это уже обычный в лабораторной практике макроскопический масштаб. Если даже физическая система в несколько десятков раз больше, всё равно ещё через несколько единиц времени ошибка вырастет до размеров этой физической системы. И тогда мы будем знать только то, что состояние системы изображается какой-то точкой в пределах фазового пространства, т. е. не будем знать ничего о конкретном решении $x_1(t)$.

Ещё одной особенностью динамического хаоса, на которой я не буду останавливаться, является разнообразие типов поведения траекторий, тогда как в системах с регулярным характером динамики наблюдается немного таких типов. Скажем, в случае уравнения ван дер Поля большинство траекторий либо приходит из бесконечности, либо отходит от положения равновесия, и все они навиваются на предельный цикл. Когда в системе реализуются очень разнообразные типы поведения траекторий, то неудивительно, что многие из траекторий выглядят сложными, запутанными. Обычно это невольно привлекает внимание при ознакомлении с результатами соответствующих численных экспериментов.

О том, как растёт 2^n с ростом n, известно с незапамятных времён — на сей счёт существует притча об изобретателе шахматной игры. Что кое-где в фазовом пространстве возможно «экспоненциальное разбегание» траекторий (друг от друга) — тоже не новость: такова ситуация возле неустойчивого в линейном приближении узла или фокуса, а также возле седла. Но траектории на фазовой плоскости, начав удаляться друг от друга, затем попадают в область, где, наоборот, они сближаются. Однако может случиться, что траектория одной точки будет стремиться к одному положению равновесия или предельному циклу, а траектория очень близкой к ней точки — к другому, и тогда эти две траектории никогда не сблизятся. Но на фазовой плоскости такое случается, когда исходные точки близки к сепаратрисе; это можно считать редким, почти что исключительным случаем. Новым оказалось то, что «экспоненциальное разбегание» может наблюдаться в довольно обширной части фазового пространства, содержащей «очень много» траекторий. (И даже всюду в фазовом пространстве.) Тогда и возникает хаос, вызванный не воздействием каких-то внешних сил случайного характера, а внутренними свойствами самой системы, её собственной динамикой.

Поскольку этим динамическим хаосом интересуются не только в чистой математике, но и в областях (полу-)прикладного характера, соответствующие вопросы освещаются в литературе с различных точек зрения — до такой степени различных, что это напоминает старинную индийскую притчу о слепых, знакомившихся со слоном. (Что для «хаотической» тематики вполне естественно.) Разговор об этих различиях был бы по-своему небезынтересным, но занял бы немало места. Поэтому я ограничусь точкой зрения чистого математика и расскажу только о том, как впервые встретились с «полноценным» хаосом (и этого не поняли — опять-таки хаос!).

В тех случаях, когда ситуация принципиально более или менее ясна, решения со временем приближаются к уже упоминавшимся в конце § 7 гиперболическим множествам. Последние являются теми новыми структурными (даже структурообразующими) элементами, которые добавляются к известным нам положениям равновесия и замкнутым траекториям. Как и те, новые структурные элементы могут служить источниками или стоками, а могут, подобно сёдлам, играть своего рода «диспетчерскую» роль в разделении траекторий, направляющихся к различным стокам или исходящих из различных источников (а иногда и направляющихся к одному стоку, но как бы по разным путям).

В отличие от прежних структурных элементов, каждый из которых сводился к одной-единственной траектории, так что внутри самого элемента динамика очень проста, чтобы не сказать тривиальна, новые структурные элементы состоят из бесконечного числа (континуума) траекторий и их «внутренняя» динамика является сложной. Там происходит экспоненциальное разбегание траекторий друг от друга (при этом гиперболическое множество вполне может «притягивать» к себе траектории снаружи), из-за чего движения в гиперболическом множестве являются хаотическими. Другие траектории, приближающиеся к этому множеству, тоже вовлекаются в этот хаос.

В примере, который мы рассмотрим, всё фазовое пространство является как бы единым структурным элементом, заполненным хаотическими траекториями. Он, стало быть, даёт известное представление о внутренней динамике гиперболических множеств, но не о том, как несколько структурных элементов (старых и новых) могут сосуществовать в фазовом пространстве.

До сих пор мы имели дело с динамическими системами, движения в которых отличаются своего рода регулярностью, а отнюдь не хаотичностью. На фазовой плоскости нет места для хаоса — он становится возможным, когда размерность фазового пространства не меньше трёх. Но если рассматривать динамические системы с дискретным временем (см. ниже), то хватает и двух. Более того: если рассматривать динамические системы с дискретным временем, получающиеся при итерировании необратимых отображений, то хаотичность возможна даже в размерности один.

Надо объяснить, что такое динамическая система с дискретным временем. В ней фазовая точка движется не непрерывно, а «скачками», так что траектория — это не непрерывная кривая, которую при своём движении пробегает точка $x(t)$, а последовательность точек $\{x_n\}$, которая начинается с начальной точки x_0, а остальные точки шаг за шагом получаются друг из друга под действием некоторого отображения f фазового пространства в себя: $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, и т. д. Если отображение f взаимно однозначно, так что имеется обратное к f отображение f^{-1}, то можно говорить и об $x_{-1}=f^{-1}(x_0)$, $x_{-2}=f^{-1}(x_{-1})$, и т. д.; в этом случае на нашей траектории имеются точки со всевозможными целыми n. Но у нас f будет необратимым и траектория состоит из точек x_n только с натуральными (т. е. положительными целыми) n. Ясно, что траектория фазовой точки x — это последовательность точек $\{f^n(x)\}$, где f^n сейчас обозначает не n-ю степень, а n-кратную итерацию[138] отображения f.

Из наблюдений барона Мюнхгаузена (конец § 7: сидя на ядре и глядя вокруг, он, конечно, пользуется своей системой отсчёта — той, в которой он сам неподвижен) явствует, что гиперболическое множество в системе (16) может существовать, лишь если её порядок $n\geqslant 3$, ибо Мюнхгаузену (в каждый момент времени t) были нужны по крайней мере три координатных оси: одну надо направить в направлении траектории (как её видит возле себя Мюнхгаузен, т. е. в направлении вектора фазовой скорости $f(z(t))$), вторую — в поперечном направлении на соседние ядра, приближающиеся к Мюнхгаузену при $t\to\infty$, третью — на ядра, которые всё время удаляются от него, а при $t\to-\infty$ стремятся к нему.

Решив вместо потока рассматривать итерации отображения, мы избавляемся от первого направления, так что теперь нам хватит и двумерного фазового пространства. А после этого можно попытаться избавиться и от второго направления. Но если все ядра будут удаляться друг от друга, то как же они при этом могут оставаться в каком-то ограниченном (точнее, компактном) фазовом пространстве? Вот если оно неограниченное, то это вполне возможно, но ни с чем особенно интересным не связано. Скажем, при итерировании

[138] Об итерациях уже говорилось при рассмотрении фазового портрета гармонического осциллятора, когда мы обсуждали, как связан вектор фазовой скорости с радиус-вектором фазовой точки.

отображения

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 2x$$

образы $g^n(x)$ и $g^n(y)$ любых двух различных точек x и y удаляются друг от друга с экспоненциальной скоростью, но что же в этом удивительного, и где здесь хаос? Хаос можно получить, отказавшись от взаимной однозначности итерируемого отображения. Тогда можно попросту взять отображение g и «спроектировать» его на окружность C, рассматривая её как факторгруппу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Чем мы сейчас и займёмся.

Фактически динамический хаос в одной одномерной (т. е. имеющей одномерное фазовое пространство[139]) системе с дискретным временем был совершенно отчётливо обнаружен ещё в начале XX века Э. Борелем (1871—1956). Он рассматривал отображение промежутка $[0, 1)$ в себя, задаваемое формулой $f(x) = \{2x\}$. Здесь фигурные скобки означают дробную часть заключённого внутри скобок числа, например, $\{1{,}234\} = 0{,}234$. Ясно, что

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{когда } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{когда } \frac{1}{2} \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Траектория отображения f — это последовательность $\{\{2^n x\},\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ (внутренние фигурные скобки означают дробную часть, а внешние — знак последовательности). Такими последовательностями начали интересоваться в теории чисел незадолго до Бореля, а он посмотрел на них с новой точки зрения.

Прежде чем говорить о работе Бореля, надо признать, что его отображение имеет разрыв в точке $\frac{1}{2}$. Если рассматривать отображение, переводящее x в $f(x) = \{2x\}$ на замкнутом отрезке $[0, 1]$, то разрыв получается и в точке 1: сама она переходит в 0, а близкие к ней точки отрезка — в точки, близкие к 1. Бореля это не беспокоило, ибо под действием отображений f^n на эти разрывы попадают

[139] Ради полноты и справедливости надо упомянуть о двух более ранних достижениях, которые относились к дифференциальным уравнениям, — для нас это вроде бы лучше, — но в которых хаотичность не была выявлена в такой степени, как это сделал Борель в более абстрактной, однако и более простой ситуации. В 1880-х гг. Пуанкаре открыл так называемые гомоклинические траектории и понял, что с ними связана если не хаотичность, то по крайней мере запутанность движений. (С 60-х гг. XX века эти траектории стали важнейшими действующими лицами динамического хаоса.) На самой грани столетий Ж. Адамар (1865—1963) более чётко обнаружил нечто вроде динамического хаоса в одной задаче геометрического происхождения (геодезические линии на поверхностях отрицательной кривизны), причём он высказал предположение (лучше сказать — пророчество, подтвердившееся позднее — окончательно в 1960-х гг.), что обнаруженные им явления присущи отнюдь не одной только этой специальной задаче.

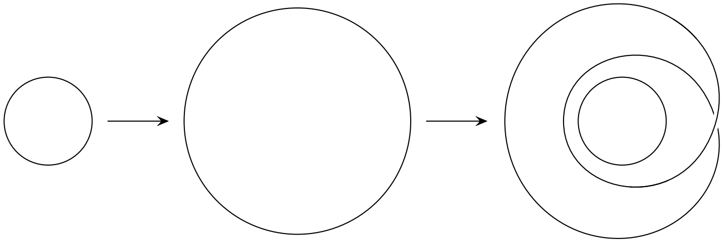


Рис. 31

только двоично-рациональные точки (точки вида $\frac{m}{2^n}$ с целыми m и неотрицательными целыми n), следующие образы которых навсегда остаются в 0. Бореля (как и специалистов по теории чисел) эти тривиальные траектории не интересовали. Но факт остаётся фактом: отображение f разрывно, и можно спросить, не связаны ли с этим отмечавшиеся Борелем эффекты (о которых речь впереди)?

Похоже, что в то время никто не смотрел на работу Бореля на предмет аналогий с качественной теорией дифференциальных уравнений, а потому и не задавался последним вопросом. Если бы о нём тогда подумали, то, вероятно, быстро пришли бы к мысли «склеить» концы отрезка 0 и 1 друг с другом, превратив отрезок в окружность. Тогда разрывы исчезнут! Окружность, конечно, чуть сложнее отрезка, но уж не на столько, чтобы это вызывало какие-то затруднения.

Можно считать, что мы имеем дело с обычной окружностью C единичного радиуса на плоскости, а x — это угловая координата на ней, только измеряющая дуги не в градусах или радианах, а в долях длины всей окружности. Отображение же f состоит в том, что «резиновая» окружность растягивается в два раза и затем «накладывается» на себя, т. е. растянутая окружность накладывается на первоначальную окружность C, обвивая её два раза (рис. 31).

Как и в случае маятника, угловой координате стоит разрешить принимать не только значения от 0 до 1, но и всевозможные числовые значения; тогда, правда, одна и та же точка вместе с координатой x характеризуется также и координатами $x+n$ со всевозможными целыми n, но это достаточно привычно и не вызывает особых неприятностей. Точку окружности с координатой x обозначим через $p(x)$. (В § 3 мы использовали угловую координату $\varphi = 2\pi x$, поэтому теперешнее $p(x)$ — это прежнее $p(2\pi x)$.)

А затем можно стать на более алгебраическую точку зрения и сказать, что окружность — это не геометрическая окружность C на плоскости, а факторгруппа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ по подгруппе целых чисел $\mathbb{Z}$. Об этом уже говорилось в § 3 с той только разницей, что там шла речь о факторгруппе $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Введённое теперь отображение p (несколько отличающееся от использовавшегося в § 3, см. выше) переводит весь класс $\{x+n\}$ в одну и ту же точку единичной окружности, а разные классы — в разные точки. В этих терминах можно сказать, что $\mathbb{R}$ «накрывает» окружность C посредством отображения p, а отображение g числовой прямой $\mathbb{R}$ на себя, при котором x переходит в $2x$, «накрывает» отображение f окружности в том смысле, что $f \circ p = p \circ g$. Это выражают ещё словами: имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "f"] & C, \end{tikzcd}$$

Коммутативность как раз и означает, что отображая верхний левый элемент диаграммы $\mathbb{R}$ в нижний правый элемент C двумя способами, соответствующими двум путям на диаграмме, — сперва направо, затем вниз, что отвечает отображению $x \mapsto p(g(x))$, или сперва вниз, затем направо, что отвечает отображению $x \mapsto f(p(x))$, мы получим совпадающие отображения. Откровенно говоря, в этой диаграмме нет ничего такого, чего не содержалось бы в равенстве $f(p(x)) = p(g(x))$, но почему-то подобный геометрический образ как-то легче для осмысленного восприятия, чем равенство, даром что и геометрия-то здесь довольно условная.

Наконец, раз уж я упомянул здесь комплексные числа, отмечу, что они доставляют самый короткий способ написать формулу для отображения f: вновь считая, что C состоит из комплексных чисел с модулем (нормой, абсолютной величиной) 1, можно сказать, что $f(z) = z^2$ (проверьте!). Впрочем, это нам не понадобится — рассуждать (по крайней мере, в нашем случае) лучше, прибегая к классам $x + \mathbb{Z}$ и то беря x числом из $[0, 1)$, то считая числа из этого класса координатами точки на геометрической окружности C.

Читателю, надеюсь, известны так называемые двоичные дроби. Они похожи на обычные десятичные дроби, но ту роль, которую при построении десятичных дробей играет число 10, при построении двоичных дробей играет число 2. Вкратце можно сказать, что коэффициенты a_j $(j > 0)$ (бесконечной) десятичной дроби $a_0, a_1 \ldots a_k \ldots$ суть неотрицательные целые числа, не превосходящие 9 (тогда как a_0 — любое целое число[140]) и что эта дробь представляет число (которое называют значением этой дроби; говорят ещё, что дробь равна этому

[140] Это число естественно записывать в десятичной системе счисления. Тогда перед запятой может стоять и несколько символов, являющихся числами от 0 до 9, причём самый левый из них отличен от 0.

числу)[141]

$$a_0+\frac{1}{10}a_1+\frac{1}{100}a_2+\ldots+\frac{1}{10^k}a_k+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{10^j}.$$

Заменяя 10 на 2 (и 9 на 1), получаем определение двоичной дроби: она имеет вид $a_0, a_1\ldots a_k\ldots$, причём a_0 может быть любым целым числом[142], а остальные её коэффициенты суть 0 или 1; такая дробь представляет число (имеет значение, равна числу)

$$a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{4}a_2+\ldots+\frac{1}{2^k}a_k+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{2^j}.$$

Например, 1100,0101... (после запятой всё время повторяется комбинация 01) имеет следующее значение, выраженное в привычной десятичной записи:

$$2^3+2^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^k}+\ldots=8+4+\frac{1}{3}=12\frac{1}{3}.$$

Известно, что если с какого-то места — скажем, начиная с k-го коэффициента, — в десятичной дроби идут подряд одни девятки, причём при $k>1$ подразумевается, что $a_{k-1}\neq 9$, то эта дробь равна конечной десятичной дроби $a_0, a_1\ldots(a_{k-1}+1)$, в ней $(k-1)$-й коэффициент увеличен на 1 и на нём дробь оборвалась (если угодно, дальше идут одни нули). Из-за этого некоторые «исключительные» числа представляются не одной десятичной дробью, а двумя. Эти исключительные числа суть десятично-рациональные числа, т. е. числа вида $\frac{m}{10^l}$ с целыми m и неотрицательными целыми l. Таких чисел не так уж мало — в каждом интервале их бесконечное число. И всё-таки в любом разумном смысле их гораздо меньше, чем остальных чисел, каждое из которых представляется одной десятичной дробью.

С очевидными изменениями всё это относится и к двоичным дробям. Если все коэффициенты двоичной дроби, начиная с k-го, равны 1, причём при $k>1$ подразумевается, что $a_{k-1}\neq 1$, то дробь равна

[141] Здесь надо было бы условиться о том, как понимать запись со знаком «минус». По смыслу приводимой формулы, $-1{,}23=-1+\frac{23}{100}=-\frac{77}{100}$. С другой стороны, в школе $-1{,}23=-(1{,}23)=-\frac{123}{100}$. К счастью, нам не придётся встречаться с этим вопросом, так что не надо делать (и запоминать) никакого соглашения на сей счёт.

[142] Которое опять-таки естественно было бы записывать в двоичной системе счисления, так что под a_0 можно понимать несколько стоящих подряд символов 0 или 1, причём первым (самым левым) из них должно быть 1. Надлежало бы уточнить также смысл знака «минус», но его у нас не будет.

конечной двоичной дроби $a_0, a_1 \ldots (a_{k-1}+1)$. Из-за этого некоторые исключительные числа представляются не одной двоичной дробью, а двумя. Эти исключительные числа суть двоично-рациональные числа, т. е. числа вида $\frac{m}{2^l}$ с целыми m и неотрицательными целыми l. Таких чисел не так уж мало, и всё-таки в любом разумном смысле их гораздо меньше, чем остальных чисел, каждое из которых представляется одной двоичной дробью; к тому же мы знаем, что это за числа.

Из самого определения двоичной дроби ясно, что если x представляется двоичной дробью $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, то двоичная дробь для $2x$ есть $(2a_0 + a_1), a_2 a_3 \ldots$ При отображении же f мы обращаем внимание только на дробную часть результата. Поэтому (считая, что всё происходит на полуотрезке $[0, 1)$)

$$f(0, a_1 a_2 a_3 \ldots) = 0, a_2 a_3 a_4 \ldots$$

Можно сказать, что запятая, отделяющая целую часть от дробной, сдвигается на один шаг вправо и то, что оказывается после этого слева от неё (число a_1), заменяется нулём. А можно сказать и так, что запятая стоит на месте, а бесконечная последовательность коэффициентов сдвигается на один шаг влево, причём коэффициент a_1, оказавшийся при этом сдвиге левее запятой, отбрасывается и вместо него ставится 0. Для двоично-рациональных чисел x, которым соответствуют по две двоичные дроби, данный рецепт даёт две новые дроби, которые представляют одно и то же число $f(x)$.

Очевидно, мы можем с равным успехом сопоставить бесконечную двоичную дробь, начинающуюся с 0, классу чисел $x + \mathbb{Z}$ или точке геометрической окружности C, имеющей координату x. Некоторым классам или точкам будет сопоставлено две разные дроби. Это классы, состоящие из двоично-рациональных чисел, и соответствующие точки на C. Последние таковы.

Во-первых, точка $p(0)$, отвечающая $x = 0$. Во-вторых, точка $p\left(\frac{1}{2}\right)$, делящая полную дугу окружности C — от $p(0)$ до $p(0)$ — пополам (рис. 32). Кстати, нам потом понадобятся получающиеся при этом по-

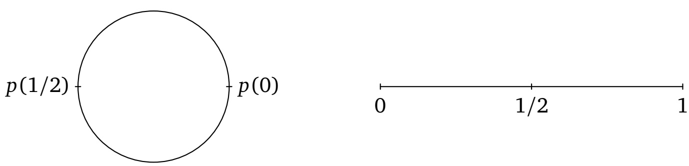


Рис. 32

луокружности. Ту из них, в точках которой $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, обозначим через C_0, а другую, где $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, — через C_1. Стало быть, $C_0 = p\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$, $C_1 = p\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. В-третьих, две точки $p\left(\frac{1}{4}\right)$ и $p\left(\frac{3}{4}\right)$, делящие пополам полуокружности C_0 и C_1. Теперь мы имеем уже 4 точки, которые единообразно можно представить в виде $p\left(\frac{i}{4}\right)$ с $i = 0, 1, 2, 3$; они делят C на четыре дуги. Специальных обозначений для этих дуг мы вводить не будем, но можно отметить, что они суть $p\left(\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]\right)$ с $i = 0, 1, 2, 3$. На следующем (четвёртом) этапе добавляются четыре точки, делящие эти дуги пополам; это суть точки $p\left(\frac{1}{8}\right), p\left(\frac{3}{8}\right), p\left(\frac{5}{8}\right), p\left(\frac{7}{8}\right)$. Всего теперь имеется восемь точек $p\left(\frac{i}{8}\right)$ с $i = 0, \ldots, 7$; они делят C на 8 дуг (рис. 33).

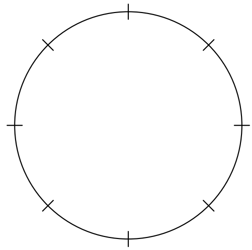


Рис. 33

На следующем (пятом) этапе добавляем середины этих дуг и т. д. Появляющиеся при этом построении дуги соответствуют двоичным дробям, у которых несколько первых коэффициентов фиксировано, а остальные могут быть любыми (это лучше продумать самому). «Закодировав» точки окружности бесконечными двоичными дробями, мы имеем то же самое описание в этих терминах отображения f: дробь сдвигается налево на один шаг и слева от запятой ставится 0; при этом неоднозначность «кодирования», имеющая место для некоторых точек x, сказывается только в том, что для $f(x)$ получаются две двоичные дроби, но они отвечают одной и той же точке окружности.

Отметим ещё раз, что у нас появились дуги $p\left(\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\right)$ с $i = 0, \ldots, 2^k - 1$ (в частности, полуокружности C_0, C_1 суть такие дуги, отвечающие $k = 1$ и $i = 0, 1$). Координата первого конца этой дуги есть некоторая конечная двоичная дробь $0, a_1 \ldots a_k$, а вся дуга состоит из точек, координаты которых начинаются с того же набора k чисел $0, a_1 \ldots a_k$, за которым следует что угодно (ещё раз: почему?).

Говоря о бесконечных двоичных дробях, мы записывали их в виде бесконечных последовательностей $0, a_1 a_2, \ldots$, которые все начинаются с нуля и запятой. Но раз это начало у нас всегда одно и то же, его можно не писать, а только иметь в уме. Итак, мы имеем дело с бесконечными последовательностями $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ символов 0 и 1. В духе обычных теоретико-множественных обозначений, совокупность всех таких последовательностей можно обозначить через[143] $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Запятой у нас больше нет, но мы всё равно можем говорить о сдвиге последовательности на один шаг налево, при котором её первый коэффициент стирается. Это отображение множества $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ в себя часто обозначают через σ, так что, повторяю,

$$\sigma(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots),$$

и ещё чаще называют... Как его называют, вы узнаете из дальнейшего.

Отображение σ в множестве последовательностей доставляет нам, так сказать, символическую модель для отображения f. Ради сокращения речи введём отображение $q\colon \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to C$, переводящее последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ в точку $p\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{a_j}{2^j}\right)$ окружности. Мы знаем, что это — отображение «на» (т. е. его образом является вся окружность C) и что у определённых точек окружности, которые указаны выше, имеется по два прообраза, а у каждой из остальных точек прообраз ровно один.

Связь же между отображениями f и σ состоит в том, что

$$q(\sigma(a_1, a_2, \ldots)) = f(q(a_1, a_2, \ldots)).$$

Здесь, в сущности, сказано в несколько модернизированных обозначениях только то, что если x — координата точки окружности C, то $\{2x\}$ — координата образа этой точки при отображении f. Можно ещё сказать, что имеет место коммутативная диаграмма[144]

$$\begin{tikzcd}
\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q"] & \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "q"] \\
C \arrow[r, "f"] & C.
\end{tikzcd}$$

[143] Если A, B — какие-то множества (совокупности каких-то элементов), то через $A \times B$ обозначают множество пар (a, b) со всевозможными $a \in A$ (вероятно, читатель знаком с подобной записью, но я всё-таки напомню её смысл: a является элементом множества A) и $b \in B$. Это $A \times B$ называют произведением множеств A и B. Если A состоит из k, а B — из l элементов, то $A \times B$ состоит из kl элементов, чем и объясняется название и обозначение. Аналогично под произведением $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ понимают множество конечных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ всевозможных элементов этих множеств (каждое $a_i \in A_i$), а если перемножаемые множества совпадают друг с другом: $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, то их произведение обозначают через A^n. Наконец, множество последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ со всевозможными $a_i \in A$, обозначают через $A^{\mathbb{N}}$. Это обозначение указывает не только, что берутся последовательности из бесконечного числа элементов a_i, но и на то, что эти элементы пронумерованы именно натуральными числами (множество таковых принято обозначать через $\mathbb{N}$), а не как-нибудь иначе.

[144] Некоторые разъяснения и комментарии в связи с этим понятием приведены на с. 179.

Ещё одно свойство модели состоит в том, что q отображает множество $B_{a_1,\dots,a_k}$, состоящее из всех тех последовательностей, у которых первые k элементов суть фиксированные $(a_1, \dots, a_k)$, а остальные могут быть какими угодно, на дугу окружности $p\left(\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\right)$, первый конец которой $p\left(\frac{i}{2^k}\right)$ имеет двоично-рациональную координату, равную значению конечной двоичной дроби $0, a_1\dots a_k$.

В связи с этим замечу, что подмножества A множества последовательностей $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, выделяющиеся условием следующего типа: такие-то (не обязательно первые) коэффициенты принадлежащих ему последовательностей равны таким-то числам, а остальные коэффициенты произвольны, — называются цилиндрическими[145]. Каждое цилиндрическое множество является объединением нескольких непересекающихся множеств вида $B_{a_1,\dots,a_n}$ (почему?). Образы цилиндрических множеств при отображении q суть конечные системы непересекающихся дуг с двоично-рациональными концами. (Этому не мешает тот факт, что при отображении q два непересекающихся множества вида $B_{a_1,\dots,a_n}$ могут перейти в две дуги с общим концом.)

Заканчивая описание «кодирования», замечу, что его можно описать, внешне и не прибегая к двоичным дробям, а пользуясь только полуокружностями C_0 и C_1. Числа a_i, которые образуют последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, кодирующую траекторию $\{f^n(x)\}$, указывают, в какую из полуокружностей C_i попадает движущаяся («прыгающая с места на место» с изменением n) точка x, если только точка x не является исключительной (т. е. если она не имеет двоично-рациональную координату). А именно[146],

$$\text{в } (n-1)\text{-й момент времени положение движущейся точки есть } f^{n-1}(x) \in C_{a_n} \tag{83}$$

(что для «неисключительной» точки x однозначно определяет числа a_n). Действительно, уже отмечалось, что $q(a_1, a_2, \dots) \in C_{a_1}$. Теперь при $n > 1$ из $f \circ q = q \circ \sigma$ явствует, что если $q(a_1, a_2, \dots) = x$, то

$$f^{n-1}(x) = q(\sigma^{n-1}(a_1, a_2, \dots)) = q(a_n, a_{n+1}, \dots) \in C_{a_n}.$$

[145] Название объясняется геометрической аналогией. Обычное трёхмерное пространство можно представить как прямое произведение плоскости П с координатами (x, y) на прямую L с координатой z. Можно вместо координат (x, y, z) говорить о парах (w, z), где $w = (x, y) \in \Pi$ и $z \in L$. Множество тех точек (w, z), для которых w должна лежать на некоторой кривой (скажем, окружности), а z может быть произвольным числом, является цилиндром в обычном геометрическом смысле.

[146] Если бы мы исходили не из двоичных разложений, а из «посещений» полуокружностей C_i движущейся точкой, то естественнее было бы изменить номера элементов a_n на единицу, начав их нумерацию с нуля.

Неоднозначность кодирования связана просто с тем, что у C_0 и C_1 есть общие точки (их концы); когда $f^n(x)$ попадает туда, какой номер надо принять за a_n? Слишком простой ответ (можно взять и 0, и 1) не годится (точке $q(0, 0, \ldots, 0\ldots) = q(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ он сопоставил бы любую последовательность из нулей и единиц, а это уж слишком много). Нетрудно сделать необходимые уточнения, но я не буду на этом останавливаться.

Многие свойства f легче установить с помощью символической модели, чем непосредственно. Я приведу три примера из числа самых простых (а потому, надо признать, не самых ярких; в первых двух ответ легко получить и без символической модели). Точка x называется периодической точкой отображения f периода k, если $f^k(x) = x$. При этом не исключается, что и при каком-то $i = 1, \ldots, k-1$ тоже будет $f^i(x) = x$. Если такого i нет, то говорят, что k — минимальный период точки x. Предоставляю читателю убедиться, что периоды суть целочисленные кратные минимального периода.

Аналогом замкнутой траектории будет траектория периодической точки (т. е. замкнутая цепочка $x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x), x$). Спрашивается, сколько у отображения f имеется периодических точек периода k? Сперва посмотрим, сколько таких периодических точек имеется у отображения σ. Периодическая точка отображения σ с периодом k — это просто последовательность

$$(\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_k}, \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_k}, \ldots, \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_k}, \ldots),$$

которая получается, если всё время повторять первые k символов. Естественно, такая последовательность называется периодической последовательностью с периодом длины k. Их имеется столько же, сколько имеется наборов $(a_1, \ldots, a_k)$ из k символов 0 или 1, а таких наборов 2^k.

Теперь перейдём от символической модели к окружности. Нет ли среди периодических последовательностей таких, у которых, начиная с некоторого места, стоят сплошь нули или сплошь единицы? Раз последовательность периодическая, то, значит, бесконечно повторяющаяся группа из k символов состоит из одних нулей или одних единиц. Стало быть, речь идёт о последовательностях

$$(0, 0, \ldots, 0\ldots) \quad \text{и} \quad (1, 1, \ldots, 1, \ldots).$$

При переходе от $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ к C (т. е. под действием отображения q) они как раз и «слипаются» в одну точку. Другие же периодические точки отображения σ при отображении $q\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ переходят в различные точки окружности. Итак, у f имеется ровно 2^k-1 периодических точек периода k.

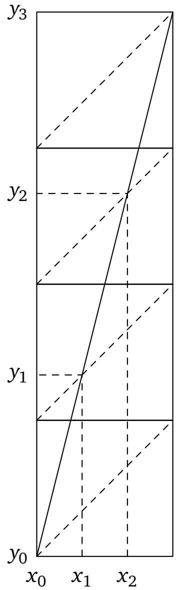


Рис. 34

Упражнение. Докажите то же самое, не пользуясь кодированием, а анализируя свойства отображения $f^k\colon C\to C$ с помощью графика функции $g^k\colon x\mapsto 2^k x$, «накрывающей» f^k в том же смысле, в каком $g(x)=2x$ «накрывает» f. В некоторой точке (x_i, y_i) этот график пересекает график функции $y=i+x$; здесь $i=0,1,\ldots,2^k-1$ (см. рис. 34 для $k=2$). Проверьте, что периодические точки отображения f с периодом k, т. е. неподвижные точки отображения f^k, суть «проекции» точек $x_i\in\mathbb{R}$ на окружность C при описанном выше отображении $p\colon\mathbb{R}\to C$, и что при $i=0,1,\ldots,2^k-2$ эти $p(x_i)$ попарно различны, а $p(x_0)=p(x_{2^k-1})$.

Если же говорить просто о периодических точках (со всевозможными периодами), то их бесконечное число. Спрашивается, где они расположены? Может быть, они все сконцентрированы на какой-то части окружности C? Нет: множество периодических точек всюду плотно на C, т. е. сколь угодно близко к каждой точке окружности имеется периодическая точка.

Действительно, при любом k любая точка окружности содержится в некоторой дуге вида $p\left(\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\right)$. При достаточно большом k эта дуга сколь угодно мала. Между тем в ней лежит некоторая периодическая точка. Действительно, пусть координата первого конца этой дуги равна некоторой конечной двоичной дроби $0,a_1\ldots a_k$. Из сказанного выше видно, что дуга есть $q(B_{a_1,\ldots,a_k})$, а в $B_{a_1,\ldots,a_k}$ имеется периодическая точка b, для которой последовательность символов получается при бесконечном повторении набора $a_1,\ldots,a_k$. Точка $q(b)$ — периодическая точка отображения f, лежащая на рассматриваемой дуге.

Третий пример использования символической модели: на окружности имеются точки x, траектории которых $\{f^n(x);\ n\in\mathbb{N}\}$ всюду плотны. Действительно, выпишем все наборы из одного, двух, трёх, …, k символов:

$$(0),(1);\ (0,0),(0,1),(1,0),(1,1);$$
$$(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1);\ldots$$

Каждый набор заключён в скобки, и ради удобства восприятия группа всех наборов длины n отделена от группы наборов другой длины посредством точки с запятой. Сотрём теперь все скобки и заменим точки с запятой запятыми (не забыв, педантизма ради, заключить полученную последовательность в скобки, после чего её можно обозначить одной буквой a):

$$a = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0,\\ 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots).$$

Траектория $\{\sigma^n(a)\}$ этого элемента множества $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ попадает в каждое из цилиндрических множеств вида $B_{a_1,\ldots,a_k}$, поэтому траектория $\{f^n(q(a))\}$ на окружности «заходит» в каждую из дуг $p\left(\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]\right)$.

Во времена Бореля описание умножения на 2 в терминах бесконечных двоичных дробей уже добрую пару веков было известно любому математику. А переход от $0, a_1 a_2 \ldots$ к $(a_1, a_2, \ldots)$ — вообще не бог весть какой подвиг. Так что пора, наконец, в двух словах сказать, в чём состояло открытие Бореля. Он с помощью этих самых дробей и последовательностей сопоставил, сравнил, связал итерации отображения f (для Бореля, повторяю, было бы неважно, считать ли f отображением отрезка или окружности) с бросаниями монеты — предметом, казалось бы, совсем иного характера, относящимся к теории вероятностей. Чтобы пояснить эту фразу, надо сперва немного поговорить о теории вероятностей.

В этой науке имеется несколько исходных понятий, которые, по существу являются первичными и потому их нельзя определить с помощью других понятий математики, логики или физики. Их можно только пояснить на примерах. Но в чисто математических терминах можно описать основные свойства, присущие исходным понятиям теории вероятностей, их, так сказать, взаимоотношениям друг с другом. Это делается в так называемой аксиоматике теории вероятностей, основной вариант которой был предложен в 1933 г. А. Н. Колмогоровым.

А. Н. Колмогоров (1903—1987) был одним из крупнейших российских (да и не только российских) математиков XX века, успешно работавшим в ряде направлений. В настоящей книжке он упоминается только в связи с теорией вероятностей (которой он отдал, по-видимому, больше всего времени и где его роль далеко не исчерпывается созданием «работоспособной» аксиоматики), но у него имеется и несколько работ по теории динамических систем — всего несколько работ, но они «томов премногих тяжелей». (Однако эти работы выходят за пределы довольно элементарного материала данной книжки.) При этом он был одним из немногих, кому удалось внести одинаково большой вклад в исследование и регулярных, и хаотических движений.

Непосредственно его вклад в «хаотическую» тематику относится не к теории таких динамических систем, как понимается в настоящей книжке, а к абстрактной эргодической теории, имеющей дело с преобразованиями пространств с мерой, сохраняющими эту меру; ни о каких дифференциальных уравнениях или гладких преобразованиях в этой теории нет речи. Но позднее принадлежащие ему или восходящие к нему идеи оказались важными и для теории динамических систем более классического типа, описываемых дифференциальными уравнениями или гладкими преобразованиями.

Для него противо- или со-поставление «регулярность — хаос» относилось не только к динамическим системам, но охватывало значительную часть всей математики. Когда в последние годы его жизни издавалось собрание его сочинений, первоначально запланированное в двух томах, его спросили, как распределить работы по этим томам. Он ответил, что в одном томе должны быть работы по тематике, связанной с объектами, явлениями и т. д. регулярного характера, а в другом — связанной со случайностью, хаосом и т. п. Впрочем, понадобился ещё третий том, посвящённый вопросам, так или иначе соприкасающимся с теорией информации (это тоже связано с хаосом) и с математической логикой (это ни то, ни другое).

Для нас нужны три первичных понятия: случайное событие, вероятность и независимость.

Пример случайного события: при двух бросаниях монеты выпала сперва «решка» (собственно, её полагается называть решёткой, но об этом постепенно забывают), потом «орёл». Результат (как говорят, исход) этих двух бросаний (как говорят, двух испытаний) можно записать как $(0, 1)$, приняв, что 0 на первом месте означает выпадание решки при первом испытании (когда монета бросается в первый раз), а 1 на втором месте — выпадание орла при втором испытании (втором бросании монеты).

Полагаю, нет нужды многословно объяснять, что означают записи $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Сами же соответствующие события обозначим через A_{ij}. Стало быть, (i, j) — это результат (исход) события A_{ij}. А как на этом языке двух последовательных испытаний сказать, что в первый раз выпала решка? Об исходе второго испытания ничего не сказано, могла выпасть и решка, и орёл. Значит, могло произойти и событие A_{00}, и событие A_{01}. Можно сказать, что A_{ij} — это как бы элементарные события, а событие «в первый раз выпала решка» — не элементарное, оно состоит в том, что произошло одно из двух элементарных событий A_{00} и A_{01}.

Два элементарных события несовместны, т. е. не могут реализоваться вместе: если, скажем, сперва выпала решка, а потом орёл, то никак не может быть, чтобы при том же самом испытании (не при повторении этого испытания, а именно при нём самом) решка выпала два раза. Что там выпало, то и выпало, и ни что иное.

В своей аксиоматике Колмогоров начинает, собственно, не со случайных событий, а с элементарных событий. Множество Ω всех элементарных событий (в данной вероятностной задаче) называется пространством элементарных событий. Элементарные случайные события играют роль, аналогичную роли точек у Евклида: это есть то, что не имеет частей. Другие события (не элементарные) считаются множествами, состоящими из элементарных событий, вроде того как геометрические фигуры состоят из точек. Когда пространство элементарных событий Ω конечно, все его подмножества считаются событиями. Когда Ω бесконечно, событиями считаются только подмножества, принадлежащие некоторому классу «хороших» подмножеств; в аксиоматике указывается, какими свойствами должен обладать такой класс.

Раз уж в общей теории мы не уточняем, что такое элементарное или неэлементарное случайное событие, то, пожалуй, мы можем принять, что случайные события — это не какие-то там A_{ij}, а просто сами комбинации (i, j) (хотя при «физической реализации» нашего случайного процесса такие комбинации выступают просто как записи его результатов). Аналогично, результат подбрасывания монеты n раз можно записать в виде последовательности n символов $a=(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i=0$, если при i-м бросании монеты выпала решка, и $a_i=1$, если при i-м бросании выпал орёл. Множество всех таких наборов символов (всего таких наборов 2^n) в духе сказанного о степенях множеств обозначим через $\{0, 1\}^n$. Событие, состоящее в выпадении при первом и третьем испытаниях один раз решки, а другой раз орла, состоит из последовательностей, у которых a_2 и все a_k с $k>3$ — любые, а $a_1+a_3=1$. Таких последовательностей 2^{n-1}.

Разумеется, пространство элементарных событий Ω зависит от изучаемой вероятностной задачи. Если мы бросаем монету два раза, то, как говорилось, это $\{0, 1\}^2$, а если три раза — $\{0, 1\}^3$. А что, если мы бросаем монету три раза, но интересуемся только результатами первых двух бросаний? Можно сказать, что мы «проектируем» $\{0, 1\}^3$ на $\{0, 1\}^2$, оставляя в наборе (a_1, a_2, a_3) только первые два символа. А можно сказать, что мы остаёмся в $\{0, 1\}^3$, но интересуемся не элементарными событиями (a_1, a_2, a_3) по отдельности, а событиями $B_{ij}=\{(i, j, 0), (i, j, 1)\}$ (которые суть в точности прообразы (i, j) при указанной только что проекции $\{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}^2$). Эти B_{ij} играют ту же роль для двукратного бросания, какую раньше играли A_{ij}.

Мы не можем предвидеть исход каждого отдельного испытания (однократного бросания монеты), но если монета идеально правильная, то при большом числе N испытаний примерно в половине случаев выпадет орёл и в половине — решка. В связи с этим говорят, что вероятность выпадания орла или решки равна $\frac{1}{2}$. Это согласуется с интуитивным представлением, что если монета правильная, то нет оснований приписывать выпаданию орла и выпаданию решки различные вероятности.

Другие события тоже имеют определённые вероятности. Когда Ω конечно, вероятность события является суммой вероятностей принадлежащих ему элементарных событий. Когда Ω бесконечно, вероятности событий, вообще говоря, так просто не определяются. В аксиоматике уточняется, какими свойствами они должны обладать.

И наконец, очень важным понятием является *независимость событий*. (Колмогоров даже говорил, что именно с него и начинается собственно теория вероятностей.) Описательно можно сказать, что события независимы, если они никак не влияют друг на друга. Например, если при первом бросании монеты выпал орёл, это никак не повлияет на результат второго бросания — с одинаковой вероятностью может выпасть и орёл, и решка. Такие соображения, не будучи чисто математическими, всё же подсказывают чисто математическое определение независимости нескольких событий, которого я, впрочем, не буду приводить.

Я отмечу только, что когда N раз повторяют двукратное бросание правильной монеты (отдельным испытанием теперь считается двукратное бросание и его результатом будет какая-то из комбинаций (i, j)), то примерно в $\frac{N}{2}$ случаях при первом бросании выпадет решка и примерно в половине этих случаев при втором бросании выпадет орёл; значит, при наших двукратных бросаниях примерно в $\frac{N}{4}$ случаях результатом будет $(0, 1)$. Аналогично и другие исходы двукратных бросаний — $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$ — получатся примерно в $\frac{N}{4}$ случаях. В связи с этим вероятность каждого из них приходится считать равной $\frac{1}{4}$. К тому же приводят соображения, основанные на интуиции: не видно причин, почему, скажем, исход $(0, 0)$ должен иметь иную вероятность, чем другие исходы. Значит, эти четыре исхода равновероятны, т. е. их вероятности равны. А сумма этих четырёх вероятностей равна 1, ибо событие A, состоящее из этих четырёх элементарных событий, — это вообще всё, что может произойти при двукратном бросании. (Раз любой результат испытания (двукратного бросания) входит в наше событие A, то при повторении этого испытания N раз наше событие все эти N раз и произойдёт.)

Аналогичные соображения приводят к выводу, что при бросании монеты n раз элементарные события суть указанные выше последовательности $a=(a_1, \ldots, a_n)$, где все $a_i \in \{0, 1\}$ и каждое a имеет вероятность $\frac{1}{2^n}$. (И, значит, событие, состоящее в выпадании при первом и третьем испытаниях один раз решки, а другой раз орла, имеет вероятность $\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$.)

Мы говорили о случайном процессе, состоящем в подбрасывании монеты n раз. В порядке обычной в подобных случаях идеализации можно рассмотреть процесс, состоящий в подбрасывании монеты бесконечное число раз[147]. Результатом такой бесконечной последовательности испытаний является бесконечная последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ из нулей и единиц. Такие последовательности — это и есть элементарные события (в данной задаче). Мы уже встречались по другому поводу с такими последовательностями и сразу можем сказать, что пространством элементарных событий служит $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Представим себе, что мы проводим одно испытание (один раз бросаем монету) в единицу времени. Тогда в нулевой момент времени мы не знаем, какими окажутся все $(a_1, a_2, \ldots)$, а в первый момент мы знаем a_1, будущими же тогда остаются моменты времени $2, 3, \ldots$ и, в соответствии с этим, неизвестными нам исходами будущих испытаний становятся $(a_2, a_3, \ldots)$. Выходит, за единицу времени из элементарного события $(a_1, a_2, \ldots)$ получилось элементарное событие $(a_2, a_3, \ldots)$. Таким образом, наш случайный процесс описывается тем самым отображением σ в пространстве $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, с которым мы уже имели дело! Теперь можно сказать, что это σ называют топологическим сдвигом Бернулли. Почему сдвигом, не требует объяснений. Под Бернулли подразумевается Якоб Бернулли[148], с которым связано

[147] Кстати, насколько я понимаю, Борель начал пользоваться такой идеализацией более серьёзно, чем его предшественники. До него тоже говорили о бесконечной последовательности одинаковых независимых испытаний, но результаты относились к конечной (хотя и сколь угодно длинной) её начальной части, а им были получены первые результаты, относившиеся ко всей последовательности. (Для лиц, в какой-то степени знакомых с предметом: я имею в виду различие между обычным и усиленным законом больших чисел.)

[148] У него были выдающиеся предшественники — П. Ферма (1601—1665), Б. Паскаль (1623—1662), Х. Гюйгенс. Но их первые шаги, когда они не носили характера отдельных наблюдений и замечаний, затрагивали довольно ограниченный материал. Показательно, что вероятностный трактат Гюйгенса (1657 г.) был включён в посмертно изданную в 1713 г. книгу Бернулли в качестве её первой главы.

становление теории вероятностей как новой научной дисциплины. Наконец, слово «топологический» я объясню не полностью.

Топология — часть математики, основанная на непрерывности. В нашем множестве $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ мы не ввели никакой структуры, которая позволила бы нам говорить о непрерывности или о пределах. Но это можно сделать. С другой стороны, в математике часто топологические понятия, теоремы и т. д. противопоставляются метрическим — здесь это слово означает «связанное с теорией меры». О последней теории я тоже скажу очень мало, но, по крайней мере, ясно, что пока что о ней вообще не упоминалось, а σ уже появилось, — значит, это не метрический объект, хотя ему и не возбраняется иметь какие-то связи с какими-то мерами, когда они появятся.

Бросая монету несколько раз, мы определили, что такое вероятности различных случайных событий (подмножеств $\{0, 1\}^n$). Теперь случайными событиями должны стать подмножества $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ — может быть, не все, а только некоторые, — и для них должны быть определены вероятности. Это должно хорошо согласовываться с правильностью монеты, независимостью испытаний друг от друга и с тем, что мы знаем о процессе, состоящем в конечном числе бросаний монеты. Конечно, последний процесс имеет своё пространство элементарных событий $\{0, 1\}^n$, однако ведь можно считать и так, что нам предстоит проделать бесконечное число испытаний, но мы интересуемся результатами только первых n. Это совершенно аналогично тому, что, как уже говорилось, можно, бросая монету три раза, интересоваться только исходами первых двух испытаний.

Значит, за пространство элементарных событий можно принять $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, а интересующие нас события являются множествами всех тех последовательностей, у которых на первых n местах стоят фиксированные символы $(a_1^0, \ldots, a_n^0)$, а на остальных — что угодно. Мы уже обозначили такие множества через $B_{a_1,\ldots,a_n}$. Такому событию, т. е. такому множеству $B_{a_1,\ldots,a_n}$, приписывается вероятность $\frac{1}{2^n}$.

Итак, мы решили сопоставить множеству $B_{a_1,\ldots,a_n}$ число $\frac{1}{2^n}$. Но ведь такова длина дуги $q(B_{a_1,\ldots,a_n})$! Таким образом, оказывается, вероятности случайных событий связаны с длинами. Если случайное событие A является цилиндрическим подмножеством в $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, то его можно представить в виде объединения нескольких непересекающихся множеств вида $B_{a_1,\ldots,a_n}$, и по правилам теории вероятностей вероятность A равна сумме вероятностей этих $B_{a_1,\ldots,a_n}$. При этом $q(A)$ является объединением нескольких непересекающихся дуг, и сумма длин этих дуг оказывается равной вероятности A.

Длина отрезка, сумма длин непересекающихся отрезков — всё это количественные характеристики протяжённости, «массивности», «веса» соответствующих множеств. Нельзя ли разумным образом определить некое обобщение «длины», пригодное для более общих множеств? К тому времени, когда Борель установил связь между растягивающим отображением окружности и бросаниями монеты, данный вопрос уже был выяснен. Работу в этом направлении начал тоже Борель, если не считать не особенно удачных ранних попыток, а решающий и практически последний шаг для подмножеств числовой прямой сделал А. Лебег (1875—1941).

«Правильное» обобщение длины называется мерой (мер много; в данном случае речь идёт о так называемой мере Лебега, которая всего ближе к длине). Мера определена не для всех подмножеств прямой, но для очень широкого класса подмножеств, которые так и называются «измеримыми». Борель использовал всё это, чтобы разумным образом перенести понятие вероятности, интуитивно достаточно ясное для цилиндрических множеств, на более широкий класс подмножеств $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ и, значит, получить возможность говорить о событиях и вероятностях событий в ситуации, выходящей за пределы прежней вероятностной практики. (Ему это было действительно нужно, потому что при его новом подходе, более серьёзно связанном со свойствами всей бесконечной последовательности испытаний, нежели раньше, пришлось рассматривать более сложные подмножества $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Скептики могли бы усомниться, имеет ли смысл вообще говорить о вероятности в подобных случаях[149], и я не думаю, чтобы такие сомнения можно было развеять до того, как Борель нашёл точку опоры в теории меры.)

Через несколько лет теория меры приобрела более общий характер, и после этого для введения «правильных» вероятностей в пространстве элементарных событий уже не надо было связывать бросания монеты с отображением $x \mapsto \{2x\}$. И как-то не вызвал широкого внимания тот факт, что на работу Бореля можно посмотреть с другой стороны — он доказал, что вполне, казалось бы, детерминированная система может быть совершенно сходна по своим свойствам с самым что ни на есть классическим случайным процессом.

Кроме того, задним числом представляется, что значение работы Бореля состояло не только в том, что он отчётливо обнаружил динамический хаос для итераций растяжения окружности. Легко

[149] Было известно, что при «безответственном» обращении с вероятностями можно получить противоречия.

понять, что принципиальные особенности поведения итераций отображения f не меняются при малом возмущении (т. е. при замене f на f_1, где функция $f_1 - f$ и её первая производная достаточно малы); точнее, ситуация с «кодированием» (при его геометрической трактовке в терминах «посещения» траекторией полуокружностей C_0, C_1) вообще практически не меняется, а с вероятностями и мерами дело не так просто[150]. Но мне кажется, что любой математик средней руки смог бы если не разобраться с этим до конца, то хотя бы установить что-нибудь вполне содержательное. Таким образом, обнаруженную Борелем хаотическую динамику никак нельзя считать чем-то исключительным.

Упражнение. Вот простой пример сохранения одного из свойств f при малом возмущении, не требующий кодирования, а получающийся проще. Рассматривая график функции $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, накрывающей возмущённое отображение $f_1 : C \to C$ в том же смысле, в каком выше $g(x) = 2x$ накрывает f, и его пересечения с графиками функций $y = i + x$, $0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1$, докажите, что g_1 имеет $2^k - 1$ периодических точек периода k (и стало быть, бесконечное число периодических точек, имея в виду таковые со всевозможными периодами).

Прикладников, возможно, сказанное выше ни в чём бы не убедило — пример Бореля мог бы показаться чем-то далёким от реальных физических систем. На «чистых» же математиков осознание принципиальной возможности подобной ситуации должно было бы оказать существенное влияние. Но такое осознание произошло только в 1960-е гг. и было связано с намного более трудными для исследования объектами. Впрочем, это не единственный пример упущенной возможности в истории науки[151].

Я уже упоминал (§ 6), что путь, приведший нас к хаосу, начался с серии трудных работ Дж. Литтлвуда и М. Картрайт о неавтономном уравнении ван дер Поля. Следующий шаг сделал Н. Левинсон (1912—1975), продемонстрировавший в 1949 г. аналогичные сложные явления на примере другого уравнения, оказавшегося более простым

[150] Вообще говоря, лебегова мера прообраза $g^{-1}(A)$ множества A отлична от меры A. Правда, имеется некоторая абсолютно непрерывная мера, для которой меры множеств A и $g^{-1}(A)$ совпадают. Она отвечает некоторой мере в $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, но при нашем (слишком простом) способе кодирования последняя мера — уже не та мера, которая возникает в связи с бросаниями монеты (даже если монета неправильная и вероятности выпадания решки и орла различаются).

[151] Вероятно, самый яркий пример такого рода связан с открытием деления ядра урана. Его было бы легко обнаружить физическими методами. Но помешала деталь — свинцовая пластинка была расположена неподходящим образом. И понадобились героические усилия радиохимиков... Когда же весть об открытии дошла до Колумбийского университета в США, физическими методами его проверили к концу того же дня!

для исследования и изложения соответствующего материала. А завершение этого пути является заслугой С. Смейла.

С. Смейл (р.1930) — американский математик, лауреат Филдсовской премии, присуждаемой перед очередным Международным математическим конгрессом (в данном случае это был Московский конгресс 1966 г.). Первые работы Смейла относились к топологии, затем он переключился на динамические системы и, наконец, заинтересовался новым направлением, стоящим на грани математической логики — теорией сложности вычислений и доказательств. Не берусь судить о его вкладе в последнюю область, но в первых вклад был весьма значительным.

Любопытно, что вначале Смейл наивно предполагал, будто фазовые портреты типичных динамических систем любого порядка похожи на фазовые портреты грубых систем Андронова—Понтрягина, в частности, будто у типичной системы все фазовые траектории стремятся к положениям равновесия и замкнутым траекториям, а число этих предельных траекторий конечно (и они гиперболичны). Но Левинсон сообщил Смейлу о своей работе и о работах Картрайт—Литтлвуда, из которых видна ошибочность данного предположения. Другое возражение исходило от Р. Тома[152]. Он указал такой диффеоморфизм замкнутой поверхности[153], что все близкие к нему диффеоморфизмы имеют бесконечное число периодических траекторий. (Одно из предыдущих упражнений, где говорится о возмущении растягивающего отображения окружности, напоминает замечание Тома в упрощённом до крайности, до карикатуры виде.) Смейл не просто «осознал свои ошибки», но, продумав «движущие пружины» в примерах Левинсона и Тома, пошёл намного дальше этих авторов. Данная история — яркий пример коллективного характера науки.

Смейл нашел в 1961 г. сравнительно простую геометрическую конструкцию, демонстрирующую соответствующие явления ничуть не хуже и более удобным для восприятия образом, нежели дифференциальные уравнения у его предшественников. После этого и началась «гиперболическая революция», в развитии которой Смейл сыграл ведущую роль[154]. Довольно быстро вспомнились другие пути,

[152] Р. Том (1923—2002) — французский тополог, лауреат Филдсовской премии 1958 г.

[153] Пояснение для подготовленных читателей: это был гиперболический автоморфизм двумерного тора.

[154] Моему соотечественнику будет небезынтересно узнать, что едва ли не главные публичные выступления Смейла на эту тему состоялись в бывшем СССР. Первое сообщение о своей конструкции он сделал в 1961 г. на Международной конференции по нелинейным колебаниям в Киеве, а на Московском конгрессе 1966 г. он говорил уже обо всей новой системе «гиперболических» взглядов — теперь это были не примеры, а систематическая теория. Кое-что из неё он сообщил годом раньше на одной из конференций в Америке (там уже появилось общее понятие гиперболического множества), но в его московском докладе было сказано намного больше.

которые, как стало ясно, тоже вели к хаосу. Почему-то при этом о растягивающем отображении окружности вспомнили в последнюю очередь.

Если отсчитывать возраст хаотической динамики с 1961 г., то сейчас ей под 50 лет. Для человека это зрелый возраст, но в науке такой возраст — это обычно ещё молодость, хотя и не первая. Хаотическая динамика переживает период свойственного молодости быстрого роста. Но и регулярная динамика в свои 2000 (если считать от древних греков — система Птолемея!) или 300 (если считать от Ньютона) лет не теряет темпов. Всё-таки человеку почти всегда нужны регулярные движения, да и в природе царит не один только хаос...

Предметный указатель

Дмитрий Викторович Аносов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ТО РЕШАЕМ, ТО РИСУЕМ

Подписано в печать 12.08.2008 г. Формат 70 × 100 1/16. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 12,5. Тираж 1000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.