

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 31

Издание выходит с 2006 года

Трёхмерные многообразия Фано

Ю. Г. Прохоров

*Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук*



Москва
2022

ББК 22.15

Л43

Редакционный совет:

*С. И. Адян, С. М. Асеев, О. В. Бесов, С. В. Болотин, И. В. Волович,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь), В. В. Козлов,
С. Ю. Немировский (главный редактор), С. П. Новиков, Д. О. Орлов,
В. П. Павлов (заместитель главного редактора), А. Н. Паршин,
А. Г. Сергеев, А. А. Славнов, Д. В. Трещев, А. С. Холево, Е. М. Чирка*

Прохоров Ю. Г.

Л43 Трехмерные многообразия Фано – М.: МИАН, 2022. – 154 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 31).

ISBN 978-5-98419-085-5

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН). В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в МИАН в рамках программы “Научно-образовательный центр МИАН”.

Вашему вниманию предлагаются лекции курса “Трехмерные многообразия Фано”, прочитанные автором осенью 2017/2018 учебного года в Научно-образовательном центре МИАН.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

DOI: <https://doi.org/10.4213/lkn31>

DOI: <https://doi.org/10.4213/book1907>

ISBN 978-5-98419-085-5

© Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, 2022

© Прохоров Ю. Г., 2022

Оглавление

Введение	4
1. Обозначения, вводные понятия и простейшие свойства многообразий Фано	6
2. Существование гладкого дивизора	23
3. Многообразия Фано индекса 2	34
4. Базисные точки в антиканонической системе	53
5. Гиперэллиптические многообразия Фано	59
6. Тригональные многообразия Фано	65
7. Элементарные преобразования (линки Саркисова)	70
8. Многообразия Фано с числом Пикара 1, I	77
9. Многообразия Фано с числом Пикара 1, II	87
10. Многообразия Фано с числом Пикара 1, III	96
11. Многообразия Фано с числом Пикара 1, IV	103
12. Многообразия Фано с числом Пикара 1, V	112
13. Другие методы	118
14. Дополнение: сведения из теории Мори	131
15. Дополнение: многообразия минимальной степени	139
16. Дополнение: проективные модели поверхностей типа КЗ	143
17. Дополнение: теоремы Бертини	146
Список литературы	148

0. Введение

Многообразия Фано — это проективные алгебраические многообразия с обильным антиканоническим классом. Классификация таких многообразий была начата в работах Джино Фано [53], [54]. Более точно, он рассматривал трехмерные многообразия, вложенные в проективное пространство, у которых кривые — сечения подпространствами коразмерности два, являются каноническими кривыми. Можно показать, что это определение почти эквивалентно современному: такие многообразия — это в точности многообразия Фано с *очень обильным* антиканоническим классом.

С появлением теории минимальных моделей стало ясно, что многообразия Фано очень важны, поскольку они образуют существенный класс в бирациональной классификации многообразий отрицательной кодацировой размерности [87], [66], [74].

Настоящее издание посвящено классификации трехмерных многообразий Фано. Записки несколько не претендуют на новизну или оригинальность. Целью автора было систематизировать и изложить последовательно классификацию трехмерных многообразий Фано с числом Пикара 1. Эта классификация в настоящее время расплывлена по многочисленным источникам, некоторые из которых содержат ошибки и неточности. Конечно, автор не утверждает, что настоящее издание не имеет аналогичных погрешностей. Исторический опыт показывает, что почти все достаточно сложные классификационные результаты содержат пробелы. То, что ошибки обнаружены, говорит о востребованности результата, а исправление ошибок — непростая непрерывная работа.

Основной классификационный результат, который мы будем доказывать, может быть подытожен в следующей теореме.

0.1. ТЕОРЕМА. Пусть X — неособое трехмерное многообразие Фано с числом Пикара $\rho(X) = 1$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и пусть $\iota(X)$ — его индекс Фано, т.е. максимальное натуральное число, на которое делится канонический класс в группе $\text{Pic}(X)$ (см. определение 1.4.1). Тогда имеют место следующие утверждения.

- Если $\iota(X) \geq 3$, то X изоморфно проективному пространству \mathbb{P}^3 или невырожденной квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$.
- Если $\iota(X) = 2$, то существует ровно 5 деформационных типов таких многообразий Фано. Они называются многообразиями дель Пеццо и перечислены в таблице 1, стр. 52.
- Если $\iota(X) = 1$, то существует ровно 10 деформационных типов таких многообразий Фано. Они перечислены в таблице 4, стр. 118.

Заметим, что в теории Мори [87], [74] следует рассматривать также особые многообразия Фано (с терминальными, каноническими или логтерминальными особенностями). Однако за недостатком времени мы полностью игнорируем этот запрос: **все наши многообразия Фано неособы**.

Настоящий текст — подробные записки лекций, прочитанных в НОЦ МИАН осенью 2017 г., а также в Центре геометрии и физики университета г. Поханг (Ю. Корея) весной 2018 г. Я очень благодарен слушателям моих лекций за внимание, терпение, правильные своевременные вопросы и комментарии.

Окончательная версия этих записок была подготовлена в течение моего пребывания в Центре геометрии и физики. Я хотел бы поблагодарить этот институт и лично Дж. Парка за приглашение и отличные условия для работы.

Я также хочу выразить мою признательность А. Г. Кузнецову за тщательное прочтение предварительной рукописи и многочисленные ценные замечания и предложения.

Литературные указания. Большую часть излагаемого здесь материала автор подчёрпнул из книги [19], оригинальных статей [8], [10], [20] и курса лекций, прочитанного В. А. Исковских на механико-математическом факультете МГУ в 1988 г. Более поздний источник, написанный современным языком — книга [59]. Подробные ссылки даются в соответствующих разделах.

1. Обозначения, вводные понятия и простейшие свойства многообразий Фано

Всюду предполагается, что основное поле — это поле комплексных чисел \mathbb{C} .

1.1. Обозначения.

- $p_a(X) := (-1)^{\dim(X)} (\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$ — арифметический род многообразия X .
- $\text{Pic}(X)$ обозначает, как обычно, группу Пикара, т.е. группу обратимых пучков на X с точностью до изоморфизма.
- $\text{Cl}(X)$ — группа классов дивизоров Вейля нормального многообразия X . Мы считаем, что имеется отождествление $\text{Pic}(X)$ с группой классов дивизоров Картье по модулю линейной эквивалентности. Таким образом, $\text{Pic}(X) \subset \text{Cl}(X)$.
- \sim и \approx обозначают линейную и численную эквивалентности, соответственно.
- $\sim_{\mathbb{Q}}$ обозначает \mathbb{Q} -линейную эквивалентность дивизоров или \mathbb{Q} -дивизоров Вейля, т.е. $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$ если существует $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ такое, что nD_1 и nD_2 — целые дивизоры и $nD_1 \sim nD_2$.
- $\text{NS}(X) := \text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$ — группа Нерона–Севери.
- $\rho(X) := \text{rk NS}(X)$ — число Пикара.
- $\kappa(X)$ — размерность Кодaira многообразия X .
- K_X обозначает канонический класс многообразия X .
- \mathcal{T}_X — касательное расслоение к многообразию X .
- $h^{p,q}(X) := \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ — числа Ходжа.
- $\mathcal{N}_{Z/X}$ — нормальное расслоение к подмногообразию Z в X .
- $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ — проективизация векторного расслоения \mathcal{E} на многообразии X , т.е. относительный проективный спектр $\text{Proj } \mathcal{S}$ симметрической алгебры $\mathcal{S} := \bigoplus_{d \geq 0} S^d(\mathcal{E})$ (мы используем определение Гротендика, см. [32, гл. II, § 7]).
- $\mathbb{F}_e = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))$ — рациональная линейчатая поверхность [32, гл. V, § 2]; через Σ и Υ мы обычно обозначаем ее минимальное сечение и слой, соответственно. Иногда Σ и Υ также обозначают соответствующие классы в группе $\text{Pic}(\mathbb{F}_e)$.
- $\Phi_{|D|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ — рациональное отображение, заданное линейной системой $|D|$, где $N = \dim |D|$.
- $T_{P,X} := (\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}_{P,X}^2)^{\vee}$ — касательное пространство Зарисского к многообразию X в точке P . Если X вложено в проективное пространство \mathbb{P}^N , то $T_{P,X}$ отождествляется с аффинным подпространством в соответствующей аффинной карте $\mathbb{A}^N \subset \mathbb{P}^N$ и через $\overline{T_{P,X}} \subset \mathbb{P}^N$ обозначается его замыкание.
- $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ — взвешенное проективное пространство с весами w_i (см. 1.12).
- $[\alpha]$ (соответственно, $[\alpha]$) обозначает верхнюю (соответственно, нижнюю) целую часть действительного числа α . Для \mathbb{Q} -дивизора $B = \sum b_i B_i$ мы полагаем

$$[B] := \sum [b_i] B_i, \quad [B] := \sum [b_i] B_i.$$

Стягиванием называется сюръективный проективный морфизм нормальных многообразий, слои которого связны.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неособое проективное многообразие X называется *многообразием Фано*, если его антиканонический дивизор $-K_X$ обилен.

Если X — кривая рода g , то $\deg K_X = 2g - 2$. Поэтому X — многообразие Фано тогда и только тогда $g = 0$. Иначе говоря, единственное одномерное многообразие Фано — это проективная прямая. Двумерные многообразия Фано традиционно называются *поверхностями дель Пеццо*. Классификация поверхностей дель Пеццо хорошо известна и может быть найдена во многих учебниках (см., например, [7], [52], [27]). Мы считаем, что читатель уже ознакомился с этой теорией.

1.2.1. ПРИМЕР. Пусть X — неособое проективное многообразие с числом Пикара $\rho(X) = 1$ (например, гиперповерхность размерности ≥ 3 в проективном пространстве). В этом случае для канонического класса имеются только три возможности:

- (i) K_X обилен, тогда X — многообразие *общего типа*,
- (ii) K_X численно тривиален, тогда X — многообразие *численного типа* Калаби–Яу (в этом случае из теоремы об избыточности следует, что K_X — элемент кручения в группе $\text{Pic}(X)$),
- (iii) $-K_X$ обилен, тогда X является многообразием Фано.

В отличие от многообразий Фано, многообразия общего типа образуют гораздо более обширный класс, они не являются ограниченными в смысле многообразий модулей.

1.3. Простейшие свойства. Приведем простейшие свойства многообразий Фано, которые следуют непосредственно из определений и стандартных топологических и алгебро-геометрических фактов.

1.3.1. ТЕОРЕМА. Пусть X — многообразие Фано. Тогда

- (i) $H^q(X, \mathcal{O}_X(mK_X)) = 0$ при $m \leq 0$, $q > 0$ и при $m \geq 1$, $q < \dim(X)$;
- (ii) $H^q(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \Omega_X^q) = 0$ при $q > 0$, в частности, $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$;
- (iii) $\pi_1^{\text{alg}}(X) = \{1\}$;
- (iv) $H^1(X, \mathbb{Z}) = H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$;
- (v) $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ — конечно порожденная свободная абелева группа;
- (vi) если M — численно эффективный дивизор на X , то линейная система $|nM|$ не имеет неподвижных компонент и базисных точек для некоторого $n > 0$;
- (vii) группа $\text{Aut}(X)$ автоморфизмов многообразия X является линейной алгебраической группой.

Известно также, что любое многообразие Фано односвязно, т.е. его топологическая фундаментальная группа $\pi_1(X)$ тривиальна. Однако это уже нетривиальный результат [45, теорема 3.5], [46].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (i) и (ii) следуют из теоремы Кодаиры об обращении в нуль, двойственности Серра и теории Ходжа.

Для доказательства (iii) достаточно показать, что X не имеет нетривиальных конечных этальных накрытий. Предположим, противное: существует этальное накрытие $\pi: X' \rightarrow X$ степени $n > 1$. Тогда дивизор $-K_{X'} = -\pi^*K_X$ обилен. Следовательно, X' — многообразие Фано. с другой стороны,

$$\chi(X', \mathcal{O}_{X'}) = n\chi(X, \mathcal{O}_X) = n > 1.$$

Это противоречит (ii).

Для доказательства пункта (iv) заметим, что поскольку $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ то из теории Ходжа следует, что $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$. С другой стороны, согласно формулам универсальных коэффициентов и пункта (iii) группы $H^1(X, \mathbb{Z})$ и $H_1(X, \mathbb{Z})$ не имеют кручения.

Докажем (v). Из экспоненциальной последовательности

$$(1.3.2) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

и свойства (ii) получаем изоморфизм $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Так как X — компактное (в хаусдорфовой топологии) многообразие, то последняя группа конечно порождена и она не имеет кручения согласно (iv).

Утверждение (vi) — непосредственное следствие теоремы о свободе от базисных точек 14.4.

Наконец, утверждение (vii) следует из того, что линейная система $|-nK_X|$, для некоторого $n > 0$, задает вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, которое должно быть $\text{Aut}(X)$ -эквивариантным. Следовательно, все автоморфизмы X индуцированы линейными преобразованиями \mathbb{P}^N и поэтому группа $\text{Aut}(X)$ состоит из элементов $\text{PGL}_{N+1}(\mathbb{C})$, переводящих X в себя. \square

Отметим, что свойства 1.3.1 совершенно не очевидны в положительной характеристике. Однако имеются некоторые частичные результаты в малых размерностях (см. [71, § III.3], [103]).

1.3.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие Фано и пусть $X \dashrightarrow Z$ — доминантное рациональное отображение на неособое проективное многообразие Z . Тогда для всех $q > 0$ имеем

$$H^0(Z, \Omega_Z^q) = H^q(Z, \mathcal{O}_Z) = 0.$$

В частности, если Z — кривая, то $Z \simeq \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, поскольку отображение $X \dashrightarrow Z$ доминантно, то оно задает вложение

$$H^0(Z, \Omega_Z^q) \subset H^0(X, \Omega_X^q)$$

(см., например, [18, гл. III, § 6, теорема 2]). \square

1.3.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — поверхность дель Пеццо. Тогда

- (i) поверхность X рациональна,
- (ii)

$$K_X^2 + \rho(X) = 10.$$

В частности, $1 \leq K_X^2 \leq 9$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из критерия рациональности Кастельнуово и обращения в нуль

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X)) = 0.$$

Для доказательства (ii) заметим, что

$$\chi_{\text{top}}(X) = 2 + \text{rk } H^2(X, \mathbb{Z}) = 2 + \rho(X)$$

согласно теореме 1.3.1 (iv)- (v) и двойственности Пуанкаре. Теперь (ii) следует из теоремы 1.3.1 (ii) и формулы Нётера

$$K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X) = 12\chi(X, \mathcal{O}_X). \quad \square$$

Многообразия Фано размерности большей чем 2 могут быть нерациональными. Однако они *рационально связны* [46], [71]. Это гораздо более глубокий результат, чем свойства 1.3.1. Он основан на технике деформаций и расщепления рациональных кривых (bend and break [87], [71]). В настоящем курсе эта техника не обсуждается. Однако мы приведем одно важное следствие.

1.3.5. ТЕОРЕМА ([71, следствие VI.3.8]). Пусть X — многообразие Фано. Тогда для любого $q > 0$ верно равенство

$$H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes q}) = 0.$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Воспользуемся рациональной связностью X . Существует семейство \mathcal{C} рациональных кривых, такое, что для любых общих точек $P_1, P_2 \in X$ имеется кривая $C \in \mathcal{C}$, проходящая через P_1 и P_2 . Пусть $C \subset X$ — общая рациональная кривая из этого семейства \mathcal{C} и пусть

$$\nu: \mathbb{P}^1 \longrightarrow C \subset X$$

— нормализация. Можно показать, что расслоение $\nu^*\mathcal{T}_X$ обильно. Значит, $\nu^*\Omega_X^1$ — сумма линейных расслоений отрицательной степени. Поэтому

$$H^0(\mathbb{P}^1, \nu^*(\Omega_X^1)^{\otimes q}) = 0$$

для любого $q > 0$, т.е. любое глобальное сечение расслоения $(\Omega_X^1)^{\otimes q}$ обращается в нуль вдоль C . Поскольку наше семейство доминантно, это сечение обращается в нуль всюду. \square

1.4. Индекс многообразий Фано.

1.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Наибольшее целое число $\iota = \iota(X)$ такое, что

$$(1.4.2) \quad -K_X = \iota H$$

для некоторого обильного дивизора H называется *индексом Фано* многообразия Фано X . При этом индекс самопересечения $H^{\dim(X)}$ называется *степенью* многообразия Фано X . Мы будем обозначать его через $d(X)$.

Отметим, что по теореме 1.3.1 (v) класс дивизора H в (1.4.2) однозначно определен. Иногда он называется *фундаментальным дивизором*.

1.4.3. ПРИМЕР (см., например, [27, предложение 6.2.1]). Пусть X — поверхность дель Пецо. Тогда $\iota(X) \leq 3$. Если $\iota(X) = 3$, то $X \simeq \mathbb{P}^2$. Если $\iota(X) = 2$, то $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

1.5. Дивизоры на многообразиях Фано.

1.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — многообразие Фано размерности $n \geq 3$ и индекса $\iota = \iota(X)$. Запишем $-K_X = \iota H$ и пусть $Y \in |mH|$ — неособый элемент.

- (i) Если $t < \iota$, то Y — многообразие Фано индекса $\iota - t$.
- (ii) Если $t = \iota$, то Y — многообразие Калаби-Яу. В частности, если $\dim(X) = 3$, то Y — поверхность типа КЗ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По формуле присоединения дивизор $-K_Y = (\iota - t)H|_Y$ обильен и Y — многообразие Фано индекса, делящегося на $\iota - t$. С другой стороны, по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении $\text{Pic}(X)$ вкладывается в $\text{Pic}(Y)$ как примитивная подрешетка. Значит, $H|_Y$ — примитивный элемент в $\text{Pic}(Y)$.

(ii) Снова по формуле присоединения $K_Y = 0$. Из последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

получаем $H^q(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ при $1 \leq q \leq \dim(Y) - 1$. Значит, Y — многообразие Калаби-Яу. \square

1.5.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие Фано и пусть $S \subset X$ — неприводимая компонента дивизора $D \in |-K_X|$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

- (i) S — бирационально линейчатая поверхность,
- (ii) $S = D$ и S — поверхность типа КЗ, возможно, имеющая дювалевские особенности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$D = mS + R \sim -K_X,$$

где R — эффективный дивизор, не содержащий S в качестве своей компоненты, а m — целое положительное число. Тогда

$$(1.5.3) \quad -(K_X + S) = (m-1)S + R \sim_{\mathbb{Q}} \frac{m-1}{m}(-K_X) + \frac{1}{m}R.$$

По лемме 1.5.4 Кодаирова размерность $\kappa(S)$ неположительна. Предположим, что $\kappa(S) = 0$. Тогда снова по лемме 1.5.4 особенности поверхности S не хуже чем дювалевские и $K_S \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Из правой части (1.5.3) получаем, что $m = 1$ (поскольку $-K_X$ обилен) и $R = 0$ (поскольку носитель D связан). Значит, $K_S \sim 0$ и тогда S — поверхность типа КЗ (см. предложение 1.5.1 (ii)). \square

1.5.4. ЛЕММА. Пусть X — неособое проективное трехмерное многообразие и пусть $S \subset X$ — неприводимая (возможно ненормальная) поверхность. Предположим, что

$$(1.5.5) \quad K_X + S \sim_{\mathbb{Q}} -G,$$

где G — эффективный \mathbb{Q} -дивизор. Тогда кодаирова размерность $\kappa(S)$ неположительна. Более того, если $\kappa(S) = 0$, то особенности поверхности S не хуже чем дювалевские и $K_S \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие с неособым центром C , лежащим в особой части S , пусть $\tilde{S} \subset \tilde{X}$ — собственный прообраз S и пусть E — исключительный дивизор. Мы можем записать

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_X + aE, \quad \tilde{S} \sim f^*S - mE,$$

где $a = 2 - \dim(C) \leq 2$, а $m \geq 2$ — кратность S вдоль C . Тогда

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{S} \sim f^*(K_X + S) + (a-m)E \sim_{\mathbb{Q}} -(m-a)E - f^*G, \quad a-m \leq 0.$$

Заметим, что \mathbb{Q} -дивизор $\tilde{G} := (m-a)E + f^*G$ эффективен. Более того, если $\tilde{S} \cap \text{Supp}(\tilde{G}) = \emptyset$, то $S \cap \text{Supp}(G) = \emptyset$ и $a = m = 2$, т.е. f — раздутие точки кратности 2 на S .

Согласно теореме Хиронаки, применяя к (X, S) раздутия описанного выше вида, мы можем получить вложенное разрешение особенностей

$$(\hat{X} \supset \hat{S}) \longrightarrow (X \supset S)$$

поверхности S . При этом $K_{\hat{X}} + \hat{S} \sim_{\mathbb{Q}} -\hat{G}$, $\hat{G} \geq 0$. Пусть $\kappa(\hat{S}) \geq 0$. По формуле присоединения

$$K_{\hat{S}} \sim_{\mathbb{Q}} -\hat{G}|_{\hat{S}}.$$

Следовательно, $K_{\hat{S}} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ и $\hat{S} \cap \text{Supp}(\hat{G}) = \emptyset$. Согласно нашей индуктивной конструкции, $S \cap \text{Supp}(G) = \emptyset$ и разрешение $\hat{X} \rightarrow X$, является композицией раздутий точек

кратности 2 на собственных прообразах S . Это означает, что $K_S \sim_{\mathbb{Q}} 0$, поверхность S нормальна, а ее особенности дювалевские. \square

1.6. Конус эффективных кривых на многообразиях Фано. Следующий важный факт является непосредственным следствием теоремы о конусе 14.3.

1.6.1. ТЕОРЕМА ([87]). Пусть X — многообразие Фано. Тогда конус Моры $\overline{NE}(X)$ полнэдрален и порождается конечным числом экстремальных лучей R_1, \dots, R_n . Каждый экстремальный луч R_i имеет вид $R_i = \mathbb{R}_+[l_i]$, где l_i — рациональная кривая на X такая, что

$$-K_X \cdot l_i \leq \dim(X) + 1.$$

1.6.2. СЛЕДСТВИЕ. Дивизор D на многообразии Фано X обилен (соответственно, численно эффективен) тогда и только тогда, когда $D \cdot R > 0$ (соответственно, $D \cdot R \geq 0$) для любого экстремального луча R на X .

1.7. Теорема Римана–Роха на многообразиях Фано. Нам понадобится следующая асимптотическая форма теоремы Римана–Роха (см., например, [71, гл. VI, теорема 2.15.9]).

1.7.1. ТЕОРЕМА. Пусть H — дивизор на неособом проективном многообразии X размерности n . Тогда эйлерова характеристика $\chi(X, \mathcal{O}_X(tH))$ является многочленом вида

$$(1.7.2) \quad \chi(X, \mathcal{O}_X(tH)) = \frac{1}{n!} H^n t^n + \frac{1}{2(n-1)!} (-K_X) \cdot H^{n-1} t^{n-1} + \dots$$

Отсюда мы получаем следующие факты, которые будут многократно использоваться ниже.

1.7.3. ТЕОРЕМА. Пусть X — многообразие Фано размерности n и индекса $\iota = \iota(X)$. Пусть H — дивизор такой, что $-K_X = \iota H$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) $\iota(X) \leq n + 1$.
- (ii) Если $\iota(X) = n + 1$, то $H^n = 1$.
- (iii) Если $\iota(X) = n$, то $H^n = 2$.
- (iv) При $\iota(X) \geq n - 2$ размерность линейной системы $|H|$ вычисляется по следующим формулам:

$$(1.7.4) \quad \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } \iota(X) = n + 1, \\ n + 2, & \text{если } \iota(X) = n, \\ n + d - 1, & \text{если } \iota(X) = n - 1, \\ n + g - 1, & \text{если } \iota(X) = n - 2, \end{cases}$$

где

$$d := d(X) = H^n, \quad g := \frac{1}{2} H^n + 1$$

— целые положительные числа. В частности, $|-K_X| \neq \emptyset$ при $\iota(X) \geq n - 2$.

- (v) Пусть $n = 2$, $\iota := \iota(X)$. Тогда

$$(1.7.5) \quad \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(tH)) = \frac{1}{2} dt(t + \iota) + 1.$$

(vi) Пусть $n = 3$. Тогда

$$(1.7.6) \quad \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(tH)) = \frac{1}{6}(g-1)t(t+1)(2t+1) + 2t + 1$$

при $\iota(X) = 1, t \geq 0$ и

$$(1.7.7) \quad \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(tH)) = \frac{1}{12}t(t+\iota)(2t+\iota)d + \frac{2t}{\iota} + 1$$

при $\iota := \iota(X) = 2, t > -\iota$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.7.2),

$$\chi(t) := \chi(X, \mathcal{O}_X(tH))$$

— многочлен степени n . с другой стороны, по теореме Кодаиры об обращении в нуль

$$\chi(t) = h^0(X, \mathcal{O}_X(tH)),$$

если дивизор $-K_X + tH$ обилен, т. е. при $t > -\iota$. В частности, $\chi(0) = 1$, и многочлен $\chi(t)$ обращается в нуль при

$$t = -1, \dots, -(\iota - 1).$$

Так как $\chi(t)$ имеет степень n , то $\iota \leq n + 1$. Это доказывает (i)¹.

При $\iota \geq n - 2$ многочлен $\chi(t)$ можно вычислить явно. Это докажет (ii), (iii) и (iv). Приведем эти вычисления для случая $\iota = n - 2$. Разбор остальных случаев проще и оставляются читателю. Так как $\chi(t)$ обращается в нуль в точках $t = -1, \dots, -(n - 3)$, то

$$(1.7.8) \quad \chi(t) = \frac{d}{n!}(t+1) \cdots (t+n-3)\chi_3(t),$$

где $\chi_3(t)$ — многочлен степени 3 со старшим членом t^3 . Из двойственности Серра следует, что

$$h^i(X, \mathcal{O}_X(tH)) = h^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - tH)), \quad \chi(t) = (-1)^n \chi(-\iota - t).$$

Отсюда получаем, что множество корней многочлена $\chi(t)$ симметрично относительно точки $-\iota/2 = -(n - 2)/2$. Поэтому последний множитель в (1.7.8) имеет вид

$$\chi_3(t) = \left(t + \frac{n-2}{2}\right) \left(\left(t + \frac{n-2}{2}\right)^2 + a\right).$$

для некоторого $a \in \mathbb{Q}$. Таким образом,

$$(1.7.9) \quad \chi(t) = \frac{1}{n!} d(t+1) \cdots (t+n-3) \left(t + \frac{n-2}{2}\right) \left(\left(t + \frac{n-2}{2}\right)^2 + a\right).$$

Так как $\chi(0) = 1$, то отсюда получаем

$$n! = d(n-3)! \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \left(\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + a\right), \quad 2n(n-1) = d \left(\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + a\right).$$

Окончательно

$$a = \frac{2}{d}n(n-1) - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2.$$

Подставим это в (1.7.9), получим

$$\chi(t) = \frac{1}{n!} \left(dt(t+n-2) + 2n(n-1)\right)(t+1) \cdots (t+n-3) \left(t + \frac{n-2}{2}\right).$$

Откуда непосредственно выводятся нужные формулы (1.7.4), (1.7.6) и (1.7.5). \square

¹Ограниченность индекса (i) также следует из теоремы 1.6.1.

Отметим, что в общем случае (для многообразий Фано высшей размерности и малого индекса) непустота антиканонической линейной системы не известна.

1.7.10. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие Фано и пусть

$$\psi: X \dashrightarrow Z$$

— доминантное рациональное отображение на поверхность Z . Тогда Z рациональна.

Рациональность Z следует из рациональной связности многообразий Фано. Действительно, рациональная связность сохраняется при доминантных отображениях, а рационально связные поверхности рациональны. Поскольку это утверждение очень важно для дальнейшего, мы приведем здесь независимое (но “кустарное”) доказательство, работающее только в размерности 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim(X) = 3$. Без ограничения общности мы можем считать, что поверхность Z неособа, проективна и не содержит (-1) -кривых. Согласно следствию 1.3.3, имеем

$$H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = H^0(Z, \Omega_Z^q) = 0, \quad \forall q > 0.$$

Предположим, что поверхность Z нерациональна. Тогда Z не может быть линейчатой (поскольку $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$). Согласно классификации алгебраических поверхностей, $\kappa(Z) \geq 0$.

Рассмотрим разрешение точек неопределенности нашего отображения

$$\begin{array}{ccc} & \bar{X} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \bar{\psi} \\ X & \dashrightarrow \psi & Z \end{array}$$

(здесь σ — композиция раздутий с гладкими центрами). Если некоторый σ -исключительный дивизор E сюръективно отображается на Z , то $\kappa(Z) = -\infty$, что противоречит сказанному выше. Значит, отображение ψ определено вблизи своего общего слоя, т.е. вблизи $\sigma(\bar{\psi}^{-1}(z))$ для общей точки $z \in Z$.

По теореме 1.7.3 линейная система $|-K_X|$ имеет положительную размерность. Возьмем любой элемент $D \in |-K_X|$. Поскольку дивизор $D \sim -K_X$ обилен, то он имеет ненулевое пересечение с общим слоем отображения ψ . Поэтому у дивизора D существует компонента, скажем S , которая доминантно отображается на Z (возможно, $S = D$). Так как $\kappa(Z) \geq 0$, то $\kappa(S) \geq 0$. Согласно предложению 1.5.2, S — поверхность типа КЗ, возможно, имеющая дювалевские особенности. Следовательно, $\kappa(Z) = \kappa(S) = 0$. Снова используя классификацию алгебраических поверхностей, получаем, что Z — поверхность Энриквеса.

Тогда имеется двулистное неразветвленное накрытие $Z' \rightarrow Z$, где Z' — поверхность типа КЗ. Сделаем замену базы для $\bar{\psi}$. Тогда

$$\bar{X}' = \bar{X} \times_Z Z' \longrightarrow \bar{X}$$

— также двулистное неразветвленное накрытие. Поскольку фундаментальная группа $\pi_1^{\text{alg}}(X)$ — бирациональный инвариант в категории неособых полных многообразий, то

многообразие \bar{X} односвязно (см. 1.3.1 (iii)). Значит, накрытие $\bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ распадается: $\bar{X}' = \bar{X}'_1 \sqcup \bar{X}'_2$, где $\bar{X}'_i \simeq \bar{X}$. Но тогда, как и в доказательстве следствия 1.3.3, имеем

$$H^0(X, \Omega_X^2) = H^0(\bar{X}'_i, \Omega_{\bar{X}'_i}^2) \supset H^0(\bar{Z}, \Omega_{\bar{Z}'}^2) \neq 0.$$

Это противоречит теореме 1.3.1 (ii). \square

1.8. Многообразия Фано большого индекса. Оказывается, что многообразия Фано большого индекса устроены очень просто:

1.8.1. ТЕОРЕМА. Пусть X — многообразие Фано размерности n и пусть $\iota = \iota(X)$ — его индекс Фано. Тогда имеют место следующие утверждения.

- (i) Если $\iota(X) = \dim(X) + 1$, то $X \simeq \mathbb{P}^n$.
- (ii) Если $\iota(X) = \dim(X)$, то X изоморфно квадрике в \mathbb{P}^{n+1} .

В связи с этим несложным результатом можно сформулировать следующее определение.

1.8.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коиндексом многообразия Фано X называется (неотрицательное) число

$$c(X) := \dim(X) + 1 - \iota(X).$$

Таким образом, $c(X) = 0$ (соответственно, $c(X) = 1$) тогда и только тогда, когда $X \simeq \mathbb{P}^n$ (соответственно, изоморфно квадрике в \mathbb{P}^{n+1}). Многообразия Фано коиндекса 2 называются *многообразиями дель Пеццо* [56], а многообразия коиндекса 3 — *многообразиями Мукаи* [91]. Для n -мерного многообразия Мукаи X число

$$g(X) := \frac{1}{2}H^n + 1$$

называется его *родом* (см. (1.7.4)). Здесь, как обычно, $H = -\frac{1}{l}K_X$.

Оказывается, что сложность в классификации многообразий Фано возрастает с возрастанием коиндекса. В настоящее время имеется классификация многообразий Фано с $c(X) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.8.1. Согласно теореме 1.7.3, имеем

$$(1.8.3) \quad \begin{aligned} \iota = n + 1 &\implies H^n = 1, \quad \dim |H| = n, \\ \iota = n &\implies H^n = 2, \quad \dim |H| = n + 1. \end{aligned}$$

По лемме 1.8.5 ниже линейная система $|H|$ содержит элемент Y , являющийся неособым многообразием. По формуле присоединения $-K_Y = (\iota - 1)H|_Y$. Значит, Y — многообразие Фано индекса $\iota(Y) = \iota(X) - 1$ (при $\dim(X) > 2$; при $\dim(X) = 2$ имеем $Y \simeq \mathbb{P}^1$). Из точной последовательности

$$(1.8.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(H) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(H) \longrightarrow 0$$

и обращения в нуль $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ получаем, что отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H))$$

сюръективно. По предположению индукции линейная система $|H|_Y$ не имеет базисных точек. Значит, то же самое верно и для $|H|$. Таким образом, линейная система $|H|$ задает морфизм $\Phi: X \rightarrow \mathbb{P}^{n+d-1}$ так, что

$$\deg \Phi \cdot \deg \Phi(X) = H^n.$$

Так как $\Phi(X)$ не лежит в гиперплоскости, то $\deg \Phi = 1$, т. е. морфизм Φ бирационален на свой образ. Так как дивизор H обилен, то Φ конечен. Так как многообразие степени ≤ 2 нормально, то Φ — изоморфизм. Теорема 1.8.1 доказана. \square

Остается доказать существование неособого элемента $Y \in |H|$.

1.8.5. ЛЕММА. В обозначениях выше линейная система $|H|$ содержит элемент Y , являющийся неособым многообразием.

В следующей лекции мы обсудим общий метод доказательства утверждений подобного рода (см. упражнение 8, стр. 34). Здесь мы приведем “кустарное” доказательство, которое работает в размерности ≤ 3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $\dim(X) = 3$. Случай $\dim(X) = 2$ существенно проще и оставляется читателю для самостоятельного разбора.

Пусть $\iota(X) = 4$. Тогда согласно (1.8.3) имеем $\dim |H| = 3$ и $H^3 = 1$. Поскольку H обилен, то любой элемент линейной системы $|H|$ приведен и неприводим. Возьмем два различных элемента $H_1, H_2 \in |H|$. Пусть $C := H_1 \cap H_2$ и пусть $\mathcal{P} \subset |H|$ — пучок, порожденный H_1 и H_2 . Ясно, что $\text{Bs } \mathcal{P} \subset C$. По теореме Бертини общий элемент $H \in \mathcal{P}$ неособ вне C .

Так как $H \cdot C = 1$, то C — приведенная неприводимая кривая. По формуле для рода

$$2p_a(C) - 2 = (K_X + H_1 + H_2) \cdot C = -2.$$

Отсюда следует, что C — неособая рациональная кривая и поэтому все поверхности $H \in \mathcal{P}$ неособы вдоль C . Значит, общий элемент $H \in \mathcal{P}$ неособ всюду.

Пусть $\iota(X) = 3$. Тогда согласно (1.8.3) имеем $\dim |H| = 4$ и $H^3 = 2$. Поэтому любой элемент $H \in |H|$ или приведен и неприводим, или имеет две неприводимые компоненты с кратностью 1, или имеет одну неприводимую компоненту с кратностью 2. Так как $\iota(X) = 3$, то последний случай невозможен.

Предположим, что общий элемент $H \in |H|$ приводим: $H = F + M$, где $M, F > 0$. Мы можем считать, что $\dim |M| > 0$. Имеем

$$H^3 = 2 = H^2 \cdot (F + M).$$

Отсюда

$$H^2 \cdot F = H^2 \cdot M = 1.$$

В частности, F и M — неприводимые поверхности. Носитель обильного дивизора $H = F + M$ связан. Поэтому $F \cap M$ — кривая и

$$H \cdot F \cdot M > 0.$$

Если бы пересечение общих элементов $M_1, M_2 \in |M|$ было пусто, то линейная система $|M|$ не имела бы базисных точек, что противоречит теореме Бертини, примененной к $|H| = |M + F|$. Значит, пересечение общих элементов $M_1, M_2 \in |M|$ — кривая и $H \cdot M^2 > 0$. Но тогда

$$H^2 \cdot M = 1 = H \cdot M^2 + H \cdot F \cdot M \geq 2.$$

Противоречие показывает, что общий элемент $H \in |H|$ неприводим и приведен.

Теперь мы утверждаем, что общий элемент $H \in |H|$ также нормален. Предположим противное. Тогда по критерию Серра H особ вдоль некоторой кривой Z . По теореме Бертини Z содержится в базисном множестве $\text{Bs } |H|$, а значит любой другой элемент

$H_1 \in |H|$ также особ вдоль Z . Поэтому Z содержится с кратностью ≥ 4 в пересечении $H \cap H_1$. Но тогда

$$4Z \cdot H \leq H \cdot H_1 \cdot H = 2.$$

Противоречие доказывает, что H — нормальная поверхность.

Пусть $\mu: \tilde{H} \rightarrow H$ — минимальное разрешение (см., например, [26]). Рассмотрим кривую $C := H \cap H_1$ как дивизор Картье на H и положим $M := \mu^*C$. По формуле присоединения $K_H = -2C$. Поэтому мы можем записать

$$(1.8.6) \quad K_{\tilde{H}} \sim_{\mathbb{Q}} \mu^*K_H - \Delta \sim_{\mathbb{Q}} -2M - \Delta.$$

где Δ — эффективный (возможно нулевой) \mathbb{Q} -дивизор с носителем в исключительном множестве морфизма μ [26]. Это множество не содержит (-1) -кривых. Поэтому для любой (-1) -кривой E на \tilde{H} мы имеем

$$M \cdot E > 0, \quad \Delta \cdot E \geq 0.$$

Отсюда $K_{\tilde{H}} \cdot E < -1$, что невозможно. Следовательно, \tilde{H} не содержит (-1) -кривых. Из (1.8.6) следует, что $-K_{\tilde{H}}$ — объемный дивизор (поскольку он представляется в виде суммы объемного и эффективного дивизоров). Следовательно, $\kappa(\tilde{H}) = -\infty$ и поэтому \tilde{H} — минимальная линейчатая поверхность. Морфизм μ должен стягивать одну неприводимую кривую Σ . Пусть Υ — слой линейчатой поверхности. Так как дивизор M объемный, то он не пропорционален Υ . Если $\Delta \neq 0$, то $\Delta^2 < 0$ и тогда \mathbb{Q} -дивизор Δ также не пропорционален Υ . Так как $K_{\tilde{H}} \cdot \Upsilon = -2$, то из (1.8.6) получаем, что $\Delta = 0$ и $M \cdot \Upsilon = 1$. Тогда $K_{\tilde{H}} \cdot \Sigma = 0$ и

$$2p_a(\Sigma) - 2 = (K_{\tilde{H}} + \Sigma) \cdot \Sigma = \Sigma^2 < 0.$$

Значит, $p_a(\Sigma) = 0$, $\Sigma^2 = -2$ и \tilde{H} — рациональная линейчатая поверхность \mathbb{F}_2 . В этом случае H — квадратичный конус $Q \subset \mathbb{P}^3$ и дивизор C очень обилен на H . Тогда утверждение следует из точной последовательности (1.8.4), как и выше. \square

Далее мы приведем примеры многообразий Фано.

1.8.7. ПРИМЕРЫ. (i) Проективные пространства \mathbb{P}^n .

(ii) Неособая гиперповерхность $X_d \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие Фано тогда и только тогда, когда $d < n + 1$.

(iii) Полные пересечения. Неособое полное пересечение $X_{d_1 \dots d_r} \subset \mathbb{P}^n$ гиперповерхностей степеней d_1, \dots, d_r — многообразие Фано тогда и только тогда, когда $\sum d_i < n + 1$.

(iv) Произведения. $X \times Y$ — многообразие Фано тогда и только тогда, когда X и Y — многообразия Фано.

1.9. Раздутия. В этом пункте мы обсудим вопрос о том, когда раздутие некоторого многообразия является многообразием Фано. Пусть X — неособое проективное многообразие, пусть \mathcal{L} — линейная система дивизоров Картье на X без неподвижных компонент и пусть $Z := \text{Bs } \mathcal{L}$ (как схема). Пусть $f: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие Z . Отметим, что многообразие \tilde{X} может быть очень особым и иметь сложную структуру. Далее, предположим, что схема Z приведена и неособа. В этом случае неособо и многообразие \tilde{X} . Пусть $\tilde{\mathcal{L}} := f_*^{-1}\mathcal{L}$ — собственный прообраз. Тогда линейная система $\tilde{\mathcal{L}}$ не имеет базисных точек. В частности, она численно эффективна и f -обильна. Предположим, что мы

можем разложить антиканонический класс $-K_{\tilde{X}}$ как выпуклую линейную комбинацию

$$-K_{\tilde{X}} \equiv \alpha \tilde{\mathcal{L}} + \beta f^* H, \quad \alpha, \beta > 0$$

где H — обильный дивизор на X . Тогда дивизор $-K_{\tilde{X}}$ обилен по критерию обильности Клеймана 14.1.1, т.е. X — многообразие Фано.

1.9.1. ПРИМЕР. В обозначениях выше, пусть $X = \mathbb{P}^n$ и пусть $Z = \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подмногообразие. Тогда раздутие \tilde{X} в Z является многообразием Фано. Действительно, пусть \mathcal{L} — линейная система гиперплоскостей, проходящих через Z . Тогда

$$-K_{\tilde{X}} \sim -f^* K_X - (n - k - 1)E, \quad f^* \mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} + E,$$

где E — исключительный дивизор. Отсюда

$$-K_{\tilde{X}} \sim (n + 1)f^* \mathcal{L} - (n - k - 1)E \sim (n - k - 1)\tilde{\mathcal{L}} + (k + 2)f^* \mathcal{L}.$$

Согласно сказанному выше, этот дивизор обилен.

Ниже нам понадобятся индексы пересечения дивизоров на раздутии многообразия вдоль неособого подмногообразия. Эти формулы будут многократно применяться ниже.

1.9.2. ЛЕММА. Пусть V — неособое трехмерное многообразие и пусть $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие с центром в гладкой кривой $Z \subset V$ рода $g(Z)$. Пусть $E := \sigma^{-1}(Z)$ — исключительный дивизор. Тогда

$$E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/V}^\vee)$$

и для любых дивизоров D_1, D_2, D_3 на V имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (1.9.3) \quad & \sigma^* D_1 \cdot \sigma^* D_2 \cdot \sigma^* D_3 = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3, \\ & \sigma^* D_1 \cdot \sigma^* D_2 \cdot E = 0, \\ & \sigma^* D_1 \cdot E^2 = -D_1 \cdot Z, \\ & E^3 = -\deg(\mathcal{N}_{Z/V}) = 2 - 2g(Z) + K_V \cdot Z. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все соотношения следуют из формулы проекции и того, что $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/V}^\vee)}(-1)$. В последнем соотношении степень $\deg(\mathcal{N}_{Z/V})$ находится из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Z \longrightarrow \mathcal{T}_V|_Z \longrightarrow \mathcal{N}_{Z/V} \longrightarrow 0. \quad \square$$

1.10. Грассманианы и однородные пространства.

1.10.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $G = \text{Gr}(r, n)$ — многообразие Грассмана. Тогда $\text{Pic}(G) \simeq \mathbb{Z}$ и $-K_G \sim nH$, где H — обильная образующая $\text{Pic}(G)$. В частности, G — многообразие Фано индекса n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент $a \in G$ задается $r \times n$ -матрицей A максимального ранга. Причем матрицы, отличающиеся элементарными преобразованиями строк, задают один и тот же элемент. Запишем $A = (A_1 | A_2)$, где A_1 (соотв. A_2) — матрица размера $r \times r$ (соотв. $r \times (n - r)$). Рассмотрим открытое подмножество $U \subset G$, заданное условием $\det A_1 \neq 0$. Любой элемент $a \in U$ однозначно представляется матрицей вида $A = (E | X)$. Пусть $X = (x_{i,j})$. Здесь $x_{i,j}$ могут рассматриваться как координаты на U . Таким образом, $U \simeq \mathbb{A}^{r(n-r)}$. Пусть $H = G \setminus U$. Ясно, что H — замкнутое подмногообразие коразмерности 1. Это многообразие неприводимо, поскольку определитель,

рассматриваемый как многочлен от своих элементов неприводим. Из точной последовательности вырезания имеем

$$H \cdot \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Pic}(G) \longrightarrow \text{Pic}(U) = 0.$$

Следовательно, $\text{Pic}(G) = \mathbb{Z} \cdot H$.

Далее, рассмотрим случай $n = 5$, $r = 2$. Общий случай отличается от него только громоздкостью. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} \\ 0 & 1 & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} \end{pmatrix}$$

Перейдем в другую карту. Для этого элементарными преобразованиями строк перейдем от A к матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_{1,3}} & 0 & 1 & \frac{x_{1,4}}{x_{1,3}} & \frac{x_{1,5}}{x_{1,3}} \\ -\frac{x_{2,3}}{x_{1,3}} & 1 & 0 & x_{2,4} - \frac{x_{1,4}x_{2,3}}{x_{1,3}} & x_{2,5} - \frac{x_{1,5}x_{2,3}}{x_{1,3}} \end{pmatrix}$$

Новыми координатами будут

$$x'_{1,3} = \frac{1}{x_{1,3}}, \quad x'_{2,3} = -\frac{x_{2,3}}{x_{1,3}},$$

$$x'_{1,j} = \frac{x_{1,j}}{x_{1,3}}, \quad x'_{2,j} = x_{2,j} - \frac{x_{1,j}x_{2,3}}{x_{1,3}}, \quad j = 4, 5.$$

Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = dx'_{1,3} \wedge \cdots \wedge dx'_{2,5}$. Тогда

$$\omega = \frac{u}{x_{1,3}^5} dx_{1,3} \wedge \cdots \wedge dx_{2,5},$$

где u — обратимый элемент. Получаем $K_G = \text{div}(\omega) = -5H$, где дивизор H задается уравнением $x_{1,3} = 0$. \square

Заметим, что дивизор H является гиперплоским сечением при вложении П्लюккера. Следовательно, линейная система $|mH|$ очень обильна при $m > 0$.

Имеется гораздо более общий результат, чем предложение 1.10.1

1.10.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ([71, гл. V, теорема 1.4]). *Пусть G — линейная алгебраическая группа и пусть X — однородное пространство относительно некоторого действия G . Если многообразие X проективно, то оно является многообразием Фано.*

Иначе говоря, фактор линейной алгебраической группы по ее параболической подгруппе всегда является многообразием Фано.

1.11. Многообразия Фано и конечные морфизмы. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — конечный сюръективный морфизм неособых многообразий. Выберем точку $P \in X$ и локальные координаты x_1, \dots, x_n в окрестности $P \in U \subset X$. Пусть $Q := f(P)$ и пусть y_1, \dots, y_n — локальные координаты в окрестности $Q \in V \subset Y$. Отображение f задается функциями $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$. Пусть

$$\omega = \phi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

— мероморфная дифференциальная форма старшей степени. Тогда $K_Y|_V = \text{div}(\phi)$ и

$$f^*K_Y|_U = \text{div}(\phi(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))).$$

С другой стороны, $K_X|_U$ может быть задан дивизором мероморфной формы $f^*\omega$, которая равна

$$\phi(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \det(\partial y_i / \partial x_j) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Сравнивая эти выражения, получим, что $K_Y - f^*K_X$ задается обращением в нуль якобиана $\det(\partial y_i / \partial x_j)$. Он является голоморфной функцией, обращающейся в нуль вдоль дивизора — дивизора ветвления. Получаем формулу Гурвица

$$(1.11.1) \quad K_X = f^*K_Y + R, \quad R \geq 0.$$

Предположим теперь, что f — циклическое накрытие степени m . Выбирая координаты x_1, \dots, x_{n-1} вдоль компоненты R и x_n — трансверсально, мы можем считать, что $y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = x_n^m$. Тогда

$$(1.11.2) \quad R = \frac{m-1}{m} f^*B, \quad \text{где } B = f(R).$$

Таким образом,

$$(1.11.3) \quad K_X = f^* \left(K_Y + \frac{m-1}{m} B \right).$$

Ясно, что в этом случае дивизор B должен быть неособым и его класс в $\text{Pic}(Y)$ должен делиться на m .

В частности, если многообразия X и Y проективны, то из (1.11.2) получаем, что X — многообразие Фано тогда и только тогда, когда дивизор $-(K_Y + \frac{m-1}{m}B)$ обилен.

1.11.4. ПРИМЕР. Пусть в наших обозначениях $Y = \mathbb{P}^n$ и пусть B — гиперповерхность степени md , заданная однородным уравнением $\phi(x_0, \dots, x_n) = 0$. Многообразие X может быть реализовано как гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^{n+1}, d)$ (см. ниже), заданная уравнением $y^m = \phi(x_0, \dots, x_n)$, где x_i — квазиоднородные координаты степени 1, а y — координата степени d . При этом X — многообразие Фано тогда и только тогда, когда $(m-1)d \leq n$.

1.12. Многообразия Фано во взвешенных проективных пространствах.

Большой запас примеров многообразий Фано дают полные пересечения во взвешенных проективных пространствах. Приведем без доказательств основные свойства взвешенных проективных пространств. За деталями мы отсылаем к работе [51].

Рассмотрим кольцо многочленов $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ с нестандартной градуировкой $\deg x_i = w_i, w_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Проективный спектр $\text{Proj}(R)$ называется *взвешенным проективным пространством* размерности n с весами w_i . Оно обозначается через $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$. Используется также сокращенная запись: $\mathbb{P}(d_0^{k_0}, \dots, d_n^{k_n})$ означает, что каждое d_i повторяется k_i раз. Ясно, что без ограничения общности можно считать, что числа w_i взаимно просты в совокупности.

Многообразие $\mathbb{P} := \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ является торическим, его можно реализовать как фактор

$$\mathbb{P}^n / \mu_{w_0} \times \dots \times \mu_{w_n},$$

где μ_{w_i} — циклическая группа порядка w_i , которая действует умножением на корень степени w_i из единицы на координату x_i . Многообразие \mathbb{P} можно реализовать также как фактор $\mathbb{C}^{n+1} / \mathbb{C}^*$ по одномерному тору \mathbb{C}^* с действием

$$(x_0, \dots, x_n) \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{C}^*} (\lambda^{w_0} x_0, \dots, \lambda^{w_n} x_n).$$

Отсюда следует, что для любого $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ имеется изоморфизм

$$\mathbb{P}(rw_0, \dots, rw_{i-1}, w_i, rw_{i+1}, \dots, rw_n) \simeq \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n).$$

Таким образом, мы всегда можем считать, что

$$\text{НОД}(w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n) = 1 \quad \text{для любого } i$$

т.е. любой набор n весов из $\{w_0, \dots, w_n\}$ взаимно прост в совокупности. Это предположение важно и всегда *считается выполненным автоматически*. В этом случае говорят, что набор $\{w_0, \dots, w_n\}$ *хорошо сформирован*.

Многообразие $\mathbb{P} = \mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ покрывается аффинными картами

$$(1.12.1) \quad U_k = \{x_k \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n / \mu_{w_k}(w_0, \dots, w_{k-1}, w_{k+1}, \dots, w_n).$$

где $\mathbb{C}^n / \mu_r(a_1, \dots, a_n)$ означает фактор \mathbb{C}^n по группе μ_r , действующей на \mathbb{C}^n диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2\pi i a_0}{r}\right) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \exp\left(\frac{2\pi i a_n}{r}\right) & \end{pmatrix}$$

В частности, отсюда следует, что пространство \mathbb{P} имеет лишь циклические факторособенности и они изолированы тогда и только тогда, когда числа w_i попарно взаимно просты (при нашем предположении хорошей сформированности). Также ясно, что \mathbb{P} неособо тогда и только тогда, когда оно изоморфно обычному проективному пространству.

Каждое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}$ коразмерности 1 задается квазиоднородным многочленом $f(x_0, \dots, x_n)$ (относительно весов w_i). Такое многообразие называется *гиперповерхностью* в \mathbb{P} . Под *степенью* гиперповерхности в \mathbb{P} мы понимаем взвешенную степень соответствующего многочлена f . Несложно показать (используя точную последовательность вырезания [32, гл. 3, § 6]), что гиперповерхности $D_k := \{x_k = 0\}$ порождают группу классов дивизоров Вейля $\text{Cl}(\mathbb{P})$. Более того группа $\text{Cl}(\mathbb{P})$ является циклической и отображение

$$\text{deg}: \text{Cl}(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

является изоморфизмом.

Группа Пикара $\text{Pic}(X)$ естественно вложена в $\text{Cl}(X)$ и имеет там индекс $\text{НОК}(w_0, \dots, w_n)$. Действительно, пусть $I := [\text{Cl}(X) : \text{Pic}(X)]$. В карте $U_k = \{x_k \neq 0\}$ из представления (1.12.1) следует, что для любого дивизора Вейля D его кратность $w_k D$ является дивизором Картье в U_k . Следовательно, I делит $\text{НОК}(w_0, \dots, w_n)$. с другой стороны, пусть $C_k \subset \mathbb{P}$ — координатная прямая $\langle x_k, x_l \rangle$, $k \neq l$. По формуле проекции в карте U_k вычисляем $ID_l \cdot C_k = I/w_k$, где $D_l := \{x_l = 0\}$. Это число должно быть целым. Следовательно, $\text{НОК}(w_0, \dots, w_n)$ делит I .

Пусть A — положительная образующая $\text{Cl}(\mathbb{P})$. Тогда индекс самопересечения A^n корректно определен как рациональное число и

$$A^n = \frac{1}{w_0 \dots w_n}.$$

Канонический класс на \mathbb{P} также корректно определен (как дивизор Вейля). Вычисления с дифференциальными формами показывают, что

$$-K_{\mathbb{P}} = \left(\sum w_i\right) A,$$

где A — положительная образующая $\text{Cl}(\mathbb{P})$. Как и на любом проективном спектре, на пространстве \mathbb{P} определены когерентные пучки $\mathcal{O}(m)$ [32, гл. 3, § 5]. Все такие пучки рефлексивны и

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(mA).$$

Такой пучок является обратимым тогда и только тогда, когда $m \equiv 0 \pmod{w_i}$ для всех i .

Предположим теперь, что числа w_i попарно взаимно просты и пусть d — положительное число, делящееся на $w_0 \cdots w_n$. Тогда пространство \mathbb{P} имеет лишь изолированные особенности и по теореме Бертини общая гиперповерхность $X = X_d \subset \mathbb{P}$ степени d неособа. По формуле присоединения

$$K_X = (d - \sum w_i) A|_X.$$

Таким образом, X является многообразием Фано тогда и только тогда, когда $d < \sum w_i$. Если $n \geq 4$, то в нашей ситуации верна теорема Лефшеца для групп классов дивизоров [51], т.е. отображение ограничения

$$\text{Cl}(\mathbb{P}) \longrightarrow \text{Pic}(X)$$

— изоморфизм. Тогда мы можем вычислить индекс нашего многообразия Фано:

$$\iota(X) = -d + \sum w_i.$$

Аналогично можно строить многообразия Фано, являющиеся полными пересечениями больших коразмерностей.

1.13. Многообразия Фано и бирациональные морфизмы.

1.13.1. ЛЕММА. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — бирациональный морфизм неособых многообразий. Запишем

$$(1.13.2) \quad K_X = f^*K_Y + \sum a_i E_i$$

где E_i — (все) неприводимые исключительные дивизоры. Тогда $a_i > 0$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем точку $P \in X$ и локальные координаты x_1, \dots, x_n в окрестности $P \in U \subset X$. Пусть $Q := f(P)$ и пусть y_1, \dots, y_n — локальные координаты в окрестности $Q \in V \subset Y$. Отображение f задается функциями $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\omega = \phi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ — мероморфная дифференциальная форма старшей степени. Тогда $K_Y|_V = (\phi)$ и

$$f^*K_Y|_U = \text{div}(\phi(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))).$$

С другой стороны, $K_X|_U$ может быть задан дивизором мероморфной формы $f^*\omega$, которая равна

$$\phi(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \det(\partial y_i / \partial x_j) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Сравнивая эти выражения, получим, что $K_X - f^*K_Y$ задается обращением в нуль якобиана $\det(\partial y_i / \partial x_j)$. Он является голоморфной функцией, обращающейся в нуль вдоль всех компонент исключительного дивизора. \square

1.13.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — многообразие Фано и пусть $f: X \rightarrow Y$ — бирациональный морфизм на неособое многообразие Y такой, что $\dim f(\text{Exc}(f)) = 0$. Тогда Y — также многообразие Фано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $n \gg 0$ такое, что дивизор $|-nK_X|$ очень обилен. Поскольку $f_*|-nK_X| \subset |-nK_Y|$, то дивизор $-nK_Y$ обилен и $\text{Bs}|-nK_Y| \subset f(\text{Exc}(f))$. Отсюда следует, что дивизор $-nK_Y$ численно эффективен. По теореме о свободе от базисных точек 14.4 линейная система $|-mK_Y|$ не имеет базисных точек при $m \gg 0$. Предположим, что Y не является многообразием Фано. Тогда существует неприводимая кривая $C \subset Y$ такая, что $-K_Y \cdot C = 0$. Пусть $C' \subset X$ — собственный прообраз C . Тогда $C' \not\subset \text{Exc}(f)$ и поэтому $K_X \cdot C' \geq 0$ (см. (1.13.2)). Противоречие. \square

1.13.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — поверхность дель Пеццо степени d . Если $X \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $X \not\cong \mathbb{P}^2$, то X является раздутием точки на поверхности дель Пеццо степени $d + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если поверхность X содержит (-1) -кривую, то X представляется в виде раздутия точки на неособой поверхности Y и которая, согласно предложению 1.13.3, является поверхностью дель Пеццо. Предположим, что X не содержит (-1) -кривых и $X \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2$. Согласно следствию 1.3.4 (i), имеем $X \simeq \mathbb{F}_n$, $n \geq 2$. Но тогда

$$K_X \cdot \Sigma = 2p_a(\Sigma) - 2 - \Sigma^2 = n - 2 \geq 0.$$

где Σ — исключительное сечение. Это противоречит обильности $-K_X$. \square

- ЗАДАЧИ.
1. Найдите все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в грассманианах.
 2. Когда раздутие $m \geq 2$ точек на \mathbb{P}^n является многообразием Фано?
 3. Пусть X — проективная поверхность и пусть $C \subset X$ — обильный эффективный дивизор такой, что $p_a(C) \leq 1$. Докажите, что X — поверхность дель Пеццо.
 4. Пусть X — проективная рациональная поверхность такая, что $-K_X \cdot C > 0$ для любой кривой C . Докажите, что X — поверхность дель Пеццо.
 5. Пусть X — поверхность дель Пеццо степени 9. Не используя классификации поверхностей, докажите, что $X \simeq \mathbb{P}^2$. *Указание:* Воспользуйтесь двойственностью Пуанкаре и докажите, что $\iota(X) = 3$.
 6. Пусть X — поверхность дель Пеццо степени 8. Не используя классификации поверхностей, докажите, что $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или \mathbb{F}_1 . *Указание:* Как и в предыдущей задаче, воспользуйтесь двойственностью Пуанкаре. Если форма пересечения на $\text{Pic}(X)$ четна, то докажите, что $\iota(X) = 2$, а если она нечетна, то докажите, что на X существует (-1) -кривая.
 7. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ — раздутие неособой кривой C . Найдите достаточное условие того, что X — многообразие Фано.
 8. Найдите все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в произведении проективных пространств $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_l}$.
 9. Найдите все трехмерные многообразия Фано, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в произведении проективных пространств $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_l}$.
 10. Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая поверхность степени 3, не лежащая в гиперплоскости. Докажите, что X — поверхность дель Пеццо.

11. Пусть X — неособая проективная поверхность такая, что ее антиканонический дивизор $-K_X$ численно эффективен. Докажите, что имеет место одно из следующих:
 - (а) $K_X \approx 0$;
 - (б) X рациональна;
 - (в) X бирационально эквивалентна линейчатой поверхности над эллиптической кривой.
12. Пусть X и Y — поверхности дель Пеццо. Предположим, что существует конечный морфизм $f: X \rightarrow Y$ степени 2. Какие значения могут принимать степени X и Y ? Рассмотрите все случаи.
13. Пусть X — трехмерное многообразие Фано и пусть $f: X \rightarrow Y$ — плоский морфизм на (неособую) поверхность. Докажите, что Y — поверхность дель Пеццо. *Указание:* Покажите, что $-f_*(K_X^2) \approx 4K_Y + \Delta$, где $\Delta \subset Y$ — дискриминантный дивизор.
14. Пусть X — трехмерное многообразие Фано и пусть D — простой дивизор на X . Предположим, что D не является численно эффективным. Докажите, что D изоморфен или проективной плоскости \mathbb{P}^2 , или неособой линейчатой поверхности, или квадратичному конусу $Q \subset \mathbb{P}^3$. *Указание:* Воспользуйтесь классификацией экстремальных лучей 14.7.
15. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — неособое трехмерное многообразие такое, что его общее гиперплоское сечение является поверхностью кодаировой размерности 0. Докажите, что X — многообразие Фано.
16. Пусть X — неособое трехмерное многообразие и пусть D — дивизор с простыми нормальными пересечениями на X . Предположим, что дивизор $-(K_X + D)$ обилен. Вычислите многочлен $\chi(X, \mathcal{O}_X(-t(K_X + D)))$. *Указание:* Воспользуйтесь теоремой Каваматы–Фивега об обращении в нуль 2.5.1.
17. Найдите все трехмерные многообразия Фано, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в грассманианах.

2. Существование гладкого дивизора

Мы докажем существование неособого дивизора в антиканонической линейной системе на трехмерных многообразиях Фано.

2.1. ТЕОРЕМА (В. В. Шокуров [14]). *Пусть X — трехмерное многообразие Фано индекса $\iota = \iota(X)$ и пусть $H := -\frac{1}{\iota}K_X$. Тогда линейная система $|H|$ содержит гладкий неприводимый дивизор.*

Это базисный факт, на котором основывается классификация трехмерных многообразий Фано. Впервые он был доказан В. В. Шокуровым [14]. Ниже мы приведем доказательство, использующее более современную технику. Теорема имеет обобщения как на многомерный случай, так и на случай особых многообразий (см., например, [107], [100], [25], [38]). Приведенное здесь доказательство — сильно упрощенный вариант работы [38].

2.1.1. ОБСУЖДЕНИЕ. Мы сводим вопрос о существовании “хороших” дивизоров в линейных системах к вопросу о необращении в нуль глобальных сечений ограничений соответствующих линейных расслоений на определенные подмногообразия. По теореме

Бертини общий элемент линейной системы неособ, если эта линейная система не имеет базисных точек (и неподвижных компонент). Поэтому далее мы предполагаем, что базисное множество изучаемой линейной системы непусто.

Рассмотрим модельный пример.

2.1.2. ПРИМЕР. Пусть X — поверхность дель Пецо. По теореме Римана–Роха $\dim |-K_X| > 0$. Предположим для простоты, что линейная система $|-K_X|$ имеет *ровно одну* неподвижную компоненту F . Так как

$$h^2(X, \mathcal{O}_X(F)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - F)) = 0$$

(двойственность Серра), то снова по теореме Римана–Роха

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(F)) \geq \frac{1}{2}F \cdot (F - K_X) + 1.$$

Так как $\dim |F| = 0$, то $F^2 < 0$. Поэтому F является (-1) -кривой. В частности, $F \simeq \mathbb{P}^1$ и поэтому $H^0(F, \mathcal{O}_F(-K_X)) \neq 0$. Поскольку F — неподвижная компонента, то

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X - F)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)).$$

Из точной последовательности ограничения

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-K_X - F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_F(-K_X) \longrightarrow 0$$

получаем

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-K_X - F)) \neq 0$$

и тогда по теореме Кодаиры об обращении в нуль дивизор $-2K_X - F$ не является обильным. Отсюда следует, что дивизор $-(K_X + F)$ не является численно эффективным, т. е. существует неприводимая кривая C такая, что $-(K_X + F) \cdot C < 0$. Но тогда C должна быть неподвижной компонентой линейной системы $|(K_X + F)|$, а значит и линейной системы $|-K_X|$. По нашему предположению $C = F$. Но тогда $-(K_X + F) \cdot C = 2$. Противоречие.

Разобранный пример показывает, что для применения индуктивного подхода к доказательству существования неособых дивизоров необходимо два ингредиента: выделение “хорошей” компоненты базисного множества и обращение в нуль высших когомологий.

Далее нам понадобятся базисные сведения об особенностях пар. Ниже приводятся основные определения и свойства. Более подробное изложение см., например, в [74], [72], [26].

2.2. Пусть X — нормальное (необязательно полное) многообразие и пусть $B = \sum b_i B_i$ — любой \mathbb{Q} -дивизор на X . Предположим, что дивизор $K_X + B$ является дивизором \mathbb{Q} -Картье. Рассмотрим любой бирациональный морфизм $f: \tilde{X} \rightarrow X$, где многообразие \tilde{X} также нормально. Аналогично (1.13.2) можно записать

$$(2.2.1) \quad K_{\tilde{X}} + \tilde{B} = f^*(K_X + B) + \sum a_i E_i,$$

где E_i — исключительные дивизоры, \tilde{B} — собственный прообраз B на \tilde{X} , а числа a_i рациональны. Они называются *дискрепантностями*. Каждое a_i зависит от X , B и дискретного нормирования поля функций $\mathbb{C}(X)$, заданного дивизором E_i (и не зависит

от f). Поэтому используется обозначение $a_i = a(X, B, E_i)$. Можно также определить дискрепантности простых дивизоров с носителем на самом многообразии X :

$$a(X, B, E) = \begin{cases} -b_i, & \text{если } E = B_i, \\ 0, & \text{если } E \notin \text{Supp}(B). \end{cases}$$

2.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В обозначениях 2.2 пусть F — дивизор \mathbb{Q} -Картъе. Положим $B_t := B + tF$. Тогда из (2.2.1) следует, что

$$a(X, B_t, E) = a(X, B, E) - tm_F,$$

где m_F — кратность f^*F вдоль E . Таким образом, функция $a(X, B_t, E)$ линейна по t .

2.2.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Обычно в теории минимальных моделей рассматриваются пары (X, B) , состоящие из нормального многообразия X и *эффективного* \mathbb{Q} - или \mathbb{R} -дивизора $B = \sum b_i B_i$. Эффективность B важна во многих утверждениях, но определения могут быть сформулированы в общем виде.

Напомним, что *бirationальной моделью* многообразия X называется другое многообразие \tilde{X} такое, что существует бирациональное отображение $f: \tilde{X} \dashrightarrow X$. Говорят, что простой дивизор E на \tilde{X} *имеет непустой центр* на X , если отображение f регулярно в общей точке E . В этом случае *центром* E на X называется замыкание образа $f(E)$.

Таким образом, дискрепантность определена для *любого* дивизора E на некоторой бирациональной модели \tilde{X} многообразия X при условии, что E имеет (непустой) центр на X .

- 2.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Говорят, что пара (X, B) имеет *логканонические особенности*, если $a(X, B, E) \geq -1$ для любого дивизора E с центром на X .
(ii) Говорят, что пара (X, B) имеет *логтерминальные по Кавамате особенности*, если $a(X, B, E) > -1$ для любого дивизора E с центром на X .
(iii) Говорят, что пара (X, B) имеет *чисто логтерминальные особенности*, если $a(X, B, E) > -1$ для любого исключительного дивизора E с центром на X .

Ясно, что для чисто логтерминальной пары $(X, B = \sum b_i B_i)$ имеют место неравенства $b_i \leq 1$ для любого i . Поэтому чисто логтерминальная пара логканонична. В случае $B = 0$ оба понятия логтерминальности (ii) и (iii) эквивалентны и тогда говорят, что особенности X логтерминальны.

2.2.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно показать, что условия $a(X, B, E) \geq -1$ (соответственно, $a(X, B, E) > -1$) в определении 2.2.4 достаточно проверить для одного фиксированного сюръективного бирационального морфизма $f: \tilde{X} \rightarrow X$ такого, что \tilde{X} неособо, а объединение исключительного множества и собственного прообраза B является дивизором с простыми нормальными пересечениями. Поэтому условие логканоничности и логтерминальности эквивалентно выполнению некоторого *конечного* числа неравенств. Если все компоненты B_i — дивизоры \mathbb{Q} -Картъе, то эти неравенства являются *линейными* относительно коэффициентов b_i .

2.2.6. ПРИМЕР. Пусть многообразие X неособо и носитель дивизора B имеет простые нормальные пересечения. В этом случае пара $(X, B = \sum b_i B_i)$ имеет логканонические (соответственно, логтерминальные по Кавамате) особенности тогда и только тогда, когда $b_i \leq 1$ (соответственно, $b_i < 1$) для всех i . Пара $(X, B = \sum b_i B_i)$ имеет

чисто логтерминальные особенности тогда и только тогда, когда $b_i \leq 1$ для всех i и компоненты, для которых достигается равенство $b_i = 1$, не пересекаются.

2.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (X, B) — пара, состоящая из нормального многообразия X и \mathbb{Q} -дивизора B на X , такая, что дивизор $K_X + B$ является дивизором \mathbb{Q} -Картье. Неприводимое подмногообразие $W \subset X$ называется *логканоническим центром* (или *центром логканонических особенностей*) пары (X, B) , если существует бирациональный морфизм $f: \tilde{X} \rightarrow X$ и простой дивизор $E \subset \tilde{X}$ такой, что $a(X, B, E) \leq -1$ и $f(E) = W$. Например, если $E = B_i$ — компонента B с коэффициентом $b_i \geq 1$, то E — логканонический центр. Объединение всех логканонических центров называется *множеством логканонических особенностей*. Оно обозначается $\text{LCS}(X, B)$.

2.2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ([63, предложение 1.5]). Пусть (X, B) — логканоническая пара, где многообразие X имеет лишь логтерминальные особенности, а B — эффективный \mathbb{Q} -дивизор. Пусть $W_1, W_2 \subset X$ — логканонические центры для (X, B) . Если $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, то и любая неприводимая компонента пересечения $W_1 \cap W_2$ также является логканоническим центром для (X, B) .

В частности, множество логканонических центров содержит минимальные элементы по включению. Такие центры называются *минимальными*. Если пара (X, B) чисто логтерминальна, то по определению 2.2.4 (iii) логканонические центры — это в точности компоненты $[B]$. В частности, все они минимальны.

2.3. Присоединение логдивизоров. Классическая формула присоединения выражает канонический класс дивизора через канонический класс объемлющего многообразия. Оказывается, что можно писать аналогичные формулы присоединения для подмногообразий, являющихся логканоническими центрами любой коразмерности. Они эффективно применяются для индуктивных процедур в теории минимальных моделей.

2.3.1. ТЕОРЕМА ([23, § 3], [55, гл. 16]). Пусть X — нормальное многообразие. Пусть B — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на X такой, что пара (X, B) чисто логтерминальна. Тогда $[B]$ — нормальное подмногообразие. Пусть Z — компонента $[B]$ (таким образом, Z — минимальный центр логканонических особенностей коразмерности 1 для (X, B)). Тогда существует канонически определенный эффективный \mathbb{Q} -дивизор B_Z на Z такой, что

$$(2.3.2) \quad (K_X + B)|_Z \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + B_Z$$

и пара (Z, B_Z) логтерминальна по Кавамате.

2.3.3. ПРИМЕРЫ. (i) Если многообразие X неособо, то $B_Z = (B - Z)|_Z$ и (2.3.2) — обычная формула присоединения.

(ii) Пусть $X = X_2 \subset \mathbb{P}^3$ — квадратичный конус с вершиной P и пусть $Z \subset X$ — прямая. Тогда для $B = Z$ дивизор B_Z имеет вид $B_Z = \frac{1}{2}P$.

В общем случае имеется рецепт вычисления коэффициента B_Z в любом простом дивизоре $P \subset Z$ в терминах B и особенностей X вдоль P .

2.3.4. ПРИМЕР. Пусть X — поверхность и пусть Z — кривая на X такая, что пара $(X, B = Z)$ чисто логтерминальна. В этом случае вблизи любой точки $P \in Z \subset X$, которая является особой для X , пара (X, Z) аналитически изоморфна фактору

$$(\mathbb{C}^2, \{x_1 = 0\})/\mu_m,$$

где действие μ_m на \mathbb{C}^2 диагонально и свободно вне начала координат. Тогда коэффициент P в дивизоре B_Z равен $1 - 1/m$ [23, предложение 3.9], [55, предложение 16.6].

Для приложений важно иметь обобщение формулы (2.3.2) на подмногообразия высшей коразмерности.

2.3.5. ТЕОРЕМА ([64]). Пусть X — многообразие с логтерминальными особенностями. Пусть B — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на X такой, что пара (X, B) логканонична. Пусть Z — минимальный центр логканонических особенностей для (X, B) . Предположим, что $\text{codim } Z = 2$. Тогда существуют эффективные \mathbb{Q} -дивизоры B_Z и M_Z на Z такие, что

$$(2.3.6) \quad (K_X + B)|_Z \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + B_Z + M_Z$$

и пара $(Z, B_Z + M_Z)$ логтерминальна по Кавамате.

Дивизор B_Z называется *дивизориальной*, а M_Z — *модульной* частью присоединения. Они имеют разную природу. Дивизор B_Z “физически” фиксирован, он однозначно определяется парой (X, B) , а его коэффициенты B_Z вычисляются локально. С свою очередь, M_Z определен с точностью до \mathbb{Q} -линейной эквивалентности и зависит от вариации (X, B) вдоль Z . В частности, M_Z не зависит от тех компонент B , которые не проходят через Z .

Имеется обобщение формулы (2.3.6) для подмногообразий любой коразмерности [65], однако оно нам не потребуется.

2.4. Множительный идеал. Алгебраическим аналогом множества логканонических особенностей является множительный идеал. Приведем его определение и простейшие свойства. За недостатком времени мы опускаем подробности, см. [79], [80].

2.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть B — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на неособом многообразии X . Зафиксируем логразрешение $f: \tilde{X} \rightarrow X$ пары (X, B) , т.е. сюръективный собственный бирациональный морфизм такой, что \tilde{X} неособо, а объединение исключительного множества и собственного прообраза B является дивизором с простыми нормальными пересечениями. Тогда *множительным идеалом* (multiplier ideal) называется пучок

$$(2.4.2) \quad \mathcal{I}(X, B) := f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \left(K_{\tilde{X}/X} - \lfloor f^* B \rfloor \right).$$

где $K_{\tilde{X}/X} = K_{\tilde{X}} - f^* K_X$ — относительный канонический класс.

Имеются более общие варианты определения пучка $\mathcal{I}(X, B)$ (например, для особого многообразия X). Однако они нам не понадобятся.

Непосредственно проверяется, что пучок $\mathcal{I}(X, B)$ не зависит от выбора логразрешения. Можно считать, что носитель дивизора $K_{\tilde{X}/X}$ сосредоточен в исключительном множестве, а так как многообразие X неособо, то он эффективен. Поэтому $f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}/X}) = \mathcal{O}_X$ и из (2.4.2) следует, что имеет место включение

$$\mathcal{I}(X, B) \hookrightarrow f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}/X}) = \mathcal{O}_X.$$

Значит, $\mathcal{I}(X, B)$ — действительно пучок идеалов в \mathcal{O}_X . Если пара (X, B) логканонична, то идеал $\mathcal{I}(X, B)$ задает приведенную подсхему в X , совпадающую с множеством логканонических особенностей $\text{LCS}(X, B)$.

2.4.3. ПРИМЕРЫ. (i) Если носитель B имеет простые нормальные пересечения, то $\mathcal{I}(X, B) = \mathcal{O}_X(-[B])$.

(ii) Если B — целый дивизор, то $\mathcal{I}(X, B) = \mathcal{O}_X(-B)$.

Переформулируем определение 2.4.1. Запишем

$$f^*B = \sum m_i E_i, \quad m_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad K_{\tilde{X}/X} = \sum a_i E_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где E_i — различные простые дивизоры на \tilde{X} . Тогда сечения пучка $\mathcal{I}(X, B)$ над открытым множеством $U \subset X$ состоят из регулярных на U функций $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ таких, что

$$\text{ord}_{E_i}(\varphi) \geq \lfloor m_i \rfloor - a_i.$$

2.5. Теоремы об обращении в нуль. Нам понадобятся несколько обобщений теоремы Кодаиры об обращении в нуль. Первое из них было предложено независимо Каваматай и Фивегом (см. [66]).

2.5.1. ТЕОРЕМА (теорема Каваматы–Фивега об обращении в нуль). Пусть X — неособое проективное многообразие и B — численно эффективный объемный \mathbb{Q} -дивизор на X такой, что носитель его дробной части имеет лишь нормальные пересечения. Тогда

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + [B])) = 0, \quad \forall q > 0.$$

2.5.2. ТЕОРЕМА (теорема Надея об обращении в нуль [79]). Пусть X — неособое проективное многообразие и B — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на X . Пусть M — целый дивизор на X такой, что разность $M - (K_X + B)$ — численно эффективный и объемный дивизор. Тогда

$$H^q(X, \mathcal{I}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(M)) = 0, \quad \forall q > 0.$$

Предположим, что носитель B имеет простые нормальные пересечения. Тогда

$$\mathcal{I}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(M) = \mathcal{O}_X(M - [B]) = \mathcal{O}_X(K_X + [M - K_X - B]),$$

где дивизор $M - K_X - B$ численно эффективен и объемен. Таким образом, в этом случае теорема 2.5.2 — это в точности теорема Каваматы–Фивега.

Следующий факт чрезвычайно полезен при работе с множеством логканонических особенностей. Он был впервые сформулирован и доказан В. В. Шокуровым [23, лемма 5.7]. Изящное доказательство, верное в любой размерности, было дано Я. Колларом [55, теорема 17.4].

2.5.3. ТЕОРЕМА (теорема Шокурова о связности). Пусть X — неособое проективное многообразие и B — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на X такой, что \mathbb{Q} -дивизор $-(K_X + B)$ численно эффективен и объемен. Тогда $\text{LCS}(X, B)$ — связное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z := \text{LCS}(X, B)$. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X, B) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

По теореме Надея $H^1(X, \mathcal{I}(X, B)) = 0$. Значит, $H^0(X, \mathcal{O}_Z) = \mathbb{C}$. □

2.6. Теперь мы применим изложенные выше результаты к доказательству существования хороших дивизоров. Начнем с двумерного случая.

2.6.1. ТЕОРЕМА. Пусть X — поверхность дель Пеццо. Существует неособая кривая $H \in |-K_X|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана–Роха

$$\dim |-K_X| = K_X^2 > 0.$$

В частности, $|-K_X| \neq \emptyset$. Предположим, что общий дивизор $H \in |-K_X|$ особ. Положим

$$\lambda := \max\{t \in \mathbb{Q} \mid \text{пара } (X, tH) \text{ логканонична}\}.$$

Ясно, что $0 < \lambda \leq 1$ и пара $(X, \lambda H)$ не является логтерминальной по Кавамате. В частности, $\text{LCS}(X, \lambda H) \neq \emptyset$. Пусть $Z \subset \text{LCS}(X, \lambda H)$ — минимальный центр логканонических особенностей. По теореме Бертини $\text{Bs } |-K_X| \neq \emptyset$ и $Z \subset \text{Bs } |-K_X|$.

Предположим, что Z — кривая. Согласно сказанному выше, Z является неподвижной компонентой линейной системы $|-K_X|$ и $\lambda H = Z + D$, где D — эффективный \mathbb{Q} -дивизор, не содержащий Z своей компонентой. Так как H обильный дивизор, то его носитель связан. Согласно предложению 2.2.8, кривая Z не пересекает других логканонических центров. Поэтому Z — связная компонента $[\lambda H]$ и $\lambda < 1$. Тогда дивизор $-(K_X + \lambda H)$ обилён и по теореме Шокурова о связности $Z = \text{LCS}(X, \lambda H)$. Отметим также, что по теореме 2.3.1 кривая Z неособа и $-K_Z = (K_X + \lambda H)|_Z - D|_Z$ — обильный дивизор. Следовательно, Z рациональна.

Теперь зададим вспомогательный \mathbb{Q} -дивизор B на X следующим образом. Если $Z = \text{LCS}(X, \lambda H)$, то мы положим $B := \lambda H$. Пусть $Z \subsetneq \text{LCS}(X, \lambda H)$. Тогда Z — точка. Возьмем общее гиперплоское сечение $F \subset X$, проходящее через Z , и для $0 \leq \varepsilon \leq \lambda$, $t \geq 0$ рассмотрим следующий \mathbb{Q} -дивизор

$$B_{\varepsilon, t} := (\lambda - \varepsilon)H + tF.$$

Ясно, что пара $(X, B_{\varepsilon, 0})$ логтерминальна по Кавамате при $\varepsilon > 0$. Поэтому число

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \max\{t \in \mathbb{Q} \mid \text{пара } (X, (\lambda - \varepsilon)H + tF) \text{ логканонична}\}$$

положительно. Более того, функция $\delta(\varepsilon)$ кусочно линейна, монотонна и непрерывна и $\delta(0) = 0$ (см. замечания 2.2.2 и 2.2.5). Возьмем $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда $0 < \delta(\varepsilon) \ll 1$ и $Z = \text{LCS}(X, B_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)})$. Положим $B := B_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}$.

Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(-K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-K_X) \longrightarrow 0.$$

Так как дивизор $-2K_X - B$ “очень мало” отличается от

$$-2K_X - \lambda H = (2 - \lambda)H,$$

то он обилён и по теореме 2.5.2 имеем

$$H^1(X, \mathcal{I}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(-K_X)) = 0.$$

Поэтому отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \longrightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(-K_X))$$

сюръективно. Напомним, что Z — или точка, или неособая рациональная кривая.

Поэтому

$$H^0(Z, \mathcal{O}_Z(-K_X)) \neq 0.$$

Следовательно, $Z \notin \text{Bs}|-K_X|$. Противоречие. \square

2.7. Приступим к доказательству теоремы 2.1. Согласно (1.7.4), линейная система $|H|$ непуста и, более того, $\dim |H| \geq 2$.

2.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $H_1, \dots, H_m \in |H|$ — различные дивизоры и пусть $D := \sum \lambda_i H_i$, где $\lambda_i \geq 0$ и

$$(2.7.2) \quad \sum \lambda_i < \iota + 1.$$

Предположим, что пара (X, D) логканонична. Тогда любой логканонический центр пары (X, D) не содержится в $\text{Bs} |H|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что $\text{LCS}(X, D) \neq \emptyset$, т.е. пара (X, D) не является логтерминальной по Кавамате. Пусть $Z' \subset \text{LCS}(X, D)$ — центр логканонических особенностей. Предположим, что $Z' \subset \text{Bs} |H|$. Мы можем считать, что Z' — минимальный центр. Согласно (2.7.2), дивизор $H - (K_X + D)$ обилен.

Теперь, как и в доказательстве 2.6.1 мы “немного пошевелим” дивизор D , чтобы локализовать логканонический центр.

2.7.3. ЛЕММА. В предположениях выше существует эффективный \mathbb{Q} -дивизор B на X такой, что дивизор $H - (K_X + B)$ обилен, а множество логканонических особенностей пары (X, B) состоит ровно из одного центра Z , который содержится в $\text{Bs} |H|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Z' = \text{LCS}(X, D)$, то мы положим $B := D$ и $Z = Z'$. Пусть $Z' \subsetneq \text{LCS}(X, D)$. Для $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t \geq 0$ рассмотрим следующий \mathbb{Q} -дивизор

$$D'_{\varepsilon, t} := (1 - \varepsilon)D + tF,$$

где F — общее гиперплоское сечение ($F \in |nH|$, $n \gg 0$), проходящее через Z' . Положим

$$\delta(\varepsilon) := \max\{t \in \mathbb{Q} \mid \text{пара } (X, D'_{\varepsilon, t}) \text{ логканонична}\}.$$

Функция $\delta(\varepsilon)$ кусочно линейна, монотонна и непрерывна и $\delta(0) = 0$ (см. замечания 2.2.2 и 2.2.5). Возьмем $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда $0 < \delta(\varepsilon) \ll 1$ и

$$Z' = \text{LCS}(X, D'_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}) \subsetneq \text{LCS}(X, D).$$

Если Z' — минимальный логканонический центр для $(X, D'_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)})$, то мы положим $B := D'_{\varepsilon, \delta(\varepsilon)}$ и $Z = Z'$. Если же имеется минимальный центр $Z'' \subsetneq Z'$, то мы продолжим процесс, заменяя Z' на Z'' . Процесс оборвется, поскольку размерность центра логканонических особенностей уменьшается. В результате мы получим B и Z , такие как и требуется в утверждении леммы. \square

Продолжим доказательство предложения 2.7.1. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(H) \longrightarrow \mathcal{O}_X(H) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(H) \longrightarrow 0.$$

По нашему предположению $Z \subset \text{Bs} |H|$. Значит, все сечения $H^0(X, \mathcal{O}_X(H))$ зануляются на Z . с другой стороны, так как дивизор $H - K_X - B$ обилен, то по теореме 2.5.2 имеем

$$H^1(X, \mathcal{S}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(H)) = 0.$$

Поэтому отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) \longrightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(H))$$

сюръективно. Осталось показать, что

$$H^0(Z, \mathcal{O}_Z(H)) \neq 0.$$

Это очевидно, если Z — точка. Если Z — кривая, то по теореме 2.3.5 она неособа и

$$2g(Z) - 2 = \deg K_Z \leq (K_X + B) \cdot Z < H \cdot Z.$$

Таким образом,

$$\deg \mathcal{O}_Z(H) \geq \max\{1, 2g(Z) - 1\}.$$

Тогда по теореме Римана–Роха $H^0(Z, \mathcal{O}_Z(H)) \neq 0$.

Осталось рассмотреть случай $\dim(Z) = 2$, т. е. когда Z — неприводимая компонента $[B]$. В этом случае по нашей конструкции поверхность Z также является минимальным логканоническим центром для (X, D) . Это означает, что пара (X, D) чисто логтерминальна вдоль Z и Z — неприводимая компонента $[D]$, а также неподвижная компонента $[H]$. Согласно нашему предположению (2.7.2), дивизор $-(K_X + D)$ обилен. По теореме 2.3.1 поверхность Z нормальна и имеет место равенство

$$(K_X + D)|_Z = K_Z + D_Z,$$

где $D_Z \geq 0$, пара (Z, D_Z) логтерминальна по Кавамате и дивизор $-(K_Z + D_Z)$ обилен. По лемме 2.7.5 ниже любой обильный обратимый пучок на Z имеет ненулевые глобальные сечения. Противоречие доказывает предложение. \square

2.7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть S — нормальная проективная поверхность и пусть Δ эффективный \mathbb{Q} -дивизор Вейля на S такой, что пара (S, Δ) логтерминальна по Кавамате и дивизор $-(K_S + \Delta)$ численно эффективен и объемен. Тогда (S, Δ) называется *обобщенной логповерхностью дель Пеццо*.

2.7.5. ЛЕММА. Пусть $(S, \Delta = \sum \delta_i \Delta_i)$ — обобщенная логповерхность дель Пеццо и пусть A — численно эффективный объемный дивизор Картье на S . Тогда поверхность S рациональна и

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(A)) \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что поверхность S неособа. Докажем рациональность S . Предположим противное. Ясно, что $|nK_S| = \emptyset$ для всех $n > 0$. Поэтому поверхность S бирационально линейчатая и имеется стягивание $\tau: S \rightarrow \Gamma$ на кривую положительного рода, а общий слой τ — неособая рациональная кривая. Если для некоторой компоненты Δ_i выполнено $\Delta_i^2 \geq 0$, то мы можем заменить Δ на $\Delta' := \Delta - \delta_i \Delta_i$ с сохранением всех условий. Поэтому мы можем считать, что $\Delta_i^2 < 0$ для всех i (или $\Delta = 0$). Тогда

$$(K_S + \Delta_i) \cdot \Delta_i = (K_S + \Delta) \cdot \Delta_i + (1 - \delta_i) \Delta_i^2 - (\Delta - \delta_i \Delta_i) \cdot \Delta_i < 0.$$

Отсюда $p_a(\Delta_i) = 0$, т. е. Δ_i — гладкая рациональная кривая. Если $\tau(\Delta_i) = \Gamma$, то $g(\Gamma) \leq p_a(\Delta_i) = 0$. Это противоречит нашему предположению. Значит, все компоненты Δ лежат в слоях τ . Для любой кривой Γ , лежащей в слоях τ , имеем

$$2p_a(\Gamma) - 2 = (K_X + \Gamma) \cdot \Gamma < 0, \quad p_a(\Gamma) < 0.$$

Отсюда следует, что носитель Δ имеет простые нормальные пересечения. Так как $[-\Delta] = 0$, то по теореме Каваматы–Фивега, примененной к $-(K_S + \Delta)$, получаем

$H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ и тогда $g(\Gamma) = 0$. Это снова противоречит нашему предположению. Таким образом, поверхность S рациональна.

Далее, по двойственности Серра

$$h^2(S, \mathcal{O}_S(A)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - A)) = 0.$$

Так как дивизоры $-(K_S + \Delta)$ и A численно эффективны, то $-(K_S + \Delta) \cdot A \geq 0$. По теореме Римана–Роха

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(A)) \geq \frac{1}{2}(A^2 - A \cdot K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) \geq \frac{1}{2}(A^2 + A \cdot \Delta) > 0.$$

Пусть теперь поверхность S особа. Рассмотрим ее минимальное разрешение особенностей $f: \tilde{S} \rightarrow S$. Мы можем записать

$$K_{\tilde{S}} + \tilde{\Delta} = f^*(K_S + \Delta),$$

где $\tilde{\Delta}$ — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на \tilde{S} (см. [26]) и пара $(\tilde{S}, \tilde{\Delta})$ логтерминальна по Кавамате. Таким образом, $(\tilde{S}, \tilde{\Delta})$ — снова логповерхность дель Пеццо. Согласно доказанному выше, поверхность \tilde{S} рациональна, поэтому рациональна также и S .

Так как $f_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} = \mathcal{O}_S$, то $\mathcal{O}_S(A) = f_*f^*\mathcal{O}_S(A)$ (формула проекции). Особенности поверхности S рациональны [26], т.е. $R^q f_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} = 0$ при $q > 0$. Тогда из спектральной последовательности Лерэ получаем

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(A)) = H^0(\tilde{S}, f^*\mathcal{O}_S(A)) \neq 0. \quad \square$$

Из предложения 2.7.1 выводится следующее

2.7.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $H_1, \dots, H_m \in |H|$ — общие элементы. Положим $D := \sum \lambda_i H_i$, где $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum \lambda_i \leq \iota + 1$. Тогда пара (X, D) логканонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так. Уменьшая коэффициенты λ_i можно добиться того, что пара $(X, D' = \sum \lambda'_i H_i)$ будет максимально логканонична и $\lambda'_i < 1$ для всех i . По теореме Бертини вне $\text{Bs } |H|$ поверхности H_i неособы и пересекают друг друга трансверсально. Более того дивизор $\sum H_i$ имеет только простые нормальные пересечения на открытом подмножестве $X \setminus \text{Bs } |H|$. Значит, пара (X, D') логтерминальна по Кавамате вне $\text{Bs } |H|$. Согласно предложению 2.7.1, любой минимальный логканонический центр (X, D) не содержится в $\text{Bs } |H|$. Противоречие. \square

2.7.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $H_1, \dots, H_{\iota+1} \in |H|$ — общие дивизоры. Тогда пара $(X, \sum_{i=1}^{\iota+1} H_i)$ логканонична.

2.7.8. СЛЕДСТВИЕ. Линейная система $|H|$ не имеет неподвижных компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, иначе дивизор $\sum_{i=1}^{\iota+1} H_i$ имеет компоненту кратности ≥ 2 , что противоречит логканоничности пары $(X, \sum H_i)$ из следствия выше. \square

2.7.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $P \in \text{Bs } |H|$ — некоторая точка. Тогда общий дивизор $H \in |H|$ неособ в P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все элементы H особы в P , то, раздувая P , мы получим исключительный дивизор E с дискрепантностью

$$a\left(E, \sum_{i=1}^{\iota+1} H_i, X\right) = 2 - \sum_{i=1}^{\iota+1} \text{mult}_P(H_i) \leq 2 - 2(\iota + 1) = -2\iota \leq -2.$$

Это противоречит следствию 2.7.7. \square

2.7.10. СЛЕДСТВИЕ. Если $\iota(X) \geq 3$, то $\text{Bs } |H| = \emptyset$. Если $\iota(X) = 2$, то $\dim \text{Bs } |H| \leq 0$ и общий дивизор $H \in |H|$ неособ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству следствия выше. □

Теперь мы готовы закончить доказательство теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Предположим, что общий дивизор H особ. Тогда по теореме Бертини $\text{Bs } |H| \neq \emptyset$ и $\text{Sing}(H) \subset \text{Bs } |H|$. Согласно сказанному выше (следствие 2.7.10), мы можем считать, что $\iota(X) = 1$. Более того, пара $(X, H + H')$ логканонична для общих дивизоров $H, H' \in |H|$ (следствие 2.7.7). Так как поверхность H неособа вне $H \cap H'$, то пара (X, H) чисто логтерминальна. По теореме 2.3.1 поверхность H нормальна (в частности неприводима, поскольку она связна) и имеет лишь логтерминальные особенности. С другой стороны, по формуле присоединения $K_H = 0$. В частности, K_H — дивизор Картье. Логтерминальные особенности поверхностей, у которых канонический класс является дивизором Картье — это, так называемые, *дювалевские особенности* [26, § 9]. Как и в доказательстве предложения 1.5.1 (ii) имеем $H^1(H, \mathcal{O}_H) = 0$. Таким образом, H — особая поверхность типа КЗ (см. 16.6).

Далее мы имеем $\dim \text{Bs } |H| \leq 1$. Пусть C — неприводимая компонента множества $\text{Bs } |H|$, на которой общий элемент $H \in |H|$ имеет особенности. Согласно следствию 2.7.9, общий дивизор неособ в общей точке C . Значит, C — кривая и общий элемент $H \in |H|$ имеет лишь изолированные особенности (т.е. элементы H имеют *переманные* особые точки на C). Так как $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(H')) \longrightarrow H^0(H, \mathcal{O}_H(H'))$$

сюръективно. Поэтому полная линейная система $|H'_H|$ имеет кривую C своей неподвижной компонентой. Но согласно следствию 16.6.1 поверхность H должна быть неособа вдоль C . Противоречие завершает доказательство теоремы 2.1. □

- ЗАДАЧИ.
1. Пусть C_1 и C_2 — неособые кривые на плоскости \mathbb{C}^2 , заданные уравнениями $y = 0$ и $y = x^2$. При каких значениях α_1 и α_2 пара $(\mathbb{C}^2, \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2)$ логканонична?
 2. Пусть C — неособая кривая на плоскости \mathbb{C}^2 , заданная уравнением $y^2 = x^3$. При каких значениях α пара $(\mathbb{C}^2, \alpha C)$ логканонична?
 3. Докажите утверждения из примера 2.4.3.
 4. Пусть X — поверхность дель Пеццо и пусть A — обильный дивизор на X . Покажите, что линейная система $|A|$ содержит неособую кривую.
 5. Пусть X — поверхность типа КЗ и пусть A — обильный дивизор на X . Покажите, что для общего дивизора $D \in |A|$ пара (X, D) логканонична.
 6. Пусть X — неособое трехмерное многообразие и пусть D — дивизор с простыми нормальными пересечениями на X . Предположим, что дивизор $-(K_X + D)$ обилён. Докажите, что линейная система $|-(K_X + D)|$ содержит неособый дивизор.
 7. Обобщить теорему о существовании неособой кривой в линейной системе $| -K_X |$ для случая *обобщенной* поверхности дель Пеццо X (т.е. поверхности с численно эффективным и объёмным антиканоническим классом).

8. Пусть X — мерное многообразие Фано размерности n и индекса $\iota(X) \geq n$. Покажите, что линейная система $|-\frac{1}{\iota}K_X|$ содержит неособый дивизор.
9. Используя теорему 2.1, оцените сверху число Пикара трехмерных многообразий Фано (полученная оценка не будет оптимальной, ср. с теоремой 13.1.1).
10. Пусть S — нормальная проективная поверхность и пусть Δ эффективный \mathbb{Q} -дивизор Вейля на S такой, что пара (S, Δ) чисто логтерминальна и дивизор $-(K_S + \Delta)$ обилен. Докажите, что поверхность S рациональна (обобщение леммы 2.7.5). Можно ли ослабить условия этого утверждения, заменив чистую логтерминальность на логканоничность?

3. Многообразия Фано индекса 2

На этом разделе мы обсудим классификацию трехмерных многообразий Фано индекса 2. Напомним, что такие многообразия также называются (трехмерными) *многообразиями дель Пеццо* (см. определение 1.8.2). Основной классификационный результат подытожен в таблице 1, стр. 52.

3.1. Напомним, что степенью трехмерного многообразия дель Пеццо называется число

$$d(X) := \frac{1}{8}(-K_X)^3.$$

3.1.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно теореме 2.1, на многообразии дель Пеццо X общий элемент $H \in |-\frac{1}{2}K_X|$ неособ. По теореме Лефшеца о гиперплоском сечении ограничение $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(H)$ является вложением и его образ — примитивная подрешетка в $\text{Pic}(H)$. С другой стороны, по формуле присоединения $K_H = -H|_H$. Поэтому $-K_H$ — примитивный обильный элемент решетки $\text{Pic}(H)$ и поэтому H — поверхность дель Пеццо степени $d(X)$ с $\iota(H) = 1$. Таким образом,

$$1 \leq d(X) \leq 8$$

по формуле Нётера (см. следствие 1.3.4) и $H \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в случае $d(X) = 8$.

Далее мы систематически будем использовать индукцию по размерности. Для этого очень полезна следующая лемма.

3.1.2. ЛЕММА. Пусть V — алгебраическое многообразие такое, что $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$. Пусть $D \subset V$ — (приведенное) подмногообразие коразмерности 1, являющееся дивизором Картье. Тогда

$$\text{Bs}|\mathcal{O}_D(D)| = \text{Bs}|\mathcal{O}_V(D)|.$$

В частности, если линейная система $|\mathcal{O}_D(D)|$ на D не имеет базисных точек, то и линейная система $|D|$ на V не имеет базисных точек. В этом случае $|D|$ задает морфизм $\Phi_{|D|}: V \rightarrow \mathbb{P}^{\dim|D|}$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi_{|D|}} & \mathbb{P}^{\dim|D|} \\ \uparrow & & \uparrow \\ D & \xrightarrow{\Phi_{|\mathcal{O}_D(D)|}} & \mathbb{P}^{\dim|D|-1} \end{array}$$

коммутативна, где $\Phi_{|\mathcal{O}_D(D)|}$ — морфизм, заданный линейной системой $|\mathcal{O}_D(D)|$. При этом $\Phi_{|D|}(D)$ — гиперплоское сечение многообразия $\Phi_{|D|}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\text{Bs } |D| \subset \text{Supp}(D)$ и $\text{Bs } |D| = \text{Bs } |D|_D$, где $|D|_D$ — ограничение линейной системы $|D|$ на подмногообразии D . Пучок идеалов подсхемы D в X обратим и совпадает с $\mathcal{O}_V(-D)$. Поэтому имеется точная последовательность (см. [32, гл. II, §§ 3, 6])

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0.$$

Пучок $\mathcal{O}_V(D)$ также обратим, поэтому тензорное умножение на него не меняет точность:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_V(D) \longrightarrow \mathcal{O}_D(D) \longrightarrow 0.$$

По нашему условию $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ отображение ограничения

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(D)) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D(D))$$

сюръективно. Значит, $|D|_D = |\mathcal{O}_D(D)|$. □

3.2. Применим результат о существовании гладкого дивизора 2.1 к описанию проективных вложений поверхностей и трехмерных многообразий дель Пеццо. Напомним, что степень $d = K_X^2$ поверхности дель Пеццо X может принимать значения $1 \leq d \leq 9$ (см. следствие 1.3.4). Поверхности дель Пеццо степени 8 и 9 описываются задачами 5 и 6 на стр. 22.

3.2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — поверхность дель Пеццо степени d . Тогда имеют место следующие утверждения.

- (i) При $d = 1$ линейная система $|-K_X|$ — пучок с единственной базисной точкой, а линейная система $|-2K_X|$ задает морфизм

$$\Phi_{|-2K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^3,$$

являющийся двулиственным накрытием своего образа $Q \subset \mathbb{P}^3$, этот образ — квадратичный конус, а дивизор ветвления неособ и высекается кубикой, не проходящей через вершину. Обратно, если неособая поверхность X представляется в виде двулистного накрытия квадратичного конуса $Q \subset \mathbb{P}^3$ с ветвлением в кривой $V = V_6 \subset Q$, высекаемой кубикой, то X — поверхность дель Пеццо степени 1.

- (ii) При $d = 2$ линейная система $|-K_X|$ задает морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^2,$$

являющийся двулиственным накрытием с ветвлением в неособой кривой $V_4 \subset \mathbb{P}^2$ степени 4. Обратно, если неособая поверхность X представляется в виде двулистного накрытия \mathbb{P}^2 разветвленного в кривой $V = V_4 \subset \mathbb{P}^2$ степени 4, то X — поверхность дель Пеццо степени 2.

- (iii) При $d = 3$ линейная система $|-K_X|$ задает морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^3,$$

являющийся вложением, и его образ $X_3 \subset \mathbb{P}^3$ — кубическая поверхность. Обратно, любая неособая кубическая поверхность $X_3 \subset \mathbb{P}^3$ является поверхностью дель Пеццо степени 3.

- (iv) При $d = 4$ линейная система $|-K_X|$ задает морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^4,$$

являющийся вложением, и его образ $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — пересечение двух квадрик. Обратно, любое неособое пересечение двух квадрик $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ является поверхностью дель Пецо степени 4.

3.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае (i) кривая $B = B_6 \subset Q$ — это дивизориальная часть ветвления. При этом кривая B неособа. Морфизм разветвлен также над вершиной конуса $o \in Q$. т.е. прообраз o — одна (неособая) точка на X . Квадратичный конус в \mathbb{P}^3 изоморфен взвешенной проективной плоскости $\mathbb{P}(1^2, 2)$.

Также следует отметить, что в этом случае отображение $\Phi_{|-K_X|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ раскладывается в композицию

$$\Phi_{|-K_X|}: X \xrightarrow{\Phi_{|-2K_X|}} Q \dashrightarrow \mathbb{P}^1,$$

где $Q \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ — проекция из вершины конуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы утверждаем, что при $d \geq 2$ линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек и задает морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^d.$$

Действительно, это вытекает из леммы 3.1.2, примененной к неособому элементу $D \in |-K_X|$, и соответствующего факта об эллиптических кривых: на эллиптической кривой линейная система степени ≥ 2 не имеет базисных точек (см. [32, гл. IV, следствие 3.2]). Аналогично, при $d = 1$ общий элемент $D \in |-2K_X|$ — неособая кривая рода 2 и $-2K_X|_D = 2K_D$ по формуле присоединения. Снова по лемме 3.1.2 линейная система $|-2K_X|$ не имеет базисных точек и задает морфизм

$$\Phi_{|-2K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Также при $d = 1$ линейная система $|-K_X|$ — это эллиптический пучок с единственной базисной точкой. Последнее следует из того, что на эллиптической кривой линейная система степени 1 нульмерна, т. е. состоит из единственного элемента.

Для доказательства (iv)¹ обозначим через $Y \subset \mathbb{P}^4$ образ морфизма $\Phi_{|-K_X|}$ и заметим, что

$$(\deg Y) \cdot (\deg \Phi_{|-K_X|}) = (-K_X)^2 = 4.$$

Так как Y не лежит в гиперплоскости, то $\deg Y > 2$. Единственная возможность:

$$\deg Y = 4, \quad \deg \Phi_{|-K_X|} = 1.$$

Таким образом, $\Phi_{|-K_X|}$ — бирациональный морфизм на свой образ. Так как дивизор $-K_X$ обилен, то этот морфизм также конечен. Это означает, что отображение

$$\Phi = \Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow Y$$

— или изоморфизм, или совпадает с нормализацией Y . Для общей кривой $D \in |-K_X|$ ограничение $\Phi_D: D \rightarrow \mathbb{P}^3$ является изоморфизмом на свой образ (см. [32, гл. IV, следствие 3.2]). По лемме 3.1.2 образ $\Phi(D)$ — гиперплоское сечение Y . Значит, общее гиперплоское сечение Y неособо и поэтому $\dim \text{Sing}(Y) \leq 0$.

Пусть \mathcal{I}_Y — пучок идеалов Y в \mathbb{P}^4 . Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(2) \longrightarrow 0.$$

¹Позднее будет дано другое, более концептуальное доказательство этого факта.

Так как $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)) = 15$ и

$$h^0(Y, \mathcal{O}_Y(2)) \leq h^0(X, \Phi^* \mathcal{O}_Y(2)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(-2K_X)) = 13$$

(см. (1.7.5)), то отсюда получаем оценку $h^0(Y, \mathcal{I}_Y(2)) \geq 2$. Два линейно независимых глобальных сечения пучка $\mathcal{I}_Y(2)$ задают две различные квадрики $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^4$, проходящие через Y . Таким образом, $Y \subset Q_1 \cap Q_2$. Ясно, что квадрики Q_i неприводимы. Поэтому $\dim(Q_1 \cap Q_2) = 2$ и из совпадения степеней получаем $Y = Q_1 \cap Q_2$. Теперь мы знаем, что $Y \subset \mathbb{P}^4$ — полное пересечение. Так как особенности Y изолированы, то по критерию Серра (см. [34, гл. III, предл. 2], [35, § 11.2]) многообразие Y нормально. Значит, $\Phi: X \rightarrow Y$ является изоморфизмом.

Доказательство (iii) аналогично и оставляется читателю.

В случае (ii) морфизм

$$\Phi = \Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$$

конечен и имеет степень 2. Пусть $B \subset \mathbb{P}^2$ — кривая ветвления, пусть l — класс прямой на \mathbb{P}^2 и пусть $n := \deg B$. По формуле Гурвица (1.11.3) имеем

$$K_X = \Phi^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}B \right) = \Phi^* \left(\frac{n-6}{2}l \right).$$

С другой стороны, морфизм Φ задается линейной системой $|-K_X|$. Значит, $-K_X = \Phi^*l$. Так как $\text{Pic}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \cdot [l]$ и Φ^*l не является элементом кручения в $\text{Pic}(X)$ (поскольку это обильный дивизор), то отсюда мы немедленно получаем $n = 4$. Обратное утверждение также следует из (1.11.3).

В случае (i) имеем конечный на свой образ морфизм

$$\Phi = \Phi_{|-2K_X|}: X \longrightarrow Q \subset \mathbb{P}^3,$$

где

$$(\deg Q) \cdot (\deg \Phi_{|-K_X|}) = (-2K_X)^2 = 4.$$

Ограничение Φ на общую эллиптическую кривую $D \in |-K_X|$ двулистно на свой образ. Поэтому $\deg Q = 2$ и $\deg \Phi = 2$. Таким образом, $Q \subset \mathbb{P}^3$ — (неприводимая) квадратика, а образ D — прямая на Q . Более того, так как $D^2 = (-K_X)^2 = 1$, то все эллиптические кривые $D \in |-K_X|$ проходят через единственную базисную точку $D_1 \cap D_2$, где $D_1, D_2 \in |-K_X|$, $D_1 \neq D_2$. Поэтому на Q имеется пучок прямых $\Phi(D)$, проходящих через одну точку. Это означает, что Q — конус.

Пусть l — класс прямой на Q . Тогда $\text{Cl}(Q) = \mathbb{Z} \cdot l$ и $\text{Pic}(Q) = \mathbb{Z} \cdot (2l)$ (см. [32, гл. II, § 6]) и $-K_Q = 4l$. Пусть $B \subset Q$ — кривая ветвления. Тогда $B \sim nl$ для некоторого n . По формуле Гурвица

$$(3.2.3) \quad K_X = \Phi^* \left(K_Q + \frac{1}{2}B \right) = \Phi^* \left(\frac{n-8}{2}l \right).$$

Как и в случае (ii) получаем, что $n = 6$, т.е. $B \sim 6l$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \longrightarrow \mathcal{O}_Q(6l) \longrightarrow 0$$

и обращения в нуль $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ получаем, что B высекается кубикой. \square

3.2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо степени $d = d(X)$ и пусть $-K_X = 2H$. Тогда при $d = 1$, линейная система $|H|$ имеет единственную базисную точку, а при $d \geq 2$ линейная система $|H|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $\Phi_{|H|}: X \rightarrow \mathbb{P}^{d+1}$. Более того, имеют место следующие утверждения.

- (i) При $d = 1$ линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек и задает морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^6,$$

который является двулиственным накрытием своего образа $Y \subset \mathbb{P}^6$ и этот образ — конус над поверхностью Веронезе $S_4 \subset \mathbb{P}^5$, а дивизор ветвления неособ и высекается кубикой. Обратное, если неособое трехмерное многообразие X представляется в виде двулистного накрытия конуса $Y = Y_4 \subset \mathbb{P}^6$ над поверхностью Веронезе $S_4 \subset \mathbb{P}^5$ с дивизором ветвления в поверхности $B \subset Y$, которая высекается кубикой, то X — многообразие дель Пеццо степени 1.

- (ii) При $d = 2$ отображение

$$\Phi_{|H|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

является двулиственным накрытием с ветвлением в неособой поверхности $B_4 \subset \mathbb{P}^3$ степени 4. Обратное, если неособое трехмерное многообразие X представляется в виде двулистного накрытия \mathbb{P}^3 разветвленного в поверхности $B = B_4 \subset \mathbb{P}^3$ степени 4, то X — многообразие дель Пеццо степени 2.

- (iii) При $d = 3$ отображение $\Phi_{|H|}$ — изоморфизм на свой образ и образ $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ — кубическая гиперповерхность. Обратное, любая неособая кубическая гиперповерхность $X_3 \subset \mathbb{P}^4$ является многообразием дель Пеццо степени 3.
- (iv) При $d = 4$ отображение $\Phi_{|H|}$ — изоморфизм на свой образ и образ $X_4 \subset \mathbb{P}^5$ — пересечение двух квадрик. Обратное, любое неособое пересечение двух квадрик $X_4 \subset \mathbb{P}^5$ является многообразием дель Пеццо степени 4.

3.2.5. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $d = 1$ поверхность ветвления $B \subset Y$ не проходит через вершину конуса $o \in Y$. Однако накрытие

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow Y \subset \mathbb{P}^6$$

разветвлено в o . Особая точка $o \in Y$ локально аналитически изоморфна фактору $\mathbb{C}^3/\mu_2(1, 1, 1)$. Поэтому накрытие $X \rightarrow Y$ совпадает с универсальным накрытием в малой проколотой окрестности точки o . Следовательно, $\Phi_{|-K_X|}^{-1}(o)$ — неособая точка многообразия X . Отображение $\Phi_{|H|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ раскладывается в композицию

$$\Phi_{|H|}: X \xrightarrow{\Phi_{|-K_X|}} Y \dashrightarrow \mathbb{P}^2,$$

где $Y \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — проекция из вершины конуса Y .

Отметим также, что конус над поверхностью Веронезе — торическое многообразие. Оно изоморфно взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(1^3, 2)$ [51].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства большинства утверждений полностью аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для поверхностей дель Пеццо и оставляются читателю. Незначительные изменения нужны только в случае (i).

Пусть $d(X) = 1$. Тогда $\dim |H| = 2$ и $\dim |-K_X| = 6$ согласно (1.7.7). Рассмотрим морфизм

$$\Phi = \Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^6.$$

Обозначим через $Y \subset \mathbb{P}^6$ его образ. Пусть $H \in |H|$ — общий элемент (неособая поверхность дель Пеццо степени 1). Так как

$$\mathcal{O}_H(-K_X) = \mathcal{O}_H(2H) = \mathcal{O}_H(-2K_H)$$

и

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-K_X - H)) = H^1(X, \mathcal{O}_X(H)) = 0,$$

то из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-K_X - H) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_H(-K_X) \longrightarrow 0$$

получаем, что отображение

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \longrightarrow H^0(H, \mathcal{O}_H(-2K_H))$$

сюръективно. Значит, морфизм-ограничение $\Phi_H: H \rightarrow \Phi(H)$ задается полной линейной системой $|-2K_H|$ и поэтому он конечен степени 2 (см. предложение 3.2.1 (i)). В частности, морфизм $\Phi: X \rightarrow Y$ не является бирациональным и $\deg \Phi = 2$.

Более того, все поверхности $\Phi(H)$ проходят через одну точку — образ единственной базисной точки линейной системы $|H|$ и общая такая поверхность — квадратичный конус с вершиной в o (см. 3.2.1 (i)). Значит, Y — также конус над некоторой поверхностью $S \subset \mathbb{P}^5$. Далее

$$(\deg Y) \cdot (\deg \Phi) = (-K_X)^3 = 8.$$

Отсюда $\deg Y = 4$ и $\deg S = 4$. Так как S — общее гиперплоское сечение многообразия Y , а $\Phi(H)$ — квадратичный конус, то $S \cap \Phi(H) = \mathbb{P}^5 \cap \Phi(H)$ — плоская коника. Значит, $S = S_4 \subset \mathbb{P}^5$ — поверхность Веронезе (см. предложение 15.4), т. е. образ \mathbb{P}^2 при отображении полной линейной системой коник. Для дивизора ветвления $B \subset Y$ по формуле Гурвица имеем $B \sim 3S$ (ср. (3.2.3) и (1.11.3)). Тогда, согласно предложению 15.2, поверхность B высекается на Y кубикой. \square

3.3. Далее мы рассмотрим проективные вложения многообразий дель Пеццо более детально. Для этого очень удобно рассматривать дивизориальные алгебры.

Пусть V — проективное алгебраическое многообразие и пусть D дивизор на V . Рассмотрим градуированную алгебру

$$R(V, D) := \bigoplus_{d \geq 0} H^0(V, \mathcal{O}_V(dD)).$$

Напомним, что

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(dD)) = \{\varphi \in \mathbb{C}(V) \mid \operatorname{div}(\varphi) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

— подпространство в $\mathbb{C}(V)$. Поэтому $R(V, D)$ удобно рассматривать как подалгебру алгебры $\mathbb{C}(V)[t]$, где каждое пространство $H^0(V, \mathcal{O}_V(dD))$ вложено в компоненту $\mathbb{C}(V)t^d$.

Для любой градуированной алгебры

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$$

через $R^{[n]}$ мы обозначим подалгебру Веронезе (или прореженную подалгебру)

$$R^{[n]} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{nk}.$$

Таким образом, $R(V, D^{[n]}) = R(V, nD)$.

3.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A — обильный дивизор на V . Предположим, что алгебра $R(V, A)$ порождается своей компонентой степени 1. Тогда дивизор A очень обильен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что пучок $\mathcal{O}_V(A)$ порождается своими глобальными сечениями. Достаточно доказать, что глобальные сечения $H^0(V, \mathcal{O}_V(A))$ разделяют точки и касательные векторы. Пусть $P_1, P_2 \in V$ — различные точки. Пусть $W \subset H^0(V, \mathcal{O}_V(A))$ подпространство коразмерности 1, состоящее из сечений, обращающихся в нуль в точке P_1 . Выберем базис $s_1, \dots, s_m \in W$ и дополним его до базиса

$$s_0, s_1, \dots, s_m \in H^0(V, \mathcal{O}_V(A)).$$

Предположим, что все элементы W обращаются в нуль также и в P_2 . Для некоторого $d \gg 0$ дивизор dA очень обилен, поэтому элементы $H^0(V, \mathcal{O}_V(dA))$ разделяют точки, т. е. существует элемент $f \in H^0(V, \mathcal{O}_V(dA))$ такой, что $f(P_1) = 0$ и $f(P_2) \neq 0$. По условию f представляется в виде линейной комбинации сечений

$$s_0^{d_0} s_1^{d_1} \dots s_m^{d_m}, \quad \sum d_i = d.$$

Так как $f(P_1) = 0$, $s_0(P_1) \neq 0$ и $s_i(P_1) = 0$ при $i = 1, \dots, m$, то в этой линейной комбинации отсутствует член s_0^d . Так как $f(P_2) \neq 0$, то $s_i(P_2) \neq 0$ для некоторого $1 \leq i \leq m$. Это означает, что s_i разделяет точки P_1 и P_2 . Аналогично доказывается, что сечения $H^0(V, \mathcal{O}_V(A))$ разделяют касательные векторы. \square

3.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A — обильный дивизор на V . Тогда алгебра $R(V, A)$ конечно порождена и $V \simeq \text{Proj } R(V, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что дивизор A очень обилен. Пусть $V \subset \mathbb{P}^N$ — соответствующее вложение и пусть $\mathcal{J}_V \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ — пучок идеалов. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_V(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_V(dA) \longrightarrow 0$$

и теоремы Серра об обращении в нуль [32, гл. III, теорема 5.2] получаем сюръективность отображений

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)) = S^d H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) = S^d H^0(\mathcal{O}_V(A)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V(dA))$$

при $d \geq d_1$ для некоторого d_1 . Это означает, что $R(V, A)$ порождается компонентами степени $\leq d_1$.

Для произвольного обильного дивизора A возьмем d_0 так, что $d_0 A$ очень обилен и рассмотрим подалгебру Веронезе $R(V, d_0 A)$. Несложно показать, что алгебра $R(V, A)$ конечно порождена тогда и только тогда, когда таковой является $R(V, d_0 A)$ (см., например, [31, гл. III, § 1, п. 3]). Это доказывает конечную порожденность $R(V, A)$. Следовательно, $\text{Proj } R(V, A)$ — схема конечного типа и естественное отображение $X \rightarrow \text{Proj } R(V, A)$ является изоморфизмом. \square

Рассмотрим простейший пример, который будет необходим ниже:

3.3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть C — эллиптическая кривая и пусть A — дивизор на C степени $d > 0$.

(i) Если $d = 1$, то градуированная алгебра $R(C, A)$ имеет вид

$$(3.3.4) \quad R(C, A) = \mathbb{C}[x, y, z]/(f),$$

где $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = 3$, а $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ — квазиоднородный многочлен взвешенной степени 6.

- (ii) Если $d = 2$, то градуированная алгебра $R(C, A)$ порождается своими компонентами степени 1 и 2. Более того, в этом случае

$$R(C, A) = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1]/(h),$$

где $\deg x_i = 1$, $\deg y_1 = 2$, а $h \in \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1]$ — квазиоднородный многочлен взвешенной степени 4.

- (iii) Если $d \geq 3$, то градуированная алгебра $R(C, A)$ порождается своей компонентой степени 1.
 (iv) Если $d \geq 4$, то идеал соотношений в $R(C, A)$ между элементами степени 1 порождается соотношениями степени 2.

Вначале докажем лемму.

3.3.5. ЛЕММА. В обозначениях предложения 3.3.3 существует точка $P \in C$ такая, что $A \sim dP$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение

$$\phi: C \longrightarrow \text{Pic}^0(C), \quad P \longmapsto [dP - A].$$

Отображение не является постоянным. Значит, оно сюръективно и поэтому $\phi(P) = 0$ для некоторой точки $P \in C$. Это и означает, что $A \sim dP$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3.3. (i) По теореме Римана–Роха имеем $h^0(C, \mathcal{O}_C(nA)) = n$ при $n > 0$. Пусть x — любой ненулевой элемент $H^0(C, \mathcal{O}_C(A))$. Выберем элемент $y \in H^0(C, \mathcal{O}_C(2A))$, который не пропорционален x^2 , и элемент $z \in H^0(C, \mathcal{O}_C(3A))$, который не является линейной комбинацией x^3 и xy . Пусть $P \in C$ — точка, заданная сечением x . Для $m > 1$ имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C((m-1)A)) \xrightarrow{\cdot x} H^0(C, \mathcal{O}_C(mA)) \longrightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P) \rightarrow 0.$$

Из нее, в частности, следует, что y и z не обращаются в нуль в P . Также, каждое пространство $H^0(C, \mathcal{O}_C(mA))$ порождается $xH^0(C, \mathcal{O}_C((m-1)A))$ и одним дополнительным элементом, который не обращается в нуль в P . Этот элемент можно выбрать в виде $y^k z^l$, где $2k + 3l = m$. Отсюда получаем, что x, y, z порождают алгебру $R(C, A)$. Также отсюда следует, что элементы x^4, x^2y, y^2, xz образуют базис пространства $H^0(C, \mathcal{O}_C(4A))$, элементы

$$x^5, x^3y, xy^2, x^2z, yz$$

образуют базис $H^0(C, \mathcal{O}_C(5A))$, а между элементами

$$x^6, x^4y, x^2y^2, x^3z, xyz, z^2, y^3$$

в алгебре $R(C, A)$ имеется одно соотношение $f(x, y, z) = 0$ степени 6. Можно считать, что это соотношение имеет вид

$$(3.3.6) \quad f(x, y, z) = z^2 + y^3 + xg(x, y, z) = 0.$$

Ядро гомоморфизма

$$\mathbb{C}[x, y, z] \longrightarrow R(C, A)$$

является однородным простым идеалом I высоты 1. Так как $\mathbb{C}[x, y, z]$ — кольцо с однозначным разложением на множители, то такой идеал должен быть главным. Таким образом, $I = (f)$.

(ii) Рассмотрим теперь случай $d = 2$. По лемме 3.3.5 имеем $A \sim 2P$ для некоторой точки $P \in C$. Следовательно, имеется вложение $R(C, A) \subset R(C, P)$ так, что $R(C, A)$ совпадает с подалгеброй Веронезе:

$$R(C, A) = R(C, P)^{[2]} = (\mathbb{C}[x, y, z]/(f))^{[2]}.$$

Положим $x_1 = x^2$, $x_2 = y$, $y_1 = xz$. Используя описание алгебры $R(C, P)$ приведенное в (i), можно показать, что элементы x_1, x_2, y_1 порождают $R(C, A)$ и между ними имеется соотношение степени 4.

(iii) Как и выше по лемме 3.3.5 имеем $A \sim dP$ для некоторой точки $P \in C$. Следовательно, имеется вложение $R(C, A) \subset R(C, P)$ так, что $R(C, A)$ совпадает с подалгеброй Веронезе:

$$R(C, A) = R(C, P)^{[d]} = (\mathbb{C}[x, y, z]/(f))^{[d]}$$

(см. (3.3.4)). Учитывая соотношение (3.3.6), получаем, что однородная компонента $R(C, A)_n = (\mathbb{C}[x, y, z]/(f))_{dn}$ порождается мономами вида

$$(3.3.7) \quad x^k y^l z^m, \quad k + 2l + 3m = dn, \quad m \in \{0, 1\}.$$

Покажем, что эти элементы можно выразить через элементы компоненты $R(C, A)_1 = (\mathbb{C}[x, y, z]/(f))_d$. Предположим, противное, т.е. некоторый моном $M \in R(C, A)_n$ вида (3.3.7) не выражается через мономы из компоненты $R(C, A)_1 = (\mathbb{C}[x, y, z]/(f))_d$. Выберем n минимальным с этим условием. Рассмотрим случай четного d (нечетный случай аналогичен и оставляется читателю). Если $k \geq d$, то $M = x^d M'$, где M' снова имеет вид (3.3.7) с $d' = d - 1$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $k \leq d - 1$. Если $l \geq d/2$, то аналогично $M = y^{d/2} M'$, $M' \in R(C, A)_{n-1}$. Значит, $l \leq d/2 - 1$. Отсюда $k + 2l \leq 2d - 3$. Учитывая (3.3.7), получаем

$$k + 2l = 2d - 3, \quad n = 2, \quad k = d - 1, \quad l = d/2 - 1 \geq 1.$$

В этом случае мы можем записать

$$M = x^{d-2} y M', \quad M' \in R(C, A)_1.$$

Снова противоречие. Это доказывает утверждение.

Доказательство пункта (iv) оставляется читателю. \square

3.3.8. СЛЕДСТВИЕ. (i) Любая эллиптическая кривая может быть вложена в $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ и задана там уравнением степени 6.

(ii) Любая эллиптическая кривая может быть вложена в $\mathbb{P}(1^2, 2)$ и задана там уравнением степени 4.

(iii) Любая эллиптическая кривая может быть вложена в \mathbb{P}^2 и задана там уравнением степени 3.

(iv) Любая эллиптическая кривая может быть вложена в \mathbb{P}^3 и задана там двумя уравнениями степени 2.

3.3.9. ТЕОРЕМА (принцип гиперплоских сечений, ср. [86, теорема 3.6]). Пусть X — неприводимое проективное многообразие размерности ≥ 2 , \mathcal{L} — обратимый пучок на X и $Y \in |\mathcal{L}|$ — эффективный дивизор. Положим $\mathcal{L}_Y := \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$. Предположим, что

$$(3.3.10) \quad H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0, \quad \forall m \geq 0.$$

Пусть $x_0 \in H^0(X, \mathcal{L})$ — сечение, определяющее дивизор Y . Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) Имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow R(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\cdot x_0} R(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} R(Y, \mathcal{L}_Y) \longrightarrow 0,$$

где φ — отображение ограничения.

- (ii) Пусть $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ — однородные элементы, порождающие $R(Y, \mathcal{L}_Y)$, и пусть $x_1, \dots, x_k \in R(X, \mathcal{L})$ — однородные элементы такие, что $\bar{x}_i = \varphi(x_i)$. Тогда $R(X, \mathcal{L})$ порождается элементами x_0, x_1, \dots, x_k .
- (iii) Если градуированное кольцо $R(Y, \mathcal{L}_Y)$ порождается компонентами степени $\leq r$, то и градуированное кольцо $R(X, \mathcal{L})$ порождается компонентами степени $\leq r$.
- (iv) В предположениях (ii) пусть $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ — однородные порождающие идеала соотношений между $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$. Тогда существуют однородные соотношения f_1, \dots, f_n между x_0, x_1, \dots, x_n в $R(X, \mathcal{L})$ такие, что $\bar{f}_i = \varphi(f_i)$ и f_1, \dots, f_n порождают все соотношения между x_0, x_1, \dots, x_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (ii) и (iii) доказываются индукцией по m . Согласно (3.3.10), имеет место следующая точная последовательность пучков

$$(3.3.11) \quad 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes(m-1)}) \xrightarrow{\cdot x_0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_Y^{\otimes m}) \longrightarrow 0.$$

Отсюда получается (i). Пусть $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$ — произвольный элемент и $\bar{s} \in H^0(Y, \mathcal{L}_Y^{\otimes m})$ — его образ. Тогда по условию $\bar{s} = p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$, где p — некоторый квазиоднородный многочлен степени m . Сечение $s - p(x_1, \dots, x_k)$ обращается в 0 на Y и поэтому имеет вид $x_0 v$ для некоторого $v \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes(m-1)})$. По предположению индукции $v = q(x_0, \dots, x_k)$, где q — квазиоднородный многочлен степени $m - 1$. Следовательно,

$$s = p(x_1, \dots, x_k) + x_0 q(x_0, \dots, x_k),$$

т.е. x_0, x_1, \dots, x_k порождают $\bigoplus_{i \leq m} R(X, \mathcal{L})_m$. Это доказывает (ii) и (iii). Пункт (iv) доказывается аналогично (ii) с использованием последовательности (3.3.11). \square

Теперь из предложения 3.3.3, теоремы 2.1 и теоремы 3.3.9 по индукции мы получаем следующие два утверждения.

3.3.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени d .

(i) Если $d = 1$, то

$$R(Y, -K_Y) = \mathbb{C}[x_0, x_1, y, z]/(f),$$

где $\deg x_i = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = 3$, а f — квазиоднородный многочлен взвешенной степени 6. В частности, Y изоморфна гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1^2, 2, 3)$.

(ii) Если $d = 2$, то

$$R(Y, -K_Y) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, y]/(h),$$

где $\deg x_i = 1$, $\deg y = 2$, а h — квазиоднородный многочлен взвешенной степени 4. В частности, изоморфна гиперповерхности степени 4 в $\mathbb{P}(1^3, 2)$.

(iii) Если $d \geq 3$, то градуированная алгебра $R(Y, -K_Y)$ порождается своей компонентой степени 1. В частности, дивизор $-K_Y$ очень обилен и задает вложение $Y = Y_d \subset \mathbb{P}^d$.

- (iv) Если $d \geq 4$, то антиканонический образ $Y = Y_d \subset \mathbb{P}^d$ является пересечением квадрик.

3.3.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо степени d и пусть $-K_X = 2H$.

- (i) Если $d = 1$, то

$$R(X, H) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, y, z]/(f),$$

где $\deg x_i = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = 3$, а f — квазиоднородный многочлен взвешенной степени 6. В частности, X изоморфно гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1^3, 2, 3)$.

- (ii) Если $d = 2$, то

$$R(X, H) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, y]/(h),$$

где $\deg x_i = 1$, $\deg y = 2$, а h — квазиоднородный многочлен взвешенной степени 4. В частности, X изоморфно гиперповерхности степени 4 в $\mathbb{P}(1^4, 2)$.

- (iii) Если $d \geq 3$, то градуированная алгебра $R(X, H)$ порождается своей компонентой степени 1. В частности, дивизор H очень обилен и задает вложение $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$.

- (iv) Если $d \geq 4$, то полу-антиканонический образ $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ является пересечением квадрик.

3.3.14. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае (i) проекция $X \rightarrow \mathbb{P}(1^3, 2)$ — регулярный морфизм (см. (3.3.6)). Он является двулистным накрытием, описанным в предложении 3.2.4 (i). Аналогично, в случае (ii) проекция $X \rightarrow \mathbb{P}(1^4) = \mathbb{P}^3$ — регулярный двулистный морфизм, описанный в предложении 3.2.4 (ii).

Следующее утверждение — следствие теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях (см. [51, теорема 3.2.4(i)]).

3.3.15. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо степени $d(X) \leq 4$. Тогда $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Далее мы покажем, что для трехмерного многообразия дель Пеццо условие $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ эквивалентно условию $d(X) \leq 5$.

3.4. Теперь мы изучим многообразия дель Пеццо с $\rho(X) > 1$. В этом случае мы можем применить технику экстремальных лучей (см. раздел 14). Сначала мы приведем два общих факта.

3.4.1. ЛЕММА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано, пусть R_1, \dots, R_n — все экстремальные лучи на X и пусть f_1, \dots, f_n — соответствующие экстремальные стягивания. Предположим, что все стягивания f_i на X бирациональны и пусть E_1, \dots, E_n — их исключительные дивизоры (возможно, что $E_i = E_j$ при $i \neq j$). Тогда $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ для некоторых i и j таких, что $E_i \neq E_j$. В частности, образ $f_i(E_i)$ не является точкой для по крайней мере одного i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого i пусть C_i — любая кривая, порождающая луч R_i . Тогда $E_j \cdot C_j < 0$. Далее, пусть Z — кривая, высекаемая на X двумя общими гиперплоскими сечениями. Тогда $E_j \cdot Z > 0$ для любого j и по теореме о конусе

$$Z \approx \sum \alpha_i C_i, \quad \alpha_i \geq 0.$$

Предположим, что $E_i \cap E_j = \emptyset$ как только $E_i \neq E_j$. Тогда

$$E_j \cdot C_i \begin{cases} = 0, & \text{если } E_i \neq E_j, \\ < 0, & \text{если } E_i = E_j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $E_j \cdot Z \leq 0$. Противоречие.

Последнее утверждение следует из того, что слои разных экстремальных стягиваний не могут пересекаться по множеству положительной размерности. \square

3.4.2. ЛЕММА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано. Предположим, что на X имеется экстремальное стягивание типа D. Тогда второе экстремальное стягивание имеет тип C или B_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Также следует из того, что слои экстремальных стягиваний не могут пересекаться по множеству положительной размерности. \square

Из классификации экстремальных лучей на трехмерных многообразиях 14.7 получаем следующее.

3.4.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие дель Пеццо с $\rho(X) > 1$ и пусть $f: X \rightarrow Y$ — экстремальное стягивание Мори. Тогда f может иметь только один из следующих типов:

B_2 : морфизм f — раздутие точки, Y — многообразие дель Пеццо или $Y \simeq \mathbb{P}^3$ и при этом $(-K_Y)^3 = (-K_X)^3 + 8$;

C_2 : морфизм f является \mathbb{P}^1 -расслоением и Y — поверхность дель Пеццо степени $10 - \rho(Y) = 11 - \rho(X)$;

D_2 : морфизм f — расслоение на квадратики и $Y \simeq \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку длина соответствующего экстремального луча в нашей ситуации делится на 2, то из теоремы 14.7 получаем, что стягивание может быть только типов B_2 , C_2 или D_2 . В случае B_2 канонический дивизор $K_Y = f_*K_X$ делится на 2 и Y — многообразие Фано четного индекса по предложению 1.13.3. В случае C_2 для общего (неособого) дивизора $H \in |-K_Y|$ ограничение морфизма $f_H: H \rightarrow Y$ бирационально. Следовательно, Y — поверхность дель Пеццо снова по предложению 1.13.3. \square

3.4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие дель Пеццо с $\rho(X) > 1$. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

(i) $d(X) = 7$ и $X = X_7 \subset \mathbb{P}^8$ — раздутие точки на \mathbb{P}^3 ;

(ii) $d(X) = 6$ и $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;

(iii) $d(X) = 6$ и X — дивизор бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как обычно, $H := -\frac{1}{2}K_X$, $d := d(X)$.

Сначала рассмотрим случай $\rho(X) = 2$. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $f': X \rightarrow Y'$ — различные экстремальные стягивания. Согласно следствию 3.4.3, с точностью до перестановки для типов стягиваний f и f' имеются только следующие возможности:

C_2 - D_2 , C_2 - C_2 , C_2 - B_2 , D_2 - D_2 , B_2 - B_2 , B_2 - D_2 .

По леммам 3.4.2 и 3.4.1 случаи D_2 - D_2 , B_2 - B_2 , B_2 - D_2 невозможны. Таким образом, мы можем считать, что f имеет тип C_2 , т.е. $\dim(Y) = 2$ и f является \mathbb{P}^1 -расслоением. Так как $\rho(Y) = 1$, то $Y \simeq \mathbb{P}^2$.

Пусть $l \subset \mathbb{P}^2$ — прямая и пусть $M := f^{-1}(l)$. Из точной последовательности (14.7.3) получаем, что

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H \oplus \mathbb{Z} \cdot M.$$

Ясно, что $M^3 = 0$ и

$$K_X \cdot M^2 = K_X \cdot f^{-1}(\text{pt}) = -2.$$

Отсюда $H \cdot M^2 = 1$. Поверхность M рациональна и геометрически линейчатая. Поэтому $K_M^2 = 8$. По формуле присоединения

$$8 = K_M^2 = (K_X + M)^2 \cdot M = (M - 2H)^2 \cdot M = -4 + 4H^2 \cdot M.$$

Отсюда $H^2 \cdot M = 3$.

Предположим, что $\dim(Y') = 1$. Тогда $Y' \simeq \mathbb{P}^1$ и $f': X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на двумерные квадратики. Пусть F — общий слой f' . Снова из точной последовательности (14.7.3) следует, что

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H \oplus \mathbb{Z} \cdot F = \mathbb{Z} \cdot H \oplus \mathbb{Z} \cdot M.$$

Значит, мы можем записать $F \sim aH \pm M$, где $a \in \mathbb{Z}_{>0}$. Так как F не является обильным, то $F \sim aH - M$. Ясно, что $F^2 \approx 0$. Поэтому

$$0 = F^2 \cdot M = (aH - M)^2 \cdot M = 3a^2 - 2a.$$

Последнее уравнение не имеет целочисленных положительных решений. Противоречие.

Предположим, что $\dim(Y') = 2$. Тогда $Y' \simeq \mathbb{P}^2$ и $f': X \rightarrow \mathbb{P}^2$ — также \mathbb{P}^1 -расслоение. Пусть $l' \subset Y' = \mathbb{P}^2$ — прямая и пусть $M' := f'^{-1}(l')$. Как и выше имеем

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H \oplus \mathbb{Z} \cdot M', \quad M' \sim aH - M,$$

$$3 = M' \cdot H^2 = (aH - M) \cdot H^2 = ad - 3.$$

Поскольку мы уже знаем, что $d \geq 5$ (см. следствие 3.3.15), то единственная возможность:

$$d = 6, \quad a = 1, \quad H \sim M + M'.$$

Далее, морфизм

$$\hat{f} = f \times f': X \longrightarrow Y \times Y' = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

конечен на свой образ $V := \hat{f}(X) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Из наших соотношений получаем также, что $M^2 \cdot M' = M \cdot M'^2 = 1$. Это показывает, что морфизм \hat{f} также бирационален на свой образ и V — дивизор бистепени $(1, 1)$. Такое многообразие V должно быть нормальным (см. задачу 4). Следовательно, $\hat{f}: X \rightarrow V$ — изоморфизм. Получаем случай (iii).

Предположим, что $\dim(Y') = 3$. Тогда $f': X \rightarrow Y'$ — раздутие точки и Y' — многообразие Фано индекса 2 или 4 с $\rho(Y') = 1$. Пусть $E \subset X$ — исключительный дивизор. Если $\iota(Y') = 4$, то $Y' \simeq \mathbb{P}^3$ и мы получаем случай (i). Пусть $\iota(Y') = 2$. В этом случае дивизор f'_*H порождает группу $\text{Pic}(Y')$. Как и выше мы можем записать $E \sim aH - M$,

$$1 = H^2 \cdot E = H^2 \cdot (aH - M) = ad - 3.$$

Отсюда $d \leq 4$. Это противоречит следствию 3.3.15.

Далее мы рассмотрим случай $\rho(X) \geq 3$. Тогда X не имеет экстремальных стягиваний типа D_2 . По лемме 3.4.1 имеется стягивание $f: X \rightarrow Y$ типа C_2 , т.е. X имеет структуру \mathbb{P}^1 -расслоения над поверхностью Y . Если существует также бирациональное стягивание $f': X \rightarrow Y'$, то его исключительный дивизор изоморфен \mathbb{P}^2 и доминантно (и конечно) отображается на Y . Отсюда следует, что $Y \simeq \mathbb{P}^2$. Это противоречит нашему предположению $\rho(X) \geq 3$. Значит, все экстремальные стягивания на X являются \mathbb{P}^1 -расслоениями.

Предположим, что поверхность Y содержит (-1) -кривую C . Пусть $F := f^{-1}(C)$ и пусть Σ — минимальное сечение линейчатой поверхности $F \simeq \mathbb{F}_n$. Имеем

$$(K_F + \Sigma) \cdot \Sigma = -2 = K_X \cdot \Sigma + F \cdot \Sigma + (\Sigma)_F^2.$$

По формуле проекции $F \cdot \Sigma = f^*C \cdot \Sigma = C^2 = -1$. Отсюда

$$(\Sigma)_F^2 = -1 + 2H \cdot \Sigma \geq 1.$$

Противоречие. Следовательно, мы можем считать, что Y — поверхность, не содержащая (-1) -кривых. Поскольку Y — поверхность дель Пеццо, то $Y \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и поэтому $\rho(X) = 3$.

Пусть

$$\phi_1: X \xrightarrow{f} Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 =: T_1$$

— композиция морфизма f с проекцией на первый множитель. Ясно, что это гладкий морфизм. По формуле присоединения любой слой F_1 этого морфизма является поверхностью дель Пеццо с $\iota(F_1) = 2$. Поэтому, $F_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, т.е. ϕ_1 — расслоение на квадратики. Далее, $\rho(X/T_1) = 2$. Следовательно, относительный конус Мори $\overline{NE}(X/T_1)$ имеет два экстремальных луча и поэтому, кроме f , существует другое экстремальное стягивание $f': X \rightarrow Y' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ над T_1 :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

Значит, имеется морфизм

$$\phi: X \longrightarrow Y \times_{\mathbb{P}^1} Y' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Пусть $\phi_i: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $i = 1, 2, 3$ — композиции морфизма ϕ с проекциями на множители. Для каждой пары индексов $1 \leq i \neq j \leq 3$ морфизм

$$\phi_i \times \phi_j: X \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

является экстремальным стягиванием Мори (поскольку $-K_X$ обилиен и $\rho(X/\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1$). Пусть F_1, F_2 и F_3 — слои ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 , соответственно. Как и выше, несложно видеть, что $F_i \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\mathcal{O}_{F_i}(H) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 1)$. Так как $h^0(X, \mathcal{O}_X(H)) = d(X) + 2 \geq 7$, то из стандартной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(H - F_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(H) \longrightarrow \mathcal{O}_{F_i}(H) \longrightarrow 0$$

получаем, что $|H - F_i| \neq \emptyset$. Так как на многообразии X нет бирациональных стягиваний, то на нем каждый эффективный дивизор численно эффективен (см. следствие 1.6.2). Следовательно, $H \cdot C \geq F_i \cdot C$ для любой кривой C .

По формуле Гурвица

$$-2H = K_X = \phi^*K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} + G = -2F_1 - 2F_2 - 2F_3 + G,$$

где G — дивизор ветвления. Отсюда следует, что существует (целый) дивизор D такой, что Тогда

$$2D \sim G, \quad F_1 + F_2 + F_3 \sim H + D.$$

Для слоя ℓ стягивания $\phi_1 \times \phi_2$ имеем $\ell \approx F_1 \cdot F_2$, $F_1 \cdot \ell = F_2 \cdot \ell = 0$, $F_3 \cdot \ell \leq H \cdot \ell = 1$ и

$$1 \geq F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = F_3 \cdot \ell = (F_1 + F_2 + F_3) \cdot \ell = H \cdot \ell + D \cdot \ell = 1 + D \cdot \ell.$$

Следовательно, $D \cdot \ell = 0$. Аналогично получаем, что D тривиально пересекается со слоями всех стягиваний $\phi_i \times \phi_j$, $i \neq j$. Отсюда следует, что $D \approx 0$ и $G \approx 0$. Но это означает, что $G = 0$ (поскольку дивизор G эффективен). Таким образом, морфизм ϕ этален. Поскольку многообразии $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ односвязно, он должен быть изоморфизмом. Получаем случай (ii). Предложение 3.4.4 доказано. \square

3.5. Теперь мы можем завершить классификацию многообразий дель Пеццо. Осталось рассмотреть случаи $\rho(X) = 1$. Согласно предложению 3.3.13, мы можем ограничиться случаями $d(X) \geq 5$. Основной результат — теорема 3.6, но сначала мы приведем необходимые сведения о семействах прямых на многообразиях дель Пеццо.

3.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ — многообразие дель Пеццо степени $d = d(X) \geq 4$ с $\rho(X) = 1$. Имеют место следующие утверждения.

- (i) На X существует прямая.
- (ii) Пусть $l \subset X$ — прямая. Через l можно провести неособое гиперплоское сечение.
- (iii) $\mathcal{N}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ или $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.
- (iv) Пусть $F_1(X)$ — схема Гильберта, параметризующая прямые на X . Тогда $F_1(X)$ приведена, неособа и любая ее компонента двумерна.
- (v) Через каждую точку $P \in X$ проходит конечное (ненулевое) число прямых.
- (vi) Прямая $l \subset X$, соответствующая достаточной общей точке в компоненте $F_1(X)$, имеет нормальный пучок вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.
- (vii) Каждую прямую пересекает по крайней мере одна другая прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Прямая существует на неособом гиперплоском сечении $H \subset X$ поскольку $K_H^2 \leq 8$ и $H \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (см. замечание 3.1.1).

(ii) Счет параметров: гиперплоские сечения, проходящие через l образуют подпространство коразмерности 2 в $(\mathbb{P}^{d+1})^*$. Особые в некоторой точке l гиперплоские сечения образуют подмногообразие коразмерности ≥ 3 .

(iii) Имеем разложение $\mathcal{N}_{l/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$. Далее

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{l/H} \longrightarrow \mathcal{N}_{l/X} \longrightarrow \mathcal{N}_{H/X}|_l \longrightarrow 0$$

где $\mathcal{N}_{l/H} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ и $\mathcal{N}_{H/X}|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Отсюда $a + b = 0$. Так как $h^0(\mathcal{N}_{l/X}) \leq h^0(\mathcal{N}_{H/X}|_l) = 2$, то $a, b \leq 1$.

(iv) Следует из теории деформаций (см. [71, теоремы 2.8 и 2.15]). Так как $H^1(X, \mathcal{N}_{l/X}) = 0$, то схема $F_1(X)$ неособа в точке $[l]$. Так как

$$\dim T_{[l], F_1(X)} = h^0(l, \mathcal{N}_{l/X}) = 2,$$

то она двумерна.

(v) Если через точку $P \in X$ проходит одномерное семейство прямых, то эти прямые заматают поверхность $F \subset X$, которая содержится в пересечении $X \cap \overline{T_{P,X}}$, где $\mathbb{P}^3 = \overline{T_{P,X}} \subset \mathbb{P}^{d+1}$ — вложенное проективное касательное пространство. Но тогда гиперплоское сечение $H \subset X$, проходящее через $\overline{T_{P,X}}$ приводимо. Это противоречит условию $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$.

Таким образом, через каждую точку $P \in X$ проходит не более конечного числа прямых. Рассмотрим универсальное семейство прямых и диаграмму

$$(3.5.2) \quad \begin{array}{ccc} & \mathfrak{U}(X) & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ \mathbb{F}_1(X) & & X \end{array}$$

Так как $\dim \mathfrak{U}(X) = 3 = \dim(X)$, то q — конечный морфизм. Значит, через каждую точку $P \in X$ проходит по крайней мере одна прямая.

(vi) Снова рассмотрим диаграмму (3.5.2). Так как $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 0$, то дифференциал

$$dq: \mathcal{N}_{l/\mathfrak{U}(X)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{N}_{l/X}$$

вырожден вдоль l тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Иначе говоря, $\mathcal{N}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ тогда и только тогда, когда прямая $l \subset X$ содержится в дивизоре ветвления морфизма q .

Наконец, докажем (vii). Пусть l — произвольная прямая на X . Возьмем кривую $\Gamma \subset \mathbb{F}_1(X)$, не проходящую через точку $[l] \in \mathbb{F}_1(X)$. Тогда $q(p^{-1}(\Gamma))$ — поверхность, заметаемая одномерным семейством прямых, не содержащем l . Так как $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$, то $q(p^{-1}(\Gamma))$ — обильный дивизор и поэтому $l \cap q(p^{-1}(\Gamma)) \neq \emptyset$. Следовательно, l пересекает по крайней мере одну прямую из семейства Γ . \square

3.6. ТЕОРЕМА. Пусть X — трехмерное многообразие дель Пецо с $d(X) \geq 5$ и $\rho(X) = 1$. Тогда $d(X) = 5$, многообразие $X = X_5 \subset \mathbb{P}^6$ единственно с точностью до изоморфизма и $X = \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^9$ (вложение Плюккера).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, запишем $-K_X = 2H$. Пусть $l \subset X$ — прямая и пусть $\psi: X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$ — проекция из l , где $Y = \psi(X)$ — образ ψ . Отображение ψ задается линейной системой $|H - l|$ гиперплоскостей, проходящих через l . В этом случае l совпадает (как схема) с базисным множеством $\text{Bs } |H - l|$ этой линейной системы. Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие l , пусть $H^* := \sigma^*H$ и пусть E — исключительный дивизор. Тогда собственный прообраз $|H - l|$ на \tilde{X} является полной линейной системой $|H^* - E|$ размерности

$$(3.6.1) \quad \dim |H^* - E| = d - 1.$$

Согласно конструкции, эта линейная система не имеет базисных точек. Мы можем записать

$$-K_{\tilde{X}} = \sigma^*(-K_X) - E = H^* + H^* - E,$$

где дивизоры H^* и $H^* - E$ численно эффективны и не пропорциональны. Так как $\rho(\tilde{X}) = 2$, то их сумма — обильный дивизор, т.е. \tilde{X} — многообразие Фано.

Поскольку $\deg \mathcal{N} = 0$ (см. предложение 3.5.1 (iii)), то из леммы 1.9.2 получаем

$$(3.6.2) \quad H^{*3} = d, \quad H^{*2} \cdot E = 0, \quad H^* \cdot E^2 = -1, \quad E^3 = 0.$$

Из (3.6.1) и точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^* - 2E) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^* - E) \longrightarrow \mathcal{O}_E(H^* - E) \longrightarrow 0$$

получаем

$$(3.6.3) \quad \dim |H^* - 2E| \geq d - 5.$$

В частности, $|H^* - 2E| \neq \emptyset$. Напомним, что $\rho(\tilde{X}) = 2$. Следовательно, конус $\overline{NE}(\tilde{X})$ имеет ровно два экстремальных луча (и они оба отрицательны относительно $K_{\tilde{X}}$). Пусть $R_\varphi \subset \overline{NE}(\tilde{X})$ — экстремальный луч отличный от луча, порожденного исключительными кривыми для σ , и пусть $\varphi: \tilde{X} \rightarrow Y$ — стягивание R_φ . Тогда $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$. Пусть M — обильная образующая этой группы. Пусть J — любая прямая на X , пересекающая l и пусть \tilde{J} — ее собственный прообраз. Тогда $(H^* - E) \cdot \tilde{J} = 0$. Поскольку дивизор $H^* - E$ численно эффективен, то он является опорным дивизором для луча $R_\varphi = \mathbb{R}_+[\tilde{J}]$, т.е. равенство $(H^* - E) \cdot C = 0$ выполнено для некоторой кривой C на \tilde{X} тогда и только тогда, когда $[C] \in R_\varphi$. Таким образом, $H^* - E = \varphi^*M$. Отсюда следует также, что слоями φ будут собственные прообразы прямых, пересекающих l .

Заметим, что любой элемент линейной системы

$$\sigma_*(|H^* - 2E|) \subset |H|$$

неприводим. Однако линейная система $|H^* - 2E|$ может иметь дивизор E своей неподвижной компонентой. Возьмем m максимальным таким, что $|H^* - mE| \neq \emptyset$ и пусть $D \in |H^* - mE|$ — произвольный дивизор. (На самом деле, из наших вычислений ниже получится, что $m = 2$.) Тогда D — неприводимый дивизор. Согласно (3.6.3), имеем $m \geq 2$. Поэтому $D \cdot \tilde{J} < 0$. Это означает, что φ — бирациональное стягивание и D — его исключительный дивизор.

Но тогда

$$\dim |H^* - mE| = \dim |H^* - 2E| = 0.$$

Следовательно, $d = 5$ (см. (3.6.3)). Учитывая (3.6.2), мы можем записать

$$0 = (\varphi^*M)^2 \cdot D = (H^* - E)^2 \cdot D = (H^* - E)^2 \cdot (H^* - mE) = 4 - 2m.$$

Отсюда $m = 2$, т.е. $D \sim H^* - 2E$. Далее

$$\varphi^*M \cdot D^2 = (H^* - E) \cdot D^2 = (H^* - E) \cdot (H^* - 2E)^2 = -3.$$

Следовательно, φ стягивает D на кривую Z . Более того, φ — стягивание типа B_1 . Это означает, что Y — неособое многообразие, Z — неособая кривая и φ — раздутие Y вдоль Z . Более того,

$$M \cdot Z = -\varphi^*M \cdot D^2 = 3.$$

Так как

$$-K_Y = \varphi_*(-K_X) = \varphi_*(2H^* - E) = \varphi_*(3\varphi^*M - D) = 3M,$$

то Y — многообразие Фано индекса 3, т.е. $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадрака. При этом $Z \subset Q \subset \mathbb{P}^4$ — кривая степени 3. Такая кривая не может также лежать в плоскости. Следовательно, Z — скрученная рациональная кубика в \mathbb{P}^3 .

Несложно также получить, что $(H^* - E)^2 \cdot E = 2$, т.е. $\varphi(E)$ — гиперплоское сечение. Если $\mathcal{M}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, то $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\varphi(E)$ — неособое гиперплоское сечение, изоморфное $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. В этом случае Z — дивизор бистепени $(1, 2)$ на $\varphi(E) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Если же $\mathcal{M}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, то $E \simeq \mathbb{F}_2$ и морфизм φ стягивает отрицательное сечение этой линейчатой поверхности. Следовательно, $\varphi(E)$ — квадратичный конус в этом случае. В обоих случаях дивизор $\varphi(E)$ однозначно определяется кривой Z : он высекается на Q линейной оболочкой $\langle Z \rangle = \mathbb{P}^3$.

Таким образом, мы получаем диаграмму

$$(3.6.4) \quad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \varphi \\ X & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & Q \end{array}$$

где σ — раздутие прямой $l \subset X$, φ — раздутие рациональной скрученной кубической кривой Z на неособой квадрике Q , а ψ — проекция из l . Конструкция (3.6.4) полностью определяется парой (X, l) . с другой стороны, начиная с (неособой) квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$ и скрученной кубики $Z \subset Q$, мы можем однозначно восстановить диаграмму, а значит и (X, l) .

Мы можем считать, что $\mathcal{M}_l \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ (см. предложение 3.5.1 (vi)). Группа $\text{Aut}(Q)$ автоморфизмов квадрики Q транзитивно действует на множестве неособых гиперплоских сечений, а стабилизатор любого неособого гиперплоского сечения транзитивно действует на множестве неособых дивизоров бистепени $(1, 2)$. Это означает, что наше многообразие X единственно с точностью до изоморфизма. С другой стороны, сечение $\text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^9$ является многообразием Фано индекса 2 степени 5. Значит, $X \simeq \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6$. Теорема 3.6 доказана. \square

3.6.5. СЛЕДСТВИЕ. *Многообразие дель Пеццо $X_5 \subset \mathbb{P}^6$ степени 5 рационально.*

Этот результат обобщается на формы многообразия $X_5 \subset \mathbb{P}^6$ над незамкнутыми полями [76].

3.6.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Конструкция, аналогичная используемой в доказательстве теоремы, может быть применена к многообразию дель Пеццо $X_4 \subset \mathbb{P}^5$ — полному пересечению двух квадрик (см. упражнение 1, стр. 77).

3.6.7. ЗАМЕЧАНИЕ (см. [95], [78]). Многообразие $X_5 \subset \mathbb{P}^6$ является квазиоднородным относительно действия группы $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Чтобы пояснить это обозначим через M_d пространство бинарных форм степени d от переменных x_1, x_2 . Элементы M_d являются однородными многочленами степени d от x_1, x_2 . Группа $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ действует естественным образом на пространстве M_d и индуцирует действие $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ на проективном пространстве $\mathbb{P}(M_d)$.

Рассмотрим многочлен

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) \in M_6$$

и пусть $[f] \in \mathbb{P}(M_6)$ — соответствующая точка. Многочлен f является полуинвариантом бинарной группы октаэдра $\text{Oct} \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ [33, гл. 4]. Утверждается, что замыкание $\overline{\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [f]} \subset \mathbb{P}(M_6)$ орбиты $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [f] \simeq \text{SL}_2(\mathbb{C})/\text{Oct}$ является многообразием Фано $X_5 \subset \mathbb{P}^6$ (см. [95]). Действительно, имеет место разложение $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -представлений:

$$\wedge^2 M_4 = M_6 \oplus M_2.$$

При этом элемент f представляется в виде $f = h_1 \wedge h_2 \in M_6 \subset \wedge^2 M_4$, где $h_1, h_2 \in M_4$ — два различных полуинварианта тетраэдральной подгруппы $\text{Tet} \subset \text{Oct}$. Группа $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ естественно действует на

$$\text{Gr}(2, 5) = \text{Gr}(2, M_4) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 M_4)$$

при этом многообразии $\text{Gr}(2, M_4) \cap \mathbb{P}(M_6)$ инвариантно и содержит точку $[f] = [h_1 \wedge h_2]$. Следовательно, оно содержит и орбиту $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [f]$, которая должна быть плотным

открытым подмножеством. Можно показать, что $\text{Gr}(2, M_4) \cap \mathbb{P}(M_6)$ неособо, следовательно, это многообразие дель Пеццо степени 5 (см. задачу 8).

Таким образом, трехмерные многообразия Фано индекса 2 описываются следующей таблицей 1 (напомним, что $h^{1,2}(X) = \dim H^{1,2}(X)$ — среднее число Ходжа многообразия X).

Таблица 1. Трехмерные многообразия дель Пеццо.

	$d(X)$	$\rho(X)$	$h^{1,2}(X)$	X
1.1°	1	1	21	гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^3, 2, 3)$
1.2°	2	1	10	гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1^4, 2)$
1.3°	3	1	5	$X_3 \subset \mathbb{P}^4$, гиперповерхность степени 3
1.4°	4	1	2	$X_4 \subset \mathbb{P}^5$, пересечение двух квадрик
1.5°	5	1	0	$X_5 \subset \mathbb{P}^6$, сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^5) = \mathbb{P}^9$, подпространством коразмерности 3
1.6°	6	3	0	$X_6 \subset \mathbb{P}^7$, $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
1.7°	6	2	0	$X_6 \subset \mathbb{P}^7$, дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$
1.8°	7	2	0	$X_7 \subset \mathbb{P}^8$, раздутие точки на \mathbb{P}^3

Многообразия дель Пеццо произвольной размерности (т.е. n -мерные многообразия Фано индекса $n - 1$) классифицированы в работах Т. Фужиты. Они имеют такое же описание, что и трехмерные (см. задачи 11 и 12 ниже).

- ЗАДАЧИ.
1. Докажите, что при соответствующем выборе образующих x, y, z алгебры соотношение f в (3.3.4) может быть записано в виде $f = z^2 + y^3 + ayx^4 + bx^6$, $a, b \in \mathbb{C}$. Какие условия накладываются при этом на коэффициенты a, b ? Выведите отсюда явный вид соотношения f в 3.3.12 (i) и 3.3.13 (i).
 2. Вычислите каноническую алгебру $R(C, K_C)$ для кривой C рода 2. Выведите отсюда, что C вкладывается во взвешенную проективную плоскость $\mathbb{P}(1^2, 3)$.
 3. Вычислите числа Ходжа $h^{1,2}(X)$ для многообразий дель Пеццо степени $d \leq 4$.
 4. Пусть V — гиперплоское сечение $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ (вложение Плюккера). Докажите, что существует ровно три класса (с точностью до изоморфизма) таких многообразий V : неособое, имеющее одну обыкновенную двойную точку, и приводимое, имеющее две компоненты. В частности, многообразие V нормально, если оно неприводимо.
 5. Пусть Y — трехмерное неособое многообразие и пусть $f: X \rightarrow Y$ — раздутие неособой кривой $C \subset Y$. Предположим, что X — многообразие Фано, а Y таковым не является. Докажите, что кривая C неособа и рациональна, а дивизор $-K_Y$ численно эффективен. *Указание:* Примените теорему о конусе

на X и найдите кривую, отрицательно пересекающуюся с исключительным дивизором $E = f^{-1}(C)$.

6. Какие утверждения предложения 3.5.1 нарушаются для многообразий дель Педро степени ≤ 3 ?
7. Докажите, что имеются следующие два аналога конструкции из замечания 3.6.7 (аналог для группы икосаэдра см. в примере 13.5.1).
 - (а) Бинарная группа тетраэдра $\text{Tet} \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ имеет два полуинварианта $h_i = x_1^4 \pm 2\sqrt{3}x_1^2x_2^2 + x_2^4 \in M_4$. Замыкание орбиты $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [h_i]$ является неособой квадрикой.
 - (б) Бинарная группа диэдра $\mathfrak{D}_3 \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ имеет два полуинварианта $h_i = x_1^3 \pm x_2^3 \in M_3$. Замыкание орбиты $\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [h_i]$ совпадает с $\mathbb{P}(M_3) = \mathbb{P}^3$.
 В обоих случаях опишите $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ -орбиты размерности ≤ 2 .
8. Докажите, что многообразие $\text{Gr}(2, M_4) \cap \mathbb{P}(M_6)$ в замечании 3.6.7 неособо (и имеет правильную размерность). Опишите $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ -орбиты размерности ≤ 2 на этом многообразии.
9. Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^6$ — многообразие дель Педро степени 5. Докажите, что схема Гильберта $F_1(X)$ прямых на X неприводима и изоморфна проективной плоскости. Докажите, что через общую точку X проходят три прямые. *Указание:* Воспользуйтесь конструкцией (3.6.4) и покажите, что прямые на X , пересекающие данную, параметризуются рациональной кривой и общие такие кривые пересекаются по одной точке.
10. Опишите схему Гильберта $F_1(X)$ прямых на многообразиях дель Педро степени ≥ 6 .
11. Докажите, что многомерные многообразия дель Педро степени $d \leq 4$ (т.е. многообразия Фано размерности n индекса $n - 1$) имеют то же описание, как и 1.1^о–1.4^о таблицы 1.
12. Докажите, что многообразие Фано размерности $n \geq 4$ индекса $n - 1$ и степени $d \geq 6$ изоморфно $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.
13. Предположим, что трехмерное многообразие Фано X является двулистным накрытием другого многообразия Фано Y . Опишите все возможности для таких накрытий.

4. Базисные точки в антиканонической системе

В этой лекции мы зададимся вопросом о том, когда антиканоническая линейная система $|-K_X|$ на многообразии Фано имеет базисные точки. Поскольку нас интересуют многообразия с числом Пикара 1, то основным результатом является следующая.

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) = 1$. Тогда линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек.

Однако трехмерные многообразия Фано с базисными точками в линейной системе $|-K_X|$ существуют, что показывает следующий пример.

4.2. ПРИМЕР. Пусть Y — многообразие дель Педро степени 1 и пусть $M := -\frac{1}{2}K_Y$. Рассмотрим рациональное отображение $\pi: Y \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, заданное линейной системой $|M|$. Общий слой этого отображения — неособая кривая рода 1. Пусть $B \subset Y$ — любой неособый слой, и пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — раздутие с центром B . Обозначим $\overline{M} := \varphi^*M$,

и пусть $D := \varphi^{-1}(B)$ — исключительный дивизор. Ясно, что кривая B является теоретико-схемным пересечением двух элементов $M_1, M_2 \in |M|$. Поэтому линейная система $|\overline{M} - D|$ — пучок без базисных точек. Имеем $K_X = -2\overline{M} + D$. По критерию обильности Клеймана 14.1.1 дивизор

$$-K_X \sim (\overline{M} - D) + \overline{M}$$

обилён, т.е. X — многообразие Фано. Используя соотношения (1.9.3), получаем

$$(-K_X)^3 = (2\overline{M} - D)^3 = 8 - 6 + 2 = 4.$$

Значит, X — многообразие Фано индекса 1 рода 3 с $\rho(X) = 2^1$.

На X имеется ровно два экстремальных стягивания: бирациональный морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ и морфизм $\psi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, заданный линейной системой $|\overline{M} - D|$. Легко видеть, что $\psi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ является расслоением на поверхности дель Пеццо степени 1. Пусть $\Omega \in |\overline{M} - D|$ — общий слой этого расслоения. Так как $-K_X - \Omega \sim \overline{M}$, то по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-K_X - \Omega)) = 0.$$

Значит, по лемме 3.1.2

$$\Omega \cap \text{Bs } |-K_X| = \text{Bs } |-K_\Omega|.$$

Так как на Ω линейная система $|-K_\Omega|$ имеет единственную базисную точку $P = \text{Bs } |-K_\Omega|$, то множество $\text{Bs } |-K_X|$ — кривая $Z = \varphi^{-1}(P)$, являющаяся сечением расслоения $\psi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Оказывается, что многообразий Фано с $\text{Bs } |-K_X| \neq \emptyset$ и произвольным числом Пикара немного. Можно классифицировать такие многообразия полностью:

4.3. ТЕОРЕМА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано такое, что линейная система $|-K_X|$ имеет базисные точки. Тогда X или изоморфно произведению $F \times \mathbb{P}^1$, где F — поверхность дель Пеццо степени 1, или является многообразием из примера 4.2.

Доказательству теорем 4.1 и 4.3 посвящена вся лекция. Первый шаг в доказательстве этих теорем — непосредственное следствие соответствующих фактов о поверхностях типа КЗ (см. раздел 16).

4.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие Фано рода $g = g(X)$ и пусть $S \in |-K_X|$ — неособый дивизор. Предположим, что линейная система $|-K_X|$ имеет базисные точки. Тогда

$$(4.4.1) \quad \mathcal{O}_S(-K_X) = \mathcal{O}_S(Z + gC), \quad g \geq 3,$$

где Z — гладкая рациональная (-2) -кривая на S , а C — слой эллиптического пучка без базисных точек на S и $Z \cdot C = 1$. В частности,

$$(4.4.2) \quad -K_X \cdot C = 1, \quad \iota(X) = 1 \quad \text{и} \quad -K_X \cdot Z = g - 2.$$

Более того, $\text{Bs } |-K_X| = Z$ (как схема). Образом отображения $\Phi_{|-K_X|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$ является поверхность минимальной степени (см. раздел 15)

$$W = W_g \subset \mathbb{P}^{g+1}.$$

¹Напомним, что родом трехмерного многообразия Фано X называется целое положительное число $g(X) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$ (см. 1.8.2)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что S — поверхность типа КЗ (см. предложение 1.5.1). Пусть $A := -K_X|_S$. Тогда пучок $\mathcal{O}_S(A) = \mathcal{O}_S(-K_X)$ обилен на S и $A^2 = 2g - 2$. Так как $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то по лемме 3.1.2

$$\text{Bs}|A| = S \cap \text{Bs}|-K_X| = \text{Bs}|-K_X|.$$

Значит, по теореме 16.5 имеем $|A| = Z + m|C|$, где Z и C — такие как в (4.4.1), а $m \geq 3$ поскольку

$$-2 + m = (Z + mC) \cdot Z = A \cdot Z = -K_X \cdot Z > 0.$$

Следовательно, $|-K_X|$ имеет единственную базисную кривую Z и не имеет других базисных точек, поскольку их не имеет линейная система $|mC|$ на S . Далее,

$$2g - 2 = (-K_X)^3 = A^2 = (Z + mC)^2 = -2 + 2m.$$

Отсюда $g = m$. Ограничение Φ_S отображения Φ на поверхность S является морфизмом, заданным линейной системой $|gC|$. Эта линейная система составлена из эллиптического пучка $|C|$, поэтому Φ_S раскладывается в композицию

$$\Phi_S: S \xrightarrow{\Phi|_C} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\Phi|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(g)}} \Lambda \subset \mathbb{P}^g,$$

где $\Lambda \subset \mathbb{P}^g$ — рациональная нормальная кривая степени g . Но эта кривая $\Lambda = \Phi_S(Z)$ есть не что иное, как сечение $W = \Phi(S)$ гиперплоскостью в \mathbb{P}^{g+1} , соответствующей дивизору S . Следовательно, $\dim(W) = 2$ и $\deg W = g$. Предложение доказано. \square

Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие кривой Z , пусть $E := \sigma^{-1}(Z)$ — исключительный дивизор и пусть $\tilde{S} \subset \tilde{X}$ — собственный прообраз поверхности S . Тогда E с проекцией на Z — рациональная линейчатая поверхность изоморфная \mathbb{F}_e для некоторого $e \geq 0$. Обозначим через Σ исключительную кривую — сечение $E \simeq \mathbb{F}_e$ и через Υ — ее слой. Положим $H^* := \sigma^*(-K_X)$. Имеем $-K_{\tilde{X}} \sim H^* - E \sim \tilde{S}$. Из (1.9.3) получаем

$$(4.4.3) \quad H^{*3} = 2g - 2, \quad H^{*2} \cdot E = 0, \quad H^* \cdot E^2 = 2 - g, \quad E^3 = 4 - g.$$

Рассмотрим отображение

$$\delta := \Phi|_{-K_X} \circ \sigma: \tilde{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+1}.$$

Оно задается линейной системой

$$|\tilde{S}| = |-K_{\tilde{X}}| = |H^* - E|,$$

которая не имеет базисных точек, поскольку кривая Z является схемным базисным множеством линейной системы $|-K_X|$. Следовательно, дивизор $-K_{\tilde{X}} = H^* - E$ численно эффективен и δ — морфизм. Его общий слой является геометрически неприводимой гладкой эллиптической кривой. Действительно, среди слоев морфизма δ содержатся собственные прообразы кривых из эллиптического пучка $|C|$ на S . Таким образом, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \delta \\ X & \dashrightarrow \Phi & W = W_g \subset \mathbb{P}^{g+1} \end{array}$$

4.4.4. ЛЕММА. *Выполнено равенство*

$$(4.4.5) \quad -K_{\tilde{X}}|_E \sim \Sigma + \frac{g+e}{2}\Upsilon, \quad g \geq e.$$

В частности, $g \equiv e \pmod{2}$. Далее, ограничение δ на E является бирациональным морфизмом, переводящим слои линейчатой поверхности E в прямые на $W = W_g \subset \mathbb{P}^{g+1}$. Следовательно, $W = W_g \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — либо неособая линейчатая поверхность (в случае, когда $g > e$), либо конус над рациональной нормальной кривой (если $g = e$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как E — исключительный дивизор раздутия, то

$$E = \mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/X}^\vee), \quad \mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/X}^\vee)}(-1).$$

Отсюда

$$-K_{\tilde{X}}|_E = (H^* - E)|_E \sim \Sigma + a\Upsilon$$

для некоторого a . Используя (4.4.3), вычисляем:

$$-e + 2a = (\Sigma + a\Upsilon)^2 = (H^* - E)^2 \cdot E = g.$$

Отсюда получаем (4.4.5), а также $\deg \delta = 1$ поскольку $\deg W = g$. Так как $(H^* - E)|_E \sim \Sigma + a\Upsilon$, то слои линейчатой поверхности $E = \mathbb{F}_e$ переходят в прямые при отображении, заданном линейной системой $|H^* - E|$. Поэтому W — или неособая линейчатая поверхность, или конус над рациональной нормальной кривой. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. В этом случае $\rho(\tilde{X}) = 2$. Следовательно, $\rho(W) = 1$ и поэтому $W = W_g \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — конус над рациональной нормальной кривой степени $g \geq 3$. Пусть $l \subset W$ — прямая-образующая конуса и пусть $w_0 \in W$ — его вершина. Тогда gl — гиперплоское сечение поверхности W и поэтому $-K_{\tilde{X}} \sim \delta^*(gl)$. Так как $\text{Pic}(\tilde{X}) = \mathbb{Z} \cdot (-K_{\tilde{X}}) \oplus \mathbb{Z} \cdot E$ в нашем случае, то любой дивизор \tilde{D} на \tilde{X} , не пересекающий общий слой морфизма δ , пропорционален $-K_{\tilde{X}}$, т.е. является полным прообразом дивизора на W . В частности, образ \tilde{D} не может быть точкой. Следовательно, $\dim \delta^{-1}(w_0) = 1$. По теореме Бертини для общего выбора l замыкание $\tilde{F} := \overline{\delta^{-1}(l \setminus \{w_0\})}$ является неприводимой поверхностью. На открытом подмножестве $\tilde{U} := \tilde{X} \setminus \delta^{-1}(w_0)$ имеет место линейная эквивалентность $\delta^*(gl) \sim g\tilde{F}$. Мы можем продолжить ее на все многообразие \tilde{X} :

$$-K_{\tilde{X}} \sim \delta^*(gl) \sim g\tilde{F}.$$

Но тогда $-K_X = -\sigma_*K_{\tilde{X}}$ делится на g . Значит, $\iota(X) \geq g > 1$. Это противоречит (4.4.2), следовательно, и доказывает теорему 4.1. \square

Теперь мы приступим к доказательству теоремы 4.3.

4.4.6. ЛЕММА. *Дивизор E относительно обилен над W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда по относительной версии критерия обильности Клеймана $E \cdot z \leq 0$ для некоторого ненулевого элемента $z \in \overline{\text{NE}}(\tilde{X}/W)$. Значит

$$\sigma^*(-K_X) \cdot z = (E - K_{\tilde{X}}) \cdot z = E \cdot z \leq 0.$$

Так как σ — экстремальное стягивание, то $\sigma^*(-K_X) \cdot z = 0$ и $z \approx \alpha[\Upsilon]$, где Υ — слой $E \simeq \mathbb{F}_e$, а $\alpha > 0$. Но так как $-K_{\tilde{X}} \cdot \Upsilon > 0$, то элемент z не может лежать в $\overline{\text{NE}}(\tilde{X}/W)$. Противоречие. \square

4.4.7. ЛЕММА. *Любой слой морфизма δ над точкой $w \in W \setminus \text{Sing}(W)$ является приведенной неприводимой кривой арифметического рода 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \tilde{X}_w — схемный слой морфизма δ над точкой $w \in W \setminus \text{Sing}(W)$.

Если $N \subset \tilde{X}_w$ — двумерная компонента, то пересечение $E \cap N$ непусто по лемме 4.4.6 и это множество должно быть стягиваемой на E кривой, которая, в свою очередь, должна быть исключительным сечением Σ линейчатой поверхности $E = \mathbb{F}_e \rightarrow Z$. Следовательно, W — конус с вершиной в w . Это противоречит нашему предположению $w \in W \setminus \text{Sing}(W)$.

Значит, все слои над гладкими точками $w \in W$ одномерны. Тогда слой \tilde{X}_w является локально полным пересечением в \tilde{X} . В частности, \tilde{X}_w не имеет вложенных компонент. Если $\tilde{X}_w \subset \tilde{S}$, то $E \cdot \tilde{X}_w = (Z \cdot \sigma(\tilde{X}_w))_S = 1$. Так как многообразие \tilde{X} неособо, то морфизм δ является плоским над $W \setminus \text{Sing}(W)$ (см., например, [81, теорема 23.1]). Следовательно, равенство $E \cdot \tilde{X}_w = 1$ имеет место для любой точки $w \in W \setminus \text{Sing}(W)$. Так как дивизор E относительно обилен, то слой \tilde{X}_w неприводим и приведен. Так как $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{X}_w = 0$, то $\rho_a(\tilde{X}_w) = 1$. \square

4.5. ЛЕММА. *Имеет место разложение*

$$(4.5.1) \quad -K_{\tilde{X}} = \tilde{D} + \frac{g+e}{2}\tilde{F}, \quad g \geq e, \quad g \geq 3,$$

где \tilde{D} — простой дивизор с носителем в $\delta^{-1}(\delta(\Sigma))$, а \tilde{F} — слой над прямой $\delta(\Upsilon)$, т.е.

$$\tilde{F} := \overline{\delta^{-1}(\delta(\Upsilon) \setminus \delta(\Sigma))},$$

причем $\dim |\tilde{F}| > 0$ и \tilde{F} — неприводимая поверхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $l := \delta(\Upsilon)$ и рассмотрим следующий дивизор на W :

$$\Theta := \begin{cases} \delta(\Sigma), & \text{если } \delta_E: E \rightarrow W \text{ — изоморфизм,} \\ 0, & \text{если } W \text{ — конус.} \end{cases}$$

По конструкции дивизор $-K_{\tilde{X}}$ является полным прообразом класса гиперплоского сечения L поверхности $W = W_g \subset \mathbb{P}^{g+1}$, причем $L \sim \Theta + \frac{g+e}{2}l$. На открытом подмножестве $U := \tilde{X} \setminus \tilde{D}$ имеет место линейная эквивалентность $\delta^*L \sim \frac{g+e}{2}\tilde{F}$. Мы можем продолжить ее на все многообразие \tilde{X} :

$$-K_{\tilde{X}} \sim \delta^*L = \tilde{D} + \frac{g+e}{2}\tilde{F},$$

где \tilde{D} — эффeктивный дивизор с носителем в $\delta^{-1}(\delta(\Sigma))$. Ограничим это равенство на E . Так как дивизор E является δ -обильным, то любая компонента правой части пересекает E . По конструкции $\text{Supp}(\tilde{D} \cap E) = \Sigma$ и $\text{Supp}(\tilde{F} \cap E) = \Upsilon$. Сравнивая с (4.4.5), получим $\tilde{D} \cap E = \Sigma$ и $\tilde{F} \cap E = \Upsilon$ (пересечения в схемном смысле). Поэтому дивизор \tilde{D} неприводим и высекает на E исключительное сечение Σ . По построению дивизор \tilde{F} варьируется в семействе. Следовательно, $\dim |\tilde{F}| > 0$. \square

4.5.2. СЛЕДСТВИЕ. *Если W является конусом, то слой δ над вершиной $w_0 \in W$ двумерен.*

4.5.3. СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место соотношение*

$$(4.5.4) \quad -K_X = D + \frac{g+e}{2}F, \quad g \geq e, \quad g \geq 3,$$

где $F := \sigma(\tilde{F})$, $\dim |F| > 0$, а $D := \sigma(\tilde{D})$ — простой дивизор такой, что $D \cap S = Z$. Более того, для общего элемента $S \in |-K_X|$ пересечение $F \cap S = C$ — элемент эллиптического пучка и поэтому $F \cdot C = 0$.

4.6. ЛЕММА. *Если дивизор D является численно эффективным, то $X \simeq Y \times \mathbb{P}^1$, где Y — поверхность дель Пеццо степени 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о конусе существует экстремальный луч R такой, что $F \cdot R > 0$. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — его стягивание. Для соответствующей минимальной экстремальной кривой ℓ имеем (см. теорему 14.7)

$$3 \geq -K_X \cdot \ell = \mu(R) = D \cdot \ell + \frac{g+e}{2}F \cdot \ell \geq \frac{g+e}{2} \geq 2.$$

где $\mu(R)$ — длина экстремального луча R . Так как $g \geq 3$ и $D \cdot \ell \geq 0$, то $F \cdot \ell = 1$ и $g+e \leq 6$.

Если $g+e > 4$, то $g+e = 6$ и $D \cdot \ell = 0$. Более того, в этом случае $\mu(R) = 3$. Согласно классификации экстремальных лучей 14.7, луч R имеет тип D_3 и дивизор D является слоем стягивания φ . В частности, $\dim |D| > 0$ и $\text{Bs } |D| = \emptyset$. Но тогда кривая $Z = D \cap S$ должна быть подвижной на S . Противоречие.

Значит, $g+e = 4$ и луч R может иметь тип D_2 , D_3 , C_2 или B_2 (по теореме 14.7 так как $\mu(R) \geq 2$). Выберем два общих элемента $F_1, F_2 \in |F|$. Тогда пересечения $F_i \cap S$ — различные элементы эллиптического пучка $|C|$ и поэтому $F_1 \cap F_2 \cap S = \emptyset$. Так как $S \in |-K_X|$ — обильный дивизор, то $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Если φ имеет двумерный слой N , то $F_1 \cap F_2 \cap N \neq \emptyset$ (поскольку дивизоры F_1 и F_2 обильны относительно φ). Противоречие показывает, что R имеет тип C_2 , т.е. φ является \mathbb{P}^1 -расслоением над неособой поверхностью Y . При этом F_1 и F_2 — непересекающиеся сечения. Тогда $X \simeq Y \times \mathbb{P}^1$. Ясно, что Y — поверхность дель Пеццо и $K_Y^2 = 1$ поскольку $\text{Bs } |-K_Y| \neq \emptyset$. \square

Далее мы предполагаем, что дивизор D не является численно эффективным. Тогда существует экстремальный луч R такой, что $D \cdot R < 0$. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — его стягивание. Тогда φ бирационально и его исключительный дивизор совпадает с D . По критерию обильности Клеймана (см. задачу 2) дивизор

$$-2K_X - D = -K_X + \frac{g+e}{2}F$$

обилён. Следовательно, по теореме Кодаиры об обращении в нуль

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-K_X - D)) = 0.$$

Тогда по лемме 3.1.2 полная обильная линейная система $|\mathcal{O}_D(-K_X)|$ на D имеет кривую Z своей неподвижной компонентой.

Снова, согласно классификации экстремальных лучей (теорема 14.7), поверхность D изоморфна \mathbb{P}^2 или квадратичному конусу, или является неособой минимальной линейчатой поверхностью. Обильная линейная система на такой поверхности может иметь базисные точки только в последнем случае и если при этом поверхность нерациональна [32, гл. V, теорема 2.17]. Таким образом, D — линейчатая поверхность над

нерациональной кривой. В частности, R имеет тип B_1 , т.е. Y неособо и φ является раздутием неособой нерациональной кривой $B \subset Y$. Тогда Y — многообразие Фано (см. задачу 5, стр. 52).

Для слоя ℓ линейчатой поверхности D/B имеем $-K_X \cdot \ell = 1$ и $D \cdot \ell = -1$. Из (4.5.4) получаем $F \cdot \ell = 1$ и $g+e = 4$. Отсюда $g \leq 4$. Так как $g \geq 3$, то $g > e$ и поэтому $E \simeq W$ (см. лемму 4.4.4). Тогда $\delta(\tilde{D}) = \delta(\Sigma)$ — кривая и $\tilde{D} \rightarrow \delta(\tilde{D})$ — эллиптическое расслоение (см. лемму 4.4.7). Следовательно, $B := \varphi(D)$ неособая эллиптическая кривая. Мы также имеем $-K_X \cdot Z = g - 2$. Так как Z — неособая рациональная кривая, лежащая на D , то она является слоем линейчатой поверхности D . Поэтому $D \cdot Z = -1$ и $-K_X \cdot Z = 1 = g - 2$ (см. (4.4.2)), т.е. $g = 3$ и $e = 1$. Учитывая соотношения (1.9.3), мы можем записать

$$4 = 2g - 2 = (-K_X)^3 = (-K_Y)^3 + 2g(B) - 2 + 2K_Y \cdot B = (-K_Y)^3 + 2K_Y \cdot B.$$

Из (4.5.4) следует, что $-K_Y = \varphi_*(-K_X) = 2M$, где $M := \phi_*F$. Таким образом, индекс $\iota(Y)$ многообразия Фано Y четен и

$$2M^3 = 1 + M \cdot B.$$

Отсюда следует, что M не делится на 2 и поэтому $\iota(Y) = 2$.

Рассмотрим два общих элемента $F_1, F_2 \in |F|$ и пусть $M_i := \varphi(F_i)$. Тогда $B \subset M_1 \cap M_2$. с другой стороны, $M_1 \cap M_2$ — кривая арифметического рода 1. Отсюда следует, что $B = M_1 \cap M_2$ и тогда $M \cdot B = M^3 = 1$. Получаем случай из примера 4.2. Теорема 4.3 полностью доказана.

Отметим, что трехмерные особые многообразия Фано (с каноническими горенштейновыми особенностями) классифицированы в работе [60].

Задачи. 1. Пусть $X = Y \times \mathbb{P}^1$, где Y — поверхность дель Пеццо степени 1.

Докажите, что линейная система $|-K_X|$ имеет базисные точки.

2. Пусть X — трехмерное многообразие Фано и пусть $|F|$ — линейная система на X положительной размерности, не имеющая неподвижных компонент. Докажите, что дивизор F численно эффективен. *Указание:* Воспользуйтесь классификацией экстремальных лучей 14.7.

3. Пусть X — трехмерное неособое проективное многообразие такое, что антиканонический класс $-K_X$ численно эффективен и объем (обобщенное многообразие Фано). Пусть $(-K_X)^3 = 2$ и предположим, что линейная система $|-K_X|$ содержит неособую поверхность. Докажите, что $|-K_X|$ задает морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

который является конечным в общей точке и имеет степень 2.

5. Гиперэллиптические многообразия Фано

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Трехмерное многообразие Фано X называется *гиперэллиптическим*, если линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек (и задает морфизм), но не является очень обильной.

Например, согласно предложению 3.2.4 (i) многообразие дель Пеццо степени 1 является гиперэллиптическим. Термин “гиперэллиптическое Фано” поясняет следующий лемма 5.2 ниже.

Вначале напомним, что по теореме 2.1 и предложению 1.5.1 на любом трехмерном многообразии Фано X рода g общий элемент $S \in |-K_X|$ является неособой поверхностью типа КЗ. Если же линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек, то пересечение $C = S_1 \cap S_2$ общих элементов $S_1, S_2 \in |-K_X|$ является неособой кривой рода g и по формуле присоединения $K_C = -K_X|_C$.

5.2. ЛЕММА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано X такое, что линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) X является гиперэллиптическим,
- (ii) существует элемент $S \in |-K_X|$, являющийся неособой гиперэллиптической поверхностью типа КЗ (относительно поляризации $\mathcal{O}_S(-K_X)$, см. теорему 16.8),
- (iii) существуют, элементы $H_1, H_2 \in |-K_X|$ пересечение которых является неособой гиперэллиптической кривой.

Более того, эквивалентность сохранится, если в (ii) и (iii) “существует” заменить на “любой неособый”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (iii) \implies (ii) \implies (i) очевидным образом следуют из определений и сюръективности соответствующих отображений ограничения. Докажем (i) \implies (ii). Если поверхность S типа КЗ не является гиперэллиптической, то согласно теореме 16.8 (i) градуированная алгебра $R(S, -K_X|_S)$ порождается своей компонентой степени 1. Так как

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-mK_X)) = 0 \quad \forall m \geq 0,$$

то по теореме 3.3.9 то же самое верно и для алгебры $R(X, -K_X)$. Значит, дивизор $-K_X$ очень обилен. Доказательство (ii) \implies (iii) аналогично и использует теорему М. Нётера о канонических кривых 16.1. \square

5.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — трехмерное гиперэллиптическое многообразие Фано X рода g . Тогда линейная система $|-K_X|$ задает конечный двулистный морфизм $\Phi = \Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^{g+1}$ на свой образ $Y = \Phi(X)$. При этом образ Y является многообразием минимальной степени (см. раздел 15). Если $\iota(X) = 1$, то многообразие Y неособо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(-K_X))$$

сюръективно. Тогда согласно теореме 16.8 и лемме 5.2 морфизм

$$\Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow Y \subset \mathbb{P}^{g+1}$$

не является бирациональным на свой образ. Имеем

$$2g - 2 = (-K_X)^3 = (\deg \Phi) \cdot (\deg Y),$$

где $\deg \Phi \geq 2$ и $\deg Y \geq g + 1 - 3 + 1$ согласно предложению 15.1. Отсюда $\deg \Phi = 2$ и $\deg Y = g - 1$.

Докажем неособость Y . Предположим противное. Пусть многообразие Y особо. В частности, $X \not\cong \mathbb{P}^3$ и поэтому $g = g(X) \geq 3$. Напомним, что многообразие минимальной степени нормально (см. предложение 15.4).

Рассмотрим случай $\dim \text{Sing}(Y) = 1$. Тогда $\text{Sing}(Y) = L$ — прямая и Y — конус с вершиной L над рациональной нормальной кривой $C = C_{g-1} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ (см. предложение 15.4). Несложно вычислить, что в этом случае группа $\text{Cl}(Y)$ порождается классом плоскости $\Pi \subset Y$ (см. упражнение 2, стр. 65). Так как Φ — доминантный конечный морфизм, то имеется корректно определенное отображение

$$\Phi^*: \mathbb{Z} \simeq \text{Cl}(Y) \longrightarrow \text{Cl}(X) = \text{Pic}(X),$$

которое является вложением, поскольку его образ не может быть группой кручения. При этом $-K_X = \Phi^*H_Y$, где H_Y — класс гиперплоского сечения Y . Подсчет степеней дает нам $H_Y \sim (g-1)\Pi$. Значит, $-K_X \sim (g-1)\Phi^*\Pi$, т.е. $\iota(X) \geq g-1 \geq 2$. Это противоречит нашему предположению.

Предположим, что $\dim \text{Sing}(Y) = 0$. Тогда $\text{Sing}(Y) = \{o\}$ — точка и Y — конус с вершиной o над неособой рациональной линейчатой поверхностью $S = S_{g-1} \subset \mathbb{P}^g$ или над поверхностью Веронезе $S = S_4 \subset \mathbb{P}^5$ (снова по предложению 15.4). Во втором случае, как и выше, получаем $\iota(X) > 1$. Рассмотрим случай, когда $S = S_{g-1} \subset \mathbb{P}^g$ — неособая рациональная линейчатая поверхность. В этом случае Y содержит семейство плоскостей, пересекающихся только в вершине o . Их прообразы на X пересекаются по конечному множеству $\Phi^{-1}(o)$. Но это невозможно на неособом многообразии. \square

5.4. ТЕОРЕМА. Пусть X — трехмерное гиперэллиптическое многообразие Фано с $\rho(X) = 1$. Тогда X — одно из следующих:

- (i) многообразие дель Пеццо степени 1;
- (ii) $\iota(X) = 1$, $g(X) = 2$, $X = X_6 \subset \mathbb{P}(1^4, 3)$ — гиперповерхность степени 6;
- (iii) $\iota(X) = 1$, $g(X) = 3$, $X = X_{2.4} \subset \mathbb{P}(1^5, 2)$ — пересечение квадратичного конуса и гиперповерхности степени 4. В этом случае X можно задать в $\mathbb{P}(1^5, 2)$ следующими уравнениями:

$$\phi_2(x_0, \dots, x_4) = \phi_4(x_0, \dots, x_4, y) = 0, \quad \deg x_i = 1, \quad \deg y = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3.2.1, при $\iota(X) > 1$ мы получаем случай (i). Поэтому далее мы будем считать, что $\iota(X) = 1$. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонический образ X , где $g := g(X)$. Согласно следствию 5.3, $Y = Y_{g-1} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — неособое многообразие минимальной степени. Если $\rho(Y) > 1$, то из предложения 15.4 следует, что многообразие Y имеет структуру \mathbb{P}^2 -расслоения над \mathbb{P}^1 . Поэтому в этом случае X имеет сюръективный морфизм на кривую. Это противоречит нашему предположению $\rho(X) = 1$.

Следовательно, $\rho(Y) = 1$. Снова из предложения 15.4 следует, что многообразие Y изоморфно или проективному пространству \mathbb{P}^3 или неособой квадрике $Y_2 \subset \mathbb{P}^4$.

В случае $Y \simeq \mathbb{P}^3$ по формуле Гурвица (1.11.3) дивизор ветвления $B \subset \mathbb{P}^3$ — поверхность степени 6, а в случае $Y = Y_2 \subset \mathbb{P}^4$ дивизор ветвления B высекается на $Y_2 \subset \mathbb{P}^4$ гиперповерхностью степени 4. Далее, как и в случае многообразий дель Пеццо строится вложение X во взвешенное проективное пространство. \square

В случае $\rho(X) > 1$ гиперэллиптические многообразия Фано также могут быть классифицированы с использованием следствия 5.3 и предложения 15.3. Мы воспроизведем эту классификацию ниже. Наш подход немного отличается от [11, гл. 2, теорема 2.2] и основан на методе экстремальных лучей [88].

5.5. ТЕОРЕМА ([11, гл. 2, теорема 2.2]). Пусть X — трехмерное гиперэллиптическое многообразие Фано рода $g := g(X)$ с $\rho(X) > 1$. Тогда X представляется в виде

двулистного накрытия неособого рационально-линейчатого многообразия $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$, где

$$(5.5.1) \quad \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_3), \quad d_i > 0$$

с вложением

$$\Phi|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)}: Y \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+1},$$

заданным тавтологической линейной системой $|M| = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)|$, где

$$(5.5.2) \quad g = d_1 + d_2 + d_3 + 1.$$

Дивизор ветвления $B \subset Y$ накрытия $\Phi: X \rightarrow Y$ принадлежит линейной системе

$$(5.5.3) \quad |4M + 2(2 - d_1 - d_2 - d_3)F|,$$

где F — слой проекции $\pi: Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Имеют место только случаи в таблице 2. Все эти случаи реализуются.

Таблица 2. Гиперэллиптические трехмерные многообразия Фано с $\rho(X) > 1$.

g	d_i	ρ	Y	B	X
4	(1, 1, 1)	2	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с вложением Сегре в \mathbb{P}^5	дивизор бистепени (2, 4)	см. задачу 5
5	(2, 1, 1)	2	раздутие \mathbb{P}^3 вдоль прямой $l \subset \mathbb{P}^3$	собственный прообраз неособой кватрики $\bar{B} \subset \mathbb{P}^3$, трансверсально пересекающей прямую l	раздутие многообразия дель Пеццо V степени 2 вдоль гладкой кривой — пересечения двух дивизоров $H_1, H_2 \in -\frac{1}{2}K_V $
7	(2, 2, 2)	9	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, вложение в \mathbb{P}^8 задается дивизором бистепени (2, 1)	дивизор бистепени (0, 4)	$F \times \mathbb{P}^1$, F — поверхность дель Пеццо степени 2

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Заметим, что $\iota(X) = 1$ согласно предложению 3.2.1. Пусть

$$\Phi: X \longrightarrow Y = Y_{g-1} \subset \mathbb{P}^{g+1}$$

— антиканоническое отображение, где $Y = \Phi(X)$. По нашему предположению и следствию 5.3 морфизм Φ является двулистным накрытием, а $Y = Y_{g-1} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — неособое многообразие минимальной степени. Пусть $B \subset Y$ — дивизор ветвления морфизма Φ .

Очевидно, что при $g \leq 3$ многообразие Y изоморфно \mathbb{P}^3 или квадрике в \mathbb{P}^4 . В этих случаях многообразие X является полным пересечением во взвешенном проективном пространстве (как в случаях 5.4 (ii) и (iii)). Но тогда $\rho(X) = 1$. Это противоречит нашим предположениям. Значит, $g \geq 4$. Тогда согласно предложению 15.4 многообразие имеет вид $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{O}_Y(1)$. При этом класс гиперплоского сечения — это класс тавтологического расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Разложим расслоение \mathcal{E} в сумму линейных: $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$. Так как расслоение \mathcal{E} обильно, то $d_i > 0$ для любого i . Запишем \mathcal{E} в виде (5.5.1). Тогда

$$g + 2 = h^0(\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})}(1)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}) = \sum d_i + 3.$$

Откуда получаем (5.5.2). Далее, по формуле Гурвица

$$K_X = \Phi^* (K_Y + \frac{1}{2}B).$$

Пусть M — тавтологический дивизор на $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$. Так как M — также гиперплоское сечение многообразия $Y = Y_{g-1} \subset \mathbb{P}^{g+1}$, то $-K_X = \Phi^*M$. Формулу для канонического дивизора 15.3 (v) в нашей ситуации можно записать в виде

$$K_Y = -3M + (-2 + \sum d_i) F.$$

Таким образом,

$$-\Phi^*M = K_X = \Phi^* (-3M + (-2 + \sum d_i) F + \frac{1}{2}B).$$

Отсюда

$$B \sim 4M + 2(2 - \sum d_i) F.$$

Это доказывает (5.5.3).

Далее, композиция

$$\lambda: X \xrightarrow{\Phi} Y \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$$

является стягиванием (необязательно экстремальным). По формуле присоединения общих слоев S морфизма λ — поверхность дель Пеццо. Ограничение антиканонического отображения Φ на S является конечным морфизмом $S \rightarrow \Phi(S) = \mathbb{P}^2$ степени 2 на слой $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$ над \mathbb{P}^1 . Ясно, что это морфизм разветвлен над кватрикой $\Phi(S) \cap B$. Следовательно, S — поверхность дель Пеццо степени 2.

Из (5.5.2) и (5.5.3) немедленно следует, что при $g = 4$ и $g = 5$ для X имеют место соответствующие случаи в таблице 2. Далее мы считаем, что $g > 5$.

Для любого k имеет место естественный изоморфизм

$$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M + kF)) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \pi_*\mathcal{O}_Y(M + kF)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k)).$$

Так как $\deg \mathcal{E} = \sum d_i = g - 1 \geq 5$, то по теореме Римана-Роха

$$\dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M - 2F)) > 1.$$

Отсюда $\dim |M - 2F| > 0$ и поэтому имеет место разложение

$$-K_X \sim 2S + D,$$

где $D = \Phi^*(M - 2F)$ — эффективный дивизор такой, что $\dim |D| > 0$.

По теореме о конусе на X существует экстремальный луч R такой, что $S \cdot R > 0$. Пусть φ — его стягивание, пусть $\mu(R)$ — его длина и пусть ℓ — соответствующая минимальная рациональная кривая (см. (14.5.3)). Поскольку $S \cdot R > 0$, то никакая кривая на X не может одновременно стягиваться морфизмами φ и λ , поэтому никакой слой φ не может быть двумерным. Следовательно R имеет тип C или B_1 .

Предположим, что R имеет тип B_1 (т.е. φ является раздутием гладкой кривой на гладком многообразии). Пусть E — соответствующий исключительный дивизор. Так как $E \cdot \ell = -1$ и

$$1 = -K_X \cdot \ell = 2S \cdot \ell + D \cdot \ell \geq 2 + D \cdot \ell,$$

то $D \cdot \ell < 0$ и E — неподвижная компонента линейной системы $|D|$, т.е. мы можем записать

$$|D| = rE + |L|,$$

где $r > 0$, а $|L|$ — линейная система, у которой E не является неподвижной компонентой. Тогда, как и выше, имеем

$$1 = -K_X \cdot \ell = -r + 2S \cdot \ell + L \cdot \ell.$$

Если $|L|$ составлена из слоев λ , то $L \cdot \ell > 0$ и $r > 1$. В этом случае $-K_S = -K_X|_S = rE|_S$ делится на $r > 1$ в группе $\text{Pic}(S)$. Это невозможно на поверхности дель Педро степени 2. Таким образом, дивизор L пересекает общий слой S . Так как $|L|$ — подвижная линейная система, $E \cap S \neq \emptyset$ и $(rE + L)|_S = -K_S$, то

$$2 = K_S^2 = r(-K_S) \cdot (E \cap S) + (-K_S) \cdot (L \cap S) \geq r + 1 \geq 3.$$

Противоречие показывает, что R имеет тип C . Тогда

$$\mu(R) = -K_X \cdot \ell \geq 2S \cdot \ell \geq 2.$$

Значит, R имеет тип C_2 (т.е. φ является \mathbb{P}^1 -расслоением) и $S \cdot \ell = 1$. Поэтому S и S' — непересекающиеся сечения. Поскольку они линейно эквивалентны, то X , на самом деле, является прямым произведением \mathbb{P}^1 и поверхности дель Педро степени 2 (случай $g = 7$). Теорема доказана. \square

Позднее нам понадобится следующий факт относящийся к многообразиям более общим, чем многообразия Фано.

5.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — неособое трехмерное проективное многообразие такое, что антиканоническая линейная система $|-K_X|$ обьемна и не имеет базисных точек. Пусть

$$\Phi = \Phi_{|-K_X|}: X \longrightarrow X_1 \subset \mathbb{P}^N$$

— антиканонический морфизм, где X_1 — его образ. Тогда многообразие X_1 нормально и имеет место одно из следующих:

- (i) морфизм $\Phi: X \rightarrow X_1$ бирационален и имеет связные слои и многообразие X_1 имеет не хуже чем канонические горюшительновы особенности;
- (ii) морфизм $\Phi: X \rightarrow X_1$ конечен в общей точке, имеет степень 2 и $X_1 \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие минимальной степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 1.7.3, используя формулу Римана–Роха и обращение в нуль Каваматы–Фивега, запишем

$$N = \dim |-K_X| = g + 1, \quad \text{где } (-K_X)^3 = 2g - 2.$$

Ясно, что

$$(\deg \Phi) \cdot (\deg X_1) = (-K_X)^3 = 2g - 2.$$

Отсюда, согласно предложению 15.1, имеем $\deg \Phi \leq 2$. Если $\deg \Phi = 2$, то $X_1 \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — многообразие минимальной степени $g - 1$ (в частности, оно нормально). Получаем случай (ii).

Предположим, что $\deg \Phi = 1$. Тогда морфизм Φ бирационален и $\deg X_1 = 2g - 2$. Рассмотрим общий элемент $S \in |-K_X|$. По теореме Бертини S — неособая поверхность. Несложно проверить, что S — поверхность типа КЗ. Дивизор $A = -K_X|_S$ является численно эффективным и обьемным. При этом поверхность S вместе с дивизором $-K_X|_S$ не является гиперэллиптической. Поэтому, согласно теореме 16.8 (i), алгебра $R(S, -K_X|_S)$ порождается своей компонентой степени 1. Снова по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-nK_X)) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_X(-nK_X))$$

сюръективно при $n \geq 1$. Значит, по теореме 3.3.9, алгебры $R(X, -K_X)$ также порождается своей компонентой степени 1.

Рассмотрим факторизацию Штейна

$$\Phi: X \xrightarrow{\psi_0} X_0 \xrightarrow{\psi_1} X_1.$$

Пусть H_1 — гиперплоское сечение X_1 и пусть $H_0 := \psi_1^* H_1$. Тогда H_1 — дивизор Картье и $\psi_0^* H_0 = -K_X$. Имеет место изоморфизм градуированных алгебр

$$R(X, -K_X) \simeq R(X_0, H_0).$$

и алгебра $R(X_0, H_0)$ также порождается своей компонентой степени 1. Следовательно, дивизор H_0 очень обилен (см. предложение 3.3.1) и ψ_1 является изоморфизмом. Таким образом, многообразие X_1 нормально и $-K_X = \Phi^* H_1$. Применим Φ_* к этому равенству: $K_{X_1} = -H_1$. В частности, K_{X_1} — дивизор Картье и $K_X = \Phi^* K_{X_1}$. Это означает, что особенности X_1 — канонические горнштейновы. Получаем случай (i). \square

В заключение отметим, что трехмерные гиперэллиптические многообразия Фано с горнштейновыми каноническими особенностями классифицированы в работе [1].

- Задачи.
1. Покажите, что гиперэллиптические многообразия типа 5.4 (iii) и трехмерные кватрики в \mathbb{P}^4 принадлежат одному неприводимому семейству. Более того, многообразия 5.4 (iii) являются вырождениями кватрик.
 2. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+2}$ — трехмерный конус над рациональной нормальной кривой $C_d \subset \mathbb{P}^d$ (с вершиной в прямой). Докажите, что группа классов дивизоров Вейля $Cl(X)$ порождается классом плоскости $\Pi \subset X$. Как в нее вложена группа Пикара?
 3. Пусть $S = S_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ — неособая поверхность минимальной степени, изоморфная \mathbb{F}_e и пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+2}$ — конус над S . Чем порождается группа классов дивизоров Вейля $Cl(X)$? Как в нее вложена группа Пикара?
 4. Опишите все экстремальные лучи для многообразий из таблицы 2.
 5. Докажите, что многообразие рода 4 из таблицы в теореме 5.5 допускает вложение во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1^{12}, 2)$ и реализуется там как пересечение конуса над $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, вложенного в \mathbb{P}^{11} линейной системой бистепени $(1, 2)$, и квадрики.

6. Тригональные многообразия Фано

Напомним, что классическая теорема Нётера-Энриквеса-Петри утверждает, что гладкая каноническая кривая $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ рода $g \geq 4$ высекается квадриками за исключением случаев, когда C — или тригональная кривая (т.е. обладает одномерным рядом \mathfrak{g}_3^1) или кривая рода 6, изоморфная плоской квинтике (см. теорему 16.2). Как и гиперэллиптичность, тригональность канонических кривых имеет аналог для поверхностей типа КЗ (теорема 16.9) и для многообразий Фано:

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Трехмерное многообразие Фано X называется *тригональным*, если линейная система $|-K_X|$ является очень обильной, но антиканонической образ $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ не является пересечением квадрик.

6.2. ЛЕММА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано X такое, что дивизор $-K_X$ очень обилен. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) X является тригональным,
- (ii) существует элемент $S \in |-K_X|$, который является тригональной поверхностью типа КЗ (относительно поляризации $\mathcal{O}_S(-K_X)$),
- (iii) существуют элементы $H_1, H_2 \in |-K_X|$, пересечение которых является неособой тригональной канонической кривой.

Более того эквивалентность сохранится, если в (ii) и (iii) “существует” заменить на “любой неособый”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (iii) \implies (ii) \implies (i) очевидным образом следуют из определений. Докажем (i) \implies (ii). Если поверхность S типа КЗ не является тригональной, то согласно теореме 16.9 однородный идеал $I_Y \subset R(S, -K_X|_S)$ порождается элементами степени 2. По теореме 3.3.9 то же самое верно и для идеала $I_X \subset R(X, -K_X)$. Доказательство (ii) \implies (iii) аналогично и использует теорему Энриквеса–Петри о канонических кривых 16.2. \square

6.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — трехмерное тригональное многообразие Фано X рода g . Тогда все квадрики в \mathbb{P}^{g+1} , проходящие через X , высекают четырехмерное многообразие $W = W_{g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ минимальной степени (см. раздел 15). Если $g \geq 5$, то это многообразие неособо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $P \in W$ и рассмотрим достаточно общее линейное линейное подпространство в $\mathbb{P}^g \subset \mathbb{P}^{g+1}$ такое, что $S := X \cap \mathbb{P}^g$ — неособая поверхность (типа КЗ). По теореме 3.3.9 (iv) любая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^g$, проходящая через S , продолжается до квадрики $Q' \subset \mathbb{P}^{g+1}$, проходящей через X . Значит, $V := W \cap \mathbb{P}^g$ высекается квадратиками в \mathbb{P}^g , содержащими S , и в силу теоремы 16.9 (ii) многообразие V неприводимо и является многообразием минимальной степени $V = V_{g-2} \subset \mathbb{P}^g$. Следовательно, W также неприводимо и является многообразием минимальной степени $W = W_{g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$. Если $g \geq 5$, то согласно теореме 16.9 (iii), многообразие V неособо в точке P , и это же верно для W . Следовательно, в этом случае W неособо всюду и утверждение полностью доказано. \square

6.4. ТЕОРЕМА. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — трехмерное многообразие Фано с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$ такое, что линейная система $|-K_X|$ очень обильна. Предположим, что X тригонально. Тогда X — одно из следующих:

- (i) $g(X) = 3$, $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — квадрика;
- (ii) $g(X) = 4$, $X = X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ — пересечение квадрики и кубики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — пересечение всех квадратик, проходящих через X . Согласно следствию 6.3, $W = W_{g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — многообразие минимальной степени, где $g = g(X)$. Более того, при $g \geq 5$ оно неособо. Из предложения 15.4 следует, что при $g \geq 5$ многообразие W имеет структуру \mathbb{P}^3 -расслоения над \mathbb{P}^1 . Значит, в этом случае X сюръективно отображается на кривую. Это противоречит нашему предположению $\rho(X) = 1$.

Следовательно, $g = 3$ или 4 . В случае $g = 3$ многообразие $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — гиперповерхность. В случае $g = 4$ многообразие $X = X_6 \subset \mathbb{P}^5$ — имеет степень 6 и содержится в квадрике $W = W_2 \subset \mathbb{P}^4$. По теореме 16.9 (i) через X также проходит неприводимая кубика. \square

В случае $\rho(X) > 1$ тригональные многообразия Фано (как и гиперэллиптические) также могут быть классифицированы с использованием следствия 6.3 и предложения 15.3. Мы воспроизведем эту классификацию ниже. Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.5 и основано на методе экстремальных лучей [88].

6.5. ТЕОРЕМА ([11, гл. 2, теорема 3.4]). Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — трехмерное многообразие Фано рода $g = g(X)$ с $\rho(X) > 1$ такое, что линейная система $|-K_X|$ очень обильна. Предположим, что X тригонально. Пусть $W \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — пересечение всех квадратиков, проходящих через X . Тогда $W = W_{g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — неособое рационально-линейчатое многообразие $W = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$, где

$$(6.5.1) \quad \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_4), \quad d_i > 0,$$

с вложением

$$\Phi = \Phi_{|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})(1)|}: W \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+1},$$

заданным тавтологической линейной системой $|M| = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})(1)|$, а

$$(6.5.2) \quad g = \sum d_i + 2.$$

При этом $X \subset W$ является дивизором, принадлежащим линейной системе

$$(6.5.3) \quad \left| 3M \otimes \left(2 - \sum d_i \right) F \right|,$$

где F — слой проекции $\pi: W = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Имеют место только случаи в таблице 3. Все эти случаи реализуются.

Таблица 3. Тригональные трехмерные многообразия Фано с $\rho(X) > 1$.

g	d_i	ρ	W	X
6	(1, 1, 1, 1)	2	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$, вложение Сегре	дивизор бистепени (1, 3)
7	(2, 1, 1, 1)	2	раздутие \mathbb{P}^4 вдоль плоскости	раздутие $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ вдоль плоской кубики
8	(2, 2, 1, 1)	3	малое разрешение квадратика $Q \subset \mathbb{P}^5$ коранга 2 (раздутие $\mathbb{P}^3 \subset Q$)	собственный прообраз дивизора типа (3, 4)
10	(2, 2, 2, 2)	8	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^{11}$, вложение задается дивизором бистепени (2, 1)	$X \simeq F \times \mathbb{P}^1$, F — поверхность дель Пеццо степени 3

6.5.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие рода 8 из таблицы 3 было пропущено Исковских [11] и впервые появляется у Мори и Мукая [88, Table 3, № 2], на это автору указал И. Чельцов (см. [1, теорема 1.6, T₁₁], [3, лемма 8.2]).

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть

$$X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$$

— тригональное многообразие Фано рода g с $\rho(X) > 1$ и пусть

$$W = W_{g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$$

— четырехмерное многообразие, пересечение квадратиков, проходящих через X_{2g-2} (см. следствие 6.3).

Если $g \leq 4$, то W изоморфно \mathbb{P}^4 или квадрике в \mathbb{P}^5 . Но тогда X является полным пересечением, как в теореме 6.4 и, следовательно, $\rho(X) = 1$. Это противоречит нашим предположениям. Значит, мы можем считать, что $g \geq 5$. Тогда снова по следствию 6.3 многообразие W_{g-2} неособо и имеет вид $W = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$.

Пусть M — тавтологический дивизор на $W = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$ и пусть F — слой проекции $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$. Напомним, что согласно предложению 15.4 мы можем считать, что M — гиперплоское сечение W , т.е. $-K_X = M|_X$. Так как расслоение \mathcal{E} обильно, то $d_i > 1$ для всех i . Кроме того, $\deg W = \sum d_i = g - 2$. Откуда получается (6.5.2). Формулу для канонического дивизора 15.3 (v) в нашей ситуации можно записать в виде

$$K_W = -4M + (-2 + \sum d_i) F.$$

По формуле присоединения

$$-M|_X = K_X = (K_W + X)|_X = (-4M + (-2 + \sum d_i) F + X)|_X.$$

Отсюда имеет место следующая линейная эквивалентность дивизоров на W :

$$X \sim 3M + (2 - \sum d_i) F.$$

Это доказывает (6.5.3).

Далее, запишем \mathcal{E} в виде (6.5.1). Тогда

$$g + 2 = h^0(\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})}(1)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}) = \sum d_i + 4.$$

Отсюда немедленно следует, что при $g = 6$ и $g = 7$ для X имеют место соответствующие случаи в таблице 3. Далее мы считаем, что $g > 7$.

Проекция $\pi: W = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ индуцирует стягивание $\lambda: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. При этом общий слой S морфизма λ — поверхность дель Пеццо, антиканонически вложенная в слой $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$ над \mathbb{P}^1 . Значит, S — кубическая поверхность в \mathbb{P}^3 .

Для любого k имеет место естественный изоморфизм

$$(6.5.5) \quad H^0(W, \mathcal{O}_W(M + kF)) \simeq H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{E}(k)).$$

Так как $\deg \mathcal{E} = \sum d_i = g - 2 \geq 6$, то по теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(M - 2F)) > 1.$$

Отсюда $\dim | -K_X - 2S| > 0$, т.е. имеет место разложение

$$-K_X \sim 2S + D,$$

где D — эффективный дивизор такой, что $\dim |D| > 0$.

По теореме о конусе на многообразии X существует экстремальный луч R такой, что $S \cdot R > 0$. Пусть φ — его стягивание, пусть $\mu(R)$ — его длина и пусть ℓ — соответствующая минимальная рациональная кривая (см. (14.5.3)). Никакая кривая на X не может одновременно стягиваться морфизмами φ и λ , поэтому никакой слой φ не может быть двумерным. Следовательно R имеет тип C или B_1 . Если R имеет тип C , то

$$\mu(R) = -K_X \cdot \ell \geq 2S \cdot \ell \geq 2.$$

Значит, R имеет тип C_2 (т.е. φ является \mathbb{P}^1 -расслоением). Так как S и S' — непересекающиеся сечения, которые линейно эквивалентны, то X , на самом деле, является прямым произведением \mathbb{P}^1 и поверхности дель Пеццо степени 3 (случай $g = 10$ в таблице 3).

Далее мы считаем, что R имеет тип B_1 (т.е. φ является раздутием гладкой кривой на гладком многообразии). Пусть E — соответствующий исключительный дивизор. Так как $E \cdot \ell = -1$ и

$$1 = -K_X \cdot \ell = 2S \cdot \ell + D \cdot \ell \geq 2 + D \cdot \ell,$$

то $D \cdot \ell < 0$ и E — неподвижная компонента линейной системы $|D|$, т.е. мы можем записать

$$|D| = rE + |L|,$$

где $r > 0$, а $|L|$ — линейная система, у которой E не является неподвижной компонентой. Тогда, как и выше, имеем

$$(6.5.6) \quad 1 = -K_X \cdot \ell = -r + 2S \cdot \ell + L \cdot \ell.$$

Если $|L|$ составлена из слоев λ , то $L \cdot \ell > 0$ и $r > 1$. В этом случае $-K_S = -K_X|_S = rE|_S$ делится на $r > 1$ в $\text{Pic}(S)$, а это невозможно на кубической поверхности. Значит, дивизор L пересекает общий слой S . Так как $|L|$ — подвижная линейная система, $E \cap S \neq \emptyset$ и дивизор

$$(rE + L)|_S = -K_S$$

— гиперплоское сечение кубической поверхности $S = S_3 \subset \mathbb{P}^3$, то ограничение $|L|_S$ должно быть пучком коник, $r = 1$ и $\ell' := E \cap S$ — прямая на S . Из (6.5.6) следует, что

$$S \cdot \ell = 1, \quad L \cdot \ell = 0.$$

Так как $E \cdot \ell' = (\ell')_S^2 = -1$, то ℓ' — также экстремальная кривая, и E допускает стягивание в другом направлении. В частности, $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\rho(X) > 2$. Так как $(L - S) \cdot \ell < 0$, то $H^0(X, \mathcal{O}_X(L - S)) = 0$. Тогда из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(L - S) \longrightarrow \mathcal{O}_X(L) \longrightarrow \mathcal{O}_S(L) \longrightarrow 0$$

получаем, что $\dim |D| = \dim |L| = 1$. Следовательно, $g = 8$. Тогда имеются лишь две возможности:

$$(d_1, \dots, d_4) = (3, 1, 1, 1) \quad \text{или} \quad (2, 2, 1, 1).$$

В первом случае из (6.5.5) получаем, что линейная система $|M - 3F|$ непуста, а линейная система $|M - F|$ не имеет базисных точек. Возьмем любые элементы $G \in |M - F|$ и $G' \in |M - 3F|$. Так как X не может быть компонентой G' , то $X \cdot G' \cdot G^2 \geq 0$. с другой стороны, можно непосредственно вычислить:

$$X \cdot G' \cdot G^2 = (3M - 4F) \cdot (M - 3F) \cdot (M - F)^2 = 3M^4 - 19M^3 \cdot F = -1.$$

Противоречие показывает, что $(d_1, \dots, d_4) \neq (3, 1, 1, 1)$. Мы получаем случай $g = 8$ в таблице 3. Теорема доказана. \square

Подытожим результаты, полученные в трех предыдущих лекциях.

6.6. ТЕОРЕМА (В. А. Исковских [11]). Пусть X — трехмерное многообразие Фано рода g с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$. Тогда

- (i) линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек;
- (ii) линейная система $|-K_X|$ не является очень обильной только в следующих случаях:
 - а) $g = 2$ и $\Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ — двойное накрытие с ветвлением в поверхности степени 6.
 - б) $g = 3$ и $\Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^4$ — двойное накрытие квадрики с ветвлением в поверхности степени 8.

- (iii) Пусть линейная система $|-K_X|$ задает вложение $\Phi_{|-K_X|}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$. Тогда $g \geq 3$ и образ $X = \Phi_{|-K_X|}(X)$ имеет степень $2g - 2$. Более того,
- при $g = 3$ многообразие $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — кватрика,
 - при $g = 4$ многообразие $X = X_6 \subset \mathbb{P}^4$ является полным пересечением квадрики и кубики.
- (iv) При $g \geq 5$ образ $X_{2g-2} = \Phi_{|-K_X|}(X)$ является пересечением квадратик (и $X = X_8 \subset \mathbb{P}^6$ — полное пересечение квадратик при $g = 5$).

Особые трехмерные тригональные многообразия Фано (с горенштейновыми каноническими особенностями) классифицированы в работе [1].

- Задачи.**
- Пусть X — трехмерное многообразие рода $g(X) \leq 5$ (необязательно $\rho(X) = 1$). Предположим, что антиканонический дивизор $-K_X$ очень обилен. Не используя теорему 6.5, докажите, что многообразие X — одно из следующих: кватрика в \mathbb{P}^4 , пересечение квадрики и кубики в \mathbb{P}^5 или пересечение трех квадратик в \mathbb{P}^6 .
 - Не используя теоремы 6.4 и 6.5, исследуйте на тригональность многообразия Фано индекса > 1 .
 - Докажите, что неособая линейчатая поверхность $F_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ является пересечением $\frac{1}{2}d(d-1)$ линейно независимых квадратик.
 - Докажите, что через каноническую кривую $C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ проходит ровно $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ линейно независимых квадратик. *Указание:* Воспользуйтесь теоремой М. Нётера 16.1.
 - Докажите, что неособый дивизор бистепени $(1, 3)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ (случай $g = 6$ из таблицы 3) является раздутием \mathbb{P}^3 вдоль неособого пересечения двух кубических поверхностей.
 - Опишите экстремальные лучи на многообразиях Фано из таблицы 3. Докажите, что при $g = 8$ экстремальное бирациональное стягивание не приводит к многообразию Фано.
 - Докажите, что многообразие, описанное в пункте $g = 8$ таблицы из теоремы 6.5 действительно является тригональным многообразием Фано.

7. Элементарные преобразования (линки Саркисова)

7.1. Пусть X — трехмерное многообразие Фано такое, что $\rho(X) = 1$. Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие с неособым центром C , где C — или точка или неприводимая неособая кривая степени d рода $g(C)$. Предположим, что дивизор $-K_{\tilde{X}}$ численно эффективен и объемен. Тогда по теореме о свободе от базисных точек 14.4 при некотором $n > 0$ линейная система $|-nK_{\tilde{X}}|$ задает морфизм

$$\Phi_{|-nK_{\tilde{X}}|}: \tilde{X} \longrightarrow X_{\bullet} \subset \mathbb{P}^N,$$

который должен быть конечным в общей точке на свой образ (поскольку $-K_{\tilde{X}}$ объемен). Рассмотрим факторизацию Штейна

$$\Phi_{|-nK_{\tilde{X}}|}: \tilde{X} \xrightarrow{\theta} X_0 \xrightarrow{\gamma} X_{\bullet} \subset \mathbb{P}^N.$$

Согласно следствию 14.4.1, существует обильный дивизор Картье A на X_0 такой, что

$$(7.1.1) \quad -K_{\tilde{X}} = \theta^* A.$$

На дополнении к множеству $\theta(\text{Exc}(\theta))$ коразмерности ≥ 2 дивизоры $-K_{X_0}$ и A совпадают. Значит, они совпадают всюду:

$$-K_{\tilde{X}} = \theta^*(-K_{X_0}).$$

Отсюда получаем (ср. предложение 5.6):

7.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Многообразие X_0 имеет не хуже чем канонические горнштейновы особенности.*

Далее мы будем предполагать, что

(\star) морфизм $\Phi_{|-nK_{\tilde{X}}|}$ не стягивает дивизоров.

Таким образом, исключительное множество $\text{Exc}(\theta)$ морфизма θ или пусто или является объединением конечного числа кривых. Тогда следствие 7.1.2 может быть усилено:

7.1.3. СЛЕДСТВИЕ. *Многообразие X_0 имеет не хуже чем терминальные горнштейновы особенности. Если $\text{Exc}(\theta) = \emptyset$, то X_0 неособо.*

7.2. Таким образом, имеет место один из следующих случаев:

- (а) дивизор $-K_{\tilde{X}}$ не является обильным и тогда θ — малое $K_{\tilde{X}}$ -тривиальное стягивание,
 - (б) дивизор $-K_{\tilde{X}}$ обилен (т.е. \tilde{X} — многообразие Фано) и тогда θ — изоморфизм.
- В случае (а), согласно теореме 14.8.6, существует флоп

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & \bar{X} \\ & \searrow \theta & \swarrow \bar{\theta} \\ & X_0 & \end{array}$$

где многообразие \bar{X} неособо. Напомним также, что многообразие X_0 имеет лишь изолированные гиперповерхностные особенности типа cDV и, согласно (7.1.1),

$$(7.2.1) \quad -K_{\bar{X}} = \bar{\theta}^* A.$$

Далее, так как $\rho(\bar{X}) = 2$, то конус Мори $\overline{NE}(\bar{X})$ — угол на плоскости и он имеет ровно два экстремальных луча (см. рис. 1). Один из этих лучей $R_{\bar{\theta}}$ порождается

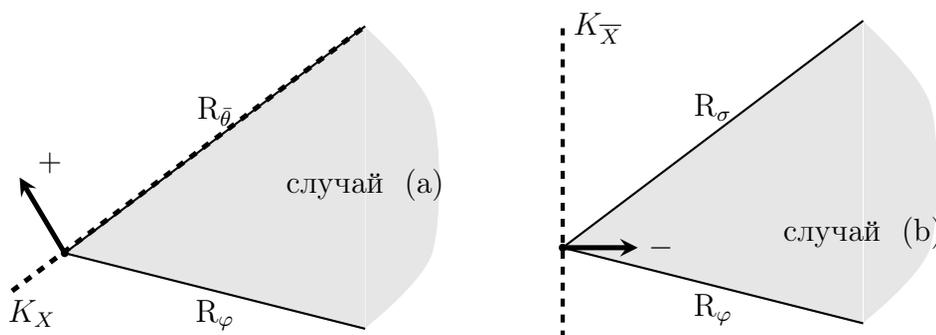


Рис. 1. Конус Мори $\overline{NE}(\bar{X})$

кривыми в слоях морфизма $\bar{\theta}$ и поэтому $K_{\bar{X}} \cdot R_{\bar{\theta}} = 0$. Другой луч R_{φ} должен иметь

отрицательное пересечение с каноническим классом (иначе мы получим противоречие с (7.2.1)). Согласно общей теории (см. теорему 14.5), существует стягивание $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ луча R_φ . Получаем диаграмму

$$(7.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} & \tilde{X} & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & \bar{X} & \\ & \searrow \theta & & \swarrow \bar{\theta} & \\ \sigma \swarrow & & X_0 & & \searrow \varphi \\ X & \dashrightarrow \Psi & & & Y \end{array}$$

В случае (b) мы положим $\tilde{X} = \bar{X}$. Тогда снова конус $\overline{NE}(\bar{X})$ имеет ровно два экстремальных луча R_σ и R_φ , где R_σ порожден кривыми в слоях σ . В этом случае оба луча $K_{\tilde{X}}$ -отрицательны и существует стягивание $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ луча R_φ . Мы можем считать, что тогда также имеет место (вырожденная) диаграмма (7.2.2):

$$(7.2.3) \quad \begin{array}{ccc} & X = X_0 = \bar{X} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \varphi \\ X & \dashrightarrow \Psi & Y \end{array}$$

Мы уже рассматривали такую конструкцию в доказательстве теоремы 3.6 (см. (3.6.4)).

Диаграмма (7.2.2) является частным случаем *линки Саркисова*. Она однозначно восстанавливается по своему центру C .

7.2.4. ЛЕММА. Пусть \tilde{D}_1, \tilde{D}_2 — любые дивизоры на \tilde{X} и пусть \bar{D}_1, \bar{D}_2 — их собственные прообразы на \bar{X} . Тогда

$$(-K_{\tilde{X}}) \cdot \tilde{D}_1 \cdot \tilde{D}_2 = (-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_2, \quad (-K_{\tilde{X}})^2 \cdot \tilde{D}_i = (-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{D}_i.$$

В частности, $(-K_{\tilde{X}})^3 = (-K_{\bar{X}})^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7.1.1), (7.2.1) и формулы проекции получаем

$$(-K_{\tilde{X}})^2 \cdot \tilde{D}_i = \theta^* A^2 \cdot \tilde{D}_i = A^2 \cdot \theta_* D_i = A^2 \cdot \bar{\theta}_* \bar{D}_i = \bar{\theta}^* A^2 \cdot \bar{D}_i = (-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{D}_i.$$

Отсюда вытекает второе соотношение. Первое соотношение доказывается аналогично. \square

7.3. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Далее через E мы обозначим исключительный дивизор $\sigma^{-1}(C)$ раздутья σ , а через \bar{E} — его собственный прообраз на \bar{X} .

7.3.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Абелевы группы

$$\text{Pic}(\tilde{X}) = \mathbb{Z} \cdot K_{\tilde{X}} \oplus \mathbb{Z} \cdot E, \quad \text{Pic}(\bar{X}) = \mathbb{Z} \cdot K_{\bar{X}} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{E}$$

отождествляются посредством отображения χ_* :

$$\chi_*: \text{Pic}(\tilde{X}) \xrightarrow{\simeq} \text{Pic}(\bar{X}), \quad \chi_* K_{\tilde{X}} = K_{\bar{X}}, \quad \chi_* E = \bar{E}.$$

Таким образом, на решетке

$$\mathbb{Z}^2 = \text{Pic}(\tilde{X}) = \text{Pic}(\bar{X})$$

возникают две трилинейные формы пересечения (индуцированные с $\text{Pic}(\tilde{X})$ и $\text{Pic}(\bar{X})$). Лемма 7.2.4 показывает, что значения этих форм совпадают, если один из множителей — канонический класс. Однако в общем случае, эти формы различны. Ясно, что они совпадают в точности, когда $E^3 = \bar{E}^3$. Число

$$\text{def}(\Psi) := E^3 - \bar{E}^3$$

мы назовем *дефектом* линка (7.2.2). Таким образом, дефект равен 0, если χ — изоморфизм. Согласно предложению ниже, верно и обратное.

7.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\text{def}(\Psi) \geq 0$. Если $\text{def}(\Psi) = 0$, то χ — изоморфизм.

На самом деле, можно показать, что дефект $\text{def}(\Psi)$ равен числу флопсовых кривых, если последнее считать “правильно” (т.е. с кратностями, см. [99, определение 5.3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что χ не является изоморфизмом. Поскольку E — ненулевой эффективный дивизор, то $-E$ не может быть численно эффективным. Так как $E \cdot R_\sigma = 0$, то $E \cdot R_\theta > 0$, т.е. E строго положителен на компонентах исключительного множества $\text{Exc}(\theta)$. Поэтому для некоторых $a, b \gg 0$ дивизор $D = aE + b(-K_{\tilde{X}})$ очень обилен на \tilde{X} .

Согласно следствию 14.8.7, дивизор \bar{E} строго отрицателен на компонентах исключительного множества $\text{Exc}(\bar{\theta})$. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \subset \text{Exc}(\bar{\theta})$ — его неприводимые компоненты. Тогда, согласно сказанному выше,

$$(7.4.1) \quad K_{\bar{X}} \cdot \Gamma_i = 0, \quad \bar{E} \cdot \Gamma_i < 0, \quad \forall i.$$

Поэтому для собственного прообраза $\bar{D} \subset \bar{X}$ дивизора D имеем $\bar{D} \cdot \Gamma_i < 0$. Выберем общие элементы $D_1, D_2 \in |D|$ и пусть $\bar{D}_1, \bar{D}_2 \in |\bar{D}|$ — их собственные прообразы. Тогда $L := D_1 \cap D_2$ — неособая кривая, не пересекающая исключительное множество $\text{Exc}(\theta)$, а пересечение $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$ может быть записано в виде

$$\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 = \bar{L} + \sum \gamma_i \Gamma_i,$$

где $\bar{L} \subset \bar{X}$ — собственный прообраз L и $\gamma_i \geq 0$. Так как $\bar{D}_j \cdot \Gamma_i < 0$, то $\Gamma_i \subset \text{Bs}|\bar{D}|$ и поэтому $\gamma_i > 0$. Так как $\bar{D} \cdot \bar{L} = D \cdot L = D^3$, то

$$\bar{D}^3 = \bar{D} \cdot \left(\bar{L} + \sum \gamma_i \Gamma_i \right) = D^3 + \bar{D} \cdot \sum \gamma_i \Gamma_i.$$

Отсюда по лемме 7.2.4 имеем

$$a^3 \text{def}(\Psi) = a^3(E^3 - \bar{E}^3) = D^3 - \bar{D}^3 = -a\bar{E} \cdot \sum \gamma_i \Gamma_i \geq a \sum \gamma_i \geq aN.$$

Это доказывает наше утверждение. \square

7.5. Стягивание $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ принадлежит одному из типов в таблице из теоремы 14.7. В нашем случае имеются определенные ограничения на многообразие Y :

- если φ имеет тип D, то $Y \simeq \mathbb{P}^1$ согласно следствию 1.3.3;
- если φ имеет тип C, то $Y \simeq \mathbb{P}^2$ согласно следствию 1.7.10 поскольку $\rho(Y) = 1$;
- если φ имеет тип B_1 или B_2 , то Y — неособое многообразие Фано поскольку $\rho(Y) = 1$ и $|-nK_X| \neq \emptyset$ для некоторого $n > 0$;
- если φ имеет тип B_3, B_4 или B_5 , то, как и выше, Y — особое многообразие Фано.

Во всех случаях $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$.

7.6. ЛЕММА. Морфизм φ не может стягивать дивизор \overline{E} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если φ — стягивание расслоенного типа, то \overline{E} не может быть составлен из слоев, поскольку $\dim |r\overline{E}| = \dim |rE| = 0$ для любого $r > 0$, а любой эффективный дивизор на $Y \simeq \mathbb{P}^1$ или \mathbb{P}^2 подвижен. Предположим, что стягивание φ бирационально и \overline{E} — его исключительный дивизор. Если χ не является изоморфизмом, то дивизор E должен быть θ -обильным (иначе дивизор $-E$ численно эффективен, поскольку он положителен на слоях σ). Значит, дивизор \overline{E} является $\bar{\theta}$ -отрицательным (см. следствие 14.8.7), а поэтому он положителен на слоях φ . Это противоречит его исключительности. Если же χ — изоморфизм, то согласно нашему выбору экстремального луча R_φ , поверхность $E = \overline{E}$ — линейчатая и имеет две структуры стягивания на кривую. Это возможно только если $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. В этом случае дивизор $-K_{\tilde{X}} + E$ тривиален на обоих экстремальных лучах конуса $\overline{NE}(\tilde{X})$. Так как $\rho(\tilde{X}) = 2$, то это дает нам $-K_{\tilde{X}} + E \approx 0$. Противоречие. \square

Нам понадобятся некоторые соотношения на пересечения дивизоров в решетке $\text{Pic}(\overline{X})$. Введем дополнительные обозначения. Пусть M — обильная образующая группы $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ и пусть $\overline{M} := \varphi^*M$. Если φ — бирациональное стягивание, то через \overline{F} мы обозначим его исключительный дивизор. Для единообразия, мы также положим $\overline{F} = \overline{M}$, если стягивание φ — расслоенного типа (D или C).

7.7. ЛЕММА. В зависимости от типа стягивания $\varphi: \overline{X} \rightarrow Y$ имеются следующие соотношения в $\text{Pic}(\overline{X})$.

Тип D.

$$(7.7.1) \quad \begin{aligned} \overline{M}^3 &= \overline{M}^2 \cdot (-K_{\overline{X}}) = 0, \\ \overline{M} \cdot (-K_{\overline{X}})^2 &= K_{\overline{X}_\eta}^2, \end{aligned}$$

где \overline{X}_η — общий слой φ . (Напомним, что $1 \leq K_{\overline{X}_\eta}^2 \leq 6$ в случае D_1 , $K_{\overline{X}_\eta}^2 = 8$ в случае D_2 и $K_{\overline{X}_\eta}^2 = 9$ в случае D_3).

Тип C.

$$(7.7.2) \quad \begin{aligned} \overline{M}^3 &= 0, \quad \overline{M}^2 \cdot (-K_{\overline{X}}) = 2, \\ \overline{M} \cdot (-K_{\overline{X}})^2 &= 12 - \deg \Delta, \end{aligned}$$

где $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ — дискриминантная кривая расслоения на коники $\varphi: \overline{X} \rightarrow Y = \mathbb{P}^2$ (см., например, [98, § 3]). В случае C_2 мы полагаем $\deg \Delta = 0$.

Типы B_2 - B_5 .

$$(7.7.3) \quad \overline{F}^2 \cdot (-K_{\overline{X}}) = -2, \quad \overline{F} \cdot (-K_{\overline{X}})^2 = k, \quad \overline{F}^3 = 4/k,$$

где

$$k = \begin{cases} 4 & \text{тип } B_2 \\ 2 & \text{типы } B_3 \text{ и } B_4 \\ 1 & \text{тип } B_5 \end{cases}$$

Тип B_1 .

$$(7.7.4) \quad \begin{aligned} (-K_{\bar{X}} + \bar{F})^2 \cdot (-K_{\bar{X}}) &= (-K_Y)^3, \\ (-K_{\bar{X}} + \bar{F}) \cdot \bar{F} \cdot (-K_{\bar{X}}) &= -K_Y \cdot Z, \\ \bar{F}^2 \cdot (-K_{\bar{X}}) &= 2g(Z) - 2, \end{aligned}$$

где $Z := \varphi(\bar{F})$ — центр раздутия φ (неособая кривая).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, например, (7.7.2). Соотношение $\bar{M}^3 = 0$ следует из формулы проекции. Для доказательства равенства $\bar{M}^2 \cdot (-K_{\bar{X}}) = 2$ следует заметить, что общий геометрический слой $\bar{X}_y = \varphi^{-1}(y)$, $y \in Y$ — неособая коника и

$$K_{\bar{X}} \cdot \bar{X}_y = \deg K_{\bar{X}_y} = -2$$

по формуле присоединения. Наконец, для общей прямой $M \subset Y = \mathbb{P}^2$ поверхность $\bar{M} = \varphi^{-1}(M)$ неособа, а проекция $\varphi|_{\bar{M}} : \bar{M} \rightarrow M$ является расслоением на коники, у которого число вырожденных слоев равно $M \cdot \Delta$. Поэтому поверхность \bar{M} рациональна и $\rho(\bar{M}) = 2 + M \cdot \Delta$. По формуле Нётера $K_{\bar{M}}^2 = 8 - M \cdot \Delta$, а по формуле присоединения $K_{\bar{M}} = (K_{\bar{X}} + \bar{M})_{\bar{M}}$. Отсюда

$$\bar{M} \cdot (-K_{\bar{X}})^2 = \bar{M} \cdot (K_{\bar{X}} + \bar{M})^2 - 2K_{\bar{X}} \cdot \bar{M}^2 = 12 - \deg \Delta. \quad \square$$

7.8. ЛЕММА. Конус эффективных дивизоров $\text{Eff}(\bar{X})$ на \bar{X} порожден классами дивизоров \bar{E} и \bar{F} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что классы дивизоров \bar{E} и \bar{F} линейно независимы в решетке $\text{Pic}(\bar{X})$ по лемме 7.6. Пусть \bar{D} — простой дивизор на \bar{X} отличный от \bar{E} и \bar{F} . Для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}$ имеем

$$(7.8.1) \quad \bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} a\bar{E} + b\bar{F}.$$

Достаточно доказать, что $a, b \geq 0$. Применяя χ_*^{-1} к соотношению (7.8.1) получим

$$\tilde{D} \sim_{\mathbb{Q}} a\tilde{E} + b\tilde{F},$$

где \tilde{D} и \tilde{F} собственные прообразы на \tilde{X} дивизоров \bar{E} и \bar{F} , соответственно. Отсюда $\sigma_*\tilde{D} \sim b\sigma_*\tilde{F}$ и поэтому $b > 0$. Если морфизм φ бирационален, то аналогично $\varphi_*\tilde{D} \sim a\varphi_*\tilde{E}$ и $a > 0$. Если же φ не является бирациональным, то пересекая обе части (7.8.1) с кривой \bar{J} в слое φ получим $0 < \bar{D} \cdot \bar{J} = a\bar{E} \cdot \bar{J}$. Отсюда снова $a > 0$. \square

7.9. ЛЕММА. Пусть $\iota(X) = 1$. Положим $\iota := \iota(Y)$ и $\mu := \mu(R_\varphi)$ (длина экстремального луча см. (14.5.3)). Тогда для некоторого целого положительного a имеем

$$\bar{M} \sim a(-K_{\bar{X}}) - \mu\bar{E}.$$

Далее, пусть стягивание φ бирационально. Тогда

$$\bar{F} \sim \begin{cases} (\iota a - 1)(-K_{\bar{X}}) - \iota\bar{E}, & \text{если } R_\varphi \text{ имеет тип } B_1, B_3, B_4, \\ \frac{1}{2}(\iota a - 1)(-K_{\bar{X}}) - \iota\bar{E}, & \text{если } R_\varphi \text{ имеет тип } B_2, \\ 2(\iota a - 1)(-K_{\bar{X}}) - 2\iota\bar{E}, & \text{если } R_\varphi \text{ имеет тип } B_5. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\iota(X) = 1$, то $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$ и

$$\text{Pic}(\bar{X}) = \mathbb{Z} \cdot K_{\bar{X}} \oplus \mathbb{Z} \cdot \bar{E}.$$

Поэтому мы можем записать $\bar{M} \sim a(-K_{\bar{X}}) - b\bar{E}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$. Так как $K_{\bar{X}} \cdot R_\varphi < 0$, $\bar{E} \cdot R_\varphi < 0$ и $\bar{M} \cdot R_\varphi = 0$, то $ab > 0$. Если бы имели место неравенства $a < 0$ и $b < 0$, то дивизор

$$\bar{E} \approx \frac{a}{b}(-K_{\bar{X}}) - \frac{1}{b}\bar{M}$$

был бы обилен, что невозможно. Значит, $a > 0$ и $b > 0$.

Для доказательства первого утверждения осталось заметить, что из точной последовательности (14.7.3) и определения длины $\mu(R_\varphi)$ следует, что дивизоры \bar{M} и $-K_{\bar{X}}$ порождают в $\text{Pic}(\bar{X})$ подрешетку индекса μ .

Для доказательства остальных утверждений запишем

$$K_{\bar{X}} = \varphi^* K_Y + \alpha \bar{F} = -\iota \bar{M} + \alpha \bar{F},$$

где α — дискрепантность. Для нее выполнено $\alpha = 1$ в случаях B_1, B_3 и B_4 , $\alpha = 2$ в случае B_2 и $\alpha = 1/2$ в случае B_5 (см. замечание 14.7.4). Тогда

$$\bar{F} \sim \frac{\iota}{\alpha} \bar{M} + \frac{1}{\alpha} K_{\bar{X}} \sim \frac{a\iota - 1}{\alpha} (-K_{\bar{X}}) - \frac{\mu\iota}{\alpha} \bar{E}. \quad \square$$

7.9.1. ПРИМЕР. Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая кубическая гиперповерхность и пусть C — точка на X , через которую проходит только конечное число прямых (т.е. C — не является обобщенной точкой Эккарда [78, лемма 2.2.6, замечание 2.2.7]). Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ — проекция из C . Ясно, что это отображение конечно в общей точке и имеет степень 2. Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие C . Тогда композиция $\psi \circ \sigma$ является регулярным морфизмом, конечным в общей точке. Значит, его факторизация Штейна имеет вид

$$\psi \circ \sigma: \tilde{X} \xrightarrow{\theta} X_0 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{P}^3,$$

где γ — конечный морфизм степени 2, а морфизм θ стягивает собственные прообразы $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_k \subset \tilde{X}$ прямых $L_1, \dots, L_k \subset X$, проходящих через C , и является изоморфизмом вне их. Инволюция Галуа накрытия X_0/\mathbb{P}^3 индуцирует отображение $\chi: \tilde{X} \dashrightarrow \tilde{X}$, которое является регулярным вне $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_k$. Получаем диаграмму (7.2.2), где $\bar{X} \simeq \tilde{X}$ и $Y \simeq X$. Заметим, что отображения χ и $X \dashrightarrow Y = X$ не являются тождественными. В частности, φ стягивает собственный прообраз касательного гиперплоского сечения к X в точке C .

7.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Ситуация с *симметричным* линком (такая как в примере 7.9.1) встречается довольно часто. Действительно, предположим, что в условиях 7.1 мы имеем $n = 1$ и многообразие X_\bullet нормально. Согласно предложению 5.6, морфизм $\gamma: X_0 \rightarrow X_\bullet$ является или изоморфизмом или конечным степени 2. Предположим, что $\gamma: X_0 \rightarrow X_\bullet$ — двулиственный морфизм. Это заведомо выполнено, например, если $(-K_{\tilde{X}})^3 = 2$ (см. задачу 3, стр. 59). Тогда на X_0 имеется инволюция Галуа $\tau: X_0 \rightarrow X_0$, которая продолжается до бирациональной инволюции $\chi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$. Как и в примере выше мы получим диаграмму (7.2.2), где $\bar{X} \simeq \tilde{X}$ и $Y \simeq X$. Заметим что действие τ^* на группе $\text{Cl}(X_0) \simeq \text{Pic}(\tilde{X})$ нетривиально. Следовательно,

$$\text{rk Cl}(X_\bullet) = \text{rk Cl}(X_0)^{\langle \tau^* \rangle} = 1.$$

- Задачи.
1. Пусть $X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ — неособое пересечение двух квадратик, пусть $l \subset X$ — прямая и пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — ее раздутие. Докажите, что дивизор $-K_{\tilde{X}}$ обилен и существует (простейший) линк Саркисова (7.2.3), где $\varphi: \tilde{X} \rightarrow Y = \mathbb{P}^3$ — раздутие гладкой кривой $Z \subset \mathbb{P}^3$ степени 5 и рода 2. В частности, многообразие X рационально. *Указание:* Аналогично доказательству теоремы 3.6.
 2. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и докажите, что прямые на X , пересекающие данную общую прямую $l \subset X = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$ и отличные от l , параметризуются кривой C_l рода 2. Покажите, что класс изоморфизма этой кривой не зависит от выбора l . Докажите, что схема Гильберта $F_1(X)$ прямых на X — абелева поверхность, якобиан C_l . *Указание:* Поверхность $F_1(X)$ бирациональна поверхности 2-секущих кривой $Z \subset \mathbb{P}^3$.
 3. Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая кубика, пусть $l \subset X$ — прямая и пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — ее раздутие. Докажите, что существует линк Саркисова с центром в l и опишите его результат.
 4. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ — многообразие дель Пеццо степени $d = 4$ или 5 и пусть $C \subset X$ — невырожденная коника. Докажите, что существует линк Саркисова с центром в C и опишите его результат.
 5. Пусть $X = X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ — неособое пересечение квадрики и кубики. Пусть $l \subset X$ — прямая. Предположим, что прямую l пересекает не более конечного числа других прямых в X (на самом деле, это верно для любой прямой на $X = X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$). Докажите, что существует (симметричный) линк Саркисова (7.2.2) с центром l и при этом Y — снова пересечение квадрики и кубики, а φ — раздутие прямой.
 6. Пусть $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ — пересечение трех квадратик. Пусть $C \subset X$ — достаточно общая коника (в частности, ее пересекает не более конечного числа прямых в X). Докажите, что существует линк Саркисова (7.2.2) с центром C и при этом Y — снова пересечение трех квадратик, а φ — раздутие коники.

8. Многообразия Фано с числом Пикара 1, I

В этой и последующих лекциях мы обсудим классификацию трехмерных многообразий Фано индекса 1 с числом Пикара 1. Мы будем придерживаться следующего плана. Классификация представлена в разделах 8–10. Основная классификационная теорема 8.1 опирается на существование прямой (теорема 8.2), которое, в свою очередь выводится из существования коники (следствие 9.4.3), а это доказывается в следствии 10.6. Разделы 11 и 12 посвящены, в основном, доказательству существования многообразий Фано при помощи обращения бирациональных линков.

8.1. ТЕОРЕМА (В. А. Исковских [10], [11]). *Пусть X — трехмерное многообразие Фано индекса $\iota(X) = 1$ рода $g = g(X)$ с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Тогда $2 \leq g \leq 12$ и $g \neq 11$. Все эти возможности реализуются. Для каждого $g \in \{2, \dots, 10, 12\}$ все такие многообразия Фано деформационно эквивалентны. Детальная классификация сведена в таблицу 4, стр. 118.*

Идеи доказательства теоремы восходят к работам Дж. Фано [54]. Первое строгое доказательство было дано Исковских в [10], [11]. Более современное изложение см. в работах [20], [48], [59]. Мы приведем полное доказательство. Как было сказано выше, оно опирается на существование прямой, т.е. неособой рациональной кривой $l \subset X$ такой, что $-K_X \cdot l = 1$:

8.2. ТЕОРЕМА (В. В. Шокуров [12]). *Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) = 1$, $\iota(X) = 1$ и $g(X) \geq 7$. Тогда на X существует прямая.*

Отметим, что при $g(X) \leq 6$ прямая тоже существует, но это нам не понадобится.

Доказательство этой теоремы будет получено как следствие детального изучения некоторых бирациональных перестроек и линков Саркисова в последующих лекциях (см. следствие 10.6). Отметим, что теорема о конусе 14.3 дает существование неприводимой рациональной кривой степени ≤ 4 , однако улучшить этот результат, пользуясь только методами теории деформаций [87], не представляется возможным. Отметим также, я что в оригинальном варианте этой теоремы [12] утверждалось, что прямая существует при существенно более слабых предположениях: X — трехмерное многообразие Фано такое, что антиканонический дивизор очень обилен и не может быть представлен в виде суммы двух обильных дивизоров. Однако для наших целей утверждения 8.2 достаточно.

Наличие прямой позволяет применить следующую конструкцию. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное многообразие Фано и пусть $l \subset X$ — прямая. Через $|H - 2l|$ мы будем обозначать линейную систему гиперплоских сечений особых вдоль l . Рациональное отображение, заданной этой линейной системой называется *двойной проекцией из прямой*.

8.3. ТЕОРЕМА (В. А. Исковских). *Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$, $g \geq 7$ — антиканонически вложенное трехмерное многообразие Фано с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$, где $H = -K_X$. Предположим, что на X существует прямая. Тогда двойная проекция из l отображает X на подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}^{g-6}$:*

$$(8.3.1) \quad \Psi = \Phi_{|H-2l|}: X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^{g-6}.$$

При этом отображение Ψ и раздутие $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ прямой l включаются в линк Саркисова (7.2.2).

Далее, пусть $E := \sigma^{-1}(l)$ — исключительный дивизор, пусть $\bar{E} \subset \bar{X}$ — собственный прообраз E , пусть M — обильная образующая $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ и пусть $\bar{M} = \varphi^*M$. Тогда $\bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$ и для экстремального стягивания φ имеет место одна из следующих возможностей:

- (i) $g = 7$, $Y \simeq \mathbb{P}^1$ и $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на поверхности дель Пецо степени 5;
- (ii) $g = 8$, $Y \simeq \mathbb{P}^2$ и $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ — стандартное расслоение на коники с дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ степени 5;
- (iii) $g \in \{9, 10, 12\}$ и в этом случае морфизм $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ бирационален, стягивает дивизор

$$\bar{F} \sim \delta(-K_{\bar{X}}) - (\delta + 1)\bar{E},$$

где $\delta = 3, 2, 1$ при $g = 9, 10, 12$, соответственно, и является раздутием неособой неприводимой кривой $Z \subset Y$. Причем:

- (a) если $g = 9$, то $Y \simeq \mathbb{P}^3$, $Z \subset \mathbb{P}^3$ — негиперэллиптическая кривая рода 3 и степени 7, лежащая на кубической поверхности $F_3 = \varphi(\overline{E})$;
- (b) если $g = 10$, то $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадрика, $Z \subset Y$ — кривая рода 2 и степени 7, лежащая на поверхности $F_4 = \varphi(\overline{E})$ степени 4;
- (c) если $g = 12$, то $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ — многообразие дель Пеццо степени 5, $Z \subset Y$ — нормальная рациональная кривая степени 5, лежащая на гиперплоском сечении $F_5 = \varphi(\overline{E})$.

Бирациональное отображение $\Psi^{-1}: Y \dashrightarrow X$, обратное к двойной проекции, задается линейной системой $|(2\delta + 1)M - 2Z|$.

В частности, $g(X) \leq 12$ и $g(X) \neq 11$.

8.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях пункта (iii) теоремы 8.3 пара $(Y \supset Z)$ однозначно определяет $(X \supset l)$. В частности, многообразие X однозначно восстанавливается по $(Y \supset Z)$. При этом различные вложения кривой Z в Y могут задавать неизоморфные многообразия Фано X , также как при различных выборах прямой l в X могут получаться проективно неэквивалентные кривые $Z \subset Y$. Однако следует заметить, что кривая Z с точностью до абстрактного изоморфизма однозначно восстанавливается по многообразию X . Это следует из теоремы Торелли для кривых и того, что якобиан кривой Z , как главнополяризованное абелево многообразие, изоморфен промежуточному якобиану X (см. [47]):

$$J(Z) \simeq J(Z) \oplus J(Y) \simeq J(\overline{X}) \simeq J(\tilde{X}) \simeq J(X) \oplus J(l) \simeq J(X).$$

8.3.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие Фано с $\iota(X) = 1$ и $\rho(X) = 1$. Предположим, что на X существует прямая. Тогда для $g(X) \geq 8$ топологическая эйлерова характеристика $\chi_{\text{top}}(X)$ принимает следующие значения:

$g(X)$	8	9	10	12
$\chi_{\text{top}}(X)$	-6	-2	0	4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, случай $g \geq 9$. Конструкция флопов (см. доказательство теоремы 14.8.6) показывает, что $\chi_{\text{top}}(\tilde{X}) = \chi_{\text{top}}(\overline{X})$. Пользуясь параметрами кривой Z в 8.3 (iii) получаем

$$\chi_{\text{top}}(Y) + \chi_{\text{top}}(Z) = \chi_{\text{top}}(\overline{X}) = \chi_{\text{top}}(\tilde{X}) = \chi_{\text{top}}(X) + \chi_{\text{top}}(l). \quad \square$$

8.3.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие Фано с $\iota(X) = 1$ и $\rho(X) = 1$. Предположим, что на X существует прямая. Тогда при $g(X) = 7$ и $g(X) \geq 9$ многообразие X рационально¹.

Рациональность трехмерных многообразий Фано рода $g(X) = 7$ и $g(X) \geq 9$ над незамкнутыми полями — уже совсем нетривиальный вопрос (см. [76]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $g = 9, 10$ и 12 утверждение очевидным образом вытекает из 8.3 (iii) и следствия 3.6.5. При $g = 7$ рациональность \overline{X} следует из того, что слой \overline{X}_η над общей точкой $\eta \in \mathbb{P}^1$ является неособой поверхностью дель Пеццо степени 5 над полем рациональных функций $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ и такие поверхности $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ -рациональны [7], [27]. □

¹Позднее в тереме 10.1 (ii) будет доказано, что при $g = 8$ многообразие X бирационально эквивалентно неособой трехмерной кубике в \mathbb{P}^4 и поэтому нерационально.

8.3.5. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 8.3 отображение χ из диаграммы (7.2.2) не является изоморфизмом, а \tilde{X} не является многообразием Фано.

8.3.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие Фано с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$ и $g(X) \geq 7$ и пусть $l \subset X$ — прямая с нормальным пучком

$$\mathcal{N}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$$

(см. (8.5.1)). Тогда на X существует прямая, пересекающая l .

Доказательства следствий 8.3.5 и 8.3.6 будет дано в конце раздела.

Для доказательства теоремы 8.3 нам понадобятся сведения о схеме Гильберта прямых на многообразиях Фано.

8.4. Схема Гильберта прямых. Предположим, что на многообразии $X \subset \mathbb{P}^N$ существует хотя бы одна прямая. Согласно теории схем Гильберта, семейство всех прямых на X параметризовано некоторой проективной схемой $F_1 = F_1(X)$ — это схема, параметризующая замкнутые подсхемы в X с многочленом Гильберта $\chi(t) = t + 1$. Так как $X \subset \mathbb{P}^N$, то $F_1(X)$ реализуется как замкнутая подсхема грассманиана $\text{Gr}(2, N + 1)$ прямых в \mathbb{P}^N .

8.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное многообразие Фано индекса $\iota = 1$ с $\rho(X) = 1$, $g \geq 5$ и пусть $l \subset X$ — прямая на X . Имеют место следующие утверждения.

(i) Через l можно провести неособое гиперплоское сечение.

(ii) Для нормального пучка $\mathcal{N}_{l/X}$ имеются только следующие две возможности:

$$(8.5.1) \quad \mathcal{N}_{l/X} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & \text{тип } (0, -1), \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) & \text{тип } (1, -2). \end{cases}$$

(iii) Любая компонента схемы F_1 одномерна. Если $[l] \in F_1$ — точка, соответствующая прямой $l \subset X$, то $[l] \in F_1$ неособа тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}_{l/X}$ имеет тип $(0, -1)$.

(iv) Через любую точку $P \in X$ проходит не более конечного числа прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что при $g \geq 5$ антиканонический дивизор очень обилен, а образ соответствующего вложения является пересечением квадратик (см. теореме 6.6).

Утверждение (i) доказывается, аналогично предложению 3.5.1 (ii), подсчетом параметров: гиперплоские сечения, проходящие через l образуют подпространство коразмерности 2 в $(\mathbb{P}^{g+1})^*$. Особые в некоторой точке l гиперплоские сечения образуют подмногообразие коразмерности ≥ 3 .

Утверждение (ii) также аналогично предложению 3.5.1 (iii): имеем разложение $\mathcal{N}_{l/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$. Далее $\mathcal{N}_{l/H}$ представляется в виде расширения

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{l/H} \longrightarrow \mathcal{N}_{l/X} \longrightarrow \mathcal{N}_{H/X}|_l \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{N}_{H/X}|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Так как H — поверхность типа КЗ и $l \subset H$ — неособая кривая рода нуль, то $\mathcal{N}_{l/H} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Отсюда $a + b = -1$. Так как $h^0(\mathcal{N}_{l/X}) \leq h^0(\mathcal{N}_{H/X}|_l) = 2$, то $a, b \leq 1$.

Докажем (iii). Согласно теории деформаций (см. [71, теоремы 2.8 и 2.15]), в любой точке $[l] \in F_1$ имеем

$$\dim_{[l]} F_1 \geq h^0(\mathcal{N}_{l/X}) - h^1(\mathcal{N}_{l/X}) = 1.$$

Более того, если $\mathcal{N}_{l/X}$ имеет тип $(0, -1)$, то $h^0(\mathcal{N}_{l/X}) = 1$ и $h^1(\mathcal{N}_{l/X}) = 0$. В этом случае схема F_1 неособа в соответствующей точке $[l]$ и имеет размерность 1. Если $\mathcal{N}_{l/X}$ имеет тип $(1, -2)$, то $h^0(\mathcal{N}_{l/X}) = 2$ и $h^1(\mathcal{N}_{l/X}) = 1$. В этом случае $\dim T_{[l], F_1} = 2$ и имеются две возможности:

- (a) $\dim_{[l]}(F_1) = 1$, схема F_1 имеет в точке $[l]$ особенность (или не приведена);
- (b) $\dim_{[l]}(F_1) = 2$ и схема F_1 неособа в точке $[l]$.

Пусть $F'_1 \subset F_1$ — неприводимая компонента. Рассмотрим универсальное семейство прямых $\mathcal{U}' \rightarrow F'_1$ и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{U}' & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ F'_1 & & X \end{array}$$

где p — соответствующее \mathbb{P}^1 -расслоение и $q_l: p^{-1}([l]) \rightarrow l \subset X$ — тавтологическое отображение для любой точки $[l] \in F_1$. Предположим, что выполняется условие (b). Так как $\dim(F'_1) = 2$, то $\dim(\mathcal{U}') = 3$ и $\dim q(\mathcal{U}') = 2$ или 3. Если $\dim q(\mathcal{U}') = 3$, то $q(\mathcal{U}') = X$ и отображение $q: \mathcal{U}' \rightarrow X$ конечно в общей точке. Но это невозможно. Действительно, для любой точки $[l] \in F_1$ мы имеем естественный морфизм нормальных пучков

$$dq: \mathcal{N}_{l/\mathcal{U}'} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{N}_{l/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2).$$

Так как $\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$, то гомоморфизм dq имеет в каждой точке $[l] \in S_0$ по крайней мере одномерное ядро. Это означает, что общая прямая l содержится в множестве ветвления морфизма $q: \mathcal{U}' \rightarrow X$, что невозможно (здесь используется предположение о нулевой характеристике основного поля).

Следовательно, $q(\mathcal{U}')$ — поверхность. По конструкции она содержит двумерное семейство прямых. Но из всех неприводимых проективных поверхностей этим свойством обладает только плоскость \mathbb{P}^2 (задача 1). По условию группа $\text{Pic}(X)$ порождается классом гиперплоского сечения. Поэтому, в частности, X не содержит плоскостей и, следовательно, случай (b) в нашей ситуации не реализуется.

Наконец заметим, что (iv) полностью аналогично доказательству пункта (v) предложения 3.5.1. \square

8.6. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное многообразие Фано индекса 1 рода $g \geq 5$. Положим $H := -K_X$. Таким образом, $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$. Пусть $l \subset X$ — прямая и пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие l . Пусть $E := \sigma^{-1}(l)$ — исключительный дивизор и пусть $H^* := \sigma^*H$, где $H \sim -K_X$ — класс гиперплоского сечения X . Отметим, что $E \simeq \mathbb{F}_1$ или \mathbb{F}_3 (см. (8.5.1)).

Сначала мы изучим отображение, заданное линейной системой

$$|-K_{\tilde{X}}| = |H^* - E|.$$

8.6.1. ЛЕММА. В обозначениях 8.6 имеем,

$$(8.6.2) \quad \begin{aligned} E^3 &= 1, \\ -K_{\tilde{X}}^3 &= 2g - 6, \\ (-K_{\tilde{X}})^2 \cdot E &= 3, \\ -K_{\tilde{X}} \cdot E^2 &= -2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из того, что $-K_{\tilde{X}} = H^* - E$, $(H^*)^3 = H^3 = 2g - 2$ и формул (1.9.3). \square

8.7. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть

$$\psi = \Phi_{|H-l|}: X \dashrightarrow X_{\bullet} \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

— проекция из прямой l , где $X_{\bullet} = \psi(X)$. Рассмотрим индуцированный морфизм $\phi = \Phi_{|-K_{\tilde{X}}|}: \tilde{X} \rightarrow X_{\bullet} \subset \mathbb{P}^{g-1}$:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \phi \\ X & \xrightarrow{\psi} & X_{\bullet} \subset \mathbb{P}^{g-1} \end{array}$$

8.7.1. ЛЕММА. В обозначениях 8.6 и 8.7 имеют место следующие утверждения.

(i)

$$-K_{\tilde{X}}|_E = \begin{cases} \Sigma + 2\Upsilon, & \text{если } \mathcal{N}_{l/X} \text{ имеет тип } (0, -1), \\ \Sigma + 3\Upsilon, & \text{если } \mathcal{N}_{l/X} \text{ имеет тип } (1, -2), \end{cases}$$

где Σ, Υ — классы исключительного сечения и слоя рациональной линейчатой поверхности $E = \mathbb{F}_1$ или \mathbb{F}_3 .

(ii) Морфизм $\phi: \tilde{X} \rightarrow X_{\bullet} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ бирационален и любой его нетривиальный слой является или собственным прообразом прямой на X , пересекающей l или, в случае, когда $\mathcal{N}_{l/X}$ имеет тип $(1, -2)$, исключительным сечением Σ поверхности $E \simeq \mathbb{F}_3$. Образ X_{\bullet} нормален и является многообразием Фано с каноническими горнштейновыми особенностями.

(iii) $h^0(\mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})) \leq 5$, $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) \geq g - 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) легко выводится из того, что

$$(-K_{\tilde{X}})^2 \cdot \bar{E} = 3 \quad \text{и} \quad -K_{\tilde{X}} \cdot \Upsilon = -E \cdot \Upsilon = 1.$$

Для доказательства (ii) напомним, что X — пересечение квадрик. Проекция $X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ индуцирована линейной проекцией $\mathbb{P}^{g+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ из l , слой которой — двумерные плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}^{g+1}$, проходящие через l . Каждая квадрика Q , проходящая через l , или содержит Π или высекает на Π дополнительно к l вычетную прямую l_Q . Таким образом, слой ψ — это пересечение прямых $l_Q \subset \Pi$ по всем квадрикам $Q \supset X$, $Q \not\supset \Pi$. Следовательно, любой слой проекции ψ — или точка или прямая, пересекающая l . Значит, вне E нетривиальные слои стягивания ϕ — собственные прообразы таких прямых. В случае, когда $\mathcal{N}_{l/X}$ имеет тип $(0, -1)$, из (i) следует, что E не содержит слоев ϕ , а в случае $(1, -2)$ единственный слой ϕ , лежащий в E , — это исключительное сечение Σ . Последнее утверждение в (ii) получается из предложения 5.6.

Первое неравенство в (iii) следует из (i), второе — из точной последовательности

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})),$$

поскольку $h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) = g$. \square

8.8. Начиная с этого места мы будем считать, что $g \geq 7$. Тогда

$$\dim |-K_{\tilde{X}} - E| \geq 1.$$

8.8.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Любой элемент линейной системы

$$\sigma_* (|-K_{\tilde{X}} - E|) = \sigma_* (|H^* - 2E|) \subset |H|$$

неприводим. Поэтому неподвижной компонентой линейной системы $|-K_{\tilde{X}} - E|$ может быть только исключительный дивизор E . Запишем

$$(8.8.2) \quad |-K_{\tilde{X}} - E| = (m - 1)E + |-K_{\tilde{X}} - mE|, \quad m \geq 1,$$

где $|-K_{\tilde{X}} - mE|$ не имеет неподвижных компонент и

$$\dim |-K_{\tilde{X}} - mE| = \dim |-K_{\tilde{X}} - E| > 0.$$

При этом любой элемент $D \in |-K_{\tilde{X}} - mE|$ неприводим. На самом деле, из наших вычислений ниже будет следовать, что $m = 1$.

8.8.3. СЛЕДСТВИЕ. *Морфизм ϕ не стягивает дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если C — кривая в слое морфизма ϕ , то $(H^* - E) \cdot C = K_{\tilde{X}} \cdot C = 0$. Так как $H^* \cdot C > 0$, то $E \cdot C > 0$ и $(-K_{\tilde{X}} - mE) \cdot C < 0$. Поэтому кривая C содержится в базисном множестве линейной системы $|-K_{\tilde{X}} - mE|$, где m задается условием (8.8.2). Так как $|-K_{\tilde{X}} - mE|$ не имеет неподвижных компонент, то $\text{Bs} |-K_{\tilde{X}} - mE|$ не содержит дивизоров. \square

8.8.4. СЛЕДСТВИЕ. *Любую прямую l на X пересекает не более конечного числа других прямых.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, собственные прообразы таких прямых стягиваются морфизмом ϕ . Если они образуют семейство, то ϕ стягивает дивизор. \square

8.9. Согласно лемме 8.7.1 (ii) и следствию 8.8.3 мы можем применить конструкцию линка Саркисова из раздела 7 с $C = l$. Если дивизор $-K_{\tilde{X}}$ является обильным, то на \tilde{X} существует второе экстремальное стягивание $\varphi: \tilde{X} \rightarrow Y$ (отличное от σ) и мы получим диаграмму (7.2.3). Если же дивизор $-K_{\tilde{X}}$ не является обильным, то по теореме 14.8.6 существует флоп $\chi: \tilde{X} \dashrightarrow \bar{X}$ и мы можем включить наши отображения в диаграмму (7.2.2).

Найдем возможности для стягивания Мори $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ экстремального луча R_φ . Напомним обозначения. Через \bar{E} мы обозначаем собственный прообраз дивизора E на \bar{X} , M — обильная образующая группы $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, а $\bar{M} := \varphi^* M$. Если φ — бирациональное стягивание, то через \bar{F} обозначается его исключительный дивизор. Для единообразия, мы также положим $\bar{F} = \bar{M}$, если стягивание φ — расслоенного типа.

Из леммы 7.8 получаем следующее

8.9.1. СЛЕДСТВИЕ. *Запишем $\bar{F} \sim a(-K_{\bar{X}}) - b\bar{E}$. Тогда $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \geq ta > 0$, где t задается условием (8.8.2). Более того, если стягивание φ бирационально, то $b > ta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как дивизор $\sigma_* \circ \chi_*^{-1}(\bar{F}) = a(-K_X)$ эффективен, что $a \geq 0$. Так как $\chi_*^{-1}(\bar{F}) \neq E$ (см. лемму 7.6), то $a > 0$. Из леммы 7.8 и замечания 8.8.1 следует, что класс дивизора $-K_{\tilde{X}} - m\bar{E}$ является выпуклой линейной комбинацией $\bar{F} \sim a(-K_{\tilde{X}}) - b\bar{E}$ и \bar{E} . Отсюда $b \geq ta$. Если $b = ta$, то $\bar{F} \sim a(-K_{\tilde{X}} - m\bar{E})$. Поскольку $\dim |-K_{\tilde{X}} - E| \geq 1$, то стягивание φ не может быть бирациональным. \square

Обозначим через $\mu = \mu(R_\varphi)$ длину экстремального луча R_φ (см. (14.5.3)).

8.9.2. ЛЕММА. Если $\mu = 1$, то $\overline{M} \sim -K_{\overline{X}} - \overline{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная система $|-K_{\overline{X}} - m\overline{E}|$ имеет положительную размерность и любой дивизор $\overline{D} \in |-K_{\overline{X}} - m\overline{E}|$ неприводим (см. замечание 8.8.1). Поэтому он неотрицателен на луче R_φ . Положим $\tilde{D} := \chi_*^{-1}(\overline{D})$. Тогда $\tilde{D} \in |-K_{\tilde{X}} - mE| = |H^* - (m+1)E|$.

Если $\text{Exc}(\phi) = \emptyset$, то $\overline{X} = \tilde{X}$ и

$$\overline{D} \cdot R_\sigma = (H^* - (m+1)E) \cdot R_\sigma > 0.$$

Если же $\text{Exc}(\phi) \neq \emptyset$, то

$$\overline{D} \cdot R_\theta = -\tilde{D} \cdot R_\theta = (m+1)E \cdot R_\theta > 0,$$

где R_θ — экстремальный луч, порожденный кривыми в слоях θ .

Значит, дивизор \overline{D} численно эффективен (см. рис. 1 стр. 71). Для минимальной рациональной кривой ℓ луча R_φ имеем

$$0 \leq (-K_{\overline{X}} - m\overline{E}) \cdot \ell = 1 - m\overline{E} \cdot \ell,$$

где $\overline{E} \cdot \ell > 0$. Отсюда $m = \overline{E} \cdot \ell = 1$ и $(-K_{\overline{X}} - \overline{E}) \cdot \ell = 0$, т.е. $-K_{\overline{X}} - \overline{E}$ — опорный дивизор для луча R_φ . \square

Из леммы 7.2.4 учитывая (8.6.2) получим

$$(8.9.3) \quad \begin{aligned} -K_{\overline{X}}^3 &= 2g - 6, \\ (-K_{\overline{X}})^2 \cdot \overline{E} &= 3, \\ -K_{\overline{X}} \cdot \overline{E}^2 &= -2. \end{aligned}$$

8.9.4. ЛЕММА. Луч R_φ не может быть типа B_2 - B_5 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что φ стягивает дивизор \overline{F} в точку. Как и в следствии 8.9.1 запишем $\overline{F} \sim a(-K_{\overline{X}}) - b\overline{E}$. Из (7.7.3) следует, что

$$\overline{F} \cdot (-K_{\overline{X}})^2 + 3b = (2g - 6)a = 3b + k, \quad k = 1, 2, 4.$$

С другой стороны, так как линейная система $|-K_{\overline{X}} - m\overline{E}|$ не имеет неподвижных компонент, а $|-K_{\overline{X}}|$ не имеет базисных точек, то

$$0 \leq (-K_{\overline{X}} - m\overline{E}) \cdot \overline{F} \cdot (-K_{\overline{X}}) = (2g - 6)a - 3b - 3am - 2bm.$$

Отсюда

$$3b + 4 \geq 3b + k = (2g - 6)a \geq 3b + 3am + 2bm.$$

Так как $a, b, m \geq 1$ (следствие 8.9.1), то последнее неравенство дает нам противоречие. \square

8.9.5. ЛЕММА. Если луч R_φ типа D, то имеет место случай (i) теоремы 8.3 и стягивание $\varphi: \overline{X} \rightarrow Y = \mathbb{P}^1$ задается линейной системой $|-K_{\overline{X}} - \overline{E}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d — степень общего слоя расслоения на поверхности дель Пеццо $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y \simeq \mathbb{P}^1$. Согласно лемме 7.9, имеем $\bar{M} \sim a(-K_{\bar{X}}) - \mu\bar{E}$, где $a > 0$. Напомним (см. теорему 14.7), что $1 \leq \mu \leq 3$. Более того, $1 \leq d \leq 7$ при $\mu = 1$, $d = 8$ при $\mu = 2$ и $d = 9$ при $\mu = 3$.

Соотношения (7.7.1) записываются в виде

$$(8.9.6) \quad d = (-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{M} = (2g - 6)a - 3\mu,$$

$$(8.9.7) \quad 0 = (-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{M}^2 = (2g - 6)a^2 - 6a\mu - 2\mu^2.$$

Напомним, что $g \geq 7$ по нашему предположению. Из уравнения (8.9.7) следует, что $\mu^2 \equiv 0 \pmod{a}$. Если $\mu = 1$, то по лемме 8.9.2 имеем $a = 1$ и тогда $g = 7$ и $d = 5$, т.е. это в точности случай 8.3 (i). Если $\mu = 2$, то $d = 8$ и из уравнения (8.9.6) получаем $(g - 3)a = 7$, $a = 1$, $g = 10$. Это противоречит (8.9.7). Наконец, если $\mu = 3$, то $d = 9$ и из уравнения (8.9.6) получаем $(g - 3)a = 9$, $a = 1$, $g = 12$. Это также противоречит (8.9.7). \square

8.9.8. ЛЕММА. Если луч R_φ типа C, то имеет место случай (ii) теоремы 8.3 и стягивание $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y = \mathbb{P}^2$ задается линейной системой $|-K_{\bar{X}} - \bar{E}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ — дискриминантная кривая расслоения на коники $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y \simeq \mathbb{P}^2$ и пусть $d := \deg \Delta$. Как и выше, согласно лемме 7.9 имеем $\bar{M} \sim a(-K_{\bar{X}}) - \mu\bar{E}$. Напомним (см. теорему 14.7), что $1 \leq \mu \leq 2$. Более того, $d \geq 3$ при $\mu = 1$ и $d = 0$ (т.е. $\Delta = \emptyset$) при $\mu = 2$. Соотношения (7.7.2) записываются в виде

$$12 - d = (-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{F} = (2g - 6)a - 3\mu,$$

$$2 = (-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{F}^2 = (2g - 6)a^2 - 6a\mu - 2\mu^2.$$

Если $\mu = 1$, то по лемме 8.9.2 имеем $a = 1$ и тогда $g = 8$ и $d = 5$. Получаем случай 8.3 (ii). Если же $\mu = 2$, то $d = 0$ и первое уравнение дает нам $(g - 3)a = 9$, $a = 1$, $g = 12$. Это противоречит второму уравнению. \square

8.9.9. ЛЕММА. Если луч R_φ типа B_1 , то имеет место один из случаев (iii)(a), (iii)(b), (iii)(c) теоремы 8.3 и выполнены следующие соотношения

$$(8.9.10) \quad \bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}, \quad \bar{F} \sim (\iota - 1)(-K_{\bar{X}}) - \iota\bar{E},$$

где $\iota = 4, 3, 2$ в случаях (iii)(a), (iii)(b), (iii)(c), соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ — бирациональное стягивание дивизора \bar{F} на кривую Z . Тогда Y — (неособое) многообразие Фано индекса $\iota = \iota(Y)$. Из лемм 7.9 и 8.9.2 получаются соотношения (8.9.10), причем $\iota > 1$. Далее, соотношения (7.7.4) в нашем случае имеют вид

$$(-K_{\bar{X}} - \bar{E})^2 \cdot (-K_{\bar{X}}) = \iota \cdot d(Y),$$

$$(-K_{\bar{X}} - \bar{E}) \cdot ((\iota - 1)(-K_{\bar{X}}) - \iota\bar{E}) \cdot (-K_{\bar{X}}) = \deg Z,$$

$$((\iota - 1)(-K_{\bar{X}}) - \iota\bar{E})^2 \cdot (-K_{\bar{X}}) = 2g(Z) - 2.$$

Учитывая (8.6.2), получим

$$(8.9.11) \quad (2g - 6) - 8 = \iota \cdot d(Y),$$

$$(8.9.12) \quad (2g - 6)(\iota - 1) - 8\iota + 3 = \deg Z,$$

$$(8.9.13) \quad (2g - 6)(\iota - 1)^2 - 6(\iota - 1)\iota - 2\iota^2 = 2g(Z) - 2.$$

Если $\iota = 2$, то из (8.9.11) и (8.9.13) следует, что $g - 7 = d(Y)$ и $g - 12 = g(Z) \geq 0$. Отсюда $g = 12$ и $g(Z) = 0$ поскольку $d(Y) \leq 5$ (теорема 3.6). Получаем единственную возможность 8.3 (iii)(c).

Пусть $\iota = 3$. Тогда Y — квадрика в \mathbb{P}^4 (теорема 1.8.1). В частности, $d(Y) = 2$. Тогда из (8.9.11) получаем единственную возможность $g = 10$, а из (8.9.12) и (8.9.13) вычисляем параметры кривой Z : $g(Z) = 2$ и $\deg Z = 7$. Это случай 8.3 (iii)(b).

Наконец, пусть $\iota = 4$. Тогда $Y \simeq \mathbb{P}^3$ (теорема 1.8.1). В частности, $d(Y) = 1$. Тогда из (8.9.11) получаем единственную возможность $g = 9$, а из (8.9.12) и (8.9.13) вычисляем параметры кривой Z : $g(Z) = 3$ и $\deg Z = 7$. Это случай 8.3 (iii)(a). Осталось показать, что в этом случае кривая Z не является гиперэллиптической. Поскольку линейная система

$$\varphi^*|4M - Z| = |\varphi^*(-K_Y) - \bar{F}| = |-K_{\bar{X}}| = \bar{\theta}^*|-K_{\bar{X}_0}|$$

не имеет базисных точек, то кривая $Z \subset \mathbb{P}^3$ является пересечением кватрик. В частности, она не имеет 5-секущих. Далее утверждение следует из леммы ниже. \square

8.9.14. ЛЕММА. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^3$ — неособая кривая рода 3 и степени 7. Тогда Z имеет 5-секущую тогда и только тогда, когда она является гиперэллиптической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Z имеет 5-секущую L , то проекция из нее задает гиперэллиптический ряд \mathfrak{g}_2^1 на Z .

Обратно, предположим, что на Z имеется гиперэллиптический ряд \mathfrak{g}_2^1 . Пусть D — гиперплоское сечение кривой Z . По теореме Римана–Роха $\dim |D| = 4$. Следовательно, $Z \subset \mathbb{P}^3$ является проекцией $Z \subset \mathbb{P}^4$ из точки $O \in \mathbb{P}^4 \setminus Z$. Положим $D' := D - \mathfrak{g}_2^1$. Тогда $\deg D' = 5$ и $\dim |D - D'| = 1$. Следовательно, линейная оболочка каждого дивизора из линейной системы $|D'|$ — 5-секущая плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^4$ кривой $Z \subset \mathbb{P}^4$. Снова по теореме Римана–Роха $\dim |D'| = 2$. Значит, такие 5-секущие плоскости заматают все пространство \mathbb{P}^4 и точка O попадает на одну из таких плоскостей $\Pi \subset \mathbb{P}^4$. Тогда образ Π при проекции из O будет 5-секущей прямой к нашей кривой $Z \subset \mathbb{P}^3$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.3. Существование линка (7.2.2) доказано в 8.9. По лемме 8.9.4 стягивание φ не может быть типа B_2 – B_5 . Если стягивание φ имеет тип D , то по лемме 8.9.5 мы получаем случай 8.3 (i). Если стягивание φ имеет тип C , то по лемме 8.9.8 мы получаем случай 8.3 (ii). Наконец, если стягивание φ имеет тип B_1 , то по лемме 8.9.9 мы получаем один из случаев (iii)(a), (iii)(b), (iii)(c). Пусть \bar{H} — собственный прообраз дивизора H на \bar{X} . Тогда $-K_{\bar{X}} = \bar{H} - \bar{E}$ и из (8.9.10) несложно получить

$$\bar{H} \sim (2\iota - 1)\bar{M} - 2\bar{F}, \quad \bar{E} \sim (\iota - 1)\bar{M} - \bar{F}.$$

Отсюда следует, что отображение $Y \dashrightarrow X$ задается линейной системой $|(2\iota - 1)M - 2Z|$. Это доказывает последние утверждения в (iii)(a), (iii)(b) и (iii)(c). \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ 8.3.5 и 8.3.6. В предположениях следствия 8.3.6 исключительное множество $\text{Exc}(\phi)$ стягивания ϕ состоит в точности из собственных прообразов прямых, пересекающих l (см. лемму 8.7.1 (ii)). Поэтому для доказательства утверждений достаточно установить непустоту множества $\text{Exc}(\phi)$. Простейшие вычисления показывают, что дефект $\text{def}(\Psi) := E^3 - \bar{E}^3$ линка (7.2.2) строго положителен (см. задачу 5). Значит, χ не является изоморфизмом и множество $\text{Exc}(\phi)$ непусто (см. предложение 7.4). \square

- ЗАДАЧИ.**
1. Пусть $S \subset \mathbb{P}^N$ — (необязательно неособая) неприводимая поверхность, содержащая двумерное семейство прямых. Докажите, что S — плоскость.
 2. Докажите, что на антиканонически вложенном многообразии Фано $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ с $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \cdot K_X$ общую прямую пересекает не более конечного числа прямых.
 3. Пусть $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ — пересечение трех квадрик. Пусть $l \subset X$ — прямая. Предположим, что прямую l пересекает не более конечного числа других прямых в X . Докажите, что существует линк Саркисова (7.2.2) центром l и при этом $Y \simeq \mathbb{P}^2$, а φ — расслоение на коники. Вычислите степень дискриминантной кривой.
 4. Пусть $X = X_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — антиканонически вложенное многообразие Фано с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$ и $g(X) = 6$. Пусть $l \subset X$ — прямая. Предположим, что прямую l пересекает не более конечного числа других прямых в X . Докажите, что существует линк Саркисова (7.2.2) центром l и при этом Y — снова многообразие Фано $\iota(Y) = 1$, $\rho(Y) = 1$, $g(Y) = 6$, а φ — раздутие прямой.
 5. Вычислите дефект $\text{def}(\Psi) := E^3 - \bar{E}^3$ линка (7.2.2) в теореме 8.3 и докажите, что он строго положителен. *Указание:* Вычислите $\bar{M}^3 = (-K_X - \bar{E})^3$ двумя способами.
 6. Докажите утверждение следствия 8.3.6 для случая рода $g(X) \geq 4$.

9. Многообразия Фано с числом Пикара 1, II

9.1. Схема Гильберта коник. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное многообразие Фано индекса $\iota = 1$ с $\rho(X) = 1$, $g \geq 5$ и пусть H — класс гиперплоского сечения. Предположим, что на X существует хотя бы одна коника¹. Пусть $F_2 = F_2(X)$ — схема Гильберта коник на X , т.е. схема, параметризующая замкнутые подсхемы в X с многочленом Гильберта $\chi(t) = 2t + 1$.

9.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное многообразие Фано индекса $\iota = 1$ с $\rho(X) = 1$ и $g \geq 5$. Предположим, что на X существует невырожденная коника. Имеют место следующие утверждения.

- (i) Через любую невырожденную конику $C \subset X$ можно провести неособое гиперплоское сечение.

¹Позднее в следствии 10.6 мы покажем, что коника обязательно существует.

- (ii) Для нормального пучка $\mathcal{N}_{C/X}$ невырожденной коники $C \subset X$ имеются только три возможности:

$$(9.2.1) \quad \mathcal{N}_{C/X} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \text{тип } (0, 0), \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & \text{тип } (1, -1), \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) & \text{тип } (2, -2). \end{cases}$$

(Мы отождествляем C с \mathbb{P}^1 .)

- (iii) Пусть $[C] \in F_2(X)$ — точка, соответствующая невырожденной конике $C \subset X$. Если нормальный пучок $\mathcal{N}_{C/X}$ имеет тип $(0, 0)$ или $(1, -1)$, то схема $F_2(X)$ неособа в точке $[C]$ и $\dim_{[C]} F_2(X) = 2$.
- (iv) Если невырожденная коника C соответствует достаточно общей точке некоторой компоненты $F'_2 \subset F_2(X)$, то она имеет тип $(0, 0)$.
- (v) $\dim F_2(X) = 2$ и любая компонента схемы $F_2(X)$, содержащая невырожденную конику, двумерна.
- (vi) Через общую точку $P \in X$ проходит конечное число коник и проходит по крайней мере одна невырожденная коника.
- (vii) Общую (невырожденную) конику $C \subset X$ пересекает не более конечного числа прямых.
- (viii) При $g \geq 10$ через произвольную точку $P \in X$ проходит не более конечного числа коник.
- (ix) При $g \geq 9$ каждая коника $C \subset X$ пересекает не более конечного числа прямых.

9.2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В предложении 9.2 мы не утверждаем, что любая компонента схемы $F_2(X)$ двумерна (см. (v)). В принципе, могут существовать компоненты размерности ≤ 1 , состоящие из приводимых или неприведенных коник. На самом деле это невозможно [78, лемма 2.3.4], но для наших целей это не потребуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (i). Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие коники C и пусть E — исключительный дивизор. Поскольку X является пересечением квадратик, то коника C высекается на X линейной системой $|H - C|$ гиперплоских сечений, проходящих через C . Значит, линейная система $|\sigma^*H - E|$ не имеет базисных точек. По теореме Бертини общий элемент $\tilde{H} \in |\sigma^*H - E|$ неособ. Ограничение линейной системы $|\sigma^*H - E|$ на E также не имеет базисных точек и не составлено из слоев проекции $\sigma_E: E \rightarrow C$. Снова по теореме Бертини пересечение $\tilde{H} \cap E$ является неособой неприводимой кривой, сечением $\sigma_E: E \rightarrow C$. Это означает, что ограничение $\sigma_H: \tilde{H} \rightarrow \sigma(\tilde{H})$ — изоморфизм. Следовательно, $\sigma(\tilde{H})$ — неособая гиперплоское сечение, проходящее через C .

Доказательство (ii) аналогично доказательству предложения 3.5.1 (iii): имеем разложение $\mathcal{N}_{C/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) + \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$. Пусть H — неособое гиперплоское сечение, проходящее через C . Расслоение $\mathcal{N}_{C/X}$ представляется в виде расширения

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{C/H} \longrightarrow \mathcal{N}_{C/X} \longrightarrow \mathcal{N}_{H/X}|_C \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{N}_{H/X}|_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Так как H — поверхность типа КЗ и $C \subset H$ — неособая кривая рода нуль, то $\mathcal{N}_{C/H} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Отсюда $a + b = 0$. Так как $h^0(\mathcal{N}_{C/X}) \leq h^0(\mathcal{N}_{H/X}|_C) = 2$, то $a, b \leq 2$.

Докажем (iii). Согласно теории деформаций (см. [71, теоремы 2.8 и 2.15]), в любой точке $[C] \in F_2$ имеем

$$\dim_{[C]} F_2 \geq h^0(\mathcal{N}_{C/X}) - h^1(\mathcal{N}_{C/X}) = 2.$$

Более того, если пучок $\mathcal{N}_{C/X}$ имеет тип $(0, 0)$ или $(1, -1)$, то

$$h^0(\mathcal{N}_{C/X}) = 2, \quad h^1(\mathcal{N}_{C/X}) = 0.$$

В этом случае схема F_2 неособа в соответствующей точке $[C]$ и имеет размерность 2. Это, в частности, доказывает (iii).

Если $\mathcal{N}_{C/X}$ имеет тип $(2, -2)$, то

$$h^0(\mathcal{N}_{C/X}) = 3, \quad h^1(\mathcal{N}_{C/X}) = 1.$$

В этом случае $\dim T_{[C], F_2} = 3$ и имеются две возможности:

$$(9.2.3) \quad \dim_{[C]} F_2 = 2, \quad \text{схема } F_2 \text{ особа в точке } [C];$$

$$(9.2.4) \quad \dim_{[C]} F_2 = 3, \quad \text{схема } F_2 \text{ неособа в точке } [C]$$

Пусть $F'_2 \subset F_2(X)$ — неприводимая компонента, содержащая класс $[C]$ (невырожденной) коники C . Рассмотрим универсальное семейство коник $\mathcal{U}' \rightarrow F'_2$ и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{U}' & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ F'_2 & & X \end{array}$$

Мы утверждаем, что морфизм q сюръективен. Действительно, в противном случае $q(\mathcal{U}')$ — поверхность, содержащая (по крайней мере) двумерное семейство коник. Известно, что такая поверхность является проекцией поверхности Веронезе (см., например, [78, лемма A.1.2]). В частности, $\deg q(\mathcal{U}') \leq 4$. По условию группа $\text{Pic}(X)$ порождается классом гиперплоского сечения. Поэтому, в частности, X не содержит поверхностей степени меньше чем $2g - 2$. Следовательно, $q(\mathcal{U}') = X$, т.е. морфизм q сюръективен.

Докажем (iv). Возьмем невырожденную конику C , соответствующую достаточно общей точке $[C] \in F'_2$ (мы рассматриваем компоненту F'_2 с приведенной структурой). Пусть

$$\mathcal{N}_{C/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a), \quad a = 0, 1, 2.$$

Тогда многообразие F'_2 неособо в $[C]$, а, следовательно, неособо также многообразие \mathcal{U}' вдоль слоя над $[C]$ (который мы тоже обозначим через C). Имеем естественный морфизм нормальных пучков

$$dq: \mathcal{N}_{C/\mathcal{U}'} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\dim(F'_2)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{N}_{C/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a).$$

Пусть $V := \mathcal{U}' \setminus \text{Sing}(\mathcal{U}')$. Тогда $C \subset V$. Морфизм $q_V: V \rightarrow X$ является гладким над открытым подмножеством $U \subset X$ и $C \cap U \neq \emptyset$. Значит, дифференциал dq невырожден в общей точке C . Так как

$$\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) = 0 \quad \text{при } a < 0,$$

то $a = 0$. Это доказывает (iv). Отсюда следует, что имеет место случай (9.2.3), что доказывает (v). Тогда морфизм q должен быть конечным в общей точке. Отсюда вытекает утверждение (vi).

Утверждение (vii) следует из того, что через любую точку многообразия X проходит не более конечного числа прямых, все прямые на X заматают поверхность и общая коника не лежит в этой поверхности (см. предложение 8.5 и пункт (vi)).

Для доказательства (viii) предположим, что существует одномерное семейство коник, проходящих через $P \in X$. Пусть F — поверхность, заметаемая этими кониками, и пусть $\mathcal{M} := |H - 3P|$ — линейная система гиперплоских сечений X , имеющих особенность кратности ≥ 3 в точке P . Тогда

$$\dim \mathcal{M} \geq \dim |H| - 10 = g - 9 > 0.$$

Каждая коника, проходящая через P , содержится в любом дивизоре из \mathcal{M} . Следовательно, F — неподвижная компонента \mathcal{M} . Это противоречит тому, что $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$. Рассуждения в доказательстве (ix) аналогичны. Предложение доказано. \square

9.3. ТЕОРЕМА ([105]). Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное трехмерное многообразие Фано индекса 1, рода $g \geq 7$ с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$, где $-K_X = H$. Предположим, что на X существует невырожденная коника C . При $g \leq 8$ мы дополнительно потребуем, что конику C пересекает не более конечного числа прямых (т.е. она достаточно общая, см. предложение 9.2 (vii)). Тогда раздутие $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ коники C включается в линк Саркисова (7.2.2).

Далее, пусть $E := \sigma^{-1}(C)$ — исключительный дивизор, пусть $\bar{E} \subset \bar{X}$ — собственный прообраз E , пусть M — обильная образующая $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ и пусть $\bar{M} = \varphi^*M$. Тогда для экстремального стягивания φ имеет место одна из следующих возможностей:

- (i) $g = 7$, $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадрика, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim 5(-K_{\bar{X}}) - 3\bar{E}$ и является раздутием неособой кривой $Z \subset Q \subset \mathbb{P}^4$ степени 10 и рода 7, $\bar{M} \sim 2(-K_{\bar{X}}) - \bar{E}$;
- (ii) $g = 8$, $Y = Y_{14} \subset \mathbb{P}^9$ — также многообразие Фано индекса 1 и рода 8 с $\text{Pic}(Y) = -K_Y \cdot \mathbb{Z}$, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$ и является раздутием коники $Z \subset Y$, $\bar{M} \sim 2(-K_{\bar{X}}) - \bar{E}$;
- (iii) $g = 9$, $Y = \mathbb{P}^1$, $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на поверхности дель Пеццо степени 6 и $\bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$;
- (iv) $g = 10$, $Y = \mathbb{P}^2$, а $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ расслоение на коники с дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ степени 4 и $\bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$;
- (v) $g = 12$, $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадрика, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim 2(-K_{\bar{X}}) - 3\bar{E}$ и является раздутием неособой рациональной кривой $Z \subset Q \subset \mathbb{P}^4$ степени 6, $\bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$.

В частности, $g \leq 12$ и $g \neq 11$.

Большая часть этого раздела будет посвящена доказательству теоремы. Оно следует примерно той же схеме, что и доказательство 8.3.

9.3.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Далее, на протяжении всего раздела мы используем обозначения теоремы 9.3. Положим также $H^* := \sigma^*H$.

Из соотношений (1.9.3) и того, что $-K_{\tilde{X}} = H^* - E$ немедленно вытекает следующая.

9.3.2. ЛЕММА. В обозначениях теоремы 9.3 имеем $E^3 = 0$,

$$(9.3.3) \quad \begin{aligned} E^3 &= 0, \\ -K_{\tilde{X}}^3 &= 2g - 8, \\ (-K_{\tilde{X}})^2 \cdot E &= 4, \\ -K_{\tilde{X}} \cdot E^2 &= -2. \end{aligned}$$

Согласно (9.2.1), для поверхности E имеются три возможности: $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, \mathbb{F}_2 и \mathbb{F}_4 .

9.3.4. ЛЕММА. В обозначениях теоремы 9.3 имеем следующие утверждения.

(i) $h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) = g - 1$.

(ii) Линейная система $|-K_{\tilde{X}}|$ не имеет базисных точек и задает морфизм

$$\phi = \Phi_{|-K_{\tilde{X}}|}: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{g-2}.$$

Образ $X_\bullet = \phi(X)$ этого морфизма трехмерен.

(iii)

$$-K_{\tilde{X}}|_E = \begin{cases} \Sigma + 2\Upsilon, & \text{если } E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \\ \Sigma + 3\Upsilon, & \text{если } E \simeq \mathbb{F}_2, \\ \Sigma + 4\Upsilon, & \text{если } E \simeq \mathbb{F}_4. \end{cases}$$

где Σ, Υ — классы исключительного сечения и слоя рациональной линейчатой поверхности E .

(iv) $h^0(E, \mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})) = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку наше многообразие $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ является пересечением квадрик и не содержит плоскостей, то его пересечение $X \cap \langle C \rangle$ совпадает с C (как схема). Следовательно, $Bs|H - C| = C$ и поэтому собственный прообраз $|H^* - E| = |-K_{\tilde{X}}|$ на \tilde{X} линейной системы гиперплоских сечений, проходящих через C , не имеет базисных точек. По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) = 0$. Следовательно, имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^*)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_E(H^*)) \rightarrow 0.$$

Откуда следует, что $\dim |-K_{\tilde{X}}| = g - 2$. Так как $-K_{\tilde{X}}^3 > 0$, то образ морфизма, заданного линейной системой $|-K_{\tilde{X}}|$ трехмерен. Это доказывает (i) и (ii).

Пункт (iii) следует из того, что $(-K_{\tilde{X}})^2 \cdot E = 4$ и $-K_{\tilde{X}} \cdot \Upsilon = 1$. Равенство (iv) следует из (iii). \square

Мы изучим антиканоническое отображение $\phi = \Phi_{|-K_{\tilde{X}}|}$ многообразия \tilde{X} . Ясно, что ϕ включается в коммутативную диаграмму

$$(9.3.5) \quad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \phi \\ X & \overset{\Phi_{|H-C|}}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^{g-2} \end{array}$$

где $\Phi_{|H-C|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-2}$ — проекция из линейной оболочки $\langle C \rangle = \mathbb{P}^2$ коники C .

9.3.6. ЛЕММА. Имеем

$$(9.3.7) \quad h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) \geq g - 1 - h^0(E, \mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})) = g - 7.$$

Если при этом имеет место равенство

$$h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) = g - 7,$$

то ограничение $|-K_{\tilde{X}}|_E$ является полной линейной системой размерности 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается из точной последовательности

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}}))$$

и того, что $h^0(\mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})) = 6$ (см. лемму 9.3.4 (iv)). \square

9.3.8. ЛЕММА. *Морфизм ϕ не стягивает дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что морфизм ϕ стягивает простой дивизор \tilde{D} , т.е. $\dim \phi(\tilde{D}) \leq 1$. Этот дивизор замечается одномерным семейством кривых \tilde{L} таких, что $-K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{L} = (H^* - E) \cdot \tilde{L} = 0$ и $E \cdot \tilde{L} > 0$. По конструкции (9.3.5) образ $D := \sigma(\tilde{D})$ содержится в пересечении X с линейной оболочкой $\langle C, \phi(\tilde{D}) \rangle$. Так как $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$, то отсюда следует, что $\dim \langle C, \phi(\tilde{D}) \rangle \geq g$. Значит, $\dim \langle \phi(\tilde{D}) \rangle \geq g - 3$. В частности, это означает, что $\phi(\tilde{D})$ — кривая степени ≥ 4 .

Так как $(-K_{\tilde{X}} - E) \cdot \tilde{L} < 0$, то дивизор \tilde{D} должен быть неподвижной компонентой линейной системы $|-K_{\tilde{X}} - E|$ (если она непуста). Так как $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$ и $\tilde{D} \neq E$, то $\dim |-K_{\tilde{X}} - E| \leq 0$. Неравенство (9.3.7) и лемма 9.3.4 (iv) показывают, что

$$\dim \langle \phi(E) \rangle = h^0(E, \mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})) - 1 \geq g - 3.$$

Таким образом, линейная оболочка поверхности $\phi(E)$ имеет размерность не меньше чем 4. В частности, отображение $\phi_E: E \rightarrow \phi(E)$ бирационально (иначе $\phi(E)$ — поверхность степени ≤ 2).

По нашему предположению конику C пересекает не более чем конечное число прямых. Значит, поверхность \tilde{D} замечается кривыми \tilde{L} такими, что $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{L} = 0$ и $E \cdot \tilde{L} > 1$. Поэтому образ исключительного дивизора $\phi(E)$ должен быть особ вдоль кривой $\phi(\tilde{D})$ степени ≥ 4 . Однако особое множество поверхности степени 4 в \mathbb{P}^4 не может содержать кривую степени ≥ 2 (см. задачу 2). Противоречие. \square

9.4. Продолжим доказательство теоремы 9.3. Согласно леммам 9.3.4 (ii) и 9.3.8, мы можем применить конструкцию линка Саркисова из раздела 7. Мы получим диаграмму (7.2.2) (или ее вырожденный вариант (7.2.3)). Как и в доказательстве 8.3, рассмотрим возможности для стягивания φ . При этом мы можем пользоваться классификацией экстремальных лучей (теорема 14.7) и оценкой (9.3.7) на размерность линейной системы $|-K_{\tilde{X}} - E|$. Аналогично доказательству 8.3 получим.

9.4.1. ЛЕММА. *При $g \geq 9$ выполнено равенство $\overline{M} \sim -K_{\tilde{X}} - \overline{E}$.*

Далее, помимо решений, перечисленных в теореме 9.3, имеют место следующие три возможности. Все они соответствуют бирациональным стягиваниям.

- 1[#] $g(X) = 11$, $Y = \mathbb{P}^3$, φ — раздутие рациональной кривой степени 6, $\overline{F} \sim 3(-K_{\tilde{X}}) - 4\overline{E}$, $\overline{E}^3 = -5$;
- 2[#] $g(X) = 8$, $Y = Y_{16} \subset \mathbb{P}^{10}$ — многообразие Фано индекса 1 рода 9, φ — раздутие точки, $\overline{F} \sim -K_{\tilde{X}} - \overline{E}$, $\overline{E}^3 = -11$;
- 3[#] $g(X) = 7$, $Y = Y_3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая кубика, φ — раздутие рациональной кривой степени 4, $\overline{F} \sim 3(-K_{\tilde{X}}) - 2\overline{E}$, $\overline{E}^3 = -15$.

Ниже мы покажем, что эти случаи не реализуются.

9.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *В условиях теоремы 9.3 отображение χ из диаграммы (7.2.2) не является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве 8.3.5 из вычислений следует, что дефект $\text{def}(\Psi) := E^3 - \bar{E}^3$ линка (7.2.2) строго положителен (см. задачу 3). \square

9.4.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное трехмерное многообразие Фано индекса 1, рода $g \geq 7$. Если на X существует коника, то на X существует прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что мы можем считать, что коника C невырождена. Мы также дополнительно предположим, что коника C выбрана общей, т.е. ее нормальный пучок имеет вид $\mathcal{N}_{C/X} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$. Тогда $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и морфизм ϕ не может стягивать кривых на E . Согласно 9.4.2, отображение χ не является изоморфизмом и множество $\text{Exc}(\phi)$ непусто (см. предложение 7.4). Докажем, что оно состоит из собственных прообразов прямых, пересекающих C .

По лемме 9.4.1 имеем $\bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$. Поэтому $\dim |-K_{\bar{X}} - \bar{E}| = g - 8$ в этих случаях. При $g = 8$ исключительный дивизор \bar{F} — единственный элемент линейной системы $|-K_{\bar{X}} - \bar{E}|$. При $g = 7$ исключительный дивизор \bar{F} — элемент линейной системы $|-5K_{\bar{X}} - 3\bar{E}|$ или $|-3K_{\bar{X}} - 2\bar{E}|$ (зависимости от того реализуется ли возможность 9.3 (i) или возможность из таблицы в 9.4). Ясно, что тогда $|-K_{\bar{X}} - \bar{E}| = \emptyset$. Следовательно, во всех случаях

$$\dim |-K_{\bar{X}} - \bar{E}| = g - 8.$$

Поэтому, по лемме 9.3.6, образ $\phi(E)$ — (невырожденная) поверхность $S_4 \subset \mathbb{P}^5$. В частности, она неособа. Это означает, что для любого одномерного слоя \tilde{L} морфизма $\phi: \tilde{X} \rightarrow X_\bullet$ мы имеем $E \cdot \tilde{L} = H^* \cdot \tilde{L} = 1$. Таким образом, $\sigma(\tilde{L})$ — прямая, пересекающая конику C . \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.3. Осталось исключить только случаи $1^\#$ - $3^\#$ в пункте 9.4. Но теперь мы знаем, что на X существует прямая. Тогда по теореме 8.3 случай $g = 11$ невозможен. В случае $g = 8$ из таблицы 9.4 мы получаем противоречие, сравнивая топологические эйлеровы характеристики X и Y (с использованием следствия 8.3.3). В случае $g = 7$ многообразие X рационально согласно следствию 8.3.4. Значит, оно не может быть бирационально эквивалентно неособой кубике $Y_3 \subset \mathbb{P}^4$, которая нерациональна (см. [47]). \square

9.4.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X — многообразие Фано с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$ и $g(X) \geq 7$. Предположим, что на X существует невырожденная коника. Тогда топологическая эйлерова характеристика $\chi_{\text{top}}(X)$ принимает следующие значения:

$g(X)$	7	8	9	10	12
$\chi_{\text{top}}(X)$	-10	-6	-2	0	4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 9.4.3, на X существует прямая. Тогда при $g(X) \geq 8$ мы можем воспользоваться следствием 8.3.3. При $g(X) = 7$, как и в доказательстве 8.3.3, значение $\chi_{\text{top}}(X)$ вычисляется с использованием параметров кривой Z в бирациональной перестройке (7.2.2) (см. 9.3 (i)). \square

9.5. Аналогично замечанию 8.3.2 следует отметить, что в условиях (i) теоремы 9.3 кривая рода 7 с точностью до абстрактного изоморфизма однозначно определяется многообразием X . Как и в 8.3 (iii)(a) на эту кривую можно наложить определенные условия, т.е. она должна быть достаточно общей:

9.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $Z \subset Q \subset \mathbb{P}^4$ — кривая степени 10 рода 7 из пункта (i) теоремы 9.3. Тогда имеют место следующие утверждения.

- (i) Z не является гиперэллиптической и вложение $Z \subset \mathbb{P}^4$ — это проекция $\pi: Z_{12} \dashrightarrow \mathbb{P}^4 \supset Z$ канонической кривой $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ из прямой, пересекающей Z_{12} в двух точках $P_1, P_2 \in Z_{12}$ (возможно совпадающих).
- (ii) Z не является ни тригональной, ни тетрагональной.

Полное описание канонических моделей кривых рода 7 дано в работе [93].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Прежде всего заметим, что кривая $Z \subset \mathbb{P}^4$ не лежит в гиперплоскости. Действительно, из (i) 9.3 следует, что $\overline{E} + 2\overline{F} \sim 5\overline{M}$. Поэтому поверхность $E_Q := \varphi(\overline{E})$ высекается на квадрике Q гиперповерхностью R степени 5. Если бы кривая $Z \subset \mathbb{P}^4$ лежала в гиперплоскости, то она была бы полным пересечением $Q \cap R \cap \mathbb{P}^3$ (поскольку $\deg Z = 10$). Но тогда $g(Z) = 16$. Противоречие.

Пусть D — гиперплоское сечение кривой Z . Тогда $\dim |D| \geq 4$. По теореме Римана–Роха

$$\dim |D| - \dim |K_Z - D| = \deg D - g(Z) + 1 = 4.$$

Отсюда $|K_Z - D| \neq \emptyset$, т.е. на Z существуют две точки P_1, P_2 такие, что $K_Z = D + P_1 + P_2$. Так как дивизор D очень обилен, то кривая Z негиперэллиптическая и является проекцией канонической кривой $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ из двух точек $P_1, P_2 \in Z_{12}$.

(ii) Предположим, что Z тригональна. Тогда ее каноническая модель $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ имеет одномерное семейство 3-секущих, которые заметают поверхность минимальной степени (см. теорему 16.2). При проекции $\pi: \mathbb{P}^6 \supset Z_{12} \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}^4$ мы получим одномерное семейство 3-секущих, которые должны лежать в нашей квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$. Собственные прообразы на \overline{X} всех этих 3-секущих стягиваются морфизмом $\Phi|_{-K_{\overline{X}}}$. Это противоречит тому, что этот морфизм — малый.

Предположим теперь, что Z не является ни гиперэллиптической, ни тригональной, но имеет линейный ряд типа \mathfrak{g}_4^1 . Для разбора этого случая нам понадобятся две леммы.

9.5.2. ЛЕММА. Пусть Z — гладкая негиперэллиптическая нетригональная кривая рода 7. Предположим, что Z имеет линейный ряд $|L|$ типа \mathfrak{g}_d^2 , где $d \leq 6$. Тогда $d = 6$, кривая Z тетрагональна и ее каноническая модель $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ содержится в нормальной поверхности $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ степени 6. При этом Z_{12} высекается на S_6 квадратикой. В частности, Z_{12} содержится в неособой части S_6 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая базисное множество, мы можем считать, что $|L|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $\gamma: Z \rightarrow \mathbb{P}^2$ (при этом d только уменьшится). Обозначим через Z° образ γ .

Сначала мы рассмотрим случай, когда морфизм γ бирационален на Z° . Тогда Z° — плоская кривая степени d арифметического рода $p_a(Z^\circ) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \geq g(X) = 7$. Отсюда $d = 6$ и $p_a(Z^\circ) = 10$. Так как Z не является тригональной, то Z° не имеет тройных особых точек. Значит, особенности кривой Z° разрешаются раздутием трех двойных точек (возможно бесконечно близких) [32, гл. 5, § 3]:

$$\eta: \widehat{S} \longrightarrow \mathbb{P}^2,$$

а проекция из особой точки задает на Z линейный ряд \mathfrak{g}_4^1 . Пусть $\widehat{Z} \subset \widehat{S}$ — собственный прообраз Z° . Мы имеем $2K_{\mathbb{P}^2} + Z^\circ \sim 0$ и это соотношение сохраняется при раздутиях двойных точек:

$$2K_{\widehat{S}} + \widehat{Z} = \eta^*(2K_{\mathbb{P}^2} + Z^\circ) \sim 0.$$

Отсюда $-K_{\widehat{S}} \cdot \widehat{Z} = \frac{1}{2}(-K_{\widehat{S}})^2 = 3$. Поэтому антиканонический дивизор $-K_{\widehat{S}}$ численно эффективен и объемен, т.е. \widehat{S} — обобщенная поверхность дель Пеццо степени 6. Антиканоническое отображение $\Phi_{|-K_{\widehat{S}}|}: \widehat{S} \rightarrow \mathbb{P}^6$ является морфизмом и его образ $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ — поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями (или гладкая) [57]. Из формулы присоединения ясно, что ограничение морфизма $\Phi_{|-K_{\widehat{S}}|}$ на \widehat{Z} является каноническим отображением, а его образ $\Phi_{|-K_{\widehat{S}}|}(\widehat{Z})$ является канонической кривой. Так как кривая Z нетригональна, то $Z_{12} = \Phi_{|-K_{\widehat{S}}|}(\widehat{Z})$ есть пересечение квадратик. Таким образом, $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ содержится в поверхности дель Пеццо $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ степени 6 с не хуже чем дювалевскими особенностями и высекается на S_6 квадратикой.

Теперь мы рассмотрим случай, когда морфизм $\gamma: Z \rightarrow Z^\circ \subset \mathbb{P}^2$ не является бирациональным. Ясно, что $(\deg Z^\circ) \cdot (\deg \gamma) = d \leq 6$, где $\deg \gamma \geq 2$ и $\deg Z^\circ \geq 2$. Так как кривая Z нетригональна, то случай $\deg Z^\circ = 2$ невозможен. Остается единственная возможность: $d = 6$, $\deg Z^\circ = 3$ и $\deg \gamma = 2$. Так как кривая Z негиперэллиптическая, то Z° неособа. Проекция из любой точки $p \in Z^\circ$ задает на Z линейный ряд \mathfrak{g}_4^1 . По формуле Гурвица $K_Z = \gamma^*R$, где R — дивизор степени 6 на Z° . Возьмем дивизор R' степени 3 на Z° такой, что $R = 2R'$. Тогда $K_Z = 2\pi^*R'$ и $|L'| := |\pi^*R'|$ — линейный ряд типа \mathfrak{g}_6^2 (возможно, отличный от $|L|$). Таким образом, в полной линейной системе $|K_Z| = |2L'|$ на Z имеется подсистема $\pi^*|2R'|$ без базисных точек, которая отображает Z на эллиптическую кривую $Z^\circ \subset \mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^6$ степени 6. По конструкции эта кривая является проекцией канонической модели $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ из некоторой точки, не лежащей на Z_{12} . Это означает, что Z_{12} лежит на конусе $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ над Z° . Простейшие вычисления (см. следствие 16.1.1) показывают, что через Z_{12} а \mathbb{P}^6 проходит ровно 10 линейно независимых квадратик, в то время как через S_6 проходит лишь 9. Значит, Z_{12} высекается на S_6 квадратикой. \square

9.5.3. СЛЕДСТВИЕ. В наших предположениях 9.5.1 кривая Z не имеет линейного ряда \mathfrak{g}_6^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как центры P_1, P_2 проекции $\pi: \mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ лежат на S_6 , то образ $\pi(S_6)$ — поверхность степени 4, содержащая кривую Z . Если $\pi(S_6)$ не лежит в нашей квадратике Q , то кривая Z является компонентой пересечения $\pi(S_6) \cap Q$ и тогда $10 = \deg Z \leq \deg \pi(S_6) \cap Q = 8$. Противоречие показывает, что $\pi(S_6) \subset Q$. Но тогда для собственного прообраза $\overline{S} \subset \overline{X}$ поверхности $\pi(S)$ имеем $(-K_{\overline{X}})^2 \cdot \overline{S} < 0$. Это противоречит численной эффективности $-K_{\overline{X}}$. \square

9.5.4. ЛЕММА. Пусть Z — гладкая негиперэллиптическая тетрагональная кривая рода 7. Предположим, что Z не имеет линейного ряда \mathfrak{g}_6^2 . Тогда каноническая модель $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ этой кривой содержится в неособом трехмерном многообразии $W = W_4 \subset \mathbb{P}^6$ — рациональном линейчатом многообразии степени 4 (см. предложение 15.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|L|$ — линейный ряд типа \mathfrak{g}_4^1 . По геометрической версии теоремы Римана–Роха линейные оболочки $\langle q_1 + \dots + q_4 \rangle$ дивизоров $q_1 + \dots + q_4 \in |L|$ на кривой $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ двумерны. Эти плоскости замечают трехмерное многообразие $W \subset \mathbb{P}^6$.

Рассмотрим это многообразие более подробно. Для этого рассмотрим линейную систему $|K_Z - L|$ степени 8. По теореме Римана–Роха $\dim |K_Z - L| = 3$. Поскольку Z не имеет линейного ряда \mathfrak{g}_6^2 , то $\dim |K_Z - L - P' - P''| = 1$ для любых точек $P', P'' \in Z$. Следовательно, $|K_Z - L|$ — очень обильная линейная система типа \mathfrak{g}_8^3 (см. [32, гл. IV, § 3]). Она задает вложение $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, а обе линейные системы $|L|$ и $|K_Z - L|$ задают

вложение $Z \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ так, что $\text{pr}_1^* H_1 + \text{pr}_3^* H_3 = K_Z$, где pr_i — проекции, а $H_i \subset \mathbb{P}^i$ — гиперплоские сечения. Поэтому, если теперь мы рассмотрим композицию

$$Z \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$$

с вложением Сегре, то канонический класс K_Z будет высекается гиперплоскостями в \mathbb{P}^7 . Так как $\dim |K_Z| = 6$, то образ Z содержится в гиперплоском сечении $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3) \cap \mathbb{P}^6$, которое имеет структуру \mathbb{P}^2 -расслоения над \mathbb{P}^1 . Несложно видеть, что слои этого расслоения — это в точности линейные оболочки $\langle q_1 + \dots + q_4 \rangle$ дивизоров из $|L|$. Таким образом, $W = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3) \cap \mathbb{P}^6$ и $\deg W = 4$. Так как многообразии W не является конусом, то оно неособо. \square

Теперь для окончания доказательства предложения вспомним, что кривая Z является проекцией канонической кривой $Z_{12} \subset \mathbb{P}^6$ из двух точек $P_1, P_2 \in Z_{12}$. Образ многообразия W при этой проекции будет квадрикой $W' \subset \mathbb{P}^4$, содержащей семейство плоскостей. Следовательно, W' отлична от нашей неособой квадрики Q . Пересечение $S := W' \cap Q$ является поверхностью степени 4 и содержит нашу кривую $Z \subset \mathbb{P}^4$. Но тогда, как и в доказательстве следствия 9.5.3, для собственного прообраза $\bar{S} \subset \bar{X}$ поверхности S имеем $(-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{S} < 0$. Это противоречит численной эффективности $-K_{\bar{X}}$. Предложение 9.5.1 доказано. \square

- ЗАДАЧИ.
1. Пусть $X = X_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — антиканонически вложенное многообразие Фано с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$ и $g(X) = 6$. Пусть $C \subset X$ — достаточно общая коника. Докажите, что существует линк Саркисова (7.2.2) центром C и при этом $Y = Y_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — также многообразие Фано индекса 1 и рода 6 с $\rho(X) = 1$, а φ — раздутие коники.
 2. Пусть $S_d \subset \mathbb{P}^d$ — неприводимая поверхность степени d , не лежащая в гиперплоскости. Докажите, что ее особое множество не может содержать кривой степени > 1 .
 3. Вычислите дефект $\text{def}(\Psi) := E^3 - \bar{E}^3$ линка (7.2.2) в теореме 9.3 и докажите, что он строго положителен. *Указание:* Вычислите $\bar{M}^3 = (-K_{\bar{X}} - \bar{E})^3$ двумя способами.
 4. Пусть $S = S_4 \subset \mathbb{P}^5$ — линейчатая поверхность степени 4, образ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ при отображении полной линейной системой бистепени $(1, 2)$. Опишите образы проекций в \mathbb{P}^4 . *Указание:* Придумайте конструкцию, аналогичную доказательству леммы 10.4.3.

10. Многообразия Фано с числом Пикара 1, III

Следующая теорема была впервые сформулирована и доказана К. Такеучи [105]. Однако некоторые ее части были известны ранее (см., например, [17]).

10.1. ТЕОРЕМА. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное трехмерное многообразие Фано индекса 1, рода $g \geq 7$ с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot H$, $-K_X = H$ и пусть $P \in X$ — точка, не лежащая на прямой. При $g \leq 9$ мы дополнительно потребуем, что через P проходит не более конечного числа коник (т.е. она достаточно общая, см. 9.2 (vi)), а при $g = 7$ мы еще потребуем, что число неприводимых рациональных

кривых $C \subset X$ степени 4, имеющих особенность в P , не более чем конечно, см. 10.1.3. Тогда раздутие $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ точки P включается в линк Саркисова (7.2.2).

Далее, пусть $E := \sigma^{-1}(P)$ — исключительный дивизор, пусть $\bar{E} \subset \bar{X}$ — собственный прообраз E , пусть M — обильная образующая $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ и пусть $\bar{M} = \varphi^*M$. Тогда для экстремального стягивания φ имеет место одна из следующих возможностей:

- (i) $g = 7$, $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ — неособое многообразие дель Пеццо степени 5, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim 5(-K_{\bar{X}}) - 2\bar{E}$ и является раздутием неособой кривой $Z \subset Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ рода 7 степени 12, $\bar{M} \sim 3(-K_{\bar{X}}) - \bar{E}$;
- (ii) $g = 8$, $Y = Y_3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая кубика, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim 3(-K_{\bar{X}}) - 2\bar{E}$ и является раздутием неособой рациональной кривой $Z \subset Y_3 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4, $\bar{M} \sim 2(-K_{\bar{X}}) - \bar{E}$;
- (iii) $g = 9$, $Y = Y_{16} \subset \mathbb{P}^{10}$ — неособое многообразие Фано индекса 1 рода 9, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$ и является раздутием точки, $\bar{M} \sim 3(-K_{\bar{X}}) - 2\bar{E}$;
- (iv) $g = 10$, $Y = \mathbb{P}^1$, а $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ расслоение на поверхности дель Пеццо степени 6;
- (v) $g = 12$, $Y = \mathbb{P}^3$, а морфизм φ стягивает дивизор $\bar{F} \sim 3(-K_{\bar{X}}) - 4\bar{E}$ и является раздутием неособой рациональной кривой $Z \subset \mathbb{P}^3$ степени 6, $\bar{M} \sim -K_{\bar{X}} - \bar{E}$.

В частности, $g \leq 12$ и $g \neq 11$.

10.1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. На протяжении всего раздела мы используем обозначения теоремы 10.1. Положим также $H^* := \sigma^*H$. Пусть

$$\psi = \Phi_{|H-2P|}: X \dashrightarrow X_\bullet \subset \mathbb{P}^{g-3}$$

— проекция из касательного пространства к X в точке P , где $X_\bullet = \psi(X)$.

Ясно, что $-K_{\bar{X}} = H^* - 2E$. Также имеют место следующие соотношения

$$(10.1.2) \quad \begin{aligned} E^3 &= 1, \\ -K_{\bar{X}}^3 &= 2g - 10, \\ (-K_{\bar{X}})^2 \cdot E &= 4, \\ -K_{\bar{X}} \cdot E^2 &= -2. \end{aligned}$$

Отметим, что $E \simeq \mathbb{P}^2$.

10.1.3. ЛЕММА. Существует непустое открытое подмножество $U \subset X$ такое, что для любой точки $P \in U$ число неприводимых рациональных кривых $C \subset X$ степени 4, имеющих особенность в P , не более чем конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C \subset X$ — особая неприводимая рациональная кривая степени 4. Заметим, $\rho_a(C) = 1$ и $\dim \langle C \rangle = 3$. Более того, C есть полное пересечение двух квадрик в \mathbb{P}^3 и $\langle C \rangle \cap X = C$ (как схема).

Мы утверждаем, что общее гиперплоское сечение, проходящее через C неособо. Действительно, пусть $\Lambda = |H - C| \subset |H|$ — линейная система гиперплоских сечений, проходящих через C . Легко видеть, что для любой точки $P \in X$ мы имеем $\overline{T_{P,X}} \neq \langle C \rangle$ (иначе $C \subset \overline{T_{P,X}} \cap X$, но $\overline{T_{P,X}} \cap X$ — точка или пересечение прямых, поскольку X — пересечение квадрик). Следовательно, общий дивизор $H \in \Lambda$ неособ в точке $\text{Sing}(C)$.

Так как $\text{Bs } \Lambda = C$, то по теореме Бертини H неособ вне C . Для доказательства того, что H неособ на $C \setminus \text{Sing}(C)$ нужно рассмотреть раздутие $\hat{\sigma}: \hat{X} \rightarrow X$ кривой C . Многообразии \hat{X} неособо вне $\hat{\sigma}^{-1}(\text{Sing}(C))$ и поскольку $\text{Bs } \Lambda = C$, то линейная система $\hat{\sigma}^* \Lambda$ не имеет базисных точек. Далее доказательство полностью аналогично соответствующему месту в доказательстве предложения 9.2 (i). Таким образом, существует неособое гиперплоское сечение H , проходящее через C .

Пусть \mathfrak{C} — подсхема схемы Гильберта, параметризующая неприводимые приведенные рациональные кривые $C \subset X$ степени 4 арифметического рода $\rho_a(C) = 1$. Рассмотрим многообразие инцидентности

$$\mathfrak{X} \subset |-K_X| \times \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{X} = \{(H, C) \mid H \in |-K_X|, C \in \mathfrak{C}, H \supset C\}$$

и проекции

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{X} & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ |H| & & \mathfrak{C} \end{array}$$

Проекция pr_2 , очевидно, сюръективна и ее слои — проективные пространства \mathbb{P}^{g-3} . Следовательно, $\dim \mathfrak{X} = \dim \mathfrak{C} + g - 3$.

С другой стороны, общее гиперплоское сечение, проходящее через C является неособой поверхностью типа $K3$ и поэтому не может содержать семейства рациональных кривых, т.е. общий слой $\text{pr}_1: \mathfrak{X} \rightarrow \text{pr}_1(\mathfrak{X})$ нульмерен. Поэтому $\dim \text{pr}_1(\mathfrak{X}) = \dim \mathfrak{C} + g - 3$. Согласно обобщенной теореме Нетера-Лефшеца [85], для общей поверхности $H \in |-K_X|$ отображение ограничения $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(H)$ является изоморфизмом. Следовательно, общая $H \in |-K_X|$ не содержит кривых степени 4 и поэтому образ $\text{pr}_1(\mathfrak{X})$ не является плотным в $|H|$. Таким образом,

$$g + 1 = \dim |H| > \dim \text{pr}_1(\mathfrak{X}) = \dim \mathfrak{C} + g - 3.$$

Отсюда $\dim \mathfrak{C} \leq 3$. Следовательно, отображение

$$\mathfrak{C} \longrightarrow X, \quad C \longmapsto \text{Sing}(C)$$

или имеет двумерный образ или конечно в общей точке. \square

10.2. ЛЕММА. *Отображение $\phi: \tilde{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-3}$, индуцированное проекцией $\psi = \Phi|_{H-2P}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-3}$ из касательного пространства к X в точке P , является морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что отображение $\phi: \tilde{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-3}$ задается линейной системой $|H^* - 2E|$ и эта линейная система не имеет базисных точек вне исключительного дивизора E . Докажем $|H^* - 2E|$ не имеет также базисных точек и на E . Для этого рассмотрим аффинную карту $\mathbb{A}^{g+1} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ с началом координат в точке P .

Пусть $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{g+1}]$ — идеал, задающий аффинное многообразие $X \cap \mathbb{A}^{g+1}$. Пусть $I_2 \subset I$ — подпространство, состоящее из всех элементов степени ≤ 2 . Таким образом, каждый элемент $s \in I_2$ представляется в виде

$$s = \ell_s(x_1, \dots, x_{g+1}) + q_s(x_1, \dots, x_{g+1}),$$

где ℓ_s и q_s — однородные формы степени 1 и 2, соответственно. По теореме 6.6 (iv) идеал I порождается пространством I_2 . При этом, уравнения $\ell_s = 0$, $s \in I_2$ высекают $T_{P,X}$ в \mathbb{A}^{g+1} .

Имеется естественный изоморфизм

$$H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^* - 2E)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}(H) \otimes \mathfrak{m}_P^2).$$

Ненулевое сечение $H^0(X, \mathcal{O}(H) \otimes \mathfrak{m}_P^2)$ соответствует линейной функции ℓ на \mathbb{A}^{g+1} , обращающейся в нуль на $T_{P,X}$. Значит, $\ell = \ell_s$ для некоторого $s \in I_2$ и поэтому $\ell = \ell_s = -q_s$ на X . Таким образом, ограничение ненулевого сечения $\ell \in H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^* - 2E))$ на исключительной дивизор E — квадратичная функция вида $q_s|_E$ для некоторого $s \in I_2$. Верно и обратное: каждая квадратичная функция вида $q_s|_E$, $s \in I_2$ является ограничением глобального сечения расслоения $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^* - 2E)$.

Так как через точку P не проходят прямых, то $T_{P,X} \cap X = \{P\}$ (теоретико-множественно). Значит, общее множество нулей в $T_{P,X}$ всех форм q_s , $s \in I_2$ состоит только из нуля. Это означает, что общее множество нулей на $E = \mathbb{P}(T_{P,X})$ глобальных сечений сечений расслоения $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(H^* - 2E)$ пусто. Следовательно, $|H^* - 2E|$ не имеет базисных точек на E . \square

10.3. СЛЕДСТВИЕ. *Линейная система $|-K_{\tilde{X}}|$ не имеет базисных точек, $\dim |-K_{\tilde{X}}| = g - 3$ и образ $\bar{X} = \phi(X)$ морфизма*

$$\phi = \Phi_{|-K_{\tilde{X}}|}: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^{g-3},$$

заданного этой линейной системой, трехмерен.

10.4. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Рассмотрим индуцированный морфизм

$$\phi = \Phi_{|H^* - 2E|}: \tilde{X} \longrightarrow X_\bullet \subset \mathbb{P}^{g-3}.$$

Поверхность $\phi(E)$ является образом проекции поверхности Веронезе $S_4 \subset \mathbb{P}^5$.

10.4.1. ЛЕММА. *Выполнено неравенство*

$$(10.4.2) \quad h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) \geq g - 8,$$

а линейная оболочка поверхности $\phi(E)$ имеет размерность

$$3 \leq \dim \langle \phi(E) \rangle \leq g - 3.$$

Если при этом достигается равенство

$$h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) = g - 8,$$

то ограничение $|-K_{\tilde{X}}|_E$ является полной линейной системой и задает морфизм E на поверхность Веронезе $S_4 \subset \mathbb{P}^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}} - E)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-K_{\tilde{X}})) \xrightarrow{\nu} H^0(\mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})).$$

Так как $h^0(\mathcal{O}_E(-K_{\tilde{X}})) = 6$, то отсюда получается (10.4.2). Остальные утверждения получаются из того, что $|-K_{\tilde{X}}|_E$ — подсистема в линейной системе коник на $E \simeq \mathbb{P}^2$ и она является проективизацией образа отображения ν . \square

10.4.3. ЛЕММА. *Пусть $S = S_4 \subset \mathbb{P}^5$ — поверхность Веронезе.*

(i) *Пусть $S^\# \subset \mathbb{P}^4$ — ее проекция из точки $P \in \mathbb{P}^5 \setminus S$. Тогда для поверхности $S^\# \subset \mathbb{P}^4$ имеется ровно две возможности:*

(а) *особое множество $S^\#$ состоит из прямой, $S^\#$ является пересечением двух квадрик Q_1 и Q_2 и все квадрики из пучка $\langle Q_1, Q_2 \rangle$ особые;*

- (b) $S^\#$ неособа и не содержится в квадрике.
- (ii) Пусть $S^\# \subset \mathbb{P}^3$ — проекция поверхности $S_4 \subset \mathbb{P}^5$ из прямой $l \subset \mathbb{P}^5 \setminus S$. Тогда для $S^\# \subset \mathbb{P}^4$ также имеется две возможности:
- (a) $S^\# \subset \mathbb{P}^3$ — поверхность Штейнера, т.е. поверхность степени 4, особое множество которой состоит из трех (возможно совпадающих) прямых;
- (b) $S^\# \subset \mathbb{P}^3$ — особая квадрака.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. отождествим пространство \mathbb{P}^5 с проективизацией пространства M_2 квадратичных форм $q(x_0, x_1, x_2)$ от трех переменных. Тогда поверхность $S_4 \subset \mathbb{P}^5$ отождествляется с множеством форм ранга 1, т.е. форм вида $\ell(x_0, x_1, x_2)^2$, где $\ell(x_0, x_1, x_2)$ — ненулевая линейная форма. Прямая в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(M_2)$, пересекающая S_4 по двум точкам $[\ell^2]$ и $[\ell'^2]$ имеет вид

$$[\lambda \ell^2 + \lambda' \ell'^2], \quad (\lambda : \lambda') \in \mathbb{P}^1.$$

Следовательно, объединение всех 2-секущих (и касательных) поверхности $S_4 \subset \mathbb{P}^5$ — это гиперповерхность

$$W = \{[q] \mid \text{rk } q \leq 2\} = \{[q] \mid \det(q) = 0\}.$$

степени 3. Если точка P не лежит на этой гиперповерхности, то проекция $S_4 \rightarrow S^\#$ из нее является изоморфизмом. Если же точка P лежит в $W \setminus S_4$, то она имеет вид $[\ell \ell']$, где ℓ и ℓ' — непропорциональные линейные формы. Тогда плоскость Π , порожденная $P = [\ell \ell']$, $[\ell^2]$, $[\ell'^2]$, содержится в W и пересекает S_4 по конике. Проекция из P отображает S_4 на поверхность $S^\# \subset \mathbb{P}^4$, особую вдоль прямой, образа этой коники. Утверждение о квадриках, проходящих через $S^\#$, см. в задаче 5. Пункт (i) доказан.

Для доказательства (ii) заметим, что если прямая l содержится в W , то она не содержится в плоскости $\Pi \subset W$ (поскольку не пересекает S_4). Значит, она пересекает одномерное семейство плоскостей в W и в этом случае проекция из l будет двулистным отображением на квадрик в \mathbb{P}^3 .

Наконец, пусть $l \not\subset W$. Тогда l пересекает W по трем точкам (с учетом кратностей). Через эти точки проходят три плоскости Π_i , содержащиеся в W . Как и выше они дают три прямых особенностей на $S^\#$. \square

10.4.4. ЛЕММА. Морфизм $\phi: \tilde{X} \rightarrow X_\bullet \subset \mathbb{P}^{g-3}$ бирационален и X_\bullet — многообразие Фано с каноническими горнштейновыми особенностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что морфизм ϕ не является бирациональным. Так как

$$(\deg X_\bullet) \cdot (\deg \phi) = (-K_{\tilde{X}})^3 = 2g - 10,$$

то, согласно (15.1.1), морфизм ϕ должен иметь степень 2, а X_\bullet — многообразие минимальной степени $\deg X_\bullet = g - 5$.

Если его гиперплоское сечение H_\bullet допускает разложение в сумму подвижных дивизоров Вейля H'_\bullet и H''_\bullet , то и антиканонический дивизор $-K_{\tilde{X}} = \phi^*(H'_\bullet + H''_\bullet)$ на \tilde{X} также допускает разложение в сумму подвижных дивизоров. Следовательно, то же самое верно и для антиканонического дивизора $-K_X = \sigma_*(-K_{\tilde{X}})$ на X . Но это противоречит нашему предположению $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$.

Тогда согласно следствию 15.5 многообразие $X_\bullet \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадрака и $g = 7$. В частности, $\text{Pic}(X_\bullet)$ порождается классом гиперплоского сечения и поэтому поверхность $\phi(E)$ высекается на X_\bullet некоторой гиперповерхностью. По лемме 10.4.3 мы имеем

единственную возможность: $\phi(E)$ — особая квадрика, касательное гиперплоское сечение квадрики $X_\bullet \subset \mathbb{P}^4$. Рассмотрим факторизацию Штейна

$$\phi: \tilde{X} \xrightarrow{\theta} X_0 \xrightarrow{\gamma} X_\bullet \subset \mathbb{P}^4.$$

Тогда $\theta(E) = \gamma^*\phi(E)$ — дивизор Картье на X_0 и особенности X_0 — канонические горенштейновы (см. следствие 7.1.2). Так как группа $\text{Cl}(X_0)$ порождается дивизорами $\theta(E)$ и K_{X_0} , то X_0 локально факториально. Поэтому морфизм θ не может быть малым (по теореме о чистоте исключительного множества [18, гл. 2, § 4, теорема 2]). Так как $\theta(E) = \gamma^*\phi(E) \sim -K_{X_0}$, то $\rho(X_0) = 1$. Поэтому θ не может быть изоморфизмом. Следовательно, θ стягивает некоторый дивизор D . Из того, что $\theta(E) \sim -K_{X_0}$ немедленно следует, что $D \sim -K_{\tilde{X}} - E$. Так как $(-K_{\tilde{X}}) \cdot D^2 \neq 0$, то $\phi(D)$ — кривая, лежащая на $\phi(E)$. Морфизм $\phi_E: E \rightarrow \phi(E)$ конечен степени 2. Поэтому для общего слоя \tilde{C} морфизма $\phi_D: D \rightarrow \phi(D)$ имеем $E \cdot \tilde{C} \leq 2$. Пусть $C := \sigma(\tilde{C})$. Тогда $\deg C = H^* \cdot \tilde{C} = 2E \cdot \tilde{C}$. Если $E \cdot \tilde{C} = 1$, то C — коника, проходящая через P . Это противоречит нашему выбору точки $P \in X$ (число таких коник должно быть конечно). Значит, $E \cdot \tilde{C} = 2$ и C — кривая степени 4, имеющая особенность в P . Снова, согласно нашему выбору точки $P \in X$ и лемме 10.1.3, это невозможно.

Следовательно, морфизм ϕ бирационален. Последнее утверждение получается из предложения 5.6 и следствия 7.1.2. \square

10.4.5. ЛЕММА. *Морфизм ϕ не стягивает дивизоров и особенности X_\bullet терминальны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что морфизм ϕ стягивает простой дивизор \tilde{D} . Так как $\psi = \phi \circ \sigma^{-1}: X \dashrightarrow X_\bullet \subset \mathbb{P}^{g-3}$ — проекция из $\overline{T_{P,X}}$, то образ $D := \sigma(\tilde{D})$ высекается на X линейной оболочкой $\langle \overline{T_{P,X}}, \phi(\tilde{D}) \rangle$. Таким образом, $\dim \langle \overline{T_{P,X}}, \phi(\tilde{D}) \rangle \geq g$ и $\dim \langle \phi(\tilde{D}) \rangle \geq g - 4$. В частности, это означает, что $\phi(\tilde{D})$ — кривая степени ≥ 3 .

Дивизор \tilde{D} замещается одномерным семейством кривых \tilde{C} таких, что $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = 0$. Так как $(-K_{\tilde{X}} - E) \cdot \tilde{C} < 0$, то \tilde{D} должен быть неподвижной компонентой линейной системы $|-K_{\tilde{X}} - E|$ (если она непуста). Так как $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$ и $\tilde{D} \neq E$ (поскольку $(-K_{\tilde{X}})^2 \cdot E = 4 > 0$), то отсюда следует, что $\dim |-K_{\tilde{X}} - E| \leq 0$. Из неравенств (10.4.2) и (10.4.1) получаем, что $g \leq 9$ и линейная оболочка образа $\phi(E)$ имеет размерность не меньше чем 3. По нашему предположению через точку P проходит не более чем конечное число коник. Значит, поверхность \tilde{D} замещается кривыми \tilde{C} такими, что $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = 0$ и $E \cdot \tilde{C} > 1$. Поэтому образ исключительного дивизора $\phi(E)$ должен быть особ вдоль неприводимой кривой $\phi(\tilde{D})$ степени ≥ 3 . Это невозможно по лемме 10.4.3. Теперь последнее утверждение получается из леммы 10.4.4 поскольку морфизм ϕ не стягивает дивизоров. \square

10.4.6. СЛЕДСТВИЕ. *Если $g = 7$, то $\phi(E)$ не содержится в квадрике. Следовательно, $|-2K_{\tilde{X}} - E| = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 10.4.4 морфизм $\phi: \tilde{X} \rightarrow X_\bullet \subset \mathbb{P}^4$ бирационален и X_\bullet — гиперповерхность степени 4. Более того, по лемме 10.4.5 слои ϕ слои ϕ связны и исключительное множество ϕ состоит не более чем из конечного числа кривых. Значит, поверхность $\phi(E)$ имеет не более чем конечное число особых точек. Тогда по лемме 10.4.3 поверхность $\phi(E)$, на самом деле неособа и не содержится в квадрике.

Наконец, если $\tilde{D} \in |-2K_{\tilde{X}} - E|$, то $\phi(\tilde{D})$ — квадратика, проходящая через $\phi(E)$. Таким образом, $|-2K_{\tilde{X}} - E| = \emptyset$. \square

10.5. Продолжим доказательство 10.1. Согласно леммам 10.4.4 и 10.4.5, существует линк Саркисова с центром в P . Получим диаграмму (7.2.2) (или (7.2.3)). Рассмотрим возможности для стягивания φ . Напомним (см. (10.4.2)), что

$$\dim |-K_{\tilde{X}} - \bar{E}| \geq g - 9.$$

Как в доказательстве теоремы 8.3 воспользуемся классификацией экстремальных лучей (теорема 14.7). Помимо решений, перечисленных в теореме 10.1, получаем также следующие случаи:

- 1[#] $g(X) = 13$, $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадратика, φ — раздутие рациональной кривой степени 6, $\bar{F} \sim 2(-K_{\tilde{X}}) - 3\bar{E}$, $\bar{M} \sim K_{\tilde{X}} - \bar{E}$;
- 2[#] $g(X) = 11$, $Y = \mathbb{P}^2$, φ — расслоение на коники с кривой вырождения степени 4, $\bar{M} \sim -K_{\tilde{X}} - \bar{E}$;
- 3[#] $g(X) = 9$, $Y = Y_{14} \subset \mathbb{P}^9$ — многообразие Фано индекса 1 рода 8, φ — раздутие коники, $\bar{F} \sim -K_{\tilde{X}} - \bar{E}$, $\bar{M} \sim 2(-K_{\tilde{X}}) - \bar{E}$;
- 4[#] $g(X) = 8$, $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ — неособая квадратика, φ — раздутие кривой степени 10 рода 7, $\bar{F} \sim 5(-K_{\tilde{X}}) - 3\bar{E}$, $\bar{M} \sim 2(-K_{\tilde{X}}) - \bar{E}$;
- 5[#] $g(X) = 7$, $Y = Y_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — многообразие Фано индекса 1 рода 6, φ — раздутие коники, $\bar{F} \sim 2(-K_{\tilde{X}}) - \bar{E}$, $\bar{M} \sim 3(-K_{\tilde{X}}) - \bar{E}$;
- 6[#] $g(X) = 7$, $Y = Y_{12} \subset \mathbb{P}^8$ — многообразие Фано индекса 1 рода 7, φ — раздутие точки, $\bar{F} \sim 2(-K_{\tilde{X}}) - \bar{E}$, $\bar{M} \sim 5(-K_{\tilde{X}}) - 2\bar{E}$.

Ниже мы покажем, что эти случаи не реализуются.

10.5.1. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 10.1 отображение χ из диаграммы (7.2.2) не является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве 8.3.5 из вычислений следует, что дефект $\text{def}(\Psi) := E^3 - \bar{E}^3$ линка (7.2.2) строго положителен (см. упражнение 4). \square

10.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ — антиканонически вложенное трехмерное многообразие Фано индекса 1, рода $g \geq 7$. Тогда на X существует невырожденная коника и прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку многообразие X_{\bullet} нормально, а морфизм ϕ бирационален и не стягивает дивизоров, то поверхность $\phi(E)$ или неособа или ее особенности изолированы (см. лемму 10.4.5). Второе невозможно по лемме 10.4.3. Следовательно, поверхность $\phi(E)$ неособа.

Согласно 10.5.1, морфизм ϕ стягивает по крайней мере одну (неприводимую) кривую \tilde{C} . Так как $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = 0$, то $\deg \sigma(\tilde{C}) = 2E \cdot \tilde{C}$. Так как поверхность $\phi(E)$ неособа, то $E \cdot \tilde{C} = 1$. Это означает, что $\deg \sigma(\tilde{C}) = 2$, т.е. $\sigma(\tilde{C})$ — невырожденная коника. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.1. Осталось исключить только случаи 10.5, 1[#]–6[#]. Но теперь согласно следствию 10.6 мы знаем, что на X существует прямая. Тогда по теореме 8.3 случаи 1[#] и 2[#] (т.е. $g = 13$ и 11) невозможны. В случаях 3[#] и 4[#] из таблицы 10.5 мы получаем противоречие, сравнивая топологические эйлеровы характеристики X и Y (и применяя следствие 8.3.3).

Рассмотрим случаи 5# и 6#. Тогда $\overline{F} + \overline{E} \sim 2(-K_{\overline{X}})$. При этом собственный прообраз $\widetilde{F} \subset \widetilde{X}$ дивизора \overline{F} является единственным элементом линейной системы $|-2K_{\widetilde{X}} - E|$. Это противоречит следствию 10.4.6. \square

- ЗАДАЧИ.**
1. Покажите, что образ морфизма $\Phi_{|-K_{\overline{X}}|}$ — нормальное многообразие. *Указание:* Воспользуйтесь теоремой 16.8.
 2. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+1}$ — многообразие дель Пеццо степени $3 \leq d \leq 5$. Докажите, что существует линк Саркисова с центром в точке $P \in X$ и опишите его результат.
 3. Пусть $X = X_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — антиканонически вложенное многообразие Фано с $\iota(X) = 1$, $\rho(X) = 1$ и $g(X) = 6$. Пусть $P \in X$ — достаточно общая точка. Докажите, что существует линк Саркисова (7.2.2) центром P и при этом $Y = Y_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — также многообразие Фано индекса 1 и рода 6 с $\rho(X) = 1$, а φ — раздутие точки.
 4. Вычислите дефект $\text{def}(\Psi) := E^3 - \overline{E}^3$ линка (7.2.2) в теореме 10.1 и докажите, что он строго положителен. *Указание:* Вычислите $\overline{M}^3 = (-K_{\overline{X}} - \overline{E})^3$ двумя способами.
 5. Докажите недоказанные части леммы 10.4.3: в случаях (i)(a) и (i)(b) поверхности единственны с точностью до проективной эквивалентности и найдите задающие их уравнения. *Указание:* Используйте то, что вложение Веронезе индуцирует действие группы $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ на \mathbb{P}^5 и при этом имеется только три орбиты.

11. Многообразия Фано с числом Пикара 1, IV

11.1. Обратная конструкция. В этом и следующем разделе мы докажем существование многообразий Фано основной серии рода ≥ 7 . Более того, мы дадим способ построения *всех* таких многообразий. Сначала мы обсудим случаи $g = 12, 10$ и 9 . Будет использована конструкция, обратная к двойной проекции из прямой.

11.1.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. Отправной точкой для построения линка Саркисова является пара (Y, Z) , где Y — многообразие Фано индекса $\iota(Y) > 1$ с $\rho(Y) = 1$, а $Z \subset Y$ — гладкая кривая рода $g(Z)$ и степени $\text{deg } Z := (-K_Y \cdot Z)/\iota(Y)$. Мы будем рассматривать следующие случаи (см. теорему 8.3 (iii)):

№	g	Y	$\iota(Y)$	$\text{deg } Z$	$g(Z)$	d
9°	9	\mathbb{P}^3	4	7	3	3
10°	10	квадрика $Q \subset \mathbb{P}^4$	3	7	2	4
12°	12	многообразие дель Пеццо $Y_5 \subset \mathbb{P}^6$	2	5	0	5

Здесь $d := (\iota(Y) - 1)(\text{deg } Y)$. Это обозначение будет использоваться ниже. Мы считаем, что в случае 9° кривая Z не является гиперэллиптической (см теорему 8.3 (iii)(a)). Через M мы обозначим обильную образующую группы $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}$.

- 11.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** В обозначениях выше верны следующие утверждения.
- (i) Размерность линейной оболочки кривой Z равна d .

- (ii) Кривая Z содержится в поверхности $S \in |(\iota - 1)M|$, где $\iota := \iota(Y)$, степени d , которая является неприводимой.
- (iii) Поверхность $S = S_d \subset \mathbb{P}^d$ не является конусом, рациональна и принадлежит одному из следующих типов.
 - (a) нормальная, антиканонически вложенная поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями (или гладкая);
 - (b) ненормальная линейчатая поверхность, заметаемая $(6 - d)$ -секущими прямыми к кривой Z . В этом случае особое множество $S = S_d \subset \mathbb{P}^d$ является $(7 - d)$ -секущей прямой к Z .
- (iv) Поверхность $S \in (\iota - 1)M$, содержащая Z , единственна.
- (v) Кривая $Z \subset \mathbb{P}^d$ является пересечением гиперповерхностей степени $7 - d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим, что Z содержится в подпространстве \mathbb{P}^{d-1} . В случае 9° это противоречит формуле для рода для плоской кривой $Z_7 \subset \mathbb{P}^2$. В случае 10° кривая Z должна содержаться в двумерной квадрике $Q \cap \mathbb{P}^3$ (возможно особой). Легко проверяется, что это также невозможно. Наконец, в случае 12° из соображений степени получаем, что $Z = Y \cap \mathbb{P}^4$. Но тогда по формуле присоединения $K_Z = 0$, т.е. $g(Z) = 1$. Снова противоречие.

(ii) Рассмотрим точную последовательность

$$(11.2.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z(\iota - 1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(\iota - 1) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(\iota - 1) \longrightarrow 0,$$

где \mathcal{I}_Z — пучок идеалов кривой Z в Y . Заметим, что $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(\iota - 1)) = 20, 14$ и 7 в случаях $9^\circ, 10^\circ$ и 12° , соответственно, в то время как $h^0(Z, \mathcal{O}_Z(\iota - 1)) = 19, 13$ и 6 в этих случаях. Из соответствующей длинной точной последовательности когомологий следует, что

$$H^0(\mathcal{I}_Z(\iota - 1)) \neq 0,$$

т.е. поверхность $S \in |(\iota - 1)M|$, проходящая через Z , существует. Более того, такая поверхность неприводима. Это очевидно в случаях 12° и 10° , а в случае 9° следует из того, что Z не лежит на квадрике (предлагается читателю самостоятельно проделать эти простейшие вычисления).

(iii) Предположим, что S является конусом над некоторой кривой Γ в \mathbb{P}^{d-1} . В случае 12° через любую точку многообразия $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ проходит только конечное число прямых (см. предложение 3.5.1 (v)) и поэтому Y не содержит конусов. В случае 10° любой конус на квадрике $Y = Q \subset \mathbb{P}^4$ высекается касательным гиперплоским сечением и поэтому этот случай также невозможен.

Рассмотрим сначала случай 9° . Тогда $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ — неприводимая кубическая кривая. Предположим сначала, что она неособа. Пусть $\sigma: \widehat{S} \rightarrow S$ — раздутие вершины. Тогда \widehat{S} имеет структуру линейчатой поверхности над Γ , а исключительный дивизор $\Sigma \subset \widehat{S}$ — ее сечение. Пусть A — гиперплоское сечение S и пусть $A^* := \sigma^*A$. Имеем стандартные соотношения:

$$(A^*)^2 = 3, \quad A^* \cdot \Sigma = 0, \quad (K_{\widehat{S}} + \Sigma) \cdot \Sigma = 0, \quad (K_{\widehat{S}} + A^*) \cdot A^* = 0.$$

Так как классы дивизоров Σ и A^* порождают пространство $N^1(\widehat{S})$, то отсюда получаем

$$K_{\widehat{S}} + \Sigma + A^* \approx 0.$$

По формуле Нётера

$$0 = K_{\widehat{S}}^2 = (\Sigma + A^*)^2.$$

Отсюда $\Sigma^2 = -3$. Далее, пусть \widehat{Z} — собственный прообраз Z . Тогда $A^* \cdot \widehat{Z} = 7$. Если Z не проходит через вершину конуса, то численный класс \widehat{Z} пропорционален классу A^* , но это невозможно поскольку $(A^*)^2 = 3$. Значит, $\widehat{Z} \cdot \Sigma > 0$. Так как кривая Z неособа, то $\widehat{Z} \cdot \Sigma = 1$. Отсюда $\widehat{Z} \approx \frac{7}{3}A^* - \frac{1}{3}\Sigma$. Тогда по формуле присоединения

$$2g(Z) - 2 = 2g(\widehat{Z}) - 2 = (K_{\widehat{S}} + \widehat{Z}) \cdot \widehat{Z} = 8, \quad g(Z) = 5.$$

Противоречие показывает, что поверхность S не может быть конусом над неособой эллиптической кривой.

Поскольку многообразие Y неособо и $-K_Y = \iota M$, то по формуле присоединения антиканонический дивизор $-K_S$ является обильным дивизором Картье. Если поверхность S нормальна и не является конусом, то она рациональна и имеет не хуже чем дювалевские особенности (это классический факт, современное изложение см., например, в [57]). Получаем случай (iii)(a).

Предположим, что поверхность S не является нормальной. Известно [52, § 8.1], что S является образом при проекции поверхности $S' \subset \mathbb{P}^{d+1}$ минимальной степени (см. предложение 15.4) из точки, не лежащей на S' . При этом морфизм $\nu: S' \rightarrow S$ совпадает с нормализацией. Ясно, что $S' \subset \mathbb{P}^{d+1}$ не может быть поверхностью Веронезе (так как тогда $d = 4$ и любая кривая на S' должна иметь четную степень). Значит, согласно предложению 15.4, поверхность $S' \subset \mathbb{P}^{d+1}$ является образом рациональной линейчатой поверхности $\widehat{S} = \mathbb{F}_e$ при отображении линейной системой $\mathcal{L} := |\Sigma + n\Upsilon|$, где Σ, Υ — классы минимального сечения и слоя \mathbb{F}_e . Так как $\deg S' = d$, то имеем следующие соотношения:

$$(\Sigma + n\Upsilon)^2 = 2n - e = d, \quad (\Sigma + n\Upsilon) \cdot \Sigma = n - e \geq 0.$$

Отсюда $d \geq n \geq e$. Более того, поскольку поверхность S' не является конусом при $d \neq 3$, то в этом случае имеет место строгое неравенство $n > e$. Получаем следующие возможности для (d, e, n) :

$$(3, 3, 3), (3, 1, 2), (4, 0, 2), (4, 2, 3), (5, 1, 3), (5, 3, 4).$$

Далее, пусть \widehat{Z} — собственный прообраз Z на $\widehat{S} = \mathbb{F}_e$. Запишем $\widehat{Z} \sim a\Sigma + b\Upsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{Z} \cdot \Sigma &= b - ea \geq 0, \\ \deg Z &= \widehat{Z} \cdot (\Sigma + n\Upsilon) = -ae + b + na, \\ 2g(Z) - 2 &= (K_{\mathbb{F}_e} + \widehat{Z}) \cdot \widehat{Z} = -ea(a - 2) + a(b - e - 2) + b(a - 2). \end{aligned}$$

Поскольку при $d = 3$ кривая Z не является гиперэллиптической, то в этом случае $a \geq 3$. Отсюда несложно получить все возможности для (d, e, n, a, b) :

$$(3, 1, 2, 3, 4), (4, 0, 2, 2, 3), (4, 2, 3, 2, 5), (5, 1, 3, 1, 3), (5, 3, 4, 1, 4).$$

В частности, $(d, e, n) \neq (3, 3, 3)$, т.е. $S' = \widehat{S} = \mathbb{F}_e$ и S не является конусом.

Так как поверхность S — локально полное пересечение и не является нормальной, то ее особое множество должно иметь одномерную компоненту. По теореме Бертини и формуле присоединения общее гиперплоское сечение $S \cap \mathbb{P}^{d-1}$ — неприводимая кривая арифметического рода 1, которая должна быть особа в точках $\text{Sing}(S) \cap \mathbb{P}^{d-1}$. Такая точка может быть одна и поэтому одномерная компонента множества $\text{Sing}(S)$ — прямая. Обозначим ее через Λ . В всех случаях поверхность $S' \subset \mathbb{P}^{d+1}$ есть пересечение квадрик (см. предложение 15.2). Поэтому прообраз $\Lambda' \subset S'$ прямой Λ при проекции $S' \rightarrow S$

является коникой (возможно приводимой), лежащей в плоскости, порожденной Λ и центром проекции. Поэтому $\mathcal{L} \cdot \Lambda' = 2$. Теперь нетрудно вычислить и класс кривой Λ' .

Запишем ответ:

	d	S'	\mathcal{L}	класс \widehat{Z}	класс Λ'
1#	5	\mathbb{F}_1	$ \Sigma + 3\Upsilon $	$\Sigma + 3\Upsilon$	Σ
2#	5	\mathbb{F}_3	$ \Sigma + 4\Upsilon $	$\Sigma + 4\Upsilon$	$\Sigma + \Upsilon$
3#	4	\mathbb{F}_0	$ \Sigma + 2\Upsilon $	$2\Sigma + 3\Upsilon$	Σ
4#	4	\mathbb{F}_2	$ \Sigma + 3\Upsilon $	$2\Sigma + 5\Upsilon$	$\Sigma + \Upsilon$
5#	3	\mathbb{F}_1	$ \Sigma + 2\Upsilon $	$3\Sigma + 4\Upsilon$	$\Sigma + \Upsilon$

Во всех случаях $\widehat{Z} \cdot \Upsilon = a = 6 - d$ и $\Sigma \cdot (\Sigma + n\Upsilon) > 0$. Это означает, что образы слоев Υ являются $(6 - d)$ -секущими Z . Так как $\widehat{Z} \cdot \Lambda' = 7 - d$, то Λ является $(7 - d)$ -секущей Z . Утверждение (iii) доказано.

(iv) Докажем единственность поверхности S . В случае 12° это очевидно, поскольку иначе $\dim \langle Z \rangle = 4$ и $Z = Y \cap \langle Z \rangle$ по соображениям степени. Но тогда Z должна быть эллиптической кривой по формуле присоединения. Противоречие.

Рассмотрим случай 10° . Предположим, что через Z проходят две поверхности $S_1, S_2 \in |2M|$. Тогда $S_1 \cap S_2 = Z + \Lambda$, где $\Lambda \subset Y \subset \mathbb{P}^4$ — некоторая прямая. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Z+\Lambda} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \oplus \mathcal{O}_\Lambda \longrightarrow \bigoplus_{P \in Z \cap \Lambda} \mathcal{F}_P \longrightarrow 0,$$

где \mathcal{F}_P — пучок с носителем в P . Ясно, что

$$h^1(\mathcal{O}_{Z+\Lambda}) = p_a(Z + \Lambda) = 5 \quad \text{и} \quad h^1(\mathcal{O}_Z \oplus \mathcal{O}_\Lambda) = p_a(Z) + p_a(\Lambda) = 2.$$

Так как кривая $Z + \Lambda$ связна и приведена, то

$$\#(Z \cap \Lambda) = \sum_{P \in Z \cap \Lambda} h^0(\mathcal{F}_P) = 5 - h^0(\mathcal{O}_{Z+\Lambda}) = 4,$$

т.е. кривая Z имеет 4-секущую Λ . Но тогда проекция из Λ задает бирациональное отображение Z на плоскую кривую степени 3, что невозможно.

Рассмотрим случай 9° . Предположим, что через Z проходят две кубические поверхности S_1 и S_2 . Запишем $S_1 \cap S_2 = Z + \Lambda$, где Λ — вычетная кривая. Так как $\deg \Lambda = 2$, то имеются лишь следующие возможности:

$$\Lambda = \begin{cases} \text{плоская приведенная коника;} \\ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \text{ где } \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \text{ — непересекающиеся прямые;} \\ \Lambda = 2\Lambda_0, \text{ где } \Lambda_0 \text{ — прямая.} \end{cases}$$

По теореме Бертини общий элемент S пучка, порожденного поверхностями S_1 и S_2 , неособ вне $S_1 \cap S_2$. Во всех случаях общий элемент S не может иметь особенности вдоль компоненты пересечения $S_1 \cap S_2$ (иначе обе поверхности S_1 и S_2 будут особы вдоль этой компоненты и кратность пересечения вдоль нее будет ≥ 4). Таким образом, S — нормальная кубическая поверхность с дювалевскими особенностями (см. (iii)(a)), а $\Lambda := S_1 \cap S = S_2 \cap S$ — дивизор Картье на S такой, что $\Lambda \sim -3K_S$.

Если Λ — плоская приведенная коника, то $\#(Z \cap \Lambda) \leq \deg Z = 7$. с другой стороны, аналогично случаю 10° можно показать, что $\#(Z \cap \Lambda) = 8$. Противоречие. Если

$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где Λ_1 и Λ_2 — непересекающиеся прямые, то аналогично 10° получаем $\#(Z \cap \Lambda_1) + \#(Z \cap \Lambda_2) = 9$. Но тогда проекции из Λ_1 и Λ_2 задают на линейные системы \mathfrak{g}_3^1 и \mathfrak{g}_2^1 , что противоречит нашему предположению о негиперэллиптичности кривой Z .

Наконец, пусть $\Lambda = 2\Lambda_0$. Оценим род *приведенной* кривой $C := Z + \Lambda_0$. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

(Поскольку поверхность S может быть особой, то пучок $\mathcal{O}_S(-C)$ необязательно является обратимым, но он рефлексивен ранга 1). По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль (версия для особых многообразий [66]) имеем $H^1(S, \mathcal{O}_S) = H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Отсюда $H^1(C, \mathcal{O}_C) \simeq H^2(S, \mathcal{O}_S(-C))$. По двойственности Серра

$$h^2(S, \mathcal{O}_S(-C)) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + C)),$$

где $K_S + C \sim -2K_S - \Lambda_0$. Пусть $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ — минимальное разрешение особенностей (положим $\tilde{S} = S$, если поверхность S неособа) и пусть $\tilde{\Lambda}_0$ — собственный прообраз прямой Λ_0 . Тогда $\tilde{\Lambda}_0$ — (-1) -кривая. Так как особенности S дювалевские, то $\mu^*K_S = K_{\tilde{S}}$. Отсюда

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(-2K_S - \Lambda_0)) \geq h^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_S(-2K_{\tilde{S}} - \tilde{\Lambda}_0)).$$

По теореме Римана–Роха

$$h^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_S(-2K_{\tilde{S}} - \tilde{\Lambda}_0)) \geq 7.$$

Таким образом,

$$p_a(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S + C)) \geq 7.$$

Тогда как и выше, получаем, что Λ_0 — 5-секущая кривой Z . Следовательно, Z — гиперэллиптическая кривая. Противоречие доказывает (iv).

(v) Воспользуемся следующим результатом Мамфорда–Кастельнуово [30, лекция 14]. Мы воспроизведем его в несколько видоизмененной форме, приспособленной для наших целей.

11.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^d$, $d \geq 3$ — кривая и пусть \mathcal{I}_Z — ее пучок идеалов. Предположим, что для некоторого $m > 0$ выполнены два условия:

- (i) $H^2(\mathbb{P}^d, \mathcal{I}_Z(m-2)) = 0$,
- (ii) $H^1(\mathbb{P}^d, \mathcal{I}_Z(m-1)) = 0$.

Тогда при $k > m$ пространство $H^0(\mathbb{P}^d, \mathcal{I}_Z(k))$ порождается

$$H^0(\mathbb{P}^d, \mathcal{I}_Z(k-1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^d, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)).$$

В частности, кривая $Z \subset \mathbb{P}^d$ является пересечением гиперповерхностей степени m .

11.2.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно видеть, что условие (i) следует из следующего

$$(i') \quad (m-2)(\deg Z) > 2g(Z) - 2.$$

Покажем, что условия предложения 11.2.2 выполнены в нашем случае для $m = 7 - d$. Действительно, рассмотрим, например, случай 9° . Неравенство (i') проверяется непосредственно, а для доказательства (ii) рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z(3) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(3) \longrightarrow 0.$$

Согласно пункту (iv), имеем $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Z(3)) = 1$. Несложно вычислить, что $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) = 20$ и $h^0(Z, \mathcal{O}_Z(3)) = 19$. Следовательно, отображение

$$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \longrightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(3))$$

сюръективно. Так как $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) = 0$, то $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Z(3)) = 0$. Случаи 10° и 12° рассматриваются аналогично.

Предложение 11.2 доказано. \square

11.3. ТЕОРЕМА. (i) Пусть $Z \subset Y_5$ — гладкая рациональная кривая степени 5, лежащая на многообразии $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$. Тогда линейная система $|3M - 2Z|$ задает бирациональное отображение Y_5 на антиканонически вложенное многообразие Фано $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ рода 12.

(ii) Пусть $Z \subset \mathbb{P}^4$ — гладкая неприводимая кривая степени 7 и рода 2, лежащая на гладкой квадрике $Y = Y_2 \subset \mathbb{P}^4$. Тогда линейная система $|5M - 2Z|$ задает бирациональное отображение Y_2 на антиканонически вложенное многообразие Фано $X_{18} \subset \mathbb{P}^{11}$ рода 10.

(iii) Пусть $Z \subset \mathbb{P}^3$ — гладкая неприводимая кривая степени 7 и рода 3, не являющаяся гиперэллиптической. Тогда линейная система $|7M - 2Z|$ задает бирациональное отображение \mathbb{P}^3 на антиканонически вложенное многообразие Фано X_{16} рода 9 в \mathbb{P}^{10} .

(iv) Во всех случаях бирациональное отображение стягивает собственный прообраз поверхности S на прямую $l \subset X$.

(v) Каждое многообразие Фано $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ рода $g = 9, 10$ или 12 с $\rho(X) = \iota(X) = 1$ может быть получено одним из способов описанных выше.

Пояснение. Для доказательства мы построим линк Саркисова (7.2.2), который является обратным к линку из теоремы 8.3:

$$(11.3.1) \quad \begin{array}{ccc} & \overline{X} \xrightarrow{\chi} \tilde{X} & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \sigma \\ Y & \text{-----} & X \end{array}$$

Здесь $\varphi: \overline{X} \rightarrow Y$ — раздутие Z , χ — флоп, а σ — стягивание собственного прообраза поверхности S на прямую $l \subset X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{F} := \varphi^{-1}(Z)$ — исключительный дивизор, $\overline{M} := \varphi^*M$ — полный прообраз гиперплоского сечения Y , $\overline{E} = \varphi_*^{-1}(S)$ — собственный прообраз поверхности S . Таким образом,

$$(11.3.2) \quad \begin{aligned} \text{Pic}(\overline{X}) &\simeq \overline{M} \cdot \mathbb{Z} \oplus \overline{F} \cdot \mathbb{Z} \simeq (-K_{\overline{X}}) \cdot \mathbb{Z} \oplus \overline{E} \cdot \mathbb{Z}, \\ -K_{\overline{X}} &\sim \iota(Y)\overline{M} - \overline{F}, \quad \overline{E} \sim (\iota(Y) - 1)\overline{M} - \overline{F}. \end{aligned}$$

11.3.3. ЛЕММА. Имеем следующие соотношения на \overline{X} :

$$(11.3.4) \quad \overline{M}^3 = M^3 = d(Y), \quad \overline{M}^2 \cdot \overline{F} = 0, \quad \overline{M} \cdot \overline{F}^2 = -\deg Z,$$

$$(11.3.5) \quad \overline{F}^3 = \begin{cases} -8 & \text{в случае } 12^\circ \\ -23 & \text{в случае } 10^\circ \\ -32 & \text{в случае } 9^\circ \end{cases}$$

или, в другом базисе, $\overline{E}^3 = -\iota(Y)$,

$$(11.3.6) \quad (-K_{\overline{X}})^3 = 2g - 6, \quad (-K_{\overline{X}})^2 \cdot \overline{E} = 3, \quad (-K_{\overline{X}}) \cdot \overline{E}^2 = -2,$$

где $g = 12 - g(Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.9.2 непосредственно получаются (11.3.4)-(11.3.5). Тогда соотношения (11.3.6) получаются из (11.3.2). \square

- 11.3.7. ЛЕММА. (i) *Линейная система $|-K_{\bar{X}}|$ не имеет базисных точек. В частности, дивизор $-K_{\bar{X}}$ численно эффективен.*
 (ii) *Для любого эффективного дивизора D имеем*

$$(-K_{\bar{X}})^2 \cdot D > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Согласно 11.2 (v), кривая Z высекается на Y гиперповерхностями степени $\iota = \iota(Y) = d - 7$. Следовательно, линейная система $|-K_{\bar{X}}| = |\iota\bar{M} - \bar{F}|$ не имеет базисных точек и поэтому она численно эффективна.

(ii) Предположим, что $(-K_{\bar{X}})^2 \cdot D = 0$ для некоторого простого дивизора D . Из (11.3.2) получаем $-K_{\bar{X}} \sim \bar{M} + \bar{E}$. Отсюда

$$0 = (-K_{\bar{X}})^2 \cdot D = (-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{M} \cdot D + (-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{E} \cdot D.$$

Так как дивизоры $-K_{\bar{X}}$ и \bar{M} численно эффективны, а дивизоры \bar{E} и D эффективны и не имеют общих компонент, то оба члена в правой части неотрицательны. Следовательно, они равны нулю. Далее,

$$0 = (-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{M} \cdot D = \bar{M}^2 \cdot D + \bar{E} \cdot \bar{M} \cdot D.$$

Как и выше оба члена в правой части зануляются: $\bar{M}^2 \cdot D = \bar{E} \cdot \bar{M} \cdot D = 0$. В частности, это означает, что дивизор D стягивается морфизмом φ . Но тогда $D = \bar{F}$. С другой стороны, $(-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{F} > 0$. Противоречие доказывает лемму. \square

Если дивизор $-K_{\bar{X}}$ не является обильным¹, то по теореме 14.8.6 и лемме 11.3.7 существует флоп

$$(11.3.8) \quad \begin{array}{ccc} \bar{E} \subset \bar{X} & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & \tilde{X} \supset E \\ & \searrow \bar{\theta} & \swarrow \tilde{\theta} \\ & E_0 \subset X_0 & \end{array}$$

где $E_0 = \bar{\theta}(\bar{E}) = \tilde{\theta}(E)$. Поэтому мы можем применить конструкцию (7.2.2). В обоих случаях 7.2 (a) и 7.1 (b) имеется диаграмма (11.3.1), в которой отображение χ является или флопом или изоморфизмом.

11.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Морфизм $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ стягивает собственный прообраз E поверхности \bar{E} на кривую $l \subset X$, многообразие X является гладким многообразием Фано индекса 1 рода $g = 12$ если $Y = Y_5$, $g = 10$ если $Y = Y_2$ и $g = 9$ если $Y = \mathbb{P}^3$. При этом кривая l является прямой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы утверждаем, что дивизор E отрицателен на луче R_σ .

Рассмотрим сначала случай, когда χ — изоморфизм. Тогда $E = \bar{E}$. Если $\bar{E} \cdot R_\varphi \geq 0$, то E численно эффективен. Это противоречит тому, что $(-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{E}^2 < 0$ (см. (11.3.6)).

Теперь рассмотрим случай, когда χ не является изоморфизмом. Конус Мори $\overline{NE}(\tilde{X})$ порождается двумя лучами: лучом R_φ , соответствующим стягиванию φ , и $K_{\bar{X}}$ -тривиальным лучом $R_{K_{\bar{X}}}$. В силу (11.3.2) дивизор $\bar{E} = \varphi_*^{-1}(S)$ положителен на R_φ . С

¹А posteriori, применяя следствие 8.3.6, мы получим, что дивизор $-K_{\bar{X}}$ не является обильным.

другой стороны, он не является численно эффективным (поскольку $(-K_{\tilde{X}}) \cdot \overline{E}^2 < 0$). Значит, дивизор \overline{E} отрицателен на $R_{K_{\tilde{X}}}$. Конус Мори $\overline{NE}(\tilde{X})$ также порождается двумя лучами: лучом R_σ , соответствующим стягиванию σ , и $K_{\tilde{X}}$ -тривиальным лучом $R_{K_{\tilde{X}}}$. По свойству флопов $E \cdot R_{K_{\tilde{X}}} > 0$. Если $\overline{E} \cdot R_\varphi \geq 0$, то дивизор E численно эффективен. Но это снова противоречит неравенству

$$(-K_{\tilde{X}}) \cdot E^2 = (-K_{\tilde{X}}) \cdot \overline{E}^2 < 0.$$

Таким образом, $E \cdot R_\sigma < 0$. Это означает, что морфизм φ бирационален и стягивает дивизор E (см. теорему 14.7). Так как $E \cdot (-K_{\tilde{X}})^2 = \overline{E} \cdot (-K_{\tilde{X}})^2 = 3$, то согласно (7.7.3), морфизм σ не может стягивать дивизор E в точку. Тогда по классификации экстремальных лучей $l := \sigma(E)$ — неособая кривая и X — неособое многообразие Фано с $\rho(X) = 1$ (см. теорему 14.7). Группа $\text{Pic}(\tilde{X})$ порождается классами дивизоров $-K_{\tilde{X}}$ и E . Поэтому $\text{Pic}(X)$ порождается классом $-K_X$, т.е. $\iota(X) = 1$. Учитывая (11.3.6) и (7.7.4), получаем

$$\begin{aligned} (-K_{\tilde{X}} + E)^2 \cdot (-K_{\tilde{X}}) &= (-K_X)^3 = 2g - 2, & g(X) &= g, \\ (-K_{\tilde{X}} + E) \cdot E \cdot (-K_{\tilde{X}}) &= \deg l = 1, \\ E^2 \cdot (-K_{\tilde{X}}) &= -2 = 2g(l) - 2, & g(l) &= 0, \end{aligned}$$

т.е. $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ и $l \subset X$ — прямая. Предложение доказано. \square

Продолжим доказательство теоремы 11.3. Мы имеем коммутативную диаграмму (11.3.1), где $\sigma \circ \chi \circ \varphi^{-1} = \psi$ — бирациональное отображение. Легко видеть, что

$$\sigma^*(-K_X) = -K_{\tilde{X}} + E = \chi_*(-K_{\tilde{X}} + \overline{E}) = \chi_*(\varphi^*(-K_Y) + \overline{E} - \overline{F}),$$

Учитывая (11.3.2), получаем

$$\sigma^*(-K_X) = \chi_*((\iota \overline{M} - \overline{F}) + ((\iota - 1)\overline{M} - \overline{F})) = \chi_*(((2\iota - 1)\overline{M} - 2\overline{F}))$$

Откуда следуют утверждения (i)–(iii) теоремы. Для доказательства (v) сравним диаграммы (11.3.1) и (7.2.2). Отображение ψ является обратным к двойной проекции Ψ из (8.3.1). При $g = 9$ кривая Z не может быть гиперэллиптической согласно 8.3 (iii)(a). Теорема 11.3 доказана полностью. \square

В терминах диаграммы (11.3.1) можно дать критерий, различающий типы прямых на многообразии $X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ при $g \geq 9$.

11.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *В условиях теоремы 11.3 поверхность S нормальна тогда и только тогда, когда нормальный пучок прямой l имеет вид*

$$(11.5.1) \quad \mathcal{N}_{l/\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму (11.3.1). Пусть сначала нормальный пучок прямой l имеет вид (11.5.1). Тогда $E \simeq \mathbb{F}_1$. Предположим, что поверхность S не является нормальной (и ее нормализация S' попадает в один из случаев 11.1. В этом случае общий слой $\Upsilon_E \subset E$ не пересекается с флоповым множеством (см. лемму 8.7.1 (ii)). Следовательно, его образ $\varphi \circ \chi^{-1}(\Upsilon_E)$ на Y имеет степень $(-K_{\tilde{X}} - E) \cdot \Upsilon_E = 2$, т.е. $\varphi \circ \chi^{-1}(\Upsilon_E)$ — неприводимая коника, лежащая в неособой части S . Используя 11.1, нетрудно проверить, что при $g = 9$ каждая коника на S пересекается с особым множеством $\Lambda = \text{Sing}(S)$, при $g = 12$; поверхность S не может содержать семейства коник, а при $g = 10$ поверхность S может содержать семейство коник только в одном случае

$d = 4$, $S' \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = |\Sigma + 2\Upsilon|$, $\Lambda' \sim \Sigma$. В этом случае любая кривая на S отличная от коники из нашего одномерного семейства пересекается с Λ . Однако как и выше, образ любого достаточно общего очень обильного дивизора на E должен лежать в гладкой части S . Противоречие доказывает достаточность.

Пусть прямая l имеет нормальный пучок

$$\mathcal{N}_{l/X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2).$$

Тогда $E \simeq \mathbb{F}_3$ и исключительное сечение $\Sigma \subset E \simeq \mathbb{F}_3$ имеет индекс самопересечения равный -3 . Предположим, что S — нормальная поверхность с дювалевскими особенностями (в частности, она может быть неособа). Тогда пара (Y, S) имеет чисто логтерминальные особенности. Так как $K_{\overline{X}} + \overline{E} = \varphi^*(K_Y + S)$, то пара $(\overline{X}, \overline{E})$ также имеет чисто логтерминальные особенности. По формуле присоединения

$$K_{\overline{E}} = (K_{\overline{X}} + \overline{E})|_{\overline{E}} = \varphi^*(K_Y + S)|_{\overline{E}} = \varphi_{\overline{E}}^* K_S.$$

Значит, $\varphi_{\overline{E}}: \overline{E} \rightarrow S$ — крепантный морфизм, поверхность \overline{E} имеет лишь дювалевские особенности и антиканонический класс $-K_{\overline{E}}$ численно эффективен и объемен (т.е. \overline{E} — обобщенная поверхность дель Пеццо). В этом случае любое стягивание на \overline{E} сохраняет тип особенностей.

Рассмотрим диаграмму флопа (11.3.8). Так как $\tilde{\theta}$ стягивает исключительное сечение $\Sigma \subset E \simeq \mathbb{F}_3$, то поверхность E_0 изоморфна конусу над рациональной скрученной кубикой. Но это противоречит тому, что особенности E_0 (не хуже чем) дювалевские. Предложение доказано. \square

ЗАДАЧИ. 1. В обозначениях 11.1.1 и 11.2 выше предположим, что поверхность S неособа. Докажите, что при подходящем выборе стандартного базиса $\mathbf{h}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в группе Пикара поверхности дель Пеццо S класс кривой Z может быть выражен следующим образом

$$d = 5: Z \sim 2\mathbf{h} - \mathbf{e}_1;$$

$$d = 4: Z \sim 4\mathbf{h} - 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4;$$

$$d = 3: Z \sim 4\mathbf{h} - \sum_{i=1}^5 \mathbf{e}_i.$$

2. В условиях предыдущей задачи докажите, что кривая Z имеет ровно $8 - d$ различных $(7 - d)$ -секущих прямых и эти прямые не пересекают друг друга.
3. Пусть в условиях теоремы 11.3 поверхность S неособа. Докажите, что для любой флошовой кривой $C \subset \overline{X}$ нормальный пучок имеет вид $\mathcal{N}_{C/\overline{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ и кривая C является прообразом $(7 - d)$ -секущей кривой Z .
4. Пользуясь конструкцией из теоремы 11.3 найдите размерности пространств модулей многообразий Фано $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ рода $g \geq 9$.
5. Докажите, что на общем многообразии Фано $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ рода $g = 9, 10, 12$ схема Гильберта прямых $F_1(X)$ неособа. Какова коразмерность подмножества многообразий Фано с особой схемой Гильберта $F_1(X)$? *Указание:* Воспользуйтесь предложением 11.5.
6. Какими свойствами выделяется кривая $Z = Z_5 \subset Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ из конструкции (11.3.1) для случая, когда $X = X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ — многообразие Мукая–Умемуры? (см. пример 13.5.1.) Докажите, что на многообразии Мукая–Умемуры каждая прямая имеет нормальный пучок вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ и

поэтому схема Гильберта прямых на этом многообразии неприведена в каждой точке. На самом деле это свойство является еще одной характеристикой многообразия Мукая–Умемур (см. [21]).

12. Многообразия Фано с числом Пикара 1, V

Теперь мы обсудим конструкции, позволяющие строить все многообразия Фано с числом Пикара 1 рода 7 и 8. Будут использованы линки Саркисова, обратные к рассмотренным в разделах 9 и 10.

12.1. Аналогично теореме 11.3 имеются бирациональные конструкции, позволяющие получать все многообразия Фано рода 8. Ниже мы приведем одну из них, которая обратна к линку Саркисова, связанному с точкой (см. теорему 10.1 (ii)). Другая конструкция, принадлежащая Фано, приведена в [13, гл. 3, § 1].

12.1.1. ТЕОРЕМА ([17]). Пусть $Z \subset \mathbb{P}^4$ — рациональная нормальная кривая степени 4 и пусть $Y = Y_3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая кубическая гиперповерхность, проходящая через Z . Тогда линейная система $|8M - 5Z|$, где M — класс гиперплоского сечения Y , задает бирациональное отображение Y на антиканонически вложенное многообразие Фано $X_{14} \subset \mathbb{P}^9$ рода 8. Отображение стягивает дивизор линейно эквивалентный $3M - 2Z$ и является обратным к бирациональному отображению, построенному в теореме 10.1 (ii).

Каждое многообразие Фано $X = X_{14} \subset \mathbb{P}^9$ рода 8 с $\rho(X) = 1$ может быть получено способом, описанном выше.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $\varphi: \bar{X} \rightarrow Y$ — раздутие Z , пусть \bar{F} — исключительный дивизор и пусть $\bar{M} := \varphi^*M$. Так как кривая Z является пересечением квадрик, то линейная система

$$|-K_{\bar{X}}| = |2\bar{M} - \bar{F}|$$

не имеет базисных точек. Несложно вычислить также, что $(2\bar{M} - \bar{F})^3 = 6$. Следовательно, дивизор $-K_{\bar{X}}$ численно эффективен и объемен.

Докажем, что существует эффективный дивизор $\bar{E} \sim 3\bar{M} - 2\bar{F}$. По теореме Римана–Роха (см. доказательства теоремы 1.7.3) имеем

$$h^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M})) = h^0(X, \mathcal{O}_X(3M)) = 34.$$

Так как $\bar{F} \simeq \mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/Y}^\vee)$ — рациональная линейчатая поверхность, то

$$h^0(\bar{F}, \mathcal{O}_{\bar{F}}(3\bar{M})) = 3M \cdot Z + 1 = 13.$$

Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M} - \bar{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{F}}(3\bar{M}) \longrightarrow 0$$

следует, что

$$h^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M} - \bar{F})) \geq 21.$$

Для краткости положим $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\bar{F}}(3\bar{M} - \bar{F})$. Пусть $\pi: \bar{F} \rightarrow Z \simeq \mathbb{P}^1$ — проекция, ограничение φ на \bar{F} . Так как $\bar{F} \simeq \mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/Y}^\vee)$, то

$$\pi_*\mathcal{O}_{\bar{F}}(-\bar{F}) = \pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Z(\mathcal{N}_{Z/Y}^\vee)}(1) = \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee.$$

Согласно сказанному выше, пучок $\mathcal{N}_{Z/Y}^\vee \otimes \mathcal{O}_Z(2) = \pi_* \mathcal{O}_{\overline{F}}(2\overline{M} - \overline{F})$ порождается глобальными сечениями. Следовательно, то же верно и для пучка $\pi_* \mathcal{L} = \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee \otimes \mathcal{O}_Z(3)$. Поэтому

$$H^1(\overline{F}, \mathcal{L}) = H^1(Z, \pi_* \mathcal{L}) = 0$$

(см. [32, гл. V, лемма 2.4]). Аналогично, по теореме Римана–Роха на Z имеем

$$h^0(\overline{F}, \mathcal{L}) = h^0(Z, \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee \otimes \mathcal{O}_Z(3)) = 2 + \deg \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee + 3 \deg Z = 20.$$

Наконец, как и выше, из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(3\overline{M} - 2\overline{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(3\overline{M} - \overline{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{F}}(3\overline{M} - \overline{F}) \longrightarrow 0$$

следует, что

$$H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(3\overline{M} - 2\overline{F})) \neq 0,$$

т.е. существует эффективный дивизор $\overline{E} \sim 3\overline{M} - 2\overline{F}$.

Ясно, что этот дивизор неприводим. Как и в доказательстве леммы 11.3.7 (ii) можно показать, что линейная система $|-K_{\overline{X}}|$ задает малое стягивание. Далее доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 11.3. \square

12.2. Теперь мы рассмотрим случай многообразий Фано рода 7. Наша конструкция обратна к линку Саркисова, связанному с коникой (см. теорему 9.3 (i)).

12.2.1. ТЕОРЕМА. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^4$ — неособая кривая степени 10 и рода 7, удовлетворяющая двум следующим условиям

- (i) Z не является ни гиперэллиптической, ни тригональной, ни тетрагональной (см. предложение 9.5.1);
- (ii) содержится в неособой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$.

Тогда линейная система $|8M - 3Z|$, где M — класс гиперплоского сечения Q , задает бирациональное отображение Q на антиканонически вложенное многообразие Фано $X_{12} \subset \mathbb{P}^8$ рода 7. Отображение стягивает дивизор линейно эквивалентный $5M - 2Z$. Оно является обратным к бирациональному отображению, построенному в теореме 9.3 (i).

Каждое многообразие Фано $X = X_{12} \subset \mathbb{P}^8$ рода 7 с $\rho(X) = 1$ может быть получено способом, описанным выше.

Как и в доказательстве предложения 11.2 (ii) легко показать, что через Z проходит квадрика. В 12.2.1 (ii) мы требуем, что эта квадрика неособа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi: \overline{X} \rightarrow Q$ — раздутие Z , пусть \overline{F} — исключительный дивизор и пусть $\overline{M} := \varphi^* M$. Тогда

$$-K_{\overline{X}} = 3\overline{M} - \overline{F}.$$

Используя соотношения (1.9.3), получим

$$(\overline{M})^3 = 2, \quad (\overline{M})^2 \cdot \overline{F} = 0, \quad \overline{M} \cdot \overline{F}^2 = -10, \quad \overline{F}^3 = -42.$$

Отсюда несложно вычислить, что

$$(12.2.2) \quad (-K_{\overline{X}})^3 = 6, \quad (-K_{\overline{X}})^2 \cdot \overline{M} = 8, \quad (-K_{\overline{X}})^2 \cdot \overline{F} = 18.$$

12.2.3. ЛЕММА. Имеет место неравенство

$$(12.2.4) \quad h^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(-K_{\overline{X}})) \geq 6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана–Роха (см. (1.7.7)) имеем

$$h^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M})) = h^0(Q, \mathcal{O}_Q(3M)) = 30.$$

Так как \bar{F} — линейчатая поверхность рода 7, то

$$h^0(\bar{F}, \mathcal{O}_{\bar{F}}(3\bar{M})) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z(3)) = 24.$$

Тогда неравенство (12.2.4) следует из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M} - \bar{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(3\bar{M}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{F}}(3\bar{M}) \longrightarrow 0. \quad \square$$

12.2.5. ЛЕММА. Дивизор $-K_{\bar{X}} = 3\bar{M} - \bar{F}$ численно эффективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, противное, т.е. существует неприводимая кривая $\bar{C} \subset \bar{X}$ такая, что $K_{\bar{X}} \cdot \bar{C} > 0$. Из (12.2.4) следует, что $\dim |-K_{\bar{X}}| \geq 5$. Выберем два общих элемента $\bar{D}, \bar{D}' \in |-K_{\bar{X}}|$. Мы можем записать

$$\bar{D} \cap \bar{D}' = m\bar{C} + \bar{R},$$

где $m \geq 1$, а $\bar{R} = \sum m_i \bar{R}_i$ — эффективный 1-цикл. Из точной последовательности ограничения следует, что

$$(12.2.6) \quad h^0(\bar{D}, \mathcal{O}_{\bar{D}}(-K_{\bar{X}})) \geq 5.$$

Таким образом, цикл \bar{R} варьируется в четырехмерном семействе на \bar{D} . В частности, $\bar{R} \neq 0$.

Положим $D := \varphi(\bar{D})$, $D' := \varphi(\bar{D}')$, $C := \varphi_* \bar{C}$ и $R := \varphi_* \bar{R}$. Таким образом, D и D' — общие дивизоры линейной системы $|-K_Q|$, проходящие через Z . Тогда

$$(12.2.7) \quad m \deg C + \deg R = \bar{D} \cdot \bar{D}' \cdot \bar{M} = (-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{M} = 8.$$

Так как $\deg Z = 10$, то отсюда следует, что базисное множество $\text{Bs } |-K_{\bar{X}}|$ не доминирует Z , т.е. $\varphi(\text{Bs } |-K_{\bar{X}}|) \not\supset Z$. В частности, $\bar{C} \not\subset \bar{F}$, т.е. $C \neq Z$, и пересечение $D \cap D'$ содержит Z с кратностью 1. Таким образом, $D \cap D' = Z + mC + R$.

Имеем

$$3 \deg C = 3\varphi_* M \cdot \bar{C} < \bar{F} \cdot \bar{C}.$$

Поэтому если $\deg C = 1$, то кривая C должна быть 4-секущей прямой к Z . Но тогда проекция из C задаст линейный ряд \mathfrak{g}_6^2 на Z . Это противоречит нашим предположениям и лемме 9.5.2. Аналогично, если $\deg C = 2$, то C — коника и проекция из плоскости этой коники задаст линейный ряд \mathfrak{g}_3^1 на Z . Это снова противоречит нашим предположениям. Таким образом, $\deg C \geq 3$ и поэтому $\deg R \leq 5$.

Далее мы утверждаем, что поверхность D нормальна. Действительно, иначе она должна быть особой вдоль некоторой кривой Λ , которая по теореме Бертини должна лежать в базисном множестве линейной системы $|3M - Z|$. Более того, обе поверхности D и D' должны иметь кратность ≥ 2 вдоль Λ . Так как $m \leq 2$, то отсюда следует, что Λ — компонента R и $R = 4\Lambda + R_1$, где R_1 — прямая. Но тогда D содержит четырехпараметрическое семейство прямых (см. (12.2.6)). Ясно, что это невозможно (см. [78, следствие А.1.3]).

Значит, поверхность D нормальна и R — дивизор Вейля на D такой, что $\dim |R| \geq 4$. Распишем R в виде $R = R_f + R_m$, где R_m — подвижная, а R_f — неподвижные части, т.е. $|R| = R_f + |R_m|$. Согласно [78, лемма А.1.2, следствие А.1.3], поверхность степени

≥ 5 не может содержать двумерное семейство коник или прямых. Поэтому $\deg R_m \geq 3$. Таким образом,

$$\deg R_m \geq 3, \quad 3 \leq \deg R \leq 5, \quad 3 \leq \deg C \leq 5, \quad m = 1.$$

Если общий элемент $R_m \in |R_m|$ приводим, то по теореме Бертини линейная система $|R_m|$ составлена из пучка: $|R_m| = k|L|$, где $k \deg L \leq 5$. Но тогда $\dim |R_m| \leq 2$. Противоречие показывает, что общий элемент $R_m \in |R_m|$ неприводим.

Далее мы утверждаем, что арифметический род кривой R_m не превосходит 1. Действительно, если линейная оболочка $\langle R_m \rangle$ двумерна, то R_m является коникой $\langle R_m \rangle \cap Q$. Если $\langle R_m \rangle$ трёхмерна, то $\rho_a(R_m) = 2$, $\deg R_m = 5$ и кубика, проходящая через R_m пересекает на D кривую $R_m + \Lambda$, где Λ — прямая. Так как D может содержать не более чем одномерное семейство прямых, то это невозможно. Если же R_m не лежит в гиперплоскости в \mathbb{P}^4 , то оценка $\rho_a(R_m) \leq 1$ следует из неравенства Кастельнуово для пространственных кривых (см., например, [4, гл. 2, § 3]).

12.2.8. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $D \subset \mathbb{P}^4$ — нормальная поверхность степени 6, являющаяся пересечением квадрики и кубики и содержащая 4-мерную линейную систему \mathcal{C} неприводимых кривых степени d и арифметического рода $\rho_a(\Gamma) \leq 1$. Тогда $d \geq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — гиперплоское сечение поверхности D и пусть $\Gamma \in \mathcal{C}$ — общая кривая. Пусть $\mu: \tilde{D} \rightarrow D$ — разрешение особенностей. Пусть $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{D}$ — собственный прообраз Γ и пусть $A^* := \mu^*A$. Тогда $A^* \cdot \tilde{\Gamma} = d$. Положим $n := \tilde{\Gamma}^2$. Мы можем его выбрать разрешением μ так, что линейная система $|\tilde{\Gamma}|$ не будет иметь базисных точек. Так как $\dim |\tilde{\Gamma}| \geq 4$, то $n \geq 3$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}) \longrightarrow H^0(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}(\tilde{\Gamma})) \longrightarrow H^0(\tilde{\Gamma}, \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\Gamma}))$$

следует, что

$$4 \leq h^0(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}(\tilde{\Gamma})) - 1 \leq h^0(\tilde{\Gamma}, \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\Gamma})).$$

Ясно, что $g := g(\tilde{\Gamma}) \leq \rho_a(\Gamma) \leq 1$. По теореме Римана–Роха

$$h^0(\tilde{\Gamma}, \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\Gamma})) = n - g + 1.$$

Отсюда $n \geq 3 + g$. По теореме Ходжа об индексе

$$0 \geq (A^*)^2 \tilde{\Gamma}^2 - (A^* \cdot \tilde{\Gamma})^2 = 6n - d^2$$

(см. [32, гл. V, упражнение 1.9]). Отсюда

$$d^2 \geq 6(3 + g). \quad \square$$

Из этого утверждения немедленно получаем, что

$$\deg R_m = 5, \quad R = R_m, \quad \deg C = 3.$$

Воспользуемся обозначениями доказательства утверждения 12.2.8. Рассмотрим морфизм $\Phi_{|\tilde{R}|}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{D} \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$ заданный линейной системой $|\tilde{\Gamma}|$. Тогда \tilde{D} — поверхность степени $\tilde{R}^2 = n \leq 4$ (и этот морфизм бирационален). При этом образ общего дивизора A^* будет кривой $\tilde{A} \subset \mathbb{P}^N$ степени $\tilde{R} \cdot A^* = 5$ и рода 4. Согласно оценке рода [32, гл. IV, § 6, теорема 6.4], кривая \tilde{A} должна содержаться в плоскости. Но тогда \tilde{A} — гиперплоское сечение поверхности $\tilde{D} \subset \mathbb{P}^N$. Мы получили противоречие с нашим предположением. Следовательно, дивизор $-K_{\tilde{X}}$ численно эффективен. Лемма 12.2.3 доказана. \square

Значит, по теореме о свободе от базисных точек 14.4 линейная система $|-nK_{\bar{X}}|$ при $n \gg 0$ задает морфизм и поэтому имеется бирациональное стягивание $\bar{\theta}: \bar{X} \rightarrow X_0$ и при этом $-K_{\bar{X}} = \bar{\theta}^* A_0$ для некоторого обильного дивизора Картье A_0 на X_0 .

12.2.9. ЛЕММА. *Морфизм $\bar{\theta}$ не стягивает дивизоров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. имеется простой дивизор \bar{D} такой, что $(-K_{\bar{X}})^2 \cdot \bar{D} = 0$. Используя (12.2.2), несложно получить, что $D \sim m(9\bar{M} - 4\bar{F})$ для некоторого $m > 0$. Так как

$$(-K_{\bar{X}}) \cdot \bar{D}^2 = -42m^2 \neq 0,$$

то $\Lambda := \bar{\theta}(\bar{D})$ — кривая на X_0 .

Для $n \gg 0$ рассмотрим общий элемент $\bar{G} \in |-nK_{\bar{X}}|$, его образ $G_0 := \bar{\theta}(\bar{G})$ и морфизм-ограничение

$$\mu = \bar{\theta}|_{\bar{G}}: \bar{G} \longrightarrow G_0.$$

Тогда \bar{G} — неособая поверхность, а поверхность G_0 имеет особенности в точности в точках пересечения $\{P_1, \dots, P_k\} = \Lambda \cap G_0$. Положим $l_i := \mu^{-1}(P_i)_{\text{red}}$. Тогда $\sum l_i = \bar{G} \cap D$ (как схема) и $K_{\bar{X}} \cdot l_i = K_{\bar{G}} \cdot l_i = 0$. Это означает, что морфизм $\mu: \bar{G} \rightarrow G_0$ крепантен и особенности поверхности G_0 дювалевские. Для любой компоненты $l'_i \subset l_i$ мы имеем $l_i \cdot l'_i = D \cdot l'_i < 0$. Отсюда следует, что каждая кривая l_i или неприводима или является объединением двух неприводимых компонент, пересекающихся трансверсально в одной точке. В обоих случаях $l_i^2 = -2$. Таким образом,

$$-2k = \sum l_i^2 = \bar{G} \cdot \bar{D}^2 = (-nK_{\bar{X}}) \cdot \bar{D}^2 = -42m^2n, \quad 21m^2n = k.$$

С другой стороны,

$$k \deg \varphi(l_i) = \bar{M} \cdot \sum l_i = \bar{M} \cdot \bar{G} \cdot D = 14nm$$

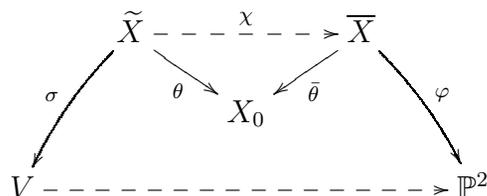
Отсюда $3m \deg \varphi(l_i) = 2$. Противоречие. \square

Таким образом, существует флоп и мы можем включить наши отображения в коммутативную диаграмму (11.3.1), где $Y = Q$. Далее, аналогично доказательству теоремы 11.3 получаем, что X — неособое многообразие Фано индекса 1 рода 7 и σ — раздутие коники на X . Теорема доказана. \square

Наконец, отметим, что наша бирациональная техника не позволяет дать описание многообразий Фано рода 6. Оказывается, что любой линк Саркисова снова приводит к многообразию того же типа. Как уже отмечалось, эти многообразия Фано могут быть описаны при помощи метода векторных расслоений [15], см. также [50] и 13.3. Однако бирациональная техника работает применительно к многообразиям Фано рода 6, допускающим особенности. Например, имеет место следующее утверждение.

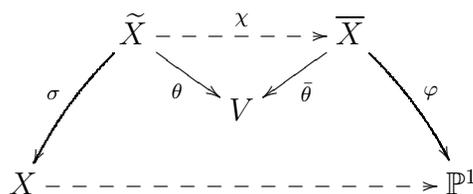
12.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $V = V_{10} \subset \mathbb{P}^7$ — антиканонически вложенное многообразие Фано рода 6 с $\rho(V) = 1$, имеющее ровно одну особую точку, которая является обыкновенной двойной.*

- (i) (см. [43, 5.6.2], [49], [28]) Если многообразие V является \mathbb{Q} -факториальным, то оно включается в линку вида (7.2.2):



где σ — стягивание Мори типа B_3 (раздутие особой точки), а φ — расслоение на коники с дискриминантной кривой степени 6.

- (ii) (см. [1, пример 1.11]) Если многообразие V не является \mathbb{Q} -факториальным, то оно является серединой линка (7.2.2)



где $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие прямой на неособом многообразии дель Пеццо степени 2, а $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на поверхности дель Пеццо степени 3.

12.4. Подведем итоги. Результаты предыдущих лекций позволяют составить следующую таблицу трехмерных многообразий Фано с $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \cdot K_X$. Отметим, однако, что мы не дали доказательства того, что все многообразия рода 6 описываются пунктом 4.5° таблицы. набросок доказательства и ссылки будут даны в разделе 13.3.

12.4.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Два типа многообразий в 4.2° могут быть объединены в одно неприводимое семейство: все они являются пересечениями гиперповерхностей степени 2 и 4 во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^5, 2)$ (см. задачу 1, стр. 65).

Аналогично, два типа многообразий в 4.5° также могут быть объединены в одно неприводимое семейство: все они являются сечениями конуса $\widetilde{\text{Gr}(2, 5)} \subset \mathbb{P}^{10}$ над грасмарианом $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ подпространством коразмерности 3 и квадрикой.

Отметим однако, что многообразия Фано с числом Пикара 1 рода $7 \leq g \leq 10$ допускают более инвариантное описание в виде сечений некоторых однородных пространств. Для рода $g = 12$ также имеются альтернативные описания. При этом используются методы, отличные от используемых в настоящих записках. Обзор этих методов см. в 13.3.

Из таблицы 4 и таблицы 1 на стр. 52 немедленно получаем следующее интересное наблюдение.

12.5. СЛЕДСТВИЕ. Существует ровно 4 типа трехмерных многообразий Фано с $H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$:

$$\mathbb{P}^3, \quad Q_2 \subset \mathbb{P}^4, \quad X_5 \subset \mathbb{P}^6, \quad X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}.$$

- ЗАДАЧИ.** 1. Докажите, что любое многообразие Фано рода 8 может быть также получено из неособой кубики в \mathbb{P}^4 при помощи линка Саркисова с центром в эллиптической кривой степени 5 (см. [13]).

Таблица 4. Трехмерные многообразия Фано индекса 1 с $\rho(X) = 1$.

	g	$h^{1,2}$	X
4.1°	2	52	гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^4, 3)$
4.2°	3	30	$X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$, гиперповерхность степени 4
			двойное накрытие неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$ с ветвлением в поверхности $B = B_8 \subset Q$ степени 8
4.3°	4	20	$X = X_6 \subset \mathbb{P}^5$, пересечение квадрики и кубики
4.4°	5	14	$X = X_8 \subset \mathbb{P}^6$, пересечение трех квадрик
4.5°	6	10	$X = X_5 \subset \mathbb{P}^6$, сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в $\mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^5) = \mathbb{P}^9$, подпространством коразмерности 2 и квадрикой
			двойное накрытие неособого многообразия дель Пеццо $Y = Y_5 \subset \mathbb{P}^6$ степени 5 с ветвлением в поверхности $B = B_{10} \subset Y$ степени 10
4.6°	7	7	$X = X_{12} \subset \mathbb{P}^8$ (см. 12.2.1)
4.7°	8	5	$X = X_{14} \subset \mathbb{P}^9$ (см. 12.1.1)
4.8°	9	3	$X = X_{16} \subset \mathbb{P}^9$ (см. 11.3 (iii))
4.9°	10	2	$X = X_{18} \subset \mathbb{P}^{10}$ (см. 11.3 (ii))
4.10°	12	0	$X = X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ (см. 11.3 (i))

2. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^3$ — кривая рода 7 степени 10, лежащая на квадрике. Докажите, что она гиперэллиптическая.
3. Пользуясь конструкцией из теорем 12.1.1 и 12.2.1 найдите размерности пространств модулей многообразий Фано $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ рода $g = 7$ и 8.
4. Докажите предложение 12.3.

13. Другие методы

13.1. Классификация многообразий Фано с $\rho > 1$ при помощи экстремальных лучей. Трехмерные многообразия Фано с $\rho > 1$ были классифицированы Мори и Мукаи [88] при помощи метода экстремальных лучей. В отличие от случая $\rho = 1$ классификация в этом случае очень обширна мы даже не пытаемся воспроизводить ее здесь целиком. Приведем только основной результат.

- 13.1.1. ТЕОРЕМА (см. [88]). (i) Существует ровно 88 деформационных семейств трехмерных многообразий Фано с числом Пикара $\rho > 1$.
- (ii) Любое трехмерное многообразие Фано X с $\rho(X) \geq 6$ изоморфно произведению $S \times \mathbb{P}^1$, где S — поверхность дель Пеццо степени $11 - \rho(X)$. В частности, $\rho(X) \leq 10$.

- (iii) Если X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) \geq 4$, то оно является раздутием другого многообразия Фано вдоль гладкой кривой, а также X имеет структуру (необязательно относительно минимального) расслоения на коники над гладкой поверхностью дель Пецо.

Доказательство основано на подробном изучении экстремальных лучей на многообразиях Фано. Дадим очень краткий набросок основной идеи классификации и доказательства теоремы 13.1.1.

13.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Трехмерное многообразие Фано X называется *импримитивным*, если оно может быть получено раздутием кривой на другом многообразии Фано Y . В противном случае многообразие Фано X называется *примитивным*.

Оказывается, что в большинстве случаев на многообразии Фано X с числом Пикара $\rho(X) > 1$ имеется экстремальный луч типа B_1 . Можно было бы ожидать, что тогда X импримитивно. Однако это не всегда так.

13.1.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X — неособое трехмерное многообразие и пусть $f: X \rightarrow Y$ — стягивание экстремального луча типа B_1 (т.е. раздутие неособой кривой $C \subset Y$). Мы говорим, что стягивание f имеет тип B_1^0 , если $C \simeq \mathbb{P}^1$ и

$$\mathcal{N}_{C/Y} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

В противном случае мы говорим, что f имеет тип B_1^1 .

13.1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — стягивание экстремального луча типа B_1^0 , пусть E — исключительный дивизор и пусть $C := f(E)$. Тогда $K_Y \cdot C = 0$ (в частности, Y не является многообразием Фано) и существует экстремальное стягивание $f': X \rightarrow Y'$ дивизора E на кривую $C' \subset Y'$. Индуцированное бирациональное отображение $Y \dashrightarrow Y'$ является флопом Атья–Куликова 14.8.3.

Отметим также, что поскольку дивизор E может быть стянут в точку, то он отрицательно пересекается со всеми кривыми $\Gamma \subset E$.

13.1.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — раздутие гладкой кривой C на трехмерном неособом проективном многообразии Y . Предположим, что X является многообразием Фано. Тогда Y является обобщенным многообразием Фано, т.е. антиканонический дивизор $-K_Y$ численно эффективен и объемен. Более того, C — единственная кривая на Y такая, что $K_Y \cdot C = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E — исключительный дивизор. Предположим, что дивизор

$$(13.1.6) \quad f^*(-K_Y) = -K_X + E$$

не является численно эффективным. Тогда существует экстремальный луч R на X такой, что $(-K_X + E) \cdot R < 0$. Пусть $f': X \rightarrow Y'$ — его стягивание. В этом случае $E \cdot R < K_X \cdot R < 0$. Значит, для минимальной рациональной кривой l , порождающей луч R , имеем $E \cdot l \leq -2$. Это противоречит классификационной теореме 14.7.

Таким образом, дивизор $-K_Y$ численно эффективен. Из разложения (13.1.6) видно, что он также объемен. По теореме о свободе от базисных точек 14.4 линейная система $|-nK_Y|$, $n \gg 0$ задает (бirationальное) стягивание $\theta: Y \rightarrow Y_0$. Пусть $Z \subset Y$ — неприводимая кривая такая, что $-K_Y \cdot Z = 0$ и пусть $\widehat{Z} \subset X$ — любая неприводимая кривая, доминирующая Z . Тогда $E \cdot \widehat{Z} = K_X \cdot \widehat{Z} < 0$. Поэтому $\widehat{Z} \subset E$ и $Z = C$. \square

13.1.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — раздутие гладкой кривой C на трехмерном неособом проективном многообразии Y . Предположим, что X является многообрази-ем Фано, а Y не является. Тогда f — стягивание типа V_1^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями доказательства предыдущего предложения. Тогда θ — флотовое стягивание, которое стягивает только C . Отсюда следует, что $C \simeq \mathbb{P}^1$ (см. следствие 14.8.9). Пусть $Z \subset E$ — очень обильный дивизор. По теореме о конусе его класс является выпуклой линейной комбинацией классов экстремальных кривых: $Z \approx \sum_{i=1}^r \alpha_i l_i$ и в этой сумме более одного члена. Так как дивизор $-K_Y$ численно эффективен и $f^*(-K_Y) \cdot Z = 0$, то $f^*(-K_Y) \cdot l_i = 0$ и $E \cdot l_i < 0$ для всех i (см. (13.1.6)). Так как стягивание f экстремально, то оно стягивает только одну кривую из l_1, \dots, l_r . Значит, существует экстремальная кривая l_i , не стягиваемая морфизмом f . При этом стягивание $f': X \rightarrow Y'$ кривой l_i также бирационально и E — исключительный дивизор как для f , так и для f' , т.е. E — линейчатая поверхность с двумя различными линейчатыми структурами. Поэтому $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Таким образом, $f: X \rightarrow Y$ включается в диаграмму флота Атьи–Куликова (рис. 3, стр. 136). \square

13.1.8. ЛЕММА. Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) > 1$. Предположим, что на X существует экстремальный луч R типа D . Тогда $\rho(X) = 2$ и второй экстремальный луч на X имеет тип C или V_1^1 .

Иначе говоря, X имеет структуру стандартного расслоения на коники над \mathbb{P}^2 или является раздутием кривой на многообразии Фано с числом Пикара 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — стягивание луча R . Тогда $Y \simeq \mathbb{P}^1$ и $\rho(X) = 2$ (см. следствия 1.3.3 и 14.5.1). Следовательно, на X существует еще только один экстремальный луч $R' \neq R$. Пусть $f': X \rightarrow Y'$ — его стягивание. Предположим, что f' имеет двумерный слой E' . Тогда E' пересекает слои f поэтому существует кривая l , стягиваемая обоими морфизмами f и f' . Но это означает, что $R = \mathbb{R}_+[l] = R'$. Противоречие. Следовательно, стягивание f' не имеет двумерных слоев и поэтому оно имеет тип C или V_1 . В последнем случае Y' — многообразие Фано (поскольку $\rho(Y') = 1$). Следовательно, f' не может быть типа V_1^0 . \square

13.1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) > 1$. Предположим, что X примитивно. Тогда X имеет структуру стандартного расслоения на коники над \mathbb{P}^2 или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. В частности, $\rho(X) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (СР. С ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ ЛЕММЫ 3.4.1. Пусть R_1, \dots, R_n — все экстремальные лучи на X . Для каждого экстремального луча R_i пусть $f_i: X \rightarrow Y_i$ — соответствующее экстремальное стягивание.

Предположим, что X не имеет структуры расслоения на коники. По лемме 13.1.8 мы также можем считать, что X не имеет стягиваний типа D , (т.е. не имеет структуры расслоения на поверхности дель Пеццо). Тогда любой экстремальный луч R_i имеет тип V_2 – V_5 или V_1^0 . Пусть E_i — соответствующий исключительный дивизор.

Предположим, что для некоторых $i \neq j$ дивизоры E_i и E_j пересекаются. Тогда пересечение $E_i \cap E_j$ содержит кривую D , а поскольку поверхность E_i изоморфна \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или квадратичному конусу в \mathbb{P}^3 , то существует кривая $D' \subset E_i$ алгебраически эквивалентная D и такая, что $D' \not\subset E_j$. Поэтому $E_j \cdot D = E_j \cdot D' \geq 0$. Это противоречит тому, что E_j — исключительный дивизор, стягиваемый в точку (см. замечание 13.1.4). Таким образом, дивизоры E_1, \dots, E_n попарно не пересекаются.

Пусть теперь L — кривая на X , полученная пересечением двух общих гиперплоских сечений. Тогда $E_i \cdot L > 0$ для всех i . с другой стороны, класс L можно разложить в виде выпуклой линейной комбинации элементов экстремальных лучей. Каждый луч пересекается отрицательно ровно с одним дивизором из множества E_1, \dots, E_n и пересекается по нулю с остальными. Отсюда следует, что $E_i \cdot L \leq 0$. Противоречие показывает, что X имеет экстремальное стягивание $f_k: X \rightarrow Y_k$ типа C_1 или C_2 , т.е. Y_k — поверхность и f_k — стандартное расслоение на коники.

Предположим, что поверхность Y_k содержит (-1) -кривую l и пусть $F := f_k^{-1}(l)$. По формуле проекции дивизор F не является численно эффективным. Значит, существует экстремальный луч R_j такой, что $F \cdot R_j < 0$. Так как многообразие Фано примитивно, то луч R_j имеет тип B_2 - B_5 или B_1^0 . Но тогда F имеет отрицательное пересечение с любой кривой $\Gamma \subset F$ и не может содержать слоев f_k . \square

13.2. Многообразия Фано с числом Пикара 2. Перечислим все трехмерные многообразия Фано X с $\rho(X) = 2$. В этом случае на многообразии X имеются ровно два экстремальных луча $R_1, R_2 \subset \overline{NE}(X)$ и мы можем применить вычисления из лемм 7.7 и 7.9. Начнем с примитивного случая.

Пусть X — примитивное многообразие Фано с $\rho(X) = 2$. Согласно предложению 13.1.9, на X один из экстремальных лучей задает структуру расслоения на коники $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Пусть $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ — дискриминантная кривая и пусть

$$d := \deg \Delta.$$

Пусть $f': X \rightarrow Y'$ — стягивание второго экстремального луча. Так как X примитивно, то f' может иметь только типы C_1 - C_2 , D_1 - D_3 , B_2 - B_5 .

Введем обозначения. Пусть l — прямая на \mathbb{P}^2 и пусть $M := f^*l$. Если f является \mathbb{P}^1 -расслоением (тип C_1), то K_X и M порождают подрешетку индекса 2 в $\text{Pic}(X)$. Если же дискриминантная кривая Δ непуста (тип C_2), то K_X и M порождают все решетку $\text{Pic}(X)$. Теория пересечения на X выглядит следующим образом (см. лемму 7.7):

$$M^3 = 0, \quad M^2 \cdot (-K_X) = 2, \quad M \cdot (-K_X)^2 = 12 - d, \quad (-K_X)^3 = 2g - 2,$$

где $g := g(X)$. В частности, отсюда следует, что $d < 12$.

В случаях, когда второе стягивание $f': X \rightarrow Y'$ имеет тип D_1 - D_3 , через D мы обозначим слой f' . В случаях C_1 - C_2 через D мы обозначим прообраз общей прямой $l \subset Y' \simeq \mathbb{P}^2$. Наконец, в случаях B_2 - B_5 через D мы обозначим исключительный дивизор.

По аналогии с леммой 7.9 запишем

$$D \sim a(-K_X) - bM,$$

где a и b — положительные числа. Причем эти числа целые, если f имеет тип C_1 и принадлежат $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, если f имеет тип C_2 . Далее мы рассмотрим случаи согласно лемме 7.7. Результаты будут подытожены в таблице 5. Заметим, что наша нумерация отлична от нумерации введенной в [88].

Случаи D_1 - D_3 . В этом случае $Y' \simeq \mathbb{P}^1$ и f' — расслоение на поверхности дель Пеццо. Пусть d' — степень общего слоя. Тогда, как и в лемме 7.7, запишем

$$\begin{aligned} d' &= (-K_X)^2 \cdot D = (2g - 2)a - (12 - d)b, \\ 0 &= (-K_X) \cdot D^2 = (2g - 2)a^2 - 2(12 - d)ab + 2b^2, \\ 0 &= D^3/a = (2g - 2)a^2 - 3(12 - d)ab + 6b^2. \end{aligned}$$

Вычитая третье соотношение из второго, получаем

$$(12 - d)a = 4b, \quad 8(2g - 2) = 3(12 - d)^2.$$

Отсюда для (d, g) простым перебором получаются только следующие возможности:

$$(d, g) = (0, 28), \quad (4, 13), \quad (8, 4).$$

Если $(d, g) = (0, 28)$, то $b = 3a$, $d' = 18a$. Так как $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ и $d' \leq 9$, то имеется единственная возможность $d' = 9$, $a = 1/2$, $b = 3/2$. Получаем случай 7° в таблице 5 ниже.

Если $(d, g) = (4, 13)$, то $b = 2a$, $d' = 8a$. В этом случае $\Delta \neq 0$, поэтому $a \in \mathbb{Z}$. Поэтому имеется единственная возможность $d' = 8$, $a = 1$, $b = 2$. Получаем случай 4° в таблице 5.

Наконец, если $(d, g) = (8, 4)$, то $b = a$, $d' = 2a$. Если антиканонический класс $-K_X$ является очень обильным, то $X = X_6 \subset \mathbb{P}^5$ — пересечение квадрики и кубики (см. упражнение 1, стр. 70). Но в этом случае $\rho(X) = 1$ по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении. Значит, или линейная система $|-K_X|$ имеет базисные точки или многообразие X является гиперэллиптическим. Согласно теоремам 4.3 и 5.5, получаем случай 1°.

Случаи C₁-C₂. В этом случае $Y' \simeq \mathbb{P}^2$ и f' — расслоение на коники. Пусть d' — степень кривой вырождения. Тогда

$$\begin{aligned} 12 - d' &= (-K_X)^2 \cdot D = (2g - 2)a - (12 - d)b, \\ 2 &= (-K_X) \cdot D^2 = (2g - 2)a^2 - 2(12 - d)ab + 2b^2, \\ 0 &= D^3/a = (2g - 2)a^2 - 3(12 - d)ab + 6b^2. \end{aligned}$$

Вычитая третье соотношение из второго получаем

$$(12 - d)ab = 4b^2 + 2, \quad (2g - 2)a^2 = 6b^2 + 6.$$

Если $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ — стягивание типа C₁, то a и b — целые (положительные) числа. Тогда имеются две возможности:

- $b = a = 1$, $d = d' = 6$, $2g - 2 = 12$ (случай 2°),
- $b = 2$, $a = 1$, $d = 3$, $d' = 0$, $2g - 2 = 30$ (случай 5°).

Если же $f: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ — стягивание типа C₂, то по симметрии мы можем считать, что $f': X \rightarrow \mathbb{P}^2$ — также стягивание типа C₂. Тогда $d = d' = 0$, $a = 1/2$, $b = 1$, $2g - 2 = 48$ (случай 6°)

Случаи B₂-B₅. В этом случае Y' — (возможно особое) многообразие Фано и f' — раздутие максимального пучка идеалов точки. Тогда

$$\begin{aligned} k &= (-K_X)^2 \cdot D = (2g - 2)a - (12 - d)b, \\ -2 &= (-K_X) \cdot D^2 = (2g - 2)a^2 - 2(12 - d)ab + 2b^2, \\ 4/k &= D^3 = (2g - 2)a^3 - 3(12 - d)a^2b + 6ab^2. \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, 4$ в случаях B₅, B₃-B₄ и B₂, соответственно. Как и выше, получаем следующие решения:

- B₅: $2g - 2 = 62$, $d = 0$, $a = 1/2$, $b = 5/2$ (случай 9°)
- B₃-B₄: $2g - 2 = 14$, $d = 6$, $a = 1$, $b = 2$ (случай 3°)
- B₂: $2g - 2 = 56$, $d = 0$, $a = 1/2$, $b = 2$ (случай 8°)

Таблица 5. Примитивные многообразия Фано с $\rho(X) = 2$

№.	$(-K_X)^3$	$h^{1,2}$	X	R_1	R_2
1 ^o	6	20	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с дивизором ветвления бистепени (2, 4)	C_1	D_1
2 ^o	12	9	а) дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени (2, 2) б) двойное накрытие многообразия № 6 ^o с дивизором ветвления — элементом антиканонической линейной системы	C_1	C_1
3 ^o	14	9	двойное накрытие многообразия № 8 ^o с дивизором ветвления — элементом антиканонической линейной системы	C_1	V_3-V_4
4 ^o	24	2	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с дивизором ветвления бистепени (2, 2)	C_1	D_2
5 ^o	30	0	дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени (1, 2)	C_2	C_1
6 ^o	48	0	дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени (1, 1)	C_2	C_2
7 ^o	54	0	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	C_2	D_3
8 ^o	56	0	$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$ над \mathbb{P}^2	C_2	V_2
9 ^o	62	0	$\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2))$ над \mathbb{P}^2	C_2	V_5

Пусть теперь X — импримитивное многообразие Фано с $\rho(X) = 2$ и $g := g(X)$. Тогда имеется экстремальное стягивание $f: X \rightarrow Y$, являющееся раздутием гладкой кривой Γ на неособом многообразии Фано Y . Если линейная система $|-K_X|$ имеет базисные точки или X является гиперэллиптическим, то Y — многообразие дель Пеццо степени 1 или 2, согласно теоремам 4.3 и 5.5, а f является раздутием вдоль кривой $\Gamma = D_1 \cap D_2$, $D_i \in |-\frac{1}{2}K_X|$ (случай 16^o таблицы 7 с $d = 1$ и 2). Поэтому далее мы будем считать, что линейная система $|-K_X|$ задает вложение $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$. В частности, $g(X) \geq 4$. Более того, если $g(X) \leq 5$, то по теореме 6.5 многообразие X должно быть полным пересечением в \mathbb{P}^{g+1} и тогда $\rho(X) = 1$. Противоречие показывает, что $g(X) \geq 6$. Далее, кривая Γ равна базисному множеству линейной системы $f_*|-K_X| \subset |-K_Y|$. Согласно теореме 4.1, линейная система $|-K_Y|$ не имеет базисных точек. Значит, $f_*|-K_X| \subsetneq |-K_Y|$ и поэтому

$$g(Y) > g(X) \geq 6.$$

Предположим, что $\iota(Y) = 1$. Тогда Γ не может быть прямой согласно следствию 8.3.5. Далее, согласно предложению 8.5 (iii) все прямые на Y замечают (ненормальную) линейчатую поверхность, которая должна пересекать Γ (поскольку $\rho(Y) = 1$). Поэтому на Y существует прямая l , пересекающая Γ . Но тогда индекс пересечения собственного прообраза l на Y с каноническим классом неотрицателен. Противоречие показывает, что $\iota(Y) > 1$. Пусть $f': X \rightarrow Y'$ — второе экстремальное стягивание. Далее классификация проводится путем подробного разбора случаев. Мы опускаем длинные вычисления, аналогичные вычислениям в 13.2. Приведем результат:

13.2.1. ТЕОРЕМА. Импримитивное многообразие Фано X с $\rho(X) = 2$ изоморфно раздутию многообразия Фано Y с $\rho(Y) = 1$ и $\iota = \iota(Y) \geq 2$ вдоль неособой кривой $\Gamma \subset Y$, которая является сечением элементов линейной системы $\mathcal{M} \subset |-\frac{\iota-1}{\iota}K_Y|$. Наоборот, каждое раздутие многообразия Фано Y с $\rho(Y) = 1$ и $\iota = \iota(Y) \geq 2$ вдоль такой кривой является импримитивным многообразием Фано.

Теперь несложно получить полный список. Результаты подытожены в таблицах 6 и 7. В частности, из классификации можно вывести следующий факт.

13.2.2. ТЕОРЕМА ([89, теорема 5.1]). Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) = 2$. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $f': X \rightarrow Y'$ — экстремальные стягивания. Тогда

$$\text{Pic}(X) = f^* \text{Pic}(Y) \oplus f'^* \text{Pic}(Y').$$

В работе [89] этот результат доказан без использования подробной классификации.

Таблица 6. Импримитивные многообразия Фано с $\rho = 2$ (оба стягивания имеют тип B_1)

No.	$(-K_X)^3$	Y	$\deg \Gamma$	$g(\Gamma)$	Y'	$\deg \Gamma'$	$g(\Gamma')$
10°	20	\mathbb{P}^3	6	3	\mathbb{P}^3	6	3
11°	24	\mathbb{P}^3	5	1	Q	5	1
12°	26	\mathbb{P}^3	5	2	V_4	1	0
13°	28	Q	4	0	Q	4	0
14°	30	\mathbb{P}^3	4	0	V_5	2	0
15°	34	Q	3	0	V_5	1	0

Таблица 7. Импримитивные многообразия Фано с $\rho = 2$ (второе стягивание не имеет типа B_1)

No.	$(-K_X)^3$	Y	$\deg \Gamma$	$g(\Gamma)$	Y'	$f': X \rightarrow Y'$
16°	$4d$	V_d	d	1	\mathbb{P}^1	расслоение на поверхности дель Пеццо степени d , $1 \leq d \leq 5$
17°	18	V_3	1	0	\mathbb{P}^2	расслоение на коники с кривой вырождения степени 5
18°	22	V_4	2	0	\mathbb{P}^2	расслоение на коники с кривой вырождения степени 4
19°	10	\mathbb{P}^3	9	10	\mathbb{P}^1	расслоение на поверхности дель Пеццо степени 3
20°	14	Q	8	5	\mathbb{P}^1	расслоение на поверхности дель Пеццо степени 4
21°	16	\mathbb{P}^3	7	5	\mathbb{P}^2	расслоение на коники с кривой вырождения степени 5
22°	20	Q	6	2	\mathbb{P}^2	расслоение на коники с кривой вырождения степени 4

No.	$(-K_X)^3$	Y	$\deg \Gamma$	$g(\Gamma)$	Y'	$f': X \rightarrow Y'$
23 ^o	22	\mathbb{P}^3	6	4	V_3^s	стягивание в горенштейнову точку на кубике $Y' = V_3^s \subset \mathbb{P}^4$ (тип B_3 или B_4)
24 ^o	26	V_5	3	0	\mathbb{P}^2	расслоение на коники с кривой вырождения степени 3
25 ^o	30	Q	4	1	V_4^s	стягивание в горенштейнову точку на $Y' = V_4^s \subset \mathbb{P}^5$ (тип B_3 или B_4)
26 ^o	32	\mathbb{P}^3	4	1	\mathbb{P}^1	расслоение на квадрики
27 ^o	38	\mathbb{P}^3	3	0	\mathbb{P}^2	\mathbb{P}^1 -расслоение
28 ^o	40	\mathbb{P}^3	3	1		стягивание в негоренштейнову точку на гиперповерхности $Y' = Y_3^n \subset \mathbb{P}(1^4, 2)$ степени 3 (тип B_5)
29 ^o	40	Q	2	0	\mathbb{P}^1	расслоение на квадрики
30 ^o	46	\mathbb{P}^3	2	0	Q	стягивание в неособую точку на квадрике
31 ^o	46	Q	1	0	\mathbb{P}^2	\mathbb{P}^1 -расслоение
32 ^o	54	\mathbb{P}^3	1	0	\mathbb{P}^1	\mathbb{P}^2 -расслоение

13.3. Метод векторных расслоений. Н. Гушель [16], [15], [24], а позднее и С. Мукай [90], [91], [92] использовали метод векторных расслоений для классификации многообразий Фано. Основная идея метода — построить некоторое специальное векторное расслоение \mathcal{E} на многообразии Фано X , которое порождается глобальными сечениями и поэтому задает морфизм $X \rightarrow \text{Gr}(r, N)$, где $r := \text{rk } \mathcal{E}$, а $N := h^0(X, \mathcal{E})$.

Этот метод хорошо работает для многообразий Фано коиндекса 3 с числом Пикара 1. В этом случае общий элемент линейной системы $|-\frac{1}{n-2}K_X|$ снова является неособым многообразием Фано коиндекса 3, если $n \geq 4$, и неособой поверхностью типа КЗ, если $n = 3$ (см. [84], [38]). Классификация таких многообразий Фано рода в $g \leq 5$ полностью аналогична трехмерному случаю (см. теорему 6.6). Более того, при $g \geq 5$ линейная система $|-\frac{1}{n-2}K_X|$ очень обильна и задает вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+n-2}$ так, что образ имеет степень $2g - 2$ и является пересечением квадратик. Из классификации в трехмерном случае следует также, что $2 \leq g \leq 12$ и $g \neq 11$.

13.3.1. ТЕОРЕМА ([90]). Пусть X — многообразие Фано размерности n , коиндекса 3, рода $6 \leq g \leq 10$ и такое, что $\rho(X) = 1$. Пусть $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+n-2}$ — вложение линейной системой $|-\frac{1}{n-2}K_X|$. Тогда $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+n-2}$ является линейным сечением некоторого N -мерного многообразия Фано $\Omega_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+N-2}$ коиндекса 3, где $N = N(g)$. Более того, при $7 \leq g(X) \leq 10$ многообразие Ω_{2g-2} является однородным относительно связной простой алгебраической группы G . Все многообразия Ω_{2g-2} перечислены в таблице 8 ниже.

Поясним обозначения в таблице. В случае $g = 7$ многообразие $\Omega_{12} = \text{OGr}(4, 9) = \text{OGr}(5, 10)^+$ параметризует 4-мерные векторные подпространства в \mathbb{C}^9 изотропные относительно невырожденной симметричной билинейной формы на \mathbb{C}^9 . В случае $g = 9$ многообразие $\Omega_{16} = \text{SGr}(3, 6)$ параметризует 3-мерные векторные подпространства

Таблица 8. “Базисные” многообразия Фано коиндекса 3

g	$N(g)$	$\Omega_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+N-2}$	G
6	6	пересечение конуса $\widetilde{\text{Gr}}(2, 5) \subset \mathbb{P}^{10}$ над грассманианом $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ с квадратикой	
7	10	ортогональный грассманиан $\text{OGr}(4, 9) \subset \mathbb{P}^{15}$	$\text{SO}_{10}(\mathbb{C})$
8	8	грассманиан $\text{Gr}(2, 6) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^6)$	$\text{SL}_6(\mathbb{C})$
9	6	симплектический грассманиан $\text{SGr}(3, 6) \subset \mathbb{P}^{13}$	$\text{Sp}_6(\mathbb{C})$
10	5	$G_2/P \subset \mathbb{P}^{13}$	G_2

в \mathbb{C}^6 , изотропные относительно невырожденной кососимметрической билинейной формы на \mathbb{C}^6 . За более подробными пояснениями и набросками доказательств мы отсылаем к работам [90], [91], [92] (см. также [50] для случая $g = 6$).

Рассмотрим чуть более подробно случай $g = 10$. Пусть G — простая алгебраическая группа исключительного типа G_2 . Напомним, что G имеет размерность 14 и ранг 2. Пусть $P \subset G$ — ее параболическая подгруппа размерности 9, стабилизатор старшего (длинного) корня. Тогда $\Omega_{18} = G/P \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}) = \mathbb{P}^{13}$ (присоединенное многообразие), где \mathfrak{g} — соответствующая алгебра Ли (типа G_2).

Группу G можно реализовать как группу автоморфизмов алгебры октонионов Кэли $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ над \mathbb{C} . Пусть $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^0 \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ — гиперплоскость чисто мнимых октонионов. Тогда присоединенное многообразие Ω_{18} может быть реализовано как подмногообразие в грассманиане $\text{Gr}(2, \mathbb{O}_{\mathbb{C}}^0)$ изотропных двумерных подпространств $\Lambda \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}}^0$ относительно умножения в $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Последнее означает, что ограничение умножения в $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ на подпространство Λ тривиально.

Оказывается, что многообразия Фано коиндекса 3 и рода 12 бывают только в размерности 3: они не могут быть представлены как *линейные* сечения многообразия большей размерности. Тем не менее имеется инвариантное описание (трехмерных) многообразий $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$: существует вложение $X_{22} \hookrightarrow \text{Gr}(3, 7)$ так, что образ состоит из 3-мерных подпространств в \mathbb{C}^7 , изотропных относительно трех линейно независимых билинейных кососимметрических форм $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1 \in \Lambda^2 \mathbb{C}^{7\vee}$ (см. [91], [94], [77]). Обратно, трехмерное подпространство $\Lambda \subset \Lambda^2 \mathbb{C}^{7\vee}$ задает многообразие Фано $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ как подмногообразие в $\text{Gr}(3, 7)$ при некотором условии *невырожденности* [94, § 5]. Это описание приводит также к следующей замечательной конструкции.

13.3.2. КОНСТРУКЦИЯ ([91]). Пусть

$$(13.3.3) \quad C = \{f(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{P}^2$$

— (необязательно гладкая) плоская кривая степени d . Рассмотрим множество наборов из n прямых

$$L_i = \{\ell_i(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{P}^2, \quad i = 1, \dots, n$$

таких, что существуют константы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющие условию

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i^d.$$

Объединение $\cup L_i$ таких прямых называется *полярным n -угольником к C* . Замыкание множества всех полярных n -угольников к C , рассматриваемых как элементы симметрической степени $S^n(\mathbb{P}^{2\nu})$, обозначается через $VSP(C, n)$ (variety of sums of powers).

Нас будут интересовать полярные шестиугольники к плоским кватрикам $C \subset \mathbb{P}^2$. Шестиугольник $\cup L_i$ называется *полным*, если существует четверка точек $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^2$ такая, что $\cup L_i$ состоит из прямых, соединяющих всевозможные пары точек $P_i, P_j, i \neq j$.

13.3.4. ТЕОРЕМА ([91], [92], [102]). *Предположим, что кватрика $C \subset \mathbb{P}^2$ не имеет полярных пятиугольников. Тогда многообразие $VSP(C, 6)$ полярных шестиугольников к C является горнштейновым многообразием Фано рода 12. Если, дополнительно, среди полярных шестиугольников к C нет полных, то многообразие $VSP(C, 6)$ неособо и имеет индекс 1.*

Обратно, любое (неособое) многообразие Фано X индекса 1 рода 12 с $\rho(X) = 1$ представляется в виде $VSP(C, 6)$ для некоторой кватрики $C \subset \mathbb{P}^2$.

Условие того, что кватрика (13.3.3) имеет полярный пятиугольник эквивалентно обращению в нуль определителя

$$\det \|\partial_i \partial_j f\|_{1 \leq i, j \leq 6},$$

где

$$\partial_1 := \partial^2 / \partial x_0^2, \quad \partial_2 := \partial^2 / \partial x_0 \partial x_1, \quad \dots, \quad \partial_6 := \partial^2 / \partial x_2^2.$$

Таким образом, общая кватрика $C \subset \mathbb{P}^2$ не имеет полярных пятиугольников. В частности, теорема 13.3.4 показывает, что имеется бирациональный изоморфизм между пространствами модулей многообразий Фано рода 12 индекса 1 и кривых рода 4.

13.3.5. ПРИМЕР. Если $f = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^2$, т.е. C — двойная коника, то многообразие $VSP(C, 6)$ является многообразием Мукай–Умемур (см. пример 13.5.1).

Отметим, что метод векторных расслоений для каждого значения рода $g(X)$ применяется индивидуально. Поэтому, для применения этого метода к классификации, необходима оценка рода $g(X) \leq 12$, $g \neq 11$, которая получается другими, например, бирациональными методами. с другой стороны, конструкции в теореме 13.3.1 инвариантны (в отличие от бирациональных перестроек вида (7.2.2)) и очень полезны, например, при изучении групп автоморфизмов [97], [78].

13.4. Ограниченность степени. Из классификационных теорем 13.1.1 и 0.1 следует ограниченность степени трехмерных многообразий Фано $(-K_X)^3 \leq 64$. Более грубая оценка может быть получена без использования классификации:

13.4.1. ТЕОРЕМА. *Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) = 1$. Тогда*

$$(-K_X)^3 \leq 72.$$

Ценность метода состоит в том, что он может быть применен к доказательству ограниченности степени (и особенностей) трехмерных многообразий Фано с терминальными особенностями [62], что немедленно влечет конечность числа алгебраических семейств таких многообразий [69].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство использует неравенство Богомолова–Мияоки [9]. Заметим, что поскольку $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$, то полустабильность не зависит от

выбора поляризации. Так как $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$, то по теореме Римана–Роха в стандартной форме (см., например, [32, гл. А, § 5, упр. 6.7]) имеем

$$(13.4.2) \quad (-K_X) \cdot c_2(X) = 24.$$

Возьмем общую поверхность $S \in |-nK_X|$, $n \gg 0$. Она является неособой поверхностью общего типа.

Сначала предположим, что пучок Ω_X^1 полустабильен. Ограничение $\Omega_X^1|_S$ также будет полустабильным [83]. Применяя неравенство Богомолова–Мияоки [9], получаем

$$n(-K_X)^3 = c_1(\Omega_X^1|_S)^2 \leq 3c_2(\Omega_X^1|_S) = -3nK_X \cdot c_2(\Omega_X) \leq 72n,$$

т.е. требуемое неравенство выполнено в этом случае.

Пусть теперь Ω_X^1 не является полустабильным. Тогда существует дестабилизирующий рефлексивный подпучок $\mathcal{E} \subset \Omega_X^1$ ранга $r < 3$ такой, что

$$\frac{1}{r}c_1(\mathcal{E}) \cdot (-K_X)^2 > \frac{1}{3}c_1(\Omega_X^1) \cdot (-K_X)^2 = -\frac{1}{3}(-K_X)^3.$$

Положим $\mathcal{F} := (\wedge^r \mathcal{E})^{\vee\vee}$. Тогда \mathcal{F} — рефлексивный подпучок в Ω_X^r ранга 1. Поскольку многообразие X неособо, то \mathcal{F} обратим. Рассмотрим дивизор $D = c_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{E})$ и запишем $D \sim tH$, где $-K_X = \iota H$, $\iota = \iota(X)$. То предыдущее неравенство переписывается как

$$-\frac{t}{\iota} < \frac{r}{3}.$$

Если $t > 0$, то $\kappa(X, \mathcal{F}) = \kappa(X, D) = 3$. Это противоречит результату из [9]: $\kappa(X, \mathcal{F}) \leq 1$ для любого $\mathcal{F} \subset \Omega_X^q$ ранга 1. Так как $H^0(X, \Omega_X^q) = 0$ при $q > 0$, то $t \neq 0$.

Таким образом,

$$0 < -t < \frac{1}{3}r\iota.$$

В частности, $\iota \geq 2$. Согласно вычислениям в доказательстве теоремы 1.8.1, имеем $\iota \leq 4$, а также $(-K_X)^3 = 64$ при $\iota = 4$ и $(-K_X)^3 = 54$ при $\iota = 3$. Таким образом, мы можем считать, что $\iota = 2$, $r = 2$ и $t = -1$.

Если пучок \mathcal{E} не является полустабильным, то имеется рефлексивный подпучок $\mathcal{V} \subset \mathcal{E} \subset \Omega_X^1$ неотрицательной степени. Это снова противоречит [9] и занулению $H^0(X, \Omega_X^q) = 0$.

Значит, пучок \mathcal{E} полустабильен. Так как $c_1(\mathcal{E}) = D = \frac{1}{2}K_X$, то, как и выше,

$$\frac{n}{4}(-K_X)^3 = D^2 \cdot S = c_1(\mathcal{E})^2 \cdot S = c_1(\mathcal{E}|_S)^2 \leq 4c_2(\mathcal{E}|_S).$$

Отметим, что коразмерность множества особенностей \mathcal{E} не меньше 3. Поэтому мы можем считать, что \mathcal{E} локально свободен в окрестности S . Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1/\mathcal{E} \longrightarrow 0$$

получаем

$$c_2(\Omega_X^1) = c_2(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) \cdot c_1(\Omega_X^1/\mathcal{E}) = c_2(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) \cdot c_1(\Omega_X^1) - c_1(\mathcal{E})^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 4n(-K_X) \cdot c_2(X) &= 4S \cdot c_2(\Omega_X^1) = 4S \cdot c_2(\mathcal{E}) + 4S \cdot D \cdot c_1(\Omega_X^1) - 4S \cdot D^2 \geq \\ &\geq \frac{n}{4}(-K_X)^3 + 2n(-K_X)^3 - n(-K_X)^3 = \frac{5n}{4}(-K_X)^3. \end{aligned}$$

Сокращая на n , получим

$$(-K_X)^3 \leq \frac{16}{5}(-K_X) \cdot c_2(X) < 77.$$

Так как $\iota = 2$, то степень $(-K_X)^3$ должна делиться на 8. Следовательно, $(-K_X)^3 \leq 72$. \square

Заметим, что (ко)касательное расслоение на трехмерных многообразиях Фано с числом Пикара 1 стабильно [96], но это не всегда верно для трехмерных многообразий Фано с большим числом Пикара [104].

Другой метод доказать ограниченность многообразий Фано основывается на изучении деформаций рациональных кривых. Он позволяет получать существенно более общие, но менее эффективные чем теорема 13.4.1 результаты.

13.4.3. ТЕОРЕМА ([73]). Пусть X — неособое многообразие Фано размерности n . Тогда его степень $(-K_X)^n$ ограничена константой $\text{const}(n)$, зависящей только от размерности.

13.4.4. СЛЕДСТВИЕ. Неособые многообразия Фано данной размерности лежат в конечном числе алгебраических семейств.

Идея доказательства теоремы — использовать технику деформаций рациональных кривых, для того чтобы показать, что общие две точки $P_1, P_2 \in X$ многообразия Фано X можно соединить неприводимой рациональной кривой C степени $-K_X \cdot C \leq \text{const}_1(n)$. Если бы степень $-K_X^n$ не была ограничена, то по асимптотической теореме Римана–Роха (1.7.2) можно было бы построить дивизор $D \in |-mK_X|$ имеющий в точке P_1 кратность $> m \text{const}_1(n)$. Но тогда кривая C содержалась бы в D , что противоречит общности выбора точки P_2 . Из этого следует ограниченность степени $(-K_X)^n$, а, значит, и конечность выбора двух старших членов в многочлене Гильберта (см. (1.7.2)).

Для доказательства следствия сначала из теоремы выводится конечность числа многочленов Гильберта многообразий Фано (в фиксированной размерности). Тогда конечность числа алгебраических семейств следует из общего результата [82].

Обобщение на случай особых многообразий Фано было получено недавно К. Биркаром [44].

13.5. Векторные поля и автоморфизмы. Напомним, что группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ любого многообразия Фано X является линейной алгебраической группой (теорема 1.3.1 (vii)). Поэтому группа $\text{Aut}(X)$ бесконечна тогда и только тогда, когда ее связная компонента единицы нетривиальна.

Пусть X — многообразие Фано размерности n . Для касательного расслоения \mathcal{T}_X имеем

$$\mathcal{T}_X \simeq (\Omega_X^1)^\vee \simeq \Omega_X^{n-1} \otimes \mathcal{O}_X(-K_X).$$

Тогда по теореме Кодаиры–Накано об обращении в нуль [4, гл. 1, § 2]

$$H^q(X, \mathcal{T}_X) = H^q(X, \Omega_X^{n-1} \otimes \mathcal{O}_X(-K_X)) = 0 \quad \text{при } q > 1.$$

Заметим, что пространство $H^0(X, \mathcal{T}_X)$ естественным образом отождествляется с касательным пространством к связной компоненте единицы $\text{Aut}(X)^0$ группы автоморфизмов [37, § 2.3], а $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ — с касательным пространством к версальному пространству деформаций X (см. [68]). Так как $H^2(X, \mathcal{T}_X) = 0$, то деформации X не имеют

препятствий и поэтому версальное пространство деформаций неособо в соответствующей точке и имеет размерность $h^1(X, \mathcal{T}_X)$. Пусть теперь многообразие X трехмерно. Тогда по теореме Римана–Роха

$$h^0(X, \mathcal{T}_X) - h^1(X, \mathcal{T}_X) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 - \frac{19}{24}(-K_X) \cdot c_2(X) + \frac{1}{2}c_3(X).$$

Учитывая соотношения

$$(-K_X) \cdot c_2(X) = 24\chi(X, \mathcal{O}_X) = 24$$

(см. (13.4.2)) и

$$c_3(X) = \chi_{\text{top}}(X) = 2 + 2\rho(X) - 2h^{1,2}(X),$$

получим

$$h^0(X, \mathcal{T}_X) - h^1(X, \mathcal{T}_X) = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + \rho(X) - h^{1,2}(X) - 18.$$

Мы можем переписать эту формулу в виде

$$h^0(X, \mathcal{T}_X) - h^1(X, \mathcal{T}_X) = g(X) + \rho(X) - h^{1,2}(X) - 19.$$

В частности, если группа автоморфизмов X конечна, то размерность пространства деформаций равна

$$h^{1,2}(X) + 19 - g(X) - \rho(X).$$

Рассмотрим один пример. В семействе многообразий $X = X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ индекса 1 рода 12 с $\rho(X) = 1$ имеется одно выделенное, являющееся квазиоднородным относительно действия группы $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Конструкция аналогична конструкции в замечании 3.6.7:

13.5.1. ПРИМЕР ([95]). Рассмотрим действие группы $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ на пространстве $M_{12} \oplus \mathbb{C}$ и его проективизации $\mathbb{P}(M_{12} \oplus \mathbb{C})$. Многочлен

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2(x_1^{10} + 11x_1^5x_2^5 + x_2^{10}) \in M_{12}$$

является полуинвариантом бинарной группы икосэдра $\text{Ico} \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$ [33, гл. 4]. Тогда замыкание

$$\overline{\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [f + 1]} \subset \mathbb{P}(M_{12} \oplus \mathbb{C})$$

орбиты

$$\text{PSL}_2(\mathbb{C}) \cdot [f + 1] = \text{SL}_2(\mathbb{C})/\text{Ico}$$

является многообразием Фано $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$. Оно называется *многообразием Мукая–Умемуры*.

Заметим, что существует только четыре типа трехмерных многообразий Фано с бесконечной группой автоморфизмов и $\rho(X) = 1$:

13.5.2. ТЕОРЕМА (см. [22], [78], [75]). Пусть X — трехмерное многообразие Фано с $\rho(X) = 1$. Предположим, что его группа автоморфизмов бесконечна.

Если $\iota(X) > 1$, то X изоморфно одному из следующих трех многообразий:

$$\mathbb{P}^3, \quad Q_2 \subset \mathbb{P}^4, \quad X_5 \subset \mathbb{P}^6.$$

Если же $\iota(X) = 1$, то $g(X) = 12$ и имеются три возможности:

- (i) $\text{Aut}(X) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ и X — многообразие Мукая–Умемуры,
- (ii) $\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ и соответствующее многообразие X единственно с точностью до изоморфизма,
- (iii) $\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{G}_m \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и соответствующее многообразие X принадлежит одномерному семейству.

Для всех этих многообразий группа срединных когомологий $H^3(X, \mathbb{Z})$ тривиальна (см. следствие 12.5).

14. Дополнение: сведения из теории Мори

14.1. Пусть X — полное многообразие. Через $Z_k(X)$ мы обозначим группу k -мерных циклов на X , т.е. свободную абелеву группу порожденную полными приведенными неприводимыми подмногообразиями размерности k в X . Аналогично, через $Z^k(X)$ мы обозначим группу циклов коразмерности k на X .

Говорят, что циклы $Z, Z' \in Z_1(X)$ численно эквивалентны (это обозначается $Z \approx Z'$), если $L \cdot Z = L \cdot Z'$ для всех $L \in \text{Pic}(X)$; по двойственности определена численная эквивалентность на $\text{Pic}(X)$. Билинейная форма $\text{Pic}(X) \times Z_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ — индуцирует невырожденную билинейную форму

$$N^1(X) \times N_1(X) \rightarrow \mathbb{R},$$

где $N^1(X) := (\text{Pic}(X)/\approx) \otimes \mathbb{R}$ и $N_1(X) := (Z_1(X)/\approx) \otimes \mathbb{R}$. Для 1-цикла Z через $[Z]$ мы будем обозначать его класс в $N_1(X)$.

Согласно теореме Нерона-Севери, пространство $N^1(X)$ конечномерно. Его размерность (которая совпадает с размерностью $N_1(X)$) называется *числом Пикара* многообразия X и обозначается $\rho(X)$. По конструкции, каждый дивизор Картье определяет линейную функцию на $N_1(X)$.

В пространстве $N_1(X)$ рассмотрим выпуклый конус $\text{NE}(X)$, порожденный всеми эффективными 1-циклами. Обозначим через $\overline{\text{NE}}(X)$ его замыкание. Таким образом, $\overline{\text{NE}}(X)$ — замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном пространстве $N_1(X)$. Он называется *конусом Мори*. Более того, $\overline{\text{NE}}(X)$ порождает $N_1(X)$. Отметим однако, что элементы $\overline{\text{NE}}(X)$ необязательно представляются эффективными 1-циклами и необязательно имеют рациональные коэффициенты.

Конус $\overline{\text{NE}}(X)$ содержит много важной информации о многообразии. В частности, в терминах этого конуса можно сформулировать критерий обильности дивизоров:

14.1.1. ТЕОРЕМА (критерий обильности Клеймана [67], [74]). *Дивизор Картье H обилен тогда и только тогда, когда он определяет строго положительную функцию на $\overline{\text{NE}}(X) \setminus \{0\}$.*

Дивизор D на X называется *численно эффективным*, если $D \cdot L \geq 0$ для любой кривой L на X . Иначе говоря, дивизор численно эффективен, если соответствующая линейная функция на $N_1(X)$ неотрицательна на конусе $\overline{\text{NE}}(X)$. Классы численно эффективных дивизоров образуют замкнутый выпуклый конус $\text{Nef}(X) \subset N^1(X)$ двойственный конусу $\overline{\text{NE}}(X)$. По теореме 14.1.1 классы обильных дивизоров заполняют внутренность $\text{Nef}(X)$.

14.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый выпуклый конус с вершиной в 0, порождающий все пространство \mathbb{R}^n . Луч $R \subset C$ с вершиной в 0 называется *экстремальным*, если для любых элементов $z_1, z_2 \in C$ из включения $z_1 + z_2 \in R$ следует, что $z_1, z_2 \in R$.

Можно показать, что луч $R \subset C$ является экстремальным тогда и только тогда, когда существует линейная функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(z) \geq 0$ для всех $z \in C$ и $f(z) = 0$ только если $z \in R$. Такая функция называется *опорной* для луча R .

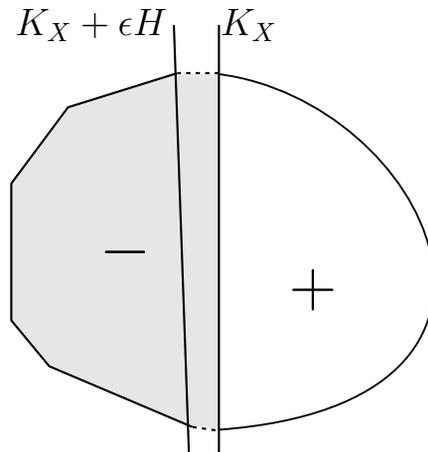


Рис. 2. Конус Мори $\overline{NE}(X)$ (трансверсальное сечение)

14.3. ТЕОРЕМА (о конусе, С. Мори [87], [2, теорема 4.7]). Пусть X — неособое проективное многообразие и пусть H — обильный дивизор на X . Для любого $\varepsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{NE}(X)$ таких, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч R_i порождается классом неприводимой рациональной кривой C_i такой, что

$$(14.3.1) \quad 0 < -K_X \cdot C_i \leq \dim(X) + 1.$$

Конус $\overline{NE}(X)$ порождается конусом

$$\overline{NE}(X) \cap \{z \mid (K_X + \varepsilon H) \cdot z \geq 0\}$$

и лучами R_i (см. рис. 2).

14.4. ТЕОРЕМА (о свободе от базисных точек [2, теорема 9.3]). Пусть X — неособое проективное многообразие и пусть M — численно эффективный дивизор Картье на X такой, что дивизор $aM - K_X$ является численно эффективным и объемным. Тогда существует число b_0 такое, что линейная система $|bM|$ не имеет базисных точек при всех $b \geq b_0$.

14.4.1. СЛЕДСТВИЕ. В обозначениях теоремы 14.4 существует стягивание $\varphi: X \rightarrow Z$ на нормальное проективное многообразие Z и обильный дивизор A на Z такой, что $M = \varphi^*A$.

14.5. ТЕОРЕМА (о стягивании [2, теорема 5.2]). Пусть X — неособое проективное многообразие и пусть $R \subset \overline{NE}(X)$ — экстремальный луч, отрицательно относительно K_X (т.е. такой, что $K_X \cdot R < 0$). Тогда существует стягивание $\varphi: X \rightarrow Z$ на нормальное проективное многообразие Z такое, что образ $\varphi(\ell)$ кривой $\ell \subset X$ — точка тогда и только тогда, когда $[\ell] \in R$. Стягивание $\varphi: X \rightarrow Z$ однозначно определяется лучом R .

Стягивание $\varphi: X \rightarrow Z$, рассмотренное выше, называется *стягиванием луча* R .

Следует отметить, что мы формулируем теоремы 14.3, 14.4 и 14.5 для случая неособых многообразий. Однако они верны (за исключением оценки (14.3.1) в теореме 14.3) в значительно большей общности: вместо неособости многообразия X можно считать, что оно имеет лишь логтерминальные особенности, см., например, [2].

14.5.1. СЛЕДСТВИЕ. В обозначениях теоремы 14.5 пусть D — дивизор Картье на X такой, что $D \cdot R = 0$. Тогда $D = \varphi^* M$ для некоторого дивизора Картье M на Z . Следовательно, имеет место точная последовательность

$$(14.5.2) \quad 0 \longrightarrow \text{Pic}(Z) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Pic}(X) \xrightarrow{\cdot \ell} \mathbb{Z}$$

где $[\ell] \in R$. В частности, $\text{Pic}(X) \simeq \text{Pic}(Z) \oplus \mathbb{Z}$ и $\rho(Z) = \rho(X) - 1$.

Определим длину экстремального луча как

$$(14.5.3) \quad \mu(R) := \min\{-K_X \cdot \ell \mid \ell - \text{рациональная кривая}, [\ell] \in R\}.$$

Кривую для которой достигается этот минимум, мы назовем *минимальной рациональной кривой* луча R . Ясно, что порядок коядра в последовательности (14.5.2) делит длину экстремального луча $\mu(R)$.

Для неособых многообразий размерности 2 и 3 экстремальные лучи полностью классифицированы. Вначале обсудим случай размерности 2.

14.6. ТЕОРЕМА (см. [87]). Пусть X — неособая проективная поверхность, пусть R — экстремальный луч на X и пусть ℓ — минимальная рациональная кривая на X , порождающая R . Тогда имеет место один из следующих случаев:

- (i) $\mu(R) = 1$ и ℓ является (-1) -кривой;
- (ii) $\mu(R) = 2$, X имеет структуру \mathbb{P}^1 -расслоения над кривой и ℓ — слой этого расслоения;
- (iii) $\mu(R) = 3$, $X \simeq \mathbb{P}^2$ и ℓ — прямая.

Следующая теорема была доказана С. Мори в 1982 г.

14.7. ТЕОРЕМА ([87]). Пусть X — неособое трехмерное проективное многообразие и пусть R — экстремальный луч на X . Пусть ℓ — минимальная рациональная кривая на X , порождающая R и пусть $f: X \rightarrow Z$ — стягивание луча R .

Если R численно эффективен (т.е. $D \cdot R \geq 0$ для любого эффективного дивизора D), то Z неособо и имеет место один из следующих случаев:

тип	$\dim(Z)$	$f: X \rightarrow Z$	$\mu(R)$
C_1	2	расслоение на коники с нетривиальной кривой вырождения	1
C_2		\mathbb{P}^1 -расслоение	2
D_1	1	расслоение на поверхности дель Пеццо степени ≤ 6	1
D_2		расслоение на квадрики	2
D_3		\mathbb{P}^2 -расслоение	3
F	0	X — многообразие Фано с $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$	$\iota(X)$

Если R не является численно эффективным, то f — бирациональное стягивание неприводимого исключительного дивизора E , причем f является раздутием подмногообразия $f(E)$ (с приведенной структурой). Возможен один из следующих случаев:

тип		$\mu(R)$
B_1	$f(E) \subset Z$ — гладкая кривая, ℓ — слой линейчатой поверхности E , Z — неособое многообразие	1
B_2	$f(E) \in Z$ — неособая точка, $E \simeq \mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, $\ell \subset E$ — прямая	2
B_3	$f(E) \in Z$ — обыкновенная двойная точка, $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1)$, ℓ — образующая $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (образующие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ численно эквивалентны на X)	1
B_4	$f(E) \in Z$ — двойная точка аналитически эквивалентная гиперповерхностной особенности $x_1x_2 + x_3^2 + x_4^3 = 0$, E — квадратичный конус в \mathbb{P}^3 , $\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_E(-1)$, ℓ — образующая конуса	1
B_5	$f(E) \in Z$ — четырехкратная негорнштейнова точка аналитически эквивалентная факторособенности $\mathbb{C}^3/\{\pm \text{id}\}$, $E \simeq \mathbb{P}^2$, $\mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, ℓ — прямая	1

К сожалению, в высших размерностях ситуация значительно сложнее и полная классификация далека от завершения. Однако имеется очень много частичных результатов в данном направлении (см., например, статьи [41], [40], [61] и обзоры [39], [29]).

14.7.1. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае C_2 стягивание f — гладкий морфизм и любой его слой является неособой рациональной кривой. Если, дополнительно, поверхность Z рациональна, то $\text{Gr}(Z) = 0$ (см., например, [98]). Поэтому морфизм f имеет рациональное сечение и он является локально тривиальным в топологии Зарисского \mathbb{P}^1 -расслоением.

14.7.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\dim(Z) \neq 2$ или $\dim(Z) = 2$ и морфизм не является гладким, то кривую ℓ , порождающую луч R , можно выбрать так, что последовательность (14.5.2) будет точна также и справа:

$$(14.7.3) \quad 0 \longrightarrow \text{Pic}(Z) \xrightarrow{f^*} \text{Pic}(X) \xrightarrow{\cdot \ell} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Это верно также и в случае $\dim(Z) = 2$ для гладкого морфизма f , если поверхность Z рациональна (см. замечание 14.7.1).

14.7.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть стягивание f бирационально. Как и в 2.2, можно записать стандартную формулу

$$K_X = f^*K_Z + \alpha E,$$

где $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Пересекая обе части этого равенства со стягиваемой кривой ℓ , получаем, что α принимает следующие значения:

тип	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
α	1	2	1	1	1/2

14.8. Флопы. Бирациональное стягивание $\theta: V \rightarrow V_0$ называется *малым*, если его исключительное множество имеет коразмерность ≥ 2 . Если в этом случае θ — не изоморфизм, то многообразие V_0 должно быть особым [18, гл. 2, § 4, теорема 2].

14.8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V — неособое проективное многообразие и пусть $\theta: V \rightarrow V_0$ — малое бирациональное стягивание такое, что канонический класс K_V тривиален на слоях и $\rho(V/V_0) = 1$. *Флопом* для θ называется следующая коммутативная диаграмма:

$$(14.8.2) \quad \begin{array}{ccc} V & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & V' \\ & \searrow \theta & \swarrow \theta' \\ & & V_0 \end{array}$$

где отображение χ не является изоморфизмом, θ' — также малое бирациональное стягивание, для которого канонический класс $K_{V'}$ тривиален на слоях и $\rho(V'/V_0) = 1$.

Отметим, что кривые в слоях морфизма θ (соотв., θ') порождают экстремальные луч $R \subset \overline{NE}(V)$ (соотв., $R' \subset \overline{NE}(V')$). Однако эти экстремальные лучи тривиально пересекают канонический класс, поэтому к ним, вообще говоря, нельзя применить теорему 14.5 и следствия из нее.

Так как многообразие V неособо по нашему предположению, то

$$\text{Exc}(\theta) = \theta^{-1}(\text{Sing}(V_0)) \quad \text{и} \quad \text{Exc}(\theta') = \theta'^{-1}(\text{Sing}(V_0))$$

по теореме о чистоте исключительного множества [18, гл. 2, § 4, теорема 2]. Поэтому отображение χ является изоморфизмом на множествах $V \setminus \text{Exc}(\theta)$ и $V' \setminus \text{Exc}(\theta')$. В частности, имеются канонические изоморфизмы

$$\chi_*: Z^1(V) \xrightarrow{\cong} Z^1(V'), \quad \chi_*: \text{Cl}(V) \xrightarrow{\cong} \text{Cl}(V').$$

Согласно теореме 14.4 существует дивизор D на V такой, что

$$\text{Pic}(V) = \theta^* \text{Pic}(V_0) \oplus D \cdot \mathbb{Z}.$$

Пусть $D' := \chi_* D$ — его собственный прообраз на V' . Тогда

$$\text{Cl}(V') = \theta'^* \text{Pic}(V_0) \oplus D' \cdot \mathbb{Z}.$$

Так как $\text{Pic}(V') \neq \theta'^* \text{Pic}(V_0)$, то некоторая кратность D' должна быть дивизором Картье. Ясно, что $D' \cdot R' \neq 0$. Пусть A — обильный дивизор на V_0 . По критерию обильности Клеймана 14.1.1 дивизор $aD' + b\theta'^* A$ обилен на V' для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \gg 0$. Поэтому многообразие V' изоморфно проективному спектру

$$\text{Proj } R(V', D' + n\theta'^* A).$$

Поскольку χ является изоморфизмом в коразмерности 1, то алгебры $R(V, aD + b\theta^* A)$ и $R(V', aD' + b\theta'^* A)$ естественно изоморфны. Следовательно,

$$V' \simeq \text{Proj } R(V, aD + b\theta^* A).$$

Это означает, что флоп единственен (если он существует), т.е. для заданного стягивания θ правая часть диаграммы (14.8.2) восстанавливается однозначно. Существование флопа эквивалентно конечной порожденности алгебры $R(V, aD + b\theta^* A)$.

Приведем простейший пример.

14.8.3. ПРИМЕР (флоп Атья–Куликова [42]). Предположим, что в предыдущих обозначениях V — неособое трехмерное многообразие и исключительное множество морфизма θ состоит из одной неособой рациональной кривой $C \subset V$ такой, что

$$\mathcal{N}_{C/V} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

Пусть $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ — раздутие C и пусть E — исключительный дивизор. Тогда

$$(14.8.4) \quad E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \quad \mathcal{O}_E(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1).$$

Согласно [5], дивизор E может быть стянут (в аналитической категории) в другом направлении $\sigma': \tilde{V} \rightarrow V'$ над V_0 (см. рис. 3).

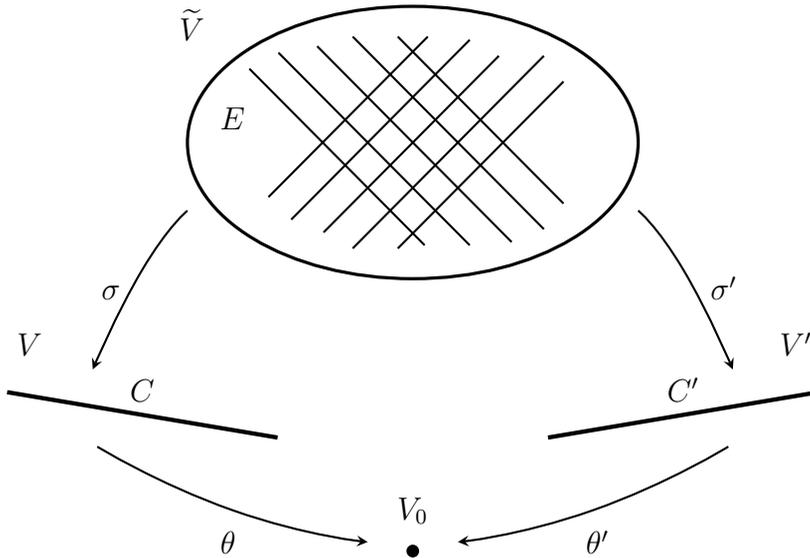


Рис. 3.

При этом многообразие V' неособо, а σ' — раздутие неособой рациональной кривой $C' := \sigma'(E)$. Мы также имеем $K_{\tilde{V}} - E = \sigma'^* K_{V'}$. Отсюда $K_{V'} \cdot C' = 0$. Дивизор E на \tilde{V} может быть стянут в точку $(V_0 \ni o)$, которая является обыкновенной двойной. Это стягивание индуцирует стягивания $\theta: V \rightarrow V_0$ и $\theta': V' \rightarrow V_0$. Получим диаграмму (14.8.2), где $\chi := \theta' \circ \theta^{-1}$.

Обратно, предположим, что нам задана обыкновенная двойная точка $(V_0 \ni o)$. с точностью до аналитического изоморфизма мы можем считать, что она задана в \mathbb{C}^4 уравнением

$$(14.8.5) \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

Раздутие начала координат дает неособое многообразие \tilde{V} с исключительным дивизором E , который является квадрикой в \mathbb{P}^3 с уравнением (14.8.5) (ср. с (14.8.4)). Он может быть стянут в двух направлениях и мы получим ситуацию на рис. 3. При этом стягивания θ и θ' являются раздутиями плоскостей $\{x_1 = x_3 = 0\}$ и $\{x_1 = x_4 = 0\}$ на V_0 .

Аналогичная, но более сложная конструкция имеется в случае, когда $C \subset V$ — стягиваемая неособая рациональная кривая с нормальным расслоением

$$\mathcal{N}_{C/V} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2).$$

Конструкция называется *пагодой М. Руда* [99]. В общем случае существование трехмерных флопов следует из следующего простого наблюдения Я. Коллара.

14.8.6. ТЕОРЕМА ([70]). Пусть V — неособое¹ трехмерное многообразие и пусть $\theta: V \rightarrow V_0$ — малое бирациональное стягивание такое, что канонический класс K_V тривиален на слоях и $\rho(V/V_0) = 1$. Тогда флоп $\chi: V \dashrightarrow V'$ существует и многообразие V' неособо.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Применим теорему о свободе от базисных точек 14.4 к дивизору $M = K_V + \theta^*A$, где A — очень обильный дивизор на V_0 . Получим, что линейная система $|b(K_V + \theta^*A)|$ не имеет базисных точек при всех $b \gg 0$. Из теоремы 14.4 также следует, что для любого $b \gg 0$ существует дивизор Картье N_b на V_0 такой, что $b(K_V + \theta^*A) = \theta^*N_b$. Следовательно, существует дивизор Картье N на V_0 такой, что $K_V = \theta^*N$. Ясно, что $N = \theta_*K_V = K_{V_0}$. Значит, канонический класс K_{V_0} является дивизором Картье и $K_V = \theta^*K_{V_0}$.

Так как θ не стягивает дивизоров, то многообразие V_0 имеет лишь терминальные (горенштейновы) особенности. Возьмем дивизор D на V такой, что $-D$ является θ -обильным. Тогда D не может быть полным прообразом дивизора Картье на V_0 . Следовательно, $D_0 := \theta_*D$ — дивизор Вейля, не являющийся дивизором Картье. В частности, многообразие V_0 особо. Далее, рассмотрим связную компоненту C исключительного множества $\text{Exc}(\theta)$ и пусть $o := \theta(C)$. Рассмотрим V и V_0 как малые аналитические окрестности кривой C и точки o , соответственно. Согласно классификации трехмерных терминальных особенностей (см. [99, § 1] или [74, § 5.3]), особенность $(V_0 \ni o)$ — гиперповерхностная кратности 2, т.е. локально она может быть задана в \mathbb{C}^4 уравнением с ненулевой квадратичной частью. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса [4, гл. 0, § 1], это уравнение, после аналитической замены координат, может быть записано в виде

$$y^2 = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

(см., например, [26, следствие 13.5]). Рассмотрим инволюцию

$$\tau: (V_0 \ni o) \longrightarrow (V_0 \ni o), \quad (x_1, x_2, x_3, y) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, -y)$$

и фактор

$$\pi: (V_0 \ni o) \longrightarrow (\mathbb{C}_{x_1, x_2, x_3}^3 \ni 0).$$

Положим локально $(V' \supset C') = (V \supset C)$, но структурный морфизм $\theta': V' \rightarrow V_0$ определим как композицию с инволюцией: $\theta' = \theta \circ \tau$. Таким образом, мы полагаем $\chi = \theta \circ \tau \circ \theta^{-1}$ и $D' = \theta'^{-1}(\tau(D_0))$. Ясно, что отображение χ является изоморфизмом, на множествах $V \setminus C$ и $V' \setminus C'$. Ясно также, что $D_0 + \tau(D_0)$ — инвариантный дивизор на $(V \supset C)$ и $D_0 + \tau(D_0) = \pi^*B$ для некоторого дивизора (Картье) B на \mathbb{C}^3 . Поскольку сейчас наша ситуация локальна, то мы можем считать, что $\tau(D_0) \sim -D_0$ и $D' \sim -D$ (при нашем отождествлении V и V'). Поэтому дивизор D' положителен на всех компонентах кривой $C = C'$, т.е. является θ' -обильным. Далее конструкция глобализуется при помощи “переклейки” окрестности $(V \supset C)$. Проективность многообразия V' следует из проективности морфизма θ' . За деталями мы отсылаем к работе [70], а также [74, гл. 6]. \square

¹Теорема верна в гораздо более общей ситуации. Рассуждения приведенные в доказательстве ниже работают в случае, когда особенности V — терминальные (и тогда таковы же и особенности многообразия V').

В некоторых случаях конструкцию с инволюцией τ и двойным накрытием π можно глобализовать, т.е. τ и π могут быть определены на всем проективном многообразии (см. пример 7.9.1). Но это возможно довольно редко.

14.8.7. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 14.8.6 существует изоморфизм исключительных кривых $\text{Exc}(\theta) \simeq \text{Exc}(\theta')$ (как абстрактных многообразий). При этом для любой компоненты $C_i \subset \text{Exc}(\theta)$ и соответствующей ей компоненты $C'_i \subset \text{Exc}(\theta')$ имеем

$$D \cdot C_i = -D' \cdot C'_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из конструкции и того, что τ индуцирует умножение на -1 в локальной группе классов дивизоров Вейля

$$\text{Cl}(V_0 \ni o) \simeq \text{Pic}(V \supset C) \simeq \text{Pic}(V' \supset C'). \quad \square$$

14.8.8. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 14.8.6 пусть $H_0 \subset V_0$ — общее гиперплоское сечение, проходящее через точку o . Положим $H := \theta^{-1}(H_0)$ и $H' := \theta'^{-1}(H_0)$. Тогда H_0 , H и H' — поверхности с лишь дювалевскими особенностями и ограничения $\theta_H: H \rightarrow H_0$ и $\theta'_H: H' \rightarrow H_0$ соответствующих отображений $\theta: V \rightarrow V_0$ и $\theta': V' \rightarrow V_0$ крепантны, т.е. $\theta_H^* K_{H_0} = K_H$ и $\theta'^*_H K_{H_0} = K_{H'}$. В частности, минимальное разрешение $\tilde{H}_0 \rightarrow (H_0 \ni 0)$ пропускается через H и H' , т.е. поверхности H и H' получают ся стягиванием определенных конфигураций (-2) -кривых на \tilde{H}_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно классификации (см. [99, § 1] или [74, § 5.3]), особенность $(V_0 \ni o)$ — гиперповерхностная изолированная типа cDV , т.е. общее гиперплоское сечение H_0 , проходящее через o имеет лишь дювалевскую особенность в o . Согласно обращению присоединения [74, теорема 5.50], пара (V_0, H_0) имеет чисто логтерминальные особенности. Поскольку морфизм θ логкрепантен относительно $K_V + H$, то пара (V, H) также имеет чисто логтерминальные особенности [72, лемма 3.10]. Снова по обращению присоединения поверхность имеет лишь дювалевские особенности. Рассуждения для H' полностью аналогичны. Остальное следует из формулы присоединения. \square

14.8.9. СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 14.8.6 исключительные кривые $\text{Exc}(\theta)$ и $\text{Exc}(\theta')$ являются объединением гладких рациональных кривых, которые образуют комбинаторное дерево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями предыдущего следствия. Рассмотрим слой $C = \theta^{-1}(o) \subset H \subset V$ (рассуждения для правой части флошовой диаграммы аналогичны). Пусть $E = \sum E_i \subset \tilde{H}_0$ — исключительный дивизор над o минимального разрешения особенности $(H_0 \ni o)$ и пусть $E' \subset E$ — сумма компонент, стягиваемых на H . Тогда C является образом дивизора $E - E'$. В частности, все компоненты C рациональны и их конфигурация образует комбинаторное дерево. Для гладкости компоненты C_i необходимо и достаточно, чтобы ее собственный прообраз $E_i \subset E$ пересекал каждый фундаментальный цикл Z_j особенности $P_j \in H$ по 1 [26, § 10]. Но это непосредственно следует из классификации дювалевских особенностей [26, § 10, упр. 7] (рассмотрите все случаи!). \square

Можно привести другое, более универсальное доказательство этого факта, использующего зануление $R^1\theta_*\mathcal{O}_V$ (по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль). Заинтересованному читателю предлагается разобраться в этом самостоятельно.

Задачи. 1. Пусть W — неособое трехмерное многообразие и пусть $C_1, C_2 \subset W$ — гладкие кривые, пересекающиеся трансверсально. Выполним следующие действия: $V \rightarrow W$ — последовательное раздутие сначала C_1 , затем собственного прообраза C_2 ; $V' \rightarrow W$ — последовательное раздутие сначала C_2 , затем собственного прообраза C_1 . Покажите, что V и V' включаются в флопповую диаграмму над W , где $V_0 \rightarrow W$ — раздутие особой кривой $C_1 \cup C_2$.

15. Дополнение: многообразия минимальной степени

В этом разделе мы приведем необходимые сведения о многообразиях минимальной степени. Это классические, хорошо известные результаты. Они многократно используются в курсе.

15.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие (т.е. неприводимая приведенная схема), не лежащее ни в какой гиперплоскости $\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$. Тогда

$$(15.1.1) \quad \deg X \geq \text{codim } X + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части неравенства (15.1.1) остаются неизменными при переходе к гиперплоскому сечению многообразия X , и если гиперплоское сечение достаточно общее и $\dim(X) > 1$, то для него выполнено условие леммы. Следовательно, можно считать $\dim(X) = 1$. Пересекая кривую X достаточно общей гиперплоскостью, мы получим конечное число (равное $\deg X$) точек, порождающих \mathbb{P}^N . Неравенство (15.1.1) для них, очевидно, выполнено. Предложение доказано. \square

Многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$, не лежащие в гиперплоскости, для которых достигается равенство в (15.1.1), т.е. такие, что

$$(15.1.2) \quad \deg X = \text{codim } X + 1,$$

называются *многообразиями минимальной степени*. Одномерные многообразия минимальной степени — это рациональные нормальные кривые (см., например, [4, гл. 1, § 4] или [32, гл. 4, § 3]).

15.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие минимальной степени. Тогда градуированная алгебра $R(X, \mathcal{O}_X(1))$ порождается своей компонентой степени 1, т.е. естественный гомоморфизм градуированных алгебр

$$\alpha: S^*H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \longrightarrow R(X, \mathcal{O}_X(1))$$

является эпиморфизмом. Ядро гомоморфизма α порождено элементами степени 2, т.е. многообразие X является пересечением квадрик, его содержащих.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая общие гиперплоские сечения, индукцией по размерности (см. теорему 3.3.9) утверждение сводится к случаю, когда X — рациональная нормальная кривая степени N и \mathbb{P}^N . Тогда $X \simeq \mathbb{P}^1$ и алгебра $R(X, \mathcal{O}_X(1))$ является подалгеброй Веронезе в $R(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$:

$$R(X, \mathcal{O}_X(1)) \simeq R(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(N)) \subset R(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \simeq \mathbb{C}[x_0, x_1].$$

Этот случай оставляется читателю для самостоятельного разбора (ср. [32, гл. 4, § 3, упр. 3.4]). \square

Типичными примерами многообразий минимальной степени являются проективизации векторных расслоений на \mathbb{P}^1 . Напомним, что согласно теореме Гротендика любое векторное расслоение на \mathbb{P}^1 разложимо (см., например, [32, гл. V, упр. 2.6]).

15.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ ([101, § 1], ср. [32, гл. 5, § 2]). Рассмотрим векторное расслоение

$$\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_m)$$

ранга m на \mathbb{P}^1 , где $d_i \geq 0$ для всех i . Положим $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$, и пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — естественная проекция. Пусть $\mathcal{M} := \mathcal{O}_{X/\mathbb{P}^1}(1)$ — тавтологический обратимый пучок Гротендика на X (т.е. обратимый пучок такой, что $\pi_*\mathcal{O}_{X/\mathbb{P}^1}(1) = \mathcal{E}$). Имеют место следующие утверждения.

(i) $H^q(X, \mathcal{M}^{\otimes p}) = 0$ при $q \geq 1, p \geq 0$ и

$$h^0(X, \mathcal{M}) = h^0(\mathbb{P}^1, \pi_*\mathcal{M}) = \sum (d_i + 1) = m + \sum d_i + 1.$$

(ii) Пучок \mathcal{M} порождается глобальными сечениями и задает бирациональный на свой образ морфизм

$$(15.3.1) \quad \Phi_{|\mathcal{M}|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^{\sum d_i + m - 1}.$$

Пучок \mathcal{M} очень обилен тогда и только тогда, когда все d_i строго положительны.

(iii) Степень образа $\Phi_{|\mathcal{M}|}(X)$ вычисляется по формуле

$$\deg \Phi_{|\mathcal{M}|}(X) = \sum d_i.$$

В частности, $\Phi_{|\mathcal{M}|}(X)$ — многообразие минимальной степени, т.е. для него достигается равенство в (15.1.1).

(iv) Положим

$$\mathcal{E}' := \bigoplus_{d_i > 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i), \quad m' := \text{rk } \mathcal{E}' = \#\{i \mid d_i > 0\},$$

$$\mathcal{E}'' := \bigoplus_{d_i = 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i), \quad m'' := \text{rk } \mathcal{E}'' = \#\{i \mid d_i = 0\}.$$

Если $\Phi_{|\mathcal{M}|}$ не является изоморфизмом, то образ $\Phi_{|\mathcal{M}|}(X)$ — конус с вершиной $\mathbb{P}^{m''-1} \subset \mathbb{P}^{\sum d_i + m - 1}$ над многообразием $X' = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}') \subset \mathbb{P}^{\sum d_i + m' - 1}$, а исключительное множество $\Phi_{|\mathcal{M}|}$ — многообразие $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E}'') \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{m''-1}$.

(v) Имеет место изоморфизм пучков

$$\mathcal{O}_X(-K_X) \simeq \mathcal{M}^{\otimes m} \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \left(2 - \sum d_i \right).$$

Если пучок \mathcal{M} очень обилен (т.е. $d_i > 0 \forall i$), то образ при вложении (15.3.1) называется *рационально-линейчатым многообразием* (*rational scroll*). Обычно рационально-линейчатое многообразие рассматривается вместе с поляризацией \mathcal{M} (т.е. фиксируется тавтологическое расслоение $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$).

15.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие минимальной степени. Тогда X является одним из следующих многообразий:

- (i) \mathbb{P}^N ;
- (ii) квадрика в $Q \subset \mathbb{P}^N$;
- (iii) рациональная нормальная кривая $C_N \subset \mathbb{P}^N$;

- (iv) рационально-линейчатое многообразие (вложенное тавтологической линейной системой);
- (v) поверхность Веронезе $S = S_4 \subset \mathbb{P}^5$;
- (vi) конус над многообразием типа (iii), (iv) или (v).

В частности, многообразие X нормально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по размерности многообразия X . Обозначим через H общее гиперплоское сечение X . Положим также $d := \deg X$, $n = \dim(X)$.

Случай $\dim(X) = 1$ хорошо известен: неприводимая кривая степени N в \mathbb{P}^N — это рациональная нормальная кривая.

Пусть $\dim(X) = 2$. Тогда по предположению индукции H — рациональная нормальная кривая $C_{N-1} \subset \mathbb{P}^{N-1}$. Значит, особенности X изолированы (и H не проходит через них). Рассмотрим минимальное разрешение особенностей $f: \tilde{X} \rightarrow X$. Тогда

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_X - \Delta,$$

где Δ — эффективный \mathbb{Q} -дивизор на \tilde{X} (см., например, [26, 9.2]). Положим $\tilde{H} := f_*^{-1}H$. Тогда $\tilde{H} \simeq C_{N-1}$. По формуле присоединения $(K_{\tilde{X}} + \tilde{H}) \cdot \tilde{H} = -2$. Отсюда следует, что дивизор $K_{\tilde{X}} + \tilde{H}$ не является численно эффективным, но он численно эффективен над X . С другой стороны, дивизор $\tilde{H} = f^*H$ численно эффективен и численно тривиален только на исключительных дивизорах f . Поэтому $K_{\tilde{X}} + t\tilde{H}$ численно эффективен при $t \gg 1$. Возьмем t минимальным, удовлетворяющим этому условию. Согласно сказанному выше, $t > 1$. Существует экстремальный луч $R \subset \overline{NE}(\tilde{X})$ такой, что

$$(K_{\tilde{X}} + t\tilde{H}) \cdot R = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{H} \cdot R > 0.$$

Пусть $\varphi: \tilde{X} \rightarrow Y$ — стягивание R и пусть ℓ — соответствующая минимальная рациональная кривая (см. (14.5.3)). Тогда

$$(15.4.1) \quad \mu(R) = -K_{\tilde{X}} \cdot \ell = t\tilde{H} \cdot \ell > \tilde{H} \cdot \ell > 1.$$

По классификации экстремальных лучей на поверхностях (теорема 14.6) морфизм φ не может быть бирациональным. Более того, если Y — точка, то $\tilde{X} \simeq \mathbb{P}^2 \simeq X$. Тогда $\mu(R) = 3$ и $H \cdot \ell \leq 2$ согласно (15.4.1). Мы получаем случаи (i) и (v). Если же Y — кривая, то она должна быть рациональной (поскольку $\tilde{H} \simeq \mathbb{P}^1$ покрывает Y) и $\tilde{X} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ — рациональная линейчатая поверхность, где $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)$ для некоторого $e \geq 0$. В этом случае $\mu(R) = 2$ и $\tilde{H} \cdot \ell = 1$ согласно (15.4.1), т.е. \tilde{H} является сечением. Поэтому линейная система $|\tilde{H}|$ отображает слои $\tilde{X} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ на прямые в \mathbb{P}^N . Таким образом, X — или конус над рациональной нормальной кривой или рационально-линейчатая поверхность (случаи (vi) и (iv), соответственно).

Пусть $n = \dim(X) > 2$. Мы предположим, что утверждение предложения верно для многообразий размерности $< n$. Рассмотрим сначала случай, когда X неособо. По формуле присоединения $K_H = (K_X + H)|_H$ и дивизор $K_X + (n-1)H$ не является численно эффективным поскольку дивизор

$$(K_X + (n-1)H)|_H = K_H + (n-2)H|_H$$

не является численно эффективным на H по предположению индукции. Если $\rho(X) = 1$, то X — многообразие Фано индекса $\geq \dim(X)$. Согласно теореме 1.8.1, мы имеем случаи (i) или (ii).

Пусть $\rho(X) > 1$. По теореме Лефшеца о гиперплоском сечении $\rho(H) \geq \rho(X) > 1$. Тогда по предположению индукции H — рационально-линейчатое многообразие (случай (iv)) и

$$\rho(H) = \rho(X) = 2.$$

Возьмем t минимальным таким, что $K_X + tH$ численно эффективен. Согласно сказанному выше, $t > n - 1$. Существует экстремальный луч $R \subset \overline{NE}(X)$ такой, что

$$(K_X + tH) \cdot R = 0 \quad \text{и} \quad H \cdot R > 0.$$

Возьмем минимальную рациональную кривую ℓ для луча R . Тогда $R = \mathbb{R}_+[\ell]$ и $-K_X \cdot \ell \leq n + 1$ (см. теорему о конусе 14.3). Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — стягивание R . По нашим условиям $H \cdot \ell = 1$, т.е. ℓ — прямая на $X \subset \mathbb{P}^N$. Как и в доказательстве предложения 3.5.1 (ii) через ℓ можно провести неособое гиперплоское сечение H . Дивизор $(K_X + tH)_H = K_H + (t - 1)H_H$ численно эффективен на H и тривиален на кривой ℓ . Значит, ℓ порождает экстремальный луч R_H на H и $K_H + (t - 1)H_H$ является опорным дивизором для этого экстремального луча, т.е. равенство $(K_H + (t - 1)H_H) \cdot C = 0$ выполнено для некоторой кривой C на H тогда и только тогда, когда $[C] \in R_H$. В частности, φ порождает стягивание $\varphi_H: H \rightarrow \mathbb{P}^1$ экстремального луча на H . Так как H — рационально-линейчатое многообразие, то слои φ_H — проективные пространства \mathbb{P}^{n-2} и они являются гиперплоскими сечениями слоев φ . Следовательно, слои φ — проективные пространства \mathbb{P}^{n-1} и $Y = \mathbb{P}^1$. Таким образом, φ является \mathbb{P}^{n-1} -расслоением над \mathbb{P}^1 .

Если же X особо, то возьмем за H общее гиперплоское сечение, проходящее через особую точку $P \in X$. По теореме Бертини H неприводимо. Тогда H — многообразие минимальной степени особо в точке P . По предположению индукции H является конусом с вершиной в P . Поэтому и X является конусом с вершиной в P . \square

15.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие минимальной степени. Предположим, что $X \neq \mathbb{P}^N$ и X не является неособой квадрикой, заданной формой ранга ≥ 5 . Тогда гиперплоское сечение $H \subset X$ допускает разложение $H = H_1 + H_2$, где $|H_i|$ — подвижные линейные системы дивизоров Вейля, т.е. линейные системы $|H_i|$ непусты и не имеют неподвижных компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из классификационной теоремы 15.4. Оставляется читателю для самостоятельного разбора. \square

- ЗАДАЧИ.**
1. Пусть $X = X_d \subset \mathbb{P}^{d+n-2}$ — неособое невырожденное n -мерное многообразие степени d . Докажите, что X является или проекцией многообразия минимальной степени $X = X_d \subset \mathbb{P}^d$ или многообразием дель Пеццо (см. определение 1.8.2). *Указание:* Пусть H — общее гиперплоское сечение. В случае, когда X линейно нормально по индукции покажите, что $K_X + (n+1)H \sim 0$. Используйте также, что в этом случае общее сечение $X \cap \mathbb{P}^{d-1}$ — эллиптическая кривая.
 2. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — неособое проективное трехмерное многообразие и пусть $H = X \cap \mathbb{P}^{N-1}$ — его гиперплоское сечение. Предположим, что H — минимальная поверхность кодаировой размерности 0. Докажите, что X — многообразие Фано и H — поверхность типа КЗ.

3. При каких условиях многообразие $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ из предложения 15.3 является многообразием Фано? При каких условиях на этом многообразии антиканонический класс численно эффективен и объемен? Попробуйте обобщить эти вопросы на случай разложимых векторных расслоений на проективных пространствах.

16. Дополнение: проективные модели поверхностей типа КЗ

В этом разделе мы приведем без доказательств некоторые стандартные сведения о кривых и поверхностях типа КЗ. Начнем с классических результатов о канонических кривых.

16.1. ТЕОРЕМА (М. Нётер; см., например, [4, гл. 2, § 3]). Пусть C — негиперэллиптическая кривая. Тогда ее каноническая алгебра $R(C, K_C)$ порождена своей компонентой степени 1.

16.1.1. СЛЕДСТВИЕ. Через каноническую модель негиперэллиптической кривой рода $g > 2$ проходит ровно $(g - 2)(g - 3)/2$ линейно независимых квадрик.

16.2. ТЕОРЕМА (теорема Нётера-Энриквеса-Петри; см., например, [6]). Пусть $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ — гладкая каноническая кривая рода $g \geq 4$. Тогда:

- (i) C высекается квадратиками и кубиками в \mathbb{P}^{g-1} , проходящими через C ;
- (ii) C не высекается квадратиками только в следующих случаях:
 - (a) C — тригональная кривая (т.е. обладает одномерным рядом \mathfrak{g}_3^1);
 - (b) C — кривая рода 6, изоморфная плоской кривой степени 5;
- (iii) если C не высекается квадратиками, то квадрики в \mathbb{P}^{g-1} проходящие через C , высекают поверхность R , являющуюся
 - (при $g = 4$) квадратикой в \mathbb{P}^3 (возможно особой),
 - (в случае (ii)(a), $g \geq 5$) неособой рациональной линейчатой поверхностью степени $g - 2$ в \mathbb{P}^{g-1} , причем ряд \mathfrak{g}_3^1 на C высекается линейным рядом прямых на R ,
 - (в случае (ii)(b)) поверхностью Веронезе $V_4 \subset \mathbb{P}^5$.

Далее мы приведем некоторые сведения о поверхностях типа КЗ. Напомним определение.

16.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкая проективная поверхность S называется поверхностью типа КЗ, если $K_S = 0$ и $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

Следующий факт непосредственно выводится из теоремы Римана-Роха, двойственности Серра, формулы для рода и теоремы Каваматы-Фивега об обращении в нуль 2.5.1.

16.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть D — эффективный ненулевой дивизор на поверхности S типа КЗ. Тогда

$$\dim |D| \geq \frac{1}{2}D^2 + 1.$$

Если D — неприводимая кривая, то $H^1(S, \mathcal{O}_S(D)) = 0$ и имеет место равенство

$$\dim |D| = \frac{1}{2}D^2 + 1 = p_a(D).$$

В частности, $D^2 \geq -2$ для любой неприводимой кривой D и $D^2 = -2$, если и только если D — неособая рациональная кривая.

Заметим, что любой численно эффективный дивизор на поверхности S типа КЗ эффективен (по теореме Римана–Роха).

16.5. ТЕОРЕМА ([101, §2-§3], [58, гл. 2]). Пусть D — численно эффективный на поверхности S типа КЗ. Тогда D принадлежит одному из следующих типов.

- (i) $D^2 = 0$; в этом случае $D \sim tE$, где $t \geq 1$, E — эллиптическая кривая, $\dim |E| = 1$ и $\text{Bs } |E| = \emptyset$ (т.е. $|E|$ — эллиптический пучок без базисных точек на S).
- (ii) $D^2 > 0$ и общий элемент из $|D|$ является неприводимой кривой; в этом случае линейная система $|D|$ не имеет базисных точек, общая кривая $C \in |D|$ неособа и

$$g(C) = \dim |D| > 1;$$

- (iii) $D^2 > 0$ и общий элемент из $|D|$ приводим; в этом случае

$$|D| = t|E| + Z,$$

где $|E|$ — эллиптический пучок без базисных точек, Z — неособая рациональная кривая, неподвижная компонента линейной системы $|D|$, причем $E \cdot Z = 1$ и $t \geq 2$.

16.6. Пусть S — поверхность с дювалевскими особенностями (см., например, [26, § 9]). Мы говорим, что S — особая поверхность типа КЗ, если $K_S = 0$ и $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

Пусть $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ — минимальное разрешение особенностей особой поверхности типа КЗ. Тогда $K_{\tilde{S}} = \mu^*K_S = 0$. Дювалевские особенности рациональны. Поэтому $H^1(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}}) = H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Следовательно, \tilde{S} — (неособая) поверхность типа КЗ.

16.6.1. СЛЕДСТВИЕ. Пусть S — поверхность типа КЗ с дювалевскими особенностями и пусть A — обильный дивизор Картье на S такой, что линейная система $|A|$ имеет неподвижную компоненту C . Тогда поверхность S неособа вдоль C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 16.5, примененной к минимальному разрешению особенностей. \square

16.7. При рассмотрении проективных моделей поверхностей типа КЗ обычно рассматривают пару (S, A) , состоящую из самой поверхности S и численно эффективного объемного дивизора A на S . При этом целое число

$$g = g(S, A) := \frac{1}{2}A^2 + 1 = \dim |A|$$

называется *родом* (S, A) . Класс дивизора A называется *поляризацией* (соотв. *квазиполяризацией*), если он обилён (соотв. не является обильным).

16.8. ТЕОРЕМА ([101, § 5-6]). Пусть A — численно эффективный и объемный дивизор на поверхности S типа КЗ такой, что линейная система $|A|$ не имеет неподвижных компонент. Положим $g := g(S, A)$. Тогда для морфизма

$$\Phi_{|A|}: S \longrightarrow \mathbb{P}^g$$

имеет место одна из следующих возможностей.

- (i) Морфизм $\Phi_{|A|}$ является бирациональным на свой образ $\Phi_{|A|}(S)$, поверхность степени $2g - 2$ в \mathbb{P}^g , этот образ является нормальной поверхностью с дувалевскими особенностями (в частности, она может быть неособой). Алгебра $R(S, A)$ порождена своей компонентой степени 1. Если, кроме того, дивизор A обилен, то $\Phi_{|A|}: S \rightarrow \Phi_{|A|}(S)$ — изоморфизм.
- (ii) Морфизм $\Phi_{|A|}: S \rightarrow \Phi_{|A|}(S)$ является конечным в общей точке и имеет степень 2, его образ $\Phi_{|A|}(S)$ — это поверхность минимальной степени $g - 1$ в \mathbb{P}^g . В этом случае поверхность S (вместе с квазиполяризацией A) называется гиперэллиптической. Такие поверхности характеризуются тем свойством, что любая неособая кривая $C \in |A|$ является гиперэллиптической [101, следствие 5.8].

Следующий факт содержится в теоремах 6.1, 7.2 и предложении 7.15 работы [101].

16.9. ТЕОРЕМА. Пусть A — очень обильный дивизор на поверхности S типа КЗ такой, что $g = g(S, A) \geq 4$. Пусть I_S — ядро естественного гомоморфизма

$$\alpha: S^*H^0(S, \mathcal{O}_S(A)) \longrightarrow \bigoplus_{m \geq 0} H^0(S, \mathcal{O}_S(mA)) = R(S, A)$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

- (i) Идеал I_S порождается элементами степени 2 и 3.
- (ii) Предположим, что идеал I_S не может быть порожден элементами степени 2. Тогда однородный идеал $I'_S \subset I_S$, порожденный всеми элементами степени 2 в I_S , определяет в \mathbb{P}^g трехмерное многообразие минимальной степени $V = V_{g-2} \subset \mathbb{P}^g$.
- (iii) Если $g \geq 5$, то V — неособое рационально-линейчатое многообразие.

В случае (ii) поверхность S (вместе с поляризацией A) называется *тригональной*. Такие поверхности характеризуются тем свойством, что любая неособая кривая $C \in |A|$ является тригональной.

ЗАДАЧИ. 1. Докажите предложение 16.4.

- 2. Пусть (S, A) — гиперэллиптическая поверхность типа КЗ рода $g \geq 3$, где A — численно эффективный и объемный дивизор и пусть $\Phi_{|A|}: S \rightarrow \mathbb{P}^g$ — соответствующее гиперэллиптическое отображение. Предположим, что образ $W := \Phi_{|A|}(S)$ неособ. Докажите, что W или является поверхностью Веронезе или изоморфен рациональной геометрически линейчатой поверхности \mathbb{F}_e , где $e \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, при этом все возможности реализуются. Вычислите дивизор ветвления $B \subset W$. Какие дополнительные условия накладываются на W и S , если A обилен? *Указание:* Воспользуйтесь тем, что дивизор B приводим, а пара $(W, \frac{1}{2}B)$ имеет чисто логтерминальные особенности [26, предложение 15.13].
- 3. В обозначениях предыдущей задачи предположим, что образ $W := \Phi_{|A|}(S)$ — особая поверхность. Докажите, что W является конусом $W_g \subset \mathbb{P}^g$ над рациональной нормальной кривой степени $e := g - 1$, где $e \in \{2, 3, 4\}$, при этом все возможности реализуются. Вычислите дивизор ветвления $B \subset W$. Докажите,

что в этом случае дивизор A не может быть обильным. *Указание:* Воспользуйтесь тем, что конус $W_g \subset \mathbb{P}^g$ изоморфен взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(1, 1, e)$ и постройте бирациональное (на свой образ) отображение $S \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, e, e + 2)$.

4. Воспользуйтесь предыдущими задачами и докажите, что на гиперэллиптической поверхности типа КЗ рода $g \neq 2, 5$ всегда имеется эллиптический пучок.
5. Докажите, что существуют гиперэллиптические поверхности типа КЗ любого рода $g \geq 2$.
6. Докажите, что существуют тригональные поверхности типа КЗ любого рода $g \geq 3$.
7. Опишите тригональные поверхности типа КЗ в \mathbb{P}^5 .

17. Дополнение: теоремы Бертини

Пусть D — дивизор Вейля на нормальном многообразии X и пусть $|D|$ — соответствующая линейная система. Предположим, что $|D| \neq \emptyset$.

Неподвижной частью линейной системы $|D|$ называется эффективный дивизор

$$F := \text{Max} \{F' \mid F' \leq D' \text{ для всех } D' \in |D|\},$$

где Max для множества дивизоров понимается в смысле обычного частичного порядка \leq . Компоненты F называются *неподвижными компонентами* $|D|$. Имеет место разложение

$$|D| = F + |M|,$$

где $|M|$ — полная линейная система без неподвижных компонент. Она называется *подвижной частью* $|D|$. Ясно, что

$$\dim |D| = \dim |M|.$$

Отметим, что на проективной нормальной поверхности эффективный дивизор D , для которого линейная система $|D|$ не имеет неподвижных компонент, численно эффективен.

Базисным множеством линейной системы $|D|$ называется пересечение всех ее элементов:

$$\text{Bs } |D| := \bigcap_{D' \in |D|} D'.$$

Обычно оно понимается в схемном смысле. Таким образом,

$$\text{Bs } |D| \supset \text{Supp}(F)$$

и $\text{codim}(\text{Bs } |D|) > 1$ тогда и только тогда, когда $F = 0$.

Напомним, что $\Phi_{|D|}$ обозначает рациональное отображение

$$\Phi_{|D|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^N, \quad N := \dim |D| = \dim |M|,$$

заданное линейной системой $|D|$. По определению $\Phi_{|D|} = \Phi_{|M|}$.

17.1. ТЕОРЕМА (первая теорема Бертини, см. [36, гл. 1, § 3], [106, § 4]). *В вышеприведенных обозначениях пусть $\dim |D| > 0$.*

- (i) *Если $\dim \Phi_{|D|}(X) \geq 2$, то общий элемент $M_{\text{gen}} \in |M|$ неприводим.*
- (ii) *Если $\dim \Phi_{|D|}(X) = 1$ и $\dim |D| \geq 2$, то общий элемент $M_{\text{gen}} \in |M|$ приводим.*

Рассмотрим случай (ii) теоремы 17.1. Тогда образ отображения $\Phi_{|D|}(X)$ — кривая $C \subset \mathbb{P}^N$ и элементы $|M|$ — это прообразы гиперплоских сечений кривой C . Имеется факторизация Штейна

$$\Phi_{|D|}: X \xrightarrow{\phi_1} \widehat{C} \xrightarrow{\phi_2} C \subset \mathbb{P}^N$$

где \widehat{C} — неособая кривая, а ϕ_2 — конечный морфизм. Общий элемент $M' \in |M|$ имеет вид $M' = \sum M'_i$, где каждое слагаемое M'_i — простой дивизор, а $P_i := \phi_1(M'_i)$ — точка на \widehat{C} . Причем $\sum P_i = \phi_2^*(H)$ для подходящего (общего) гиперплоского сечения $H = C \cap \mathbb{P}^{N-1}$.

Отображение ϕ_1 является регулярным на открытом подмножестве

$$X \setminus \text{Bs } |M|.$$

Причем $\text{codim } \text{Bs } |M| \geq 2$.

17.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть иррегулярность многообразия X равна 0. Тогда \widehat{C} — неособая рациональная кривая. Поэтому тогда можно записать

$$|D| = F + m|L|,$$

где $|L|$ — одномерная линейная система (*пучок*)¹, у которой общий элемент неприводим. Ясно, что $\dim |D| = m$. В этом случае говорят, что $|D|$ *составлена из рационального пучка*.

17.3. ТЕОРЕМА (вторая теорема Бертини, см. [36, гл. 1, § 3], [106, § 4]). *Особое множество общего элемента $D' \in |D|$ содержится в объединении $\text{Sing}(X) \cup \text{Bs } |D|$ особого множества многообразия X и базисного множества линейной системы $|D|$.*

¹В русскоязычной математической литературе термин “пучок” имеет два значения. Обычно это контравариантный функтор из категории открытых подмножеств топологического пространства в категорию групп или колец, удовлетворяющий определенным свойствам (английский перевод — sheaf). Другое значение — это одномерная линейная система (pencil). Обычно из контекста ясно, что имеется в виду.

Список литературы

- [1] В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Гиперэллиптические и тригональные многообразия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 145–204.
- [2] Х. Клеменс, Я. Коллар, С. Мори, *Многомерная комплексная геометрия*, Мир, М., 1993.
- [3] И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Лог-канонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано”, *Успехи матем. наук*, **63**:5(383) (2008), 73–180.
- [4] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*. Т. 1, 2, Мир, М., 1982.
- [5] Б. Г. Мойшезон, “Теорема Кастельнуово–Энриквеса о стягивании для произвольной размерности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:5 (1969), 974–1025, <http://dx.doi.org/10.1070/IM1969v003n05ABEH000810>; <http://mi.mathnet.ru/izv2189>
- [6] В. В. Шокуров, “Теорема Нётера–Энриквеса о канонических кривых”, *Матем. сб.*, **86(128)**:3(11) (1971), 367–408; <http://mi.mathnet.ru/msb3299>
- [7] Ю. И. Манин, *Кубические формы: Алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972.
- [8] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562, <http://dx.doi.org/10.1070/IM1977v011n03ABEH001733>; <http://mi.mathnet.ru/izv1823>
- [9] Ф. А. Богомолов, “Голоморфные тензоры и векторные расслоения на проективных многообразиях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1227–1287.
- [10] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 506–549, <http://dx.doi.org/10.1070/IM1978v012n03ABEH001994>; <http://mi.mathnet.ru/izv1778>
- [11] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **12** (1979), 59–157, <http://dx.doi.org/10.1007/BF01084563>; <http://mi.mathnet.ru/intd34>
- [12] В. В. Шокуров, “Существование прямой на многообразиях Фано”, *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **43**:4 (1979), 922–964, <http://dx.doi.org/10.1070/IM1980v015n01ABEH001195>; <http://mi.mathnet.ru/izv1741>
- [13] В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **12** (1979), 159–236.
- [14] В. В. Шокуров, “Гладкость общего антиканонического дивизора на многообразии Фано”, *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **43**:2 (1979), 430–441, <http://dx.doi.org/doi.org/10.1070/IM1980v014n02ABEH001123>; <http://mi.mathnet.ru/izv1720>
- [15] Н. П. Гушель, “О многообразиях Фано рода 6”, *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **46**:3 (1982), 1159–1174, <http://dx.doi.org/10.1070/IM1983v021n03ABEH001801>; <http://mi.mathnet.ru/izv1701>
- [16] Н. П. Гушель, “О многообразиях Фано рода 8”, *Успехи Мат. Наук.*, **38**:1 (1983), 163–164, <http://dx.doi.org/10.1070/RM1983v038n01ABEH003401>; <http://mi.mathnet.ru/umn2834>
- [17] С. Л. Трегуб, “Конструкция бирационального изоморфизма трехмерной кубики и многообразия Фано первого рода с $g = 8$, связанная с нормальной рациональной кривой степени 4”, *Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.*, 1985, № 6, 99–101.
- [18] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*. т. I, II, 2 изд., Наука, М., 1988.

- [19] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, Изд-во МГУ, 1988.
- [20] В. А. Исковских, “Двойная проекция из прямой на трехмерных многообразиях Фано первого рода”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 260–278, <http://dx.doi.org/10.1070/SM1990v066n01ABEH001172>; <http://mi.mathnet.ru/msb1609>
- [21] Ю. Г. Прохоров, “Об экзотических многообразиях Фано”, *Вестник МГУ. Сер. 1, мат. мех.*, 1990, № 3, 34–37.
- [22] Ю. Г. Прохоров, “Группы автоморфизмов многообразий Фано”, *Успехи мат. наук.*, **45**:3 (1990), 195–196.
- [23] В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203.
- [24] Н. П. Гушель, “О трехмерных многообразиях Фано рода 8”, *Алгебра и анализ*, **4**:1 (1992), 120–134; <http://mi.mathnet.ru/aa302>
- [25] Ю. Г. Прохоров, “О существовании хороших дивизоров на многообразиях Фано коиндекса 3”, *Тр. МИАН*, **208** (1995), 266–277.
- [26] Ю. Г. Прохоров, *Особенности алгебраических многообразий*, МЦНМО, М., 2009, 128 с.
- [27] Ю. Г. Прохоров, *Рациональные поверхности*, Лекц. курсы НОЦ, **24**, МИАН, М., 2015, <http://dx.doi.org/10.4213/book1590>; <http://mi.mathnet.ru/eng/book1590>
- [28] Ю. Г. Прохоров, “О числе особых точек трехмерных терминальных факториальных многообразий Фано”, *Математические заметки*, **101**:6 (2017), 949–954.
- [29] Ю. Г. Прохоров, “Эквивариантная программа минимальных моделей”, *Успехи мат. наук*, **76**:3 (2021), 93–182, <http://dx.doi.org/10.4213/rm9990>; <http://mi.mathnet.ru/rm9990>
- [30] Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Библиотека сборника Математика, Мир, М., 1968.
- [31] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра. Элементы математики*, Мир, М., 1971.
- [32] Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [33] Т. Спрингер, *Теория инвариантов*, Математика – Новое в зарубежной науке, **24**, Мир, М., 1981.
- [34] Мамфорд Д., *Красная книга о многообразиях и схемах*, МЦНМО, М., 2007, 296 с.
- [35] Д. Айзенбад, *Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию*, МЦНМО, 2017.
- [36] И. Р. Шафаревич, Б. Г. Авербух, Ю. К. Вайнберг и др., “Алгебраические поверхности”, *Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН*, **75** (1965), 1–215.
- [37] D. N. Akhiezer, “Lie group actions in complex analysis”, *Aspects of Mathematics*, **E27**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-80267-5>.
- [38] Ambro F., “Ladders on Fano varieties”, *J. Math. Sci. (New York)*, **94**:1 (1999), 1126–1135.
- [39] M. Andreatta, J. A. Wiśniewski, “A view on contractions of higher dimensional varieties”, *Algebraic geometry*, Proceedings of the Summer Research Institute (Santa Cruz, CA, USA, July 9–29, 1995), American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, 153–183.
- [40] M. Andreatta, J. A. Wiśniewski, “Contractions of smooth varieties. II. Computations and applications”, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, **1**:2 (1998), 343–360.

- [41] M. Andreatta, J. A. Wiśniewski, “On contractions of smooth varieties”, *J. Algebraic Geom.*, **7**:2 (1998), 253–312.
- [42] M. F. Atiyah, “On analytic surfaces with double points”, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, **247** (1958), 237–244.
- [43] A. Beauville, “Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **10**:3 (1977), 309–391.
- [44] C. Birkar, “Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties”, *Ann. of Math. (2)*, **193**:2 (2021), 347–405, <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.1>; <https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.1>
- [45] F. Campana, “On twistor spaces of the class \mathcal{C} ”, *J. Differ. Geom.*, **33**:2 (1991), 541–549.
- [46] F. Campana, “Connexité rationnelle des variétés de Fano”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **25**:5 (1992), 539–545.
- [47] C. H. Clemens, P. A. Griffiths, *Ann. of Math. (2)*, **95** (1972), 281–356.
- [48] S. D. Cutkosky, “On Fano 3-folds”, *Manuscripta Math.*, **64**:2 (1989), 189–204, <http://dx.doi.org/10.1007/BF01160118>.
- [49] O. Debarre, A. Iliev, L. Manivel, “On nodal prime Fano threefolds of degree 10”, *Sci. China Math.*, **54**:8 (2011), 1591–1609; <http://dx.doi.org/10.1007/s11425-011-4182-0>
- [50] O. Debarre, A. Kuznetsov, “Gushel–Mukai varieties: classification and birationalities”, *Algebr. Geom.*, **5**:1 (2018), 15–76, <http://dx.doi.org/10.14231/AG-2018-002>; <http://content.algebraicgeometry.nl/2018-1/2018-1-002.pdf>
- [51] I. Dolgachev, “Weighted projective varieties”, *Group actions and vector fields* (Vancouver, BC, 1981), Lecture Notes in Math., **956**, Springer, Berlin, 1982, 34–71, <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0101508>.
- [52] I. V. Dolgachev, *Classical algebraic geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012, <http://dx.doi.org/10.1017/CB09781139084437>.
- [53] G. Fano, “Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli”, *Atti Congresso Bologna*, **4** (1931), 115–121.
- [54] G. Fano, “Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche”, *Comment. Math. Helv.*, **14** (1942), 202–211, <http://dx.doi.org/10.1007/BF02565618>.
- [55] *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry held at the University of Utah, Salt Lake City, Utah, August 1991, Astérisque No. 211, ed. J. Kollár, Société Mathématique de France, Paris, 1992, 258 pp.
- [56] T. Fujita, *Classification theories of polarized varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **155**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [57] F. Hidaka, K. Watanabe, “Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor”, *Tokyo J. Math.*, **4**:2 (1981), 319–330.
- [58] D. Huybrechts, *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016, <http://dx.doi.org/10.1017/CB097811316594193>; <http://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3Global.pdf>
- [59] V. A. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties*, Algebraic geometry V, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer, Berlin, 1999.
- [60] P. Jahnke, I. Radloff, “Gorenstein Fano threefolds with base points in the anticanonical system”, *Compos. Math.*, **142**:2 (2006), 422–432.

- [61] Y. Kachi, “Extremal contractions from 4-dimensional manifolds to 3-folds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **24**:1 (1997), 63–131; http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1997_4_24_1_63_0
- [62] Y. Kawamata, “Boundedness of \mathbf{Q} -Fano threefolds”, *Proceedings of the International Conference on Algebra*, Part 3 (Novosibirsk, 1989), *Contemp. Math.*, **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 439–445.
- [63] Y. Kawamata, “On Fujita’s freeness conjecture for 3-folds and 4-folds”, *Math. Ann.*, **308**:3 (1997), 491–505..
- [64] Y. Kawamata, “Subadjunction of log canonical divisors for a subvariety of codimension 2”, *Birational algebraic geometry* (Baltimore, MD, 1996), *Contemp. Math.*, **207**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 79–88.
- [65] Y. Kawamata, “Subadjunction of log canonical divisors. II”, *Amer. J. Math.*, **120**:5 (1998), 893–899.
- [66] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Algebraic geometry* (Sendai, 1985), *Adv. Stud. Pure Math.*, **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360, <http://dx.doi.org/10.2969/aspm/01010283>.
- [67] S. L. Kleiman, “Toward a numerical theory of ampleness”, *Ann. of Math. (2)*, **84** (1966), 293–344.
- [68] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Translated from the Japanese by Kazuo Akao, With an appendix by Daisuke Fujiwara, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, **283**, Springer-Verlag, New York, 1986, <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-8590-5>.
- [69] J. Kollár, “Toward moduli of singular varieties”, *Compositio Math.*, **56**:3 (1985), 369–398.
- [70] J. Kollár, “Flops”, *Nagoya Math. J.*, **113** (1989), 15–36, <http://dx.doi.org/10.1017/S0027763000001240>.
- [71] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [72] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry—Santa Cruz*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
- [73] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, “Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds”, *J. Differential Geom.*, **36**:3 (1992), 765–779.
- [74] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original, *Cambridge Tracts in Mathematics*, **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511662560>.
- [75] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, “Prime Fano threefolds of genus 12 with a \mathbf{G}_m -action”, *Épjournal de Géométrie Algébrique*, **2** (2018), 4560; <https://epiga.episciences.org/4560>
- [76] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, *Rationality of Fano threefolds over non-closed fields*, Arxiv e-print 1911.08949, 2019 (to appear in *Amer. J. Math.*).
- [77] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, “Rationality of Mukai varieties over non-closed fields”, *Rationality of Varieties*, *Progress in Mathematics*, **342**, eds. Farkas G., van der Geer G., Shen M., Taelman L., Birkhäuser, Cham, 2021, 249–290; https://doi.org/10.1007/978-3-030-75421-1_10

- [78] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, C. Shramov, “Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds”, *Japanese J. Math.*, **13**:1 (2018), 109–185, <http://dx.doi.org/10.1007/s11537-017-1714-6>.
- [79] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. II. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-18810-7>.
- [80] R. Lazarsfeld, “A short course on multiplier ideals”, *Analytic and algebraic geometry. Common problems, different methods. Lecture notes from the Park City Mathematics Institute (PCMI) graduate summer school on analytic and algebraic geometry* (Park City, UT, USA, Summer 2008), American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 2010, 451–494; <http://arxiv.org/abs/0901.0651>
- [81] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Translated from the Japanese by M. Reid, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **8**, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [82] T. Matsusaka, “Polarized varieties with a given Hilbert polynomial”, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 1027–1077.
- [83] V. B. Mehta, A. Ramanathan, “Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves”, *Math. Ann.*, **258** (1982), 213–224, <http://dx.doi.org/10.1007/BF01450677>.
- [84] M. Mella, “Existence of good divisors on Mukai varieties”, *J. Algebr. Geom.*, **8**:2 (1999), 197–206.
- [85] B. G. Moishezon, “Über algebraische Homologieklassen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **31** (1967), 225–268.
- [86] S. Mori, “On a generalization of complete intersections”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **15**:3 (1975), 619–646.
- [87] S. Mori, “Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective”, *Ann. Math. (2)*, **116** (1982), 133–176, <http://dx.doi.org/10.2307/2007050>.
- [88] S. Mori, S. Mukai, “Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ”, *Manuscripta Math.*, **36**:2 (1981/82), 147–162; “Erratum”, *Manuscripta Math.*, **110** (2003), 407.
- [89] S. Mori, S. Mukai, “On Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ”, *Algebraic varieties and analytic varieties*, Tokyo, 1981, Adv. Stud. Pure Math., **1**, North-Holland, Amsterdam, 1983, 101–129.
- [90] S. Mukai, “Curves, $K3$ surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 ”, *Algebraic geometry and commutative algebra. V. I*, Kinokuniya, Tokyo, 1988, 357–377.
- [91] S. Mukai, “Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **86**:9 (1989), 3000–3002, <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.86.9.3000>.
- [92] S. Mukai, “Fano 3-folds”, *Complex projective geometry*, Trieste, 1989/Bergen, 1989, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 255–263, <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511662652.018>.
- [93] S. Mukai, “Curves and symmetric spaces. I”, *Amer. J. Math.*, **117**:6 (1995), 1627–1644, <http://dx.doi.org/10.2307/2375032>.
- [94] S. Mukai, “New developments in the theory of Fano threefolds: vector bundle method and moduli problems [translation of *Sūgaku* **47** (1995), no. 2, 125–144]”, *Sugaku Expositions*, **15**:2 (2002), 125–150.

- [95] S. Mukai, H. Umemura, “Minimal rational threefolds”, *Algebraic geometry* (Tokyo/Kyoto, 1982), Lecture Notes in Math., **1016**, Berlin, 1983, 490–518.
- [96] T. Peternell, J. A. Wiśniewski, “On stability of tangent bundles of Fano manifolds with $b_2 = 1$ ”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 363–384.
- [97] Yu. Prokhorov, “Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3”, *J. Algebraic Geom.*, **21**:3 (2012), 563–600, <http://dx.doi.org/10.1090/S1056-3911-2011-00586-9>.
- [98] Yu. Prokhorov, “The rationality problem for conic bundles”, *Russian Math. Surv.*, **73**:3 (2018), 375–456, <http://dx.doi.org/10.1070/RM9811>.
- [99] M. Reid, “Minimal models of canonical 3-folds”, *Algebraic varieties and analytic varieties* (Tokyo, 1981), Adv. Stud. Pure Math., **1**, North-Holland, Amsterdam, 1983, 131–180, <http://dx.doi.org/10.2969/aspm/00110131>.
- [100] M. Reid, *Projective morphisms according to Kawamata*, Preprint. Univ. Warwick, 1983; <http://www.maths.warwick.ac.uk/miles/3folds>
- [101] B. Saint-Donat, “Projective models of $K3$ surfaces”, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 602–639.
- [102] F. O. Schreyer, “Geometry and algebra of prime Fano 3-folds of genus 12”, *Compositio Math.*, **127**:3 (2001), 297–319.
- [103] N. I. Shepherd-Barron, “Fano threefolds in positive characteristic”, *Compositio Math.*, **105**:3 (1997), 237–265.
- [104] A. Steffens, “On the stability of the tangent bundle of Fano manifolds”, *Math. Ann.*, **304**:4 (1996), 635–643, <http://dx.doi.org/10.1007/BF01446311>.
- [105] K. Takeuchi, “Some birational maps of Fano 3-folds”, *Compositio Math.*, **71**:3 (1989), 265–283.
- [106] K. Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics, **439**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.
- [107] P. M. H. Wilson, “Fano fourfolds of index greater than one”, *J. Reine Angew. Math.*, **379** (1987), 172–181.

Научное издание
Лекционные курсы НОЦ
Выпуск 31

Юрий Геннадьевич Прохоров
Трехмерные многообразия Фано

<http://www.mi-ras.ru/noc/> e-mail: journals@mi-ras.ru

Заказ 343-23 Тираж 100 экз.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Амирит»

410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88

Тел.: 8-800-700-86-33 | 8-8452-24-86-33

E-mail: zakaz@amirit.ru Сайт: amirit.ru
