

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 32

Издание выходит с 2006 года

Устойчивость граничных состояний в бесконечных пространственных областях

А. Т. Ильичев

*Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук*



Москва
2022

ББК 22.16

Л43

Редакционный совет:

*С. И. Адян, С. М. Асеев, О. В. Бесов, С. В. Болотин, И. В. Волович,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь), В. В. Козлов,
С. Ю. Немировский (главный редактор), С. П. Новиков, Д. О. Орлов,
В. П. Павлов (заместитель главного редактора), А. Н. Паршин,
А. Г. Сергеев, А. А. Славнов, Д. В. Трещев, А. С. Холево, Е. М. Чирка*

Ильичев А. Т.

Л43 Устойчивость граничных состояний в бесконечных пространственных областях
– М.: МИАН, 2022. – 58 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 32).
ISBN 978-5-98419-087-9

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН). В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в МИАН в рамках программы “Научно-образовательный центр МИАН”.

Вашему вниманию предлагаются лекции курса “Устойчивость граничных состояний в бесконечных пространственных областях”, прочитанные автором в осеннем семестре 2020/2021 учебного года в Научно-образовательном центре МИАН.

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn32>

DOI: <https://doi.org/10.4213/book1914>

ISBN 978-5-98419-087-9

© Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, 2022

© Ильичев А. Т., 2022

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Орбитальная устойчивость	7
1.1. Бесконечномерные трансляционно-инвариантные гамильтоновы системы . . .	7
1.2. Теоремы об орбитальной устойчивости	10
1.3. Орбитальная устойчивость солитонов уравнения Кортевега–де Фриза	16
1.4. Орбитальная устойчивость уединенных волн на эластике Эйлера	17
1.4.1. Формулировка, солитонные решения, симметрии	17
1.4.2. Устойчивость	22
Глава 2. Спектральная устойчивость. Функция Эванса	25
2.1. Решения линеаризованной системы уравнений	25
2.2. Функция Эванса	28
2.3. Спектральная устойчивость солитонов обобщенного уравнения КдФ	33
2.4. Спектральная устойчивость фронтов обобщенного уравнения КдФ–Бюргерса	38
2.5. Функция Эванса в случае двух мод. Внешние формы	44
2.6. Неустойчивость уединенных волн относительно неплоских возмущений на эла- стике Эйлера	47
2.6.1. Основные уравнения	47
2.6.2. Солитонные решения	49
2.6.3. Линеаризация и анализ устойчивости солитонных решений	50

Введение

Настоящий курс лекций посвящен изучению нелинейной и линейной (спектральной) устойчивости граничных состояний (бегущих волн) в бесконечных пространственных одномерных областях.

Факт нелинейной устойчивости граничных состояний, достаточно быстро убывающих на вещественной прямой \mathbb{R} и соответствующим решениям трансляционно инвариантных бесконечномерных гамильтоновых систем, устанавливается на основании проверки сформулированных условий устойчивости. Эти условия, являясь достаточными, предполагают проверку спектральных свойств оператора, возникающих в результате линеаризации функционала, имеющего смысл функции Ляпунова. Вообще говоря, об обычной устойчивости, когда малое возмущение решения остается малым, для решения трансляционно-инвариантных дифференциальных уравнений говорить не приходится. Решения таких уравнений подлежат на исследование наличие орбитальной устойчивости, т. е. устойчивости “с точностью до сдвига”. Как следствие, в задачах об устойчивости граничных состояний не удастся построить функцию (функционал) Ляпунова, которая имела бы локальный минимум, определяемый системой окрестностей основного функционального пространства задачи. В случае выполнения условий орбитальной устойчивости функция Ляпунова имеет условный локальный минимум, т. е. локальный минимум на некотором нелинейном подмногообразии основного функционального пространства системы уравнений в точке, задаваемой решением, подлежащим исследованию на устойчивость. Это нелинейное многообразие, как правило, определяется условием постоянства функционала, инвариантность которого в силу основной системы уравнений связана с трансляционной инвариантностью задачи (Grillakis *et al.* [40], см. также Grillakis *et al.* [41]).

Методы, используемые при доказательстве орбитальной устойчивости, относятся к геометрическому подходу, впервые развитому в работах Benjamin [20], Bona [23] для доказательства устойчивости солитонов уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ) и Бенджамина–Боны–Махони соответственно. Аналогичные методы использовались для установления устойчивости солитонных решений, например, уравнения Бенджамина–Оно (Bennet *et al.* [22]), нелинейного уравнения Клейна–Гордона и уравнения Шрёдингера (Shatah, Strauss [66]), уравнения для волн средней длины (Albert *et al.* [15]), обобщенного уравнения Буссинеска (Bona, Sachs [24]), уравнения КдФ с пятой производной (I'ichev, Semenov [52]), уравнения типа КдФ (Bona *et al.* [25]). В теории упругости подобные методы применялись для доказательства устойчивости уединенных волн в композиционных материалах (Ильичев [2], I'ichev [47]). Анализ устойчивости изгибных уединенных волн на нерастяжимых упругих стержнях (Beliaev, I'ichev [21]) обобщен в работе Dichmann *et al.* [36] на случай, когда учитывается энергия вращения, которая является малой по сравнению с полной энергией стержня, и получен аналогичный результат об устойчивости докритических уединенных волн. Родственный подход к задачам устойчивости солитоноподобных решений, основанный на свойствах функции Ляпунова, развит в работах Weinstein [69], Wenstein [70]. В монографии Strauss [67]

представлено введение в теорию нелинейной устойчивости солитоноподобных решений нелинейных волновых уравнений, описывающих консервативные системы.

В силу того, что условия устойчивости носят достаточный характер, их нарушение, вообще говоря, не означает неустойчивости. Поэтому в случае нарушения этих условий неустойчивость граничных состояний структур устанавливается при помощи других методов. Именно, изучается линейная неустойчивость. Проводится линеаризация основных уравнений на фоне соответствующего решения. Решения линеаризованной задачи, которая представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение, ищется в виде собственной функции с множителем $e^{\lambda t}$, где t — временная переменная, а λ — спектральный параметр. Неустойчивость имеет место, когда существует собственная функция — убывающее на бесконечности решение — для некоторого значения спектрального параметра с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Иными словами, соответствующая обобщенная спектральная задача имеет собственные значения с положительной вещественной частью.

Результаты о неустойчивости получены при помощи использования свойств функции Эванса. Функция Эванса $D(\lambda)$ строится как аналитическая в правой комплексной полуплоскости функция спектрального параметра, имеющая там нули в тех и только тех точках, которые совпадают с дискретным спектром соответствующей задачи на собственные значения. Использование функции Эванса для установления неустойчивости уединенных волн и фронтов впервые было предпринято в работе Pego, Weinstein [62]. В параболических задачах идеи Эванса (Evans [38]) получили дальнейшее развитие в работах Jones [53], Alexander *et al.* [17] и Kapitula [54]. Функция Эванса для периодических решений построена в работе Oh, Sandstede [60]. Для нелокальных уравнений функция Эванса представлена в работе Kapitula *et al.* [58]. Авторы работы Alexander, Sachs [16] обобщили результаты работы Pego, Weinstein [62] на случай уравнений типа Бусинеска, в решениях которых присутствуют две убывающие моды. Случай трех мод рассмотрен в статьях Il'ichev, Fu [49]; Il'ichev, Fu [50]; Fu, Il'ichev [43]; Il'ichev *et al.* [51]. Использование функции Эванса для исследования неустойчивости нелинейных волн в различных областях гидромеханики, нелинейной теории упругости и физики предпринималось в работах Swinton, Eglin [68]; Pego *et al.* [63]; Alexander *et al.* [18]; Gardner, Zumburin [39]; Kapitula [55]; Kapitula, Sandstede [56]; Afendikov, Bridges [19]; Bridges *et al.* [26]; Kapitula, Sandstede [57]; Gubernov *et al.* [42]; Ильичев [3]; Il'ichev [48]; Humpreus *et al.* [46]; Sandstede [64]; Pearce, Fu [61]; Ильичев, Томашпольский [6]; Ильичев и др. [8]; Ильичев, Чугайнова [7]; Chugainova *et al.* [27]; Huang *et al.* [45]; Chugainova *et al.* [28].

Глава 1. Орбитальная устойчивость

1.1. Бесконечномерные трансляционно-инвариантные гамильтоновы системы

Будем предполагать, что вещественное гильбертово пространство \mathbb{X} плотно вложено в \mathbb{L}^2 (вложение $\mathbb{X} \subset \mathbb{L}^2$ плотно), где $\mathbb{L}^2 = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times \dots \times L^2(\mathbb{R})$ — пространство интегрируемых на всей вещественной оси с квадратом вектор-функций.

Рассмотрим бесконечномерную гамильтонову систему вида

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = JE'(\mathbf{u}(t, \cdot)), \quad \mathbf{u}(t, \cdot) \in \mathbb{X}, \quad (1.1.1)$$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$, — вектор-функция, $E(\mathbf{u})$ — функционал («энергия»), J — кососимметрический оператор:

$$\langle J\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, J\mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(J) \subset \mathbb{X},$$

$J: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$, где \mathbb{X}^* обозначает пространство, сопряженное к \mathbb{X} . Тогда очевидным образом имеет место система включений

$$\mathbb{X} \subset \mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^{2*} \subset \mathbb{X}^*.$$

Функционал энергии $E: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} - C^2$ (дважды непрерывный) функционал, который определен на всем \mathbb{X} , оператор $E': \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$. Вторая производная $E'(\mathbf{u})$ — линейный оператор (зависящий от \mathbf{u}) $E''(\mathbf{u}): \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$. Первый дифференциал $dE(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{X}$, — линейное, а второй дифференциал $d^2E(\mathbf{u})$ — билинейное отображение из \mathbb{X} в \mathbb{R} связаны с производными $E'(\mathbf{u})$ и $E''(\mathbf{u})$ по формулам

$$dE(\mathbf{u}) = \langle E'(\mathbf{u}), \delta\mathbf{u} \rangle, \quad d^2E(\mathbf{u}) = \langle E''(\mathbf{u}) \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \rangle,$$

где $\delta\mathbf{u} \in \mathbb{X}$ — приращение \mathbf{u} .

Форма $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ для $\mathbf{u} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{L}^2$, $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^2 = \mathbb{L}^{2*} \subset \mathbb{X}^*$ в свете принятых предположений о пространствах \mathbb{X} и \mathbb{L}^2 совпадает со скалярным произведением \mathbf{u} и \mathbf{v} в \mathbb{L}^2 .

ПРИМЕР 1. Обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1.1.2)$$

где $u \in \mathbb{X} = H^1(\mathbb{R})^1$, $f(z)$ — гладкая функция. Имеем

$$J = \frac{\partial}{\partial x}, \quad E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(\partial_x u)^2}{2} - F(u) \right) dx,$$

$$E'(u) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u), \quad E''(u) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - f'(u), \quad F'(u) = f(u).$$

¹Выбор \mathbb{X} в данном случае неоднозначен. Например, в качестве \mathbb{X} можно брать $H^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$. Соответствующие сохраняющиеся функционалы остаются гладкими в этих пространствах.

ПРИМЕР 2 (Grillakis *et al.* [40]). Нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) = 0. \quad (1.1.3)$$

Уравнение (1.1.3) записывается в виде (1.1.1), где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + F(u) \right) dx, \quad F' = f, \quad F(0) = 0,$$

$$E'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\partial^2 u + f(u) \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}''(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + f'(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{X} = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

Пусть $T(\omega): \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ — однопараметрическая группа сдвигов

$$T(\omega)\mathbf{w}(x) = \mathbf{w}(x + \omega) = \exp(\omega \partial_x)\mathbf{w}(x),$$

$$T(s)T(r) = T(s + r), \quad \frac{dT(\omega)}{d\omega} = T'(\omega) = T'(0)T(\omega) = T(\omega)T'(0), \quad T'(0) = \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial x},$$

где $T'(0) = T'(\omega = 0)$, а \mathbf{I} — единичная матрица. Будем предполагать, что $T(\omega)J = JT(\omega)$.

Будем предполагать также, что E инвариантен относительно действия T , т. е.

$$E(T(\omega)\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}). \quad (1.1.4)$$

ЛЕММА 1.1 (Grillakis *et al.* [40]). *Имеет место равенство:*

$$T(-\omega)E'(T(\omega)\mathbf{u}) = E'(\mathbf{u}). \quad (1.1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\langle E'(T(\omega)\mathbf{u}), T(\omega)\mathbf{v} \rangle = \langle E'(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle T(-\omega)E'(T(\omega)\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle.$$

□

ЛЕММА 1.2 (Grillakis *et al.* [40]). *Имеет место равенство*

$$\langle E'(\mathbf{u}), T'(0)\mathbf{u} \rangle = 0. \quad (1.1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.1.4), (1.1.5) следует:

$$0 = \frac{d}{d\omega} E(T(\omega)\mathbf{u}) = \langle E'(T(\omega)\mathbf{u}), T'(\omega)\mathbf{u} \rangle = \langle E'(T(\omega)\mathbf{u}), T(\omega)T'(0)\mathbf{u} \rangle =$$

$$= \langle T(-\omega)E'(T(\omega)\mathbf{u}), T'(0)\mathbf{u} \rangle = \langle E'(\mathbf{u}), T'(0)\mathbf{u} \rangle.$$

□

Предположим далее, что существует ограниченный оператор $B: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ такой, что

$$JB = T'(0).$$

Определим новый функционал $Q: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$Q(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle B\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (1.1.7)$$

Из (1.1.7) сразу следует, что $B = B^*$. Кроме того, дифференцируя (1.1.7), получим

$$Q'(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}, \quad Q''(\mathbf{u}) = B. \quad (1.1.8)$$

ПРИМЕР 3 (обобщенное уравнение КдФ (1.1.2)).

$$B = \mathbf{I}, \quad Q(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx.$$

ПРИМЕР 4 (нелинейное волновое уравнение (1.1.3)).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x uv dx.$$

ЛЕММА 1.3 (Grillakis *et al.* [40]). Функционал $Q(\mathbf{u})$ также инвариантен относительно действия группы T :

$$Q(T(\omega)\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{X}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу первой формулы в (1.1.8)

$$\frac{d}{d\omega} Q(T(\omega)\mathbf{u}) = \langle BT(\omega)\mathbf{u}, T'(0)T(\omega)\mathbf{u} \rangle = \langle BT(\omega)\mathbf{u}, JBT(\omega)\mathbf{u} \rangle = 0.$$

□

ЛЕММА 1.4 (Grillakis *et al.* [40]). Имеет место равенство

$$T(-\omega)Q'(T(\omega)\mathbf{u}) = Q'(\mathbf{u}). \quad (1.1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\langle T(-\omega)Q'(T(\omega)\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle Q'(T(\omega)\mathbf{u}), T(\omega)\mathbf{v} \rangle = \langle Q'(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle.$$

Из (1.1.9) также легко следует равенство

$$T(-\omega)BT(\omega) = B.$$

□

Заметим, что E и Q формально сохраняются под действием потока (1.1.1). А именно, имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 1.5 (Grillakis *et al.* [40]).

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

в силу уравнения (1.1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle E'(\mathbf{u}), \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\rangle = \langle E'(\mathbf{u}), JE'(\mathbf{u}) \rangle = 0.$$

□

ЛЕММА 1.6 (Grillakis *et al.* [40]).

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

в силу уравнения (1.1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из первой формулы (1.1.8) следует

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \left\langle B\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\rangle = \langle B\mathbf{u}, JE'(\mathbf{u}) \rangle = \\ &= -\langle JB\mathbf{u}, E'(\mathbf{u}) \rangle = -\left\langle T'(0)\mathbf{u}, E'(\mathbf{u}) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

вследствие (1.1.6).

1.2. Теоремы об орбитальной устойчивости

Пусть $\phi_V \in \mathbb{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *граничным состоянием* будем понимать решение уравнений (1.1.1) вида

$$\phi_V(\zeta) = T(-Vt)\phi_V, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \zeta = x - Vt,$$

где V — параметр, имеющий смысл скорости волны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Задачу Коши* для уравнений (1.1.1) будем называть *корректно поставленной*, если для любого $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{X}$ вблизи ϕ_V в \mathbb{X} , $\|\mathbf{w}_0 - \phi_V\| < \gamma$, существует и единственна вектор-функция $\mathbf{w}(t, \cdot) \in C([0, \infty), \mathbb{X})$, непрерывная со значениями в \mathbb{X} , $\|\cdot\|$ обозначает норму в \mathbb{X} , $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$, такая что для всех $t \in [0, \infty)$, $E(\mathbf{w}) = E(\mathbf{w}_0)$, $Q(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}_0)$.

ЛЕММА 1.7 (Grillakis *et al.* [40]). *Если ϕ_V удовлетворяет “стационарному” уравнению*

$$E'(\phi_V) + VQ'(\phi_V) = 0, \tag{1.2.1}$$

то $T(-Vt)\phi_V$ — граничное состояние.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем с учетом (1.2.1), (1.1.5) и (1.1.9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(-Vt)\phi_V &= -VT'(0)T(-Vt)\phi_V = -VJBT(-Vt)\phi_V \\ &= -VJT(-Vt)Q'(\phi_V) = JT(-Vt)E'(\phi_V) = JE'(T(-Vt)\phi_V). \end{aligned}$$

□

Будем предполагать выполнение следующих условий.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Решение задачи Коши существует в указанном выше смысле.

Иногда определение корректности задачи Коши будет слегка модифицировано, как в параграфе 4 настоящей главы.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Существуют $V_1 < V_2$ и гладкое отображение $V \rightarrow \phi_V$ интервала (или полуинтервала) (V_1, V_2) в \mathbb{X} такие, что для каждого $V \in (V_1, V_2)$

(а) имеет место равенство (1.2.1);

(б) $T'(0)\phi_V \neq 0$.

Определим скаляр

$$d(V) = E(\phi_V) + VQ(\phi_V) \quad (1.2.2)$$

и оператор $H: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$:

$$H = E''(\phi_V) + VQ''(\phi_V). \quad (1.2.3)$$

Легко видеть, что оператор H , определенный (1.2.3), самосопряжен (Grillakis *et al.* [40]).

ЛЕММА 1.8 (Grillakis *et al.* [40]).

$$HT'(0)\phi_V = 0,$$

т.е. в результате трансляционной инвариантности по x у оператора H имеется нулевое собственное значение с собственным вектором

$$T'(0)\phi_V = \partial_x \phi_V.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 1.1 и 1.4 имеем

$$E'(T(\omega)\phi_V) + VQ'(T(\omega)\phi_V) = T(\omega)[E'(\phi_V) + VQ'(\phi_V)] = 0.$$

Дифференцируя это равенство по ω и полагая $\omega = 0$, получим искомое равенство. □

Возмущенная уединенная волна, мало отличающаяся от самой уединенной волны, имеет, тем не менее, другую скорость, и со временем убежит от исходной волны. Поэтому под динамической устойчивостью уединенной волны понимается орбитальная устойчивость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Орбита $\{T(\omega)\phi_V, \omega \in \mathbb{R}\}$ устойчива, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая, что если $\|\mathbf{u}_0 - \phi_V\| < \delta$ и существует решение $\mathbf{u}(t)$ (в смысле определения 2) на некотором полуинтервале $[0, t_0)$ с $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, то $\mathbf{u}(t)$ может быть продолжена до решения на $0 \leq t < \infty$ и

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u}(t) - T(\omega)\phi_V\| < \varepsilon.$$

В противном случае орбита называется *неустойчивой*.

Если выполняются предположения 1, 2 и если ядро оператора H натянuto только на вектор $T'(0)\phi_V$ и положительный спектр отделен от нуля, то легко доказать, что орбита ϕ_V является устойчивой (в смысле определения 3). Однако часто бывает, что оператор H во всем пространстве \mathbb{X} имеет отрицательные собственные значения. Поэтому примем следующее условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Пусть для каждого $V \in (V_1, V_2)$ спектр H имеет в точности одно простое отрицательное собственное значение, его ядро натянuto на $T'(0)\phi_V$, и положительный спектр H отделен от нуля.

Ниже будет дано доказательство следующего основного утверждения об орбитальной устойчивости.

ТЕОРЕМА 1.1 (Grillakis *et al.* [40]). Если выполняются предположения 1–3, орбита ϕ_V устойчива тогда, когда функция $d(V)$, определяемая формулой (1.2.2), выпукла².

ЛЕММА 1.9 (Grillakis *et al.* [40]). Если $d(V)$ выпукла, т.е. $d''(V) > 0$, то H имеет отрицательный спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (1.2.1) по V , имеем

$$H\dot{\phi}_V = -Q'(\phi_V), \quad \dot{\phi}_V = \frac{d\phi_V}{dV}.$$

Дифференцируя по V (1.2.2) дважды и используя определение (1.2.3), получим

$$d''(V) = \langle Q'(\phi_V), \dot{\phi}_V \rangle = -\langle H\dot{\phi}_V, \dot{\phi}_V \rangle. \quad (1.2.4)$$

Таким образом, $\langle H\dot{\phi}_V, \dot{\phi}_V \rangle < 0$, если $d''(V) > 0$. \square

Окрестность U_ε орбиты уединенной волны определяется следующим образом:

$$U_\varepsilon = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{X}, \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - T(\omega)\phi_V\| < \varepsilon \right\}.$$

ЛЕММА 1.10 (Grillakis *et al.* [40]). Существует $\varepsilon > 0$ и гладкое отображение $\omega: U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для всех $\mathbf{w} \in U_\varepsilon$

$$\langle T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w}, \partial_x \phi_V \rangle = 0. \quad (1.2.5)$$

²Можно показать (см. Grillakis *et al.* [40]), что если оператор J — сюръективен, как в примере 2 раздела 1.1, выпуклость функции $d(V)$ при выполнении предположений 1–3, необходима и достаточна (а не только достаточна) для устойчивости орбиты ϕ_V . Мы, однако, рассматриваем оператор J , определенный в начале раздела 1.1, который не обязательно сюръективен (как в примере 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$\rho(\omega) = \langle T(\omega)\mathbf{u} - \phi_V, T(\omega)\mathbf{u} - \phi_V \rangle.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \rho'(\omega) &= 2\langle T(\omega)\mathbf{u} - \phi_V, T'(0)T(\omega)\mathbf{u} \rangle = 2\langle T(\omega)\mathbf{u}, T'(0)\phi_V \rangle, \\ \rho''(\omega) &= \langle T'(0)T(\omega)\mathbf{u}, T'(0)\phi_V \rangle. \end{aligned}$$

При $\mathbf{u} = \phi_V$ и $\omega = 0$, $\rho'(0) = 0$ и $\rho''(0) = \langle T'(0)\phi_V, T'(0)\phi_V \rangle > 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует $\delta > 0$ и интервал $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$, содержащий точку $\omega = 0$, такие, что для $\mathbf{u} \in U_\delta$ и $\omega: U_\delta \rightarrow \mathcal{I}$ уравнение $\rho'(\omega) = 0$ имеет единственное решение. \square

Теорему 1.1 переформулируем следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.2 (Grillakis *et al.* [40]). Пусть выполнены предположения 1–3. Если

(A) $d''(V) > 0$,

(B) $\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$, если $\langle Q'\phi_V, \mathbf{y} \rangle = 0$,

(C) $E(\mathbf{u})$ достигает локального минимума в точке $\mathbf{u} = \phi_V$ при выполнении равенства $Q(\mathbf{u}) = Q(\phi_V)$,

(D) орбита ϕ_V устойчива,

то (A) \implies (B) \implies (C) \implies (D).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$(A) \implies (B).$$

Пусть L — пространство, определяемое следующим образом:

$$L = \{\mathbf{y} \in \mathbb{X}, \langle Q'(\phi_V), \mathbf{y} \rangle = 0\}.$$

Докажем, что

$$\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq c_0 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \quad \mathbf{y} \in L_1, \quad L_1 = L \cap \langle \mathbf{y}, \partial_x \phi_V \rangle = 0, \quad c_0 > 0. \quad (1.2.6)$$

Имеем из (1.2.4)

$$\langle H\dot{\phi}_V, \dot{\phi}_V \rangle = -\langle Q'(\phi_V), \dot{\phi}_V \rangle = -\partial_V Q(\phi_V) = -d''(V) < -\epsilon, \quad (1.2.7)$$

где $\epsilon = \epsilon(V)$ — положительная величина. Из разложения $\dot{\phi}_V$ следует

$$\dot{\phi}_V = a_0 \chi_- + b_0 \partial_x \phi_V + \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad (1.2.8)$$

где χ_- является единственным отрицательным собственным вектором $H: H\chi_- = \lambda_- \chi_-$, $\langle \chi_-, \chi_- \rangle = 1$, \mathcal{P} — положительное подпространство H ; для $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$, $\langle H\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle \geq \delta \langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle$ с некоторой положительной постоянной δ . Из (1.2.7), (1.2.8) имеем

$$\langle H\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle < a_0^2 |\lambda_-| - \epsilon. \quad (1.2.9)$$

Произведем разложение $\mathbf{y} \in L_1$:

$$\mathbf{y} = a\chi_- + \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}. \quad (1.2.10)$$

Из (1.2.8), (1.2.10) следует для $\mathbf{y} \in L_1$, что

$$0 = -\langle Q'(\phi_V), \mathbf{y} \rangle = \langle H\dot{\phi}_V, \mathbf{y} \rangle = a_0 a \lambda_- + \langle H\mathbf{p}_0, \mathbf{p} \rangle. \quad (1.2.11)$$

Используя (1.2.9)–(1.2.11) и применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем для $\mathbf{y} \in L_1$

$$\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq -a^2 |\lambda_-| + \delta \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \quad (1.2.12)$$

и также

$$\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = -a^2 |\lambda_-| + \langle H\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \geq -a^2 |\lambda_-| + \frac{\langle H\mathbf{p}, \mathbf{p}_0 \rangle^2}{\langle H\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle} > \frac{a^2 \epsilon}{a_0^2}. \quad (1.2.13)$$

Умножим далее (1.2.12) на $\epsilon/(2|\lambda_-|a_0^2)$ и прибавим к (1.2.13). Окончательно получим

$$\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq \frac{|\lambda_-| \epsilon}{2|\lambda_-|a_0^2 + \epsilon} \left(a^2 + \frac{\delta}{|\lambda_-|} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \right) \geq c_0 (a^2 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle), \quad (1.2.14)$$

где

$$c_0 = \frac{|\lambda_-| \epsilon}{2|\lambda_-|a_0^2 + \epsilon} \min \left\{ 1, \frac{\delta}{|\lambda_-|} \right\}.$$

Оценка (1.2.6) следует из (1.2.14) и условия ортогональности $\langle \chi_-, \mathbf{p} \rangle = 0$. \square

Во всех случаях, рассмотренных в настоящей книге, неравенство (1.2.6) может быть усилено до неравенства

$$\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq c \|\mathbf{y}\|^2, \quad \mathbf{y} \in L_1, \quad c > 0. \quad (1.2.15)$$

$$(B) \implies (C).$$

Определим $M = \{\mathbf{w} \in \mathbb{X}, Q(\mathbf{w}) = Q(\phi_V)\}$ и докажем теорему о локальном максимуме функции (точнее функционала) Ляпунова, из которой следует результат об устойчивости уединенных волн, а именно: уединенная волна орбитально устойчива, если

$$E(\mathbf{w}) - E(\phi_V) \geq c \|T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_V\|^2, \quad (1.2.16)$$

с $\omega(\mathbf{w})$ из (1.2.5) и $\mathbf{w} \in U_\epsilon \cap M$. Разложим

$$\mathbf{v} = T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_V = a_1 Q'(\phi_V) + \mathbf{y}, \quad (1.2.17)$$

где a_1 — постоянная и $\langle Q'(\phi_V), \mathbf{y} \rangle = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(\phi_V) &= Q(\mathbf{w}) = Q(T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w}) = Q(\phi_V) + \langle Q'(\phi_V), \mathbf{v} \rangle + O(\|\mathbf{v}\|^2) = \\ &= Q(\phi_V) + a_1 \langle Q'(\phi_V), Q'(\phi_V) \rangle + O(\|\mathbf{v}\|^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $a_1 = O(\|\mathbf{v}\|^2)$. Запишем далее

$$R(\mathbf{w}) = R(T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w}) = R(\phi_V) + \langle R'(\phi_V), \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle H\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2),$$

где

$$R(\mathbf{w}) = E(\mathbf{w}) + VQ(\mathbf{w}).$$

Так как $R'(\phi_V) = 0$ и $Q(\mathbf{w}) = Q(\phi_V)$, имеем

$$\begin{aligned} E(\mathbf{w}) - E(\phi_V) &= \frac{1}{2} \langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + O(a_1^2) + O(a_1\|\mathbf{v}\|) + o(\|\mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{2} \langle H\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + o(\|\mathbf{v}\|^2). \end{aligned}$$

Из (1.2.5) и (1.2.17) следует, что $\mathbf{y} \in L_1$. Вследствие (1.2.15) имеем

$$E(\mathbf{w}) - E(\phi_V) \geq c_1\|\mathbf{y}\|^2 + o(\|\mathbf{v}\|^2).$$

Окончательно,

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{v} - a_1Q'(\phi_V)\| \geq \|\mathbf{v}\| - |a_1| \|Q'(\phi_V)\| \geq \|\mathbf{v}\| - O(\|\mathbf{v}\|^2).$$

$$(C) \implies (D).$$

Предположим, что семейство ϕ_V , $V \in (V_1, V_2)$ орбитально неустойчиво. Тогда существует последовательность начальных данных $\mathbf{w}_n(0)$ и положительное число δ_1 , такие что

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w}_n(0) - T(\omega)\phi_V\| \rightarrow 0, \quad \sup_{t>0} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w}_n(t) - T(\omega)\phi_V\| \geq \delta_1,$$

где $\mathbf{w}_n(t)$ — решение задачи Коши с начальными данными $\mathbf{w}_n(0)$ из предположения 1. В силу непрерывности по t каждого $\mathbf{w}_n(t)$ можно выбрать такую последовательность t_n , что

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w}_n(t_n) - T(\omega)\phi_V\| = \delta_1. \quad (1.2.18)$$

Вследствие непрерывности функционалов E и Q имеем

$$E(\mathbf{w}_n(t_n)) = E(\mathbf{w}_n(0)) \rightarrow E(\phi_V), \quad Q(\mathbf{w}_n(t_n)) = Q(\mathbf{w}_n(0)) \rightarrow Q(\phi_V).$$

Выберем далее вспомогательную последовательность $\mathbf{v}_n \in M$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{w}_n(t_n)\| \rightarrow 0.$$

Тогда из (1.2.16) и для достаточно малых δ_1 имеем

$$0 \leftarrow E(\mathbf{v}_n) - E(\phi_V) \geq c \|T(\omega(\mathbf{v}_n))\mathbf{v}_n - \phi_V\|^2 = c \|\mathbf{v}_n - T(-\omega(\mathbf{v}_n))\phi_V\|^2.$$

Следовательно, $\|\mathbf{v}_n - T(-\omega(\mathbf{v}_n))\phi_V\| \rightarrow 0$, что противоречит (1.2.18). \square

1.3. Орбитальная устойчивость солитонов уравнения Кортевега–де Фриза

Рассмотрим обобщенное уравнение КдФ (1.1.2). Известна теорема глобального существования и единственности решения для этого уравнения.

ТЕОРЕМА 1.3 (Abdelouhab *et al.* [14]). Пусть $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$. Тогда существует $t^* = t^*(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})})$ и единственная функция $u(t, x) \in C(0, t^*, H^s(\mathbb{R}))$ такая, что $u(x, 0) = u_0(x)$. При этом если $\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C$, C — постоянная, то $t^* = \infty$.

Далее будем полагать $f(u) = u^2/2$, что соответствует классическому уравнению КдФ. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} E'(\phi_V) + VQ'(\phi_V) &= -V\phi_V + \frac{\phi_V^2}{2} + \partial_x^2\phi_V = 0, \quad V > 0, \\ \phi_V &= \phi_V(x) = 3V \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{V}}{2}x\right), \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

а

$$T(-Vt)\phi_V(x) = \phi_V(x - Vt)$$

представляет собой граничное состояние (в данном случае бегущий со скоростью V солитон), соответствующее решению (1.1.2), подлежащему исследованию на орбитальную устойчивость.

Из (1.3.1) следует

$$Q(\phi_V) = 12V\sqrt{V}, \quad d''(V) = \frac{\partial Q(\phi_V)}{\partial V} = 18\sqrt{V} > 0,$$

т. е. условие (A) теоремы 1.2 выполнено. Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, надо проверить выполнение предположений 1–3 в данном случае. При этом если амплитуда любого малого возмущения сдвига $\phi_V(x)$ не растет по норме $H^1(\mathbb{R})$ на промежутке времени $[0, t^*]$, то из теоремы 1.3 очевидным образом следует, что $t^* = \infty$.

Справедливость предположения 1 очевидным образом следует из теоремы 1.3, если в качестве пространства \mathbb{X} выбрать пространство $H^1(\mathbb{R})$ непрерывности функционалов $E(u)$ и $Q(u)$. Справедливость предположения 2 легко следует из (1.3.1). В данном случае оператор $H = E''(\phi_V) + VQ''(\phi_V)$ имеет вид

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \phi_V + V,$$

т. е. является оператором Штурма–Лиувилля.

Легко видеть, что $\chi_0 = \partial_x\phi_V$ является собственной функцией оператора H , отвечающей нулевому собственному числу. Из теории оператора Штурма–Лиувилля на вещественной оси \mathbb{R} следует, что ядро оператора H одномерно (Курант, Гильберт [10]), а значит, χ_0 — единственна (с точностью до мультипликативной постоянной). Кроме того, функция χ_0 имеет простой ноль, а значит, является второй собственной функцией, соответствующей возрастающим собственным значениям. Первая собственная функция не имеет нулей на вещественной оси и, таким образом, соответствует единственному

отрицательному собственному значению. Таким образом, имеем, что оператор H имеет единственное отрицательное собственное значение и единственное нулевое собственное значение. Так как $V > 0$, положительный спектр оператора H отделен от нуля (Захаров и др. [1]). Таким образом, предположение 3, в рассматриваемом случае, также выполняется. Для справедливости теоремы 1.2, устанавливающей орбитальную устойчивость солитонов ϕ_V для любого $V > 0$, остается доказать, что из неравенства (1.2.6) следует неравенство (1.2.15). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \langle Hy, y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[y \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \phi_V + V \right) y \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x y^2 + (V - \phi_V) y^2) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x y^2 - 2V y^2) dx, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

так как из (1.3.1) следует, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\phi_V| \leq 3V.$$

Умножим обе части (1.2.6) на положительную величину

$$\frac{2V + 1}{c_0}$$

и сложим получившееся неравенство с (1.3.2). В результате получим

$$\langle Hy, y \rangle \geq c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x y^2 + y^2) dx, \quad c_1 = \frac{c_0}{c_0 + 2V + 1} > 0,$$

откуда сразу следует (1.2.15). Теорема 1.2, таким образом, выполнена, и граничное состояние $T(-Vt)\phi_V(x) = \phi_V(\zeta)$, $\zeta = x - Vt$, орбитально устойчиво в смысле определения 3.

1.4. Орбитальная устойчивость уединенных волн на эластике Эйлера

1.4.1. Формулировка, солитонные решения, симметрии. Далее изучается устойчивость уединенных волн в тонком нерастяжимом стержне бесконечной длины. Профиль упругой линии такого стержня, отвечающий уединенной волне, в отсутствие кручения имеет форму плоской петли, диапазон изменения скоростей которой зависит от силы натяжения в стержне. Установлена орбитальная устойчивость уединенных волн относительно возмущений формы петли, не выводящих из плоскости петли. Результат об устойчивости следует из того обстоятельства, что орбита уединенной волны доставляет локальный минимум некоторому инвариантному функционалу. Этот минимум реализуется на некотором нелинейном инвариантном подмногообразии основного пространства решений, отличным от того, которое определяется функционалом, сохраняющимся в силу трансляционной инвариантности задачи. Поэтому, теория параграфа 1.2 не может быть применена непосредственно и анализ имеет ряд особенностей, которые будут изложены ниже.

Рассматриваются стержни, описываемые теорией упругих стержней Кирхгоффа, Kirchoff [59], и Клебша, Clebsch [29] (см. также Dill [37]). Солитонное решение описывает уединенную волну, которая для краткости будет называться солитоном, хотя всеми свойствами солитона эта волна не обладает. Теория Кирхгоффа–Клебша применима к движениям тонких стержней с малыми деформациями, хотя смещения и вращения стержня могут быть достаточно велики. Рассматривается бесдвиговой нерастяжимый стержень, т. е. стержень, описание движения которого сводится к описанию движения его серединной линии $\mathcal{G}(t)$ и длина нормированного касательного вектора к $\mathcal{G}(t)$ остается единичной все время движения. Иными словами рассматриваются только изгибные деформации стержня и деформации, вызванные кручением.

Формы бегущих волн изгиба описаны, по видимому, еще Эйлером (см. Ляв [11]). Динамика изгиба плоских стержней обсуждается в статье Coleman, Dill [31]. В этой работе дана классификация бегущих волн, а также замечено, что система динамических уравнений может быть сведена к единственному дифференциальному уравнению в частных производных и алгебраическому уравнению, представляющему из себя условие нерастяжимости. Это наблюдение вызвало предположение, что система уравнений, описывающая динамику плоского нерастяжимого стержня является вполне интегрируемой. Однако численные результаты, полученные в статье Coleman, Xu [32], заставляют думать, что система уравнений, описывающих изгибные волны в стержне неинтегрируема, так как уединенные волны на плоских стержнях взаимодействуют неупруго, т. е. не являются солитонами в строгом смысле. В статье Coleman *et al.* [33] в замкнутой форме получены решения типа бегущих волн в линейно растяжимом и бесдвиговом (тонком) плоском стержне. В статье Beliaev, Il'ichev [21] (см. также Ильичев [5]) обсуждается динамика изгиба нерастяжимого стержня в главной плоскости изгиба, когда делается пренебрежение вращательной частью кинетической энергии, которая мала по сравнению с полной энергией стержня. Доказана орбитальная устойчивость солитонов (солитонных решений в форме петли) по отношению к плоским возмущениям. Анализ устойчивости обобщен в статье Dichmann *et al.* [36] для случая, когда не делается пренебрежение вращательной частью кинетической энергии.

Тонкие стержни отождествляются со своей нейтральной кривой, называемой упругой линией, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия при изгибе. Тонкий нерастяжимый бесдвиговой упругий стержень бесконечной длины находится под действием силы натяжения и в невозмущенном состоянии совпадает с осью x_1 декартовой системы координат. Полная энергия стержня складывается из кинетической и изгибной энергий, вкладом энергии кручения пренебрегаем, что можно сделать, когда изгиб стержня происходит в главной плоскости изгиба. Соответствующие линейные плотности кинетической K и потенциальной W энергий даются выражениями (индексы внизу обозначают дифференцирование по соответствующей переменной)

$$K = \frac{1}{2}\rho S x_i^i x_{it}, \quad W = \frac{1}{2}IE_0 x_{\xi\xi}^i x_{i\xi\xi},$$

где x_i , $i = 1, 2, 3$, — координаты точек нейтральной кривой (упругой линии) $\mathcal{G}(t)$ стержня, ρ — плотность, S — площадь поперечного сечения стержня, ρI — момент инерции поперечного сечения относительно прямой, ортогональной главной плоскости изгиба,

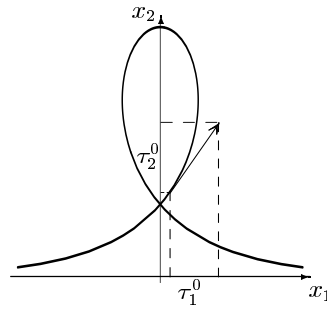


Рис. 1.1. Форма профиля уединенной волны на стержне и касательный вектор $\{\tau_1^0, \tau_2^0, 0\}^\top$

совпадающей с плоскостью x_1x_2 , E_0 — модуль Юнга, ξ — длина дуги упругой линии. Форма упругой линии задается уравнением $x^i = x^i(t, \xi)$.

Для тонких стержней вращательная часть кинетической энергии $K_r = \frac{1}{2}\rho x_{t\xi}^i x_{it\xi}$ мала по сравнению с кинетической энергией K и изгибной энергией W , и ей можно пренебречь (Beliaev, P'ichev [21]).

Уравнения движения получаются варьированием лагранжиана Λ ,

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} (\rho S x_{it}^i x_{it} - I E x_{\xi\xi}^i x_{i\xi\xi}) d\xi dt$$

при условии нерастяжимости: $x_{i\xi} x_\xi^i = 1$. Эти уравнения имеют вид

$$\rho S x_{tt}^i = (P x_{i\xi})_\xi - I E x_{i\xi\xi\xi}, \quad x_{i\xi} x_\xi^i = 1, \quad (1.4.1)$$

где $P(t, \xi) = p(t, \xi) + p_\infty$ — множитель Лагранжа, соответствующий физической величине силы натяжения, $p \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, $i = 1, 2, 3$; по повторяющимся индексам предполагается суммирование, жонглирование индексами происходит при помощи диагонального метрического тензора с единицами на диагонали.

Производя в (1.4.1) масштабные преобразования

$$p \rightarrow p_\infty p, \quad \xi \rightarrow \sqrt{IE/p_\infty} \xi, \quad t \rightarrow \sqrt{\rho S IE/p_\infty^2} t$$

и сохраняя старые обозначения, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tau_{tt}^i &= (p\tau^i)_{\xi\xi} + \tau_{\xi\xi}^i - \tau_{\xi\xi\xi\xi}^i, \\ \tau^i \tau_i &= 1, \\ \tau_1 &\rightarrow 1, \quad \tau_{2,3} \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

где $\tau_i = x_\xi^i$.

Классификация различных форм упругих линий впервые была дана Эйлером (и потому рассматриваемый стержень называется эластикой Эйлера), который вывел обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее форму тонких нерастяжимых

стержня, находящихся под действием силы натяжения (см., например, Ляв [9]). Упругая кривая стержня бесконечной длины может иметь форму петли, которая представляет собой бегущую уединенную волну и описывается солитонным решением уравнений (1.4.2) (рис. 1.1):

$$\begin{aligned} p &= -p^0 = -6(1 - V^2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - V^2} \zeta, & \tau_3 &= 0, \\ \tau_1 &= \tau_1^0 = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - V^2} \zeta, \\ \tau_2 &= \tau_2^0 = -2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - V^2} \zeta \operatorname{sh} \sqrt{1 - V^2} \zeta, & \zeta &= \xi - Vt, \quad 0 \leq V < 1. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Система уравнений (1.4.2) записывается в гамильтоновом виде

$$\tau_t^i = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\delta E}{\delta v_i}, \quad v_t^i = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\delta E}{\delta \tau_i}, \quad \tau^i \tau_i = 1, \quad (1.4.4)$$

где $v_\xi^i = \tau_t^i$ и

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [(v_i v^i + \tau_{i\xi} \tau_\xi^i + P(\tau_i \tau^i - 1))] d\xi.$$

Наряду с гамильтонианом E имеют место еще две формально сохраняющихся величины,

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^i - \tau_\infty^i) v_i d\xi, \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^1 - 1) d\xi, \quad \tau_\infty^1 = 1, \quad \tau_\infty^{2,3} = 0.$$

Введем обозначения $T(-Vt)\phi_V = \{\tau_1^0 - 1, \tau_2^0, v_1^0, v_2^0\}^\top$ ($v_1^0 = -V(\tau_1^0 - 1)$, $v_2^0 = -V\tau_2^0$), и $\mathbf{w}(t) = \{\tau_1 - 1, \tau_2, v_1, v_2\}^\top$ для вектор-функций, а также $\mathbb{X} = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ для гильбертова пространства с нормой $\|\cdot\|$. Как уже отмечалось, уравнения имеют гамильтонову форму (1.4.4), функционал E , а также Q и N , непрерывны как функционалы из гильбертова пространства \mathbb{X} в \mathbb{R} (последний — в силу того обстоятельства, что $\tau_1 - 1 \in L^1(\mathbb{R})$, что следует из условия нерастяжимости в (1.4.2)).

Далее, будем предполагать, что $x_3 = 0$, т.е. изгиб стержня происходит в плоскости x_1x_2 , которая является главной плоскостью изгиба. При этом кручение элаستيци Эйлера отсутствует, т.е. предположение о пренебрежении энергией кручения выполняется.

Ниже приводится доказательство следующей теоремы о нелинейной орбитальной устойчивости петли Эйлера (1.4.3).

ТЕОРЕМА 1.4 (Beliaev, Pi'ichev [21]). *Пусть для каждого $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{X}$ вблизи ϕ_V в \mathbb{X} существует вектор-функция $\mathbf{w}(t, \cdot)$, являющаяся решением задачи Коши в указанном ниже смысле. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|\mathbf{w}_0 - \phi_V\| < \delta$, то*

$$\sup_{t>0} \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{w}(t, \cdot) - \phi_V(\cdot + \omega)\| < \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы основано на использовании того факта, что семейство сдвигов уединенной волны — орбита — доставляет локальный минимум сохраняющегося функционалу

$$R(\mathbf{w}) = H(\mathbf{w}) + VQ(\mathbf{w}) - N(\mathbf{w})$$

на замкнутом подмногообразии $\tau_l \tau^l = 1$, $l = 1, 2$, пространства \mathbb{X} . Этот факт, в свою очередь, следует из того что «линеаризованный гамильтониан» $H(\phi_V) = R''(\phi_V)$ имеет в точности одно нулевое собственное значение и его положительный спектр отделен от нуля.

Солитонные решения (1.4.2) представляют собой решения типа бегущей волны, убывающие на бесконечности. Бегущие волны зависят от автомодельной комбинации $\zeta = \xi - Vt$ и описывающие их уравнения получаются интегрированием (1.4.2). Эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} -V(\tau^l - \tau_\infty^l) &= v^l, \\ -Vv^l &= p\tau^l + (\tau^l - \tau_\infty^l) - \tau_{\zeta\zeta}^l, \quad \tau^i \tau_i = 1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Умножив второе уравнение в (1.4.5) на τ_l и просуммировав по индексу l , получим

$$p = V^2 + (1 - V^2)\tau_\infty^l \tau_l - \tau_\zeta^l \tau_{l\zeta} - 1.$$

Далее, умножим это же уравнение на τ_ζ^l и просуммируем. В результате получим

$$-\tau_{\zeta\zeta}^l \tau_{l\zeta} - s^2 \tau_\infty^l \tau_{l\zeta} = 0, \quad s = \sqrt{1 - V^2},$$

и после однократного интегрирования

$$-\frac{1}{2} \tau_\zeta^l \tau_{l\zeta} - s^2 \tau_\infty^l \tau_l = \Pi. \quad (1.4.6)$$

Для того чтобы получить солитонное решение, положим $\Pi = -s^2$. Определим новую угловую переменную θ при помощи выражений $\tau_1 = \cos \theta$, $\tau_2 = \sin \theta$. В новых переменных уравнение (1.4.6) записывается в виде уравнения

$$\theta_\zeta^2 = 4s^2 \sin^2 \theta / 2,$$

которое легко интегрируется и его решения приводятся к виду (1.4.3). Заметим, что система уравнений (1.4.5) для солитонных решений может быть также записана в виде

$$R'(\phi_V) = \{E(\phi_V) + VQ(\phi_V) - N(\phi_V)\}' = 0. \quad (1.4.7)$$

Вид функционала Ляпунова $R(\mathbf{w})$ несколько отличается от рассмотренного в предыдущих параграфах, однако, как мы убедимся, это отличие не влияет на ход дальнейших рассуждений.

Под решением задачи Коши уравнений (1.4.2) будем понимать некоторую естественную модификацию предположения 2, а именно: *задачу Коши* для уравнений (1.4.2) будем называть *корректно поставленной*, если для любого $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{X}$ вблизи ϕ_V в \mathbb{X} ,

$\|\mathbf{w}_0 - \phi_V\| < \gamma$, существует вектор-функция $\mathbf{w}(t, \cdot) \in C([0, \infty), \mathbb{X})$ непрерывная со значениями в \mathbb{X} , $\mathbf{w}(\cdot, 0) = \mathbf{w}_0 = \{\tau_0^l - \tau_\infty^l, v_0^l\}^\top$, $l = 1, 2$, такая, что для всех $t \in [0, \infty)$, $\tau_0^l \tau_{0l} = \tau^l \tau_l = 1$ и $E(\mathbf{w}) = E(\mathbf{w}_0)$, $Q(\mathbf{w}) = Q(\mathbf{w}_0)$, $N(\mathbf{w}) = N(\mathbf{w}_0)$.

Функционалы E , Q и N являются инвариантными под действиями групп Ли сдвигов $T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$:

$$T(\omega)\mathbf{w}(\cdot, \xi) = \mathbf{w}(\cdot, \xi + \omega) = \exp(\omega \partial_\xi) \mathbf{w}(\cdot, \xi), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Вектор $\mathbf{k}_1 = \partial_\xi \phi_V$ — собственный нульвектор оператора H . В данном случае также имеет место формула (1.2.5).

1.4.2. Устойчивость. Введем следующие обозначения: $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}^\top$ — вектор-функция, $L = \{\mathbf{u} \in \mathbb{X}, \tau_1^0 u_1 + \tau_2^0 u_2 = 0\}$ — линейное замкнутое подпространство \mathbb{X} , касательное к подмногообразию $M = \{\mathbf{u} \in \mathbb{X}, \tau_l \tau^l = 1\}$ в точке $\mathbf{u} = \phi_V$.

Разрешая равенство $\tau_l^0 \delta \tau^l = 0$, получим для возмущений

$$\delta \tau_1 = \tau_2^0 \delta \vartheta, \quad \delta \tau_2 = -\tau_1^0 \delta \vartheta.$$

Билинейная форма $\langle H \delta \mathbf{w}, \delta \mathbf{w} \rangle$ на подпространстве L имеет вид

$$\begin{aligned} \langle H \delta \mathbf{w}, \delta \mathbf{w} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \tau^i \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + 1 - p^0 \right) \delta \tau_i + \delta v^i \delta v_i + 2V \delta v^i \delta \tau_i \right] d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \vartheta \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + V^2 + s^2 - 2s^2 \operatorname{ch}^{-2} s\xi \right) \delta \vartheta + 2V \tau_2^0 \delta \vartheta \delta v_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2V \tau_1^0 \delta \vartheta \delta v_2 + \delta v^i \delta v_i \right] d\xi. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Задача на собственные значения для оператора H формулируется следующим образом:

$$H\chi = \nu\chi, \quad (1.4.9)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} H_1 + V^2 & V\tau_2^0 & -V\tau_1^0 \\ V\tau_2^0 & 1 & 0 \\ -V\tau_1^0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}^\top,$$

$$H_1 = -\frac{d^2}{d\xi^2} + s^2 - 2 \operatorname{sech}^2 s\xi.$$

Задача на собственные значения (1.4.9) переписывается в компонентах:

$$\chi_2 = \frac{V\tau_2^0}{\nu - 1} \chi_1, \quad \chi_3 = -\frac{V\tau_1^0}{\nu - 1}, \quad H_1 \chi_1 = \left(\nu - \frac{V^2 \nu}{\nu - 1} \right) \chi_1,$$

и, таким образом, сводится к задаче Штурма–Лиувилля на собственные значения для компоненты χ_1 . Из теории оператора Штурма–Лиувилля известно, что оператор H_1

имеет в точности одно нулевое собственное значение (с собственной функцией $\partial_\xi \tau_1^0 / \tau_2^0$, отвечающей $\partial_\xi \phi_V$), а остальной его спектр положителен и отделен от нуля.

Из выражения для нулевого собственного значения:

$$\nu - \frac{V^2 \nu}{\nu - 1} = 0,$$

имеем $\nu_0 = 0$, $\nu_+ = 1 + V^2 > 0$. Непрерывный спектр H удовлетворяет условию

$$\nu - \frac{V^2 \nu}{\nu - 1} > s^2,$$

откуда следует

$$\nu > 1 - V$$

и, следовательно, спектр отделен от нуля для фиксированной скорости $V \in [0, 1)$.

Отсюда сразу следует (см. параграфы 1 и 2), что если $\mathbf{u} \in L$ и $\langle \mathbf{u}, \partial_\xi \phi_V \rangle = 0$, то

$$\langle H\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha_0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (1.4.10)$$

Из (1.4.8), очевидно, следует

$$\langle H\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_\xi u_1)^2 + (\partial_\xi u_2)^2 + P^0(u_1^2 + u_2^2) + u_3^2 + u_4^2 + 2V(u_1 u_3 + u_2 u_4)] d\xi, \quad (1.4.11)$$

где $P^0 = -p^0 + 1$.

Кроме того, если $\mathbf{u} \in L$ и $\langle \mathbf{u}, \partial_\xi \phi_V \rangle = 0$, то

$$\langle H\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha_1 \|\mathbf{u}\|^2. \quad (1.4.12)$$

В самом деле, домножив обе части неравенства (1.4.10) на $1 - \varepsilon$, где ε — достаточно малая постоянная и использовав (1.4.11), получим

$$\begin{aligned} \langle H\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &\geq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_\xi u_1)^2 + (\partial_\xi u_2)^2 + P^0(u_1^2 + u_2^2) + u_3^2 + u_4^2 + \\ &\quad + 2V(u_1 u_3 + u_2 u_4)] d\xi + (1 - \varepsilon)\alpha_0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} [\beta_1(u_1^2 + u_2^2) + \beta_2(u_3^2 + u_4^2) + \varepsilon(\partial_\xi u_1^2 + \partial_\xi u_2^2)] d\xi, \end{aligned}$$

где $\beta_1 = (1 - \varepsilon)\alpha_0 + \varepsilon(1 - 6s^2 - V)$ и $\beta_2 = (1 - \varepsilon)\alpha_0 - \varepsilon V$. Для того чтобы получить оценку (1.4.12), выберем $\alpha_1 = \min(\beta_1, \beta_2, \varepsilon)$.

Рассматриваемая орбита уединенной волны является орбитально устойчивой относительно возмущений касательного вектора не выводящих из плоскости петли, если

- задача Коши для (1.4.2) корректно поставлена (см. выше);

- $R(\mathbf{w}) - R(\phi_V) \geq \alpha \|T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_V\|^2$ для $\mathbf{w} \in U_\varepsilon \cap M$, (α — постоянная, $\omega(\mathbf{w})$ из (1.2.5)).

Если выполняются эти условия, то доказательство устойчивости мало чем отличается от приведенного в параграфе 1.2.

ЛЕММА 1.11 (Beliaev, Pi'ichev [21]). Для $\mathbf{w} \in U_\varepsilon \cap M$ имеет место неравенство

$$R(\mathbf{w}) - R(\phi_V) \geq \alpha \|T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_V\|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу специфики функционала Ляпунова $R(\mathbf{w})$ доказательство последнего утверждения немного отличается от соответствующего доказательства, приведенного в п. 1.2, поэтому рассмотрим его подробно.

Пусть $\mathbf{w} \in U_\varepsilon \cap M$. Произведем разложение

$$\boldsymbol{\rho} = T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} - \phi_V = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u},$$

где $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}^\top$, $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, u_2^0, 0, 0\}^\top$ и $\mathbf{u} \in L$. Далее заметим, что

$$2(\tau_1^0 \rho_1 + \tau_2^0 \rho_2) = -a, \quad (1.4.13)$$

где $a = \rho_1^2 + \rho_2^2$. Равенство (1.4.13) следует из включения $T(\omega(\mathbf{w}))\mathbf{w} \in M$. Из (1.4.13) следует $\tau_1^0 u_1^0 + \tau_2^0 u_2^0 = -a/2$. Разрешая последнее уравнение относительно u_1^0 и u_2^0 , получим

$$u_1^0 = -\frac{a}{2}\tau_1^0, \quad u_2^0 = -\frac{a}{2}\tau_2^0. \quad (1.4.14)$$

При $\mathbf{w} \in U_\varepsilon \cap M$ имеем в силу (1.4.7)

$$R(\mathbf{w}) - R(\phi_V) = \frac{1}{2} \langle H\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle + o(\|\boldsymbol{\rho}\|^2).$$

Далее заметим, что

$$\langle \mathbf{u}, \partial_\xi \phi_V \rangle = \langle T(\omega(\mathbf{w})) - \phi_V - \mathbf{u}^0, \partial_\xi \phi_V \rangle = 0$$

в силу (1.2.5) и как следствие равенств $\langle \phi_V, \partial_\xi \phi_V \rangle = 0$, $\langle \mathbf{u}^0, \partial_\xi \phi_V \rangle = 0$. Последнее равенство вытекает из (1.4.14). Следовательно, \mathbf{u} принадлежит положительному подпространству H , и $\langle H\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq \alpha_1 \|\mathbf{u}\|^2$. Окончательно

$$\|\mathbf{u}\| = \|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{u}^0\| \geq \|\boldsymbol{\rho}\| - \|\mathbf{u}^0\| = \|\boldsymbol{\rho}\| - O(\|\boldsymbol{\rho}\|^2),$$

и для достаточно малых $\boldsymbol{\rho}$

$$R(\mathbf{w}) - R(\phi_V) \geq \frac{\alpha_1}{2} \|\boldsymbol{\rho}\|^2 = \alpha \|\boldsymbol{\rho}\|^2.$$

□

Глава 2. Спектральная устойчивость. Функция Эванса

2.1. Решения линеаризованной системы уравнений

Рассмотрим линейную систему уравнений, которая является линеаризацией некоторой нелинейной системы вокруг граничного состояния $\phi_V(\zeta)$, $\zeta = x - Vt$ (граничным состоянием в случае негамильтоновой системы уравнений будем называть ее решение типа бегущей волны), $\mathbf{u}(x, t) = \phi_V(\zeta) + \delta\mathbf{u}(x, t)$,

$$\mathcal{L}\left(\phi_0(\zeta), \frac{\partial\phi_V(\zeta)}{\partial\zeta}, \dots, \delta\mathbf{u}, \frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial x}, \dots\right) = 0. \quad (2.1.1)$$

Будем рассматривать решения (2.1.1) вида

$$\delta\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{w}(\zeta)e^{\lambda t}. \quad (2.1.2)$$

Тогда система уравнений (2.1.1) сводится к неавтономной линейной динамической системе

$$\mathbf{y}' = \mathbf{M}(\zeta, \lambda)\mathbf{y}, \quad (2.1.3)$$

где штрих сверху обозначает дифференцирование по ζ , \mathbf{M} — переменная $(m \times m)$ -матрица, а $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\zeta)$ — неизвестная вектор-функция, компоненты которой выражаются через компоненты $\mathbf{w}(\zeta)$ из (2.1.2) и их производных по ζ .

Обозначим через Ω область изменения спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассмотрим матрицы

$$\mathbf{M}^{\pm\infty} = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \mathbf{M}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. (а) Матрица \mathbf{M} аналитична при $\lambda \in \Omega$.

(б) Существуют простые собственные числа матриц $\mathbf{M}^{\pm\infty}$ с минимальной вещественной частью, т.е. при $\lambda \in \Omega$; $\operatorname{Re} \mu_1^+(\lambda) < \operatorname{Re} \mu_j^+(\lambda)$, $\operatorname{Re} \mu_1^-(\lambda) < \operatorname{Re} \mu_j^-(\lambda)$, $j = 2, \dots, m$.

(в) $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}^{\pm\infty}$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ убывает быстрее $1/|\zeta|^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ на любом компактном подмножестве Ω .

Далее, введем обозначение $\mu_1^\pm = \mu^\pm$.

Из предположения 4в следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{R}(\zeta, \lambda)\| d\zeta \leq C,$$

где $\|\mathbf{R}(\zeta, \lambda)\|$ в данном случае обозначает, например, квадратный корень из суммы всех компонент матрицы $\mathbf{R}(\zeta, \lambda)$,

$$\mathbf{R}(\zeta, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{M}(\zeta, \lambda) - \mathbf{M}^{+\infty}(\lambda), & \zeta > 0, \\ \mathbf{M}(\zeta, \lambda) - \mathbf{M}^{-\infty}(\lambda), & \zeta < 0. \end{cases}$$

Наряду с (2.1.3) рассмотрим сопряженную систему

$$\mathbf{z}' = -\mathbf{z}\mathbf{M}(\zeta, \lambda). \quad (2.1.4)$$

Определим правые собственные векторы (векторы-столбцы) и левые собственные векторы (векторы-строки) матриц $\mathbf{M}^{\pm\infty}$:

$$(\mathbf{M}^{\pm\infty} - \mu^{\pm}\mathbf{I})\mathbf{r}^{\pm} = 0, \quad \mathbf{l}^{\pm}(\mathbf{M}^{\pm\infty} - \mu^{\pm}\mathbf{I}) = 0, \quad \mathbf{r}^{+} \cdot \mathbf{l}^{+} = 1, \quad \mathbf{r}^{-} \cdot \mathbf{l}^{-} = 1,$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Заметим, что так определенные векторы \mathbf{r}^{\pm} , \mathbf{l}^{\pm} аналитичны при $\lambda \in \Omega$, так как соответствуют аналитическим собственным значениям μ^{\pm} (которые аналитичны при $\lambda \in \Omega$ в силу их простоты), см. Като [9].

ТЕОРЕМА 2.1 (Pego, Weinstein [62]). *Существуют единственные решения $\mathbf{y}_0(\zeta)$ уравнений (2.1.3) и $\mathbf{z}_0(\zeta)$ уравнений (2.1.4), такие что*

$$\begin{aligned} e^{-\mu^{+}\zeta}\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) &\rightarrow \mathbf{r}^{+}, & \zeta &\rightarrow +\infty, \\ e^{\mu^{-}\zeta}\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda) &\rightarrow \mathbf{l}^{-}, & \zeta &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Эти решения аналитичны в Ω и сходимость в (2.1.5) равномерна на любом компактном подмножестве Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему, используя метод, изложенный в монографиях Coppel [35] и Coddington, Levinson [30]. Теорему докажем для $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda)$, для $\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda)$ доказательство аналогично. Обозначим $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{M}^{+\infty} - \mu^{+}\mathbf{I}$. После замены $\mathbf{v}(\zeta, \lambda) = \exp(-\mu^{+}\zeta)\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda)$ уравнение (2.1.3) перепишется в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\zeta} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{v} + \mathbf{R}(\zeta, \lambda)\mathbf{v}. \quad (2.1.6)$$

В силу предположения 4б матрица $\mathbf{B}(\lambda)$ имеет одно простое собственное значение $\nu = 0$, а остальные $m - 1$ собственные значения имеют положительную вещественную часть. Следовательно,

$$\|e^{\mathbf{B}\zeta}\| \leq C_1(\lambda)$$

для всех $\zeta < 0$, где $C_1(\lambda)$ ограничена на компактных подмножествах Ω .

Для данного ζ_0 определим линейный оператор $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\lambda)$, действующий на пространстве $C([\zeta_0, \infty])$ ограниченных непрерывных функций на $[\zeta_0, \infty]$:

$$\mathcal{F}\mathbf{v}(\zeta) = - \int_{\zeta}^{\infty} e^{(\zeta-s)\mathbf{B}(\lambda)} \mathbf{R}(s, \lambda)\mathbf{v}(s) ds.$$

Из предположения 4в следует, что если Ω_1 компактное подмножество Ω , то существует достаточно большое ζ_0 , такое что

$$\theta = \sup_{\lambda \in \Omega_1} C_1(\lambda) \int_{\zeta_0}^{\zeta} \|\mathbf{R}(s, \lambda)\| ds < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\lambda \in \Omega_1} |\mathcal{F}\mathbf{v}|(\zeta) \leq \theta \sup_{\zeta \geq \zeta_0} |\mathbf{v}(\zeta)|,$$

т. е. отображение \mathcal{F} является сжимающим на $C([\zeta_0, \infty))$ равномерно по $\lambda \in \Omega_1$. Отсюда следует (см. Соррел [35]), что при любой заданой непрерывной ограниченной вектор функции $\widehat{\mathbf{v}}(\zeta)$ интегральное уравнение

$$\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{v}} + \mathcal{F}\mathbf{v}, \quad (2.1.7)$$

имеет единственное ограниченное непрерывное решение. Легко видеть, что

$$\frac{d(\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}})}{d\zeta} = \mathbf{B}(\lambda)(\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}) + \mathbf{R}(\zeta, \lambda)\mathbf{v}.$$

Выберем в качестве $\widehat{\mathbf{v}}$ решение уравнения

$$\frac{d\widehat{\mathbf{v}}}{d\zeta} = \mathbf{B}(\lambda)\widehat{\mathbf{v}}, \quad (2.1.8)$$

тогда \mathbf{v} из (2.1.7) является C^1 решением (2.1.6). И наоборот, для любого ограниченного C^1 решения (2.1.6), функция $\widehat{\mathbf{v}}$ из (2.1.7) — ограниченное решение (2.1.8). Таким образом, имеет место непрерывное в обе стороны соответствие между ограниченными решениями (2.1.6) и ограниченными решениями (2.1.8). Легко видеть, что любое ограниченное решение (2.1.8) имеет вид

$$\widehat{\mathbf{v}}(\zeta) = c \mathbf{r}^+(\lambda),$$

где $c \in \mathbb{C}$ — произвольная постоянная. Положим далее $c = 1$, тогда имеем

$$\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) = e^{\mu^+\zeta} \mathbf{v}(\zeta, \lambda) = e^{\mu^+\zeta} (I - \mathcal{F})^{-1} \mathbf{r}^+(\lambda) = e^{\mu^+\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n \mathbf{r}^+(\lambda)$$

при $\zeta \geq \zeta_0$. Для $\zeta < \zeta_0$, $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda)$ продолжается, как решение (2.1.3). Очевидно, что $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda)$ не зависит от ζ_0 и определено для всех $\lambda \in \Omega$. Так как $\mathbf{v}(\zeta, \lambda)$ представляет собой сходящийся равномерно при $\lambda \in \Omega_1$ ряд аналитических функций, она сама является аналитической при $\lambda \in \Omega$. Предел в (2.1.5) является равномерным на компактных подмножествах Ω , так как $\theta = o(1)$ при $\zeta_0 \rightarrow \infty$. \square

ЛЕММА 2.1 (Рего, Weinstein [62]). *Если $\mathbf{y}(\zeta)$ удовлетворяет (2.1.3), а $\mathbf{z}(\zeta)$ — (2.1.4), то $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ не зависит от ζ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\frac{d\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}}{d\zeta} = (-\mathbf{z}\mathbf{M})\mathbf{y} + \mathbf{z}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = 0.$$

\square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если $\lambda_0 \in \Omega$ и решение задачи (2.1.3), (2.1.5), $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0) = o(e^{\mu^-\zeta})$ при $\zeta \rightarrow -\infty$, то λ_0 называется собственным значением.

Заметим, что в силу (2.1.5) $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) = O(e^{\mu^+\zeta})$, при $\zeta \rightarrow \infty$ для любого $\lambda \in \Omega$. Заметим также, что (2.1.5), определение 4 и лемма 2.1 означают, что $\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda) = O(e^{-\mu^-\zeta})$ для любого $\lambda \in \Omega$ и $\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda_0) = o(e^{-\mu^+\zeta})$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\{\Omega^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ –правую полуплоскость комплексной плоскости \mathbb{C} спектрального параметра λ . Будем далее предполагать, что $\Omega^+ \subseteq \Omega$.

Если $\operatorname{Re} \mu_j^\pm > 0$, $j = 2, \dots, m$, то из вышеприведенного определения λ_0 следует, что $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0)$ ($\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda_0)$) убывает при $\zeta \rightarrow -\infty$ ($\zeta \rightarrow \infty$).

Так как число собственных значений с фиксированным знаком вещественной части не может измениться, пока эти собственные значения при изменении $\lambda \in \mathbb{C}$ не пересекут множество, где вещественная часть какого-нибудь собственного числа не обращается в нуль, то очевидна следующая лемма.

ЛЕММА 2.2 (Pego, Weinstein [62]). *Число собственных значений (считая кратность) матриц $\mathbf{M}^{\pm\infty}$ имеющих отрицательную вещественную часть постоянно, если λ принадлежит одной из связанных компонент дополнения замкнутого множества*

$$S_e = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathbf{M}^{\pm\infty}(\lambda) \text{ имеет чисто мнимое собственное значение}\}.$$

2.2. Функция Эванса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функцией Эванса $D(\lambda)$ называется функция

$$D(\lambda) = \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) \cdot \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda), \quad \lambda \in \Omega.$$

В силу леммы 2.1 функция Эванса $D(\lambda)$ не зависит от ζ .

ЛЕММА 2.3. *При $\lambda \in \Omega$*

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) &\rightarrow D(\lambda) \mathbf{r}^- e^{\mu^-(\lambda)\zeta}, & \zeta \rightarrow -\infty, \\ \text{б) } \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda) &\rightarrow D(\lambda) \mathbf{l}^+ e^{-\mu^+(\lambda)\zeta}, & \zeta \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение а), утверждение б) доказывается аналогично. Произведем замену

$$\mathbf{v}(\zeta, \lambda) = e^{\mu^-\zeta} \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda), \quad \mathbf{w}(\zeta, \lambda) = e^{\mu^-\zeta} \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda).$$

Тогда имеем

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{C}(\lambda) + \mathbf{R}(\zeta, \lambda)) \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}' = -\mathbf{w}(\mathbf{C}(\lambda) + \mathbf{R}(\zeta, \lambda)),$$

где

$$\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{M}^{-\infty} - \mu^- \mathbf{I}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\widehat{\mathbf{v}}' = \mathbf{C}(\lambda) \widehat{\mathbf{v}}.$$

Ограниченное решение этого уравнения таково, что

$$\widehat{\mathbf{v}}(\zeta, \lambda) \rightarrow c(\lambda) \mathbf{r}^-, \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

Очевидно также, что $\mathbf{v}(\zeta, \lambda) \rightarrow \widehat{\mathbf{v}}(\zeta, \lambda)$ при $\zeta \rightarrow -\infty$. Следовательно,

$$\mathbf{v}(\zeta, \lambda) \rightarrow c(\lambda)\mathbf{r}^-. \quad (2.2.1)$$

Из (2.2.1) имеем

$$D(\lambda) = \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{z}_0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = c(\lambda)\mathbf{r}^- \cdot \mathbf{l}^- = c(\lambda),$$

откуда следует утверждение а) леммы. \square

Из теоремы 2.1, определения 4 и леммы 2.3 легко следует теорема.

ТЕОРЕМА 2.2 (Pego, Weinstein [62]). *Функция Эванса $D(\lambda)$ аналитична при $\lambda \in \Omega$ и $D(\lambda_0) = 0$ тогда и только тогда, когда λ_0 собственное значение в смысле определения 4.*

Так как уравнение (2.1.1) с вещественными коэффициентами имеет вещественное решение вида (2.1.2) при $\lambda \in \mathbb{R}$, то легко установить справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 2.4. *Если λ и его сопряженное $\bar{\lambda}$ лежат в Ω , то $\mathbf{M}(\zeta, \bar{\lambda}) = \overline{\mathbf{M}(\zeta, \lambda)}$, $\mathbf{y}_0(\zeta, \bar{\lambda}) = \overline{\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda)}$, $\mathbf{z}_0(\zeta, \bar{\lambda}) = \overline{\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda)}$ и $D(\bar{\lambda}) = \overline{D(\lambda)}$.*

Из леммы 2.4, в частности, следует, что функция Эванса $D(\lambda)$ вещественна при вещественных λ .

ТЕОРЕМА 2.3 (Pego, Weinstein [62]). *Предположим, что $\mathbf{M}^{\pm\infty}$ диагонализуема при больших $|\lambda|$ и что \mathbf{V}^{\pm} , соответственно, матрицы со столбцами, совпадающими с правыми собственными векторами $\mathbf{M}^{\pm\infty}$; первый столбец совпадает с \mathbf{r}^{\pm} , соответственно. Пусть $\mathbf{W}^{\pm} = (\mathbf{V}^{\pm})^{-1}$ и*

$$\mathbf{F}(\zeta, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{W}^+ \mathbf{R}(\zeta, \lambda) \mathbf{V}^+, & \zeta > 0, \\ \mathbf{W}^- \mathbf{R}(\zeta, \lambda) \mathbf{V}^-, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Предположим также, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в Ω

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(\zeta, \lambda)| d\zeta \leq C, \quad (2.2.2)$$

где C не зависит от λ ,

$$\int_{|\zeta| > \zeta_0} |\mathbf{F}(\zeta, \lambda)| d\zeta \rightarrow 0, \quad \zeta_0 \rightarrow \infty, \quad (2.2.3)$$

равномерно по λ , а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(\zeta, \lambda) \mathbf{e}_1| d\zeta \rightarrow 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (2.2.4)$$

где $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top$. Тогда при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в Ω имеем

$$\mathbf{W}^+ \mathbf{y}_0(0, \lambda) = \mathbf{W}^+ \mathbf{r}^+ + o(1) = \mathbf{e}_1 + o(1) \quad (2.2.5)$$

и

$$\mathbf{z}_0(0, \lambda) \mathbf{V}^- \mathbf{e}_1 = 1 + o(1). \quad (2.2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{W}^+(\mathbf{M}^{+\infty} - \mu^+\mathbf{I})\mathbf{V}^+$$

и

$$\mathbf{v}(\zeta, \lambda) = -\mathbf{e}_1 + e^{-\mu^+\zeta}\mathbf{W}^+\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda).$$

Тогда, так как $\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{e}_1 = 0$, то из (2.1.3) имеем

$$\mathbf{v}' = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{v} + \mathbf{F}(\zeta, \lambda)(\mathbf{v} + \mathbf{e}_1).$$

Легко видеть, что $\mathbf{v} \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$ и

$$\mathbf{v}(\zeta) = - \int_{\zeta}^{\infty} e^{(\zeta-s)\mathbf{B}(\lambda)} \mathbf{F}(s, \lambda) ((\mathbf{v}(s) + \mathbf{e}_1)) ds. \quad (2.2.7)$$

Интеграл в (2.2.7) существует в силу условия (2.2.2). Матрица $\mathbf{B}(\lambda)$ — диагональна и для ее элементов на диагонали $\operatorname{Re}(B_{kk}) \geq 0$, $k = 1, \dots, m$. В силу (2.2.3), (2.2.4) можно выбрать достаточно большое ζ_0 независимо от λ , что при $\zeta > \zeta_0$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{v}(\zeta)| \leq \sup_{s \geq \zeta_0} |\mathbf{v}(s)| \int_{\zeta_0}^{\infty} |\mathbf{F}(s, \lambda)| ds + \int_{\zeta_0}^{\infty} |\mathbf{F}(s, \lambda)\mathbf{e}_1| ds \leq \frac{1}{2} \sup_{s \geq \zeta_0} |\mathbf{v}(s)| + \int_{\zeta_0}^{\infty} |\mathbf{F}(s, \lambda)\mathbf{e}_1| ds.$$

Отсюда

$$\sup_{\zeta \geq \zeta_0} |\mathbf{v}(\zeta)| \leq 2 \int_{\zeta_0}^{\infty} |\mathbf{F}(s, \lambda)\mathbf{e}_1| ds = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Вектор-функция $\mathbf{v}(\zeta, \cdot)$ также записывается в виде

$$\mathbf{v}(\zeta) = e^{(\zeta-\zeta_0)\mathbf{B}}\mathbf{v}(\zeta_0) + \int_{\zeta}^{\zeta_0} e^{(\zeta-s)\mathbf{B}}\mathbf{F}(s, \lambda)(\mathbf{v}(s) + \mathbf{e}_1) ds.$$

Отсюда получим оценку для $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$

$$|\mathbf{v}(\zeta)| \leq C \int_{\zeta}^{\zeta_0} |\mathbf{F}(s, \lambda)| |\mathbf{v}(s)| ds + C \left(|\mathbf{v}(\zeta_0)| + \int_{\zeta}^{\zeta_0} |\mathbf{F}(s, \lambda)\mathbf{e}_1| ds \right).$$

Применяя неравенство Гронуолла–Беллмана и используя вышеприведенную оценку для $\mathbf{v}(\zeta_0)$ и (2.2.4) получим оценку

$$|\mathbf{v}(\zeta)| \leq C \exp \left(C \int_{\zeta}^{\zeta_0} |\mathbf{F}(s, \lambda)| ds \right) \left(|\mathbf{v}(\zeta_0)| + \int_{\zeta}^{\zeta_0} |\mathbf{F}(s, \lambda)\mathbf{e}_1| ds \right) = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Omega,$$

которая доказывает (2.2.5).

Для доказательства (2.2.6) положим $\mathbf{w}(\zeta) = -\mathbf{e}_1^\top + e^{\mu^-\zeta} \mathbf{z}_0(\zeta) \mathbf{V}^-$. Тогда (2.1.4) переписывается в виде

$$\mathbf{w}' + \mathbf{w}\mathbf{B}(\lambda) + (\mathbf{w} + \mathbf{e}_1^\top) \mathbf{F}(\zeta, \lambda) = 0.$$

Так как $\mathbf{r}^- \cdot \mathbf{I}^- = 1$, то $\mathbf{w}(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow -\infty$. Имеем

$$\mathbf{w}(\zeta) = - \int_{-\infty}^{\zeta} (\mathbf{w}(s) + \mathbf{e}_1^\top) \mathbf{F}(s, \lambda) e^{(\zeta-s)\mathbf{B}(\lambda)} ds,$$

откуда для достаточно больших по модулю отрицательных $\zeta_0 < \zeta$ следует оценка

$$|\mathbf{w}(\zeta)| \leq \left(\frac{C}{2} + \sup_{s \leq \zeta_0} |\mathbf{w}(s)| \int_{-\infty}^{\zeta_0} |\mathbf{F}(s, \lambda)| ds \right) \leq \frac{1}{2} \left(C + \sup_{s \leq \zeta_0} |\mathbf{w}(s)| \right),$$

откуда

$$\sup_{s \leq \zeta_0} \mathbf{w}(s) \leq C.$$

Далее положим $w_1(\zeta) = \mathbf{w}(\zeta) \cdot \mathbf{e}_1$. Так как $\mathbf{B}\mathbf{e}_1 = 0$, то

$$|w_1(\zeta)| \leq \left(C + \sup_{s \leq \zeta_0} |\mathbf{w}(s)| \right) \int_{-\infty}^{\zeta_0} |\mathbf{F}(s, \lambda) \mathbf{e}_1| ds = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Аналогично доказательству (2.2.5) можно установить, применяя неравенство Грануола–Беллмана, что для $\zeta_0 \leq \zeta \leq 0$

$$|\mathbf{w}(\zeta)| \leq C, \quad |w_1(\zeta)| \leq C \int_{-\infty}^0 |\mathbf{F}(s, \lambda) \mathbf{e}_1| ds = o(1), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Omega,$$

откуда следует (2.2.6). \square

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (Pego, Weinstein [62]). Если $\mathbf{M}^{+\infty} = \mathbf{M}^{-\infty}$ и условия теоремы 2.3 выполнены при $\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-$ (а значит при $\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^-$), то

$$D(\lambda) \rightarrow 1, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $D(\lambda) = \mathbf{z}_0(0, \lambda) \cdot \mathbf{y}_0(0, \lambda) = \mathbf{z}_0(0, \lambda) \mathbf{V}^- \cdot \mathbf{W}^+ \mathbf{y}_0(0, \lambda) = 1 + o(1)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in \Omega$. \square

ТЕОРЕМА 2.4 (Pego, Weinstein [62]). Пусть

$$\mu(\zeta, \lambda) = \begin{cases} \mu^-, & \zeta < 0, \\ \mu^+, & \zeta > 0. \end{cases}$$

Тогда для всех $\lambda \in \Omega$

$$\begin{aligned} D'(\lambda) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mathbf{M}(\zeta, \lambda) - \mu(\zeta, \lambda) \mathbf{I}] \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) d\zeta + \\ & + D(\lambda) \left[\frac{d\mathbf{I}^-}{d\lambda} \cdot \mathbf{r}^- + \mathbf{I}^+ \cdot \frac{d\mathbf{r}^+}{d\lambda} \right], \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

причем несобственный интеграл в (2.2.8) сходится. Старшие производные $\partial_\lambda^k D(\lambda)$ получаются формальным дифференцированием (2.2.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $(\cdot)_\lambda = \partial/\partial\lambda$ и для $\gamma = \mu(\zeta, \lambda)$

$$\mathbf{w}(\zeta, \lambda) = e^{\gamma\zeta} \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda), \quad \mathbf{v}(\zeta, \lambda) = e^{-\gamma\zeta} \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda).$$

Тогда имеем $D(\lambda) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$, $D'(\lambda) = \mathbf{w}_\lambda \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_\lambda$. Так как $d\mathbf{v}/d\zeta = (\mathbf{M} - \gamma)\mathbf{v}$ и $d\mathbf{w}/d\zeta = -\mathbf{w}(\mathbf{M} - \gamma)$, то

$$\frac{d\mathbf{v}_\lambda}{d\zeta} = (\mathbf{M} - \gamma)\mathbf{v}_\lambda + (\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{w}_\lambda}{d\zeta} = -\mathbf{w}_\lambda(\mathbf{M} - \gamma) - \mathbf{w}(\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda).$$

Легко поверить, что

$$\frac{d\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_\lambda}{d\zeta} = \mathbf{w}(\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{v} = -\frac{d\mathbf{w}_\lambda \cdot \mathbf{v}}{d\zeta},$$

а значит для любых $R, S > 0$ верны равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_\lambda(0, \lambda) &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_\lambda(S, \lambda) - \int_0^S \mathbf{w}(\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{v} d\zeta, \\ \mathbf{w}_\lambda \cdot \mathbf{v}(0, \lambda) &= \mathbf{w}_\lambda \cdot \mathbf{v}(-R, \lambda) - \int_{-R}^0 \mathbf{w}(\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{v} d\zeta \end{aligned}$$

или

$$D'(\lambda) = - \int_{-R}^S \mathbf{w}(\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{v} d\zeta + \mathbf{w}_\lambda \cdot \mathbf{v}(-R, \lambda) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_\lambda(S, \lambda). \quad (2.2.9)$$

Имеем (см. теорему 2.1 и лемму 2.3)

$$\mathbf{v}(\zeta, \lambda) \rightarrow \mathbf{r}^+(\lambda), \quad \mathbf{w}(\xi, \lambda) \rightarrow D(\lambda)\mathbf{I}^+(\lambda) \quad (2.2.10)$$

при $\zeta \rightarrow +\infty$ и

$$\mathbf{v}(\zeta, \lambda) \rightarrow D(\lambda)\mathbf{I}^-(\lambda), \quad \mathbf{w}(\zeta, \lambda) \rightarrow \mathbf{I}^-(\lambda) \quad (2.2.11)$$

при $\zeta \rightarrow -\infty$. Эти пределы достигаются равномерно по λ на компактных подмножествах Ω , а значит производные по λ сходятся к производным от пределов. В частности,

$$\mathbf{w}_\lambda(\zeta, \lambda) \rightarrow \mathbf{I}_\lambda^-(\lambda), \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad \mathbf{v}_\lambda(\zeta, \lambda) \rightarrow \mathbf{r}_\lambda^+, \quad \zeta \rightarrow +\infty.$$

Формула (2.2.8) получается, если в (2.2.9) независимо устремить R и S к бесконечности и воспользоваться тем фактом, что $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{z}_0 \cdot (\mathbf{M}_\lambda - \gamma_\lambda)\mathbf{y}_0(\lambda)$. Формулы для более высоких производных получаются, если продифференцировать (2.2.9)–(2.2.11) по λ и перейти к пределу при $R, S \rightarrow \infty$. \square

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (Pego, Weinstein [62]). Если $D(\lambda_0) = 0$, то

$$D'(\lambda_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda_0) \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathbf{M}(\zeta, \lambda_0) \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0) d\zeta. \quad (2.2.12)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3 (Pego, Weinstein [62]). Если $\mathbf{M}^{+\infty}(\lambda) = \mathbf{M}^{-\infty}(\lambda)$, то имеет место формула

$$D'(\lambda) = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{z}_0(\zeta, \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{M}(\zeta, \lambda) - \mu(\zeta, \lambda) \mathbf{I}) \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda) d\zeta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^-$ и $\mathbf{l}^+ = \mathbf{l}^-$. Тогда $\mathbf{r}^\pm \cdot \mathbf{l}^\pm = 1$, и второе слагаемое в (2.2.8) пропадает. \square

2.3. Спектральная устойчивость солитонов обобщенного уравнения КдФ

Рассматривается уравнение (1.1.2). Переходя к “бегущей переменной” $\zeta = x - Vt$, $V > 0$, получим уравнение для уединенной волны $\phi_V(\zeta)$:

$$-\partial_\zeta^2 \phi_V(\zeta) + V \phi_V(\zeta) - f(\phi_V(\zeta)) = 0. \quad (2.3.1)$$

Для степенной нелинейности $f(z) = z^{p+1}/(p+1)$ в уравнении (2.3.1) имеем

$$\phi_V(\zeta) = \left[\frac{1}{2} V(p+2)(p+1) \right]^{1/p} \operatorname{sech}^{2/p} \left(\frac{1}{2} \zeta p \sqrt{V} \right).$$

В силу того факта, что $\phi_V(\zeta)$ стремится к нулю при $\zeta \rightarrow \pm\infty$ имеем $\mu^\pm = \mu$, $\mu_{2,3}^\pm = \mu_{2,3}$.

В данном случае $\Omega \supset \Omega^+$ (напомним, что Ω^+ правая полуплоскость комплексной плоскости \mathbb{C} , где $\operatorname{Re} \lambda > 0$),

$$\Omega = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq -\varepsilon \}, \quad (2.3.2)$$

где ε значение, при котором еще выполняется неравенство (б) в предположении 4. Далее покажем, что

$$\operatorname{Re} \mu(\lambda) < 0 < \operatorname{Re} \mu_{2,3}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega^+, \quad (2.3.3)$$

т.е. в случае наличия собственного значения $\lambda_0 \in \Omega^+$, собственная функция $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0)$ (и также $\mathbf{z}_0(\zeta, \lambda_0)$) убывает на обеих бесконечностях.

После линеаризации уравнения (1.1.2), где $u(x, t) = \phi_V(\zeta) + v(\zeta, t)$, получим уравнение на добавки $v(\zeta, t)$:

$$\partial_t v - V \partial_\zeta v + \partial_\zeta (f'(\phi_V(\zeta))v) + \partial_\zeta^3 v = 0. \quad (2.3.4)$$

В соответствии с (2.1.2) будем искать решение (2.3.4) в виде

$$v(\zeta, t) = Y(\zeta) e^{\lambda t},$$

где

$$\partial_\zeta^3 Y + (f'(\phi_V(\zeta)) - V) \partial_\zeta Y + (\lambda + \partial_\zeta f'(\phi_V(\zeta))) Y = 0. \quad (2.3.5)$$

Сопряженное (2.3.5) уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial \zeta^3} + (f'(\phi_V(\zeta)) - V) \frac{\partial Z}{\partial \zeta} - \lambda Z = 0. \quad (2.3.6)$$

Уравнение (2.3.5) переписывается в виде динамической системы

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\zeta} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{d\zeta} &= y_3, \\ \frac{dy_3}{d\zeta} &= -(\lambda + f'(\phi_V(\zeta)))y_1 - (f'(\phi_V(\zeta)) - V)y_2,\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

где $y_1 = Y$, $y_2 = \partial Y/\partial\zeta$, $y_3 = \partial^2 Y/\partial\zeta^2$.

Динамическая система (2.3.7) переписывается в матричном виде (2.1.3), где

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(\zeta, \lambda) &= (y_1, y_2, y_3)^\top, \\ \mathbf{M}(\zeta, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(\lambda + \partial_\zeta f'(\phi_V(\zeta))) & -(f'(\phi_V(\zeta)) - V) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M}(\zeta, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{M}^\infty(\lambda) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \mathbf{M}(\zeta, \lambda),$$

Компоненты вектора \mathbf{y}_0 , удовлетворяющего (2.1.3) и (2.1.5) будем обозначать $y_{01} = Y_0$, $y_{02} = \partial Y_0/\partial\zeta$, $y_{03} = \partial^2 Y_0/\partial\zeta^2$. Компоненты вектора \mathbf{z}_0 , удовлетворяющего (2.1.4) и (2.1.5) будем обозначать

$$z_{03} = Z_0, \quad z_{0j-1} = -\partial_\zeta z_{0j} - m_{3j} Z_0(\zeta, \lambda), \quad j = 3, 2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Граничное состояние (бегущая волна) $\phi_V = \phi_V(\zeta)$ спектрально неустойчива, если существует решение $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0)$ уравнения (2.1.3) с собственным значением $\lambda_0 \in \Omega^+$. В противном случае бегущая волна $\phi_V(\zeta)$ спектрально устойчива.

Определение 6 означает, что существует быстро стремящееся к нулю (так как компоненты $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0)$ экспоненциально убывают) и растущее по времени (тоже экспоненциально с показателем $\operatorname{Re} \lambda_0$) возмущения граничного состояния $\phi_V(\zeta)$.

Собственные значения матрицы $\mathbf{M}^\infty(\lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$P(\nu) = \nu^3 - V\nu + \lambda = 0,\tag{2.3.8}$$

которое имеет три корня

$$\nu_1(\lambda) = \mu(\lambda), \quad \nu_2(\lambda) = \mu_2(\lambda), \quad \nu_3(\lambda) = \mu_3(\lambda).$$

При чисто мнимых собственных значениях $\nu = i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ имеем

$$\{S_e = \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = i(\tau^3 + \tau), \tau \in \mathbb{R}\},$$

т.е. множество S_ϵ совпадает с мнимой осью комплексной плоскости \mathbb{C} спектрального параметра.

При $\lambda = 0$

$$\mu = -\sqrt{V}, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = \sqrt{V}. \quad (2.3.9)$$

Так как собственные значения аналитичны в некоторой ϵ -окрестности U_ϵ начала координат комплексной λ -плоскости (в силу их простоты там), то имеем

$$\mu = -\sqrt{V} - \frac{\lambda}{2} + O(\lambda^2), \quad \mu_2 = \frac{\lambda}{V} + O(\lambda^2), \quad \mu_3 = \sqrt{V} + \frac{\lambda}{2V} + O(\lambda^2),$$

а значит в силу леммы 2.2 выполняется (2.3.3).

Правый и левый собственные векторы матрицы \mathbf{M}^∞ , отвечающие собственному значению $\mu(\lambda)$ имеют вид

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}(\lambda) = (\mu^2 - V, \mu, 1)/P'(\mu), \quad (2.3.10)$$

так что $\mathbf{r}(\lambda) \cdot \mathbf{l}(\lambda) = 1$. Тогда, в соответствие с леммой 2.3а

$$Y_0(\zeta, \lambda) \rightarrow D(\lambda)e^{\mu\zeta}, \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

ТЕОРЕМА 2.5. $D(\lambda) \rightarrow 1, |\lambda| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в результате асимптотической подстановки в (2.3.8) при $\lambda \rightarrow \infty$ выражения

$$\mu_i = (-\lambda)^{1/3} + \frac{\eta}{(-\lambda)^{1/3}} + o\left(\frac{1}{|\lambda|^{1/3}}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

получим, что $\eta = V/3$ и, значит

$$\mu_i = (-\lambda)^{1/3} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^{1/3}}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

т.е. имеет место три разных корня уравнения (2.3.8) (напомним, что приняты обозначения, при которых $\mu_1 = \mu$).

По аналогии с (2.3.10) имеем

$$\mathbf{r}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_j \\ \mu_j^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_j(\lambda) = (\mu_j^2 - V, \mu_j, 1)/P'(\mu_j), \quad j = 2, 3.$$

Отсюда следует, что в данном случае

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu^2 & \mu_2^2 & \mu_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2 - V}{P'(\mu)} & \frac{\mu}{P'(\mu)} & \frac{1}{P'(\mu)} \\ \frac{\mu_2^2 - V}{P'(\mu_2)} & \frac{\mu_2}{P'(\mu_2)} & \frac{1}{P'(\mu_2)} \\ \frac{\mu_3^2 - V}{P'(\mu_3)} & \frac{\mu_3}{P'(\mu_3)} & \frac{1}{P'(\mu_3)} \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{F} из теоремы 2.3, таким образом, имеет, в данном случае, вид

$$\mathbf{F} = \{F_{ik}\} = \left[-\frac{\partial f'(\phi_V(\zeta))}{\partial \zeta} - \mu_k f'(\phi_V(\zeta)) \right] / P'(\mu_i), \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (2.3.11)$$

Из (2.3.11) следует, что $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{0}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и условия Теоремы 2.3 заведомо выполнены, а значит, в силу следствия 2.1 $D(\lambda) \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow \infty$. \square

При $\lambda = 0$ собственные значения матрицы \mathbf{M}^∞ даются (2.3.9),

$$\frac{\partial^3 Y_0}{\partial \zeta^3} + (f'(\phi_V(\zeta)) - V) \frac{\partial Y_0}{\partial \zeta} + f'(\phi_V(\zeta)) Y_0 = 0, \quad Y_0 \rightarrow e^{\mu(0)\zeta}, \quad \zeta \rightarrow +\infty, \quad (2.3.12)$$

а для третьей компоненты Z_0 вектора-строки \mathbf{z}_0 при $\lambda = 0$ из (2.3.6) имеем

$$\frac{\partial^3 Z_0}{\partial \zeta^3} + (f'(\phi_V) - V) \frac{\partial Z_0}{\partial \zeta} = 0, \quad Z_0 \rightarrow \frac{1}{2V} e^{\mu(0)\zeta}, \quad \zeta \rightarrow -\infty. \quad (2.3.13)$$

Из (2.3.12), (2.3.13) и (2.3.1) следует, что существует такая постоянная $\alpha < 0$, что

$$Y_0 = \alpha \partial_\zeta \phi_V(\zeta), \quad Z_0 = \frac{\alpha \mu(0)}{2V} \phi_V(\zeta), \quad (\phi_V(\zeta), \partial_\zeta \phi_V(\zeta)) \rightarrow \frac{1}{\mu(0)\alpha} e^{\mu(0)\zeta} (1, \mu(0)), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (2.3.14)$$

Продифференцировав по λ уравнение (2.3.5) и ему сопряженное (2.3.6), получим при $\lambda = 0$ (нижний индекс λ означает дифференцирование по λ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 Y_{0,\lambda}}{\partial \zeta^3} + (f'(\phi_V(\zeta)) - V) \frac{\partial Y_{0,\lambda}}{\partial \zeta} + \frac{\partial f'(\phi_V(\zeta))}{\partial \zeta} Y_{0,\lambda} &= -Y_0, \\ \frac{\partial^3 Z_{0,\lambda}}{\partial \zeta^3} + (f'(\phi_V(\zeta)) - V) \frac{\partial Z_{0,\lambda}}{\partial \zeta} &= Z_0. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Уравнения (2.3.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_\zeta L_V Y_{0,\lambda} &= -Y_0 \\ L_V \partial_\zeta Z_{0,\lambda} &= Z_0, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

где

$$L_V = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + f'(\phi_V(\zeta)) - V.$$

Продифференцируем далее уравнение (2.3.1) по V . Имеем

$$L_V \partial_V \phi_V(\zeta) = \phi_V(\zeta),$$

то есть

$$\partial_\zeta L_V \partial_V \phi_V(\zeta) = \partial_\zeta \phi_V(\zeta). \quad (2.3.17)$$

Умножив (2.3.17) на α , сложив получившееся уравнение с первым уравнением в (2.3.16) и используя выражение для Y_0 в (2.3.14), получим

$$\partial_\zeta L_V (Y_{0,\lambda} + \alpha \partial_V \phi_V(\zeta)) = 0. \quad (2.3.18)$$

Из уравнений (2.3.18) и (2.3.1) следует

$$Y_{0,\lambda} = -\alpha \partial_V \phi_V(\zeta) + \beta \partial_\zeta \phi_V(\zeta), \quad (2.3.19)$$

где β — некоторая постоянная, определяемая асимптотикой $Y_{0,\lambda} + \alpha \partial_V \phi_V(\zeta)$ и $\partial_\zeta \phi_V(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Домножив далее (2.3.17) на $\alpha\mu/(2V)$, вычитая результат из второго уравнения в (2.3.16) и используя вторую формулу в (2.3.14), получим

$$L_V \left(\partial_\zeta Z_{0,\lambda} - \frac{\alpha\mu}{2V} \partial_V \phi_V(\zeta) \right) = 0,$$

откуда

$$Z_{0,\lambda} = \frac{\alpha\mu}{2V} \int_{-\infty}^{\zeta} \partial_V \phi_V(\zeta) d\zeta + \beta_1 \phi_V(\zeta), \quad (2.3.20)$$

где постоянная β_1 определяется асимптотикой $Z_{0,\lambda}$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Так как

$$D(\lambda) = y_{01} z_{01} + y_{02} z_{02} + y_{03} z_{03},$$

а $y_{0i} \rightarrow 0$ и $z_{0i} \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$ при $\lambda = 0$ и $\zeta \rightarrow \pm\infty$, то $D(0) = 0$. Из вида матрицы $\mathbf{M}(\zeta, \lambda)$ в данном случае, (2.2.12) и (2.3.14), (2.3.19), (2.3.20), имеем

$$D'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_0(\zeta, 0) Y_0(\zeta, 0) d\zeta = \frac{\alpha^2 \mu(0)}{2V} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_V(\zeta) \partial_\zeta \phi_V(\zeta) d\zeta = 0,$$

а

$$\begin{aligned} D''(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (Z_{0,\lambda} Y_0 + Z_0 Y_{0,\lambda}) d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\alpha\mu(0)}{2V} \int_{-\infty}^{\zeta} \partial_V \phi_V(\zeta) d\zeta + \beta_1 \phi_V(\zeta) \right) \alpha \partial_\zeta \phi_V(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\mu(0)}{2V} (-\alpha \partial_V \phi_V(\zeta) + \beta \partial_\zeta \phi_V(\zeta)) \phi_V(\zeta) \right] d\zeta = \\ &= -\frac{\alpha^2 \mu(0)}{2V} \frac{d}{dV} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_V^2(\zeta) d\zeta = -\frac{\alpha^2 \mu(0)}{V} \frac{d}{dV} Q(\phi_V). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\text{sign } D''(0) = \text{sign } \frac{d}{dV} Q(\phi_V). \quad (2.3.21)$$

В силу теоремы 2.5 и (2.3.21) функция $D(\lambda)$ заведомо меняет знак на положительной вещественной полуоси (а значит обращается там в ноль), когда

$$\text{sign } \frac{d}{dV} Q(\phi_V) < 0.$$

Если

$$f(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1},$$

то

$$\phi_V(\zeta) = \hat{\alpha} \text{sech}^{2/p}(\hat{\gamma}\zeta),$$

где в соответствии с формулой в начале данного параграфа, дающей выражение для $\phi_V(\zeta)$

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{1}{2} V(p+1)(p+2) \right]^{1/p}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{2} p \sqrt{V}.$$

Имеем (см. Pego, Weinstein [62])

$$Q^{-1}(\phi_V) \frac{d}{dV} Q(\phi_V) = \frac{d}{dV} (2 \ln \hat{\alpha} - \ln \hat{\gamma}) = \frac{2}{pV} - \frac{1}{2V}$$

и значит для $p > 4$ заведомо имеет место по крайней мере одно неустойчивое собственное значение и $\phi_V(\zeta)$ — неустойчивое решение.

2.4. Спектральная устойчивость фронтов обобщенного уравнения КдФ–Бюргерса

Рассмотрим обобщенное уравнение КдФ–Бюргерса

$$\partial_t u + \partial_x f(u) + \partial_x^3 u = \kappa \partial_x^2 u, \quad (2.4.1)$$

где постоянная $\kappa > 0$ и функция f строго выпукла. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.6 (Pego, Weinstein [62]). *Для любых $\kappa > 0, V > 0$, имеет место решение (2.4.1) типа бегущей волны $u(x, t) = \phi_V(\zeta)$, $\zeta = x - Vt$ с точностью до сдвига, которое удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению*

$$-\frac{d^2 \phi_V(\zeta)}{d\zeta^2} + \kappa \frac{d\phi_V(\zeta)}{d\zeta} + V\phi_V(\zeta) - f(\phi_V(\zeta)) = 0, \quad (2.4.2)$$

а также условиям на бесконечности

$$\phi_V(\zeta) \rightarrow \begin{cases} 0, & \zeta \rightarrow +\infty, \\ \phi_L, & \zeta \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

где постоянная ϕ_L — единственное положительное решение уравнения $f(\phi_L) = V\phi_L$. При $\zeta \rightarrow +\infty$

$$\phi_V(\zeta) \sim \beta e^{r\zeta}, \quad \frac{d\phi_V}{d\zeta}(\zeta) \sim \beta r e^{r\zeta}, \quad \beta > 0,$$

где

$$r = \frac{1}{2}(\kappa - \sqrt{\kappa^2 + 4V}) < 0.$$

При $\kappa \geq 2\sqrt{f'(\phi_L) - V}$, $\phi_V(\zeta)$ убывает монотонно, а при $\kappa < 2\sqrt{f'(\phi_L) - V}$, $\phi_V(\zeta) - \phi_L$ экспоненциально убывает до нуля осциллирующим образом при $\zeta \rightarrow -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим динамическую систему, эквивалентную уравнению (2.4.2):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_V(\zeta)}{d\zeta} &= \chi_V(\zeta), \\ \frac{d\chi_V(\zeta)}{d\zeta} &= V\phi_V(\zeta) - f(\phi_V(\zeta)) + \kappa\chi_V(\zeta). \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Система уравнений (2.4.3) имеет две особые точки $(0, 0)$ — седло и $(\phi_L, 0)$ — либо узел либо неустойчивый фокус. Рассмотрим выражение

$$E(\phi_V, \chi_V) = \frac{1}{2}\chi_V^2 - \frac{1}{2}V\phi_V^2 + \int_0^{\phi_V} f(z) dz$$

При $\kappa = 0$ для $E(\phi_V) = 0$ на гомоклинической кривой, двоякоасимптотической к особой точке $(0, 0)$. Эта кривая соответствует солитону — решению уравнения КдФ. Для особой точки $(\phi_L, 0)$, $E(\phi_L, 0) < 0$, так как в этом случае

$$\frac{1}{2}f(\phi_L)\phi_L - \int_0^{\phi_L} f(z) dz > 0$$

в силу выпуклости $f(u)$. Таким образом, всюду внутри гомоклинической кривой, где имеют место замкнутые фазовые кривые, соответствующие периодическим решениям уравнения КдФ, $E(\phi_V, \chi_V) < 0$. При $\kappa > 0$, $\kappa \rightarrow 0$ гомоклиническая траектория разрывается и устойчивое многообразие точки $(0, 0)$ где $\phi_L \geq 0$ “захватывается” областью $E(\phi_V, \chi_V) < 0$. В силу того факта, что

$$\frac{dE(\phi_V(\zeta), \chi_V(\zeta))}{d\zeta} = \kappa\chi_V^2(\zeta) \geq 0$$

величина $E(\phi_V(\zeta), \chi_V(\zeta))$ не убывает вдоль траектории, лежащей в области $E(\phi_V(\zeta), \chi_V(\zeta)) < 0$ при уменьшении ζ и траектория лежит в ограниченной области. Фазовая траектория должна приближаться к особой точке $(\phi_L, 0)$ и существует единственная траектория соединяющая точки $(0, 0)$, $(\phi_L, 0)$. Картина кривых на фазовой плоскости не изменяется при возрастании величины κ .

Последнее утверждение теоремы 2.6 легко следует из того факта, что в окрестности $\zeta = -\infty$

$$\phi_V = \phi_L + e^{s\zeta}, \quad \chi_V = se^{s\zeta}, \quad s = \frac{\kappa}{2} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - (f'(\phi_L) - V)}.$$

Заметим что в силу выпуклости $f(u)$ выполняется неравенство $f'(\phi_L) - V > 0$, так что, действительно при $\kappa \geq 2\sqrt{f'(\phi_L) - V}$ профиль фронта ϕ_V монотонен, а при $\kappa < 2\sqrt{f'(\phi_L) - V}$ осциллирует при $\zeta \rightarrow -\infty$ (см. Fig. 1 в статье *Pego et al.* [63]). \square

Предположим далее, что

$$f(z) = \frac{z^{p+1}}{p+1}, \quad p \geq 1,$$

ϕ_L в этом случае равно $[V(p+1)]^{1/p}$, а $f'(\phi_L) = V(p+1)$. Линеаризуем уравнение (2.4.1) вокруг решения $\phi_V(\zeta)$ типа фронта, т. е. положим $u(x, t) = \phi_V(\zeta) + v(\zeta, t)$:

$$\partial_t v = A_\kappa v, \quad A_\kappa = \partial_\zeta[-\partial_\zeta^2 + \kappa\partial_\zeta + V - \phi_V^p(\zeta)]. \quad (2.4.4)$$

Будем искать решение (2.4.4) в виде $v(\zeta, t) = Y(\zeta)e^{\lambda t}$. Тогда получим

$$A_\kappa Y(\zeta) = \lambda Y(\zeta). \quad (2.4.5)$$

При $\zeta \rightarrow +\infty$

$$A_\kappa(\zeta) \rightarrow A_\kappa^{+\infty}, \quad A_\kappa^{+\infty} = \partial_\zeta[-\partial_\zeta^2 + \kappa\partial_\zeta + V];$$

при $\zeta \rightarrow -\infty$

$$A_\kappa(\zeta) \rightarrow A_\kappa^{-\infty}, \quad A_\kappa^{-\infty} = \partial_\zeta[-\partial_\zeta^2 + \kappa\partial_\zeta + V - \phi_L^p].$$

Множество $S_e^\pm = S^+ \cup S^-$ принадлежит непрерывному спектру оператора $A_\kappa(\zeta)$ и, очевидно, определяется следующим образом

$$S_e^\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A_\kappa^{\pm\infty} \text{ имеет мнимое собственное значение}\},$$

где

$$\begin{aligned} S_e^+ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = -\kappa\tau^2 + i\tau(\tau^2 + V), \tau \in \mathbb{R}\}, \\ S_e^- &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = -\kappa\tau^2 + i\tau(\tau^2 + V - \phi_L^p), \tau \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.4.5) и ему сопряженное могут быть записаны в виде уравнений (2.1.3), (2.1.4). Матрица \mathbf{M} в данном случае имеет вид

$$\mathbf{M}(\zeta, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda - \partial_\zeta \phi_V(\zeta)^p & V - \phi_V(\zeta)^p & \kappa \end{pmatrix}.$$

Решения этих уравнений \mathbf{y}_0 и \mathbf{z}_0 дополнительно удовлетворяют граничным условиям (2.1.5). Компоненты векторов \mathbf{y}_0 и \mathbf{z}_0 определяются так же, как и в предыдущем параграфе.

Собственные значения матрицы $\mathbf{M}^{+\infty}(\lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$P^+(\nu) = \nu^3 - \kappa\nu^2 - V\nu + \lambda = 0, \quad (2.4.6)$$

а собственные значения матрицы $\mathbf{M}^{-\infty}$ — уравнению

$$P^-(\nu) = \nu^3 - \kappa\nu^2 + pV\nu + \lambda = 0. \quad (2.4.7)$$

Уравнения (2.4.6), (2.4.7) при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ имеют по три корня μ_j^\pm , $j = 2, 3$. Область $\Omega \supset \Omega^+$ определяется также, как в предыдущем параграфе, где ε зависит от κ , V и p .

ЛЕММА 2.5. При $\lambda \in \Omega^+$ для собственных значений s выполняется аналог неравенства (2.3.3)

$$\operatorname{Re} \mu^\pm(\lambda) < 0 < \operatorname{Re} \mu_{2,3}^\pm(\lambda). \quad (2.4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в Ω все собственные значения $\mathbf{M}^{\pm\infty}$ — аналитические функции λ , а значит в силу (2.3.2) они аналитичны в окрестности начала координат. В соответствии с леммой 2.2, число вещественная часть собственных значений $\mathbf{M}^{\pm\infty}(\lambda)$ может измениться только при переходе λ через непрерывный спектр, пересечение которого с Ω^+ пусто. Отсюда следует, что достаточно проверить знак вещественной части собственных значений $\mathbf{M}^{\pm\infty}$ только в окрестности $\lambda = 0$ при $\lambda \in \mathbb{R}^+$. При $\lambda = 0$ из (2.4.6), (2.4.7) следует

а) $\mu^+(0) = 0.5(\kappa - \sqrt{\kappa^2 + 4V}) < 0$, $\mu_2^+ = 0$, $\mu_3^+ = 0.5(\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 4V}) > 0$. Имеем из (2.4.6)

$$V \frac{d\mu_2^+}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 1,$$

значит при $\lambda > 0$ знак μ_2^+ — положительный;

б) $\mu^-(0) = 0$, $\mu_j^- = 0.5(\kappa \pm i\sqrt{4pV - \kappa^2})$. Имеем из (2.4.7)

$$pV \frac{d\mu_-}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = -1,$$

откуда $\mu_-(\lambda)$ при малых $\lambda > 0$ — отрицательно.

Таким образом, имеет место (2.4.8). Заметим, что в этом случае (как и в случае уравнения КдФ, разобранным в предыдущем параграфе), собственные функции Y_0 и Z_0 , соответствующие собственным значениям $\lambda_0 \in \Omega^+$ экспоненциально убывают при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. \square

Устойчивость граничного состояния $\phi_V(\zeta)$ также понимается в смысле определения 6.

ЛЕММА 2.6 (Pego, Weinstein [62]). Правая полуплоскость Ω^+ может содержать только изолированные собственные значения оператора A_κ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $S_e^\pm \cap \Omega^+ = \emptyset$. В соответствии с теоремой А2 из главы 5 книги Henry [44] правая полуплоскость либо полностью состоит из собственных значений (им отвечает, в силу леммы 2.4 убывающие и интегрируемые в квадрате функции $Y_0(\zeta)$; аналогичный случай разобрал, например, в статье Shargatov *et al.* [65], либо его пересечение с непрерывным спектром равно пустому множеству. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ и достаточно велико. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0^2 d\zeta &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0 \left(-\frac{d^3 Y}{d\zeta^3} + \kappa \frac{d^2 Y_0}{d\zeta^2} + V \frac{dY_0}{d\zeta} - \frac{d}{d\zeta} (\phi_V(\zeta)^p Y_0) \right) d\zeta = \\ &= -\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dY_0}{d\zeta} \right)^2 d\zeta - \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0^2 \phi_V(\zeta)^{p-1} \frac{d\phi_V(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0^2 d\zeta < \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда, $Y_0 = 0$. Таким образом, область Ω^+ не состоит полностью из собственных значений. \square

В данном случае имеем

$$\mathbf{r}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^+ \\ \mu^{+2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^- = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^- \\ \mu^{-2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{l}^+ = (\mu^+(\mu^+ - \kappa) - V, \mu^+ - \kappa, 1)/P^{+'}(\mu^+), \quad \mathbf{l}^- = (\mu^-(\mu^- - \kappa) - V, \mu^- - \kappa, 1)/P^{-'}(\mu^-). \quad (2.4.9)$$

ТЕОРЕМА 2.7 (Pego, Weinstein [62]; Pego *et al.* [63]). *Если $\phi_V(\zeta)$ — монотонно убывающий фронт, то $D(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \Omega^+$. Также для всех $\kappa > 0$, $D(0) = 0$, $D'(0) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\lambda_0 \in \Omega^+$ и $D(\lambda_0) = 0$. Тогда уравнение (2.4.5) имеет решение $Y_0(\zeta)$, которое экспоненциально убывает вместе со всеми своими производными при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и дает после интегрирования

$$\lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0(s) ds = 0.$$

Таким образом, функция

$$W(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} Y_0(s) ds$$

также экспоненциально убывает вместе со своими производными при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Поэтому функция $W(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda_0 W = (-\partial_\zeta^2 + \kappa \partial_\zeta + V - \phi_V(\zeta)^p) \partial_\zeta W. \quad (2.4.10)$$

Имеем, с учетом (2.4.10)

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re} \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} W \bar{W} d\zeta &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{d^3 W}{d\zeta^3} + \kappa \frac{d^2 W}{d\zeta^2} + V \frac{dW}{d\zeta} - \phi_V(\zeta)^p \right) \bar{W} d\zeta = \\ &= -\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dW}{d\zeta} \right|^2 d\zeta + \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_V(\zeta)^{p-1} \frac{d\phi_V}{d\zeta} |W|^2 d\zeta \leq 0, \end{aligned}$$

так как для монотонной функции

$$\frac{d\phi_V(\zeta)}{d\zeta} \leq 0.$$

Указанное противоречие доказывает первое утверждение теоремы 2.7. \square

При $\lambda = 0$ имеем из (2.1.5), (2.4.9) (2.4.10) и сопряженного уравнения, которому удовлетворяет функция $Z_0(\zeta)$ при $\lambda = 0$

$$\left(-\frac{d^2}{d\zeta^2} - \kappa \frac{d}{d\zeta} + V - \phi_V(\zeta)^p \right) \frac{dZ_0}{d\zeta} = 0$$

имеем

$$Y_0(\zeta, \lambda) = \frac{1}{\beta\mu^+(0)} \frac{d\phi_V(\zeta)}{d\zeta}, \quad Z_0(\zeta, \lambda) = \frac{1}{P^{-'}(0)} = \frac{1}{pV}. \quad (2.4.11)$$

Отсюда $D(0) = 0$. Из (2.2.12) и (2.4.11) следует, что

$$D'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_0(\zeta, 0)Y_0(\zeta, 0) d\zeta = \frac{1}{\beta\mu^+(0)pV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_V(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = -\frac{\phi_L}{\beta\mu^+(0)pV} \neq 0.$$

□

ТЕОРЕМА 2.8 (Pego *et al.* [63]). *При $\kappa > 0$, $D(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Omega$, равномерно по $\kappa \in [a, b]$, для любых $a, b > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что матрицы $\mathbf{M}^{\pm\infty}(\lambda)$ диагонализуются. Действительно, пусть

$$\mathbf{V}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu^{\pm} & \mu_2^{\pm} & \mu_3^{\pm} \\ \mu^{\pm 2} & \mu_2^{\pm 2} & \mu_3^{\pm 2} \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{W}^{\pm}(\lambda)$ — матрица, где строками являются векторы \mathbf{I}^{\pm} и \mathbf{I}_j^{\pm} , $j = 2, 3$. Тогда $\mathbf{W}^{\pm}\mathbf{V}^{\pm} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{W}^{\pm}\mathbf{M}^{\pm\infty}\mathbf{V}^{\pm} = \text{diag}(\mu^{\pm}, \mu_2^{\pm}, \mu_3^{\pm})$. Имеем (см. теорему 2.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^+(\zeta, \lambda) &= \mathbf{W}^+\mathbf{R}\mathbf{V}^+, & \zeta > 0, \\ \mathbf{F}^-(\zeta, \lambda) &= \mathbf{W}^-\mathbf{R}\mathbf{V}^-, & \zeta < 0, \end{aligned}$$

а компоненты матриц $\mathbf{F}^{\pm}(\zeta, \lambda)$ даются равенствами

$$\mathbf{F}_{ik}^{\pm} = [\rho_0(\zeta) + \mu_k^{\pm}\rho_1^{\pm}(\zeta)]/P_i^{\pm'}(\lambda), \quad i, k = 1, 2, 3,$$

где

$$\rho_0(\zeta) = -\frac{d\phi_V(\zeta)^p}{d\zeta}, \quad \rho_1^+(\zeta) = -\phi_V(\zeta)^p, \quad \rho_1^-(\zeta) = (p+1)V - \phi_V(\zeta)^p.$$

Напомним, что в наших обозначениях $\mu_1^{\pm}(\lambda) = \mu^{\pm}(\lambda)$.

По аналогии с доказательством теоремы 2.5 предыдущего параграфа, имеем

$$\mu_i^{\pm} = (-\lambda)^{1/3} + \frac{1}{3}\kappa + O(|\lambda|^{-1/3}) \quad (2.4.12)$$

Из (2.4.12) очевидно, что $\mathbf{F}_{ik}^{\pm} \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, а значит, в силу теоремы 2.3 при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^+\mathbf{y}_0(0, \lambda) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{o}(1), \\ \mathbf{z}_0(0, \lambda)\mathbf{V}^-\mathbf{e}_1 &= 1 + \mathbf{o}(1). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Также из (2.4.12) следует

$$\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-(\mathbf{I} + \mathbf{o}(1)) \quad (2.4.14)$$

Из (2.4.13) и (2.4.14) имеем

$$\mathbf{z}_0(0, \lambda) \mathbf{V}^+ \mathbf{e}_1 = 1 + o(1).$$

Откуда

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \mathbf{z}_0(0, \lambda) \cdot \mathbf{y}_0(0, \lambda) = \mathbf{z}_0(0, \lambda) \mathbf{V}^+ \cdot \mathbf{W}^+ \mathbf{y}_0(0, \lambda) = \\ &= \mathbf{z}_0(0, \lambda) \mathbf{V}^- \cdot \mathbf{W}^+ \mathbf{y}_0(0, \lambda) + o(1) = 1 + o(1), \end{aligned}$$

ч.т.д. \square

В силу теоремы 2.2 $D(\lambda)$ — аналитическая функция при $\lambda \in \Omega$. В силу определения области Ω (2.3.2) мнимая ось

$$\mathcal{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = 0\}$$

принадлежит Ω . В силу теоремы 2.8 функция Эванса $D(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Omega$ и, в том числе, при $\lambda \in \mathcal{T}$. В силу изложенного, применима теорема, выражающая принцип аргумента из комплексного анализа (см. Шабат [13]), где областью аналитичности функции $D(\lambda)$ является правая полуплоскость комплексной плоскости $\Omega^+ \subset \Omega$, а границей Ω^+ , проходимой против часовой стрелки — мнимая ось \mathcal{T} , проходима от $+i \cdot \infty$ до $-i \cdot \infty$. Так как, в силу леммы 2.4 $\overline{D(\lambda)} = D(\overline{\lambda})$, то достаточно ограничиться положительной полуосью \mathcal{T} и число нулей n^+ функции $D(\lambda)$ (а, стало быть, число неустойчивых собственных значений) удовлетворяет равенству

$$n^+ = \frac{1}{\pi} [\arg D(-i \cdot 0) - \arg D(+i \cdot \infty)] - \frac{1}{2},$$

где n^+ — число нулей $D(\cdot)$ внутри замкнутого контура \mathcal{T} , проходимого против часовой стрелки (сверху вниз), Pego *et al.* [63] ($1/2$ возникает в этой формуле потому, что точка 0 является нулем $D(\lambda)$, лежащим на границе \mathcal{T}). Число нулей также равно числу оборотов образа полуоси \mathcal{T} , $D(\mathcal{T})$ вокруг начала координат на комплексной λ -плоскости.

В статье Pego *et al.* [63] авторы численно находили $D(\lambda)$ на достаточно большом отрезке мнимой полуоси \mathcal{T} , численно решая там обыкновенные уравнения (2.1.3) и (2.1.4) с граничными условиями (2.1.5). Авторы этой статьи, без ограничения общности рассуждений, рассматривали случай $V = 1$. Было установлено, что неустойчивыми являются осциллирующие фронты для $p > 4$ (им, кстати соответствуют неустойчивые солитоны уравнения КдФ, рассмотренные в предыдущем параграфе), например, при κ меньших 0.074 для $p = 6$, причем неустойчивость имеет осциллирующий характер, а комплексно сопряженные неустойчивые собственные значения приходят парами в правую полуплоскость Ω^+ при уменьшении κ , пересекая мнимую ось \mathcal{T} . Получена также эмпирическая формула (на основании численных расчетов) для $\kappa_j = \kappa_j(p)$, когда $j + 1$ пара неустойчивых собственных значений приходит в Ω^+ . Детали смотрите в статье Pego *et al.* [63].

2.5. Функция Эванса в случае двух мод. Внешние формы

Рассмотрим случай, когда имеются два собственных значения матрицы $\mathbf{M}^{\pm\infty}(\zeta, \lambda)$, μ_1^\pm , μ_2^\pm с отрицательной мнимой частью (соответствующим убывающим модам при $\zeta \rightarrow +\infty$) при $\lambda \in \Omega^+$. В задачах такого рода будем полагать $\Omega = \Omega^+$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. $S_e \cap \Omega = \emptyset$.

Из предположения 5 следует, что при $\lambda \in \Omega$ число собственных значений μ_k , $k = 1, 2$, сохраняется. При числе собственных значений с отрицательной мнимой частью больше двух весь анализ аналогичен рассматриваемому случаю (см., например, обзор Ильичев [4], где таких собственных значений три).

Рассмотрим линейную динамическую систему (2.1.3), где $\mathbf{M}(\zeta, \lambda)$ — $(n \times n)$ -матрица. Отсюда следует, что

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k^n \end{pmatrix}$$

при $k = 1, 2$ — n -мерный вектор. Одновременно, рассмотрим сопряженную систему (2.1.4), где $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\zeta, \lambda)$ — n -мерный вектор-строка.

Будем искать решения \mathbf{y}_k уравнения (2.1.3) и \mathbf{z}_k уравнения (2.1.4) для $k = 1, 2$ такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} e^{-\mu_k^+(\lambda)\zeta} \mathbf{y}_k(\zeta, \lambda) &= \mathbf{r}_k^+(\lambda), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{\mu_k^-(\lambda)\xi} \mathbf{z}_k(\xi, \lambda) &= \mathbf{l}_k^-(\lambda), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$\lambda \in \Omega$, $\mathbf{r}_k^\pm \cdot \mathbf{l}_k^\pm = 1$, $k = 1, 2$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 6. Векторы $\mathbf{y}_1(\zeta, \lambda)$ и $\mathbf{y}_2(\zeta, \lambda)$ аналитичны при $\lambda \in U^\epsilon$, где $U^\epsilon \subset \mathbb{C}$ некоторая окрестность начала координат $\lambda = 0$.

Рассмотрим векторное поле $\mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda)$, с компонентами

$$y_{i\wedge j}^\wedge = y_1^i y_2^j - y_1^j y_2^i, \quad (2.5.2)$$

при $i < j$, $i, j = 1, \dots, n$. Таким образом, $y_{i\wedge j}^\wedge$ является 2×2 определителем i -го и j -го столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 \\ y_1^2 & y_2^2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ y_1^n & y_2^n \end{pmatrix}.$$

Для компонент $z_{i\wedge j}^\wedge$ имеют место равенства (2.5.2), где вместо компонент $y_{1,2}^i$ стоят компоненты $z_{1,2}^i$.

Простыми алгебраическими вычислениями устанавливается справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 2.7 (Alexander, Sachs [16]). *Справедливо равенство*

$$\mathbf{z}^\wedge \cdot \mathbf{y}^\wedge = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.3)$$

Формально полученное равенство (2.5.3), очевидно, справедливо при $\lambda \in U^\epsilon$.

Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.8 (Alexander, Sachs [16]). *Вектор \mathbf{y}^\wedge удовлетворяет линейной динамической системе*

$$\mathbf{y}^{\wedge'} = \mathbf{M}^\wedge \mathbf{y}^\wedge \quad (2.5.4)$$

и аналогично

$$\mathbf{z}^{\wedge'} = -\mathbf{z}^\wedge \mathbf{M}^\wedge. \quad (2.5.5)$$

где $\mathbf{M}^\wedge = \mathbf{M}^\wedge(\zeta, \lambda)$ — некоторая матрица. Системы уравнений (2.5.4), (2.5.5) называются внешними системами.

Если

$$\mathbf{M} = \{m_{i,j}\}, \quad \mathbf{M}^\wedge = \{m_{i \wedge j, i' \wedge j'}^\wedge\},$$

$i < j, i' < j'$, то дифференцированием (2.5.2) и аналогичное равенство для $z_{i \wedge j}^\wedge$ получим, что матрица \mathbf{M}^\wedge имеет следующую структуру.

ЛЕММА 2.9 (Alexander, Sachs [16]). *Компоненты $m_{i \wedge j, i' \wedge j'}^\wedge$ матрицы \mathbf{M}^\wedge равны:*

$$\begin{cases} m_{i,i'}, & \text{если } j = j', i \neq i', \\ -m_{i,j'}, & \text{если } i' = j, i \neq j', \\ -m_{j,i'}, & \text{если } i = j', i \neq j, \\ m_{j,j'}, & \text{если } i = i', j \neq j', \\ m_{i,i'} + m_{j,j'}, & \text{если } i = i', j = j', \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.10. *Матрицы $\mathbf{M}^{\wedge \pm \infty} = \lim_{\zeta \rightarrow \pm \infty} \mathbf{M}^\wedge$ имеют собственными значениями*

$$\mu_{i \wedge j}^{\wedge \pm} = \mu_i^\pm(\lambda) + \mu_j^\pm(\lambda), \quad i < j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n.$$

Обозначим $\mu^{\wedge \pm} = \mu_1^\pm + \mu_2^\pm$. Тогда имеем

$$\operatorname{Re} \mu^{\wedge \pm} < \operatorname{Re} \mu_{i \wedge j}^{\wedge \pm}, \quad i < j, \quad i \wedge j \neq 1 \wedge 2, \quad \lambda \in \Omega. \quad (2.5.6)$$

Так как векторы $\mathbf{y}_{1,2}(\zeta, \lambda)$ и $\mathbf{z}_{1,2}(\zeta, \lambda)$ удовлетворяют граничным условиям (2.5.1), то векторы $\mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda)$ и $\mathbf{z}^\wedge(\zeta, \lambda)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

ЛЕММА 2.11 (Alexander, Sachs [16]).

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} e^{-\mu^{\wedge+}(\lambda)\zeta} \mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda) &= \mathbf{r}^{\wedge+}(\lambda), \\ \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} e^{\mu^{\wedge-}(\lambda)\zeta} \mathbf{z}^\wedge(\zeta, \lambda) &= \mathbf{l}^{\wedge-}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

где $\mathbf{r}^{\wedge+}(\lambda)$ и $\mathbf{l}^{\wedge-}(\lambda)$ правый и левый собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\mu^{\wedge+}$ и $\mu^{\wedge-}$ соответственно.

Таким образом, из (2.5.4)–(2.5.7) следует, что справедливо предположение 4, а для векторов $\mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda)$ и $\mathbf{z}^\wedge(\zeta, \lambda)$ справедлива теорема 2.1 и эти векторы аналитичны при $\lambda \in \Omega$ (напомним, что $\Omega = \Omega^+$ в рассматриваемом случае).

Определим функцию Эванса $D(\lambda)$ в данном случае, как

$$D(\lambda) = \mathbf{z}^\wedge(\zeta, \lambda) \cdot \mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda). \quad (2.5.8)$$

Очевидно, $D(\lambda)$ аналитична при $\lambda \in \Omega$. Из леммы 2.3 тогда следует, что если $D(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 \in \Omega$, то

$$\mathbf{y}^\wedge = o(e^{\mu^\wedge - \zeta}), \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

Более того, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.9. *При $\lambda_0 \in \Omega$, $D(\lambda_0) = 0$ тогда и только тогда, когда существует собственная функция $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0) = c_1 \mathbf{y}_1(\zeta, \lambda_0) + c_2 \mathbf{y}_2(\zeta, \lambda_0)$ экспоненциально убывающая при $\zeta \rightarrow \pm\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в статье Alexander, Sachs [16], докажем утверждение этой теоремы для $\lambda_0 \in U^\epsilon \cap \Omega$, где $\mathbf{y}_{1,2}(\zeta, \lambda)$ хорошо определены и справедлива формула (2.5.3). Для $\lambda \in \Omega$ вне U^ϵ см. статью Alexander *et al.* [17].

Если $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda)$ экспоненциально убывает при $\zeta \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{z}_k(\zeta, \lambda_0) \cdot \mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0) = \mathbf{z}_k(\zeta, \lambda_0) \cdot (c_1 \mathbf{y}_1(\zeta, \lambda_0) + c_2 \mathbf{y}_2(\zeta, \lambda_0)) = 0, \quad k = 1, 2,$$

а значит, два столбца матрицы в (2.5.3) линейно зависимы, и наоборот. \square

Заметим, что собственная функция $\mathbf{y}_0(\zeta, \lambda_0)$ удовлетворяет уравнению (2.1.3).

2.6. Неустойчивость уединенных волн относительно неплоских возмущений на эластике Эйлера

В настоящем параграфе установлена неустойчивость петлевого солитона относительно трехмерных возмущений (нелинейная орбитальная устойчивость элаستيку относительно плоских возмущений, лежащих в плоскости главного изгиба рассматривалась в параграфе 1.4). Динамика стержня описывается уравнениями (2.6.4), в которых учитывается кручение. Используется малость вращательной части кинетической энергии по сравнению с полной энергией стержня. В силу этого обстоятельства в линеаризованном уравнении слагаемые, отвечающие вращательной кинетической энергии считаются имеющими второй порядок малости и, следовательно, не учитываются. Уравнение (2.6.11) для определения неустойчивой собственной функции имеет такой же вид как соответствующее уравнение в статье Alexander, Sachs [16], однако потенциал p^0 в этом уравнении отличен от потенциала в этой статье, что приводит к нетривиальному анализу и отличию функций Эванса в обоих случаях (см. P'ichev [48]; Ильичев, Томашпольский [6]).

2.6.1. Основные уравнения. Выберем декартову систему координат $\mathbf{x}=(x, y, z)$. Будет рассматриваться пространственная кривая $\mathcal{G}(t)$, которая является серединой кривой призматического, динамически симметричного (главные моменты инерции равны) и нерастяжимого стержня. Кривая $\mathcal{G}(t)$ параметризована длиной дуги ξ . Предположим, что в начальный момент времени эта кривая совпадает с осью z . Положение

кривой может изменяться со временем, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$. В каждой точке кривой определим базис $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$, где $\mathbf{d}_3 = \partial \mathbf{x} / \partial \xi$ и $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ — единичные векторы в плоскости, ортогональной \mathbf{d}_3 . Тройка векторов $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ образует правосторонний ортонормальный базис в каждой точке $\mathcal{G}(t)$. Углы Эйлера θ, ψ и φ при движении стержня зависят от ξ и t ; θ является углом между осью z и касательным вектором \mathbf{d}_3 , угол ψ измеряет отклонение кривой $\mathcal{G}(t)$ от главной плоскости изгиба (x, z) , а φ — угол кручения (см. Figure 1 в статье Coleman *et al.* [34]). Касательный вектор $\mathbf{d}_3(\xi, t)$ имеет компоненты τ_2, τ_3, τ_1 :

$$\tau_1 = \cos \theta, \quad \tau_2 = \cos \psi \sin \theta, \quad \tau_3 = \sin \psi \sin \theta.$$

Выражения для $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ через углы θ, ψ и φ даны в статье Coleman *et al.* [34]. Наряду с “захваченным” базисом $\{\mathbf{d}_i\}$, $i = 1, 2, 3$, рассмотрим ортонормальный базис $\{\tilde{\mathbf{d}}_i\}$, который получается вращением по часовой стрелке пары векторов $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ вокруг \mathbf{d}_3 на угол кручения φ , т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}_1 &= (\cos \varphi) \mathbf{d}_1 - (\sin \varphi) \mathbf{d}_2, \\ \tilde{\mathbf{d}}_2 &= (\sin \varphi) \mathbf{d}_1 + (\cos \varphi) \mathbf{d}_2, \\ \tilde{\mathbf{d}}_3 &= \mathbf{d}_3 \end{aligned}$$

(см., например, статью Coleman *et al.* [34]).

В модели динамики стержня Кирхгоффа полная сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\xi, t)$ и полный момент $\mathbf{M}t = \mathbf{M}t(\xi, t)$ разлагаются по базису \mathbf{d}_i : $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{d}_i$, $\mathbf{M}t = \sum_{i=1}^3 M t_i \mathbf{d}_i$. Уравнение состояния линейной упругости до членов порядка $O(S/R^2)$ (S — площадь поперечного сечения и R — радиус кривизны $\mathcal{G}(t)$) записывается в виде (Dill [37], Coleman *et al.* [34])

$$\mathbf{M}t = E_0 I \kappa_1 \mathbf{d}_1 + E_0 I \kappa_2 \mathbf{d}_2 + \mu_0 J \kappa_3 \mathbf{d}_3, \quad (2.6.1)$$

где E_0 — модуль Юнга, μ_0 — модуль сдвига, I — момент инерции поперечного сечения. Упругий параметр J дается формулой (2.24) в работе Coleman *et al.* [34]; для стержней круглого сечения он равен $2I$. Величины κ_i , $i = 1, 2, 3$ являются компонентами вектора кривизны

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1 \mathbf{d}_1 + \kappa_2 \mathbf{d}_2 + \kappa_3 \mathbf{d}_3.$$

Сохранение импульса и углового момента и уравнения состояния (2.6.1) приводят к уравнениям для силы и момента (Dill [37], Coleman *et al.* [34])

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \rho S \ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{M}t' + \mathbf{x}' \times \mathbf{F} &= \rho I (\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2), \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ , а точка сверху — по t , ρ — начальная плотность материала стержня.

Произведем далее следующие масштабные преобразования

$$s \rightarrow ls, \quad \mathbf{x} \rightarrow l\mathbf{x}, \quad t \rightarrow \beta_0 t, \quad \mathbf{F} \rightarrow \frac{l^2}{\beta_0^2} \mathbf{F},$$

где l — характерная длина волны, а $\beta_0 = l^2 \sqrt{\rho S / E_0 I}$. Эти масштабные преобразования влекут за собой замены $\mathbf{d}_i \rightarrow \mathbf{d}_i$, $\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \boldsymbol{\kappa} / l$, $\mathbf{M}t \rightarrow E_0 I l^{-1} \mathbf{M}t$. В новых безразмерных переменных уравнения (2.6.1), (2.6.2) имеют вид ($\mathbf{M}t = (M_1, M_2, M_3)^\top$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'' &= \ddot{\mathbf{d}}_3, \\ \mathbf{M}t' + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{F} &= \varepsilon (\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2), \\ M_1 &= \kappa_1, \quad M_2 = \kappa_2, \quad M_3 = \Omega \kappa_3, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

где $\Omega = \mu J / E_0 I$, $\varepsilon = I / (l^2 S) \sim S / R^2$ — малая величина. В базисе $\{\mathbf{d}_i\}$, $i = 1, 2, 3$, κ_i выражаются следующим образом (Coleman *et al.* [34]):

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \partial_\xi \theta \sin \varphi - \partial_\xi \psi \sin \theta \cos \varphi, \\ \kappa_2 &= \partial_\xi \theta \cos \varphi - \partial_\xi \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ \kappa_3 &= \partial_\xi \psi \cos \theta + \partial_\xi \varphi. \end{aligned}$$

Проецируя первое уравнение в (2.6.3) на оси фиксированной декартовой системы координат, а второе уравнение в (2.6.3) на векторы базиса $\tilde{\mathbf{d}}_i$, $i = 1, 2, 3$, получим шесть уравнений для θ , ψ , φ , F^x , F^y , F^z :

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 F^x &= \partial_{tt}^2 (\cos \psi \cos \theta), \\ \partial_{\xi\xi}^2 F^y &= \partial_{tt}^2 (\sin \psi \sin \theta), \\ \partial_{\xi\xi}^2 F^z &= \partial_{tt}^2 (\cos \theta), \\ \partial_{\xi\xi}^2 \psi \sin \theta + 2\partial_\xi \psi \partial_\xi \theta \cos \theta - \Omega (\partial_\xi \psi \cos \theta + \partial_\xi \varphi) \partial_\xi \theta - F^x \sin \psi + F^y \cos \psi &= \\ &= \varepsilon (\partial_{tt}^2 \psi \sin \theta - 2\partial_t \theta \partial_t \varphi), \\ \partial_{\xi\xi}^2 \theta - (\partial_\xi \psi)^2 \sin \theta \cos \theta + \Omega (\partial_\xi \psi \cos \theta + \partial_\xi \varphi) \partial_\xi \psi \sin \theta + (F^x \cos \psi + \\ &+ F^y \sin \psi) \cos \theta - F^z \sin \theta = \varepsilon (\partial_{tt}^2 \theta + (\partial_t \psi)^2 \sin \theta \cos \theta + 2\partial_t \psi \partial_t \varphi \sin \theta), \\ \Omega \partial_\xi (\partial_\xi \psi \cos \theta + \partial_\xi \varphi) &= 2\varepsilon \partial_t (\partial_t \psi \cos \theta + \partial_t \varphi). \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

2.6.2. Солитонные решения. Плоская динамика (чистый изгиб) стержня описывается системой уравнений, которая следует из (2.6.4) при $\psi = \varphi = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 (\cos \theta) &= \partial_{\xi\xi}^2 (T \cos \theta - G \sin \theta), \\ \partial_{tt}^2 (\sin \theta) &= \partial_{\xi\xi}^2 (T \sin \theta + G \cos \theta), \\ \varepsilon \partial_{tt}^2 \theta - \partial_{\xi\xi}^2 \theta &= G, \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

где T — натяжение, G — сила сдвига:

$$\mathbf{F} = F^x \mathbf{i} + F^z \mathbf{k} = T \mathbf{d}_3 + G \mathbf{n},$$

а \mathbf{d}_3 и $\mathbf{n}(= \mathbf{d}_1)$ — касательный и нормальный векторы к кривой, соответственно:

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta.$$

Предположим, что $T(\xi = \infty, t) = T_\infty = \text{const}$.

Система уравнений (2.6.5) описывает плоскую динамику стержня без кручения. Она имеет солитонное решение, которое описывает бегущую с постоянной скоростью V волну

$$\tau_1^s = \tau_1^0 + O(\varepsilon), \quad \tau_2^s = \tau_2^0 + O(\varepsilon), \quad T^s = T^0 + O(\varepsilon), \quad T^0 = (T_\infty - V^2)\tau_1^0 - V^2, \quad (2.6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1^0 &= 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{T_\infty - V^2} \zeta, \\ \tau_2^0 &= \mp 2 \operatorname{sech}^2 \sqrt{T_\infty - V^2} \zeta \sinh \sqrt{T_\infty - V^2} \zeta, \quad \zeta = \xi - Vt, \quad 0 \leq V < T_\infty. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

(см. также формулу (1.4.3) главы 1).

Заметим, что натяжение на бесконечности T_∞ в (2.6.7) может быть приравнено к единице при помощи нормировок $t \rightarrow t/T_\infty$, $\xi \rightarrow \xi/\sqrt{T_\infty}$. Введем новые координаты (x_1, x_2) и кривую \mathcal{K} так, что вдоль \mathcal{K}

$$\frac{dx_1}{d\zeta} = \tau_1^0, \quad \frac{dx_2}{d\zeta} = \tau_2^0.$$

Форма кривой \mathcal{K} (форма солитона возвышения в низшем порядке по ε) показана на рис. 1.1.

2.6.3. Линеаризация и анализ устойчивости солитонных решений. Рассмотрим углы Эйлера в виде

$$\theta = \theta_V, \quad \psi = \psi_V + \delta\psi, \quad \varphi = \varphi_V + \delta\varphi,$$

где $(\theta_V, \psi_V, \varphi_V)$ — углы Эйлера, отвечающие солитонному решению, а $(\delta\psi, \delta\varphi)$ — малые возмущения. Тогда возмущение третьей компоненты касательного вектора к кривой \mathcal{K} элаستيки принимает вид

$$\delta\tau_3 = \delta\psi \sin \theta_V. \quad (2.6.8)$$

Будем полагать, что

$$\{\varepsilon\delta\psi, \varepsilon\delta\varphi\} \sim \{(\delta\psi)^2, (\delta\varphi)^2\}, \quad (2.6.9)$$

так как ε мало. Линеаризуем уравнения (2.6.4) вокруг солитонного решения (2.6.6). (принимая во внимание (2.6.9)) и положим, что крутящий момент M_3 в возмущенном состоянии отсутствует (“не крутящие” возмущения):

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \delta F^y &= \partial_{tt}^2 (\delta\psi \sin \theta_V), \\ \partial_{\xi\xi}^2 \delta\psi \sin \theta_V + 2\partial_\xi \delta\psi \partial_\xi \theta_V \cos \theta_V - F_V^x \delta\psi + \delta F^y &= 0, \\ \Omega \partial_\xi (\partial_\xi \delta\psi \cos \theta_V + \partial_\xi \delta\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Из (2.6.10) используя (2.6.8) получим, что

$$\partial_{tt} \delta\tau_3 = \partial_{\xi\xi} (p^0 \delta\tau_3) + \partial_{\xi\xi} \delta\tau_3 - \partial_\xi^4 \delta\tau_3, \quad (2.6.11)$$

где

$$p^0 = T^0 - (\partial_\zeta \tau_1^0)^2 - (\partial_\zeta \tau_2^0)^2 - 1 = -6(1 - V^2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{1 - V^2} \zeta.$$

Будем искать решение уравнения (2.6.11) в виде

$$\delta \tau_3 = e^{\lambda t} Y(\zeta, \lambda), \quad |V| < 1,$$

где $Y(\zeta, \lambda)$ убывает экспоненциально при $\zeta \rightarrow \pm\infty$, а $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Легко понять, что функция $Y(\zeta, \lambda)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению с коэффициентами, зависящими от V и λ

$$\left(\lambda - V \frac{d}{d\zeta} \right)^2 Y = \frac{d^2}{d\zeta^2} Y - \frac{d^4}{d\zeta^4} Y + \frac{d^2}{d\zeta^2} (p^0 Y). \quad (2.6.12)$$

Уравнение (2.6.12) записывается в матричной форме (2.1.3), где

$$\mathbf{M}(\zeta, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 + p^{0''} & 2\lambda V + 2p^{0'} & 1 - V^2 + p^0 & 0 \end{pmatrix},$$

а

$$\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T, \quad y_1 = Y, \quad y_2 = Y', \quad y_3 = Y'', \quad y_4 = Y''''.$$

Уравнение, сопряженное (2.6.12) записывается в виде

$$\left(\lambda + V \frac{d}{d\zeta} \right)^2 Z = \frac{d^2}{d\zeta^2} Z - \frac{d^4}{d\zeta^4} Z + p^0 \frac{d^2}{d\zeta^2} Z, \quad (2.6.13)$$

или (2.1.4), где

$$\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \quad z_4 = Z, \quad z_3 = -Z', \quad z_2 = Z'' - (1 - V^2 + p^0)Z, \\ z_1 = -Z''' + (1 - V^2 + p^0)\dot{Z} - (2\lambda V + p^{0'})Z.$$

В рассматриваемом случае $\mathbf{M}^{+\infty} = \mathbf{M}^{-\infty} = \mathbf{M}^\infty$, Матрица $\mathbf{M}^\infty(\lambda)$ имеет вид (Alexander, Sachs [16]; Ильичев, Томашпольский [6])

$$\mathbf{M}^\infty(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 2\lambda V & 1 - V^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $\det[\mathbf{M}^\infty(\lambda) - \mu \mathbf{I}] = 0$ имеет вид

$$\nu^4 - (1 - c^2)\nu^2 - 2\nu V \lambda + \lambda^2 = 0. \quad (2.6.14)$$

В рассматриваемом случае $\mu_i^+ = \mu_i^- = \mu_i$, $i = 1, \dots, 4$.

В статье Alexander, Sachs [16] показано, что

- в рассматриваемом случае $S_e = \mathcal{T}$ — мнимой оси;
- если $|V| < 1$, а λ лежит не на мнимой оси, (2.6.14) имеет два корня в правой полуплоскости и два в левой полуплоскости комплексной плоскости. Для $\lambda \in \Omega = \Omega^+$ обозначим два корня, принадлежащих левой полуплоскости $\nu = \mu_1$ и $\nu = \mu_2$;
- $\mu_1(\lambda)$ и $\mu_2(\lambda)$ имеют точки ветвления для λ , принадлежащего правой полуплоскости и они аналитичны в окрестности начала координат

$$\begin{aligned}\mu_1(\lambda) &= -\sqrt{1-c^2} + \frac{c\lambda}{1-c^2} + \frac{1+2c^2}{2(1-c^2)^{5/2}}\lambda^2 + O(\lambda^3), \\ \mu_2(\lambda) &= -\frac{\lambda}{1-c} + O(\lambda^3);\end{aligned}\tag{2.6.15}$$

Кроме того, в рассматриваемом случае выполняется предположение 6, а именно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.10 (Alexander, Sachs [16]). *Решения (2.1.3) и (2.1.4) $\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k, k = 1, 2$, имеющие асимптотику (2.5.1) аналитичны по λ в некоторой окрестности U^ϵ начала координат.*

Применим конструкцию с внешними формами, описанную в предыдущем параграфе. Установим соответствие между индексами $i \wedge j$ и числами следующим образом: $1 \wedge 2 \rightarrow 1, 1 \wedge 3 \rightarrow 2, 1 \wedge 4 \rightarrow 3, 2 \wedge 3 \rightarrow 4, 2 \wedge 4 \rightarrow 5, 3 \wedge 4 \rightarrow 6$. Вектор-функции $\mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda)$ и $\mathbf{z}^\wedge(\zeta, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям (2.5.4), (2.5.5), соответственно, где матрица

$$\mathbf{M}^\wedge(\lambda, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda V + 2p^{0'} & 1 - V^2 + p^0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 - p^{0''} & 0 & 0 & 1 - V^2 + p^0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 - p^{0''} & 0 & -2\lambda V - 2p^{0'} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеет асимптотику

$$\mathbf{M}^{\wedge\infty}(\lambda) = \mathbf{M}^\wedge(\lambda, \pm\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda V & 1 - V^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 & 1 - V^2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 & -2\lambda V & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что матрица $\mathbf{M}^{\wedge\infty}(\lambda)$ имеет собственные значения

$$\mu_i(\lambda) + \mu_j(\lambda), \quad 1 \leq i, j \leq 4, \quad i < j.$$

Если вектор функции $\mathbf{y}_{1,2}(\zeta, \lambda), \mathbf{z}_{1,2}(\zeta, \lambda)$ удовлетворяют граничным условиям (2.5.1), то вектор-функции $\mathbf{y}^\wedge(\zeta, \lambda)$ и $\mathbf{z}^\wedge(\zeta, \lambda)$ в силу леммы 2.11 удовлетворяют граничным условиям (2.5.7). Тогда $D(\lambda)$, определенная формулой (2.5.8) аналитична при $\lambda \in \Omega$ и

справедлива теорема 2.9. Кроме того, из леммы 2.7 следует, что $D(\lambda)$ аналитична также в окрестности U^ϵ начала координат $\lambda = 0$.

В рассматриваемом случае векторы $\mathbf{r}^\wedge(\lambda) = \mathbf{r}^{\wedge+}(\lambda) = \mathbf{r}^{\wedge-}(\lambda)$ и $\mathbf{I}^\wedge(\lambda) = \mathbf{I}^{\wedge+}(\lambda) = \mathbf{I}^{\wedge-}(\lambda)$ выбраны аналитическими в Ω , но ненормированными (т.е. $\mathbf{I}^\wedge \cdot \mathbf{r}^\wedge \neq 1$); см. Alexander, Sachs [16]. Пусть Y_k — первая, а Z_k — последняя компоненты векторов $\mathbf{y}_k \mathbf{z}_k$, $k = 1, 2$, удовлетворяющих (2.6.12), (2.6.13), соответственно. Из (2.6.15), (2.5.1) имеем

$$\begin{aligned} Y_1 &= e^{-\sqrt{1-V^2}\zeta} \left(1 + \frac{V\zeta}{1-V^2} \lambda + \left[\frac{V^2\zeta^2}{2(1-V^2)^2} + \frac{1+2V^2}{2(1-V^2)^{5/2}} \zeta \right] \lambda^2 \right) + O(\lambda^3), \\ Y_2 &= 1 - \frac{\zeta}{1-V} \lambda + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{(1-V)^2} \lambda^2 + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

при $\zeta \rightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} Z_1 &= e^{\sqrt{1-V^2}\zeta} \left(1 - \frac{V\zeta}{1-V^2} \lambda + \left[\frac{V^2\zeta^2}{2(1-V^2)^2} - \frac{1+2V^2}{2(1-V^2)^{5/2}} \zeta \right] \lambda^2 \right) + O(\lambda^3), \\ Z_2 &= 1 + \frac{\zeta}{1-V} \lambda + \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{(1-V)^2} \lambda^2 + O(\lambda^3) \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

при $\zeta \rightarrow -\infty$. Ищем решение (2.6.12), (2.6.13) при λ принадлежащих окрестности начала координат в форме разложений

$$\begin{aligned} Y_k(\lambda) &= Y_{k0} + \lambda Y_{k1} + \frac{1}{2} \lambda^2 Y_{k2} + O(\lambda^3), \\ Z_k(\lambda) &= Z_{k0} + \lambda Z_{k1} + \frac{1}{2} \lambda^2 Z_{k2} + O(\lambda^3), \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Коэффициенты этих разложений удовлетворяют определенным уравнениям (Alexander, Sachs [16]) которые могут быть аналитически решены (Pi'ichev [48]).

Теорема 2.3 и следствие 2.1 об асимптотическом значении функции Эванса при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Omega$ справедлива, когда $\mathbf{I}^\wedge \cdot \mathbf{r}^\wedge = 1$. Поэтому, чтобы применить их, надо сделать преобразование

$$\widehat{D}(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\mathbf{I}^\wedge(\lambda) \cdot \mathbf{r}^\wedge(\lambda)}.$$

При $\lambda \in U^\epsilon$, имеем

$$\mathbf{I}^\wedge \cdot \mathbf{r}^\wedge = \det \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1(\lambda) \cdot \mathbf{r}_1(\lambda) & \mathbf{I}_1(\lambda) \cdot \mathbf{r}_2(\lambda) \\ \mathbf{I}_2(\lambda) \cdot \mathbf{r}_1(\lambda) & \mathbf{I}_2(\lambda) \cdot \mathbf{r}_2(\lambda) \end{pmatrix} = -4(1-V^2)^{3/2} \lambda + O(\lambda^2).$$

Нормированная функция Эванса $\widehat{D}(\lambda) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Omega$.

При помощи выражений для коэффициентов Y_{k0} , Y_{k1} , Y_{k2} , Z_{k0} , Z_{k1} и Z_{k2} и условий (2.6.16), (2.6.17) можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.11 (Alexander, Sachs [16]; Pi'ichev [48]). *Функция Эванса $\widehat{D}(\lambda)$, аналитична в окрестности начала координат и разлагается там в сходящийся ряд Тейлора, вида*

$$\widehat{D}(\lambda) = \frac{1-2V^2}{4(1-V^2)^3} \lambda^2 + \sum_{n=3}^{\infty} e_n(V) \lambda^n. \quad (2.6.18)$$

При $V^2 < 1/2$ первый коэффициент разложения (2.6.18) отрицателен. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности начала координат функция Эванса $\hat{D}(\lambda)$ отрицательна на положительной вещественной полуоси (так как $\hat{D}(\lambda)$ вещественна для вещественных λ). Сравнение поведения аналитической функции Эванса в окрестности начала координат и на бесконечности показывает, что эта функция должна обращаться в ноль в конечной области на вещественной полуоси. Этот ноль совпадает с неустойчивым собственным значением обобщенной спектральной задачи (2.6.12).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, М., 1980.
- [2] А. Т. Ильичев, “Устойчивость солитонов в нелинейных композитных средах”, *ЖЭТФ*, **118** (2000), 720–729.
- [3] А. Т. Ильичев, “Теория устойчивости “петли Эйлера” на упругих нерастяжимых стержнях”, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **251** (2005), 154–172.
- [4] А. Т. Ильичев, “Динамика и спектральная устойчивость солитоноподобных структур в мембранных трубках с жидкостью”, *УМН*, **75**:5 (2020), 59–100.
- [5] А. Т. Ильичев, *Устойчивость локализованных волн в нелинейно-упругих стержнях*, Физматлит, М., 2009.
- [6] А. Т. Ильичев В. Я. Томашпольский, “Неустойчивость солитонов при изгибе и кручении упругого стержня”, *ТМФ*, **172**:3 (2012), 375–386.
- [7] А. Т. Ильичев, А. П. Чугайнова, “Теория спектральной устойчивости гетероклинических решений уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргера с произвольным потенциалом”, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **295** (2016), 163–173.
- [8] А. Т. Ильичев, А. П. Чугайнова, В. А. Шаргатов, “Спектральная устойчивость особых разрывов”, *Докл. РАН*, **462** (2015), 512–516.
- [9] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [10] Р. Курант, Д. Гильберт, *Уравнения математической физики*, Гостехиздат, М.–Л., 1951.
- [11] А. Ляв, *Математическая теория упругости*, ОНТИ НКТП СССР, М., 1935.
- [12] W. Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- [13] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ. Часть I*, Наука, М., 1985.
- [14] L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Felland, J.-C. Saut, “Non-local models for nonlinear dispersive waves”, *Physica D*, **40** (1987), 360–392.
- [15] J. P. Albert, J. L. Bona, D. L. Henry, “Sufficient conditions for stability of solitary wave solutions of model equations for long waves”, *Physica D*, **24** (1987), 343–366.
- [16] J. C. Alexander, R. Sachs, “Linear stability of solitary waves of a Boussinesq-type equation: A computer assisted computation”, *Nonlin. World*, **2** (1995), 471–507.
- [17] J. C. Alexander, R. Gardner, C. Jones, “A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves”, *J. Reine Angew. Math.*, **410** (1990), 167–212.
- [18] J. C. Alexander, M. G. Grillakis, C. K. R. T. Jones, B. Sandstede, “Stability of pulses on optical fibers with phase-sensitive amplifiers”, *Z. angew. Math. Phys.*, **48** (1997), 175–192.
- [19] A. L Afendikov, T. J. Bridges, “Instability of the Hocking–Stewartson pulse and its implications for three-dimensional Poiseuille flow”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **457** (2001), 257–272.
- [20] Т. В. Benjamin, “The stability of solitary waves”, *Proc. Roy. Soc. London A*, **238** (1972), 153–183.
- [21] А. Beliaev, А. Il'ichev, “Conditional stability of solitary waves propagating in elastic rods”, *Physica D*, **90** (1996), 107–118.
- [22] D. P. Bennet, R. V. Brown, S. E. Stansfield, J. D. Stroughair, J. L. Bona, “The stability of internal solitary waves”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **94** (1983), 351–379.
- [23] J. L. Bona, “On the stability of solitary waves”, *Proc. Roy. Soc. London A*, **344** (1975), 363–374.
- [24] J. L. Bona, R. L. Sachs, “Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation”, *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 15–29.
- [25] J. L. Bona, P. E. Souganidis, W. A. Strauss, “Stability and instability of solitary waves of Korteweg–de Vries type”, *Proc. Roy. Soc. London A*, **411** (1987), 395–412.

- [26] T. J. Bridges, G. Derks, G. Gottwald, “Stability and instability of solitary waves of the fifth-order KdV equation: a numerical framework”, *Physica D*, **172** (2002), 190–216.
- [27] A. P. Chugainova, A. T. Il'ichev, A. G. Kulikovskii, V. A. Shargatov, “Problem of arbitrary discontinuity disintegration for the generalized Hopf equation: selection conditions for a unique solution”, *IMA J. Appl. Math.*, **82** (2017), 496–525.
- [28] A. P. Chugainova, A. T. Ilichev, V. A. Shargatov, “Stability of shock wave structures in nonlinear elastic media”, *Math. Mech. Solids*, **24** (2019), 3456–3471.
- [29] A. Clebsch, *Theorie der Elasticität Fester Körper*, B. G. Teubner, Leipzig, 1862.
- [30] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [31] B. D. Coleman, E. H. Dill, “Flexure waves in elastic rods”, *J. Acoustical Soc. America*, **91** (1992), 2663–2673.
- [32] B. D. Coleman, J. M. Xu, “On the interaction of solitary waves of flexure in elastic rods”, *Acta Mech.*, **110** (1995), 173–182.
- [33] B. D. Coleman, E. H. Dill, D. Swigon, “On the dynamics of flexure and stretch in the theory of elastic rods”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **129** (1995), 147–174.
- [34] B. D. Coleman, E. H. Dill, M. Lembo, Z. Lu, I. Tobias, “On the dynamics of rods in the theory of Kirchoff and Clebsch”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **121** (1993), 339–359.
- [35] W. A. Coppel, *Stability and asymptotic behaviour of differential equations*, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.
- [36] D. J. Dichmann, J. H. Maddocks, R. L. Pego, “Hamiltonian dynamics of an elastica and the stability of solitary waves”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **135** (1996), 347–396.
- [37] E. H. Dill, “Kirchoff’s theory of rods”, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **44** (1992), 1–23.
- [38] J. V. Evans, “Nerve axon equations, III: Stability of the nerve impulse”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1972), 577–594.
- [39] R. A. Gardner, K. Zumburin, “The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1998), 797–855.
- [40] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, “Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I”, *J. Funct. Anal.*, **74** (1987), 160–197.
- [41] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, “Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II”, *J. Funct. Anal.*, **94** (1990), 308–348.
- [42] V. V. Gubernov, G. N. Mercer, H. S. Sidhu, R. O. Weber, “Evans function stability of combustion waves”, *SIAM Journ. Appl. Math.*, **63** (2003), 1259–1275.
- [43] Y. B. Fu, A. T. Il'ichev, “Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow”, *Math. Mech. Solids*, **20** (2015), 1198–2014.
- [44] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1981.
- [45] Z. Huang, H. S. Sidhu, I. N. Towers, Z. Jovanoski, V. V. Gubernov, “Stability analysis of combustion waves for competitive exothermic reactions using Evans function”, *Appl. Math. Modelling*, **54** (2018), 347–360.
- [46] J. Humpreus, B. Sandstede, K. Zumburin, “Efficient computation of analytic bases in Evans function analysis of large systems”, *Numerische Math.*, **103** (2006), 631–642.
- [47] A. Il'ichev, “Stability of solitary waves in nonlinear composite media”, *Physica D*, **150** (2001), 261–277.
- [48] A. Il'ichev, “Instability of solitary waves on Euler’s elastica”, *Z. angew. Math. Phys.*, **57** (2006), 547–566.
- [49] A. T. Il'ichev, Y. B. Fu, “Stability of aneurysm solutions in a fluid-filled elastic membrane tube”, *Acta Mechanica Sinica*, **28** (2012), 1209–1218.

- [50] A. T. Il'ichev, Y. B. Fu, "Stability of an inflated hyperelastic membrane tube with localized wall thinning", *Internat. J. Engrg. Sci.*, **80** (2014), 53–61.
- [51] A. T. Il'ichev, V. A. Shargatov, Y. B. Fu, "Characterization and dynamical stability of fully nonlinear strain solitary waves in a fluid-filled hyperelastic membrane tube", *Acta Mech.*, **231** (2020), 4095–4110.
- [52] A. T. Il'ichev, A. Yu. Semenov, "Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation", *Theor. Comput. Fluid Dynamics*, **3** (1992), 307–326.
- [53] C. K. R. T. Jones, "Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh–Nagumo system", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **286** (1984), 431–469.
- [54] T. Kapitula, "The Evans function and generalized Melnikov integrals", *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (1998), 273–297.
- [55] T. Kapitula, "Stability criterion for bright solitary waves of the perturbed cubic-quintic Schrödinger equation", *Physica D*, **116** (1998), 95–120.
- [56] T. Kapitula, B. Sandstede, "Stability for bright solitary wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations", *Physica D*, **124** (1998), 58–103.
- [57] T. Kapitula, B. Sandstede, "Edge bifurcations for near integrable systems via Evans function techniques", *SIAM Journ. Vath. Anal.*, **33** (2002), 1117–1143.
- [58] T. Kapitula, N. Kutz, B. Sandstede, "The Evans function for nonlocal equations", *Indiana Univ. Math. Journ.*, **53** (2004), 1095–1126.
- [59] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physic, Mechanik*, Vorl. 28, D. G. Teubner, Leipzig, 1876.
- [60] M. Oh, B. Sandstede, "Evans function for periodic waves on infinite cylindrical domains", *Journ. Diff. Equations*, **248** (2010), 544–555.
- [61] S. P. Pearce, Y. B. Fu, "Characterisation and stability of localised bulging/necking in inflated membrane tubes", *IMA J. Appl. Math.*, **75** (2010), 581–602.
- [62] R. L. Pego, M. I. Weinstein, "Eigenvalues and instabilities of solitary waves", *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **340** (1992), 47–94.
- [63] R. L. Pego, P. Smereka, M. I. Weinstein, "Oscillatory instability of travelling waves for KdV–Burgers equation", *Physica D*, **67** (1993), 45–65.
- [64] B. Sandstede, "Evans function and nonlinear stability of traveling waves in nonlocal network models", *Int. Journ. Bifur. Chaos*, **17** (2007), 2693–2709.
- [65] V. A. Shargatov, S. V. Gorkunov, A. T. Il'ichev, "Dynamics of front-like water evaporation phase transition interfaces", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **67** (2019), 223–236.
- [66] J. Shatah, W. Strauss, "Instability of nonlinear bound states", *Commun. Math. Phys.*, **100** (1985), 173–190.
- [67] W. A. Strauss, *Nonlinear wave equations*, Conference board of the mathematical sciences. Regional conference series in mathematics, **73**, Amer. Math. Soc., 1989.
- [68] J. Swinton, J. Eglin, "Stability of travelling pulse to a laser equation", *Phys. Lett. A*, **145** (1990), 428–433.
- [69] M. I. Weinstein, "Liapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **39** (1986), 51–68.
- [70] M. I. Weinstein, "Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations, arising in long wave propagation", *Comm. Partial Diff. Eqn.*, **12** (1987), 1133–1173.

Научное издание
Лекционные курсы НОЦ
Выпуск 32

Ильичев Андрей Теймуразович

**Устойчивость граничных состояний в бесконечных пространственных
областях**

<http://www.mi-ras.ru/noc/> e-mail: journals@mi-ras.ru

Заказ 229-23 Тираж 100 экз.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Амирит»

410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88

Тел.: 8-800-700-86-33 | 8-8452-24-86-33

E-mail: zakaz@amirit.ru Сайт: amirit.ru
