Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2001.

В. М. Тихомиров

Выпуклый анализ и его приложения

МЦНМО, 2001

УДК 517.98
ББК 22.162
Т46

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского Комитета Образования.

Тихомиров В. М.
Т46 Выпуклый анализ и его приложения.— М.: МЦНМО, 2001.— 24 с.

ISBN 5-94057-011-9

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 19 июля 2001 года.

Описываются основные понятия и методы выпуклого анализа, рассказывается об истории развития этой науки.

Брошюра адресована студентам младших курсов, хотя доступна и подготовленным школьникам старших классов.

ББК 22.162

ISBN 5-94057-011-9

Выпуклый анализ — раздел математики, в котором изучают выпуклые объекты: выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые экстремальные задачи. Таким образом, этот раздел имеет пересечения с геометрией (выпуклость — геометрическое понятие), анализом (функция — одно из основных понятий анализа) и теорией экстремума.

Основная часть этой лекции будет посвящена двуединству геометрического и алгебро-аналитического подходов к понятию выпуклости.

1. *О понятии пространства*

Выпуклые множества — это геометрические фигуры, расположенные в некоем геометрическом «пространстве», и прежде всего разумно договориться о том, что значит это слово, и рассказать, когда оно появилось.

Наша наука родилась, говорят, где-то между шестисотым и пятисотым годами до нашей эры, причем считается, что первым математиком был Фалес из Милета (ок. 625 — ок. 547 до н. э.) (см. ось времен на рис. 1).

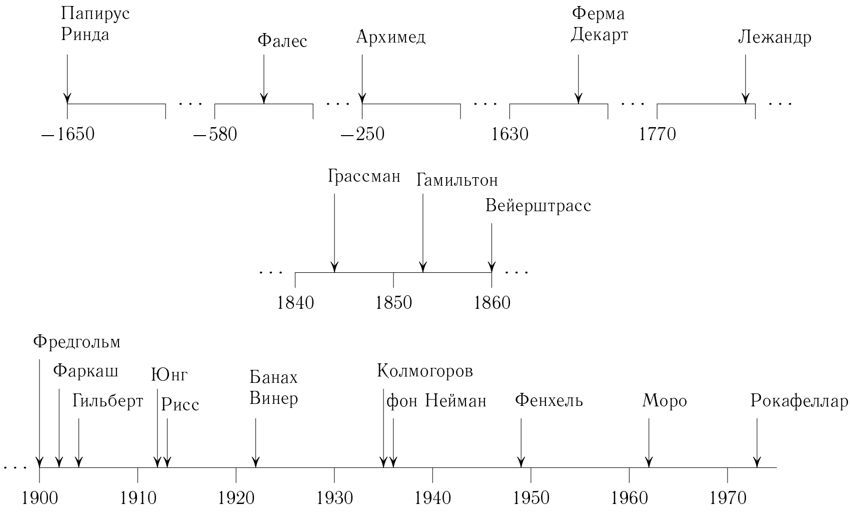


Рис. 1

(Полагают, что Фалес предсказал солнечное затмение 28 мая 585 года до нашей эры.) Фалеса считают первым математиком потому, что ему приписывают первые теоремы.

Здесь уместно сделать первое отступление. Принято начинать лекцию на какой-нибудь конференции или симпозиуме с благодарности организаторам за приглашение. Я считаю более чем уместным не изменять здесь принятой традиции и хочу выразить благодарность прежде всего за саму организацию этого собрания, для которого еще надо придумать хорошее название. Это, конечно, не конференция, не симпозиум и даже не школа: в школе есть учителя и ученики, учителя — учат, ученики — учатся, а здесь учителя учат и учеников, и друг друга. В частности, только что, за пятнадцать минут до этой лекции, я присутствовал на уроке, проведенном Владимиром Игоревичем Арнольдом для одного меня, — об истоках нашей науки. Я услышал то, о чем не подозревал: оказывается, наша наука родилась не в Древней Греции, а гораздо раньше. Естественно, требуется время, чтобы освоиться с этим знанием. Поэтому, сочтя себя обязанным упомянуть об услышанном, я решил все же продолжать свой рассказ, как он планировался.

А завершая начатую тему, хочу выразить мою глубокую благодарность организаторам этого замечательного собрания (и прежде всего Ивану Валериевичу Ященко) за то, что мне довелось побыть здесь и пообщаться со многими приятными мне людьми разных возрастов.

Но вернемся к Фалесу, которому многие историки науки приписывают первые математические теоремы. Это были некоторые простейшие утверждения плоской геометрии, т. е. Фалес имел некое понятие о том, что такое плоскость. К III веку до нашей эры сложились первые понятия о двух типах геометрических пространств, сейчас мы называем их так: *двумерная евклидова плоскость* и *трехмерное евклидово пространство*.

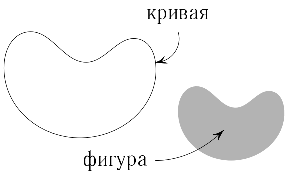


Рис. 2

Какой смысл древние вкладывали в эти понятия? Образом (части) евклидовой плоскости для них служила плоская доска, типа той, на которой я сейчас пишу. На этой доске можно рисовать мелом (а тогда — тонким стилом [1]) и краской, и этот рисунок может называться иногда *кривой*, если он сделан мелом (и не слишком замысловат), либо *фигурой*, если он нарисован краской (рис. 2). В помощь себе древние брали (мысленно) масштабную линейку, чтобы можно было вычислять расстояние между точками. И еще циркуль. С помощью циркуля и линейки можно к каждой прямой в любой точке восстанавливать перпендикуляр и опускать на нее перпендикуляр из любой точки. Евклид (III век до н. э.) дал набросок *аксиоматического* описания плоскости.

[1] Стило (от греч. *stȳlos* — палочка) — в древности заостренный стержень из кости, металла или дерева, которым писали на восковых дощечках.

Теперь переместимся сразу в конечную точку — 19 июля 2001 года — и назовем основные «кривые», с которыми придется иметь дело нам. На плоскости ими являются прямая, отрезок и луч (рис. 3). А фигуры, которыми мы интересуемся, будут *выпуклыми*.

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки (рис. 4).

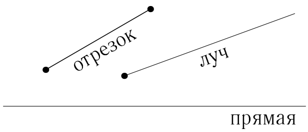


Рис. 3

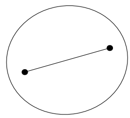


Рис. 4

Основным примером выпуклого множества на плоскости для нас будет полуплоскость.

Понятие выпуклости встречается у Архимеда (ок. 287—212 до н. э.). Отметим две точки (Евклида и Архимеда) на оси времен и скакнем сразу почти в XX век.

2. *Теорема отделимости на плоскости*

Давайте докажем сейчас на плоскости основную теорему нашей лекции — теорему отделимости. В конечномерном пространстве она была доказана в 1896 г. Германом Минковским (1864—1909) — замечательным немецким математиком, одним из создателей выпуклой геометрии. Формулировка ее для плоскости такова.

Замкнутое выпуклое множество и точку, не принадлежащую ему, можно строго отделить друг от друга прямой.

Что такое выпуклое множество, я уже объяснил. Мне осталось объяснить, что такое замкнутое множество и что значит «строго отделить». *Предельной точкой множества* A назовем точку (не обязательно принадлежащую множеству A), в любой проколотой окрестности которой есть точка из множества A.

Определение. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Можно дать также эквивалентное определение: множество называется *замкнутым*, если любая точка, ему не принадлежащая, является центром некоторого кружка, не пересекающегося с множеством.

Определение. Говорят, что прямая *строго отделяет множество от точки*, если множество и точка принадлежат разным полуплоскостям, а сама прямая, являющаяся их общей границей, не содержит отделяемую точку (рис. 5).

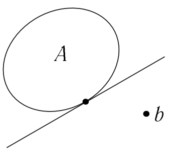


Рис. 5

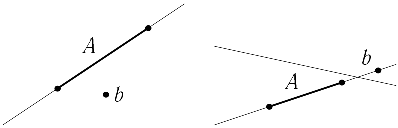


Рис. 6

Докажем теорему отделимости чисто геометрически. Обозначим множество буквой A, а точку буквой b. Возможно одно из двух: или множество A принадлежит целиком некоторой прямой, или такой прямой не существует. Рассмотрим сначала первый (вырожденный) случай. Если прямая, содержащая A, не проходит через b, то она удовлетворяет утверждению теоремы (рис. 6, слева). Если же b лежит на этой прямой, то надо взять на прямой точку между b и A и провести через эту точку любую прямую, не содержащую b (рис. 6, справа).

Во втором случае, как нетрудно понять, в A обязательно есть внутренняя точка (т. е. точка, содержащаяся в A вместе с некоторым кружочком с цетром в ней). Пусть a — внутренняя точка множества A, а c — точка отрезка $[a, b]$, не принадлежащая A и отличная от b (рис. 7).

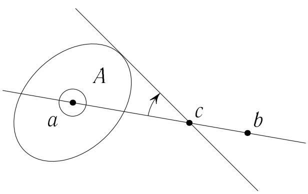


Рис. 7

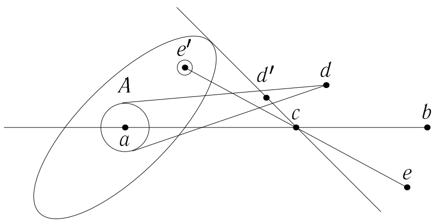


Рис. 8

Из определения выпуклости следует, что луч, начинающийся в точке c и содержащий b, не содержит точек множества A (а дополнительный ему луч содержит точку a). Начнем поворачивать прямую, проходящую через a и c, вокруг точки c до того первого момента[2], когда луч, первоначально проходивший через a, не будет содержать внутренних точек множества A. Тогда порожденная им прямая будет искомой. Глянув на рис. 8, вы не затруднитесь в доказательстве этого факта. Теорема доказана.

3. *О понятии пространства (продолжение)*

Но мы ведь так и не выяснили до конца, что же значит слово «пространство». Отметим сейчас еще две почти совпадающие точки на оси времен, связанные с творчеством двух великих французских ученых — Пьера Ферма (1601—1665) и Рене Декарта (1596—1650).

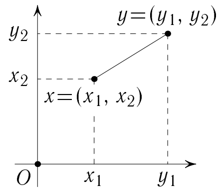


Рис. 9

Они произвели (в 30-е годы XVII века) *арифметизацию* плоскости по сути дела следующим простым образом. Возьмем точку на плоскости (мы обозначим ее буквой O) и проведем через нее две перпендикулярные прямые. Выберем масштаб и каждой точке x плоскости поставим в соответствие пару чисел (x_1, x_2) — координаты точки x (рис. 9). Расстояние $d(x, y)$ между точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ определим по теореме Пифагора: $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Эти пары чисел (их с легкой руки ирландского математика Уильяма Роуана Гамильтона (1805—1865) стали называть *векторами*) можно складывать (покоординатно) и умножать (опять-таки покоординатно) на вещественные числа. Мы обозначаем сейчас эту арифметическую модель евклидовой плоскости символом $\mathbb{R}^2$. И любое множество точек можно «закодировать» подмножеством пар вещественных чисел. В частности, отрезок $[a, b]$ это не что иное, как множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha a + (1-\alpha)b,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$. А прямая имеет два алгебраических описания. С одной стороны, прямая (проходящая через точки a и b) — это множество $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha a + (1-\alpha)b, \alpha \in \mathbb{R}\}$, а с другой — решение (вообще говоря неоднородного) линейного уравнения $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \gamma \in \mathbb{R}$. В $\mathbb{R}^2$ определяется *скалярное произведение* векторов: $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Оно оказывается равным произведению длин векторов на косинус угла между ними.

[2] Вообще говоря, нужно еще доказать существование такого момента.

Величина $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ обозначается $\|x\|$, она равна длине вектора x, так что $d(x, y) = \|x - y\|$.

Декартом и Ферма был сделан первый шаг к раскрытию двуединства геометрических и алгебро-аналитических рассмотрений. Поясним это на примере той же теоремы отделимости, которую докажем еще раз, уже алгебро-аналитически. Но сначала мы должны алгебро-аналитически сформулировать, что значит строгая отделимость. Множество A и точка b *строго отделимы*, если можно найти такие три числа α_1, α_2 и γ, что для любой точки (x_1, x_2) из A выполнено неравенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geqslant \gamma$, в то время как $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 < \gamma$, где b_1 и b_2 — координаты точки b. При этом говорят, что множество A от точки b строго отделяет прямая $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$.

Пусть множество A непусто. Для доказательства теоремы отделимости рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 = \|x - b\|^2$$

и поставим задачу о минимуме этой функции на выпуклом множестве A евклидовой плоскости в $\mathbb{R}^2$ (мы его тоже обозначаем буквой A). На самом деле, можно ограничиться рассмотрением минимума функции на пересечении A и круга с центром b радиуса, равного расстоянию от b до некоторой точки $\bar{x}$ из A (это, разумеется, можно выразить чисто алгебраически: $\{(x_1, x_2) \in A \mid f(x_1, x_2) \leqslant f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\}$). Данное множество в $\mathbb{R}^2$ ограничено и замкнуто, и значит, непрерывная функция f по теореме Вейерштрасса (вот еще одна точка на оси времен: Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815—1897)) достигает на нем своего минимума. Обозначим точку минимума $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Тогда прямая с уравнением

$$\langle \hat{x} - b, x - \hat{x}\rangle = 0 \iff (\hat{x}_1 - b_1)(x_1 - \hat{x}_1) + (\hat{x}_2 - b_2)(x_2 - \hat{x}_2) = 0$$

искомая. Действительно, если допустить, что в той же полуплоскости, что и b, лежит точка a' из A (и значит $\langle \hat{x} - b, a' - \hat{x}\rangle = \alpha < 0$), то при малом $t > 0$ множеству A будет принадлежать точка $\hat{x} + t(a' - \hat{x})$ и она будет ближе к b, чем $\hat{x}$: $\|\hat{x} - b + t(a' - \hat{x})\|^2 = \|\hat{x} - b\|^2 + 2t\alpha + O(t^2) < \|\hat{x} - b\|^2$ при малом t. Пришли к противоречию. Теорема доказана. Те, кто любит геометрию, пусть нарисуют картинку, иллюстрирующую это доказательство.

Здесь уместно сказать о том, что наш мозг (это вроде бы доказано) делится на две части: одна — правая половина мозга — заведует геометрией, другая — левая — алгеброй. Те, у кого неразвита правая половина мозга, не любят геометрию и не любят рисовать. Говорят, что таков, например, знаменитый ученый Никола Бурбаки.

Когда я узнал об этом, мне стало очень жаль правонедоразвитого ученого (который ведь ни в чем не виноват — таким уродился), и я много раз в своих статьях старался его утешить. Делаю это и сейчас. Конечно, надо развивать правое полушарие, но, если это до конца Вам не удалось, не отчаивайтесь: любую геометрическую задачу можно решить и алгебро-аналитически!

Декарт и Ферма, помимо пространства $\mathbb{R}^2$ (т. е. евклидовой плоскости), построили модель и пространства $\mathbb{R}^3$, состоящего из троек $x = (x_1, x_2, x_3)$.

А теперь кратко проследим за дальнейшей эволюцией понятия пространства, где исходными точками были пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Прошло со времен Ферма и Декарта не так уж много лет (всего около двухсот), как немецкий математик (но больше философ, физик и филолог) Герман Грассман (1809—1877) в 1844 году вместо пар и троек чисел стал рассматривать n-ки чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и тем самым обобщил понятие пространства, построив пространство $\mathbb{R}^n$. Мы называем его *n-мерным евклидовым пространством*. Векторы из $\mathbb{R}^n$ складываются и умножаются на числа точно так же, как для случая плоскости, и расстояние определяется по аналогичной формуле $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. Расстояние от вектора x до нулевого вектора, т. е. $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ называют *длиной вектора* или его *нормой*. Ее обозначают $\|x\|$, при этом $d(x, y) = \|x - y\|$.

Аналогично тому, как это было на плоскости, определяются отрезок, выпуклое множество, *скалярное произведение* векторов (формулой $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$) и доказывается теорема отделимости (выпуклого замкнутого множества и не принадлежащей ему точки) гиперплоскостью, т. е. множеством

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \gamma\Big\}.$$

Иначе говоря, если A — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и точка b из $\mathbb{R}^n$ ему не принадлежит, то найдутся вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и число $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $\langle \alpha, x\rangle \geqslant \gamma$ для всех $x \in A$ и $\langle \alpha, b\rangle < \gamma$.

Аналитическое доказательство совершенно не меняется, а геометрическое проводится с помощью тех же рассуждений, что и на плоскости, по индукции (попробуйте сами провести геометрическое доказательство в трехмерном пространстве).

Прошло еще каких-то шестьдесят лет и Давид Гильберт (1862—1943) — немецкий математик, один из крупнейших математиков прошлого века — предложил рассматривать пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с бесконечным числом координат, у которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty.$$

Их также можно складывать, умножать на числа (такие пространства сейчас называют *векторными*), находить расстояние между точками, определять отрезок, луч, прямую, скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

гиперплоскость (совокупность x, для которых $\langle x, \alpha\rangle = \gamma$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$), выпуклость, замкнутость и т. п. Это пространство получило название пространства l_2 или *гильбертова пространства*. В этом пространстве понятие замкнутости можно определять по-старому (через шары, как на плоскости), а можно в «более слабом» смысле. Говорят, что последовательность $x^{(n)}$ векторов из l_2 *слабо сходится* к вектору x, если для любого вектора y из l_2 числовая последовательность $\langle y, x^{(n)}\rangle$ сходится к числу $\langle y, x\rangle$. Множество A в l_2 называется *слабо замкнутым*, если оно содержит все свои предельные (в смысле слабой сходимости) точки. Формулировка теоремы отделимости почти не изменяется.

Слабо замкнутое выпуклое множество и точку, не принадлежащую ему, можно строго отделить друг от друга гиперплоскостью.

При этом «алгебро-аналитическое» доказательство полностью сохраняется, ибо ограниченное слабо замкнутое подмножество гильбертова пространства оказывается компактным (относительно этой слабой сходимости) и для него теорема Вейерштрасса оказывается верной.

Нам осталось упомянуть два обобщения понятия пространства, чтобы определить именно то, где разумно строить выпуклый анализ. Одно из них принадлежит польскому математику Стефану Банаху (1892—1945) — одному из создателей функционального анализа — и американцу Норберту Винеру (1894—1964) — основоположнику кибернетики, а другое — двум великим математикам прошлого века: нашему Андрею Николаевичу Колмогорову (1903—1987) и сразу не скажешь чьему — венгерскому? немецкому? американскому? — математику Яношу, или Иоганну, или Джону фон Нейману (1903—1957).

Здесь уместно сделать еще одно отступление. Упоминая ученого, я, следуя традиции, приписывал ему некую «государственную принадлежность». И это соответствовало, как правило, принадлежности к той или иной научной школе — немецкой, французской, польской, советской и т. п. Двадцатый век внес свои коррективы. Сначала фашизм с его расовой теорией привел к массовой эмиграции ученых из Европы в США, а затем изменения в жизни послевоенной Европы и Америки (в частности крушение коммунистической империи) привели к тому, что люди перестали быть привязанными к одной стране. Кроме того, перед ними открылась возможность общения по электронной почте или через интернет — это послужило причиной того, что роль национальных школ стала ослабевать и воочию стала осуществимой идея Гильберта о том, что для математики «весь культурный мир представляет собой единую страну».

Но вернемся к нашим делам. Банах и Винер обобщили понятие гильбертова пространства, введя понятие нормы в векторном пространстве. *Нормой* на векторном пространстве X называется функция $\|x\|$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in X$; $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$;
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \ \forall x \in X, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Норма порождает возможность вычислять расстояние между точками по формуле $d(x, y) = \|x - y\|$, и, тем самым, оказываются определены понятия сходимости, фундаментальной последовательности и т. д.

Векторное пространство с нормой называется *нормированным*, а если оно *полно* (т. е. если любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий этому пространству), то пространство называется *банаховым*. На несколько десятилетий функциональный анализ, основной частью которого является теория банаховых пространств и линейных операторов в них, стал одним из важнейших разделов всей математики.

Но на самом деле понятие нормы не является существенным для теории выпуклости. Векторная структура действительно нужна для определения этого понятия (хотя и здесь возможны обобщения). Кроме того, как мы убедились в этом на примере теоремы отделимости, в теории выпуклости существенно понятие замкнутости. Так что выпуклый анализ вполне естественно развивается в векторных пространствах, в которых имеется *топология*, согласованная с линейностью и выпуклостью. Понятие *топологического векторного пространства* (пространства, в котором топология согласована с линейностью) ввел Колмогоров (1935), а понятие *локально выпуклого топологического векторного пространства* было введено фон Нейманом (1936).

Вот что все это означает. *Топологическим пространством* называется пара (X, τ), состоящая из непустого множества X и семейства τ его подмножеств, обладающего тем свойством, что X, пустое множество, пересечение конечного числа множеств из τ и объединение любого числа множеств из τ принадлежат τ. Множества из τ называются *открытыми*, дополнения к ним — *замкнутыми*, отображение одного топологического пространства в другое называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт. Если в векторном пространстве введена топология, в которой операции суммирования и умножения на числа непрерывны, пространство называется топологическим векторным, а если к тому же топология такова, что в любое открытое множество, содержащее нулевой вектор, можно вписать выпуклое открытое множество, содержащее нулевой вектор, то пространство называют локально выпуклым топологическим векторным пространством, и именно такие пространства хорошо приспособлены для развития теории выпуклости. И далее в наших формулировках всегда можно иметь в виду не только $\mathbb{R}^n$, но любое локально выпуклое топологическое векторное пространство.

4. *Двойственность в выпуклом анализе*

Обозначим конечномерное векторное пространство, в котором будем действовать, через X. В нем будем рассматривать все основные объекты выпуклого анализа: выпуклые множества, выпуклые функции и выпуклые задачи.

Что такое выпуклое множество, было объяснено. Совокупность всех выпуклых множеств в X обозначим через $\mathrm{Co}(X)$[3]. В этой совокупности выделяются следующие важные подмножества: совокупность выпуклых множеств, содержащих начало координат, $\mathrm{Co}_0(X)$, совокупность всех выпуклых конусов $\mathrm{Cone}(X)$ (конусы — это множества, содержащие вместе с любым своим вектором x весь луч αx, $\alpha \geqslant 0$), совокупность всех подпространств $\mathrm{Lin}(X)$ (подпространство — это множество, проходящее через начало координат и содержащее вместе с любыми двумя своими точками всю прямую, через них проходящую) и совокупность всех «сдвинутых» подпространств, т. е. подмножеств X, содержащих вместе с двумя точками всю прямую, проходящую через эти точки (иначе — совокупность всех *аффинных многообразий*), $\mathrm{Aff}(X)$ (рис. 10).

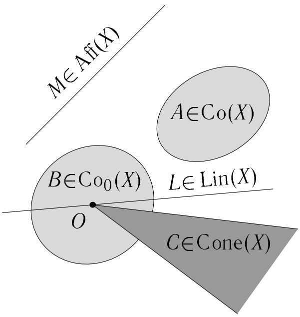


Рис. 10

Выпуклые функции — это вещественные функции f на X со значениями в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, обладающие тем свойством, что их надграфик $\mathrm{epi}\, f = \{(x, \alpha) \mid \alpha \geqslant f(x)\}$[4] является выпуклым множеством (т. е. принадлежит $\mathrm{Co}(X \times \mathbb{R})$) (рис. 11, слева). Со-

[3] От англ. *convex* — выпуклый.
[4] От греч. *epi* — над.

вокупность выпуклых функций обозначим $\mathrm{Co}^f(X)$. В этой совокупности выделяется множество выпуклых и однородных первой степени (сублинейных) функций, которое обозначим $\mathrm{Co}^{hf}(X)$ [5] (функция p называется однородной первой степени, если $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ для любого положительного числа α; надграфики сублинейных функций — конусы, см. рис. 11, справа).

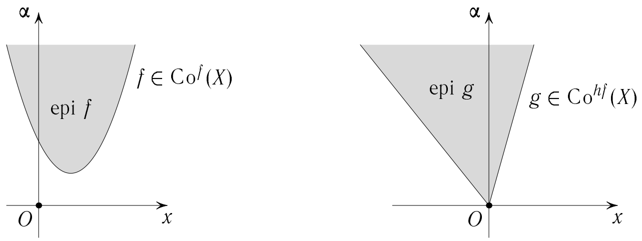


Рис. 11

Выпуклые задачи — это задачи на минимум выпуклой функции на выпуклом множестве.

Характерной чертой выпуклых объектов является возможность их двойного описания — геометрического, как совокупности точек или лучей, обладающих некоторыми геометрическими свойствами, и алгебро-аналитического, как системы равенств или неравенств в случае выпуклых множеств или верхних граней семейств аффинных или линейных функций в случае выпуклых функций.

Продемонстрируем это на примере выпуклых множеств.

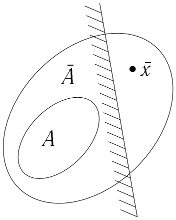
Напомним еще раз определение выпуклого множества: это объединение точек такое, что вместе с двумя точками оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки. А вот двойственное описание *замкнутых* выпуклых множеств.

Теорема 1 (Теорема Минковского о двойственном описании замкнутых выпуклых множеств). *Для того чтобы множество было выпуклым и замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно было пересечением всех полупространств, его содержащих.*

Действительно, полупространство — замкнутое выпуклое множество, и значит, пересечение полупространств — замкнутое выпуклое множество. Допустим, что пересечение полупространств, содержащих замкнутое выпуклое множество A, есть большее множество $\bar{A}$, и пусть $\bar{x} \in \bar{A} \setminus A$.

[5] От греч. *homogenēs* — однородный.

Тогда, по теореме отделимости, найдется вектор y такой, что $\langle y, x\rangle \geqslant \gamma\ \forall x \in A$, но $\langle y, \bar{x}\rangle < \gamma$. Мы пришли к противоречию: $\bar{x}$, оказывается, не принадлежит одному из полупространств, содержащих $\bar{A}$ (рис. 12). Мы доказали, что *любое замкнутое выпуклое множество — это множество решений семейства неоднородных линейных неравенств* (и основным элементом доказательства было применение теоремы отделимости).



$\bar{x} \notin \bar{A}$

Рис. 12

Как следствие, можно доказать, что *решения семейств однородных линейных неравенств — это замкнутые выпуклые конусы.*

Переходим к равенствам. Пусть L — собственное (т. е. не совпадающее со всем X) замкнутое подпространство X (в $\mathbb{R}^n$ любое подпространство замкнуто). Тогда по определению найдется точка $\bar{x}$, не принадлежащая L. По той же теореме отделимости найдутся вектор y и число γ такие, что $\langle y, x\rangle \geqslant \gamma\ \forall x \in L$, в то время как $\langle y, \bar{x}\rangle < \gamma$. Отсюда следует, что $y \neq 0$ и $\langle y, x\rangle = 0\ \forall x \in L$. Действительно, если допустить, что $\langle y, \xi\rangle \neq 0$ ($\xi \in L$), то $\langle y, \alpha\xi\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) принимает все действительные значения, т. е. неравенство $\langle y, x\rangle \geqslant \gamma$ не может быть выполнено для всех $x \in L$. Совокупность векторов y таких, что $\langle y, x\rangle = 0\ \forall x \in L$, называется *аннулятором* подпространства L. Его обозначают $L^{\perp}$. Мы только что доказали, что *аннулятор собственного замкнутого подпространства содержит ненулевой элемент.* (Это утверждение мы будем называть далее *леммой о нетривиальности аннулятора.*)

Докажем, что для замкнутого подпространства аннулятор его аннулятора совпадает с самим подпространством ($(L^{\perp})^{\perp}) = L$). Это свойство мы будем называть *теоремой двойственности для подпространств.* Действительно, пусть $y \in L^{\perp}$. Тогда L лежит (по определению) в гиперплоскости $\{x \in X \mid \langle y, x\rangle = 0\}$. Пересечение всех таких гиперплоскостей по всем y из $L^{\perp}$ есть замкнутое подпространство, содержащее L, которое обозначим $\bar{L}$. Если допустить, что существует вектор $\bar{x}$ такой, что он принадлежит $\bar{L} \setminus L$, то по теореме отделимости найдется вектор $\bar{y}$ такой, что $\langle \bar{y}, x\rangle = 0\ \forall x \in L$ и при этом $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle < 0$. Пришли к противоречию: оказалось, что $\bar{x}$ не принадлежит $\bar{L}$.

Итак, любое замкнутое подпространство — это решение семейства линейных однородных уравнений. И, как следствие, любое замкнутое аффинное многообразие — это решение семейства неоднородных линейных уравнений.

Сделаем небольшое отступление от нашей темы о двойственности.

5. *Теория линейных уравнений*

Наиболее древним среди всех известных письменных источников, содержащих формулировки математических задач, является так называемый папирус Ринда (ок. 1650 г. до н. э.), в котором ставится такой вопрос: «*К числу прибавлена его седьмая часть, и получилось* 19. *Каково число*?». Речь идет, конечно, о решении уравнения $x+x/7=19$.

Детям чуть старше четырех полезно поразмышлять над такой задачей: в хозяйстве имеются овцы и куры, у которых в сумме четыре головы и двенадцать ног. Сколько кур и овец в хозяйстве? Решить эту задачу можно, составив два уравнения с двумя неизвестными: $x_1+x_2=4$, $2x_1+4x_2=12$. В общем случае два уравнения с двумя неизвестными выглядят так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=\xi_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=\xi_2. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Много таких уравнений решено в китайском трактате под названием «Математика в девяти книгах», который относят ко II—I векам до нашей эры. Общую теорию решения систем линейных уравнений с конечным числом уравнений и неизвестных создали в XVIII—XIX веках нашей эры.

Разберемся с решением системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, и это даст нам ключ к построению теории линейных уравнений не только с конечным числом переменных, но и с бесконечным их числом.

Таблица

$$A=(a_{ij})_{i,j=1}^2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},$$

участвующая в $(*)$, называется *матрицей*. Она задает отображение $\mathbb{R}^2$ в себя: пара чисел (x_1, x_2) отображается в пару чисел (ξ_1, ξ_2), где $\xi_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$, $\xi_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$. Запишем это отображение сокращенно: $\xi=Ax$. Образом $\mathbb{R}^2$ при этом отображении является некоторое подпространство $\mathbb{R}^2$, т. е. нулевая точка (если все элементы матрицы A нулевые), прямая или все $\mathbb{R}^2$. В последнем случае система уравнений $(*)$ разрешима для любого вектора (ξ_1, ξ_2). Если образом является прямая, то к этой прямой существует ненулевой ортогональный вектор (это ясно и из геометрии, и из леммы о нетривиальности аннулятора). Обозначим его (η_1, η_2). Имеем тогда

$$0=\eta_1\xi_1+\eta_2\xi_2=\eta_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+\eta_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2) \quad \forall (x_1, x_2).$$

Изменив порядок суммирования в написанном выражении и воспользовавшись тем, что равенство выполняется при любых значениях x_1 и x_2, мы получаем, что система вида

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 &= 0, \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 &= 0 \end{aligned} \tag{$**$}$$

имеет ненулевое решение (а именно (η_1, η_2)). Матрица системы $(**)$ получатся из матрицы A заменой недиагональных элементов друг на друга. Обозначим эту матрицу через A^*. Отображение, соответствующее A^*, называется *сопряженным* с A (или сопряженным с A оператором). Легко понять, что если образ A есть все $\mathbb{R}^2$, система $(**)$ имеет только нулевое решение. Мы фактически доказали следующий результат.

Имеет место альтернатива: либо уравнение $Ax = \xi$ разрешимо для всех ξ, либо сопряженное однородное уравнение $A^*z = 0$ имеет ненулевое решение. Уравнение $Ax = \xi$ разрешимо тогда и только тогда, когда ξ принадлежит ортогональному дополнению к ядру сопряженного оператора.

Этот результат имеет несколько обобщений. Первое — для конечномерного случая. Пусть A — линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда образ $\mathbb{R}^n$ при отображении A (он обозначается $\operatorname{Im} A$) есть подпространство в $\mathbb{R}^m$. Его аннулятор таков: $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle Ax, y\rangle = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle x, A^*y\rangle = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^*y = 0\}$, т. е. $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$. (Здесь нужны некоторые пояснения. Линейное отображение A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ задается матрицей $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. При этом совершается переход от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ к $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ по формулам $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Далее мы, как и в двумерном случае, берем скалярное произведение $\langle \xi, y\rangle$, подставляем вместо ξ_i их выражения через x_j, меняем порядок суммирования и тем самым переходим от A к сопряженному отображению, задаваемому транспонированной матрицей $A^* = (a_{ji})$. После проведенной выкладки получилось, что $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A^*$, где через $\operatorname{Ker} A^*$ обозначено *ядро* отображения A^*, т. е. совокупность решений однородного уравнения $A^*z = 0$.) А далее применяется теорема двойственности для подпространств о том, что если $\operatorname{Im} A$ замкнут, то $\operatorname{Im} A = ((\operatorname{Im} A)^{\perp})^{\perp}$. Но в конечномерном пространстве подпространство всегда замкнуто, откуда окончательно получаем, что $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}$. А это можно расшифровать так.

Либо уравнение $Ax = \xi$ разрешимо при любых ξ, либо однородное сопряженное уравнение имеет ненулевое решение. При этом уравнение $Ax = \xi$ разрешимо в том и только в том случае, если ξ ортогонально ядру сопряженного оператора.

Второе обобщение — переход к гильбертову (или даже банахову) пространству. Начнем с гильбертова. Теорема отделимости, как мы уже упоминали, верна и в гильбертовом пространстве, а следовательно, верны там и теорема 1, и формула $((\mathrm{Im}\,A)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Im}\,A$ (для слабо замкнутого подпространства $\mathrm{Im}\,A$) и вышеуказанное свойство линейных уравнений. Пусть A — линейный оператор, отображающий гильбертово пространство X в себя. Тогда сопряженный оператор определяется соотношением $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ $\forall x, y \in X$. Тогда (см. конечномерную выкладку — она остается без изменений) $(\mathrm{Im}\,A)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,A^*$. Так что если предположить, что *образ* $\mathrm{Im}\,A$ *замкнут в* X (даже в слабой топологии), то опять-таки остается без изменений формулировка окончательного результата, уже дважды описанного нами. Этот результат сохраняется и в банаховом пространстве.

А теперь — самое интересное. Рассмотрим так называемое *линейное интегральное уравнение второго рода*

$$x(t) - \int_a^b K(t, \tau)x(\tau)\,d\tau = \xi(t),$$

либо предположив, что *ядро* $K(\cdot, \cdot)$ квадратично-суммируемо:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, \tau)\,dt\,d\tau < +\infty$$

(и тогда будем рассматривать задачу в гильбертовом пространстве квадратично-суммируемых функций), либо что $K(\cdot, \cdot)$ непрерывно на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ (и в этом случае надо рассматривать задачу в банаховом пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ [6]). Сопряженный оператор описывается в этом случае (как это естественно предположить) как тот же оператор с ядром, в котором t и τ меняются местами:

$$A^* x(t) = x(t) - \int_a^b K(\tau, t)x(\tau)\,d\tau.$$

В обоих случаях (гильбертовом и банаховом) доказывается, что оператор $Ax(\cdot) = x(\cdot) - \int_a^b K(\cdot, \tau)x(\tau)\,d\tau$ имеет замкнутый образ! Значит, имеет место следующая знаменитая

Теорема 2 (альтернатива Фредгольма). *Имеет место альтернатива: либо уравнение* $Ax(\cdot) = \xi(\cdot)$ *разрешимо для всех* $\xi(\cdot)$*, либо сопряженное однородное уравнение* $A^*z(\cdot) = 0$ *имеет ненулевое решение. Уравнение* $Ax(\cdot) = \xi(\cdot)$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\xi(\cdot)$ *принадлежит ортогональному дополнению к ядру сопряженного оператора.*

К этому добавляется еще утверждение, что ядра операторов A и A^* конечномерны и имеют одинаковую размерность, отсюда, в частности, следует, что в альтернативе можно заменить A^* на A.

[6] К сожалению, объяснение, как расширить теорию линейных уравнений на банаховы пространства, выходит за рамки нашего повествования.

Альтернатива Фредгольма была доказана в последний год XIX века и воспринималась тогда как апофеоз достижений этого века. Эрик Ивар Фредгольм (1866—1927) доказывал свою теорему, отправляясь от конечномерного случая. Он разрешал получающиеся конечномерные уравнения по правилу Кра́мера и переходил к пределу. Доказательство было воистину трудным. Суть дела (*разность единичного оператора и оператора интегрального имеет замкнутый образ*) была раскрыта через 13 лет знаменитым специалистом по функциональному анализу Фридьешем Риссом (1880—1956). А тогда в дело вступает теорема двойственности для подпространств (тривиальное следствие теоремы отделимости), и все мгновенно заканчивается. Все теоремы, предшествующие теореме 2, равно как и самое теорему 2 можно назвать *теоремами о разрешимости линейных уравнений.*

Аналогично доказывается известная

Теорема 3 (Минковского—Фаркаша о разрешимости системы неравенств). *Пусть A — матрица размера $m\times n$. Для того чтобы система $Ax=\xi$, $x\geqslant 0$ была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y\in\mathbb{R}^m$ такого, что $A^*y\geqslant 0$ выполнялось бы неравенство $\langle y,\xi\rangle\geqslant 0$. (Запись $z\geqslant 0$ для $z\in\mathbb{R}^n$ эквивалентна такой: $z_1\geqslant 0,\ldots,z_n\geqslant 0$.)*

В заключение кратко опишем некоторые основные соотношения выпуклого анализа (многие из них уже обсуждались выше).

6. *Выпуклая двойственность и выпуклое исчисление*

Далее каждому объекту (из любого из перечисленных выше семейств выпуклых множеств или функций), определенному на векторном пространстве X, сопоставляется двойственный ему — в сопряженном пространстве X' линейных функционалов на X (т. е. линейных отображений из X в $\mathbb{R}$). Оказывается, что при условии замкнутости исходного объекта он восстанавливается по двойственному. В описании операторов двойственности и построении обратных к ним состоит теория *выпуклой двойственности.*

Кроме того, имеются операции, сопоставляющие двум выпуклым объектам третье. Таковы, например, сумма функций или максимум из двух функций, алгебраическая сумма множеств (сопоставляющая множествам A_1 и A_2 множество $A=A_1+A_2=\{x=x_1+x_2\mid x_1\in A_1,\,x_2\in A_2\}$) или пересечение множеств. Применение оператора двойственности к двум множествам или двум функциям, соединенным какой-либо операцией, приводит к новому множеству или функции, связанным с образами исходных (при действии оператора двойственности) некоей двойственной операцией. Определение таких формул составляет *выпуклое исчисление*.

В каждом из введенных выше семейств выпуклых множеств и выпуклых функций имеются операторы, которые отображают это семейство в некоторое семейство в сопряженном пространстве X'. Мы называем их *операторами двойственности*. Вот набор операторов двойственности (с некоторыми из них мы уже встречались).

А) Сопряженная функция. Каждой выпуклой функции $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ сопоставляется выпуклая функция на X' (рис. 13)

$$f^*(x') = \sup_{x\in X}(\langle x', x\rangle - f(x)),$$
$$^*\colon \mathrm{Co}^f(X) \to \mathrm{Co}^f(X'),$$

при этом $\langle x', x\rangle$ обозначает результат применения функционала x' к вектору x. Ее называют *сопряженной функцией* или *преобразованием Лежандра—Юнга—Фенхеля*. Мы построили оператор *, отображающий выпуклые функции на X в выпуклые функции на X'.

Функцию $f^{**}(x) = \sup\limits_{x'\in X'}(\langle x', x\rangle - f^*(x'))$ называют второй сопряженной.

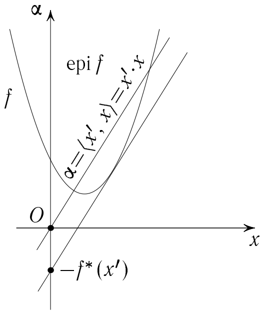


Рис. 13

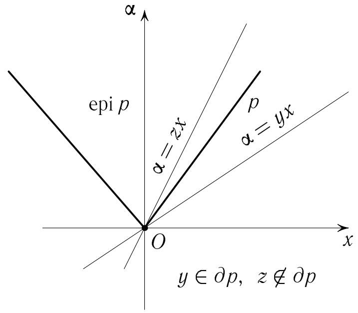


Рис. 14

В) Субдифференциал. Каждой выпуклой сублинейной функции p на X сопоставим следующее выпуклое множество в X':

$$\partial p = \{x' \in X' \mid \langle x', x\rangle \leqslant p(x)\ \forall x\in X\}.$$

Таким образом, $\partial\colon \mathrm{Co}^{hf}(X) \to \mathrm{Co}(X')$. Множество ∂p называется *субдифференциалом p* (рис. 14).

C) Опорная функция. Пусть A — некоторое подмножество X. Функцию на X', определяемую соотношением

$$(sA)(x') = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle,$$

называют *опорной функцией* множества A. Таким образом, $s\colon \mathrm{Co}(X) \to \to \mathrm{Co}^{hf}(X')$.

D) Поляра. Пусть A — некоторое выпуклое подмножество X, содержащее нулевой вектор. Множество $A^\circ = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \leqslant 1 \ \forall x \in A\}$ называется *полярой* множества A. Оператор $^\circ$ переводит $\mathrm{Co}_0(X)$ в $\mathrm{Co}_0(X')$.

E) Сопряженный конус. Пусть C — выпуклый конус в X. Конус

$$C' = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle \geqslant 0 \ \forall x \in C\},$$

расположенный в X', называют *сопряженным конусом* конуса C. При этом $\mathrm{Cone}(X)$ переводится в $\mathrm{Cone}(X')$.

F) Аннулятор подпространства. Пусть L — подпространство X. Подпространство

$$L^\perp = \{x' \in X' \mid \langle x', x \rangle = 0 \ \forall x \in L\},$$

расположенное в X', называют *аннулятором* подпространства L. Оператор $^\perp$ переводит $\mathrm{Lin}(X)$ в $\mathrm{Lin}(X')$.

Помимо этих шести операторов двойственности нам понадобятся два оператора, которые переводят множества в функции на том же пространстве.

Индикаторный оператор δ определен на любых множествах в X (или в X'), и он сопоставляет множеству A функцию на том же пространстве, равную 0 на A и $+\infty$ вне A (обозначаемую δA и называемую *индикаторной функцией*). Оператор δ переводит выпуклые множества в выпуклые функции.

Оператор Минковского также определен на любых множествах в X (или в X'), и он сопоставляет множеству A функцию $\mu A(x)$ на том же пространстве, равную $\inf\{\lambda > 0 \,|\, x \in \lambda A\}$ (назывемую *функцией Минковского*). Оператор μ переводит выпуклые множества в выпуклые сублинейные функции. Формулировка основной теоремы двойственности, если быть кратким, состоит в том, что двукратное применение операторов сопряжения для выпуклых функций, поляры для выпуклых множеств, содержащих нулевой вектор, сопряжения для выпуклых конусов и аннулятора для подпространств приводит к замыканию исходного объекта; в то время как суперпозиция операторов субдифференциала и опорности, равно как суперпозиция этих операторов, взятых в обратном порядке, также приводит к замыканию исходного объекта. (Определим, что такое замыкание функции. Для этого рассмотрим замыкание надграфика некоторой функции f. Оно является надграфиком некоторой новой функции, которую мы обозначим $\mathrm{cl}\, f$. Эту функцию мы и будем называть замыканием функции f.) Далее cl — символ замыкания.[7]

Теорема 4 (о двойственности выпуклых объектов).
1. *Если* $f \in \mathrm{Co}^f(X)$*, то* $f^{**} = \mathrm{cl}\, f$ (*теорема Фенхеля — Моро*).
2. *Если* $p \in \mathrm{Co}^{hf}(X)$*, то* $s\,\partial p = \mathrm{cl}\, p$.
3. *Если* $A \in \mathrm{Co}(X)$*, то* $\partial\, sA = \mathrm{cl}\, A$.
4. *Если* $A \in \mathrm{Co}_0(X)$*, то* $A^{\circ\circ} = \mathrm{cl}\, A$ (*теорема о биполяре*).
5. *Если* $C \in \mathrm{Cone}(X)$*, то* $C'' = \mathrm{cl}\, C$.
6. *Если* $L \in \mathrm{Lin}(X)$*, то* $L^{\perp\perp} = \mathrm{cl}\, L$.

(В формулировке теоремы надо добавить некоторые несущественные детали.)

Существует несколько естественных операций, сопоставляющих двум выпуклым функциям или выпуклым множествам снова выпуклые функции или выпуклые множества. Таковы, например, операции суммы и максимума для функций:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 \vee f_2)(x) = \max(f_1(x), f_2(x)),$$

сумма и пересечение для множеств:

$$A_1 + A_2 = \{x = x_1 + x_2 \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\},$$
$$A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_1,\ x \in A_2\}.$$

Формулы, соединяющие операторы двойственности и операции над выпуклыми объектами, составляют выпуклое исчисление. Вот две, пожалуй, важнейшие формулы выпуклого исчисления:

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 + \partial p_2,$$
$$\partial(p_1 \cup p_2) = \mathrm{co}(\partial p_1 \cup \partial p_2)$$

(обе они верны при некоторых условиях). Но более подробный рассказ о выпуклом анализе выходит за рамки нашего повествования.

[7] От англ. *closure* — замыкание.

Дополнительные сведения о выпуклом анализе можно получить в книгах:

[1] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[2] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

Оглавление

Владимир Михайлович Тихомиров

Выпуклый анализ и его приложения

Редактор Р. Кузнец
Серийное оформление обложки разработал М. Панов.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 5.12.2001 г. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 1,5. Тираж 1000 экз. Заказ №7871.

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554–21–86.

ISBN 5-94057-011-9

9 785940 57011 >