Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

**Лекционные курсы НОЦ**

***Выпуск 28***

Издание выходит с 2006 года

# Математические основы общей теории относительности

## Часть 1

М. О. Катанаев

*Математический институт им. В.А. Стеклова*
*Российской академии наук*

Москва
2017

ББК 22.311
Л43



**Катанаев М. О.**

Л43 Математические основы общей теории относительности. Часть 1 – М.: МИАН, 2017. – 312 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 28).

ISBN 978-5-98419-077-0

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИАН). В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в МИАН в рамках программы “Научно-образовательный центр МИАН”.

DOI: https://doi.org/10.4213/lkn28

ISBN 978-5-98419-077-0

**Оглавление**

## 1. Предисловие

Вашему вниманию предлагается часть лекций “Геометрические методы в математической физике”, которые автор читал в течении 2008–2015 годов в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук. Эти лекции посвящены математическим основам общей теории относительности, которая является ярким примером применения геометрических методов построения моделей математической физики.

Первые несколько глав посвящены некоторым аспектам дифференциальной геометрии и механики, которые имеют прямое отношение к рассматриваемым вопросам. Затем излагаются основы теории относительности. Значительное внимание уделяется гамильтонову формализму и построению точных решений уравнений Эйнштейна. Рассматриваются скалярные, спинорные и калибровочные поля в теории гравитации. Довольно подробно рассмотрены модели двумерной гравитации, которые достаточно просты для аналитического исследования. В заключительной главе рассмотрены космологические модели в рамках общей теории относительности.

От читателя требуется достаточная математическая подготовка. Предполагается, что он знаком с основами дифференциальной геометрии и некоторых других разделов математики (см., например, [1–5]). При подготовке монографии часто использовались книги [6–20].

Курс, который автор читал в НОЦ, был бы невозможен без поддержки и критических замечаний сотрудников Отдела математической физики МИАН. Автор выражает искреннюю благодарность $\boxed{\text{В. С. Владимирову}}$, И. В. Воловичу, А. К. Гущину, Ю. Н. Дрожжинову, В. В. Жаринову, $\boxed{\text{Б. И. Завьялову}}$, $\boxed{\text{В. П. Михайлову}}$ и А. Г. Сергееву за многочисленные обсуждения вопросов дифференциальной геометрии и математической физики.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Любые замечания, указания на ошибки, неточности и опечатки прошу отправлять на e-mail: katanaev@mi.ras.ru

## 2. Векторные поля Киллинга

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени, играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. В настоящей главе мы рассмотрим (псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ и найдем условия, при которых метрика инвариантна относительно действия группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$. Дадим определение векторных полей Киллинга, которые являются генераторами локальных симметрий метрики, а также изучим некоторые из их свойств. Будет доказана теорема о том, что если (псевдо)риманово многообразие обладает максимально возможной группой симметрии, то это – пространство постоянной кривизны.

### 2.1. Изометрии и инфинитезимальные изометрии

Рассмотрим $n$-мерное (псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ с метрикой $g(x) = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \otimes dx^\beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1$, и соответствующей связностью Леви-Чивиты $\Gamma$.

Определение. Диффеоморфизм

$$\imath : \quad \mathbb{M} \ni \qquad x \mapsto x' = \imath(x) \qquad \in \mathbb{M}$$

называется *изометрией* или *движением* многообразия $\mathbb{M}$, если он сохраняет метрику,

$$g(x) = \imath^* g(x'), \tag{2.1}$$

где $\imath^*$ – отображение дифференциальных форм.

Из условия инвариантности метрики (2.1) следует инвариантность скалярного произведения векторов. Пусть $X, Y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ – два произвольных вектора из касательного пространства в точке $x \in \mathbb{M}$. Тогда справедливы равенства

$$g(X, Y)\big|_x = (\imath^* g)(X, Y)\big|_x = g(\imath_* X, \imath_* Y)\big|_{\imath(x)},$$

которые эквивалентны определению (2.1). Первое равенство следует из определения (2.1), а второе вытекает из определения отображения дифференциальных форм.

Поскольку изометрия сохраняет метрику, то она сохраняет также связность Леви-Чивиты, соответствующий тензор кривизны, экстремали и, вообще, все геометрические объекты, которые определяются только метрикой.

Запишем отображение (2.1) в координатах. Пусть обе точки $x$ и $x'$ принадлежат одной координатной окрестности и имеют соответственно координаты $x^\alpha$ и $x'^\alpha$. Тогда изометрия $\imath$ в координатах запишется в виде условия

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} g_{\gamma\delta}(x'), \tag{2.2}$$

связывающего компоненты метрики в различных точках многообразия. Это условие по виду совпадает с правилом преобразования компонент метрики при преобразовании координат. Разница заключается в следующем. При преобразовании координат мы считаем, что одной и той же точке $x \in \mathbb{M}$ соответствуют два набора координат $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'} := x'^\alpha\}$ в двух различных системах координат. При рассмотрении изометрий $x$ и $x'$ – это две различные точки одного и того же многообразия $\mathbb{M}$, и равенство (2.2) связывает значения компонент метрики в этих точках.

Предложение 2.1.1. *Множество всех изометрий данного (псевдо)риманова многообразия $(\mathbb{M}, g)$ является группой, которую обозначим $\mathbb{I}(\mathbb{M}) \ni \imath$.*

Доказательство. Две последовательные изометрии также являются изометрией. Произведение (последовательное действие изометрий) ассоциативно. Тождественное отображение многообразия $\mathbb{M}$ является изометрией и представляет собой единицу группы. У каждого диффеоморфизма $\imath$ есть обратный диффеоморфизм $\imath^{-1}$, который является обратной изометрией.

Если метрика на многообразии задана, т.е. определены значения ее компонент во всех точках $x$, то соотношение (2.2) представляет собой уравнение на функции $x'(x)$, которые определяют изометрию. В общем случае это уравнение не имеет решений и у соответствующего (псевдо)риманова многообразия нет никаких нетривиальных изометрий. В этом случае группа изометрий состоит из одного единичного элемента. Чем шире группа изометрий, тем уже класс соответствующих (псевдо)римановых многообразий.

Пример 2.1.1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $\delta_{\alpha\beta}$ допускает группу изометрий, которая состоит из преобразований неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(n, \mathbb{R})$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{IO}(n, \mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$, состоящей из вращений, сдвигов и отражений.

Группа изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ может быть дискретной или группой Ли.

Определение. Если группа изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ является группой Ли, то имеет смысл говорить об инфинитезимальных преобразованиях. В этом случае мы говорим об *инфинитезимальных изометриях*

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon K^\alpha + \mathsf{o}(\epsilon), \qquad \epsilon \ll 1.$$

Каждая инфинитезимальная изометрия генерируется некоторым достаточно гладким векторным полем $K(x) = K^\alpha(x)\partial_\alpha$, которое называется векторным *полем Киллинга.*

Замечание. Дискретные изометрии (псевдо)риманова многообразия, например отражения, не генерируются никакими векторными полями.

Запишем условие инвариантности метрики относительно инфинитезимальных преобразований из группы изометрий в координатах. Каждое векторное поле генерирует однопараметрическую группу преобразований, которая называется экспоненциальным отображением. Формально условие инвариантности метрики записывается в виде равенства нулю производной Ли вдоль векторного поля Киллинга $K = K^\alpha\partial_\alpha$ от метрики

$$\mathsf{L}_K g = 0. \tag{2.3}$$

Это уравнение в локальной системе координат принимает вид [21]

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0, \tag{2.4}$$

где $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$ – компоненты 1-формы Киллинга, а ковариантная производная

$$\nabla_\alpha K_\beta = \partial_\alpha K_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma K_\gamma$$

строится по символам Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ (связность Леви-Чивиты).

Определение. Уравнение (2.4) называется *уравнением Киллинга*, а интегральные кривые полей Киллинга называются *траекториями Киллинга*. Если $K = K^\alpha \partial_\alpha$ – векторное поле Киллинга, то ему соответствует 1-форма $K = dx^\alpha K_\alpha$, где $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$, которая называется *формой Киллинга* и для которой мы сохранили то же обозначение.

На любом (псевдо)римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$ уравнения Киллинга (2.3) всегда имеют тривиальное решение $K = 0$. Если уравнения Киллинга имеют только тривиальное решение, то в этом случае нетривиальные непрерывные изометрии отсутствуют.

Траектории Киллинга $\{x^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$, где $t \in \mathbb{R}$, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \tag{2.5}$$

Если траектория Киллинга при $t = 0$ проходит через точку $p = \{p^\alpha\} \in \mathbb{M}$, то при малых $t$ она имеет вид

$$x^\alpha(t) = p^\alpha + tK^\alpha(p) + \mathsf{o}(t). \tag{2.6}$$

Если в некоторой точке векторное поле Киллинга равно нулю, то эта точка остается неподвижной, т.е. является стационарной точкой группы изометрий. Поскольку изометрии определены для всего многообразия $\mathbb{M}$ и образуют группу, то векторные поля Киллинга обязаны быть полными, т.е. параметр $t$ должен меняться на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Если для (псевдо)риманова многообразия $(\mathbb{M}, g)$ известно векторное поле Киллинга, то оно определяет не только инфинитезимальные изометрии, но и всю однопараметрическую подгруппу изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$. Для этого нужно найти интегральные кривые $x(t)$, проходящие через все точки многообразия $p \in \mathbb{M}$. Если $x(0) = p$, то каждому значению $t \in \mathbb{R}$ соответствует диффеоморфизм

$$\imath : \quad \mathbb{M} \ni \qquad p \mapsto x(t) \qquad \in \mathbb{M}.$$

Уравнения для векторных полей Киллинга в ковариантной форме (2.4) можно переписать в частных производных,

$$\partial_\alpha K_\beta + \partial_\beta K_\alpha - 2\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma K_\gamma = 0.$$

В моделях математической физики часто ставится задача нахождения векторов Киллинга для заданной метрики на многообразии. Для решения этой задачи бывает удобнее использовать контравариантные компоненты векторов Киллинга, для которых уравнение Киллинга принимает вид

$$g_{\alpha\gamma}\partial_\beta K^\gamma + g_{\beta\gamma}\partial_\alpha K^\gamma + K^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.7}$$

Уравнения Киллинга (2.3), которые в компонентах имеют вид (2.7), линейны и по векторам Киллинга, и по метрике. Отсюда сразу следует, что две метрики, которые отличаются постоянным множителем, имеют один и тот же набор векторов Киллинга. Кроме того, векторное поле Киллинга определено с точностью до умножения на произвольную постоянную, отличную от нуля. В частности, если $K$ – векторное поле Киллинга, то и $-K$ также является полем Киллинга. Если независимых векторных полей Киллинга для заданной метрики несколько, то любая линейная комбинация этих полей также является полем Киллинга. То есть множество векторных полей Киллинга образует линейное пространство над полем вещественных чисел, которое является подпространством в множестве всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$. В этом векторном пространстве можно ввести билинейную операцию. Простые вычисления показывают, что коммутатор двух векторных полей Киллинга $K_1$ и $K_2$ снова дает поле Киллинга:

$$\mathsf{L}_{[K_1,K_2]}g = \mathsf{L}_{K_1} \circ \mathsf{L}_{K_2}g - \mathsf{L}_{K_2} \circ \mathsf{L}_{K_1}g = 0.$$

Отсюда следует, что векторные поля Киллинга образуют алгебру Ли $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй алгебры Ли множества всех векторных полей, $\mathfrak{i}(\mathbb{M}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Эта алгебра является алгеброй Ли группы Ли изометрий $\mathbb{I}(\mathbb{M})$.

Замечание. Векторные поля Киллинга не выдерживают умножения на функцию. Поэтому они не образуют $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$-модуль в отличие от множества всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$.

Уравнения Киллинга (2.7) представляют собой систему линейных уравнений в частных производных первого порядка на компоненты векторных полей Киллинга. Эта система переопределена: мы имеем $n(n+1)/2$ уравнений на $n$ неизвестных компонент $K^\alpha(x)$ (или $K_\alpha(x)$). Ниже мы увидим, что общее решение уравнений Киллинга при фиксированной метрике не содержит функционального произвола, но может зависеть от нескольких параметров, число которых совпадает с числом линейно независимых решений. Максимальное число независимых параметров в общем решении $n(n+1)/2$ достигается на пространствах постоянной кривизны (теорема 2.3.2).

В дальнейшем нам понадобится также следующее наблюдение. Допустим, что метрика $g_{\alpha\beta}(x,t)$ зависит от некоторого параметра $t \in \mathbb{R}$ и для каждого значения $t$ уравнения Киллинга выполнены при фиксированном векторном поле Киллинга (которое не зависит от $t$). Тогда разность метрик для различных значений параметра, $g_{\alpha\beta}(x,t_2) - g_{\alpha\beta}(x,t_1)$, также будет удовлетворять уравнениям Киллинга. Отсюда следует, что производная $\partial_t g_{\alpha\beta}$ является инвариантным тензором второго ранга.

С каждым полем Киллинга, как и с произвольным полным векторным полем, связана однопараметрическая группа преобразований, которая в данном случае сохраняет метрику.

Предложение 2.1.2. *Пусть (псевдо)риманово многообразие* $(\mathbb{M}, g)$ *имеет* $\mathrm{N} \leqslant \dim\mathbb{M}$ *отличных от нуля коммутирующих между собой и линейно независимых векторных полей Киллинга* $K_i$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$. *Тогда существует такая система координат, в которой все компоненты метрики не зависят от* $\mathrm{N}$ *координат, соответствующих траекториям Киллинга. Обратно. Если в некоторой системе координат компоненты метрики не зависят от* $\mathrm{N}$ *координат, то метрика* $g$ *допускает локально по крайней мере* $\mathrm{N}$ *коммутирующих между собой векторных полей Киллинга.*

Доказательство. Мы дадим доказательство предложения только для несветоподобных векторных полей. Для каждого ненулевого векторного поля локально существует система координат, в которой оно имеет только одну нетривиальную компоненту, и она равна единице. Применительно к коммутирующим векторным полям Киллинга $K_i$ это означает, что существует такая система координат $(x^1, \dots, x^n)$, в которой каждое поле Киллинга имеет только одну постоянную компоненту, $K_i = \partial_i$. В этой системе координат уравнение (2.7) для каждого поля Киллинга принимает особенно простой вид

$$\partial_i g_{\alpha\beta} = 0, \qquad i = 1, \dots, \mathrm{N}. \tag{2.8}$$

Это значит, что все компоненты метрики не зависят от координат $x^i$. В этой системе координат траектории Киллинга определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = 1, \quad \dot{x}^\mu = 0, \qquad \mu \neq i.$$

Отсюда следует, что координатные линии $x^i$ являются траекториями Киллинга.

Обратно. Если метрика не зависит от $\mathrm{N}$ координат, то выполнены уравнения (2.8). Эти уравнения совпадают с уравнениями Киллинга для векторных полей $K_i := \partial_i$, которые коммутируют.

Согласно сформулированной теореме, в предельном случае, когда количество коммутирующих полей Киллинга равно размерности многообразия, $\mathrm{N} = n$, существует такая система координат, в которой все компоненты инвариантной метрики постоянны.

Пример 2.1.2. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в декартовой системе координат $x^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, компоненты метрики постоянны, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Эта метрика допускает $n$ коммутирующих между собой векторных полей Киллинга $K_\alpha := \partial_\alpha$, которые соответствуют трансляциям. Все координатные оси являются траекториями Киллинга.

Если риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ имеет два или более некоммутирующих векторных полей Киллинга, то это отнюдь не означает, что существует такая система координат, в которой компоненты метрики не зависят от двух или более координат.

Пример 2.1.3. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть метрика $g$ на сфере индуцирована обычным вложением. Риманово пространство $(\mathbb{S}^2, g)$ имеет три векторных поля Киллинга, соответствующих $\mathbb{SO}(3)$ вращениям евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Легко понять, что на сфере не существует локальной системы координат, в которой компоненты метрики не зависели бы от двух координат. Действительно, это означает, что в данной системе координат компоненты метрики постоянны, и, следовательно, кривизна равна нулю. Но это невозможно, поскольку кривизна сферы постоянна и отлична от нуля.

В общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время является псевдоримановым многообразием с метрикой лоренцевой сигнатуры. Используя понятие векторного поля Киллинга, можно дать инвариантное

Определение. Пространство-время или его область называются *стационарными*, если на них существует времениподобное векторное поле Киллинга.

В стационарном пространстве-времени интегральную кривую времениподобного векторного поля можно выбрать в качестве временно́й координаты. Тогда согласно предложению 2.1.2 в этой системе координат компоненты метрики не будут зависеть от времени, что оправдывает название “стационарное”.

Векторные поля Киллинга определены глобально и удовлетворяют уравнениям Киллинга на всем $\mathbb{M}$. В то же время уравнения Киллинга – это локальный объект, в том смысле, что они определены в каждой окрестности и могут иметь нетривиальные решения только на некотором подмногообразии $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

Пример 2.1.4. Рассмотрим гладкую замкнутую двумерную поверхность $\mathbb{M}$, вложенную в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, как показано на рис. 2.1. Отличительной особенностью этой поверхности является то, что ее нижняя часть является плоской. Пусть метрика на $\mathbb{M}$ индуцирована вложением $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. При этом функции, задающие вложение, можно подобрать таким образом, чтобы метрика была гладкой. Тогда уравнения Киллинга в нижней части поверхности легко интегрируются, как и на евклидовой плоскости. Однако найденные нетривиальные решения не будут в общем случае нетривиальными во всех точках $\mathbb{M}$. Действительно, верхняя часть поверхности может быть искривлена так, что уравнения Киллинга на ней имеют только тривиальное решение. Следовательно, векторные поля Киллинга могут быть нетривиальны только на части многообразия $\mathbb{M}$. Заметим, что в рассматриваемом примере траектории Киллинга не являются полными. Действительно, поля Киллинга $\partial_x$ и $\partial_y$, соответствующие трансляциям, имеют единичную длину в той части поверхности, где она касается плоскости $x, y$, а вне этой части равны нулю. Следовательно, они разрывны, и траектории Киллинга имеют конечную длину.

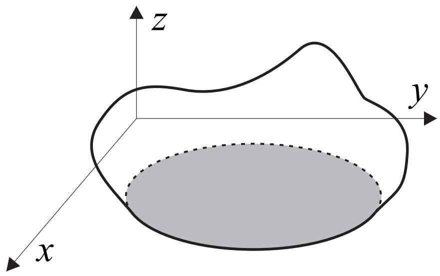


Рис. 2.1. Двумерная поверхность, вложенная в трехмерное евклидово пространство. Нижняя часть поверхности является плоской

## 2.2. Свойства векторных полей Киллинга

Векторные поля Киллинга обладают рядом замечательных свойств. Начнем с простейших.

Предложение 2.2.1. *Длина вектора Киллинга остается постоянной вдоль траектории Киллинга*:

$$\mathsf{L}_K K^2 = \nabla_K K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Свернем уравнения Киллинга (2.4) с $K^\alpha K^\beta$:

$$2K^\alpha K^\beta \nabla_\alpha K_\beta = K^\alpha \nabla_\alpha K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0.$$

Следствие. Если векторные поля Киллинга существуют на лоренцевом многообразии, то они имеют определенную ориентацию: времениподобную, светоподобную или пространственноподобную.

Метрика $g$ на многообразии $\mathbb{M}$ определяет два типа выделенных кривых: экстремали (или геодезические, если связность Леви-Чивиты) и траектории Киллинга, если они существуют. Сравним траектории Киллинга с экстремалями [22].

Предложение 2.2.2. *Пусть* $(\mathbb{M}, g)$ – *(псевдо)риманово многообразие с векторным полем Киллинга* $K$. *Траектории Киллинга являются экстремалями тогда и только тогда, когда их длина постоянна на* $\mathbb{M}$, $K^2 = \mathsf{const}$ *для всех* $x \in \mathbb{M}$.

Доказательство. Рассмотрим траектории Киллинга $x^\alpha(t)$, которые определяются системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \tag{2.10}$$

Длина дуги траектории Киллинга

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta dt^2 = K^2 dt^2$$

постоянна вдоль траектории, т.е. параметр $t$ пропорционален длине и, следовательно, является каноническим. Дифференцируя уравнение (2.10) по каноническому параметру $t$, получим равенство

$$\ddot{x}^\alpha = \partial_\beta K^\alpha \dot{x}^\beta = (\nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha K^\gamma)\dot{x}^\beta,$$

которое перепишем в виде

$$\ddot{x}^\alpha = K^\beta \nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \tag{2.11}$$

Уравнения Киллинга позволяют переписать первое слагаемое в правой части в виде

$$K^\beta \nabla_\beta K^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2.$$

Тогда уравнения (2.11) примут вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\beta K^2 - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma.$$

Это уравнение совпадает с уравнением для экстремалей (3.24) тогда и только тогда, когда $K^2 = \mathsf{const}$.

Доказанное утверждение показывает, что далеко не каждая траектория Киллинга является экстремалью.

Пример 2.2.1. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой. Эта метрика инвариантна относительно трехпараметрической неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(2)$. Обозначим декартовы и полярные координаты на плоскости соответственно через $x, y$ и $r, \varphi$. Тогда векторные поля Киллинга имеют вид $K_1 = \partial_\varphi$ для вращений вокруг начала координат и $K_2 = \partial_x$, $K_3 = \partial_y$ для сдвигов. Квадраты длин векторов Киллинга равны:

$$K_1^2 = r^2, \qquad K_2^2 = K_3^2 = 1.$$

Векторы Киллинга $K_2$ и $K_3$ имеют постоянную длину на всей плоскости, их траекториями Киллинга являются прямые линии, которые являются экстремалями. Это согласуется с предложением 2.2.2. Траекториями Киллинга для вращений $K_1$ являются концентрические окружности с центром в начале координат. Длина вектора Киллинга $K_1$ постоянна на траекториях в соответствии с предложением 2.2.1, однако не постоянна на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Соответствующие траектории Киллинга – окружности – не являются экстремалями.

Пример 2.2.2. Рассмотрим полупростую группу Ли $\mathbb{G}$ как (псевдо)риманово пространство с формой Киллинга–Картана в качестве метрики. Это – пространство постоянной кривизны. Левоинвариантные векторные поля генерируют групповые преобразования справа, а правоинвариантные – слева. Групповые преобразования слева и справа сохраняют метрику, и, следовательно, лево- и правоинвариантные векторные поля являются полями Киллинга. Длина этих полей Киллинга равна $\pm 1$. Поэтому соответствующие траектории Киллинга являются экстремалями.

Свертывая уравнения Киллинга (2.4) с метрикой, получаем, что дивергенция поля Киллинга равна нулю:

$$\nabla_\alpha K^\alpha = 0. \tag{2.12}$$

Ковариантная производная $\nabla^\beta$ со связностью Леви-Чивиты от уравнения Киллинга (2.4) с учетом уравнения

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta - T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta K_\gamma \tag{2.13}$$

для перестановки ковариантных производных (см. [23]) и уравнения (2.12) приводит к уравнению

$$\nabla^\beta(\nabla_\beta K_\alpha + \nabla_\alpha K_\beta) = \Delta K_\alpha + (\nabla^\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla^\beta) K_\beta = 0,$$

где $\Delta := \nabla^\beta \nabla_\beta$ – оператор Лапласа–Бельтрами на многообразии $\mathbb{M}$ и учтено равенство (2.12). Отсюда вытекает уравнение на компоненты векторов Киллинга

$$\Delta K_\alpha = R_{\alpha\beta} K^\beta. \tag{2.14}$$

Для пространств постоянной кривизны вида (2.28) тензор Риччи выражается через скалярную кривизну (2.27), и уравнение (2.14) принимает вид

$$\Delta K_\alpha = \frac{R}{n} K_\alpha, \qquad R = \mathsf{const}.$$

То есть каждая компонента формы Киллинга является собственным вектором оператора Лапласа–Бельтрами.

Предложение 2.2.3. *Пусть $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ – два произвольных векторных поля на (псевдо)римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$ и $K$ – векторное поле Киллинга. Тогда справедливо равенство*

$$g\big((\mathsf{L}_K - \nabla_K)X, Y\big) + g\big(X, (\mathsf{L}_K - \nabla_K)Y\big) = 0,$$

*где $\mathsf{L}_K X = [K, X]$ – производная Ли и $\nabla_K X = K^\alpha(\partial_\alpha X^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta X^\gamma)\partial_\beta$ – ковариантная производная векторного поля $X$ вдоль поля Киллинга $K$.*

Доказательство. Прямая проверка с учетом явного выражения для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}) \tag{2.15}$$

и уравнения Киллинга (2.4).

### 2.3. Однородные и изотропные многообразия

Рассмотрим геодезически полное (псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$, метрика которого допускает одно или несколько полных векторных полей Киллинга. Уравнения Киллинга (2.4) налагают сильные ограничения на векторные поля Киллинга, которые мы сейчас обсудим. Воспользовавшись тождеством для коммутатора ковариантных производных (2.13), получаем равенство

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta. \tag{2.16}$$

Теперь воспользуемся тождеством

$$R_{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\beta\gamma\alpha\delta} + R_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0 \tag{2.17}$$

для тензора кривизны (см. [23], глава 6) и уравнениями Киллинга (2.4). В результате получим тождество для векторных полей Киллинга:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = 0,$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов. Это равенство позволяет переписать уравнение (2.16) в виде

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta K_\delta. \tag{2.18}$$

Если свернуть данное уравнение по индексам $\gamma, \alpha$, то получим в точности уравнение (2.14) из предыдущего раздела.

Полученное равенство (2.18) является следствием уравнений Киллинга, но не эквивалентно им. Тем не менее оно позволяет сделать важные выводы. Предположим, что векторные поля Киллинга вещественно аналитичны, т.е. в окрестности произвольной точки многообразия $p \in \mathbb{M}$ компоненты векторного поля Киллинга разлагаются в ряд Тейлора, который сходится в некоторой окрестности этой точки $\mathbb{U}_p$. Допустим, что в точке $p \in \mathbb{M}$ нам заданы компоненты формы Киллинга $K_\alpha(p)$ и их первых производных $\partial_\beta K_\alpha(p)$. Тогда соотношения (2.18) позволяют вычислить все вторые производные от компонент формы Киллинга $\partial^2_{\beta\gamma} K_\alpha$ в той же точке $p$. Теперь возьмем ковариантную производную от равенства (2.18) и получим некоторое соотношение, линейное по третьим производным. Из него можно найти все третьи производные от вектора Киллинга и т.д. до бесконечности. Важно отметить, что все соотношения линейны по компонентам формы Киллинга и их производным. Это значит, что в окрестности $\mathbb{U}_p$ компоненты формы Киллинга имеют вид

$$K_\alpha(x,p) = A_\alpha{}^\beta(x,p)K_\beta(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)\big[\partial_\beta K_\gamma(p) - \partial_\gamma K_\beta(p)\big], \tag{2.19}$$

где $A_\alpha{}^\beta(x,p)$ и $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)$ – некоторые функции. Антисимметрия последнего слагаемого по индексам $\beta,\gamma$ связана с тем, что симметризованная частная производная выражается через компоненты формы Киллинга в силу уравнения Киллинга (2.4). Таким образом, компоненты формы Киллинга в окрестности $\mathbb{U}_p$ являются линейными функциями от компонент формы Киллинга в точке $p$ и ее внешней производной в той же точке.

У формы Киллинга $K_\alpha(x,p)$ второй аргумент $p$ означает, что эта форма имеет определенные свойства в точке $p\in\mathbb{M}$. По предположению, представление (2.19) справедливо для всех точек многообразия $p\in\mathbb{M}$, необходимо только задать значения $K(p)$ и $dK(p)$. Мы предполагаем, что функции $K_\alpha(x,p)$ вещественно аналитичны и по $x$, и по $p$.

По предположению, компоненты формы Киллинга разлагаются в ряды Тейлора в окрестности каждой точки $p\in\mathbb{M}$. Обозначим через $\mathbb{U}_p$ окрестность точки $p$, в которой разложение (2.19) справедливо и обратимо, т.е. аргументы $x$ и $p$ можно поменять местами для некоторых новых матриц $A$ и $B$. Рассмотрим точку $q$, которая лежит вне $\mathbb{U}_p$. Для этой точки также справедливо обратимое разложение вида (2.19) в некоторой окрестности $\mathbb{U}_q$. Предположим, что точка $q$ лежит достаточно близко к $\mathbb{U}_p$ так, что окрестности пересекаются, $\mathbb{U}_p\cap\mathbb{U}_q\neq\emptyset$. Тогда для всех точек из пересечения $x\in\mathbb{U}_p\cap\mathbb{U}_q$ справедливо разложение (2.19) по компонентам форм Киллинга $K(p)$ и $K(q)$ и их внешним производным. Отсюда следует, что компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке $q$ линейно выражаются через компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке $p$. Таким образом, разложение (2.19) справедливо также в объединении $\mathbb{U}_p\cup\mathbb{U}_q$. Это построение можно продолжить на все многообразие $\mathbb{M}$. Поэтому разложение (2.19) справедливо для всех точек $x,p\in\mathbb{M}$.

Теперь предположим, что (псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M},g)$ имеет несколько векторных полей Киллинга $K_i$, $i=1,\dots,\mathrm{N}$. Тогда для каждого векторного поля Киллинга справедливо разложение (2.19)

$$K_{i\alpha}(x,p) = A_\alpha{}^\beta(x,p)K_{i\beta}(p) + B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)\big[\partial_\beta K_{i\gamma}(p) - \partial_\gamma K_{i\beta}(p)\big]. \tag{2.20}$$

Функции $A_\alpha{}^\beta(x,p)$ и $B_\alpha{}^{\beta\gamma}(x,p)$ одинаковы для всех форм Киллинга, потому что определяются соотношениями (2.18), которые линейны по компонентам форм Киллинга и их производным. Они полностью определяются метрикой, тензором кривизны и их ковариантными производными. В полученном разложении точка $p\in\mathbb{M}$ произвольна, но фиксирована, а точка $x\in\mathbb{M}$ пробегает все многообразие.

Соотношение (2.18) представляет собой систему уравнений в частных производных на компоненты формы Киллинга, у которой есть нетривиальные условия разрешимости. Одно из этих условий в ковариантной форме имеет вид

$$[\nabla_\gamma\nabla_\delta]\,\nabla_\alpha K_\beta = -R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon\nabla_\epsilon K_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon\nabla_\alpha K_\epsilon,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор ковариантных производных. Подстановка в левую часть этого уравнения исходного выражения для вторых производных от формы Киллинга (2.18) после несложных алгебраических преобразований приводит к равенству

$$\Big(R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon\delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon\delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon\delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon\delta_\alpha^\zeta\Big)\,\nabla_\zeta K_\epsilon = \left(\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon - \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon\right)K_\epsilon. \tag{2.21}$$

Если кривизна нетривиальна, то это уравнение дает некоторые линейные соотношения между компонентами формы Киллинга $K_\alpha$ и их ковариантными производными $\nabla_\beta K_\alpha$. Наоборот, если существует некоторая информация в формах Киллинга, то полученное уравнение может определить структуру тензора кривизны. В теореме 2.3.2, которая сформулирована ниже, соотношение (2.21) использовано для доказательства того, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны.

Перейдем к определениям.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ размерности $\dim\mathbb{M} = n$ называется *однородным в точке* $p \in \mathbb{M}$, если существуют инфинитезимальные изометрии, которые переводят эту точку в любую другую точку из некоторой окрестности $\mathbb{U}_p$ этой точки. Другими словами, метрика должна допускать такие векторные поля Киллинга, которые в точке $p$ имеют все возможные направления. Поскольку векторы Киллинга образуют линейное пространство, то в сопряженном пространстве необходимо и достаточно существования такого набора из $n$ форм Киллинга $K^{(\gamma)} = dx^\alpha K_\alpha{}^{(\gamma)}(x, p)$, где индекс $\gamma$ в скобках нумерует формы Киллинга, что выполнены условия:

$$K_\alpha{}^{(\gamma)}(p, p) = \delta_\alpha^\gamma. \tag{2.22}$$

Если (псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ однородно в каждой своей точке, то оно называется *однородным.* При этом предполагается, что все векторные поля Киллинга полны. Другими словами, группа изометрий действует на $\mathbb{M}$ транзитивно.

(Псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ называется *изотропным в точке* $p \in \mathbb{M}$, если существуют такие инфинитезимальные изометрии с формами Киллинга $K(x, p)$, которые оставляют эту точку на месте, т.е. $K(p, p) = 0$, и для которых внешняя производная $dK(x, p)$ в точке $p$ принимает любое значение в пространстве 2-форм $\Lambda_2(\mathbb{M})|_p$ в точке $p$. Для этого необходимо и достаточно существования такого набора из $\frac{1}{2}n(n-1)$ форм Киллинга $K^{[\gamma\delta]} = -K^{[\delta\gamma]} = dx^\alpha K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x, p)$, где индексы $\gamma, \delta$ нумеруют формы Киллинга, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(p, p) &= 0, \\ \left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial x^\alpha}\right|_{x=p} &= \delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Если (псевдо)риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ изотропно в каждой своей точке, то оно называется *изотропным.* При этом предполагается, что все векторные поля Киллинга полны.

В силу непрерывности, наборы форм $K^{(\gamma)}$ и $K^{[\gamma\delta]}$ линейно независимы в некоторой окрестности точки $p$.

Теорема 2.3.1. *Любое изотропное (псевдо)риманово многообразие* $(\mathbb{M}, g)$ *является также однородным.*

Доказательство. Если многообразие изотропно, то формы Киллинга $K^{[\gamma,\delta]}(x, p)$ и $K^{[\gamma,\delta]}(x, p + dp)$ удовлетворяют условиям (2.23) в близких точках $p$ и $p + dp$ соответственно. Любая их линейная комбинация будет формой Киллинга и, следовательно, произвольная линейная комбинация производных

$$c^\alpha \frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} := c^\alpha \lim_{dp^\alpha \to 0} \frac{K_\beta{}^{[\gamma,\delta]}(x, p + dp) - K_\beta{}^{[\gamma,\delta]}(x, p)}{dp^\alpha}$$

также будет формой Киллинга для любого набора постоянных $c^\alpha$. Вычислим производную по $x$ формы Киллинга $K^{[\gamma\delta]}$ в точке $p$. Из первого условия в (2.23) следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial p^\alpha}K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(p,p)=\left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial x^\alpha}\right|_{x=p}+\left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}\right|_{x=p}=0.$$

Откуда, с учетом второго условия в (2.23), получаем равенство

$$\left.\frac{\partial K_\beta{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\alpha}\right|_{x=p}=-\delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}+\delta^{\delta\gamma}_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует, что из форм Киллинга $K^{[\gamma\delta]}$ можно построить форму Киллинга, которая в точке $p$ принимает любое заданное значение $dx^\alpha a_\alpha$, где $a_\alpha\in\mathbb{R}$. Для этого достаточно положить

$$K_\alpha:=\frac{a_\gamma}{n-1}\frac{\partial K_\alpha{}^{[\gamma\delta]}(x,p)}{\partial p^\delta}.$$

Выбрав соответствующим образом постоянные $a_\gamma$, получим набор форм Киллинга, который удовлетворяет условиям (2.22).

Из данной теоремы вытекает, что достаточно говорить изотропное пространство, однако мы предпочитаем традиционное название “однородное и изотропное пространство”, так как оно отражает важные физические свойства.

Теорема 2.3.2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ *инфинитезимальных изометрий связного (псевдо)риманова многообразия* $\mathbb{M}$ *имеет размерность не более чем* $\frac12 n(n+1)$, *где* $n:=\dim\mathbb{M}$. *Если размерность максимальна,* $\dim\mathfrak{i}(\mathbb{M})=\frac12 n(n+1)$, *то многообразие* $\mathbb{M}$ *является однородным и изотропным и представляет собой пространство постоянной кривизны.*

Доказательство. Размерность алгебры Ли $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$ равна максимальному числу линейно независимых векторных полей Киллинга на многообразии $\mathbb{M}$. Из равенства (2.20) следует, что число независимых векторных полей Киллинга $\mathrm{N}$ не может превышать числа независимых компонент формы $\{K_\alpha(p)\}$ и ее внешней производной $\{\partial_\beta K_\alpha(p)-\partial_\alpha K_\beta(p)\}$ в фиксированной точке $p\in\mathbb{M}$. Число независимых компонент любой 1-формы в фиксированной точке не превосходит $n$, а число независимых компонент внешней производной не может превышать $\frac12 n(n-1)$. Поэтому справедливо следующее ограничение на размерность алгебры Ли векторных полей Киллинга:

$$\dim\mathfrak{i}(\mathbb{M})\leqslant n+\frac12 n(n-1)=\frac12 n(n+1).$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

В этом месте важна вещественная аналитичность метрики, так как она была использована при получении представления (2.20).

Связность многообразия $\mathbb{M}$ необходима для того, чтобы число независимых векторных полей Киллинга было определено. В противном случае, если многообразие $\mathbb{M}$ имеет несколько компонент связности, число независимых векторных полей Киллинга может отличаться для каждой компоненты связности.

Однородные и изотропные многообразия имеют максимальное число $\frac12 n(n+1)$ векторных полей Киллинга и, в силу разложения (2.20), определяют все возможные векторы Киллинга на многообразии $\mathbb{M}$. Следовательно, если некоторое многообразие имеет максимальное число независимых полей Киллинга, то оно с необходимостью должно быть однородным и изотропным.

Теперь докажем, что любое однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Если пространство однородно и изотропно, то для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ найдутся такие формы Киллинга, для которых $K_\alpha(x) = 0$, а $\nabla_\beta K_\alpha(x)$ является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что антисимметризированный коэффициент при $\nabla_\zeta K_\epsilon$ в уравнении (2.21) должен быть равен нулю, что приводит к равенству

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon\delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon\delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon\delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon\delta_\alpha^\zeta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\zeta\delta_\delta^\epsilon - R_{\alpha\beta\delta}{}^\zeta\delta_\gamma^\epsilon + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\zeta\delta_\beta^\epsilon - R_{\gamma\delta\beta}{}^\zeta\delta_\alpha^\epsilon. \tag{2.24}$$

Если пространство однородно и изотропно, то для произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ существуют также такие формы Киллинга, которые принимают в этой точке произвольные значения. Следовательно, из уравнений (2.21) и (2.24) вытекает равенство

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon = \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon. \tag{2.25}$$

Теперь свернем уравнение (2.24) по индексам $\delta, \zeta$ и опустим верхний индекс. В результате получим выражение тензора кривизны через тензор Риччи и метрику:

$$(n-1)R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}. \tag{2.26}$$

Правая часть этой формулы должна быть антисимметрична по индексам $\delta, \gamma$. Поэтому возникает дополнительное ограничение

$$R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} = -R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}.$$

Свертка полученного равенства по индексам $\beta, \gamma$ дает связь между тензором Риччи и скалярной кривизной:

$$R_{\alpha\delta} = \frac{1}{n}Rg_{\alpha\delta}. \tag{2.27}$$

Подстановка этого выражения в (2.26) приводит к следующему выражению для полного тензора кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{n(n-1)}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right). \tag{2.28}$$

Теперь осталось доказать, что скалярная кривизна $R$ однородного и изотропного пространства постоянна. Для этой цели используем свернутые тождества Бианки (см. [23], глава 6)

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 0.$$

Подставляя в это тождество выражение для тензора Риччи (2.27), получаем условие

$$\left(\frac{2}{n} - 1\right)\partial_\alpha R = 0.$$

При $n \geqslant 3$ отсюда следует, что $R = \mathsf{const}$.

Случай $n = 2$ требует особого рассмотрения. Свертка равенства (2.25) по индексам $\beta, \epsilon$ приводит к равенству

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\delta} - \nabla_\delta R_{\alpha\gamma} = 0.$$

Дальнейшая свертка с $g^{\alpha\delta}$ с учетом уравнения (2.27) приводит к условию $\partial_\gamma R = 0$, т.е. $R = \mathsf{const}$ и при $n = 2$.

Таким образом, скалярная кривизна в выражении для полного тензора кривизны (2.28) равна константе, $R = \mathsf{const}$, и максимально симметричное (псевдо)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны.

Пример 2.3.1. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, на котором задана метрика нулевой кривизны, т.е. $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Ясно, что это пространство постоянной нулевой кривизны. Тогда в $\mathbb{R}^n$ существует такая система координат $x^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$, в которой все компоненты метрики постоянны. В этой системе координат символы Кристоффеля равны нулю и уравнение для векторов Киллинга (2.18) принимает простой вид:

$$\partial^2_{\beta\gamma} K_\alpha = 0.$$

Общее решение этого уравнения линейно по координатам:

$$K_\alpha(x) = a_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\beta,$$

где $a_\alpha$ и $b_{\alpha\beta}$ – некоторые постоянные. Из уравнения Киллинга (2.4) следует, что это выражение задает форму Киллинга тогда и только тогда, когда матрица $b_{\alpha\beta}$ антисимметрична, т.е. $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$. Следовательно, можно задать $\frac{1}{2}n(n+1)$ линейно независимых форм Киллинга:

$$\begin{aligned} {K_\alpha}^{(\gamma)}(x) &= \delta^\gamma_\alpha, \\ {K_\alpha}^{[\gamma\delta]}(x) &= \delta^\delta_\alpha x^\gamma - \delta^\gamma_\alpha x^\delta. \end{aligned}$$

Тогда произвольная форма Киллинга выражается в виде линейной комбинации

$$K_\alpha = a_\gamma {K_\alpha}^{(\gamma)} + \frac{1}{2} b_{\delta\gamma} {K_\alpha}^{[\gamma\delta]}.$$

В полученном выражении $n$ векторов Киллинга $K^{(\gamma)}$ генерируют трансляции в $\mathbb{R}^n$ вдоль осей координат, а $\frac{1}{2}n(n-1)$ векторов $K^{[\gamma\delta]}$ – вращения вокруг начала координат. Таким образом, метрика пространства нулевой кривизны допускает максимальное число $\frac{1}{2}n(n+1)$ векторов Киллинга и поэтому является однородным и изотропным пространством.

Известно, что линейным преобразованием координат $x^\alpha$ метрику можно преобразовать к диагональному виду, когда на диагонали будут стоять $\pm 1$, в зависимости от сигнатуры исходной метрики. Если метрика риманова (положительно определена), то после преобразования координат, она примет стандартный вид $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Эта метрика инвариантна относительно неоднородной группы вращений $\mathbb{IO}(n)$.

Выше мы доказали, что любое однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Верно также обратное утверждение, которое мы сформулируем в несколько этапов.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $(\mathbb{M}, g)$ *– (псевдо)риманово пространство постоянной кривизны и сигнатуры* $(p, q)$ *с тензором кривизны вида* (2.28), *где* $R = \mathsf{const}$ *– скалярная кривизна. Тогда в некоторой окрестности произвольной точки* $x \in \mathbb{M}$ *существует такая система координат (стереографическая), в которой метрика имеет вид*

$$ds^2 = \frac{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{\left(1 - \frac{Rx^2}{8}\right)^2}, \tag{2.29}$$

*где* $\eta := \mathsf{diag}\,(\underbrace{+\ldots+}_{p}\underbrace{-\ldots-}_{q})$ *и* $x^2 := \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$.

Доказательство. См., например, [24], теорема 2.4.12.

Следствие. Все пространства постоянной кривизны с одинаковой сигнатурой метрики и кривизной локально изометричны.

Замечание. При вейлевском преобразовании метрики $g_{\alpha\beta} \mapsto g'_{\alpha\beta} = kg_{\alpha\beta}$, $k > 0$, скалярная кривизна тоже умножается на постоянный множитель: $R \mapsto R' = R/k$. Поэтому все пространства постоянной положительной кривизны с помощью преобразования Вейля можно привести к случаю $R = 1$. Аналогично, все пространства постоянной отрицательной кривизны – к случаю $R = -1$.

Если $R = 0$, то полный тензор кривизны (2.28) равен нулю. Следовательно, пространство постоянной нулевой кривизны локально изометрично (псевдо)евклидову пространству $\mathbb{R}^{p,q}$, и формула (2.29) верна.

Рассмотрим случай $R \neq 0$. Метрика (2.29) является метрикой, которая индуцирована на сфере $\mathbb{S}^{p+q}$ или гиперболоиде $\mathbb{H}^{p+q}$, вложенными в (псевдо)евклидово пространство большей размерности $\mathbb{R}^{p+1,q}$. Действительно, пусть $u, x^\alpha$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^{p+1,q}$. Тогда метрика имеет вид

$$ds^2 := du^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{2.30}$$

Рассмотрим сферу (гиперболоид), вложенный в (псевдо)евклидово пространство $\mathbb{R}^{p+1,q}$ с помощью уравнения

$$u^2 + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = b, \qquad b = \mathsf{const} \neq 0. \tag{2.31}$$

Для простоты при проведении вычислений мы не будем следить за знаками и областями определения подкоренных выражений, которые зависят от знака постоянной $b$ и сигнатуры метрики $\eta_{\mu\nu}$. В каждом конкретном случае это легко проводится.

Введем в (псевдо)евклидовом подпространстве $\mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{R}^{p+1,q}$ сферические координаты $\{x^\alpha\} \mapsto \{r, \chi^1, \dots, \chi^{p+q-1}\}$, где $r$ – радиальная координата, а $\chi$ – угловые. Тогда метрика (2.30) и уравнение вложения (2.31) примут вид

$$ds^2 = du^2 + dr^2 + r^2 d\Omega, \tag{2.32}$$

$$u^2 + r^2 = b, \tag{2.33}$$

где $d\Omega$ – угловая часть (псевдо)евклидовой метрики, конкретный вид которой в данном случае не имеет значения. Из уравнения (2.33) следуют равенства:

$$u = \pm\sqrt{b - r^2} \qquad \Rightarrow \qquad du = \mp\frac{rdr}{\sqrt{b - r^2}}.$$

Подстановка дифференциала $du$ в выражение (2.32) приводит к индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{bdr^2}{b - r^2} + r^2 d\Omega. \tag{2.34}$$

Теперь заменим радиальную координату $r \mapsto \rho$

$$r := \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{4b}} \qquad \Rightarrow \qquad dr = \frac{1 - \frac{\rho^2}{4b}}{\left(1 + \frac{\rho^2}{4b}\right)^2}.$$

Тогда индуцированная метрика становится конформно (псевдо)евклидовой

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\Omega}{\left(1 + \frac{\rho^2}{4b}\right)^2}.$$

Возвращаясь к декартовым координатам $\{\rho, \chi^1, \dots, \chi^{p+q-1}\} \mapsto \{x^\alpha\}$, получаем метрику (2.29), где

$$R = -\frac{2}{b}.$$

Проведенное построение показывает, что пространство постоянной кривизны локально изометрично либо плоскому евклидову пространству ($R = 0$), либо сфере $\mathbb{S}^{p+q}$ или гиперболоиду $\mathbb{H}^{p+q}$ в зависимости от сигнатуры метрики и знака кривизны.

Евклидова метрика (2.30) и гиперповерхность, определенная уравнением (2.31), инвариантны относительно действия группы вращений $\mathbb{O}(p+1, q)$. Поскольку

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{O}(p+1, q) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n := p + q,$$

то число векторных полей Киллинга максимально, и пространство постоянной кривизны однородно и изотропно как следствие теоремы 2.3.2.

## 2.4. Симметричные тензоры на пространстве постоянной кривизны

В разделе 2.3 мы выяснили, что однородные и изотропные $n$-мерные многообразия с необходимостью являются пространствами постоянной кривизны, которые имеют максимальное число $n(n+1)/2$ линейно независимых векторных полей Киллинга. Более того, если под пространством постоянной кривизны понимать (псевдо)риманово многообразие с метрикой, удовлетворяющей условию (2.28), где скалярная кривизна $R$ постоянна, то пространство постоянной кривизны определяется, по существу, единственным образом сигнатурой метрики и знаком скалярной кривизны. Такие пространства часто встречаются в приложениях, причем помимо метрики на таких многообразиях, как правило, задаются дополнительные тензорные поля, например поля материи. Для того чтобы вся модель была максимально симметричной, необходимо потребовать симметрию не только от метрики, но и от всех остальных полей. В настоящем разделе мы получим условия, которые налагают требования однородности и изотропии на простейшие тензорные поля, заданные на пространстве постоянной кривизны.

Пусть на $n$-мерном пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ помимо метрики $g_{\alpha\beta}$ задано произвольное тензорное поле

$$T = dx^\alpha \otimes \dots \otimes dx^\beta \, T_{\alpha\dots\beta}.$$

Для определенности мы рассмотрим ковариантные тензорные поля. Пусть задана изометрия $\imath: x \mapsto x'$. Тогда условие симметрии тензорного поля относительно действия данной изометрии имеет тот же вид, что и для метрики (2.1):

$$T(x) = \imath^* T(x'),$$

где $\imath^*$ – отображение дифференциальных форм. В компонентах это условие принимает вид

$$T_{\alpha\dots\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} T_{\gamma\dots\delta}(x'). \tag{2.35}$$

Пусть инфинитезимальные изометрии генерируются векторными полями Киллинга $K = K^\alpha \partial_\alpha$. Тогда условие симметрии (2.35) запишется в виде равенства нулю производной Ли:

$$\mathsf{L}_K T = 0. \tag{2.36}$$

Такое же условие инвариантности должно выполняться и для произвольных тензорных полей, содержащих как ковариантные, так и контравариантные индексы.

Теперь рассмотрим простейшие случаи, которые часто встречаются в приложениях.

Пример 2.4.1. Пусть на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ задано дифференцируемое скалярное поле $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S})$ (функция). Тогда равенство нулю производной Ли примет вид

$$K^\alpha(x)\partial_\alpha\varphi(x) = 0.$$

Поскольку для пространства постоянной кривизны векторное поле Киллинга можно выбрать таким образом, что компоненты $K^\alpha(x)$ будут принимать произвольные значения в любой точке $x \in \mathbb{S}$, то отсюда вытекает условие постоянства скалярного поля $\varphi = \mathsf{const}$ на всем $\mathbb{S}$. Таким образом, однородное и изотропное скалярное поле на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ – это постоянная: $\varphi(x) = \mathsf{const}$ для всех $x \in \mathbb{S}$.

Пример 2.4.2. В качестве второго примера выберем дифференцируемое ковекторное поле $A = dx^\alpha A_\alpha$. Условие инвариантности (2.36) принимает вид

$$K^\beta\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha K^\beta A_\beta = 0.$$

Выберем векторное поле Киллинга таким образом, что $K^\beta(x) = 0$ в произвольной, но фиксированной точке $x \in \mathbb{S}$. Кроме этого, векторное поле Киллинга можно выбрать так, что частная производная $\partial_\beta K_\alpha$ будет антисимметрична и произвольна. Поскольку в выбранной точке $\partial_\alpha K^\beta = \nabla_\alpha K^\beta$, то справедливо равенство

$$\partial_\alpha K^\beta A_\beta = \partial_\alpha K_\beta A^\beta = \partial_\gamma K_\beta(\delta^\gamma_\alpha A^\beta).$$

Данное построение можно провести в произвольной точке многообразия $\mathbb{S}$, и, следовательно,

$$\delta^\gamma_\alpha A^\beta = \delta^\beta_\alpha A^\gamma.$$

После свертки по индексам $\alpha$ и $\gamma$ возникает соотношение

$$nA^\beta = A^\beta.$$

Поэтому, исключая тривиальный случай $n = 1$, после опускания индекса получаем равенство $A_\alpha = 0$. Следовательно, если ковекторное поле однородно и изотропно, то оно тождественно равно нулю.

Это же относится и к векторному полю $X = X^\alpha\partial_\alpha$: однородное и изотропное векторное поле на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ тождественно равно нулю.

Пример 2.4.3. В качестве третьего примера рассмотрим дифференцируемый ковариантный тензор второго ранга с компонентами $T_{\alpha\beta}$. Мы не предполагаем наличия какой-либо симметрии по индексам $\alpha$, $\beta$. Производная Ли от тензора второго ранга имеет вид

$$\mathsf{L}_K T_{\alpha\beta} = K^\gamma\partial_\gamma T_{\alpha\beta} + \partial_\alpha K^\gamma T_{\gamma\beta} + \partial_\beta K^\gamma T_{\alpha\gamma}.$$

Как и в предыдущем примере, выберем векторное поле Киллинга таким образом, чтобы в точке $x \in \mathbb{S}$ было выполнено равенство $K^\gamma(x) = 0$ и частная производная $\partial_\alpha K_\beta$ была антисимметрична и произвольна. Тогда из равенства нулю производной Ли вытекает равенство

$$\delta^\delta_\alpha T^\gamma{}_\beta + \delta^\delta_\beta T_\alpha{}^\gamma = \delta^\gamma_\alpha T^\delta{}_\beta + \delta^\gamma_\beta T_\alpha{}^\delta.$$

После свертки по индексам $\alpha, \delta$ и опускания $\gamma$ получаем соотношение

$$(n-1)T_{\gamma\beta} + T_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma}T, \qquad T := T_\alpha{}^\alpha.$$

Теперь поменяем местами индексы $\beta$ и $\gamma$ и вычтем полученное равенство:

$$(n-2)(T_{\gamma\beta} - T_{\gamma\beta}) = 0.$$

Отсюда следует, что при $n \neq 2$ инвариантный тензор второго ранга должен быть симметричен. С учетом симметрии получаем выражение для инвариантного тензора второго ранга:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{T}{n} g_{\alpha\beta}.$$

Поскольку след тензора $T$ – скаляр, то из его инвариантности вытекает, что он должен быть равен постоянной, как в примере 2.4.1. Таким образом, однородное и изотропное ковариантное тензорное поле второго ранга на пространстве постоянной кривизны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = C g_{\alpha\beta}, \qquad C = \text{const}. \tag{2.37}$$

Эта формула справедлива для $n \geqslant 3$ и для симметричной части тензора при $n = 2$.

В двумерном случае инвариантный тензор может иметь антисимметричную часть, пропорциональную $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ – полностью антисимметричному тензору второго ранга:

$$T_{[\alpha\beta]} = -T_{[\beta\alpha]} = C\varepsilon_{\alpha\beta},$$

если мы не учитываем пространственные отражения. При пространственных отражениях полностью антисимметричный тензор второго ранга меняет знак $\varepsilon_{\alpha\beta} \mapsto -\varepsilon_{\alpha\beta}$. Поэтому с учетом пространственных отражений наиболее общий вид однородного и изотропного тензора второго ранга при $n = 2$ такой же, как и в более высоких размерностях (2.37).

Аналогичное построение можно провести для инвариантного контравариантного тензора второго ранга и тензора со смешанными индексами:

$$T^{\alpha\beta} = C g^{\alpha\beta}, \qquad T^{\alpha}{}_{\beta} = C\delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Полученные формулы для симметричных тензоров будут использованы при построении космологических моделей, где роль $T_{\alpha\beta}$ будет играть тензор энергии-импульса полей материи.

## 2.5. Пространства с максимально симметричными подпространствами

Во многих важных с физической точки зрения случаях, например в космологии, (псевдо)риманово многообразие $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M} = n$, представляет собой топологическое произведение двух многообразий, $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, где $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, которую мы в дальнейшем отождествим со временем, и $\mathbb{S}$ – пространство постоянной кривизны. При этом каждой точке $t \in \mathbb{R}$ соответствует подмногообразие $\mathbb{S} \subset \mathbb{M}$. Поскольку $\mathbb{S}$ – пространство постоянной кривизны вида (2.28), то оно однородно и изотропно (теорема 2.3.2). Соответствующая группа изометрий на $\mathbb{S}$ генерируется $n(n-1)/2$ векторными полями Киллинга, где $n := \dim\mathbb{M}$. В настоящем разделе мы найдем наиболее общий вид метрики на $\mathbb{M}$, инвариантной относительно группы симметрий, которая порождается действием группы изометрий на $\mathbb{S}$.

Обозначим координаты на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$ через $x^\mu$, $\mu = 1, \dots, n-1$. Пусть компоненты инвариантной метрики на $\mathbb{S}$ будут $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$. По построению эта метрика однородна и изотропна. Она инвариантна относительно группы изометрий, генерируемых векторными полями Киллинга $K_i = K_i^\mu(x)\partial_\mu$, $i = 1, \dots, n(n-1)/2$.

Предположим, что на $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ задана достаточно гладкая метрика лоренцевой сигнатуры такая, что координата $t$ является временем, т.е. $g_{00} > 0$, и все сечения постоянного времени

$t =$ const пространственноподобны. Кроме этого, предположим, что сужение метрики на $\mathbb{S}$ при каждом значении $t \in \mathbb{R}$ совпадает с $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$. Ясно, что такая метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0\nu} \\ g_{\mu 0} & h_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

где $g_{00}(t,x)$ и $g_{0\mu}(t,x) = g_{\mu 0}(t,x)$ – произвольные функции от $t$ и $x$, а $h_{\mu\nu}(t,x)$ – метрика постоянной кривизны на $\mathbb{S}$, которая зависит от $t$ как от параметра. Все компоненты метрики предполагаются достаточно гладкими и по $t$, и по $x$. Поскольку метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то матрица

$$h_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}$$

отрицательно определена. Кроме этого, по предположению, матрица $h_{\mu\nu}$ также отрицательно определена.

Продолжим действие группы изометрий из $\mathbb{S}$ на все $\mathbb{M}$ следующим образом. Будем считать, что компоненты векторных полей Киллинга $K_i^\mu(t,x)$ зависят от $t$ как от параметра. Определим действие группы инфинитезимальных изометрий на $\mathbb{M}$ следующими равенствами:

$$\begin{aligned} t &\mapsto t' = t, \\ x^\mu &\mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon K^\mu + \mathsf{o}(\epsilon), \qquad \epsilon \ll 1, \end{aligned} \tag{2.39}$$

где $K$ – произвольный вектор Киллинга из алгебры Ли, порожденной векторами $K_i$. То есть преобразования не сдвигают точки вещественной прямой $t \in \mathbb{R} \subset \mathbb{M}$. Это означает, что векторные поля Киллинга продолжаются на все $\mathbb{M}$ таким образом, что у них не возникает дополнительных компонент: $K^0\partial_0 = 0$. Нетривиальность продолжения сводится лишь к тому, что пространственные компоненты векторов Киллинга теперь могут зависеть от $t$ как от параметра. Следовательно, алгебра Ли продолженных на $\mathbb{M}$ векторов Киллинга остается прежней.

Пример 2.5.1. В четырехмерном случае векторные поля Киллинга, продолженные на $\mathbb{M}$, порождают группу преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$, где

$$\mathbb{G} = \begin{cases} \mathbb{SO}(4), & \mathbb{S} = \mathbb{S}^3 \text{ – сфера}, \\ \mathbb{ISO}(3), & \mathbb{S} = \mathbb{R}^3 \text{ – евклидово пространство}, \\ \mathbb{SO}(3,1), & \mathbb{S} = \mathbb{H}^3 \text{ – двуполостный гиперболоид}. \end{cases}$$

Этот случай важен в космологии.

Теорема 2.5.1. *Если метрика* (2.38) *на* $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ *инвариантна относительно преобразований* (2.39), *то в окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой метрика имеет блочно-диагональный вид*

$$ds^2 = dt^2 + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.40}$$

*где* $h_{\mu\nu}(t,x)$ *– метрика постоянной кривизны на* $\mathbb{S}$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$. *В этой системе координат компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени*: $K^\mu = K^\mu(x)$.

Доказательство. Пусть $x^\mu$ – координаты на $\mathbb{S}$. Зафиксируем одну из гиперповерхностей $t =$ const. Касательный к ней вектор имеет только пространственные компоненты: $X = X^\mu\partial_\mu$. Ортогональный к ней вектор $n^\alpha\partial_\alpha$ должен удовлетворять равенству

$$n^0 X^\nu N_\nu + n^\mu X^\nu g_{\mu\nu} = 0,$$

где использована АДМ параметризация метрики, см. раздел 8.2. Поскольку данное равенство должно быть выполнено для всех $X$, то оно определяет пространственные компоненты нормальных векторов,

$$n^\mu = -n^0 N^\mu.$$

Следовательно, квадрат ортогонального вектора положителен:

$$(n,n) = (N^2 + N^\rho N_\rho)(n^0)^2 - 2(n^0)^2 N^\mu N_\mu + (n^0)^2 N^\mu N^\nu g_{\mu\nu} = N^2 (n^0)^2 > 0.$$

Поэтому вектор, ортогональный к пространственноподобной гиперповерхности, является времениподобным.

Выпустим из каждой точки гиперповерхности геодезическую (экстремаль), которая является времениподобной по построению. Выберем в качестве временно́й координаты длину геодезической $s$. Не ограничивая общности, можно считать, что фиксированная гиперповерхность соответствует значению $s = 0$. Тогда в некоторой окрестности поверхности $\mathbb{S}$ можно выбрать систему координат $\{x^0 := s, x^\mu\}$. Согласно предложению 7.12.3 в построенной таким образом системе координат метрика имеет блочно-диагональный вид в некоторой окрестности фиксированной поверхности:

$$g_{00} = 1, \qquad g_{0\mu} = g_{\mu 0} = 0, \qquad h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(s, x).$$

На исходной гиперповерхности $s = 0$ нулевая компонента вектора Киллинга равна нулю, $K^0(0, x) = 0$, по построению. Из $(0,0)$ компоненты уравнения Киллинга, которое удобнее использовать в форме (2.7), следует равенство $\partial_s K^0(s, x) = 0$. Это дифференциальное уравнение с начальным условием $K^0(0, x) = 0$ имеет единственное решение $K^0(s, x) = 0$ для всех значений координаты $s$, где определена система координат. Следовательно, все гиперповерхности, определяемые уравнением $s = \mathsf{const}$, будут инвариантными многообразиями, т.е. пространствами постоянной кривизны по крайней мере в некоторой окрестности исходной гиперповерхности.

Если метрика является блочно-диагональной (2.40), то $(0, \mu)$ компоненты уравнения Киллинга (2.7) принимают вид $\partial_s K^\mu = 0$. Отсюда следует, что компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени.

Пространственные $(\mu, \nu)$ компоненты уравнения Киллинга удовлетворяются, поскольку $K$ – векторы Киллинга на $\mathbb{S}$.

Возвращаясь к обозначению $s \mapsto t$, получаем метрику (2.40).

Если система координат выбрана таким образом, что инвариантная метрика на $\mathbb{M}$ имеет вид (2.40), то координатные линии $t$, проходящие через каждую точку $x \in \mathbb{S}$, являются геодезическими. Это следует из построения данной системы координат. Данное утверждение уже было доказано с помощью прямой проверки, предложение 7.12.4.

Если метрика имеет блочно-диагональный вид (2.40) и $K = K^\mu \partial_\mu$, то уравнения Киллинга (2.7) расщепляются на временны́е и пространственные компоненты:

$$(\alpha, \beta) = (0, 0): \qquad 0 = 0, \tag{2.41}$$

$$(\alpha, \beta) = (0, \mu): \qquad h_{\mu\nu} \partial_0 K^\nu = 0, \tag{2.42}$$

$$(\alpha, \beta) = (\mu, \nu): \qquad h_{\mu\rho} \partial_\nu K^\rho + h_{\nu\rho} \partial_\mu K^\rho + K^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.43}$$

Теорема 2.5.2. *В условиях теоремы 2.5.1 метрика (2.40) имеет вид*

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.44}$$

*где $a(t) > 0$ – произвольная вещественно аналитическая функция (масштабный множитель) и $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ – метрика пространства постоянной кривизны, зависящая только от $x \in \mathbb{S}$.*

Доказательство. Поскольку $h_{\mu\nu}(t,x)$ – метрика пространства постоянной кривизны на $\mathbb{S}$ для всех $t\in\mathbb{R}$, то уравнения Киллинга (2.43) выполнены. Из теоремы 2.5.1 следует, что векторные поля Киллинга не зависят от времени. Поэтому дифференцирование уравнения (2.43) по времени приводит к равенству

$$\dot h_{\mu\rho}\partial_\nu K^\rho+\dot h_{\nu\rho}\partial_\mu K^\rho+K^\rho\partial_\rho\dot h_{\mu\nu}=0.$$

Это значит, что производная метрики по времени $\dot h_{\mu\nu}$ является однородным и изотропным тензором второго ранга. Тогда из примера 2.4.3 вытекает, что производная метрики по времени пропорциональна самой метрике:

$$\dot h_{\mu\nu}=fh_{\mu\nu}, \tag{2.45}$$

где $f(t)$ – произвольная достаточно гладкая функция времени.

Если $f=0$, то доказывать нечего, и метрика имеет вид (2.44) с $a=\mathsf{const}$.

Пусть $f\ne0$. Тогда введем новую временну́ю координату $t\mapsto t'$, определяемую дифференциальным уравнением

$$dt'=f(t)dt.$$

Тогда уравнение (2.45) упростится

$$\frac{dh_{\mu\nu}}{dt'}=h_{\mu\nu}.$$

Его общее решение имеет вид

$$h_{\mu\nu}(t',x)=C\,\mathsf{e}^{t'}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x),\qquad C=\mathsf{const}\ne0,$$

где $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(x)$ – метрика на пространстве постоянной кривизны $\mathbb{S}$, которая не зависит от времени. Отсюда вытекает представление (2.44).

## 3. Геодезические и экстремали

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия, т.е. метрика $g$ и аффинная связность $\Gamma$. Тогда можно построить два типа выделенных кривых: геодезические и экстремали. Геодезические линии определяются только связностью как линии, касательный вектор к которым остается касательным при параллельном переносе. Экстремали, напротив, определяются только метрикой как линии экстремальной длины. Поскольку метрика и связность являются независимыми геометрическими объектами, то в общем случае геодезические линии и экстремали различны. В частном случае (псевдо)римановой геометрии, когда связностью является связность Леви-Чивиты, геодезические и экстремали совпадают.

В настоящей главе мы рассмотрим оба типа кривых, так как они играют важную роль в моделях математической физики. Достаточно сказать, что одним из постулатов общей теории относительности является предположение о том, что свободные точечные частицы, подверженные действию только гравитационных сил, движутся по экстремалям. Кроме того, понятие полноты многообразий связано также с экстремалями.

### 3.1. Геодезические

В аффинной геометрии $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ существует выделенное семейство линий, которые называются геодезическими. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma = x(t) = \{x^\alpha(t)\}$, где $-\infty \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant \infty$, на многообразии $\mathbb{M}$. Вектор скорости кривой, $u(t) = \{u^\alpha(t) := \dot{x}^\alpha(t)\}$, как всегда, предполагается отличным от нуля.

Определение. *Геодезической* линией на многообразии $\mathbb{M}$ называется кривая $x(t)$ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$, касательный вектор к которой остается касательным при параллельном переносе вдоль нее.

Замечание. В определении геодезической линии присутствует только аффинная связность. Поэтому понятие геодезической линии никакого отношения к метрике не имеет, которой может вообще не быть на многообразии.

Получим уравнения, которым должны удовлетворять координатные функции $x^\alpha(t)$ для того, чтобы кривая $\gamma$ была геодезической. Выберем произвольный отличный от нуля вектор $X_0$, который касается кривой $\gamma$ в некоторой точке $x(t_0)$, и разнесем его вдоль всей кривой с помощью параллельного переноса. В результате получим векторное поле $X\big(x(t)\big)$, определенное на кривой $\gamma$. Множество векторных полей, определенных на кривой $\gamma$, будем обозначать $\mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma)$. Из определения геодезической следует, что это векторное поле всюду касается $\gamma$ и, следовательно, пропорционально векторному полю скорости: $X^\alpha(t) = f(t)u^\alpha(t)$, где $f$ – некоторая отличная от нуля функция на $\gamma$. Изменим параметризацию кривой $t \mapsto s(t)$. Тогда условие параллельности примет вид

$$X^\alpha = f\frac{ds}{dt}\frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{3.1}$$

Выберем новый параметр вдоль геодезической таким образом, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{f},$$

которое всегда имеет решение, поскольку $f \neq 0$. Таким образом, на геодезической линии существует такая параметризация, что вектор скорости $u$ при параллельном переносе остается вектором скорости. В дальнейшем мы предполагаем, что параметр $t$ вдоль геодезической выбран таким образом, что $f = 1$. Если вектор скорости геодезической при параллельном переносе остается касательным, то ковариантная производная от него вдоль геодезической равна нулю (см. [23], глава 6):

$$\nabla_u u = u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta u^\gamma)\partial_\beta = 0. \tag{3.2}$$

Поскольку $d/dt = u^\alpha \partial_\alpha$, то это уравнение в компонентах принимает вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \tag{3.3}$$

Это уравнение не инвариантно относительно перепараметризации кривой. Однако оно допускает линейную замену параметра

$$t \mapsto at + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0. \tag{3.4}$$

Таким образом, мы получили критерий того, что кривая $x(t)$ является геодезической.

Предложение 3.1.1. *Кривая $x(t)$ на многообразии $\mathbb{M}$ с заданной аффинной связностью $\Gamma$ является геодезической тогда и только тогда, когда существует такая параметризация кривой, что ее координатные функции $x^\alpha(t)$ удовлетворяют системе уравнений* (3.3).

Замечание. В уравнение (3.2) входит частная производная $\partial_\alpha u^\beta$ от вектора скорости. Эта производная не определена, так как векторное поле скорости $u^\beta\big(x(t)\big)$ задано только вдоль кривой $\gamma$. Тем не менее в уравнение входит производная по направлению $u^\alpha \partial_\alpha u^\beta = \ddot{x}^\alpha$, которая имеет смысл. Это значит, что для определения частной производной $\partial_\alpha u^\beta$ векторное поле скорости можно продолжить в некоторую окрестность кривой $\gamma$ произвольным дифференцируемым образом, а конечный ответ от такого продолжения не зависит. Подобный трюк будет часто встречаться в дальнейшем.

Определение. Векторное поле $a(t)$, определенное вдоль произвольной кривой $x(t)$ на многообразии $\mathbb{M}$ с заданной связностью $\Gamma$,

$$a := \nabla_u u = \left(\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\right)\partial_\alpha, \tag{3.5}$$

называется *ускорением* кривой.

Сравнивая ускорение кривой с уравнением для геодезической, получаем, что кривая будет геодезической тогда и только тогда, когда ее ускорение равно нулю.

Ускорение кривой, так же как и скорость, является векторным полем вдоль кривой, $u, a \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma)$, и зависит от ее параметризации. При выводе уравнений геодезической линии (3.3) была выбрана специальная параметризация кривой $\gamma$.

Определение. Параметр $t$, по которому проводится дифференцирование в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3), определяющих геодезическую линию, называется *каноническим* или *аффинным*.

Поскольку уравнение (3.1) имеет тензорную форму, то канонический параметр не зависит от выбора системы координат на $\mathbb{M}$.

Предложение 3.1.2. *Любые два канонических параметра вдоль геодезической связаны между собой линейным преобразованием* (3.4).

Доказательство. Рассмотрим вопрос как меняется уравнение для геодезических при произвольной замене канонического параметра. При другой параметризации геодезической $x^\alpha(s)$, где $s = s(t)$, $ds/dt \neq 0$, уравнение (3.3) изменится:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^\alpha}{ds} = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что форма уравнений (3.3) не изменится тогда и только тогда, когда $d^2s/dt^2 = 0$, т.е. замена параметра является аффинной.

Уравнение (3.6) представляет собой уравнение геодезической $x(s)$ при произвольной параметризации кривой. Действительно, из правила дифференцирования сложной функции вытекает формула

$$\frac{d^2s}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -\frac{d^2t}{ds^2}\Big/\frac{dt}{ds},$$

где

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}.$$

Тогда уравнение для геодезической в произвольной параметризации примет вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} + \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}\Big/\frac{dt}{ds}. \tag{3.7}$$

Пример 3.1.1. В пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ точечная частица движется по некоторой мировой линии $x(t)$. Если в качестве параметра вдоль траектории выбрано время $t = x^0$, то скорость и ускорение кривой совпадают со скоростью и ускорением частицы. Если частица свободна, т.е. на нее не действуют никакие силы и, следовательно, ее ускорение равно нулю, то траекторией частицы будет одна из геодезических линий. Поскольку связность в $\mathbb{R}^{1,3}$ в декартовой системе координат имеет равные нулю компоненты, то уравнения (3.3) сводятся к уравнениям

$$\ddot{x}^\alpha = 0,$$

которые определяют прямые линии. Таким образом, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ прямые и только они являются геодезическими. Это значит, что свободная частица в пространстве Минковского равномерно движется вдоль прямой линии (первый закон Ньютона).

Геодезическая линия в аффинной геометрии обобщает понятие прямой в (псевдо)евклидовом пространстве, сохраняя то свойство, что касательный вектор остается касательным при параллельном переносе.

Пример 3.1.2. В пространствах абсолютного параллелизма, для которых тензор кривизны равен нулю $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = 0$, локально существует система координат, в которой симметричная часть аффинной связности равна нулю $\Gamma_{\{\alpha\beta\}}{}^\gamma = 0$. Поскольку геодезические линии (3.3) определяются только симметричной частью аффинной связности, то в этой системе координат геодезические являются прямыми линиями. В частности, если на группе Ли задана каноническая связность, т.е. параллельный перенос отождествлен с групповым действием справа, то такая система координат локально существует. Заметим, что в правоинвариантном базисе на группе Ли компоненты связности равны нулю, однако он не является голономным и не определяет ту систему координат, о которой идет речь.

Для двух параметризаций $x^\alpha(t)$ и $x^\alpha(s)$ одной геодезической справедливо равенство

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{dx^\beta}{ds}\partial_\beta\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

и уравнение (3.6) переписывается в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} &= -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} - \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\partial_\beta \ln\left|\frac{ds}{dt}\right| = \\ &= -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} - \frac{1}{2}\left(\delta^\alpha_\beta\partial_\gamma\ln\left|\frac{ds}{dt}\right| + \delta^\alpha_\gamma\partial_\beta\ln\left|\frac{ds}{dt}\right|\right)\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Будем говорить, что две геодезические линии $x^\alpha(t)$ и $x^\alpha(s)$ для различных связностей $\Gamma_{1\alpha\beta}{}^\gamma$ и $\Gamma_{2\alpha\beta}{}^\gamma$ на одном и том же многообразии $\mathbb{M}$ имеют одинаковую форму, если множества точек, через которые проходят геодезические линии, совпадают. Тогда из уравнения (3.8) следует критерий совпадения формы геодезических для двух аффинных связностей.

Теорема 3.1.1. *Для того чтобы форма геодезических $x^\alpha(t)$ и $x^\alpha(s)$, где $t$ и $s$ – канонические параметры, для двух аффинных связностей $\Gamma_{1\alpha\beta}{}^\gamma$ и $\Gamma_{2\alpha\beta}{}^\gamma$ на многообразии $\mathbb{M}$ совпадала, необходимо и достаточно, чтобы симметричные части этих связностей были связаны соотношением*

$$\Gamma_{2\{\alpha\beta\}}{}^\gamma = \Gamma_{1\{\alpha\beta\}}{}^\gamma + \frac{1}{2}\left(\delta^\gamma_\beta\partial_\alpha\varphi + \delta^\gamma_\alpha\partial_\beta\varphi\right), \tag{3.9}$$

*где $\varphi = \varphi(x)$ – некоторая функция, определяющая связь канонических параметров для каждой геодезической линии*

$$\frac{ds}{dt} = \mathsf{e}^\varphi. \tag{3.10}$$

Пусть задан диффеоморфизм многообразий

$$f: \quad \mathbb{M} \to \mathbb{N}$$

такой, что аффинная связность на $\mathbb{M}$ отображается в аффинную связность на $\mathbb{N}$. Тогда диффеоморфизм $f$ отображает геодезическую линию в геодезическую, поскольку определение геодезической линии инвариантно (не зависит от системы координат).

Уравнения для геодезических (3.3) – это система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому при достаточно гладких компонентах связности для однозначного решения задачи Коши необходимо задать начальную точку $\{x^\alpha(0)\}$ и вектор скорости $\{\dot{x}^\alpha(0)\}$. Геометрически это означает, что через данную точку многообразия в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая.

Предложение 3.1.3. *Если аффинная связность $\Gamma$ на многообразии $\mathbb{M}$ гладкая, то геодезические линии также являются гладкими $\mathcal{C}^\infty$ кривыми.*

Доказательство. Продифференцируем уравнение геодезических (3.3) по каноническому параметру. Правая часть полученного равенства зависит от компонент связности и их первых производных, а также от компонент вектора скорости и их первой производной. Поэтому правая часть определена и непрерывна. Следовательно, третья производная от координатных функций $x^\alpha(t)$ существует и непрерывна. Дальнейшее дифференцирование приводит к гладкости геодезических.

Для геодезической линии можно также поставить краевую задачу: найти геодезическую, соединяющую две фиксированные точки многообразия, которое предполагается линейно связным. Эта задача разрешима в малом, т.е. любые две достаточно близкие точки можно соединить геодезической и притом только одной. Для удаленных точек эта задача может не иметь решения или иметь несколько решений.

Определение. (Псевдо)риманово многообразие $\mathbb{M}$ называется *геодезически выпуклым*, если любые две его точки могут быть соединены геодезической.

Пример 3.1.3. Рассмотрим плоскость с конической сингулярностью и положительным углом дефицита $\mathbb{M} = \mathbb{U} \cup \mathbb{V}$, где $\mathbb{U}$ – область, изометричная евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с выколотой полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geqslant 0, y = 0\}$, и $\mathbb{V}$ – клин евклидовой плоскости, который вставлен (см. рис.3.1). Тогда на ней существуют точки, которые нельзя соединить геодезической. Действительно, все геодезические, проходящие через точку $p$, соединяют ее со всеми точками евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, до того, как клин был вставлен. Поскольку при диффеоморфизме ($\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$ на $\mathbb{U}$) геодезическая переходит в геодезическую и их число сохраняется, то точку $p$ нельзя соединить геодезической ни с какой точкой $q$, лежащей на клине $\mathbb{V}$, который вставлен со стороны, противоположной конической сингулярности. Это многообразие не является геодезически выпуклым.

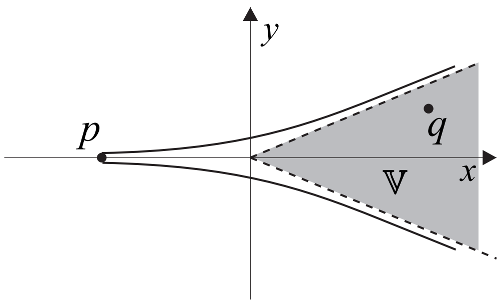


Рис. 3.1. Точки $p$ и $q$ на плоскости с конической сингулярностью и положительным углом дефицита нельзя соединить геодезической

Пример 3.1.4. Рассмотрим сферу, вложенную в евклидово пространство, $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть метрика на сфере индуцирована вложением и на ней задана связность Леви-Чивиты. Тогда любые две точки на сфере $\mathbb{S}^2$, не являющиеся диаметрально противоположными, можно соединить двумя разными геодезическими (две дуги большой окружности, проходящей через эти точки). Диаметрально противоположные точки соединяются бесконечным числом геодезических. Сфера $\mathbb{S}^2$ является геодезически выпуклым многообразием.

Введем важное понятие полноты геодезической по каноническому параметру $t$. В силу однозначного разрешения задачи Коши, через каждую точку многообразия в заданном направлении проходит одна геодезическая. Это значит, что геодезическую линию, если она заканчивается в некоторой точке $q \in \mathbb{M}$, всегда можно продолжить. Действительно, если при конечном значении канонического параметра геодезическая попадает в точку $q$, то продолжим ее, склеив с геодезической, выходящей из точки $q$ в том же направлении.

Определение. Геодезическая в $\mathbb{M}$ называется *полной*, если ее можно продолжить в обе стороны до бесконечного значения канонического параметра, $t \in (-\infty, \infty)$.

Замечание. Поскольку канонический параметр определен с точностью до аффинного преобразования и не зависит от выбора системы координат, то данное определение корректно.

Геодезическую линию можно рассматривать как интегральную кривую векторного поля скорости $u := \{\dot{x}^\alpha\}$. Тогда полнота геодезической означает полноту векторного поля $u$.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана не только аффинная связность $\Gamma$, но и метрика $g$. Тогда компоненты аффинной связности можно выразить через метрику, кручение и неметричность по формуле (см. [23], глава 6)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta} g_{\delta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) +\\ + \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta\gamma} + Q_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\gamma\alpha\beta}).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Хотя в уравнение для геодезических входит только симметричная часть связности, тем не менее оно нетривиально зависит от кручения и неметричности. Действительно, из формулы (3.11) следует, что симметричная часть аффинной связности имеет вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{\{\beta\gamma\}}{}^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}{}^{\alpha}) =\\ &= \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}(T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + T^{\alpha}{}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(Q_{\beta\gamma}{}^{\alpha} + Q_{\gamma\beta}{}^{\alpha} - Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}),\end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ – символы Кристоффеля. Ясно, что две связности, имеющие одинаковую симметричную часть, определяют одно и то же семейство геодезических.

Рассмотрим два вектора $X$ и $Y$, которые параллельно переносятся вдоль геодезической $\gamma$.

Предложение 3.1.4. *Зависимость скалярного произведения $(X, Y)$ двух векторов, которые параллельно переносятся вдоль $\gamma$, от точки геодезической определяется только тензором неметричности*:

$$\partial_u(X, Y) = \nabla_u(X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}) = -u^\gamma X^\alpha Y^\beta Q_{\gamma\alpha\beta}. \tag{3.13}$$

*Отсюда следует, что в римановой геометрии и геометрии Римана–Картана, где $Q = 0$, скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется. В частности, квадрат вектора скорости геодезической постоянен вдоль нее.*

Доказательство. Следует из определения тензора неметричности

$$-Q_{\alpha\beta\gamma} := \nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta} g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\delta} g_{\beta\delta}. \tag{3.14}$$

Замечание. Это утверждение верно и для произвольной кривой ([23], предложение 6.4.1). Скалярное произведение двух векторных полей, полученных в результате параллельного переноса двух векторов вдоль произвольной кривой $\gamma$ в римановой геометрии и геометрии Римана–Картана, не зависит от точки кривой.

Следствие. Если неметричность лоренцева многообразия $\mathbb{M}$ равна нулю, то квадрат вектора скорости постоянен вдоль геодезических, и их можно разделить на три класса: времениподобные, пространственноподобные и светоподобные (изотропные). При этом тип геодезической не может меняться от точки к точке.

В заключение настоящего раздела получим уравнение девиации геодезических. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана произвольная кривая $\sigma = y(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, и отличное от нуля векторное поле $X(s) \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \sigma)$, определенное вдоль этой кривой и которое нигде не касается кривой $\sigma$. Рассмотрим семейство геодезических $\gamma_s = x(t, s)$, проходящих через каждую точку кривой $\sigma$ в направлении $X(s)$:

$$x(0, s) = y(s), \qquad \dot{x}(0, s) = X(s),$$

где точка, как и раньше, обозначает дифференцирование по каноническому параметру $t$. Если кривая $y(s)$ и векторное поле $X(s)$ достаточно гладкие, то множество точек $x(t,s)$ образует двумерное подмногообразие (поверхность) $\Sigma$ в $\mathbb{M}$ при достаточно малых $t$. При этом параметры $t, s$ можно выбрать в качестве координат на $\Sigma$. Этим координатам соответствуют векторные поля

$$u := \partial_t = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\partial_\alpha, \qquad Y := \partial_s = \frac{\partial x^\alpha}{\partial s}\partial_\alpha, \tag{3.15}$$

которые коммутируют между собой, $[u, Y] = 0$. После замены в коммутаторе частных производных на ковариантные, получим равенство

$$u^\beta \nabla_\beta Y^\alpha = Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\beta Y^\gamma T_{\beta\gamma}{}^\alpha, \tag{3.16}$$

где $T_{\beta\gamma}{}^\alpha := \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}{}^\alpha$ – тензор кручения.

Определение. Векторное поле $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \Sigma)$, определенное равенством (3.15), называется *вектором девиации* геодезических. Векторные поля с компонентами

$$V^\alpha := u^\beta \nabla_\beta Y^\alpha, \tag{3.17}$$

$$A^\alpha := u^\beta \nabla_\beta V^\alpha \tag{3.18}$$

называются соответственно *скоростью* и *ускорением девиации* близких геодезических.

Векторное поле девиации определяет расположение близких геодезических на поверхности $\Sigma$, а векторные поля скорости и ускорения девиации характеризуют, как меняются расположение геодезических при движении вдоль геодезической.

Предложение 3.1.5. *Ускорение девиации геодезических определяется тензором кривизны и кручения*:

$$A^\alpha = u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha + u^\gamma u^\delta \nabla_\delta \left( Y^\beta T_{\gamma\beta}{}^\alpha \right). \tag{3.19}$$

Доказательство. Прямая проверка:

$$\begin{aligned}
&u^\gamma \nabla_\gamma (u^\beta \nabla_\beta Y^\alpha) = u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\beta Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= u^\gamma \nabla_\gamma Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\gamma Y^\beta \nabla_\gamma \nabla_\beta u^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= u^\gamma \nabla_\gamma Y^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\gamma Y^\beta \nabla_\beta \nabla_\gamma u^\alpha + u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha - u^\gamma Y^\beta T_{\gamma\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= Y^\gamma \nabla_\gamma (u^\beta \nabla_\beta u^\alpha) + u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha) = \\
&= u^\gamma u^\delta Y^\beta R_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha + u^\beta u^\gamma \nabla_\gamma (Y^\delta T_{\beta\delta}{}^\alpha),
\end{aligned}$$

где мы учли равенство (3.16), уравнения геодезических (3.2) и выражение коммутатора ковариантных производных через тензоры кривизны и кручения

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] u^\gamma = R_{\alpha\beta\delta}{}^\gamma u^\delta - T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\gamma. \tag{3.20}$$

В (псевдо)римановой геометрии уравнение (3.19) упрощается

$$A^\alpha = u^\gamma u^\delta Y^\beta \widetilde{R}_{\gamma\beta\delta}{}^\alpha. \tag{3.21}$$

В литературе по общей теории относительности оно известно как *уравнение девиации геодезических*. Это уравнение можно переписать в виде

$$\nabla_u^2 Y^\alpha + u^\delta u^\beta Y^\gamma \widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha = 0. \tag{3.22}$$

Оно совпадает с равенством нулю второй вариации действия для экстремалей (3.43), которое будет получено позже в разделе 3.4.

### 3.2. Экстремали

Другим выделенным типом кривых в аффинной геометрии $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ являются экстремали, которые определяются как линии экстремальной длины. Рассмотрим произвольную достаточно гладкую кривую $\gamma = x(t) \in \mathbb{M}$, $t \in [t_1, t_2]$. Предположим, что квадрат вектора скорости кривой, $u^\alpha := \dot{x}^\alpha(t)$, всюду отличен от нуля, $u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} \neq 0$.

Замечание. Для римановой метрики это условие автоматически выполняется, поскольку вектор скорости предполагается отличным от нуля. Если метрика не является знакоопределенной, то это условие нетривиально. Например, для лоренцевой метрики это условие равносильно тому, что мы рассматриваем либо времени-, либо пространственноподобные кривые.

Пусть кривая соединяет две точки $p = \{x^\alpha(t_1)\}$ и $q = \{x^\alpha(t_2)\}$. Тогда длина этой кривой задается интегралом

$$S = \int_p^q ds, \qquad ds := dt\sqrt{|g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta|} = dt\sqrt{|u^2|}. \tag{3.23}$$

Этот функционал инвариантен относительно общих преобразований координат $x^\alpha$ и произвольной перепараметризации кривой $t \to \tau(t)$.

Определение. *Экстремалью*, соединяющей две точки (псевдо)риманова многообразия $p, q \in \mathbb{M}$, если она существует, называется неизотропная кривая $\gamma$ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$, для которой функционал (3.23) принимает экстремальное значение.

Замечание. Если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ не является знакоопределенной, то существуют изотропные кривые, для которых функционал длины (3.23) равен нулю и данное выше определение экстремалей не проходит. Определение изотропных экстремалей будет дано ниже.

Экстремали в римановом пространстве обобщают понятие прямой в евклидовом пространстве, сохраняя свойство быть линиями минимальной (экстремальной) длины, соединяющей две точки.

Пример 3.2.1. Не любые две точки линейно связного многообразия $p, q \in \mathbb{M}$, на котором задана риманова метрика, можно соединить кривой наименьшей длины. Рассмотрим кольцо на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, рис.3.2. Это – риманово некомпактное связное неодносвязное двумерное многообразие. Если отрезок, соединяющий точки $p$ и $q$, пересекает вырезанную дырку, то эти точки нельзя соединить кривой наименьшей длины. Действительно, для любой кривой $\gamma$, соединяющей точки $p$ и $q$, всегда найдется кривая $\gamma'$ меньшей длины. Построение ясно из рисунка.

Найдем уравнения, которым должны удовлетворять координатные функции $x^\alpha(t)$ для того, чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью. Пусть экстремаль соединяет две точки $p$ и $q$ многообразия. Выберем такую карту на многообразии, которая целиком содержит данную экстремаль. Для этого достаточно взять объединение всех достаточно малых шаров, центры которых лежат на экстремали. Пусть в этой карте экстремаль и ее вариация задаются набором функций $x^\alpha(t)$ и $\delta x^\alpha(t)$. Мы предполагаем, что вариации кривой в конечных точках $p, q \in \mathbb{M}$ равны нулю, $\delta x^\alpha(p) = \delta x^\alpha(q) = 0$, и поэтому вкладом граничных членов при интегрировании по частям можно пренебречь. Вариация длины кривой (3.23) с точностью до знака имеет вид

$$\delta S = \int \frac{dt}{2\sqrt{|u^2|}} \left[2\delta(\dot{x}^\alpha)\dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} + \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \delta g_{\alpha\beta}\right].$$

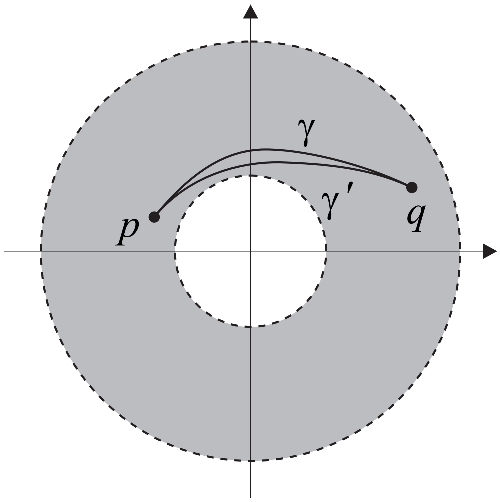


Рис. 3.2. Точки $p$ и $q$ нельзя соединить экстремалью

Проинтегрируем первое слагаемое по частям и воспользуемся равенством

$$\delta g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\delta x^\alpha.$$

Тогда вариация длины кривой принимает вид

$$\delta S = -\int dt \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}}{\sqrt{|u^2|}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{|u^2|}}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\right]\delta x^\alpha.$$

Поскольку

$$ds = \sqrt{|u|^2}dt \qquad \text{и} \qquad \dot{x}^\alpha = \sqrt{|u^2|}\frac{dx^\alpha}{ds},$$

то вариацию длины кривой можно переписать в виде

$$\delta S = -\int ds \left(\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^\beta\frac{dx^\gamma}{ds}\frac{dx^\delta}{ds}\right)g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha,$$

где $\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha$ – символы Кристоффеля (2.15). Фактически, на этом этапе мы воспользовались инвариантностью интеграла (3.23) относительно перепараметризации кривой, выбрав длину кривой в качестве параметра, $t \mapsto s$. Параметр $s$ вдоль экстремали называется *каноническим*. В дальнейшем канонический параметр мы будем обозначать буквой $t$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. *Для того чтобы кривая $x(t)$ была экстремалью в канонической параметризации, необходимо и достаточно, чтобы координатные функции $x^\alpha(t)$ удовлетворяли системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\ddot{x}^\alpha = -\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma, \tag{3.24}$$

*где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру $t$.*

Замечание. Параметр $t$, по которому проводится дифференцирование в уравнении (3.24) так же, как и для геодезических, называется каноническим или аффинным. Он определен с точностью до аффинного преобразования. Таким образом, канонический параметр в общем случае не равен, а пропорционален длине экстремали.

В приложениях иногда полезно использовать произвольную параметризацию экстремалей. Обозначим экстремаль в произвольной параметризации через $\{x^\alpha(u)\}$, где $u$ – произвольный параметр. Он связан с каноническим параметром некоторым достаточно гладким и невырожденным преобразованием $t \mapsto u(t)$, $dt/du \ne 0$. Равенство (3.6) представляет собой уравнение экстремалей (если $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha$ – символы Кристоффеля), записанное в произвольной параметризации. Запишем его в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{du^2} = -\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \frac{dx^\beta}{du}\frac{dx^\gamma}{du} - \frac{dx^\alpha}{du}\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{du}\right)^2. \tag{3.25}$$

Легко проверить формулу дифференцирования

$$\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = -\frac{d^2t}{du^2}\frac{du}{dt}.$$

Тогда уравнение экстремалей в произвольной параметризации (3.25) примет вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{du^2} = -\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha \frac{dx^\beta}{du}\frac{dx^\gamma}{du} + \frac{dx^\alpha}{du}\frac{d^2t}{du^2}\frac{du}{dt}. \tag{3.26}$$

Если в качестве канонического параметра выбрана длина экстремали $t = s$,

$$ds^2 := g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

то равенство (3.26) необходимо дополнить уравнением на параметр

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du}. \tag{3.27}$$

Отметим, что уравнения для экстремалей (3.25) и (3.26) инвариантны относительно линейного преобразования канонического параметра $t \mapsto kt$, $k \ne 0$. Поэтому выбор длины экстремали в качестве канонического параметра не является существенным. Если же изменить параметризацию экстремали $u \mapsto ku$, то уравнение целиком умножится на постоянную $1/k^2$, т.е., по существу, не изменится.

Пример 3.2.2. Пусть в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ (псевдо)риманова многообразия существует такая система координат, в которой метрика имеет постоянные компоненты. Тогда в этой области символы Кристоффеля равны нулю и, следовательно, уравнения (3.24) принимают вид $\ddot{x}^\alpha = 0$. Поэтому прямые и только они являются экстремалями в рассматриваемой области $\mathbb{U}$.

Мы получили критерий того, что неизотропная кривая является экстремалью. При выводе уравнений (3.24) из вариационного принципа для действия (3.23) существенно используется условие $u^2 \ne 0$, которое исключает изотропные (светоподобные) экстремали. Поэтому изотропные экстремали определим не с помощью функционала длины, а непосредственно уравнениями (3.24). Для любой изотропной кривой $u^2 = 0$ и интеграл (3.23) равен нулю. В то же время уравнения (3.24) имеют смысл.

Определение. *Изотропной экстремалью* в канонической параметризации называется изотропная кривая $\gamma$ класса $\mathcal{C}^2([t_1, t_2])$, которая задана функциями $x^\alpha(t)$, удовлетворяющими системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.24).

Это определение корректно, так как квадрат вектора скорости экстремали постоянен. При этом не всякая изотропная кривая является экстремалью. Если параметр вдоль изотропной экстремали $x^\alpha(u)$ не канонический, то система уравнений меняется на уравнения (3.26). При этом длина касательного вектора остается нулевой.

Определения изотропных и неизотропных экстремалей можно объединить.

Определение. Кривая $\gamma$ класса $\mathcal{C}^2([t_1,t_2])$ называется *экстремалью*, если она задается функциями $x^\alpha(t)$, где $t$ – канонический параметр, удовлетворяющими системе дифференциальных уравнений (3.24). Другими словами, экстремалью на (псевдо)римановом многообразии $(\mathbb{M},g)$ называется геодезическая для связности Леви-Чивиты.

Замечание. Мы начали с другого определения экстремалей, так как в последнем определении теряется основное свойство неизотропных экстремалей реализовывать экстремумы функционала длины (3.23).

Уравнение для экстремалей (3.24) можно переписать в явно ковариантном виде

$$\dot x^\beta\widetilde\nabla_\beta\dot x^\alpha=0. \tag{3.28}$$

Это просто уравнение геодезических (3.2) для связности Леви-Чивиты. Опустив в этом уравнении индекс $\alpha$ и расписав ковариантную производную, получим альтернативную форму уравнения для экстремалей

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_{\alpha\beta}\dot x^\beta)-\frac12\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\dot x^\beta\dot x^\gamma=0. \tag{3.29}$$

Уравнения (3.24) определяются только метрикой, поскольку функционал длины не зависит от аффинной связности. Тем самым экстремали не зависят от того, заданы ли на многообразии $\mathbb{M}$ тензоры кручения и неметричности или нет. Сравнение уравнений (3.24) с уравнением для геодезических (3.3) показывает, что экстремали являются геодезическими линиями по отношению к параллельному переносу, определяемому символами Кристоффеля. Это означает, что все свойства геодезических справедливы также и для экстремалей. В частности, канонический параметр вдоль экстремали инвариантен относительно преобразования координат. При произвольной параметризации уравнение для экстремалей имеет вид (3.26).

Из предложения 3.1.3 следует, что если метрика $g$ на многообразии является гладкой функцией, то экстремали являются гладкими кривыми класса $\mathcal{C}^\infty$.

Через произвольную точку $x\in\mathbb{M}$ в направлении $X^\alpha$ проходит одна и только одна экстремаль, поскольку она определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3.24). Это значит, что любую экстремаль, которая заканчивается в некоторой точке $q\in\mathbb{M}$, можно продолжить. Действительно, если она заканчивается в точке $q\in\mathbb{M}$ при значении канонического параметра $t_2$, то существует единственная экстремаль, проходящая через $q$ и имеющая тот же касательный вектор.

Определение. Экстремаль $\gamma$ в $\mathbb{M}$ называется *полной*, если ее можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, $t\in(-\infty,\infty)$.

Замечание. При продолжении экстремали возможны два случая. Во-первых, она может оказаться полной и иметь бесконечную длину. К полным экстремалям мы относим также и замкнутые экстремали, которые имеют конечную длину. Хотя их длина конечна, но канонический параметр продолжается до бесконечности, что соответствует бесконечному числу проходов вдоль экстремали. Во-вторых, при конечном значении канонического параметра экстремаль может попасть в такую точку многообразия, в которой один из геометрических инвариантов, например скалярная кривизна, не определен. Эта точка является сингулярной, и продолжение экстремали через нее не имеет смысла.

Очевидно, что в (псевдо)римановой геометрии экстремали и геодезические совпадают, поскольку совпадают уравнения (3.3) и (3.24) при $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$. В общем случае экстремали и геодезические не совпадают и их поведение должно исследоваться отдельно. Критерий совпадения экстремалей и геодезических дает следующая

Теорема 3.2.2. *В аффинной геометрии* $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ *экстремали и геодезические совпадают тогда и только тогда, когда кручение и неметричность удовлетворяют соотношению*

$$\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\alpha\beta}) = Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Экстремали и геодезические совпадают, если и только если симметричная часть компонент связности равна символам Кристоффеля, $\Gamma_{\{\beta\gamma\}}{}^{\alpha} = \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$. Тогда из (3.12) следует соотношение между тензором кручения и неметричностью:

$$T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\alpha\beta} = -Q_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\gamma\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.31}$$

Сделав циклическую перестановку индексов $\alpha\beta\gamma \mapsto \beta\gamma\alpha$ и сложив полученное уравнение с (3.31), получим (3.30). Обратно. Подстановка тензора неметричности (3.30) в уравнение (3.31), как легко проверить, приводит к тождеству.

Следствие. В геометрии Римана–Картана, где $Q = 0$, экстремали и геодезические совпадают тогда и только тогда, когда тензор кручения с опущенным индексом антисимметричен по всем трем индексам, $T_{\alpha\beta\gamma} = T_{[\alpha\beta\gamma]}$.

### 3.3. Интегрирование уравнений для экстремалей и геодезических

Уравнения для экстремалей и геодезических в ряде случаев имеют первые интегралы, наличие которых существенно упрощает их исследование. Начнем с универсального закона сохранения. Из сравнения уравнений (3.24) и (3.3) следует, что экстремаль является геодезической линией для связности, определяемой символами Кристоффеля. Поскольку при параллельном переносе и в римановой геометрии, и в геометрии Римана–Картана длины векторов не меняются, то отсюда сразу следует, что длина вектора скорости $u = \{\dot{u}^{\alpha}\}$ вдоль экстремалей и геодезических постоянна.

Предложение 3.3.1. *В геометрии Римана–Картана и (псевдо)римановой геометрии для уравнений геодезических* (3.3) *и экстремалей* (3.24) *существует первый интеграл*

$$C_0 = u^2 := \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}g_{\alpha\beta} = \mathsf{const}, \tag{3.32}$$

*квадратичный по первым производным (скоростям).*

Доказательство. Следствие предложения 3.1.4. Можно доказать и формально, продифференцировав уравнение (3.32) по каноническому параметру и воспользовавшись уравнением для геодезических или экстремалей.

Рассмотрим, как меняется квадрат длины касательного вектора $C_0(t) = \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}g_{\alpha\beta}$ вдоль геодезической линии в аффинной геометрии общего вида. Дифференцируя это соотношение по каноническому параметру и используя уравнение для геодезических, получим

$$\frac{du^2}{dt} = \dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}Q_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.33}$$

Отсюда следует, что $C_0 = \mathsf{const}$ при нулевом тензоре неметричности. В геометрии Римана–Картана–Вейля уравнение (3.33) принимает вид

$$\frac{du^2}{dt} = \dot{x}^\alpha W_\alpha C_0(t). \tag{3.34}$$

Первый интеграл (3.32) имеет кинематический характер и существует для любой экстремали и геодезической в (псевдо)римановой геометрии и геометрии Римана–Картана. Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то экстремали и геодезические можно разделить на три класса: времениподобные, $C_0 > 0$, изотропные или светоподобные, $C_0 = 0$, и пространственноподобные, $C_0 < 0$. Поскольку канонический параметр определен с точностью до аффинных преобразований, то для времениподобных и пространственноподобных экстремалей его всегда можно выбрать таким образом, что $C_0 = \pm 1$. В этом случае для времениподобных экстремалей канонический параметр называется *собственным временем*, а для пространственноподобных – *длиной* экстремали.

Замечание. Отметим, что если некоторая кривая, не обязательно экстремаль или геодезическая, имеет определенный тип, то вдоль нее параметр всегда можно выбрать таким образом, что будет выполнено условие (3.32). Для изотропных кривых равенство (3.32), очевидно, выполняется. Допустим, что кривая имеет определенный тип в некоторой области, т.е. $C_0(t) \neq 0$. Тогда, вводя новый параметр $s(t)$, получим

$$C_0(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta},$$

где точка обозначает дифференцирование по $s$. Уравнение

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{|C_0|}$$

всегда имеет решение. Поэтому условие (3.32) будет выполнено относительно нового параметра $s$.

Существование других первых интегралов связано с инфинитезимальными симметриями метрики, которые определяются векторными полями Киллинга.

Предложение 3.3.2. *Если метрика на многообразии имеет один или несколько векторов Киллинга $K_i = \{K_i^\alpha\}$, $i = 1, \ldots, m$, то для каждого вектора Киллинга имеется свой интеграл движения и для экстремалей, и для геодезических в канонической параметризации*

$$C_i = K_i^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} = \mathsf{const}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3.35}$$

*который линеен по компонентам скорости.*

Доказательство. Дифференцируем соотношения (3.35) по каноническому параметру и используем уравнения (3.3) или (3.24).

## 3.4. Вторая вариация уравнений для экстремалей

Допустим, что метрика положительно определена, т.е. многообразие риманово. Экстремали на римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$ определяются действием (3.23). Тогда любая экстремаль удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа (3.24). Это свойство является необходимым условием для того, чтобы экстремаль была линией наименьшей или наибольшей длины. Для того чтобы найти достаточное условие реализации минимума или максимума функционалов (3.23) или (3.47), необходимо исследовать вторую вариацию функционала.

Напомним общее определение второй вариации. Пусть задана достаточно гладкая кривая $\gamma = \{x^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$, где $t \in [t_1, t_2]$, соединяющая две фиксированные точки многообразия $p = \gamma(t_1)$ и $q = \gamma(t_2)$. Рассмотрим функционал

$$S[\gamma] = \int_\gamma dt L(x, \dot{x}). \tag{3.36}$$

Допустим, что заданы два произвольных векторных поля $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma)$, которые определены на кривой $\gamma$ и равны нулю в точках $p$ и $q$. Обозначим через $\lambda$ и $\mu$ два вещественных параметра.

Определение. Назовем *первой вариацией* функционала (3.36) частную производную

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} S[\gamma + \lambda X]\Big|_{\lambda=0} = \int_\gamma dt \frac{\delta S}{\delta x^\alpha} X^\alpha. \tag{3.37}$$

Частная производная

$$G_\gamma[X, Y] = G_\gamma[Y, X] = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu} S_\gamma[\gamma + \lambda X + \mu Y]\Big|_{\lambda=0,\ \mu=0} \tag{3.38}$$

называется *второй вариацией* функционала (3.36).

Поскольку векторное поле $X$ произвольно, то равенство нулю первой вариации эквивалентно уравнениям Эйлера–Лагранжа, которые мы записываем в виде

$$\frac{\delta S}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0. \tag{3.39}$$

Предложение 3.4.1. *Если кривая $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$ удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа* (3.39)*, то вторая вариация функционала* (3.36) *имеет вид*

$$G_\gamma[X, Y] = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(J_{\alpha\beta} X^\beta\right) Y^\alpha, \tag{3.40}$$

*где*

$$J_{\alpha\beta} X^\beta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial x^\beta} X^\beta\right) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta - \frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} X^\beta. \tag{3.41}$$

Доказательство. Прямые вычисления с учетом выражения для первой вариации:

$$\begin{aligned} G_\gamma[X, Y] = {} & \frac{\partial}{\partial\mu}\int dt \left(\frac{\partial L}{\partial x^\beta} X^\beta + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta\right)\Big|_{\mu=0} = \\ & = \int dt \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} X^\beta Y^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial x^\beta} X^\beta\dot{Y}^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial x^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta Y^\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\alpha\partial\dot{x}^\beta}\dot{X}^\beta\dot{Y}^\alpha\right). \end{aligned}$$

После интегрирования по частям двух слагаемых, пропорциональных $\dot{Y}^\alpha$, получаем выражение (3.41).

Определение. Линейный оператор $J = \{J^\alpha{}_\beta := g^{\alpha\gamma} J_{\gamma\beta}\}$,

$$J: \quad \mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma) \to \mathcal{X}(\mathbb{M}, \gamma),$$

который действует на векторные поля $X$, определенные вдоль кривой $\gamma$, по правилу (3.41), называется *оператором Якоби*.

Теперь применим формулу (3.40) для вычисления второй вариации действия для экстремалей. Во-первых, отметим, что действие для экстремалей в виде (3.23) не является единственным. Рассмотрим действие

$$S = \int_{\gamma} dt \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}. \tag{3.42}$$

Предложение 3.4.2. *Действие (3.42) имеет тот же набор экстремалей, что и действие (3.23).*

Доказательство. Вариация действия (3.42) по $x^{\alpha}(t)$ приводит к уравнениям (3.24).

В отличие от действия (3.23) функционал (3.42) не инвариантен относительно перепараметризации кривой. Это значит, что параметр $t$ в действии (3.42) является каноническим.

Пусть $\gamma = \{x^{\alpha}(t)\}$, $t \in [t_1, t_2]$, – экстремаль и $u := \{\dot{x}^{\alpha}\}$ – вектор скорости экстремали.

Теорема 3.4.1. *Вторая вариация действия для экстремалей (3.42) имеет вид*

$$G_{\gamma}(X, Y) = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \nabla_u^2 Y^{\alpha} + u^{\delta} u^{\beta} Y^{\gamma} \widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^{\alpha} \right) X_{\alpha}, \tag{3.43}$$

*где*

$$\begin{aligned} \nabla_u Y^{\alpha} &:= u^{\beta} \left( \partial_{\beta} Y^{\alpha} + \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} Y^{\gamma} \right) = \dot{Y}^{\alpha} + u^{\beta} \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} Y^{\gamma}, \\ \nabla_u^2 Y^{\alpha} &:= u^{\delta} \nabla_{\delta} \left( \dot{Y}^{\alpha} + u^{\beta} \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} Y^{\gamma} \right) = \\ &\quad = \ddot{Y}^{\alpha} + 2u^{\beta} \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \dot{Y}^{\gamma} + u^{\delta} u^{\epsilon} Y^{\gamma} \left( \partial_{\delta} \widetilde{\Gamma}_{\epsilon\gamma}{}^{\alpha} - \widetilde{\Gamma}_{\delta\epsilon}{}^{\beta} \widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \widetilde{\Gamma}_{\delta\gamma}{}^{\beta} \widetilde{\Gamma}_{\epsilon\beta}{}^{\alpha} \right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

*– ковариантные производные вдоль вектора скорости и $\widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^{\alpha}$ – тензор кривизны.*

Доказательство. Первая вариация действия (3.42) имеет вид

$$\left. \frac{\partial S[\gamma + \lambda X]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \ddot{x}^{\alpha} + \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} \right) X_{\alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &G_{\gamma}(X, Y) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mu} \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \ddot{x}^{\alpha} + \mu \ddot{Y}^{\alpha} + \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} + 2\mu \widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{Y}^{\gamma} + \mu \partial_{\epsilon} \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} Y^{\epsilon} \right) X_{\alpha} = \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \ddot{Y}^{\alpha} + 2\widetilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{Y}^{\gamma} + \partial_{\epsilon} \widetilde{\Gamma}_{\gamma\delta}{}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} Y^{\epsilon} \right), \end{aligned}$$

где мы оставили только линейные по $\mu$ слагаемые и учли, что вклад производной $\partial X_{\alpha}/\partial\mu$ равен нулю при выполнении уравнений для экстремалей $\nabla_u \dot{x}^{\alpha} = 0$. Исключив из полученного выражения производные $\ddot{Y}^{\alpha}$ и $\dot{Y}^{\alpha}$ с помощью второго из соотношений (3.44), получим равенство (3.43).

Ясно, что билинейная форма (3.43) симметрична, $G_{\gamma}(X, Y) = G_{\gamma}(Y, X)$, так как ковариантное дифференцирование можно перекинуть на вектор $X$, а тензор кривизны симметричен относительно перестановки пар индексов: $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \widetilde{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}$ (см. [23], глава 6).

Поскольку метрика $g_{\alpha\beta}$ риманова, то условие минимальности экстремали $\gamma$, соединяющей точки $p$ и $q$, состоит в том, что квадратичная форма $G_{\gamma}(X, X)$ положительно определена для всех векторных полей, определенных на экстремали $\gamma$ и обращающихся в нуль на ее концах.

Определение. Векторное поле $X$, которое определено на экстремали $\gamma$, соединяющей точки $p$ и $q$, называется *якобиевым*, если оно удовлетворяет *уравнению Якоби*

$$J^\alpha{}_\beta X^\beta = 0, \tag{3.45}$$

где $J$ – оператор Якоби (3.41), и обращается в нуль на концах $p$ и $q$. Точки $p$ и $q$ называются *сопряженными* вдоль экстремали $\gamma$, если существует ненулевое якобиево поле $X$ вдоль $\gamma$.

Для действия (3.42) уравнение Якоби принимает вид

$$\nabla_u^2 X^\alpha + u^\delta u^\beta X^\gamma \widetilde{R}_{\gamma\delta\beta}{}^\alpha = 0. \tag{3.46}$$

Это уравнение совпадает с уравнением девиации геодезических (3.22).

Предложение 3.4.3. *Билинейная форма $G_\gamma(X,Y)$ невырождена тогда и только тогда, когда концевые точки $p$ и $q$ экстремали $\gamma$ не сопряжены вдоль $\gamma$.*

Доказательство. Пусть $X$ и $Y$ – произвольные векторные поля вдоль $\gamma$, которые обращаются в нуль в концевых точках. Напомним, что билинейная форма $G_\gamma(X,Y)$ называется невырожденной, если не существует такого векторного поля $X$, что $G_\gamma(X,Y) = 0$ для всех $Y$. Если поле $X$ якобиево, то $G_\gamma(X,Y) = 0$ при любом $Y$.

Обратно. Допустим, что для вектора $X$ выполнено уравнение $G_\gamma(X,Y) = 0$ для всех $Y$. Положим $Y = f(t)JX$, где функция $f(t)$ неотрицательна и обращается в нуль на концах экстремали. Тогда из выражения для второй вариации (3.40) имеем равенство

$$G_\gamma(X,Y) = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, f g(JX, JX) = 0.$$

Отсюда следует, что $JX = 0$. Поэтому концы сопряжены.

Теперь сформулируем необходимое условие минимальности экстремали.

Теорема 3.4.2. *Если экстремаль $\gamma$, соединяющая точки $p$ и $q$, содержит внутри себя пару сопряженных точек $p'$ и $q'$, то она не является минимальной.*

Доказательство. См., например, [2], глава 5, § 36, теорема 2.

Теорема 3.4.3. *Для достаточно малых отрезков $l = [t_1, t_2]$ экстремали задают минимум функционала (3.42). Поэтому каждая экстремаль является кратчайшей линией в классе дважды дифференцируемых кривых, соединяющих достаточно близкие точки $p$ и $q$.*

Доказательство. Экстремаль $\gamma$ реализует минимум функционала (3.42), если форма $G_\gamma(X,X)$ положительна для всех ненулевых векторных полей $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M},\gamma)$, которые обращаются в нуль на концах $p$ и $q$. Из формулы для второй вариации (3.43) следует, что

$$\begin{aligned} G_\gamma(X,X) = &-\int_p^q dt \left[(\nabla_u^2 X, X) - u^\alpha X^\beta u^\gamma X^\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right] = \\ &= \int_p^q dt \left[(\nabla_u X, \nabla_u X) + u^\alpha X^\beta u^\gamma X^\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right], \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали первое слагаемое по частям с учетом равенств $X(p) = X(q) = 0$. Можно доказать, что для достаточно коротких экстремалей справедлива оценка

$$\left|\int_p^q dt\, u^\alpha X^\beta u^\gamma X^\delta \widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right| = \mathsf{O}(l) \int_p^q dt (\nabla_u X, \nabla_u X)$$

при $l \to 0$. Поскольку квадратичная форма $(\nabla_u X, \nabla_u X)$ положительна, то для достаточно коротких экстремалей положительна и форма $G_\gamma(X,X)$.

### 3.5. Уравнение Гамильтона–Якоби для экстремалей

Уравнения для экстремалей $\gamma = x(t)$ вытекают из вариационного принципа для действия (3.23). Важным обстоятельством является то, что уравнения для экстремалей являются уравнениями Эйлера–Лагранжа также и для другого действия (3.42). А именно, рассмотрим действие

$$S_{\mathrm{m}} = \int_a^b dt L_{\mathrm{m}}, \qquad L_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2} m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \tag{3.47}$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру $t$ и $m = \mathsf{const}$ – постоянная, имеющая физический смысл массы точечной частицы. Это действие совпадает с (3.42) при $m = -1$. Действие (3.47) приводит к уравнениям для экстремалей, в которых переменная $t$ уже является каноническим параметром. Это согласуется с тем обстоятельством, что рассмотренное действие инвариантно относительно общих преобразований координат и сдвигов параметра $t$. Для сравнения напомним, что исходное действие для экстремалей (3.23) инвариантно также относительно произвольных преобразований параметра $t$ вдоль экстремали.

Действие (3.47) имеет простой физический смысл. Предположим, что метрика имеет лоренцеву сигнатуру, и зафиксируем временну́ю калибровку (7.175):

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{sign}\, g_{\mu\nu} = (- \dots -). \tag{3.48}$$

Символы Кристоффеля для этой метрики имеют вид (7.181). Предположим также, что пространственная часть метрики $g_{\mu\nu}$ не зависит от времени $x^0$. Тогда уравнения для экстремалей расщепляются:

$$\ddot{x}^0 = 0, \tag{3.49}$$

$$\ddot{x}^\mu = -\widetilde{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho. \tag{3.50}$$

Из первого уравнения следует, что, не ограничивая общности, канонический параметр $t$ можно отождествить с временем $x^0 = ct$, где $c = \mathsf{const}$ – скорость света. Тогда лагранжиан (3.47) имеет прямой физический смысл – с точностью до аддитивной постоянной это кинетическая энергия точечной частицы, которая движется в римановом пространстве со статической метрикой $g_{\mu\nu}(x)$. Несмотря на то что потенциальная энергия частицы равна нулю, ее траекториями уже не будут прямые линии, если метрика нетривиально зависит от точки пространства.

Вернемся к исходному действию (3.47) до фиксирования временно́й калибровки. Переформулируем эту лагранжеву систему на гамильтоновом языке, рассматривая канонический параметр $t$ в качестве параметра эволюции. Под временем мы подразумеваем координату $x^0$ и, соответственно, предполагаем, что $g_{00} > 0$. Кроме этого мы предполагаем, что все сечения постоянного времени $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны. Импульс, сопряженный координатам $x^\alpha$, и гамильтониан системы равны

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L_{\mathrm{m}}}{\partial \dot{x}^\alpha} = -m g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta, \\ H_{\mathrm{m}} &= -\frac{1}{2m} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Для действия (3.47) связи на канонические переменные отсутствуют, так как метрика рассматривается как внешнее поле и варьирование по ней не проводится. Соответствующие уравнения Гамильтона (уравнения движения) имеют вид

$$\dot{x}^\alpha = [x^\alpha, H_{\mathrm{m}}] = -\frac{1}{m} g^{\alpha\beta} p_\beta, \tag{3.52}$$

$$\dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H_\text{m}] = \frac{1}{2m}\partial_\alpha g^{\beta\gamma} p_\beta p_\gamma. \tag{3.53}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по каноническому параметру и исключая импульсы $p_\alpha$ и производные $\dot{p}_\alpha$ с помощью уравнений движения, нетрудно проверить, что система уравнений (3.52), (3.53) эквивалентна системе уравнений для экстремалей (3.24). Тем самым мы переписали уравнения для экстремалей в виде канонической системы уравнений движения.

Ранее было доказано, что длина касательного вектора к экстремали постоянна (3.32). В гамильтоновой форме это утверждение имеет вид

$$C_0 = \frac{1}{m^2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \mathsf{const}. \tag{3.54}$$

По своей физической сути это есть закон сохранения энергии точечной частицы. В данном случае только кинетической, так как потенциальная энергия тождественно равна нулю.

В дальнейшем нам понадобятся гамильтоновы уравнения для нулевых экстремалей, где в качестве параметра эволюции выбрано время $x^0$, а не канонический параметр $t$. Они получаются следующим образом. Для нулевых экстремалей интеграл движения (3.54) принимает вид

$$g^{00} p_0^2 + 2g^{0\mu} p_0 p_\mu + g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0.$$

Это квадратное уравнение решается относительно $p_0$:

$$p_0 = N^\mu p_\mu \pm N\hat{p}, \qquad \hat{p} := \sqrt{-\hat{g}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}, \tag{3.55}$$

где $N = 1/\sqrt{g^{00}} \neq 0$ и $N^\mu = \hat{g}^{\mu\nu} g_{0\nu}$ – функции хода и сдвига, используемые в АДМ параметризации метрики (8.5), а $\hat{g}^{\mu\nu}$ – метрика, обратная к пространственной метрике $g_{\mu\nu}$. Если частица движется, то $p_\mu \neq 0$ и $\hat{p} \neq 0$. Тогда из уравнения (3.52) находим производную координаты $x^0$ по каноническому параметру

$$\dot{x}^0 = \mp \frac{\hat{p}}{mN}.$$

Отсюда следует, что выбор знака в (3.55) соответствует выбору взаимной ориентации канонического параметра $t$ и времени $x^0$. После этого канонические уравнения (3.52), (3.53) можно записать в виде системы уравнений движения только для пространственных координат и импульсов:

$$\begin{aligned} \partial_0 x^\mu &= \frac{\dot{x}^\mu}{\dot{x}^0} = -N^\mu \pm \frac{N\hat{g}^{\mu\nu} p_\nu}{\hat{p}}, \\ \partial_0 p_\mu &= \frac{\dot{p}_\mu}{\dot{x}^0} = \partial_\mu N^\nu p_\nu \pm \partial_\mu N \hat{p} \mp \frac{N\partial_\mu \hat{g}^{\nu\rho} p_\nu p_\rho}{2\hat{p}}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Таким образом, из системы канонических уравнений (3.52), (3.53) для нулевых экстремалей мы исключили в явном виде канонический параметр $t$ и нулевую компоненту импульса $p_0$.

Предложение 3.5.1. *Система уравнений для пространственных компонент канонически сопряженных переменных $x^\mu$ и $p_\mu$ (3.56) является гамильтоновой. При этом эволюция системы уравнений рассматривается по отношению к времени $x^0$, а гамильтонианом является выражение для $p_0$ (3.55).*

Доказательство. Прямое сравнение уравнений

$$\begin{aligned} \partial_0 x^\mu &= [x^\mu, p_0], \\ \partial_0 p_\mu &= [p_\mu, p_0]. \end{aligned}$$

Число гамильтоновых уравнений движения, определяющих экстремаль, сократилось с $2n$ в (3.52), (3.53) до $2n-2$ в (3.56). Это достигнуто за счет использования интеграла движения (3.54) и выбора специального параметра эволюции $x^0$.

Продолжим анализ гамильтоновой формы уравнений для экстремалей. Функция действия $S_{\mathrm{m}}(x,t)$ (6.32) удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (6.34)

$$\frac{\partial S_{\mathrm{m}}}{\partial t}-\frac{1}{2m}g^{\alpha\beta}\frac{\partial S_{\mathrm{m}}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S_{\mathrm{m}}}{\partial x^\beta}=0. \tag{3.57}$$

Поскольку гамильтониан (3.51) не зависит от параметра $t$ явно, то функция действия имеет вид

$$S_{\mathrm{m}}(x^\alpha,t)=\frac{mC_0}{2}t+W_{\mathrm{m}}(x^\alpha),\qquad C_0=\mathsf{const},$$

где укороченная функция действия $W_{\mathrm{m}}$ удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона–Якоби

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x^\beta}=m^2C_0. \tag{3.58}$$

Поскольку экстремали не зависят от массы пробной частицы, то, не ограничивая общности, можно положить $m=1$ (включить в постоянную $C_0$). Так как $p_\alpha=\partial W_{\mathrm{m}}/\partial x^\alpha$, то постоянная $C_0$ равна длине касательного вектора к экстремали

$$g_{\alpha\beta}\dot x^\alpha\dot x^\beta=g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta=C_0.$$

Для экстремалей в пространстве-времени знак постоянной $C_0$ определяет тип экстремали: постоянные $C_0>0$, $C_0=0$ и $C_0<0$ соответствуют времениподобным, светоподобным и пространственноподобным экстремалям. Поскольку канонический параметр определен с точностью до линейных преобразований, то можно считать, что $C_0=1$, $C_0=0$ или $C_0=-1$. Отметим, что для экстремалей нулевой длины $C_0=0$, и укороченное действие совпадает с полным $W_{\mathrm{m}}=S_{\mathrm{m}}$.

Для решения уравнения Гамильтона–Якоби часто применяют метод разделения переменных, который описан далее в разделе 6.1.12. Если уравнение Гамильтона–Якоби для частицы в (псевдо)римановой геометрии допускает полное разделение переменных, то такие пространства называются *штеккелевыми* [25, 26, 27, 28, 29]. К штеккелевым метрикам относятся метрика Шварцшильда (глава 17), Керра [30], де Ситтера (раздел 18.4.2), Казнера (раздел 18.5.3) и многие другие (практически все известные) метрики, полученные в результате решения уравнений Эйнштейна. Проблеме классификации штеккелевых пространств посвящены монографии [31, 32].

## 3.6. Волновое уравнение

Пусть задано многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M}=n$, с метрикой лоренцевой сигнатуры, $\mathsf{sign}\,g_{\alpha\beta}=(+-\ldots-)$. Рассмотрим волновое уравнение для скалярного поля $\varphi(x)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{M})$:

$$g^{\alpha\beta}\widetilde\nabla_\alpha\widetilde\nabla_\beta\varphi=g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\varphi-g^{\alpha\beta}\widetilde\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\partial_\gamma\varphi=0, \tag{3.59}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi\right)=0,\qquad g:=\mathsf{det}\,g_{\alpha\beta},$$

где мы воспользовались тождеством (см. [23], глава 6)

$$\tilde{\Delta} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left( \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \right). \tag{3.60}$$

Это – линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами гиперболического типа, так как метрика имеет лоренцеву сигнатуру. Важным понятием в теории дифференциальных уравнений является характеристика (или характеристическая поверхность), которая для дифференциальных уравнений второго порядка определяется квадратичной формой $g^{\alpha\beta}$.

Определение. *Характеристикой* гиперболического дифференциального уравнения второго порядка (3.59) называется $\mathcal{C}^1$ гиперповерхность в многообразии $\mathbb{M}$, которая задается уравнением

$$W(x) = 0, \tag{3.61}$$

где функция $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ на поверхности $W = 0$ удовлетворяет условию

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha W \partial_\beta W \Big|_{W=0} = 0. \tag{3.62}$$

При этом требуется, чтобы по крайней мере одна из частных производных $\partial_\alpha W$ была отлична от нуля на гиперповерхности (3.61).

Замечание. Отметим, что в определении характеристики важна гиперболичность, так как при положительно или отрицательно определенной метрике уравнение (3.62) не имеет вещественных решений.

Уравнение (3.62) для характеристики совпадает с укороченным уравнением Гамильтона–Якоби для экстремалей (3.58) при $C_0 = 0$. Это значит, что характеристика соответствует укороченной функции действия для экстремалей нулевой длины. Напомним, что для экстремалей нулевой длины укороченная и полная функции действия совпадают. Однако условие (3.62) является более слабым, так как мы требуем выполнения (3.62) только на характеристике, а не во всем пространстве-времени.

Из определения характеристик следует, что они являются изотропными гиперповерхностями, которые будут рассмотрены в разделе 7.12.3. Метрика, индуцированная на таких поверхностях, по определению, вырождена, и все нормальные векторы изотропны (теорема 7.12.7).

Характеристики обладают следующим важным свойством. Допустим, что каждая гиперповерхность $W(x) - y^0 = 0$, где $-\epsilon < y^0 < \epsilon$, $\epsilon > 0$, есть характеристика уравнения (3.59). Другими словами, мы требуем, чтобы уравнение характеристик (3.62) выполнялось не только на самой характеристике, но и в некоторой ее окрестности. Поскольку на каждой характеристике по крайней мере одна из частных производных $\partial_\alpha W$ отлична от нуля, то это семейство заполняет некоторую достаточно малую область, через каждую точку которой проходит одна и только одна характеристика. Тогда можно перейти в новую систему координат $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$, где $y^0 = W$. При этом обратная метрика преобразуется по тензорному закону

$$g^{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} g^{\gamma\delta}(x).$$

Отсюда следует, что в новой системе координат $g^{00} = 0$. Это обстоятельство имеет важное следствие. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения (3.59) в новой системе координат. Пусть на характеристике заданы начальные условия

$$\varphi\Big|_{y^0=0} = \varphi_0, \qquad \partial_0 \varphi\Big|_{y^0=0} = \varphi_1,$$

где $\varphi_0$ и $\varphi_1$ – достаточно гладкие функции от "пространственных" координат $\{y^\mu\} = (y^1, \dots, y^{n-1})$. По начальным данным на характеристике при $y^0 = 0$ можно вычислить все частные производные по "пространственным" координатам $\partial_\mu\varphi, \partial^2_{\mu\nu}\varphi, \dots$ и все частные производные с одной производной по "времени" $\partial^2_{0\mu}\varphi, \partial^3_{0\mu\nu}\varphi, \dots$ . Для определения эволюции скалярного поля необходимо знать вторые производные по "времени" $\partial^2_{00}\varphi$. Если задача Коши корректно поставлена, то вторые производные по "времени" находятся из волнового уравнения. На характеристике это не так, поскольку $g^{00} = 0$. Вместо определения второй производной $\partial^2_{00}\varphi$ волновое уравнение налагает ограничение (связь) на возможный выбор начальных условий:

$$g^{0\mu}\partial_\mu\varphi_1 - g^{\alpha\beta}\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^0\varphi_1 - g^{\alpha\beta}\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\mu\partial_\mu\varphi_0 = 0.$$

Для нахождения вторых производных $\partial^2_{00}\varphi$ волновое уравнение нужно продифференцировать по $y^0$. Однако после этой процедуры вторые производные не будут определены однозначно. Таким образом, при постановке задачи Коши на характеристике, во-первых, начальные данные нельзя задавать произвольно, и, во-вторых, волновое уравнение не определяет эволюцию поля единственным образом. Тем самым задача Коши на характеристике не допускает корректную постановку.

Выше мы взяли слова "пространственный" и "время" в кавычки, так как характеристика является изотропной поверхностью и не может быть пространственноподобной, а координата $y^0$ светоподобна и не может играть роль времени.

Поскольку вторые производные от неизвестной функции по одну сторону характеристики не определяются уравнением (3.59) и значениями функции $\varphi$ по другую сторону от характеристики, то они могут иметь разрывы. Это значит, что решения уравнения (3.59) могут иметь разрывы производных, которые распространяются в пространстве вдоль характеристик.

Для корректной постановки задачи Коши для волнового уравнения (3.59) на многообразии с метрикой лоренцевой сигнатуры по $x^0$ координаты выбираются таким образом, что $g^{00} > 0$, а сечение $x^0 = 0$ является пространственноподобным. Поскольку пространственноподобное сечение не может быть изотропным, то оно не может быть также характеристикой. Оно не может также касаться характеристики, потому что в этом случае один из касательных векторов был бы изотропным, что противоречит отрицательной определенности метрики, индуцированной на гиперповерхности.

Уравнение характеристик (3.62) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. В общем случае оно очень сложно и, как правило, имеет решения с особыми точками. Характеристика, например, может быть не гладкой поверхностью.

Относительно частной производной по времени $\partial_0 W$ уравнение характеристик является алгебраическим квадратным уравнением и имеет не более двух вещественных корней. Допустим, что метрика имеет лоренцеву сигнатуру и $g_{00} > 0$, тогда оно имеет два вещественных корня разных знаков

$$\partial_0 W = N^\mu\partial_\mu W \pm N\sqrt{-\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu W\partial_\nu W}, \tag{3.63}$$

где $N(x)$ и $N^\mu(x)$ – функции хода и сдвига в АДМ параметризации метрики (8.5). Здесь мы предполагаем, что все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ являются пространственноподобными и, следовательно, метрика $g_{\mu\nu}$ и ее обратная $\hat{g}^{\mu\nu}$ отрицательно определены. Обозначим $p_\mu := \partial_\mu W$. Введем функцию Гамильтона в фазовом пространстве $\{x^\mu, p_\mu\}$ (см. главу 6)

$$H(x^0, x^\mu, p_\mu) = -N^\mu p_\mu \mp N\sqrt{-\hat{g}^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}, \tag{3.64}$$

где зависимость от координат $x^0$ и $x^\mu$ входит через метрику $g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(x^0, x^\mu)$ и время $x^0$ рассматривается в качестве параметра эволюции.

Определение. Траектории $x^\mu(x^0)$ в конфигурационном пространстве, соответствующем гамильтониану (3.64), называются *бихарактеристиками* волнового уравнения (3.59).

Предложение 3.6.1. *Бихарактеристики волнового уравнения* (3.59) *совпадают с образами нулевых экстремалей для метрики* $g_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Следствие предложения 3.5.1.

Единственное отличие бихарактеристик и нулевых экстремалей сводится к тому, что экстремали определяются в параметрическом виде $x^\alpha(t)$, а бихарактеристики задаются в виде явной зависимости координат $x^\mu(x^0)$.

Гамильтониан (3.64) совпадает с временно́й компонентой импульса (3.55). Функция $W(x^0, x^\mu)$, определяющая характеристику, является действием для бихарактеристик.

Замечание. Характеристики и бихарактеристики имеют физическую интерпретацию. Из теории дифференциальных уравнений известно, что если в момент времени $x^0$ в точке $\boldsymbol{x}$ произошло некоторое возмущение решения $\varphi$ волнового уравнения (3.59), то оно будет распространяться в виде волны. При этом сечения $x^0 = \mathsf{const}$ соответствующей характеристической поверхности (характеристического коноида с вершиной в точке $\{x^0, \boldsymbol{x}\}$) являются фронтом волны в момент времени $x^0$, а бихарактеристики – это лучи, вдоль которых распространяется волна.

Предложение 3.6.2. *Если бихарактеристика касается характеристики в некоторой точке, то она целиком лежит на этой характеристике.*

Доказательство. Для экстремалей лагранжиан можно выбрать в виде

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Для нулевых экстремалей он равен нулю, $L = 0$. Следовательно, функция действия $S(x,t)$ и укороченная функция действия $W = S + Et$ равны нулю, так как для нулевых экстремалей $E = 0$. Тем самым для бихарактеристик $W = 0$ и они целиком лежат на какой-либо из характеристик.

### 3.7. Приближение эйконала

Посмотрим на волновое уравнение (3.59) с другой точки зрения. Любое комплекснозначное решение волнового уравнения (3.59) можно представить в виде[1]

$$\varphi = A\,\mathsf{e}^{iW/\hbar}, \tag{3.65}$$

где $A(x) \neq 0$ и $W(x)$ – амплитуда и фаза волны, которые можно считать вещественнозначными функциями. Тогда волновое уравнение примет вид

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2_{\alpha\beta}A}{A} + \frac{1}{\hbar}2ig^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha A}{A}\partial_\beta W + \frac{1}{\hbar}ig^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}W -$$
$$- \frac{1}{\hbar^2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W\partial_\beta W - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\left(\frac{\partial_\gamma A}{A} + \frac{1}{\hbar}i\partial_\gamma W\right) = 0.$$

[1] В этом представлении $\hbar \in \mathbb{R}$ рассматривается как вещественный параметр. Обозначение продиктовано аналогией с квантовой механикой, где $\hbar$ – постоянная Планка.

В формальном пределе $\hbar \to 0$ волновое уравнение сводится к уравнению на фазу

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W \partial_\beta W = 0. \tag{3.66}$$

Оно совпадает с уравнением для характеристик (3.62), однако должно выполняться во всем пространстве-времени.

Определение. Для волновых решений предел $\hbar \to 0$ означает, что относительное изменение амплитуды мало, по сравнению с изменением фазы. Этот предел называют *приближением эйконала*. Фазу $W(x)$ называют *эйконалом*, а уравнение (3.66) – *уравнением эйконала*. В электродинамике это приближение называют также приближением *геометрической оптики*. Для плоских волн оно соответствует высоким частотам излучения и маленьким длинам волн.

Параметр $\hbar$ был введен с единственной целью – определить эйкональное приближение. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы включим его в определение фазы $W/\hbar \mapsto W$.

Пример 3.7.1. Рассмотрим волновое уравнение в трехмерном пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ в декартовой системе координат $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2)$:

$$\partial_0^2\varphi - \partial_1^2\varphi + \partial_2^2\varphi = 0.$$

В данном примере трехмерное пространство Минковского выбрано для наглядности. Все следующие формулы естественным образом переносятся на пространство Минковского произвольной размерности $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

Уравнение характеристик имеет вид

$$\big((\partial_0 W)^2 - (\partial_1 W)^2 - (\partial_2 W)^2\big)\big|_{W=0} = 0. \tag{3.67}$$

Это уравнение допускает два семейства характеристик (изотропные поверхности в примере 7.12.2).

*Первое семейство характеристик*

$$W = (x^0 - x_0^0)^2 - (x^1 - x_0^1)^2 - (x^2 - x_0^2)^2 = 0,$$

где $x_0 = (x_0^0, x_0^1, x_0^2)$ – три произвольных вещественных параметра (координаты точки $x_0$). Нетрудно проверить, что

$$(\partial_0 W)^2 - (\partial_1 W)^2 - (\partial_2 W)^2 = 4W.$$

Это значит, что уравнение характеристик (3.67) выполняется только на характеристиках, а не во всем пространстве-времени. Для каждой точки $x_0$ характеристики первого семейства состоят из двух конусов (конуса прошлого, $x^0 < x_0^0$, и будущего, $x^0 > x_0^0$) с общей вершиной в точке $x_0$.

*Второе семейство характеристик*

$$W = x^0 + k_\mu x^\mu - C, \qquad \mu = 1, 2,$$

параметризуется единичным вектором в пространстве $|\boldsymbol{k}| := \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 1$ и постоянной $C$. В этом случае уравнение характеристик выполняется во всем пространстве, а не только на поверхности $W = 0$. Характеристики второго семейства параметризуются двумя параметрами и представляют собой плоскости, перпендикулярные ковектору $(1, k_1, k_2)$ нулевой длины и пересекающие плоскость $x^0 = 0$ по прямой $k_\mu x^\mu = C$. Эти характеристики касаются характеристик первого семейства (конусов).

Напомним, что нулевыми экстремалями в пространстве Минковского являются прямые и только они с нулевым касательным вектором. Мы видим, что если произвольная нулевая экстремаль (или бихарактеристика) в некоторой точке касается характеристики, то она целиком принадлежит этой характеристике. Кроме того, через каждую регулярную точку характеристики (исключение составляют вершины конусов первого семейства) проходит одна и только одна нулевая экстремаль. Поэтому нулевые экстремали полностью заметают характеристические поверхности. Отметим, что одна и та же нулевая экстремаль может принадлежать разным характеристическим конусам.

Из уравнения для характеристик (3.67) можно найти производную по времени

$$\partial_0 W = \pm\sqrt{(\partial_1 W)^2 + (\partial_2 W)^2}.$$

Отсюда следует выражение для гамильтониана, определяющего бихарактеристики (траектории)

$$H = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2} =: \pm\hat{p}.$$

Уравнения движения для бихарактеристик имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \pm\frac{p^\mu}{\hat{p}}, \\ \dot{p}_\mu &= 0, \qquad\qquad \Rightarrow \quad p_\mu = \mathsf{const}, \end{aligned}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени $t = x^0$. Отсюда следует, что импульс бихарактеристик постоянен, а траектории – это прямые $x^\mu = \pm n^\mu t + x_0^\mu$, проходящие через все точки пространства $x_0 \in \mathbb{R}^2$ во всех возможных направлениях $n^\mu := p^\mu/\hat{p}$. Поскольку пространственный вектор $n^\mu$ имеет единичную длину, то бихарактеристики в пространстве-времени совпадают с нулевыми экстремалями.

В пространстве Минковского уравнение (3.59) допускает решение в виде плоской волны

$$\varphi = A_0\, \mathsf{e}^{ik_\alpha x^\alpha} = A_0\, \mathsf{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{kx})}, \qquad A_0 = \mathsf{const} \neq 0,$$

где $\boldsymbol{kx} = -k_\mu x^\mu$. Сравнение этого выражения с (3.65) дает выражения для *частоты* $\omega$ и *волнового вектора* $\boldsymbol{k}$ (в рассматриваемом примере мы, для краткости, полагаем $\hbar = 1$)

$$\omega = k_0 = \partial_0 W, \qquad \boldsymbol{k} = \{\partial_1 W, \partial_2 W\}.$$

Тогда волновое уравнение (3.62) сводится к соотношению между частотой и волновым вектором

$$g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = \omega^2 - \boldsymbol{k}^2 = 0,$$

где $\boldsymbol{k}^2 := -g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \geqslant 0$. Для плоской волны в пространстве Минковского эйконал $W(x) = x^\alpha k_\alpha$ является линейной функцией от координат, а частота и волновой вектор постоянны.

В рассмотренном примере плоских волн зависимость эйконала от координат была линейной. В общем случае эта зависимость является более сложной. Тогда частота и волновой вектор определяются соотношениями

$$\omega := \partial_0 W, \qquad k_\mu := \partial_\mu W \tag{3.68}$$

и зависят от точки пространства-времени. В этом случае уравнение эйконала (3.66) определяет зависимость частоты от волнового вектора

$$g^{00}\omega^2 + 2g^{0\mu}\omega k_\mu + g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0.$$

Эта зависимость называется *дисперсией*, а производная

$$v^\mu_{\mathrm{g}} := \frac{\partial \omega}{\partial k_\mu}$$

называется *групповой скоростью*. Сравнение уравнения, определяющего дисперсию, с формулой (3.63) показывает, что частота $\omega$ и волновой вектор $k_\mu$ по сути дела совпадают соответственно с гамильтонианом и импульсами бихарактеристик волнового уравнения.

### 3.8. Гармонические координаты

Для исследования волнового уравнения (3.59) на многообразии $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, с метрикой лоренцевой сигнатуры $g_{\alpha\beta}$ удобно использовать гармонические координаты. Отметим, что функции перехода к новой системе координат являются скалярными полями на $\mathbb{M}$.

Определение. Рассмотрим волновое уравнение (3.59) и допустим, что в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ оно имеет $n$ функционально независимых решений (это так при достаточно общих предположениях). Пронумеруем эти решения $\varphi^{\text{A}}$, $\text{A}, \ldots = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда в области $\mathbb{U}$ решения волнового уравнения задают систему координат $x^{\text{A}} := \varphi^{\text{A}}$, которая называется *гармонической*.

Замечание. Гармоническая система координат была введена Т. де Дондером [33] и К. Ланцосом [34] и получила физическую интерпретацию в работах В. А. Фока [35, 7].

Гармоническая система координат обладает следующим важным свойством.

Предложение 3.8.1. *Система координат является гармонической тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\partial_{\text{A}}\big(\sqrt{|g|}g^{\text{AB}}\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Xi^{\text{C}} := g^{\text{AB}}\Gamma_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = 0, \tag{3.69}$$

*где* $g := \mathsf{det}\, g_{\text{AB}}$.

Доказательство. Справедливо тождество

$$\partial_\alpha\left[\mathsf{det}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi^{\text{A}}}{\partial x^\beta}\right]\frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi^{\text{A}}} = 0,$$

где $\partial x/\partial\varphi$ – обратная матрица Якоби преобразования координат. Это тождество доказывается прямым дифференцированием с учетом правила дифференцирования определителя матрицы. С учетом доказанного равенства и правила преобразования координат справедлива следующая цепочка равенств:

$$\partial_{\text{A}}\big(\sqrt{|g|}g^{\text{AB}}\big) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \varphi^{\text{A}}}\partial_\gamma\left[\sqrt{|\mathring{g}|}\,\mathsf{det}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi^{\text{A}}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varphi^{\text{B}}}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}\right] = \mathsf{det}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\partial_\alpha\left(\sqrt{|\mathring{g}|}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi^{\text{B}}\right) = 0,$$

где $\mathring{g} := \mathsf{det}\, g_{\alpha\beta}$. Таким образом, из гармоничности координат следует первое равенство (3.69) и наоборот. Эквивалентность равенств (3.69) между собой проверяется прямыми вычислениями.

Условия гармоничности координат можно записать с помощью принципа наименьшего действия. Пусть задано действие для $n$ скалярных полей $\varphi^{\text{A}}$:

$$S = \int dx\sqrt{|g|}\,\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi^{\text{A}}\partial_\beta\varphi^{\text{A}}\eta_{\text{AB}},$$

где $\eta_{\text{AB}}$ – произвольная невырожденная симметричная матрица (метрика в пространстве-мишени). Тогда соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$S_{,\text{A}} := \frac{\delta S}{\delta \varphi^{\text{A}}} = -\sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta \varphi^{\text{B}} \eta_{\text{BA}} = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны волновому уравнению (3.59).

Уравнения на метрику (3.69) называются *условиями гармоничности*. В дальнейшем будем, как обычно, обозначать гармоническую систему координат снова греческими буквами $x^\alpha$, предполагая, что условия гармоничности (3.69) выполнены.

Предложение 3.8.2. *В гармонической системе координат волновой оператор, действующий на функцию $f$, принимает вид*

$$\widetilde{\square} f := g^{\alpha\beta}\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{\nabla}_\beta f = g^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta} f \tag{3.70}$$

*и не содержит первых частных производных $\partial_\alpha f$.*

Доказательство. Прямая проверка.

Пример 3.8.1. В пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ декартова система координат является гармонической.

Допустим, что на произвольном лоренцевом многообразии $\mathbb{M}$, которое топологически совпадает с $\mathbb{R}^{1,n-1}$, выбрана гармоническая система координат $x^\alpha$. Тогда произвольная линейная комбинация координат также удовлетворяет волновому уравнению (3.70). Можно доказать, что все гармонические системы координат на $\mathbb{M}$, которые являются асимптотически декартовыми, связаны между собой преобразованиями Лоренца [7]. В. А. Фок придавал гармоническим системам координат в общей теории относительности физический смысл, считая, что на произвольном лоренцевом многообразии $\mathbb{M}$ они выделены и играют ту же роль, что и декартовы координаты в пространстве-времени Минковского.

Предложение 3.8.3. *В переменных Картана условие гармоничности (3.69) имеет вид*

$$\tilde{\omega}^a = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha e_\beta{}^a = 0.$$

Доказательство. Прямая проверка.

### 3.9. Нормальные, геодезические или римановы координаты

Нормальные координаты, которые называются также геодезическими или римановыми, играют большую роль при изучении свойств метрики и связности, а также в приложениях в математической физике. Сначала мы введем эту систему координат с помощью рядов, что является более наглядным и важным для приложений. Затем дадим определение с помощью экспоненциального отображения и сформулируем ряд утверждений, связанных с полнотой римановых многообразий.

Пример 3.9.1. В дальнейшем мы увидим, что декартовы координаты являются нормальными координатами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

В определенном смысле нормальные координаты являются обобщением декартовой системы координат на общий случай многообразия с заданной аффинной геометрией.

**3.9.1. Нормальные координаты. Локальное рассмотрение.** Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$. В настоящем разделе мы предполагаем, что все геометрические объекты (в частности метрика и связность) являются вещественно аналитическими, т.е. их компоненты в окрестности каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$ представимы в виде сходящихся степенных рядов. Мы рассмотрим специальную систему координат в окрестности точки $x_0$, которая является аналогом декартовой системы координат в евклидовом пространстве и имеет многочисленные приложения. В литературе эта система координат встречается под разными названиями: геодезические, римановы или нормальные координаты, и обычно строится в (псевдо)римановом пространстве. Мы построим такую систему координат в более общем случае произвольной аффинной геометрии.

Сначала мы рассмотрим геодезические линии вблизи точки $x_0$. Пусть на многообразии задана кривая $x(t)$, проходящая через точку $x_0$ в заданном направлении,

$$x^\alpha(0) = x_0^\alpha, \qquad \dot x^\alpha(0) = \dot x_0^\alpha. \tag{3.71}$$

Для того чтобы кривая была геодезической, функции $x^\alpha(t)$ должны удовлетворять уравнениям для геодезических (3.3) с начальными условиями (3.71). При достаточно малых $t$ будем искать решение уравнений для геодезических в виде степенного ряда

$$x^\alpha = x_0^\alpha + \dot x_0^\alpha t + \frac{1}{2}\ddot x_0^\alpha t^2 + \frac{1}{3!}\dddot x_0^\alpha\, t^3 + \dots \tag{3.72}$$

Первые два члена определяются начальными условиями (3.71), а все последующие – уравнениями (3.3). В нулевом порядке по $t$ из уравнений для геодезических следует равенство

$$\ddot x_0^\alpha = -\overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot x_0^\beta \dot x_0^\gamma, \qquad \text{где} \quad \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\alpha := \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(x_0).$$

Первый порядок уравнений по $t$ определяет кубический член разложения в (3.72):

$$\dddot x_0^\alpha = (-\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\alpha + 2\overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\{\delta\epsilon\}}{}^\alpha)\dot x_0^\beta \dot x_0^\gamma \dot x_0^\delta,$$

где, для краткости, мы допускаем некоторую вольность в обозначениях:

$$\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\alpha := \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\big|_{x=x_0},$$

и фигурные скобки обозначают симметризацию по индексам.

Следовательно, решение задачи Коши для геодезических в третьем порядке по $t$ имеет вид

$$x^\alpha = x_0^\alpha + \dot x_0^\alpha t - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{0\beta\gamma}{}^\alpha \dot x_0^\beta \dot x_0^\gamma t^2 - \frac{1}{6}\left(\partial_\delta \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\alpha - 2\overset{\circ}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}{}^\epsilon \overset{\circ}{\Gamma}{}_{\{\delta\epsilon\}}{}^\alpha\right)\dot x_0^\beta \dot x_0^\gamma \dot x_0^\delta t^3 + \dots . \tag{3.73}$$

Коэффициенты при более высоких степенях $t^k$, $k \geqslant 4$, пропорциональны $(\dot x_0)^k t^k$ с коэффициентами, зависящими от аффинной связности и их частных производных вплоть до $k-2$ порядка, вычисленными в точке $x_0$. Интервал сходимости ряда (3.73) определяется начальными данными и компонентами аффинной связности. Мы, конечно, предполагаем, что он больше нуля.

Перейдем к определению нормальных координат в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ точки $x_0$. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие с заданной аффинной связностью без кручения, т.е. $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}{}^\alpha$. Перепишем закон преобразования компонент аффинной связности (см. [23], глава 6)

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \partial_\alpha x^{\alpha'} - \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \partial^2_{\beta\gamma} x^{\alpha'} \tag{3.74}$$

в виде
$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}=\partial_{\beta'}x^\beta\partial_{\gamma'}x^\gamma(\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\partial_\alpha x^{\alpha'}-\partial^2_{\beta\gamma}x^{\alpha'}).$$
Совершим преобразование координат, которое задается квадратичным полиномом с постоянными коэффициентами:
$$x^{\alpha'}=B_\alpha{}^{\alpha'}(x^\alpha-x_0^\alpha)+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha B_\alpha{}^{\alpha'}(x^\beta-x_0^\beta)(x^\gamma-x_0^\gamma), \tag{3.75}$$
где $B_\alpha{}^{\alpha'}$ – произвольная невырожденная матрица. Тогда в новой системе координат компоненты аффинной связности будут равны
$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}=\partial_{\beta'}x^\beta\partial_{\gamma'}x^\gamma\left[\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha\left(B_\alpha{}^{\alpha'}+\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^\epsilon B_\epsilon{}^{\alpha'}(x^\delta-x_0^\delta)\right)-\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha B_\alpha{}^{\alpha'}\right].$$
Отсюда следует, что в точке $x_0$ компоненты аффинной связности без кручения обращаются в нуль.

Замечание. Если связность обладает кручением, то, поскольку кручение является тензором, его нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат даже в одной точке.

Выше мы доказали, что для произвольной аффинной связности в произвольной заданной точке $x_0$ всегда можно обратить в нуль симметричную часть связности. Для этого достаточно выбрать соответствующим образом только квадратичные члены в функциях преобразований координат (3.75). Данная система координат существует в некоторой окрестности произвольной точки $x_0\in\mathbb{M}$ и определена неоднозначно. Во-первых, матрица $B_\alpha{}^{\alpha'}$ в (3.75) является невырожденной, а в остальном произвольна. Во-вторых, к правилу преобразования координат (3.75) можно добавить произвольные слагаемые третьей и более высокой степени по $(x-x_0)$. Этот произвол в выборе системы координат можно использовать для дальнейшей специализации системы координат.

Геометрический смысл построенной системы координат состоит в том, что в достаточно малой окрестности точки $x_0$ свойства многообразия близки к свойствам аффинного пространства, так как при параллельном переносе компоненты тензоров в линейном приближении по вектору смещения не меняются. Как и декартовы координаты в евклидовом пространстве, данные координаты в точке $x_0$ определены, в частности, с точностью до линейных преобразований.

Можно доказать, что симметричную часть компонент аффинной связности можно обратить в нуль не только в фиксированной точке, но и вдоль произвольной кривой $\gamma$ на многообразии $\mathbb{M}$ [36]. Соответствующая система координат называется *геодезической вдоль кривой* $\gamma\in\mathbb{M}$.

Оставшийся произвол в выборе системы координат можно использовать для дальнейшей специализации геометрических объектов. Воспользуемся свободой добавления высших степеней $(x-x_0)^k$, $k\geqslant 3$, в закон преобразования координат (3.75) и покажем, что в произвольной точке $x_0\in\mathbb{M}$ можно обратить в нуль не только симметричные части самих компонент аффинной связности, но и все их полностью симметризованные частные производные.

Теорема 3.9.1. *Если компоненты аффинной связности вещественно аналитичны, то в некоторой окрестности произвольной точки $x_0\in\mathbb{M}$ существует такая система координат, что выполнены равенства*
$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha=0,\qquad \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha=0,\qquad \dots\qquad \partial^{k-2}_{\{\gamma_3\dots\gamma_k}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha=0, \tag{3.76}$$
*где фигурные скобки обозначают симметризацию по всем индексам, заключенным между ними.*

Доказательство. Перепишем закон преобразования компонент аффинной связности (см. [23], глава 6)

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = (\partial_{\beta'}x^\beta\partial_{\gamma'}x^\gamma\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \partial^2_{\beta'\gamma'}x^\alpha)\partial_\alpha x^{\alpha'} \tag{3.77}$$

в виде

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}A_{\alpha'}{}^\alpha = A_{\beta'}{}^\beta A_{\gamma'}{}^\gamma\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \partial_{\beta'}A_{\gamma'}{}^\alpha, \tag{3.78}$$

где матрица $A_{\alpha'}{}^\alpha(x) := J^{-1\alpha}_{\alpha'} = \partial_{\alpha'}x^\alpha$ является обратным якобианом преобразования координат. Дифференцирование этого соотношения по $x^{\delta'}$ приводит к равенству

$$\begin{aligned}\partial_{\delta'}\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}A_{\alpha'}{}^\alpha + \Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'}\partial_{\delta'}A_{\alpha'}{}^\alpha = \partial_{\delta'}A_{\beta'}{}^\beta A_{\gamma'}{}^\gamma\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \\ + A_{\beta'}{}^\beta\partial_{\delta'}A_{\gamma'}{}^\gamma\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + A_{\beta'}{}^\beta A_{\gamma'}{}^\gamma\partial_{\delta'}\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \partial^2_{\delta'\beta'}A_{\gamma'}{}^\alpha.\end{aligned} \tag{3.79}$$

Последовательное дифференцирование полученного соотношения приводит к равенствам, содержащим старшие производные от компонент аффинной связности и обратной матрицы Якоби $A_{\alpha'}{}^\alpha$. Рассматривая эти тождества в точке $x^0$, мы докажем возможность выбора системы координат, в которой выполнены равенства (3.76), по теории возмущений.

Совершим преобразование координат $x \mapsto y(x)$. Предположим, что вблизи точки $x_0 \in \mathbb{M}$ обратное преобразование задается степенным рядом

$$x^\alpha = x^\alpha_0 + \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\gamma}\right|_0 y^\gamma + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}}\right|_0 y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \dots . \tag{3.80}$$

Здесь для новой системы координат мы используем букву $y$, чтобы избежать штрихов у индексов. Выберем первые три члена разложения в виде

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\gamma}\right|_0 &= \delta^\alpha_\gamma, \\ \left.\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}}\right|_0 &= -\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha, \\ \left.\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial y^{\gamma_1}\partial y^{\gamma_2}\partial y^{\gamma_3}}\right|_0 &= 2\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2}{}^\delta\overset{\circ}{\Gamma}_{\delta\gamma_3\}}{}^\alpha - \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha.\end{aligned}$$

Тогда из уравнений (3.78), (3.79) следует, что в новой системе координат

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha = 0, \qquad \partial_{\{\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\alpha = 0.$$

Выбор квадратичного члена ряда (3.80) уже был использован ранее. Выбор кубического члена разложения позволил обратить в нуль симметризованную первую частную производную аффинной связности в той же точке.

В дифференциальные тождества, получаемые последовательным дифференцированием (3.78), максимальная степень производной от обратной матрицы Якоби $A_{\alpha'}{}^\alpha$ всегда входит линейно и на единицу превышает максимальную степень производной от компонент аффинной связности. Это значит, что коэффициенты ряда (3.80) всегда можно подобрать таким образом, чтобы обратить в нуль все симметризованные частные производные от коэффициентов аффинной связности (3.76). В этом нет ничего удивительного, так как члены ряда (3.80), начиная с квадратичного, находятся во взаимно однозначном соответствии с условиями на аффинную связность (3.76).

Нетрудно проверить, что ряд (3.80), определяющий преобразование координат, в точности совпадает с рядом (3.73), определяющим геодезические линии, если положить $y^\alpha = \dot{x}_0^\alpha t$. Это означает, что в новой системе координат прямые линии $y^\alpha = X_0^\alpha t$, где $t \in \mathbb{R}$ и $X_0^\alpha$ – произвольные числа, из которых по крайней мере одно отлично от нуля, являются геодезическими линиями на $\mathbb{M}$. В этом месте прослеживается аналогия с декартовой системой координат в евклидовом пространстве: геодезические являются прямыми линиями.

Построенная система координат является нормальной системой координат в некоторой окрестности $\mathbb{U}_0$ точки $x_0 \in \mathbb{M}$, определяется только симметричной частью компонент аффинной связности и никак от метрики не зависит. При этом у нас остался произвол в выборе первых двух членов разложения функций преобразования координат (3.80). Слагаемое нулевого порядка определим так, что точка $x_0$ отображается в начало координат $y_0 = (0, \ldots, 0)$. Слагаемое первого порядка по $y^\alpha$ можно использовать для фиксирования значения метрики в начале координат. Очевидно, что его всегда можно подобрать таким образом, чтобы метрика в точке $x_0$ была диагональной:

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \tag{3.81}$$

Таким образом, мы однозначно фиксировали все члены разложения функций преобразования координат (3.80). Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 3.9.2. *Пусть в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ многообразия, на котором задана аффинная геометрия, метрика и связность заданы вещественно аналитическими функциями. Тогда существует такая система координат $y^\alpha$, что точка $x_0$ соответствует началу координат, а также выполнены равенства* (3.76) *и* (3.81). *Такая система координат определена однозначно.*

Замечание. В доказательстве теоремы нигде не использовалась сигнатура метрики. Поэтому сформулированная теорема справедлива как для римановых, так и для псевдоримановых метрик.

Определение. Система координат $y^\alpha$ в теореме 3.9.2 называется *нормальной*, *геодезической* или *римановой*.

Предложение 3.9.1. *Система координат $y^\alpha$ в некоторой окрестности начала координат является нормальной тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

$$\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha(y) y^\beta y^\gamma = 0 \qquad \text{и} \qquad g_{\alpha\beta}(0) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{3.82}$$

Доказательство. В нормальной системе координат геодезическая линия, проходящая через точку $x_0$ в направлении $u_0$, является прямой и задается параметрически в виде

$$y^\alpha(t) = u_0^\alpha t. \tag{3.83}$$

Подстановка этого выражения в уравнение для геодезических линий (3.3) дает

$$u_0^\alpha u_0^\beta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0.$$

Умножив это уравнение на $t^2$, получим (3.82).

Обратно. Пусть выполнено уравнение (3.82). Разложим компоненты связности в ряд Тейлора вблизи начала координат. Тогда уравнение (3.82) эквивалентно цепочке равенств (3.76). Затем разложим уравнение геодезических и сами геодезические в ряды Тейлора по $t$. Приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях $t$, получаем, что прямые линии и только они являются геодезическими линиями, проходящими через начало координат.

Замечание. Сравнение первого условия в (3.82) со вторым условием в (3.69) показывает, что нормальные координаты в общем случае не являются гармоническими.

Нормальная система координат обладает рядом замечательных свойств. В частности, в окрестности начала координат компоненты произвольного тензорного поля можно представить в виде ряда, коэффициенты которого зависят от ковариантных производных этого поля и тензоров кривизны, кручения и их ковариантных производных, вычисленных в точке $x_0$. Доказательство этого утверждения проводится конструктивно, путем явного построения соответствующего разложения.

Для доказательства нам понадобится предварительный результат.

Лемма 3.9.1. *Пусть связность* $\Gamma$ *на* $\mathbb{M}$ *вещественно аналитична. Тогда в окрестности начала нормальной системы координат все производные*

$$\partial^{k-1}_{\{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_k\}\alpha}{}^\beta, \tag{3.84}$$

*где, в отличие от* (3.76), *симметризация проводится только по части нижних индексов, выражаются через тензоры кривизны, кручения и их ковариантные производные.*

Доказательство. Лемма доказывается прямыми, но громоздкими вычислениями. Поэтому мы ограничимся только первыми двумя слагаемыми.

Используя свойства (3.76), нетрудно доказать равенства

$$\begin{aligned}
\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta &= \frac13\left(\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_2\}}{}^\beta - \partial_\alpha\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta + 2\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta\right),\\
\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta &= \frac13\left(\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_3\}}{}^\beta - \partial^2_{\alpha\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta + 2\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta\right).
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Здесь и в дальнейшем фигурные скобки обозначают симметризацию *только* по индексам $\gamma_1$, $\gamma_2, \dots$ .

В точке $x_0$ аффинная связность полностью определяется тензором кручения

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}{}^\beta = \frac12\overset{\circ}{T}_{\gamma\alpha}{}^\beta. \tag{3.86}$$

Далее, прямые вычисления приводят к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta &= \partial_\alpha\overset{\circ}{\Gamma}_{\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta - \partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_2\}}{}^\delta - \frac14\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\delta}{}^\beta,\\
\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta &= \partial^2_{\alpha\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta - \partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma_3\}}{}^\beta + \frac23\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta + \frac23\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta +\\
&\quad + \frac16\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta - \frac13\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta,\\
\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta &= \partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta,\\
\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta &= \partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta + \frac16\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta + \frac16\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta +\\
&\quad + \frac16\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\gamma + \frac16\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta.
\end{aligned}$$

Используя полученные формулы, правые части (3.85) можно записать в ковариантном виде

$$\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta = \frac13\left(-\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta - \frac14\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\delta}{}^\beta\right), \tag{3.87}$$

$$\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta = \frac{1}{3}\Big(-\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta + \frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta + \frac{1}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta +$$
$$+2\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta - \frac{1}{6}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\alpha}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta - \frac{2}{3}\overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\delta\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{T}_{\gamma_3\}\delta}{}^\beta\Big), \tag{3.88}$$

где, напомним, симметризация проводится только по индексам $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ . Аналогичным образом все частные производные от связности вида (3.84) можно выразить через ковариантные объекты.

Теперь можно доказать утверждение о разложении компонент произвольного тензорного поля в окрестности начала нормальной системы координат в ряд Тейлора. Для определенности рассмотрим произвольный ковариантный тензор второго ранга $A_{\alpha\beta}$ в нормальных координатах и разложим его в ряд Тейлора вблизи начала координат:

$$A_{\alpha\beta}(y) = \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta}\,y^\gamma + \frac{1}{2}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta}\,y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \ldots . \tag{3.89}$$

Эта процедура явно нековариантна, потому что координаты $y^\gamma$ не являются компонентами вектора, и коэффициенты этого ряда также нековариантны. Основным достоинством нормальных координат является то, что все коэффициенты этого ряда тем не менее можно выразить через ковариантные величины. Для этого необходимо выразить все частные производные через ковариантные и выразить компоненты аффинной связности в начале координат через тензор кривизны, кручения и их ковариантные производные. Начнем с первой производной

$$\partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}{}^\delta\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}{}^\delta\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta} = \nabla_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\alpha}{}^\delta\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\gamma\beta}{}^\delta\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta},$$

где мы воспользовались формулами (3.86). Прямые, но более громоздкие выкладки позволяют представить вторые частные производные также в ковариантном виде:

$$\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} = \nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\alpha}{}^\delta\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} + \overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\beta}{}^\delta\nabla_{\gamma_2\}}\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{T}_{\{\gamma_1\alpha}{}^\delta\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}}{}^\epsilon\overset{\circ}{A}_{\delta\epsilon} +$$
$$+\frac{1}{3}\Big(-\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\delta + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\delta - \overset{\circ}{T}_{\alpha\{\gamma_1}{}^\epsilon\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\epsilon}{}^\delta\Big)\overset{\circ}{A}_{\delta\beta} +$$
$$+\frac{1}{3}\Big(-\overset{\circ}{R}_{\beta\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\delta + 2\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\beta}{}^\delta - \overset{\circ}{T}_{\beta\{\gamma_1}{}^\epsilon\overset{\circ}{T}_{\gamma_2\}\epsilon}{}^\delta\Big)\overset{\circ}{A}_{\alpha\delta}.$$

Эту процедуру можно продолжить вплоть до произвольного порядка. Однако уже в третьем порядке формулы настолько громоздки, что нет смысла их приводить в явном виде.

Ясно, что аналогичное представление справедливо для тензорного поля произвольного ранга и типа. Поэтому справедлива следующая

Теорема 3.9.3. *Компоненты произвольного вещественно аналитического тензорного поля в некоторой окрестности начала нормальной системы координат представимы в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого определяются ковариантными производными компонент данного тензорного поля, а также тензором кривизны, тензором кручения и их ковариантными производными, взятыми в начале координат.*

В математической физике такое представление часто бывает очень удобным при проведении вычислений.

**3.9.2. Нормальные координаты в (псевдо)римановом пространстве.** Основное достоинство нормальных координат заключается в том, что вещественно аналитические тензорные поля в некоторой окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ представляются в виде ряда Тейлора, коэффициенты которого задаются только ковариантными объектами: ковариантными производными данного тензорного поля, а также тензорами кривизны и кручения и их ковариантными производными. В предыдущем разделе были явно вычислены первые два члена этого ряда для ковариантного тензора второго ранга. Эти члены содержат много слагаемых с тензором кручения. Поэтому в (псевдо)римановой геометрии, где кручение тождественно равно нулю, формулы упрощаются, и можно продвинуться значительно дальше в вычислениях.

Кроме того, если на многообразии $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$, то в качестве определяющего пучка кривых, проходящих через точку $x_0 \in \mathbb{M}$, можно выбрать не геодезические линии, а экстремали, которые определяются исключительно метрикой. Это также дает основание рассмотреть нормальные координаты в (псевдо)римановой геометрии более подробно.

Два слова об обозначениях. Мы часто используем знак тильды для геометрических объектов в (псевдо)римановой геометрии. Поскольку значок окружности над символом уже используется для обозначения геометрических объектов, рассматриваемых в точке $x_0$, то, чтобы не загромождать обозначений, знак тильды в настоящем разделе мы опустим.

В (псевдо)римановой геометрии в нормальных координатах $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$, и ковариантная производная произвольного тензора в этой точке совпадает с частной производной. При этом в выражении для тензора кривизны пропадают квадратичные слагаемые по связности:

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \partial_\alpha \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\delta - \partial_\beta \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^\delta$$

или

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial^2_{\alpha\gamma}\overset{\circ}{g}_{\beta\delta} - \partial^2_{\alpha\delta}\overset{\circ}{g}_{\beta\gamma} - \partial^2_{\beta\gamma}\overset{\circ}{g}_{\alpha\delta} + \partial^2_{\beta\delta}\overset{\circ}{g}_{\alpha\gamma}).$$

Вычисления, аналогичные тем, что привели к формулам (3.87), (3.88), в (псевдо)римановой геометрии дают равенства

$$\begin{aligned}
\partial_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_2\}\alpha}{}^\beta &= -\frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2\}}{}^\beta, \\
\partial^2_{\{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_3\}\alpha}{}^\beta &= -\frac{1}{2}\nabla_{\{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\}}{}^\beta, \\
\partial^3_{\{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma_4\}\alpha}{}^\beta &= -\frac{3}{5}\nabla_{\{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_3\gamma_4\}}{}^\beta - \frac{2}{15}\overset{\circ}{R}_{\alpha\{\gamma_1\gamma_2}{}^\delta\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_3\gamma_4\}}{}^\beta,
\end{aligned} \tag{3.90}$$

где симметризация проводится только по индексам $\gamma_1$, $\gamma_2, \ldots$ . Здесь мы дополнительно вычислили третью симметризованную производную от связности.

Разложим ковариантный тензор $A_{\alpha_1\ldots\alpha_s}$ произвольного ранга $s$ в окрестности точки $x_0$ в ряд по нормальным координатам:

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} + \partial_\gamma\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\, y^\gamma + \frac{1}{2}\partial^2_{\gamma_1\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}\, y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \ldots,$$

где $x_0 = \{y^\alpha = 0\}$. Преобразовав частные производные в ковариантные и исключив слагаемые со связностью с помощью формул (3.90), получим следующий ряд

$$
\begin{aligned}
A_{\alpha_1\dots\alpha_s} = {}&\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s} + \nabla_\gamma \overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s} y^\gamma + \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{s}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_1\gamma_2}{}^{\beta_k}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\beta_k\dots\alpha_s}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} + \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\nabla_{\gamma_3}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\alpha_s} - \sum_{k=1}^{s}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_1\gamma_2}{}^{\beta_k}\nabla_{\gamma_3}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\beta_k\dots\alpha_s} - \right.\\
&\qquad\left. -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\nabla_{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha_k\gamma_2\gamma_3}{}^{\beta_k}\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\beta_k\dots\alpha_s}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3} + \dots .
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

Под знаком суммы подразумевается суммирование по индексу $\beta_k$, который стоит на $k$-м месте в $\overset{\circ}{A}_{\alpha_1\dots\beta_k\dots\alpha_s}$. В полученном выражении симметризацию по индексам $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ можно не указывать, так как происходит свертка с симметричным произведением $y^{\gamma_1}\dots y^{\gamma_k}$.

Аналогичные ряды можно построить для тензоров, содержащих произвольные наборы ковариантных и контравариантных индексов. Во всех случаях коэффициенты ряда вплоть до любого порядка могут быть выражены только через ковариантные объекты в точке $x_0$.

Нормальные координаты особенно удобны при анализе (псевдо)римановой метрики. В этом случае возникает дополнительное упрощение, поскольку все ковариантные производные от метрики тождественно равны нулю. Несложные вычисления показывают, что ряд (3.91) для метрики в нормальных координатах принимает вид

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} = {}&\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_1\gamma_2\beta}\,y^{\gamma_1}y^{\gamma_2} - \frac{1}{3!}\nabla_{\gamma_1}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_2\gamma_3\beta}\,y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3} + \\
&+ \frac{1}{5!}\left(-6\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_3\gamma_4\beta} + \frac{16}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\gamma_1\gamma_2}{}^{\delta}\overset{\circ}{R}_{\delta\gamma_3\gamma_4\beta}\right) y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}y^{\gamma_3}y^{\gamma_4} + \dots ,
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

где мы также вычислили слагаемое четвертого порядка.

**3.9.3. (Псевдо)римановы пространства постоянной кривизны.** Выражение для метрики в нормальных координатах (3.92) принимает особенно простой вид для пространств постоянной кривизны, которые определяются равенством $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 0$.

Предложение 3.9.2. *В пространстве постоянной кривизны (псевдо)риманова метрика в окрестности произвольной точки $x_0 \in \mathbb{M}$ в нормальных координатах $y^\alpha$ имеет вид*

$$
g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{(2k+2)!}V_\alpha{}^{\epsilon_1}V_{\epsilon_1}{}^{\epsilon_2}\dots V_{\epsilon_{k-1}}{}^{\epsilon_k}\eta_{\epsilon_k\beta},
\tag{3.93}
$$

*где*

$$
V_{\epsilon_{k-1}}{}^{\epsilon_k} := \overset{\circ}{R}_{\epsilon_{k-1}\gamma_1\gamma_2}{}^{\epsilon_k}\,y^{\gamma_1}y^{\gamma_2}, \qquad \epsilon_0 = \alpha.
$$

Доказательство. Сначала проверяем, что первые два члена суммы действительно совпадают с (3.92) для пространств постоянной кривизны. Далее доказательство проводится по индукции.

Ряд для метрики (3.93) можно просуммировать для пространств постоянной кривизны специального вида. В этом случае в начале координат справедливо равенство

$$
\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}), \qquad n = \mathsf{dim}\,\mathbb{M}, \quad K = \mathsf{const}.
\tag{3.94}
$$

Тогда матрица ${V_\alpha}^\beta$ пропорциональна проекционному оператору:

$$ {V_\alpha}^\beta = as\left(\delta_\alpha^\beta - \frac{y_\alpha y^\beta}{s}\right), $$

где

$$ a := \frac{2K}{n(n-1)}, \qquad s := y^\alpha y_\alpha, \qquad y_\alpha := y^\beta \eta_{\alpha\beta}, $$

и ряд для метрики принимает вид

$$ g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{y_\alpha y_\beta}{s}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}(-as)^k. \tag{3.95} $$

Это выражение для метрики определено и для $s = 0$, так как ряд начинается с линейного по $s$ члена. Теперь ряд можно просуммировать, что приводит к следующему выражению для метрики

$$ g_{\alpha\beta} = f(s)\Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} + \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} = f\eta_{\alpha\beta} + (1-f)\frac{y_\alpha y_\beta}{s}, \tag{3.96} $$

где метрика представлена в виде суммы проекционных операторов:

$$ \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} := \eta_{\alpha\beta} - \frac{y_\alpha y_\beta}{s}, \qquad \Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} := \frac{y_\alpha y_\beta}{s}, $$

а функция $f(s)$ определена рядом

$$ f(s) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}(-as)^k, \tag{3.97} $$

который сходится на всей комплексной плоскости $s$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 3.9.4. *Пусть на многообразии задана (псевдо)риманова метрика $g$ класса $\mathcal{C}^2$ такая, что многообразие является пространством постоянной кривизны специального вида:*

$$ R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \tag{3.98} $$

*Тогда метрика $g$ на $\mathbb{M}$ вещественно аналитична.*

Доказательство. Прямая проверка показывает, что вещественно аналитическая метрика (3.96), (3.97) описывает многообразие постоянной кривизны (3.98). Единственность метрики следует из единственности решения задачи Коши для уравнений геодезических.

Ряд (3.97) можно просуммировать. Для псевдоримановых пространств "положительной" кривизны $K > 0$, $a > 0$ и функция $f(s)$ имеет вид

$$ f(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & s > 0, \\ 1, & s = 0, \\ -\dfrac{\operatorname{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & s < 0. \end{cases} \tag{3.99} $$

Функция $f(s)$, как нетрудно проверить, аналитична. Напомним, что $\sin ix = i\operatorname{sh} x$.

Для псевдоримановых пространств “отрицательной” кривизны $K < 0$, $a < 0$ имеем равенство

$$f(s) = \begin{cases} -\dfrac{\mathsf{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & s > 0, \\ 1, & s = 0, \\ \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & s < 0. \end{cases} \tag{3.100}$$

Отметим, что на световом конусе, $s = 0$, метрика в обоих случаях совпадает с метрикой Минковского.

Если кривизна псевдориманова пространства постоянной кривизны равна нулю, $K = 0$, то $f = 1$.

Для римановых пространств постоянной кривизны всегда $s > 0$ и

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\sqrt{as}}{as}, & K > 0, \\ 1, & K = 0, \\ -\dfrac{\mathsf{sh}^2\sqrt{-as}}{as}, & K < 0. \end{cases} \tag{3.101}$$

Тот факт, что функция $f(s)$ действительно приводит к ряду (3.95), проверяется прямой проверкой.

Рассмотрим римановы пространства постоянной кривизны, для которых $g_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$. Метрика (3.96) принимает особенно простой вид в сферической системе координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. В сферических координатах $s = y^\alpha y^\beta \delta_{\alpha\beta} = r^2$, где $r$ – радиальная координата, и справедливы тождества

$$\Pi^{\mathrm{L}}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = dr^2, \qquad \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta = r^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, метрику пространств постоянной кривизны в нормальных координатах можно записать в виде

$$ds^2 = dr^2 + r^2 f d\Omega. \tag{3.102}$$

Проанализируем пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой (3.102) подробнее. Объем сферы радиуса $r\sqrt{f}$ в $\mathbb{R}^n$ с метрикой (3.102) равен

$$S^{n-1}_r = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}(r^2 f)^{(n-1)/2}.$$

Мы видим, что нули функции $f(r^2) = 0$ определяют те сферы в $\mathbb{R}^n$, площадь которых равна нулю. Поскольку площадь поверхности является инвариантным объектом, то это означает, что на самом деле эти сферы соответствуют отдельным точкам пространства постоянной кривизны.

Нормальные координаты для многообразий постоянной кривизны определены для всех $\{y^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$. При этом все геодезические, проходящие через точку $x_0$, полны, так как канонический параметр пробегает всю вещественную прямую $t \in (-\infty, \infty)$.

Проведенное рассмотрение доказывает

Теорема 3.9.5. *Нормальные координаты на (псевдо)римановом многообразии $\mathbb{M}$ постоянной кривизны вида (3.98) в каждой точке $x_0 \in \mathbb{M}$ задают гладкое сюръективное отображение*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{M}. \tag{3.103}$$

*Для римановых пространств нулевой кривизны нормальные координаты совпадают с декартовыми.*

Замечание. В дальнейшем мы увидим, что отображение (3.103) не является накрытием.

В общем случае отображение (3.103) не является взаимно однозначным. Поэтому в области определения нормальных координат $\mathbb{R}^n$ можно задать отношение эквивалентности, отождествив те точки, которые отображаются на одну и ту же точку из $\mathbb{M}$. Таким образом, пространство постоянной кривизны вида (3.98) можно рассматривать как евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, в котором задано некоторое отношение эквивалентности между точками.

Пример 3.9.2. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ единичного радиуса в качестве пространства постоянной положительной кривизны. В этом случае $K = 1$, $a = 1$, $n = 2$. Функция $f(r^2)$ в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$f = \frac{\sin^2 r}{r^2}.$$

Это соответствует метрике

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2.$$

Длина окружности на плоскости $\mathbb{R}^2$ радиуса $r$ с центром в начале координат равна

$$L = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin r = 2\pi \sin r.$$

Отсюда следует, что окружности радиусов $r = \pi k$, $k = 1, 2, \dots$, отображаются в одну точку сферы. При этом плоскость $\mathbb{R}^2$ бесконечное число раз “накрывает” сферу $\mathbb{S}^2$. Если условиться, что начало координат соответствует южному полюсу сферы, то при отображении $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ все окружности радиуса $r = 2\pi k$, $k = 0, 1, \dots$, соответствуют южному полюсу, а все окружности радиуса $r = \pi + 2\pi k$ – северному. В рассматриваемом случае между точками евклидовой плоскости возникает отношение эквивалентности

$$y^\alpha \sim y^\alpha + \frac{y^\alpha}{r} 2\pi k, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Нормальные координаты были определены таким образом, что геодезические линии в них совпадают с прямыми. В (псевдо)римановом пространстве экстремали совпадают с геодезическими и поэтому также являются прямыми. Проверим это для пространств постоянной кривизны, которые были рассмотрены выше. Уравнения для экстремалей, определяемых метрикой (3.96), можно проинтегрировать. Из выражения для символов Кристоффеля, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{f'}{f}\left(y_\alpha \Pi^{\mathrm{T}\gamma}_\beta + y_\beta \Pi^{\mathrm{T}\gamma}_\alpha\right) + \frac{1 - f - f's}{s} y^\gamma \Pi^{\mathrm{T}}_{\alpha\beta}, \tag{3.104}$$

следуют уравнения для экстремалей (3.24)

$$\ddot{y}^\alpha = -2\frac{f'}{f}\dot{y}^\alpha y_\beta \dot{y}^\beta + 2\frac{f'}{f} y^\alpha \frac{(y_\beta \dot{y}^\beta)^2}{s} + \frac{1 - f - f's}{s^2} y^\alpha (y_\beta \dot{y}^\beta)^2 - \frac{1 - f - f's}{s} y^\alpha (\dot{y}_\beta \dot{y}^\beta). \tag{3.105}$$

Эти уравнения имеют интеграл (3.32)

$$C_0 = \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta g_{\alpha\beta} = \dot{y}_\alpha \dot{y}^\alpha f - \frac{(y_\alpha \dot{y}^\alpha)^2}{s}(f - 1) = \mathsf{const}.$$

Прямая проверка показывает, что все прямые линии, проходящие через начало координат,

$$y^\alpha = v^\alpha t, \qquad v^\alpha = \mathsf{const}, \quad t \in \mathbb{R},$$

являются экстремалями. Эти экстремали, очевидно, полны. Отметим, что символы Кристоффеля (3.104) равны нулю только в начале координат. В близких точках они отличны от нуля, и среди экстремалей прямыми являются только те, которые проходят через начало координат.

Уравнения для экстремалей (3.105) можно проинтегрировать и в общем случае. То есть найти те экстремали, которые не проходят через начало координат. Для этой цели рассмотрим зависимость $s := y^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta}$ от $t$. Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \dot s &= 2y_\alpha \dot y^\alpha, \\ \ddot s &= 2y_\alpha \ddot y^\alpha + 2\dot y_\alpha \dot y^\alpha, \end{aligned}$$

из уравнений для экстремалей получаем обыкновенное уравнение на $s(t)$:

$$\ddot s = \left(\frac{1}{2s} - \frac{U'}{2U}\right)\dot s^2 + \frac{2C_0 U' s}{U},$$

где функция $U(s)$ имеет вид

$$U(s) := \frac{\sin^2\sqrt{as}}{a}.$$

Рассмотрим случай $C_0 a > 0$. Введя новую переменную $z^2 = as$, при $as > 0$, и растянув канонический параметр $t \to t/\sqrt{C_0 a}$, приходим к уравнению

$$\ddot z = (1 - \dot z^2)\operatorname{ctg} z,$$

которое можно явно проинтегрировать. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\cos\sqrt{as} = \sqrt{1 - \frac{1}{C_1}}\sin(t + t_0), \qquad C_1 = \mathsf{const} > 1, \quad t_0 = \mathsf{const}.$$

Аналогично можно рассмотреть все остальные случаи.

Таким образом, для пространств постоянной кривизны специального вида (3.94) в нормальных координатах можно найти и проанализировать поведение всех экстремалей. В дальнейшем мы рассмотрим эту задачу в ряде конкретных случаев.

**3.9.4. Нормальные координаты и экспоненциальное отображение.** Пусть задана связность $\Gamma$ на многообразии $\mathbb{M}$ и $\gamma = x(t)$ – геодезическая. Если $t$ – канонический параметр вдоль геодезической, то координатные функции $\{x^\alpha(t)\}$ удовлетворяют системе уравнений (3.3). Зафиксируем канонический параметр $t$ каким-либо образом и начальную точку $x_0 = x(0)$. Тогда касательный вектор $u_0 := \dot x_0 \in \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$ к геодезической в точке $x_0$ определен однозначно. Верно также обратное утверждение. Если задана точка $x_0 \in \mathbb{M}$ и касательный вектор $u_0 \in \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, то существует единственная геодезическая, проходящая через $x_0$ с начальным вектором $u_0$, при этом канонический параметр определен с точностью до сдвига. Таким образом, каждая геодезическая однозначно определена парой $(x_0, u_0)$.

Геодезическая линия $x(t)$ является интегральной кривой для векторного поля скорости $u(t) := \dot x(t)$. Тогда для полных геодезических определено экспоненциальное отображение

$$\exp(tu_0): \quad x_0 \mapsto x(t), \tag{3.106}$$

которое отображает начальную точку $x_0$ в точку $x(t)$. Если вектор скорости $u_0$ принимает все возможные направления в касательном пространстве $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, то экспоненциальное отображение (3.106) можно рассматривать как отображение касательного пространства в многообразие

$$\mathsf{exp}\,(tu_0): \quad \mathbb{T}_0(\mathbb{M}) \ni \qquad tu_0 \mapsto x(t) \qquad \in \mathbb{M}, \tag{3.107}$$

для которого мы сохраним прежнее обозначение.

По построению, каждая прямая в касательном пространстве $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, проходящая через начало координат, отображается в соответствующую геодезическую. Ясно, что такое отображение можно построить для каждой точки $x_0 \in \mathbb{M}$.

Если геодезическая неполна, то экспоненциальное отображение (3.107) определено только для некоторого интервала значений канонического параметра $-\epsilon_1 < t < \epsilon_2$, где $\epsilon_{1,2} > 0$. В результате экспоненциальное отображение будет определено в некоторой окрестности начала координат касательного пространства. Если связность на $\mathbb{M}$ класса $\mathcal{C}^\infty$, то экспоненциальное отображение будет того же класса гладкости $\mathcal{C}^\infty$. Поскольку дифференциал экспоненциального отображения в точке $x_0$ невырожден, то существует окрестность $\mathbb{U}_0 \ni x_0$ такая, что экспоненциальное отображение (3.107) является диффеоморфизмом $\mathbb{U}_0 \to \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{T}_0(\mathbb{M})$, где $\mathbb{V}_0$ – некоторая окрестность касательного пространства, содержащая начало координат. Выберем координатный репер $\{\partial_\alpha\}$ в точке $x_0$ и предположим, что векторы скорости принимают значение на единичной сфере

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (u_0^\alpha)^2 = 1.$$

Теперь отождествим касательное пространство $\mathbb{T}_0(\mathbb{M})$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ естественным образом, отождествив координаты касательного вектора $\{tu_0^\alpha\}$ с декартовыми координатами точки $\{y^\alpha\}$ в $\mathbb{R}^n$. В результате получим координатную систему, определенную на $\mathbb{U}_0$.

Определение. Система координат в окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{M}$ точки $x_0$, определенная экспоненциальным отображением (3.107),

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \supset \mathbb{U}_0 \ni \qquad \{x^\alpha(t)\} \mapsto \{y^\alpha := tu_0^\alpha\} \qquad \in \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{R}^n,$$

называется *нормальной*.

Замечание. Подчеркнем, что нормальная система координат определена исключительно связностью, а не метрикой, которой вообще может не быть на многообразии.

Если на многообразии $\mathbb{M}$ помимо связности $\Gamma$ задана также метрика $g$, то исходную систему координат $x^\alpha$ в окрестности точки $x_0$ можно всегда выбрать таким образом, что координатный базис $\partial_\alpha$ будет ортонормальным в данной точке $x_0$, т.е. $g_{\alpha\beta}(x_0) = \eta_{\alpha\beta}$. Мы всегда предполагаем, что для нормальной системы координат при наличии метрики данное условие выполнено.

Теорема 3.9.6 (Уайтхед). *Пусть $y^\alpha$ – нормальная система координат в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{M}$. Определим окрестность $\mathbb{U}_0(\rho)$ точки $x_0$ равенством $\sum_\alpha (y^\alpha)^2 < \rho^2$. Тогда существует положительное число $r$ такое, что если $0 < \rho < r$, то:*

1) *окрестность $\mathbb{U}_0(\rho)$ является геодезически выпуклой, т.е. любые две точки из $\mathbb{U}_0(\rho)$ можно соединить геодезической, целиком лежащей в $\mathbb{U}_0(\rho)$;*
2) *каждая точка из $\mathbb{U}_0(\rho)$ имеет нормальную координатную окрестность, содержащую $\mathbb{U}_0(\rho)$.*

Доказательство. См. [37].

Замечание. Данная теорема справедлива для произвольных достаточно гладких связностей, независимо от того, задана на многообразии метрика или нет.

# 4. Симплектические и пуассоновы многообразия

Симплектические и пуассоновы многообразия играют важную роль в дифференциальной геометрии в связи с применениями, в первую очередь к гамильтоновой динамике, рассмотренной в главе 6.

## 4.1. Симплектические группы

Симплектические группы играют в симплектической геометрии ту же роль, что и группы вращений в евклидовой геометрии. Поскольку эти группы устроены намного сложнее, чем ортогональные и унитарные матричные группы, то мы посвятим симплектическим группам и их свойствам целый раздел. Более подробное изложение содержится в [38].

Определение. Рассмотрим антисимметричную $2n \times 2n$ матрицу (*каноническую симплектическую форму*),

$$\varpi = (\varpi_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, 2n$ и $\mathbb{1}$ – единичная $n \times n$ матрица. Эта матрица определяет билинейную квадратичную форму в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, рассматриваемом как векторное пространство,

$$\varpi : \quad \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \ni \qquad X, Y \mapsto \varpi(X, Y) := X^\alpha Y^\beta \varpi_{\alpha\beta} \qquad \in \mathbb{R},$$

где $X^\alpha$ и $Y^\beta$ – компоненты векторов в декартовой системе координат. Квадратные матрицы $A$ размера $2n \times 2n$ с вещественными элементами, оставляющие каноническую симплектическую форму $\varpi$ инвариантной,

$$A^{\mathrm{T}} \varpi A = \varpi, \tag{4.2}$$

образуют группу Ли $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$, которая называется *вещественной симплектической группой.*

Взятие определителя от обеих частей определения (4.2) приводит к равенству $\det A = \pm 1$, поскольку $\det \varpi = 1$. Отсюда следует, что для любой матрицы $A$ существует обратная. Нетрудно убедиться, что обратная матрица также является симплектической, а также в том, что произведение двух симплектических матриц снова дает симплектическую матрицу. Тем самым все групповые аксиомы выполнены.

Каноническая симплектическая форма универсальна в следующем смысле. Если $\omega$ – произвольная невырожденная антисимметричная матрица, то из курса линейной алгебры известно, что за счет линейного преобразования базиса в $\mathbb{R}^{2n}$ ее всегда можно преобразовать к каноническому виду (4.1).

Предложение 4.1.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ состоит из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & -B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \tag{4.3}$$

*где $B$ – произвольная вещественная $n \times n$ матрица, а вещественные $n \times n$ матрицы $C$ и $D$ симметричны.*

Доказательство. Вблизи единицы группы симплектическая матрица представима в виде

$$A = \mathsf{e}^{tM} = \mathbb{1} + tM + \ldots, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $M \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ – элемент алгебры Ли. Подставляя это разложение в (4.2), в линейном по $t$ порядке получаем равенство

$$M^{\mathrm{T}}\varpi + \varpi M = 0. \tag{4.4}$$

Представим элемент алгебры в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}.$$

Тогда из (4.4) следуют равенства:

$$C = C^{\mathrm{T}}, \qquad D = D^{\mathrm{T}}, \qquad E = -B^{\mathrm{T}}.$$

Следствие. Размерность симплектической группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ равна $n(2n+1)$.

Выше было отмечено, что $\mathsf{det}\, A = \pm 1$. Справедливо более сильное утверждение.

Предложение 4.1.2. *Определитель любой симплектической матрицы равен единице*

$$\mathsf{det}\, A = 1, \qquad A \in \mathbb{SP}(n, \mathbb{R}). \tag{4.5}$$

Доказательство. Любую симплектическую матрицу $A = (A_\alpha{}^\beta) \in \mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, 2n$, можно рассматривать как невырожденное линейное преобразование $2n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$, которое оставляет каноническую 2-форму $\varpi$ инвариантной. Следовательно, симплектическое преобразование сохраняет инвариантной и любую внешнюю степень формы $\varpi$. В частности, симплектическое преобразование сохраняет $2n$-форму объема $\varpi^n$. Известно, что при преобразовании координат форма объема умножается на якобиан преобразования координат. Таким образом, для симплектических преобразований имеем равенство

$$\varpi^n = \varpi^n \,\mathsf{det}\, A.$$

Отсюда следует равенство (4.5).

Симплектические группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ существенно отличаются от групп вращений евклидова пространства. В частности, они являются некомпактными. Продемонстрируем это на примере простейшей группы $\mathbb{SP}(1, \mathbb{R})$.

Теорема 4.1.1. *Группа $\mathbb{SP}(1, \mathbb{R})$ изоморфна группе $2 \times 2$ матриц $\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$. С топологической точки зрения эта группа трехмерна, некомпактна и гомеоморфна прямому произведению окружности на двумерную плоскость, $\mathbb{SP}(1, \mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. Она не односвязна, и ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел*

$$\pi_1\big(\mathbb{SP}(1, \mathbb{R})\big) \simeq \mathbb{Z}.$$

Доказательство. В двумерном случае каноническая симплектическая форма с точностью до знака совпадает с полностью антисимметричным тензором $\varpi_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta}$. Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{SP}(1, \mathbb{R})$ как линейное преобразование двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда уравнение (4.2) запишется в виде

$$A_\alpha{}^\gamma A_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Поскольку левая часть уравнения антисимметрична по индексам $\alpha$ и $\beta$, то она равна $\mathsf{det}\, A\, \varepsilon_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что уравнение (4.2) эквивалентно одному уравнению $\mathsf{det}\, A = 1$. Таким образом, группа $\mathbb{SP}(1, \mathbb{R})$ изоморфна группе вещественных $2 \times 2$ матриц с единичным определителем, т.е. группе $\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$.

Из курса линейной алгебры известно, что любое линейное преобразование плоскости, для которого $\mathsf{det}\, A = 1$, можно однозначно представить в виде композиции двух преобразований: ортогонального поворота плоскости (группа $\mathbb{U}(1) \approx \mathbb{S}^1$) и преобразования, задающегося верхнетреугольной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \qquad a > 0.$$

Вещественные числа $a$ и $b$ можно рассматривать в качестве координат на полуплоскости $a > 0$, которая гомеоморфна всей евклидовой плоскости. Таким образом, мы получаем топологическое разложение группы $\mathbb{SP}(1, \mathbb{R})$ на прямое произведение окружности и двумерной плоскости. Прямое произведение $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ гомотопически эквивалентно окружности (стягивается к окружности), и поэтому фундаментальная группа $\mathbb{SP}(1, \mathbb{R})$ изоморфна фундаментальной группе окружности.

Симплектические группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ при $n > 1$ имеют более сложную структуру, и их описание выходит за рамки настоящей монографии. Отметим лишь, что все группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ некомпактны. В дальнейшем нам понадобятся другой класс групп Ли, который обозначается $\mathbb{SP}(n)$ и состоит из компактных симплектических групп. Они существуют и строятся как подгруппы в комплексных симплектических группах $\mathbb{SP}(n) \subset \mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$.

Рассмотрим $2n$-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с координатами $z^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 2n$. Каноническая симплектическая форма $\varpi$ задает на $\mathbb{C}^{2n}$ симплектическую структуру (билинейную квадратичную форму), т.е. двум векторам $X$ и $Y$ ставится в соответствие число

$$\varpi: \quad \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \ni \qquad X, Y \mapsto \varpi(X, Y) := X^\alpha Y^\beta \varpi_{\alpha\beta} \quad \in \mathbb{C}.$$

По определению, симплектическая структура антисимметрична $\varpi(X, Y) = -\varpi(Y, X)$. Невырожденное комплексное линейное преобразование координат называется *симплектическим*, если оно сохраняет каноническую симплектическую структуру. Это преобразование задается комплексной $2n \times 2n$ матрицей $A \in \mathbb{SP}(2n, \mathbb{C})$, которая удовлетворяет тому же равенству (4.2), что и в вещественном случае. Единственное отличие состоит в том, что элементами матрицы $A$ теперь являются комплексные числа. Эти матрицы образуют *комплексную симплектическую группу* $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$. Ясно, что группа $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ содержится в группе $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$ как подгруппа вещественных симплектических преобразований.

Представление элементов алгебры Ли $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ в виде (4.3) справедливо и для комплексных симплектических групп, только матрицы $B, C$ и $D$ будут комплексными. Поэтому размерность группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$ в два раза больше размерности вещественной группы $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ и равна $2n(2n + 1)$. Так же как и в вещественном случае, группа $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$ при всех $n$ является некомпактной.

Предложение 4.1.3. *Симплектические группы* $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$ *и* $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$ *являются связными, т.е. состоят из одной компоненты.*

Предложение 4.1.4. *Характеристический полином*

$$f(\lambda) = \mathsf{det}\,(A - \lambda \mathbb{1}) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \lambda^k$$

*симплектического вещественного преобразования* $A \in \mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$ *обладает свойством*

$$f(\lambda) = \lambda^{2n} f(1/\lambda),$$

*что означает симметричность его коэффициентов*: $a_k = a_{2n-k}$. *В частности, если* $\lambda$ – *собственное число симплектического преобразования, то* $1/\lambda$ – *также собственное число.*

Доказательство. Из определения симплектического преобразования (4.2) следует, что $A = -\varpi A^{-1\mathrm{T}}\varpi$, так как $\varpi^2 = -\mathbb{1}$. Отсюда вытекает цепочка равенств

$$f(\lambda) = \det(-\varpi A^{-1\mathrm{T}}\varpi - \lambda\mathbb{1}) = \det(-A^{-1\mathrm{T}} + \lambda\mathbb{1}) = \\ = \det(-\mathbb{1} + \lambda A) = \lambda^{2n}\det\left(A - \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}\right),$$

где мы воспользовались равенствами $\det A = \det A^{\mathrm{T}} = 1$.

Отметим, что у характеристического полинома не может быть нулевого собственного значения, так как $\det A = 1$. Поскольку характеристический полином является вещественным, то если $\lambda$ – комплексное собственное число, то $\bar\lambda$ – также собственное число. Таким образом, в случае общего положения собственные числа вещественного симплектического преобразования разбиваются на четверки $\lambda$, $\bar\lambda$, $1/\lambda$, $1/\bar\lambda$, т.е. собственные числа расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси и единичной окружности.

По построению, комплексная симплектическая группа $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ содержит некомпактную вещественную подгруппу $\mathbb{SP}(n,\mathbb{R})$. Оказывается, что группа $\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$ содержит компактную подгруппу, которая называется компактной симплектической группой и обозначается через $\mathbb{SP}(n)$. Эту подгруппу удобно определить с использованием алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ (см. приложение 19.1).

Определение. Рассмотрим $n$-мерное кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ с базисом $e_{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} = 1,\dots,n$. Каждый вектор $q \in \mathbb{H}^n$ однозначно представим в виде $q = q^{\mathrm{A}}e_{\mathrm{A}}$, где каждая координата является кватернионом: $q^{\mathrm{A}} \in \mathbb{H}$. Каждый кватернион разлагается по базису $\{1, i, j, k\}$:

$$q^{\mathrm{A}} = a^{\mathrm{A}} + b^{\mathrm{A}}i + c^{\mathrm{A}}j + d^{\mathrm{A}}k.$$

Вещественная размерность $\mathbb{H}^n$ равна $4n$. Очевидно, что $\mathbb{H}^1 = \mathbb{H}$.

Рассмотрим в $\mathbb{H}^n$ симметричное вещественнозначное скалярное произведение

$$(q_1, q_2) := \operatorname{re} q_1\bar q_2 = \sum_{\mathrm{A}=1}^{n}(a_1^{\mathrm{A}}a_2^{\mathrm{A}} + b_1^{\mathrm{A}}b_2^{\mathrm{A}} + c_1^{\mathrm{A}}c_2^{\mathrm{A}} + d_1^{\mathrm{A}}d_2^{\mathrm{A}}). \tag{4.6}$$

Множество всех линейных кватернионных преобразований $A \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{H})$ пространства $\mathbb{H}^n$, не меняющих начало координат и сохраняющих скалярное произведение

$$(Aq_1, Aq_2) = (q_1, q_2),$$

называется *симплектической компактной группой* $\mathbb{SP}(n)$.

Кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ естественным образом отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{4n}$. Тогда скалярное произведение (4.6) совпадает с обычным евклидовым скалярным произведением в $\mathbb{R}^{4n}$. Это значит, что группа $\mathbb{SP}(n)$ является подгруппой в $\mathbb{O}(4n,\mathbb{R})$. Поскольку группа вращений $\mathbb{O}(4n,\mathbb{R})$ компактна, то и симплектическая группа $\mathbb{SP}(n)$ также компактна.

В приложении 19.1 показано, что алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ естественным образом отождествляется с двумерным комплексным пространством $\mathbb{C}^2$. Выполняя эту операцию вдоль каждой из кватернионных координат, мы получим отождествление $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$. При отождествлении

$$q = z_1 + j\bar{z}_2, \qquad z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id,$$

квадратичная форма двух кватернионов $q_1 = z_{11} + jz_{12}$ и $q_2 = z_{21} + jz_{22}$ перейдет в сумму комплексных квадратичных форм

$$(q_1, q_2)_{\mathbb{H}} := q_1\bar{q}_2 = (q_1, q_2)_{\mathbb{C}} + \langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}},$$

где

$$(q_1, q_2)_{\mathbb{C}} := \sum_{\mathrm{A}}(z_{11}^{\mathrm{A}}\bar{z}_{21}^{\mathrm{A}} + z_{12}^{\mathrm{A}}\bar{z}_{22}^{\mathrm{A}}), \qquad \langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{\mathrm{A}}(z_{12}^{\mathrm{A}}z_{21}^{\mathrm{A}} - z_{11}^{\mathrm{A}}z_{22}^{\mathrm{A}}).$$

Квадратичная форма $(q_1, q_2)_{\mathbb{C}}$ эрмитова, т.е. $\overline{(q_1, q_2)}_{\mathbb{C}} = (q_2, q_1)_{\mathbb{C}}$, а форма $\langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}}$ антисимметрична: $\langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}} = -\langle q_1, q_2\rangle_{\mathbb{C}}$. Отметим, что квадратичная форма $(q_1, q_2)_{\mathbb{H}}$ отличается от квадратичной формы (4.6) отсутствием знака реальной части.

Теорема 4.1.2. *Множество элементов $\mathbb{SP}(n)$ является связной компактной группой Ли вещественной размерности $n(2n+1)$. При отождествлении $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$ группа $\mathbb{SP}(n)$ вкладывается как подгруппа в унитарную группу $\mathbb{U}(2n)$. При этом вложении алгебра Ли $\mathfrak{sp}(n)$ группы $\mathbb{SP}(n)$ состоит из комплексных $2n \times 2n$ матриц вида*

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

*где $Z_1$ – комплексная антиэрмитова $n \times n$ матрица, а $Z_2$ – комплексная симметричная $n \times n$ матрица. Если матрицы из унитарной группы $\mathbb{U}(2n)$ представить в виде*

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

*где $U_1, U_2, U_3$ и $U_4$ – комплексные $n \times n$ матрицы, то подгруппа $\mathbb{SP}(n)$ в $\mathbb{U}(2n)$ состоит из унитарных матриц вида*

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ -\overline{U}_2 & \overline{U}_1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

*При этом матрица (4.8) является унитарной тогда и только тогда, когда комплексные матрицы $U_1$ и $U_2$ удовлетворяют уравнениям $U_1U_1^\dagger + U_2U_2^\dagger = \mathbb{1}$ и $U_2U_1^{\mathrm{T}} = U_1U_2^{\mathrm{T}}$.*

Доказательство. Проводится прямой проверкой [38], раздел 2.3, лемма 6.

Связь симплектических групп с другими матричными группами дается следующими двумя теоремами, доказательство которых дано, например, в [38] раздел 2.4, предложение 2.

Теорема 4.1.3. *Рассмотрим стандартные вложения групп $\mathbb{O}(n) \hookrightarrow \mathbb{U}(n)$, $\mathbb{U}(n) \hookrightarrow \mathbb{SO}(2n)$, $\mathbb{SP}(n) \hookrightarrow \mathbb{U}(2n)$. Тогда имеют место следующие соотношения:*
1) $\mathbb{SO}(2n) \cap \mathbb{SP}(n) = \mathbb{U}(n)$; *здесь группы $\mathbb{SO}(2n)$ и $\mathbb{SP}(n)$ рассматриваются как подгруппы в одной группе $\mathbb{U}(2n)$*;
2) $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbb{U}(2n) = \mathbb{SP}(n)$;
3) $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbb{GL}(2n, \mathbb{C}) = \mathbb{U}(n)$;
4) $\mathbb{SP}(n, \mathbb{R}) \cap \mathbb{U}(2n) = \mathbb{U}(n)$.

Теорема 4.1.4. *Для компактных симплектических групп* $\mathbb{SP}(1)$ *и* $\mathbb{SP}(2)$ *имеют место изоморфизмы*:

$$\mathbb{SP}(1) \simeq \mathbb{SU}(2) \simeq \mathbb{SPIN}(3), \qquad \mathbb{SP}(2) \simeq \mathbb{SPIN}(5).$$

При больших $n > 2$ компактные симплектические группы $\mathbb{SP}(n)$ уже не сводятся к унитарным и ортогональным группам.

Теорема 4.1.5. *Группа* $\mathbb{SP}(n)$ *является максимальной компактной подгруппой в комплексной симплектической группе* $\mathbb{SP}(n, \mathbb{C})$.

Доказательство. См., например, [39], глава X, § 6, пункт 1, таблица IV.

Теорема 4.1.6. *Все компактные симплектические группы* $\mathbb{SP}(n)$, $n \geqslant 1$, *связны и односвязны.*

Доказательство. См., например, [40], лекция 1, пример 16; лекция 12, текст после теоремы 8.

## 4.2. Симплектические многообразия

Определение. Многообразие $\mathbb{M}$ четной размерности, $\operatorname{dim}\mathbb{M} = 2n$, называется *симплектическим*, если на нем задана достаточно гладкая 2-форма

$$\omega = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \omega_{\alpha\beta} \quad \in \Lambda_2(\mathbb{M}),$$

удовлетворяющая двум условиям:

$$\begin{array}{lll} 1) & \det \omega_{\alpha\beta} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{M} & \text{– невырожденность,} \\ 2) & d\omega = 0 & \text{– замкнутость.} \end{array}$$

Форма $\omega$ называется *симплектической.*

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задано два векторных поля $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда форма $\omega$ называется невырожденной, если из условия $\omega(X, Y) = 0$ для всех $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ следует $X = 0$. Легко проверить, что данное инвариантное определение невырожденности 2-формы эквивалентно условию $\det \omega_{\alpha\beta} \neq 0$, которое должно выполняться во всех картах и для всех точек $x \in \mathbb{M}$.

По определению, компоненты симплектической формы антисимметричны относительно перестановки индексов. Это значит, что ее невырожденность возможна только на многообразиях четной размерности. Поэтому размерность многообразия включена в определение.

В координатах замкнутость симплектической формы $\omega$ записывается в виде дифференциального уравнения

$$\partial_\alpha \omega_{\beta\gamma} + \partial_\beta \omega_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \omega_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.9}$$

Рассмотрим связь симплектических форм с ориентацией многообразий и формами объема.

Теорема 4.2.1. *Пусть* $\omega$ *– замкнутая 2-форма на многообразии* $\mathbb{M}$, $\operatorname{dim}\mathbb{M} = 2n$. *Для того чтобы эта форма была симплектической, необходимо и достаточно, чтобы* $2n$*-форма* $\omega^n$ *была формой объема на* $\mathbb{M}$, *т.е. нигде не обращалась в нуль.*

Доказательство. См., например, [23] предложение 3.4.4.

Следствие. Любое симплектическое многообразие $(\mathbb{M}, \omega)$ ориентируемо.

Доказательство. Отличие от нуля формы $\omega^n$ достаточно для ориентируемости.

Обычно симплектическое многообразие $(\mathbb{M},\omega)$ ориентируют формой объема $\upsilon$ с дополнительным множителем:

$$\upsilon := \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\omega^n, \tag{4.10}$$

чтобы согласовать выбор канонических координат (см. ниже) с канонической ориентацией евклидова пространства.

Пример 4.2.1. Рассмотрим каноническую 2-форму (4.1) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

$$\varpi = \frac{1}{2}dx^\alpha \wedge dx^\beta \varpi_{\alpha\beta} = dx^{n+1}\wedge dx^1 + dx^{n+2}\wedge dx^2 + \ldots + dx^{2n}\wedge dx^n. \tag{4.11}$$

Она невырождена, так как $\operatorname{det}\varpi_{\alpha\beta} = 1$, и замкнута, поскольку компоненты формы постоянны. Тем самым форма $\varpi$ определяет симплектическую форму на евклидовом пространстве. Поскольку

$$\varpi^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n! dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n},$$

то соответствующая форма объема

$$\upsilon := \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\varpi^n = dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{2n} \tag{4.12}$$

является канонической формой объема евклидова пространства.

Обратное утверждение о связи между наличием формы объема и симплектической формы в общем случае неверно. Исключение составляют двумерные многообразия: всякая ориентируемая поверхность допускает симплектическую структуру. Это просто полностью антисимметричный тензор второго ранга:

$$\omega = \upsilon = \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = dx^1\wedge dx^2\sqrt{|g|}.$$

Для ориентируемых многообразий более высокой размерности $\operatorname{dim}\mathbb{M} = 2n$, $n > 1$, симплектическая форма существует не всегда.

Следующая конструкция позволяет строить симплектические структуры на произвольном кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$, $\operatorname{dim}\mathbb{M} = n$, которое имеет размерность $2n$.

Определение. Пусть $X_r \in \mathbb{T}_r\big(\mathbb{T}^*(\mathbb{M})\big)$ – произвольный касательный вектор к кокасательному расслоению в точке $r\in\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. Определим *каноническую линейную форму* $\Theta$ на $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$, которая называется *формой Лиувилля* или *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре*, следующим соотношением

$$\Theta(X_r) = r(\pi_* X_r), \tag{4.13}$$

где $\pi_*$ – дифференциал проекции кокасательного расслоения, $\pi:\ \mathbb{T}^*(\mathbb{M})\to\mathbb{M}$.

Теорема 4.2.2. *На кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ к произвольному многообразию $\mathbb{M}$ существует симплектическая структура.*

Доказательство. Заметим, что $r$ является линейной формой на $\mathbb{T}_{\pi(r)}(\mathbb{M})$ и $\pi_* X_r$ – касательный вектор в точке $\pi(r)$. Следовательно, форма Лиувилля (4.13) определена всюду на кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. Пусть $q^\alpha$ – локальная система координат на $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$. Введем на $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ координаты $(x^1,\ldots,x^{2n}) := (q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n)$ следующим образом. Пусть $q^\alpha$, $\alpha=1,\ldots,n$, – координаты на $\mathbb{U}$. Формы $dx^1,\ldots,dx^n$ порождают пространство 1-форм на $\mathbb{U}$. Поэтому для всякой 1-формы $r\in\pi^{-1}(\mathbb{U})$ имеем равенство

$$r = dq^\alpha p_\alpha.$$

Разложим касательный вектор $X_r$ по координатному базису $(q, p)$:

$$X_r = X_r^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_{r\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha}.$$

Тогда

$$\pi_* X_r = X_r^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

и условие (4.13) принимает вид

$$\Theta(X_r) = X_r^\alpha p_\alpha.$$

Таким образом, получаем выражение для формы Лиувилля в локальных координатах:

$$\Theta = dx^\alpha p_\alpha. \tag{4.14}$$

Внешняя производная от формы Лиувилля имеет вид

$$d\Theta = dp_\alpha \wedge dq^\alpha = \frac{1}{2} dx^{\text{A}} \wedge dx^{\text{B}} \varpi_{\text{AB}}, \qquad \text{A}, \text{B} = 1, \dots, 2n,$$

т.е. совпадает с канонической симплектической формой $\varpi$. Таким образом, построена невырожденная замкнутая 2-форма $d\Theta$ на произвольном кокасательном расслоении.

Форма Лиувилля естественна в том смысле, что для любого сечения $\sigma\colon \mathbb{M} \to \mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ отображение дифференциальных форм $\sigma^*$ переводит 1-форму $\Theta$ в $r$: $\sigma^*(\Theta) = r$.

Следствие. Любое кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ ориентируемо.

Замечание. В гамильтоновом подходе к описанию динамики точечных частиц (см. главу 6) многообразие $\mathbb{M}$ и его кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ отождествляются соответственно с конфигурационным и фазовым пространствами.

Поскольку ранг симплектической 2-формы максимален и равен $2n$, то ее класс также равен $2n$. В этом случае теорема Дарбу формулируется следующим образом.

Теорема 4.2.3 (Дарбу). *Пусть задано симплектическое многообразие* $(\mathbb{M}, \omega)$. *Тогда у каждой точки* $x \in \mathbb{M}$ *существует такая координатная окрестность* $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{M}$, *в которой симплектическая форма принимает канонический вид*

$$\omega = \varpi.$$

Определение. Координаты, в которых симплектическая форма имеет канонический вид, называются *координатами Дарбу.*

Замечание. Метрику $g$ на многообразии $\mathbb{M}$ за счет выбора системы координат можно привести к каноническому виду только в фиксированной точке $x \in \mathbb{M}$. Лучшее, что можно сделать в общем случае, это привести метрику к каноническому виду вдоль произвольной кривой $\gamma \in \mathbb{M}$. В этом отношении симплектические многообразия проще. Согласно теореме Дарбу симплектическую форму можно привести к каноническому виду не только в данной точке многообразия, но и в некоторой окрестности этой точки.

Поскольку симплектическая структура $\omega_{\alpha\beta}(x)$ является невырожденной, то в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ существует обратная матрица $\omega^{-1\,\alpha\beta}(x)$, которая также антисимметрична:

$$\omega^{-1\,\alpha\beta} \omega_{\beta\gamma} = \omega_{\gamma\beta} \omega^{-1\,\beta\alpha} = \delta^\alpha_\gamma, \qquad \omega^{-1\,\alpha\beta} = -\omega^{-1\,\beta\alpha}.$$

Замечание. Если на симплектическом многообразии $(\mathbb{M}, \omega)$ задана также метрика $g$, то в общем случае

$$\omega^{-1\,\alpha\beta} \neq \omega^{\alpha\beta} := g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \omega_{\gamma\delta}.$$

Пример 4.2.2. Для канонической симплектической структуры (4.1)

$$\varpi^{-1} = (\varpi^{-1\alpha\beta}) = -\varpi = \varpi^{\text{т}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Симплектическая структура устанавливает взаимно однозначное соответствие сечений касательных и кокасательных расслоений. В компонентах данное соответствие задается простым правилом:

$$A_\alpha = X^\beta \omega_{\beta\alpha}, \quad X^\alpha = A_\beta \omega^{-1\,\beta\alpha}, \qquad X \in \mathcal{X}(\mathbb{M}), \quad A \in \Lambda_1(\mathbb{M}). \tag{4.15}$$

Замкнутость симплектической формы (4.9) для обратного тензора $\omega^{-1\,\alpha\beta}(x)$ можно переписать в виде

$$\omega^{-1\,\alpha\delta} \partial_\delta \omega^{-1\,\beta\gamma} + \omega^{-1\,\beta\delta} \partial_\delta \omega^{-1\,\gamma\alpha} + \omega^{-1\,\gamma\delta} \partial_\delta \omega^{-1\,\alpha\beta} = 0.$$

Для этого достаточно свернуть равенство (4.9) с обратными матрицами $\omega^{-1\,\alpha\beta}$.

Используя внутреннее умножение, формулы (4.15) можно переписать в инвариантном виде:

$$A = \mathsf{i}_{X_A} \omega = X_A \rfloor \omega,$$

где $X_A$ – векторное поле, соответствующее 1-форме $A$.

Поскольку симплектическая структура на $\mathbb{M}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ и пространством 1-форм $\Lambda_1(\mathbb{M})$, то структуру алгебры Ли на $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ можно перенести на $\Lambda_1(\mathbb{M})$. Для двух произвольных 1-форм $A, B \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ положим

$$[A, B] := [X_A, X_B] \rfloor \omega. \tag{4.16}$$

Тем самым линейное пространство $\Lambda_1(\mathbb{M})$ приобретает структуру алгебры Ли. Таким образом, коммутатору векторных полей ставится в соответствие *скобка Пуассона* 1-форм (4.16).

В компонентах $A = dx^\alpha A_\alpha$, $B = dx^\alpha B_\beta$ и

$$[A, B] = dx^\alpha \Big[ (A_\beta \partial_\gamma B_\alpha + B_\gamma \partial_\beta A_\alpha) \omega^{-1\beta\gamma} + A_\beta B_\gamma \partial_\alpha \omega^{-1\beta\gamma} \Big]. \tag{4.17}$$

Эта формула получается прямыми вычислениями.

Скобку Пуассона двух 1-форм можно выразить через производную Ли:

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_{X_A} B = {} & \mathsf{L}_{X_A}(X_B \rfloor \omega) = \mathsf{L}_{X_A} X_B \rfloor \omega + X_B \rfloor (\mathsf{L}_{X_A} \omega) = \\ & = [X_A, X_B] \rfloor \omega + X_B \rfloor \left( X_A \rfloor d\omega + d(X_A \rfloor \omega) \right) = [A, B] + X_B \rfloor dA, \end{aligned}$$

где мы воспользовались линейностью производной Ли, основной формулой гомотопии и замкнутостью симплектической формы. Отсюда следует выражение для скобки Пуассона через производную Ли:

$$[A, B] = L_{X_A} B - X_B \rfloor dA. \tag{4.18}$$

Если 1-формы $A$ и $B$ замкнуты, то полученное выражение упрощается:

$$[A, B] = L_{X_A} B = -\mathsf{L}_{X_B} A.$$

Предложение 4.2.1. *Скобка Пуассона двух замкнутых форм является точной формой.*

Доказательство. Из основной формулы гомотопии следует, что для любой замкнутой формы $A$ справедливо равенство $\mathsf{L}_X A = d(X\rfloor A)$.

В компонентах скобка Пуассона двух замкнутых 1-форм (4.17) принимает простой вид

$$[A, B] = dx^\alpha \partial_\alpha(\omega^{-1\beta\gamma} A_\beta B_\gamma).$$

Скобку Пуассона можно также определить в алгебре функций на $\mathbb{M}$. А именно, каждая симплектическая структура определяет скобку Пуассона двух дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ класса $\mathcal{C}^2$:

$$[f, g] := \omega^{-1\,\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta}. \tag{4.19}$$

Дважды непрерывная дифференцируемость функций необходима для выполнения тождеств Якоби.

Поля $\omega^{-1\,\alpha\beta}(x)$ являются компонентами антисимметричного контравариантного тензора второго ранга. Они являются частным случаем пуассоновой структуры, рассмотренной в следующем разделе.

Пусть на симплектическом многообразии $(\mathbb{M}, \omega)$ задана также аффинная геометрия, т.е. метрика $g$ и аффинная связность $\Gamma$. Назовем аффинную связность *согласованной с симплектической структурой*, если ковариантная производная симплектической формы равна нулю:

$$\nabla_\alpha \omega_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \omega_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta \omega_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\delta \omega_{\beta\delta} = 0. \tag{4.20}$$

Рассмотрим линейную комбинацию ковариантных производных, в которой слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов

$$\nabla_\alpha \omega_{\beta\gamma} + \nabla_\beta \omega_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma \omega_{\alpha\beta}.$$

Слагаемые с производными от симплектической формы сокращаются ввиду замкнутости $\omega$, и мы получаем уравнение на тензор кручения

$$T_{\alpha\beta}{}^\delta \omega_{\delta\gamma} + T_{\beta\gamma}{}^\delta \omega_{\delta\alpha} + T_{\gamma\alpha}{}^\delta \omega_{\delta\beta} = 0. \tag{4.21}$$

Это необходимое условие для того, чтобы аффинная связность была согласована с симплектической структурой, но не достаточное.

## 4.3. Пуассоновы многообразия

Рассмотрим множество скалярных полей $f, g, \ldots \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ (алгебру гладких функций) на многообразии $\mathbb{M}$ произвольной размерности $n$.

Определение. Билинейное отображение

$$J: \quad \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \ni \qquad f, g \mapsto [f, g] \qquad \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$$

называется *пуассоновой структурой* или *скобкой Пуассона*, если выполнены следующие четыре условия:

1) $[af + bg, h] = a[f, h] + b[g, h], \ a, b \in \mathbb{R}$ – линейность,
2) $[f, g] = -[g, f]$ – антисимметрия,
3) $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$ – правило Лейбница,
4) $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ – тождество Якоби.

Многообразие с заданной скобкой Пуассона называется *пуассоновым.*

Из линейности скобки Пуассона и правила Лейбница следует, что скобка Пуассона постоянной функции $f = C = \mathsf{const}$ с произвольной функцией равна нулю:

$$[C, g] = 0.$$

Используя это свойство, получим явное выражение для скобки Пуассона в локальной системе координат $x^\alpha$. С этой целью разложим функции $f$ и $g$ в ряды Тейлора в окрестности произвольной точки $x_0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + (x^\alpha - x_0^\alpha)\,\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=x_0} + \ldots, \\ g(x) &= g_0 + (x^\alpha - x_0^\alpha)\,\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=x_0} + \ldots\,. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [f, g] = {}& [x^\alpha - x_0^\alpha, x^\beta - x_0^\beta]\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}\bigg|_{x=x_0} + \mathsf{o}(x - x_0) = \\ ={}& [x^\alpha, x^\beta]\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}\bigg|_{x=x_0} + \mathsf{o}(x - x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, в точке $x_0$ скобка определяется первым слагаемым. Поскольку точка $x_0$ произвольна, то получаем явное выражение для скобки Пуассона в координатах

$$[f, g] = J^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}, \tag{4.22}$$

где введены *структурные функции* пуассонова многообразия:

$$J^{\alpha\beta} := [x^\alpha, x^\beta]. \tag{4.23}$$

Напомним, что каждую координату можно рассматривать как функцию на многообразии $x^\alpha : \mathbb{M} \ni x \mapsto x^\alpha(x) \in \mathbb{R}$, поэтому для координатных функций скобка Пуассона (4.23) определена.

Скобка Пуассона (4.22) совпадает со скобкой Пуассона (4.19), введенной для симплектической структуры, при $J^{\alpha\beta} = \omega^{-1\alpha\beta}$.

По построению структурные функции $J^{\alpha\beta}(x)$ представляют собой компоненты антисимметричного тензора второго ранга, и выражение в правой части равенства (4.22) является функцией. Из определения скобки Пуассона следует, что структурные функции антисимметричны,

$$J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha},$$

и удовлетворяют тождеству Якоби:

$$J^{\alpha\delta}\partial_\delta J^{\beta\gamma} + J^{\beta\delta}\partial_\delta J^{\gamma\alpha} + J^{\gamma\delta}\partial_\delta J^{\alpha\beta} = 0, \tag{4.24}$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов $\alpha, \beta, \gamma$. Легко проверяется, что произвольный антисимметричный тензор второго ранга, удовлетворяющий тождеству Якоби, взаимно однозначно определяет скобку Пуассона (4.22).

Пример 4.3.1. Произвольная постоянная антисимметричная матрица определяет пуассонову структуру в некоторой системе координат. Действительно, тождества Якоби в этом случае выполняются.

Пуассонова структура является билинейным дифференциальным оператором и записывается также в виде

$$J(f,g) := [f,g] = J^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\partial_\beta g.$$

Поэтому для нее применяют иногда обозначение

$$J = \frac{1}{2}J^{\alpha\beta}\partial_\alpha \wedge \partial_\beta,$$

где знак $\wedge$ обозначает внешнее умножение.

Если на многообразии помимо пуассоновой структуры $J$ задана также аффинная связность $\Gamma$, то тождество Якоби (4.24) можно переписать в явно ковариантном виде

$$\begin{aligned} J^{\alpha\delta}\nabla_\delta J^{\beta\gamma} + J^{\beta\delta}\nabla_\delta J^{\gamma\alpha} + J^{\gamma\delta}\nabla_\delta J^{\alpha\beta} - \\ - J^{\alpha\delta}T_{\delta\epsilon}{}^\beta J^{\epsilon\gamma} - J^{\beta\delta}T_{\delta\epsilon}{}^\gamma J^{\epsilon\alpha} - J^{\gamma\delta}T_{\delta\epsilon}{}^\alpha J^{\epsilon\beta} = 0, \end{aligned}$$

где $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$ – тензор кручения аффинной связности. Это доказывает, что тождества Якоби ковариантны, и их выполнение в одной системе координат влечет за собой их выполнение во всех других системах. Впрочем, это можно было бы и не доказывать, так как определение пуассоновой структуры было дано в инвариантном виде.

Если матрица структурных функций невырождена, $\det J^{\alpha\beta} \neq 0$, то она имеет обратную $J^{-1}_{\alpha\beta}$:

$$J^{\alpha\beta}J^{-1}_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

которая также антисимметрична. Это значит, что контравариантный тензор $J^{\alpha\beta}$ взаимно однозначно определяет 2-форму $\frac{1}{2}dx^\alpha \wedge dx^\beta J^{-1}_{\alpha\beta}$ на многообразии. Из тождеств Якоби (4.24) следует, что 2-форма $J^{-1}_{\alpha\beta}$ замкнута,

$$\partial_\alpha J^{-1}_{\beta\gamma} + \partial_\beta J^{-1}_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma J^{-1}_{\alpha\beta} = 0,$$

т.е. является симплектической (см. раздел 4.2). Легко проверяется и обратное утверждение: произвольная симплектическая форма $\omega_{\alpha\beta} = J^{-1}_{\alpha\beta}$ определяет пуассонову структуру на многообразии с невырожденными структурными функциями. При этом тождества Якоби следуют из условия замкнутости формы. Таким образом, пуассоновы структуры с невырожденными структурными функциями находятся во взаимно однозначном соответствии с симплектическими формами на многообразии.

В общем случае структурные функции пуассоновой структуры могут быть вырождены. Это значит, в частности, что, в отличие от симплектической структуры, скобка Пуассона может быть также определена на многообразии нечетной размерности. *Рангом* пуассоновой структуры называется ранг матрицы $J^{\alpha\beta}$ структурных функций. Ввиду антисимметрии $J^{\alpha\beta}$ ранг пуассоновой структуры может быть только четным. В общем случае ранг пуассоновой структуры может меняться от точки к точке.

Определение. Если пуассонова структура вырождена, $\det J^{\alpha\beta} = 0$, то существуют *функции Казимира* $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$, определенные, возможно, только в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Они определяются следующим равенством

$$[c,f] = 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U}). \tag{4.25}$$

В координатах это равенство принимает вид

$$J^{\alpha\beta}\partial_\beta c = 0.$$

Очевидно, что любое решение этих уравнений определено с точностью до аддитивной постоянной. Если пуассонова структура невырождена, то константы $c = \mathsf{const}$ являются единственными функциями Казимира.

Пусть ранг матрицы $J^{\alpha\beta}$ постоянен на $\mathbb{M}$ и равен $\mathsf{rank}\, J^{\alpha\beta} = 2m < n$. Количество функционально независимых функций Казимира $c^{\text{A}}$, $\text{A} = 1, \dots, n - 2m$, равно числу функционально независимых решений уравнения (4.25), т.е. разности между размерностью многообразия $n$ и рангом пуассоновой структуры $2m$. Если все функции Казимира известны и определены на всем $\mathbb{M}$, то условия $c^{\text{A}} = \mathsf{const}$ выделяют в $\mathbb{M}$ подмногообразие $\mathbb{U}$ размерности $2m$. В разделе 4.5 мы увидим, что сужение $J$ на это подмногообразие приводит к невырожденной пуассоновой структуре на $\mathbb{U}$.

Из определения функций Казимира следует, в частности, что скобка Пуассона двух функций Казимира равна нулю:

$$[c^{\text{A}}, c^{\text{B}}] = J^{\alpha\beta}\partial_\alpha c^{\text{A}}\partial_\beta c^{\text{B}} = 0. \tag{4.26}$$

Пусть задано пуассоново многообразие $(\mathbb{M}, J)$. Наличие пуассоновой структуры задает билинейное отображение на алгебре функций $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, которое превращает множество функций в алгебру Ли. Эта алгебра Ли гомоморфно отображается в алгебру Ли векторных полей на $\mathbb{M}$ следующим образом. Скобка Пуассона координатных функций $x^\alpha$ с произвольной функцией $f$ определяет компоненты векторного поля $X_f = X_f^\alpha\partial_\alpha$, где

$$X_f^\alpha := [f, x^\alpha] = -J^{\alpha\beta}\partial_\beta f.$$

Таким образом, мы имеем отображение множества гладких функций в алгебру Ли векторных полей

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) \ni \qquad f \mapsto X_f \qquad \in \mathcal{X}(\mathbb{M}). \tag{4.27}$$

Предложение 4.3.1. *Скобка Пуассона двух функций $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ связана с коммутатором соответствующих векторных полей соотношением*

$$[X_f, X_g] = X_{[f,g]}. \tag{4.28}$$

*То есть отображение* (4.27) *является гомоморфизмом.*

Доказательство. Простое следствие тождеств Якоби.

Если пуассонова структура невырождена, то гомоморфизм (4.27) имеет нетривиальное ядро, состоящее из функций, постоянных на $\mathbb{M}$. Если пуассонова структура вырождена, то ядро отображения (4.28) включает также линейную оболочку функций Казимира.

Предложение 4.3.2. *Векторное поле $X_f$, порожденное произвольной функцией $f$, сохраняет скобку Пуассона. А именно, производная Ли вдоль векторного поля $X_f$ от структурных функций равна нулю*:

$$\mathsf{L}_{X_f} J = 0.$$

Доказательство. Простая проверка.

Обсудим связь пуассоновых структур с гамильтоновой динамикой точечных частиц. Рассмотрим произвольную функцию $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и соответствующее векторное поле $X_H$. Тогда экспоненциальное отображение, определяемое системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = -X_H^\alpha = [x^\alpha, H] = J^{\alpha\beta}\partial_\beta H,$$

является ни чем иным, как уравнениями движения механической системы точечных частиц в канонической (гамильтоновой) форме. При этом точка обозначает дифференцирование по времени, и $H = H(x)$ – гамильтониан системы. Векторное поле

$$X_H = -J^{\alpha\beta}\partial_\beta H \partial_\alpha \tag{4.29}$$

называется *гамильтоновым*. Другими словами, каждую функцию на пуассоновом многообразии можно рассматривать как гамильтониан некоторой механической системы. При этом каждому гамильтониану соответствует свое гамильтоново векторное поле.

Легко проверить, что для каждого гамильтонова векторного поля справедливо равенство

$$X_H f = [f, H]. \tag{4.30}$$

Пример 4.3.2. Механическая система, состоящая из $\mathrm{N}$ точечных частиц, в фазовом пространстве описывается координатами $q^i$ и импульсами $p_i$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, со скобками Пуассона

$$[q^i, p_j] = \delta^i_j, \qquad [q^i, q^j] = 0, \qquad [p_i, p_j] = 0.$$

Фазовое пространство представляет собой $2\mathrm{N}$-мерное пуассоново многообразие. В координатах $\{x^\alpha\} := \{q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, p_1, \dots, p_{\mathrm{N}}\}$ структурные функции имеют вид

$$J^{\alpha\beta} = \varpi^{-1\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Эта пуассонова структура невырождена и называется *канонической*. Как матрица каноническая пуассонова структура с точностью до знака совпадает с канонической симплектической формой (4.1), однако ее индексы расположены сверху, что соответствует контравариантному тензору второго ранга.

Координаты $q^i$ и сопряженные импульсы $p_i$ являются системой локальных координат фазового пространства $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$, которое является кокасательным расслоением к конфигурационному пространству $\mathbb{M}$ с координатами $q^i$.

Канонические уравнения движения механической системы

$$\dot q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

записываются в виде

$$\dot x^\alpha = [x^\alpha, H],$$

где $H = H(q, p)$ – гамильтониан системы. Гамильтоново векторное поле на фазовом пространстве $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ имеет вид

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Замечание. С точки зрения динамики функции Казимира представляют собой первые интегралы движения механической системы, которые существуют для широкого класса функций Гамильтона. В этом смысле они носят кинематический характер.

## 4.4. Структура Ли–Пуассона

Теперь рассмотрим важный класс пуассоновых структур, связанных с алгебрами Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли размерности N. Это – линейное пространство, каждая точка которого $y = y^{\text{A}} L_{\text{A}} \in \mathfrak{g}$, $\text{A} = 1, \ldots, \text{N}$, разлагается по базису $L_{\text{A}}$ с коммутационными соотношениями

$$[L_{\text{A}}, L_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} L_{\text{C}},$$

где $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим дуальное пространство к алгебре Ли через $\mathfrak{g}^*$ (множество линейных функционалов на $\mathfrak{g}$). Пусть $\omega^{\text{A}}$ – базис в $\mathfrak{g}^*$, который дуален к $L_{\text{A}}$, т.е. $\omega^{\text{A}}(L_{\text{B}}) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}}$. Тогда точка дуального пространства представима в виде $x = \omega^{\text{A}} x_{\text{A}} \in \mathfrak{g}^*$. Значение функционала $x$ на векторе $y$ равно

$$x(y) = y^{\text{A}} x_{\text{A}}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Ее дифференциал равен

$$df = dx_{\text{A}} \partial^{\text{A}} f.$$

Мы пишем индекс у частной производной $\partial^{\text{A}}$ вверху, так как координаты дуального пространства $\mathfrak{g}^*$ нумеруются нижним индексом. Каждый дифференциал естественным образом отождествляется с элементом алгебры Ли $\nabla f := \partial^{\text{A}} f L_{\text{A}} \in \mathfrak{g}$. Определим скобку Пуассона для функций на дуальном пространстве $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ в произвольной точке $x \in \mathfrak{g}^*$:

$$[f, g](x) := x\big([\nabla f, \nabla g]\big), \tag{4.32}$$

где $[\nabla f, \nabla g]$ – коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В компонентах данная скобка Пуассона записывается в виде

$$[f, g] = J_{\text{AB}} \partial^{\text{A}} f \partial^{\text{B}} g, \tag{4.33}$$

где структурные функции

$$J_{\text{AB}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} x_{\text{C}} \tag{4.34}$$

линейны по координатам $x_{\text{C}}$. Нетрудно проверить, что тождества Якоби для структурных функций (4.34) совпадают с тождествами Якоби для структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} f_{\text{CD}}{}^{\text{E}} + f_{\text{BC}}{}^{\text{D}} f_{\text{AD}}{}^{\text{E}} + f_{\text{CA}}{}^{\text{D}} f_{\text{BD}}{}^{\text{E}} = 0.$$

Скобка Пуассона (4.32) называется скобкой *Ли–Пуассона*.

Таким образом, скобка Ли–Пуассона является частным случаем скобки Пуассона с линейными структурными функциями (4.34). Ранг этой скобки в нуле всегда равен нулю, $J_{\text{AB}}|_{x=0} = 0$.

Пример 4.4.1 (вращение твердого тела). В трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами $x_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, которое мы отождествим с дуальной алгеброй Ли трехмерных вращений $\mathfrak{so}(3)^*$, скобка Ли–Пуассона равна

$$[x_i, x_j] = -\varepsilon_{ijk} x^k, \tag{4.35}$$

где $\varepsilon_{ijk}$ – полностью антисимметричный тензор третьего ранга, а подъем и опускание индексов производится с помощью евклидовой метрики $\delta_{ij}$. Эта структура вырождена, ее ранг равен двум всюду, кроме начала координат, где он равен нулю. Для пуассоновой структуры (4.35) существует единственная функция Казимира

$$c = x^i x_i.$$

Скобку Ли–Пуассона (4.35) можно сузить на сферу произвольного радиуса, соответствующую постоянному значению функции Казимира $c = \mathsf{const}$. Соответствующая пуассонова структура на сфере $x^i x_i = \mathsf{const} > 0$ невырождена. В качестве координат Дарбу, которые будут определены в следующем разделе, на сфере можно выбрать ось $z = x^3$ и полярный угол $\varphi = \mathsf{arctg}\,(x^2/x^1)$. Используя определение (4.35), нетрудно проверить, что

$$[z, \varphi] = 1, \qquad [\varphi, \varphi] = 0, \qquad [z, z] = 0.$$

Таким образом, симплектическими слоями, соответствующими постоянной функции Казимира, являются сферы, а координатами Дарбу – цилиндрические координаты.

Скобке Ли–Пуассона (4.35) соответствует хорошо известный пример из механики твердого тела. Рассмотрим вращающееся твердое тело с покоящимся центром масс в декартовой системе координат, оси которой направлены по главным осям инерции. Гамильтониан системы в этом случае имеет вид

$$H(x) = \frac{x_1^2}{2I_1} + \frac{x_2^2}{2I_2} + \frac{x_3^2}{2I_3},$$

где $x_i$, $i = 1, 2, 3$, – моменты количества движения и $I_{1,2,3}$ – моменты инерции твердого тела. Если для координат $x_i$ определить скобку Пуассона (4.35), то гамильтоновы уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} x_2 x_3, \\
\dot{x}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} x_1 x_3, \\
\dot{x}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} x_1 x_2.
\end{aligned}$$

Это есть *уравнения Эйлера* вращения твердого тела (см., например, [41], § 36).

## 4.5. Отображения пуассоновых многообразий

Определение. Пусть $\varphi: \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ – гладкое отображение двух пуассоновых многообразий. Это отображение называется *пуассоновым*, если оно сохраняет скобку Пуассона:

$$[f \circ \varphi, g \circ \varphi]_{\mathbb{M}} = [f, g]_{\mathbb{N}} \circ \varphi, \tag{4.36}$$

где $f$ и $g$ – произвольные функции на многообразии $\mathbb{N}$ и, следовательно, $f \circ \varphi$ и $g \circ \varphi$ – функции на $\mathbb{M}$. Соответственно, подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ называется *пуассоновым*, если вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$ является пуассоновым отображением. В этом случае мы говорим, что пуассонова структура на $\mathbb{N}$ *сужена* до пуассоновой структуры на подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

С другой стороны, если пуассонова структура задана на многообразии $\mathbb{M}$, то ее всегда можно отобразить на образ $\varphi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{N}$ с помощью дифференциала отображения. Эту пуассонову структуру на образе $\varphi(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$ будем называть *индуцированной*.

В классической механике пуассоново отображение фазового пространства на себя называется *каноническим преобразованием*.

Выпишем структурные функции для индуцированной пуассоновой структуры. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ в координатах задается функциями $y^{\text{A}}(x)$, где $y^{\text{A}}$, $\text{A} = 1, \dots, \mathsf{dim}\,\mathbb{N}$, и $x^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, \mathsf{dim}\,\mathbb{M}$, – координаты соответственно на $\mathbb{N}$ и $\mathbb{M}$. Тогда индуцированная пуассонова структура на образе $\varphi(\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{N}$ всегда определена и имеет следующие структурные функции:

$$J^{\text{AB}} = J^{\alpha\beta} \partial_\alpha y^{\text{A}} \partial_\beta y^{\text{B}}.$$

Из свойств умножения матриц следует, что если отображение $\varphi$ – вложение, то ранг индуцированной пуассоновой структуры $J^{\text{AB}}$ равен рангу пуассоновой структуры на подмногообразии $\mathbb{M}$.

Рассмотренный ниже пример показывает, что пуассонову структуру на $\mathbb{N}$ в общем случае нельзя сузить на произвольное подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Пример 4.5.1. Приведем простой пример непуассонова вложения, которое, на первый взгляд, должно быть таковым. Пусть многообразие $\mathbb{N}$ является прямым произведением двух многообразий, $\mathbb{N} := \mathbb{M} \times \mathbb{K}$. Обозначим координаты и пуассонову структуру на $\mathbb{M}$ через $x^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \mathsf{dim}\, \mathbb{M}$, и $J^{\alpha\beta}$. Пусть на $\mathbb{K}$ также заданы координаты $y^\mu$, $\mu = 1, \ldots, \mathsf{dim}\, \mathbb{K}$, и пуассонова структура $J^{\mu\nu}$. Тогда матрица

$$J = \begin{pmatrix} J^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & J^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

определяет пуассонову структуру на $\mathbb{N}$ в координатах $\{x, y\}$. Это пуассонова структура индуцирована двумя естественными вложениями: $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{K}$ и $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{K}$. Рассмотрим вложение

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \ni \qquad x \mapsto (x, y_0) \qquad \in \mathbb{N} = \mathbb{M} \times \mathbb{K},$$

где $y_0 \in \mathbb{K}$ – произвольная фиксированная точка. Пусть на $\mathbb{N}$ заданы две произвольные функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Вычислим левую и правую части равенства (4.36):

$$[f \circ \varphi, g \circ \varphi]_{\mathbb{M}} = J^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta g \big|_{y=y_0},$$
$$[f, g]_{\mathbb{N}} \circ \varphi = \Big( J^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta g + J^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g \Big) \big|_{y=y_0}.$$

Мы видим, что в общем случае равенство (4.36) не выполняется. Отсюда следует, что вложение $\varphi$ не является пуассоновым.

Предложение 4.5.1. *Пусть $(\mathbb{M}, J)$ – пуассоново многообразие и $X_H$ – гамильтоново векторное поле. Тогда поток векторного поля*

$$s_t := \mathsf{exp}\,(t X_H): \quad \mathbb{M} \ni \qquad x(0) \mapsto x(t) \qquad \in \mathbb{M},$$

*где $x(t)$ – интегральная кривая для $X_H$, определяет пуассоново отображение.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. При малых $t$ поток векторного поля действует на $x$ следующим образом $s_t: \ x^\alpha \mapsto x^\alpha + t X_H^\alpha + \mathsf{o}(t)$. Поэтому

$$f \circ s_t = f(x^\alpha + t X_H^\alpha) \approx f(x) + t X_H f + \mathsf{o}(t).$$

Продифференцируем по $t$ условие пуассоновости (4.36) и положим $t = 0$. Тогда условие пуассоновости примет вид

$$[X_H f, g] + [f, X_H g] = X_H [f, g].$$

Из формулы (4.30) следует, что полученное равенство совпадает с тождествами Якоби. При $t = 0$ экспоненциальное отображение является тождественным и, следовательно, пуассоново. Поэтому интегрирование условия (4.36) вдоль $X_H$ доказывает его выполнение при всех $t$, для которых определены интегральные кривые.

Пример 4.5.2. Пусть на фазовой плоскости $q, p \in \mathbb{R}^2$ задана каноническая пуассонова структура (4.31). Рассмотрим гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2).$$

Соответствующее гамильтоново векторное поле имеет вид

$$X_H = q\partial_p - p\partial_q$$

и задает группу вращений плоскости. Таким образом, каждое вращение фазовой плоскости задает пуассоново преобразование для гармонического осциллятора. Оно является каноническим, так как сохраняет скобку Пуассона.

Поскольку любой гамильтонов поток сохраняет скобку Пуассона, то он, в частности, сохраняет ее ранг. Поэтому справедливо

Следствие. Для любого гамильтонова векторного поля $X_H$ на пуассоновом многообразии $(\mathbb{M}, J)$ ранг пуассоновой структуры $J$ постоянен вдоль произвольной интегральной кривой для $X_H$.

Это следствие является, по существу, переформулировкой предложения 4.3.2.

Предложение 4.5.2. *Если ранг пуассоновой структуры в какой-либо точке $x \in \mathbb{M}$ пуассонова многообразия $(\mathbb{M}, J)$ равен нулю, то эта точка является неподвижной для любой гамильтоновой системы $H$ на $\mathbb{M}$.*

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно, что если матрица антисимметрична и ее ранг равен нулю, то она сама равна нулю. Если в точке $x \in \mathbb{M}$ ранг пуассоновой структуры равен нулю, то гамильтоново векторное поле $X_H$ в этой точке для произвольного гамильтониана $H$ обращается в нуль. Следовательно, точка $x$ является неподвижной.

Пример 4.5.3. Пуассонова структура в начале координат в примере 4.4.1 имеет нулевой ранг. Она остается неподвижной для любого гамильтонова потока.

Пусть $(\mathbb{M}, J)$ – пуассоново многообразие. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует единственное линейное отображение кокасательного пространства в соответствующее касательное

$$J: \quad \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \tag{4.37}$$

такое, что для любой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$J(df) = [f, x^\alpha]\partial_\alpha \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}).$$

Это есть рассмотренное ранее отображение (4.27). Для произвольной 1-формы $A = dx^\alpha A_\alpha$ отображение $J$ в компонентах задается матрицей структурных функций:

$$X^\alpha = -J^{\alpha\beta}A_\beta.$$

Для симплектических многообразий, для которых матрица $J^{\alpha\beta}$ невырождена, отображение $J$ является взаимно однозначным.

Ясно, что ядром отображения (4.37) является линейная оболочка дифференциалов функций Казимира $dc^{\mathrm{A}}$.

Обозначим образ отображения (4.37) в точке $x \in \mathbb{M}$ через

$$\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) := \{J(A) \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) : \quad \forall A \in \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})\}.$$

Размерность векторного подпространства $\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ равна рангу пуассоновой структуры $\mathsf{dim}\,\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) = \mathsf{rank}\,J^{\alpha\beta}(x)$. Если ранг пуассоновой структуры на $\mathbb{M}$ является постоянным и равен $2m$, то совокупность подпространств $\mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ для всех точек $x$ задает на $\mathbb{M}$ распределение векторных полей $\mathcal{J}_{2m}(\mathbb{M})$ размерности $2m$. При этом если пуассонова структура дифференцируема, то соответствующее распределение векторных полей также дифференцируемо.

В общем случае ранг пуассоновой структуры может меняться от точки к точке. Из определения отображения $J$ следует, что образ $\mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ является линейной оболочкой всех гамильтоновых векторных полей на $\mathbb{M}$ в точке $x$.

Введенные понятия позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4.5.1. *Подмногообразие $\mathbb{M}$ пуассонова многообразия $(\mathbb{N}, J)$ является пуассоновым тогда и только тогда, когда $\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) := \mathbb{J}_x(\mathbb{N})|_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ для всех $x \in \mathbb{M}$, т.е. каждое гамильтоново векторное поле на $\mathbb{N}$ всюду касается $\mathbb{M}$. В частности, если $\mathbb{J}_x(\mathbb{M}) = \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ для всех $x \in \mathbb{M}$, то $\mathbb{M}$ является симплектическим подмногообразием в $\mathbb{N}$.*

Доказательство. См., например, [42], предложение 6.19.

Из этой теоремы следует, что, поскольку размерность пространства $\mathbb{J}_x(\mathbb{M})$ совпадает с рангом пуассоновой структуры в данной точке, то размерность пуассонова подмногообразия не может быть меньше ранга, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} \geqslant \mathsf{rank}\,J$.

Пусть $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ – пуассоново подмногообразие. Как было отмечено в теореме 4.5.1, любое гамильтоново векторное поле $X_H$ на $\mathbb{N}$ касается подмногообразия $\mathbb{M}$. Это означает, что его сужение на $\mathbb{M}$ может быть получено из сужения гамильтониана на $\mathbb{M}$:

$$X_H|_{\mathbb{M}} = X_{\widetilde{H}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{H} := H|_{\mathbb{M}}.$$

Допустим, что нас интересуют траектории движения гамильтоновой системы с некоторым гамильтонианом $H$, которые начинаются в некоторой точке пуассонова подмногообразия $x \in \mathbb{M} \subset \mathbb{N}$. В этом случае можно ограничиться движением точки в подмногообразии $\mathbb{M}$, которое порождается суженным гамильтонианом $\widetilde{H}$, тем самым понизив порядок гамильтоновой системы. Можно поставить вопрос, каково минимальное пуассоново подмногообразие для данных начальных условий. Ответ дает следующая

Теорема 4.5.2. *Пусть $(\mathbb{N}, J)$ – пуассоново многообразие. Тогда соответствующее распределение гамильтоновых векторных полей $\mathcal{J}(\mathbb{N})$ на $\mathbb{N}$ интегрируемо, т.е. через каждую точку $x \in \mathbb{N}$ проходит интегральное подмногообразие $\mathbb{M}$ распределения $\mathcal{J}(\mathbb{N})$, для которого $\mathbb{T}_y(\mathbb{M}) = \mathbb{J}_y(\mathbb{M})$ в любой точке $y \in \mathbb{M}$. Всякое интегральное подмногообразие является симплектическим подмногообразием в $\mathbb{N}$, и в совокупности эти подмногообразия определяют симплектическое слоение пуассонова многообразия $\mathbb{N}$. Кроме того, если $H: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – произвольный гамильтониан и $x(t)$ – соответствующая траектория системы, проходящая через точку $x_0 \in \mathbb{N}$, то $x(t)$ остается в одном и том же интегральном подмногообразии $\mathbb{M}$ при всех $t$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, распределение $\mathcal{J}(\mathbb{M})$ является линейной оболочкой всех гамильтоновых векторных полей на $\mathbb{M}$. Поскольку скобка Пуассона гамильтоновых векторных полей является гамильтоновым векторным полем (4.28), то распределение $\mathcal{J}(\mathbb{M})$ находится в инволюции. Отсюда по теореме Фробениуса следует существование интегрального подмногообразия. Остальные утверждения теоремы следуют из теоремы 4.5.1 и инвариантности ранга пуассоновой структуры вдоль гамильтоновых векторных полей.

Проиллюстрируем данную теорему для пуассонова многообразия $(\mathbb{N}, J)$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{N} = n$, с пуассоновой структурой постоянного ранга $\mathsf{rank}\,J^{\alpha\beta} = 2m < n$ путем построения специальной системы координат. В некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$ существует $(n-2m)$ функционально независимых функций Казимира $c^{\text{A}}(x)$, $\text{A} = 1, \ldots, n-2m$. Поверхности уровня функций Казимира $c^{\text{A}} = \mathsf{const}$ определяют $2m$-мерное подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{U}$. Дополним функции Казимира $2m$ функционально независимыми скалярными полями $g^{\text{M}}$, $\text{M} = 1, \ldots, 2m$, (координаты на подмногообразии $\mathbb{M}$) таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\mathsf{rank}\,[g^{\text{M}}, g^{\text{N}}]_{\mathbb{M}} = 2m.$$

Это всегда можно сделать, так как ранг пуассоновой структуры равен $2m$. Совокупность функций $\{c^{\text{A}}, g^{\text{M}}\}$ выберем в качестве новой системы координат на $\mathbb{U}$. Пуассонова структура в этой системе координат примет вид

$$J = \begin{pmatrix} J^{\text{AB}} = [c^{\text{A}}, c^{\text{B}}] & J^{\text{AN}} = [c^{\text{A}}, g^{\text{N}}] \\ J^{\text{MB}} = [g^{\text{M}}, c^{\text{B}}] & J^{\text{MN}} = [g^{\text{M}}, g^{\text{N}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J^{\text{MN}} \end{pmatrix},$$

так как скобка Пуассона функции Казимира с любой функцией на $\mathbb{N}$ равна нулю. Таким образом, сужение пуассоновой структуры на подмногообразие $\mathbb{M}$ определено и невырождено. То есть поверхности уровней функций Казимира представляют собой симплектические многообразия. Пусть на $\mathbb{N}$ задан гамильтониан. Соответствующие гамильтоновы уравнения

$$\dot{c}^{\text{A}} = J^{\text{AB}}\partial_{\text{B}}H + J^{\text{AN}}\partial_{\text{N}}H = 0, \tag{4.38}$$

$$\dot{g}^{\text{M}} = J^{\text{MB}}\partial_{\text{B}}H + J^{\text{MN}}\partial_{\text{N}}H = J^{\text{MN}}\partial_{\text{N}}H \tag{4.39}$$

определяют траектории системы. Поскольку уравнение (4.38) имеет решение $c^{\text{A}} = \mathsf{const}$, то траектория гамильтоновой системы, проходящей через точку $x_0 \in \mathbb{N}$, принадлежит соответствующему симплектическому подмногообразию $\mathbb{M}$:

$$\dot{g}^{\text{M}} = \widetilde{J}^{\text{MN}}\partial_{\text{N}}\widetilde{H},$$

где

$$\widetilde{J}^{\text{MN}} := J^{\text{MN}}|_{\mathbb{M}} \qquad \text{и} \qquad \widetilde{H} := H|_{\mathbb{M}}.$$

Таким образом, всякое пуассоново многообразие $(\mathbb{N}, J)$ расщепляется на симплектические подмногообразия – слои симплектического слоения. Размерность любого такого слоя $\mathbb{M}$ равна рангу пуассоновой структуры в произвольной точке $x \in \mathbb{M}$. Это означает, что если ранг пуассоновой структуры на $\mathbb{N}$ не постоянен, то размерность симплектических слоев будет различной.

Теорема 4.5.3 (Дарбу). *Пусть $(\mathbb{M}, J)$ – пуассоново многообразие размерности $n$. Если пуассонова структура на многообразии имеет постоянный ранг, $\mathsf{rank}\, J = 2m \leqslant n$, то в некоторой окрестности $\mathbb{U}$ произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ существует такая система координат*

$$\{x^{\alpha}\} = \{q^{\text{M}}, p_{\text{M}}, c^{\text{A}}\} = (q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m, c^1, \ldots, c^{n-2m}),$$

*в которой скобка Пуассона двух произвольных функций $f, g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{U})$ имеет вид*

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q^{\text{M}}}\frac{\partial g}{\partial p_{\text{M}}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\text{M}}}\frac{\partial g}{\partial q^{\text{M}}}. \tag{4.40}$$

*Координаты $c^{\text{A}}$ являются функциями Казимира пуассоновой структуры $J$, и их постоянные значения, $c_{\text{A}} = \mathsf{const}$, определяют симплектическое слоение пуассонова многообразия $(\mathbb{U}, J)$.*

Доказательство. Если ранг пуассоновой структуры равен нулю, то $J^{\alpha\beta} = 0$ и доказывать нечего: любая система координат на $\mathbb{U}$ удовлетворяет утверждению теоремы.

Допустим, что ранг отличен от нуля. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}$ и выберем в ее окрестности $\mathbb{U}$ две такие функции $Q, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$, что

$$[Q, f] = X_Q f \neq 0.$$

В частности $X_Q|_{x_0} \neq 0$. Возможно в меньшей окрестности существует такая система координат $Q, x^2, \dots, x^n$, что $X_Q = \partial_Q$. Тогда существует такая функция $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$, что выполнено условие

$$X_Q P = [Q, P] = 1.$$

Из предложения 4.3.1 следует равенство

$$[X_Q, X_P] = X_{[Q,P]} = 0.$$

Кроме того, в силу антисимметрии $[X_Q, X_Q] = 0$ и $[X_P, X_P] = 0$. Таким образом, $X_Q, X_P$ образуют пару коммутирующих векторных полей. Теорема Фробениуса позволяет дополнить пару функций $q^1 = Q$, $p_1 = P$ до локальной системы координат $q^1, p_1, y^3, \dots, y^n$ в некоторой, возможно, меньшей окрестности точки $x_0$. Поскольку $J^{\alpha\beta} = [x^\alpha, x^\beta]$ и выполнены равенства $[q^1, y^i] = 0$, $[p_1, y^i] = 0$, $i = 3, \dots, n$, то структурные функции в данной системе координат принимают вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^{ij} \end{pmatrix},$$

где $J^{ij} = [y^i, y^j]$. Покажем, что матрица $J^{ij}$ не зависит от координат $q^1$ и $p_1$. Действительно,

$$\frac{\partial J^{ij}}{\partial q^1} = [q^1, J^{ij}] = \big[q^1, [y^i, y^j]\big] = 0,$$

где мы воспользовались тождествами Якоби. Аналогично доказывается, что матрица $J^{ij}$ не зависит от $p_1$. Таким образом, матрица $J^{ij}$ задает пуассонову структуру на подмногообразии $q^1 = \mathsf{const}$, $p_1 = \mathsf{const}$. Ранг этой структуры на два меньше исходного, $\mathsf{rank}\, J^{ij} = 2m - 2$. Поэтому если $m > 1$, то этот процесс можно продолжить.

## 5. Принцип наименьшего действия

Можно с уверенностью сказать, что в основе построения моделей современной математической физики лежит принцип наименьшего действия. Этот принцип требует стационарности некоторого функционала – действия – относительно вариаций полей, описывающих данную модель. В результате мы получаем систему уравнений Эйлера–Лагранжа, которая принимается в качестве уравнений движения, уравнений равновесия и т.д. для данной модели. При этом инвариантность действия относительно некоторой группы преобразований приводит к ковариантным уравнениям движения и к законам сохранения, которые играют важнейшую роль в физике.

### 5.1. Постановка вариационных задач

Начнем с постановки вариационной задачи в евклидовом пространстве. Предположим, для простоты, что $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область евклидова пространства с кусочно гладкой границей $\partial\mathbb{M}$. Пусть в этой области задан некоторый набор дважды непрерывно дифференцируемых функций вплоть до границы, $\varphi = \{\varphi^a\} \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$, $a = 1, \dots, \mathrm{N}$. Это значит, что все функции и их производные до второго порядка непрерывны и ограничены в $\mathbb{M}$ и имеют конечный предел на границе. Если $x^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, – система координат на $\mathbb{M}$, то обозначим, для краткости, все первые производные полей через $\partial\varphi = \{\partial_\alpha\varphi^a\}$. Предположим, что на $\mathbb{M}$ определен *функционал действия* или, просто, *действие*

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x, \varphi, \partial\varphi), \tag{5.1}$$

где $L$ – некоторая функция от $n$ переменных $x^\alpha$, $\mathrm{N}$ переменных $\varphi^a$ и $n\mathrm{N}$ переменных $\partial_\alpha\varphi^a$. Она предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией переменных $x \in \mathbb{M}$ и всех остальных переменных для всех конечных значений $\varphi$ и $\partial\varphi$. Назовем функцию $L(x, \varphi, \partial\varphi)$ *лагранжевой плотностью* или *лагранжианом* данной модели, которая описывается набором полей $\varphi$.

Для определения функционала действия мы ограничили себя классом дважды непрерывно дифференцируемых функций $\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$. Тогда функционал действия задает отображение

$$S: \quad \left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}} \ni \qquad \varphi \mapsto S[\varphi] \qquad \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

бесконечномерного функционального пространства в поле вещественных чисел. Для постановки вариационной задачи нам важно, что функциональное пространство $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}}$ снабжено структурой линейного пространства с обычным поточечным сложением и умножением на вещественные числа. Для того чтобы говорить о непрерывности и вариационных производных отображения $S$, введем на $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}}$ норму:

$$\|\varphi\| := \sum_{a=1}^{\mathrm{N}} \left( \sup_{x\in\mathbb{M}} |\varphi^a| + \sum_{\alpha=1}^{n} \sup_{x\in\mathbb{M}} |\partial_\alpha\varphi^a| \right). \tag{5.3}$$

Тем самым класс рассматриваемых функций $\left[\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})\right]^{\mathrm{N}}$ становится нормированным линейным функциональным пространством. По данной норме строится метрика и определяется топология, относительно которой отображение (5.2) непрерывно.

Назовем *вариацией* функции $\varphi^a$ разность двух представителей из класса рассматриваемых функций: $\delta\varphi^a := \varphi'^a - \varphi^a$, где $\varphi'^a$ – произвольная функция из $\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$. Ясно, что вариация функции принадлежит тому же классу, что и сама функция. Для малых вариаций функций $\epsilon\delta\varphi^a$, где $\epsilon > 0$ – малая величина, вариация (главная линейная часть) функционала действия, если она существует, равна

$$\begin{aligned} \delta S = S[\varphi + \epsilon\delta\varphi] - S[\varphi] = \\ = \int_{\mathbb{M}} dx \left[\frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right)\right]\epsilon\delta\varphi^a + \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\epsilon\delta\varphi^a + \mathsf{o}(\epsilon), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где второе слагаемое возникло при интегрировании по частям и $ds_\alpha$ обозначает ориентированный элемент объема границы $\partial\mathbb{M}$. Отметим, что при вычислении вариации действия (5.1) область интегрирования $\mathbb{M}$ считалась неизменной.

В рассматриваемом классе функций $\varphi$ и лагранжианов $L$ вариация функционала всегда существует.

Назовем набор функций $\varphi$ *стационарной*, или *критической* точкой, или *экстремалью* функционала $S[\varphi]$, если в этой точке линейная часть вариации действия равна нулю, $\delta S = \mathsf{o}(\epsilon)$. Такие точки соответствуют либо локальному минимуму, либо локальному максимуму, либо седловой точке функционала $S$. Это можно проверить после нахождения экстремали функционала, рассмотрев члены более высокого порядка по $\epsilon$.

Для действия (5.1) можно поставить различные вариационные задачи. Рассмотрим задачи, которые наиболее часто встречаются в физике.

**5.1.1. Задача с заданными граничными условиями.** Вариационная задача с заданными граничными условиями является наиболее распространенной и самой простой с точки зрения постановки. Рассмотрим класс функций в $\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$ с заданными граничными условиями

$$\varphi\big|_{\partial\mathbb{M}} = \varphi_0. \tag{5.5}$$

Поскольку граничные условия для всех функций при фиксированном индексе $a$ одни и те же, то вариации полей обращаются в нуль на границе:

$$\delta\varphi\big|_{\partial\mathbb{M}} = 0. \tag{5.6}$$

Тогда интеграл по границе области в вариации действия (5.4) обращается в нуль в силу граничных условий (5.6). В рассматриваемом случае существует предел

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{S[\varphi+\epsilon\delta\varphi] - S[\varphi]}{\epsilon} = \int_{\mathbb{M}} dx\,\frac{\delta S}{\delta\varphi^a}\delta\varphi^a. \tag{5.7}$$

Функция $\delta S/\delta\varphi^a$, стоящая под знаком интеграла, называется *вариационной производной* функционала $S$ по полю $\varphi^a$ и обозначается также запятой:

$$S,_a := \frac{\delta S}{\delta\varphi^a}. \tag{5.8}$$

Из вида вариации (5.4) получаем явное выражение для вариационной производной

$$S,_a = \frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}. \tag{5.9}$$

Вариационная производная $S,_a$ является ядром линейного оператора, который есть производная по Фреше и, следовательно, по Гато отображения (5.2).

Формула (5.7) позволяет дать другое определение вариационной производной. А именно, вариационной производной функционала $S$ в точке $\varphi \in [\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})]^{\mathrm{N}}$ назовем производную

$$\int_{\mathbb{M}} dx\, \frac{\delta S}{\delta \varphi^a} \psi^a = \left. \frac{\partial S(\varphi + \lambda \psi)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \tag{5.10}$$

где $\psi \in [\mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})]^{\mathrm{N}}$. Ясно, что если главная линейная часть приращения функционала существует, то она равна производной (5.10). Обратное утверждение в общем случае неверно. Существуют примеры функционалов (менее гладких, чем мы рассматриваем), для которых производная (5.10) определена, однако из их приращения нельзя выделить главную линейную часть. Поэтому определение вариационной производной (5.10) является более общим. В рассматриваемом нами классе функций и лагранжианов данные выше определения эквивалентны.

Определение вариационной производной (5.10) просто обобщается на случай вариационных производных более высокого порядка. Вторые вариационные производные (3.38) были рассмотрены для экстремалей функционала длины кривой.

Из условия стационарности действия $\delta S = \mathsf{o}(\epsilon)$ в силу произвольности вариации $\delta\varphi^a$ и основной леммы вариационного исчисления следует

Теорема 5.1.1. *Набор функций $\varphi$ при заданных граничных условиях является стационарной точкой действия $S[\varphi]$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа*

$$S,_a = \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} = 0. \tag{5.11}$$

В общем случае уравнения Эйлера–Лагранжа представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, число которых N равно числу функций, от которых зависит функционал действия. Их надо решать при заданных граничных условиях (5.5). Решение поставленной вариационной задачи может не существовать, а если оно существует, то может быть неединственно. Это зависит от вида лагранжиана и области $\mathbb{M}$.

Замечание. В общем случае уравнения Эйлера–Лагранжа для заданного лагранжиана могут приводить к противоречию. Например, пусть лагранжиан зависит от одной функции $\varphi$ и имеет вид $L = \varphi$. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа приводят к противоречию $1 = 0$. Таким образом, для того чтобы уравнения Эйлера–Лагранжа имели решение, лагранжиан не может быть произвольной функцией полей и их производных. В дальнейшем мы предполагаем, что лагранжиан выбран таким образом, что соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа непротиворечивы.

Действие (5.1) для заданных уравнений Эйлера–Лагранжа при постановке задачи с фиксированными граничными условиями определено неоднозначно. Действительно, рассмотрим новый лагранжиан, $\widetilde{L}_\alpha = L + \partial_\alpha F$, который отличается от исходного на частную производную от некоторой достаточно гладкой функции $F(x, \varphi, \partial\varphi)$. Тогда действие получит дополнительный вклад, сводящийся к интегралу по границе. Вариация дополнительного слагаемого равна нулю, так как вариации всех полей на границе равны нулю. Отсюда следует, что уравнения Эйлера–Лагранжа не изменятся при добавлении к лагранжиану частных производных $\partial_\alpha F$ от произвольной функции.

Рассмотренная вариационная задача наиболее часто рассматривается в моделях математической физики. При этом уравнения Эйлера–Лагранжа приводят к уравнениям движения, равновесия и т.д.

Замечание. Поверхностный интеграл в вариации действия (5.4) в задаче с заданными граничными условиями равен нулю, поскольку вариации полей обращаются в нуль на границе (5.6). Этого достаточно, если область $\mathbb{M}$ ограничена. Однако для действия (5.1), рассматриваемого во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, ситуация усложняется. В этом случае интеграл по границе является несобственным, так как площадь бесконечно удаленной границы стремится к бесконечности. Тогда важно не только граничное условие на вариации, но и их асимптотическое поведение. Так, в общей теории относительности в асимптотически плоском пространстве-времени поверхностный интеграл отличен от нуля, так как метрика недостаточно быстро стремится к метрике Минковского на пространственной бесконечности. Анализ граничного поведения полей важен и в общем случае сложен, поскольку зависит от рассматриваемой задачи. На данном этапе мы пренебрежем граничными слагаемыми.

Замечание. Во многих моделях математической физики, например в электродинамике, в качестве области $\mathbb{M}$ выбирается все пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. При этом функционал действия не ограничен ни снизу, ни сверху. Кроме того, для многих решений уравнений Эйлера–Лагранжа он расходится. Поэтому говорить о принципе наименьшего действия в строгом смысле не приходится. Тем не менее уравнения Эйлера–Лагранжа имеют смысл, поскольку являются локальным объектом. Поэтому для действия часто пишут формальное выражение, не заботясь о сходимости интеграла. Этот способ очень удобен для получения уравнений с заданными свойствами симметрии.

**5.1.2. Задача со свободными граничными условиями.** Для действия (5.1) можно поставить другую вариационную задачу, расширив класс рассматриваемых функций. Пусть, по-прежнему, все функции дважды непрерывно дифференцируемы $\varphi^a \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{M}})$ для всех $a = 1, \dots, \mathrm{N}$, но теперь снимем ограничения, налагаемые граничными условиями (5.5). В этом случае вариации полей $\delta\varphi^a$ также ничем не ограничены на границе $\partial\mathbb{M}$, и из явного вида вариации действия (5.4) следует

Теорема 5.1.2. *Набор функций $\varphi$ является стационарной точкой действия $S[\varphi]$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа (5.11) и граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)}\right|_{\partial\mathbb{M}} = 0. \tag{5.12}$$

Таким образом, в задаче со свободными граничными условиями граничные условия все-таки возникают из условия стационарности действия.

Пример 5.1.1. Вариационная задача со свободными граничными условиями рассматривается в теории открытых бозонных струн, для которых из вариационного принципа вытекают граничные условия Неймана.

Постановка вариационной задачи со свободными граничными условиями зависит от добавления к действию граничных слагаемых. Иногда появления граничных условий (5.12) можно избежать, если из исходного действия вычесть все граничные вклады, которые возникают при интегрировании по частям. В этом случае условие (5.12) тождественно выполняется.

Замечание. В общем случае можно рассматривать смешанные вариационные задачи, когда граничные условия ставятся только для части полей. Именно такого типа задача естественным образом возникает в теории гравитации, где можно считать заданными на границе только физические поля. Нефизические поля находятся как решение уравнений связей и калибровочных условий, и для них граничные значения не могут быть фиксированы произвольным образом.

**5.1.3. Задача с подвижной границей.** Возможна также более общая постановка вариационной задачи для функционала (5.1), когда рассматриваются не только вариации полей, но и вариации самой области $\mathbb{M}$. Сначала уточним постановку задачи. Предположим, что координаты и поля преобразуются следующим образом:

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi, \epsilon), \tag{5.13}$$

$$\varphi^a \mapsto \varphi'^a(x, \varphi, \partial\varphi, \epsilon), \tag{5.14}$$

где $\epsilon$ – параметр преобразования. Если поля $\varphi$ являются заданными функциями от координат, $\varphi = \varphi(x)$, то из уравнения (5.13) можно выразить старые координаты через новые: $x = x(x', \epsilon)$. Тогда подстановка найденных функций в формулу (5.14) позволяет рассматривать новые поля как функции от новых координат, $\varphi' = \varphi'(x', \epsilon)$.

Мы считаем, что до и после преобразования координаты определены соответственно на ограниченных областях $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. $x \in \mathbb{M}$ и $x' \in \mathbb{M}'$. Тогда под вариацией функционала подразумевается разность

$$\delta S := S[\varphi'(x')] - S[\varphi(x)] = \int_{\mathbb{M}'} dx' L(x', \varphi', \partial'\varphi') - \int_{\mathbb{M}} dx L(x, \varphi, \partial\varphi).$$

Нам требуется найти эту вариацию в линейном по $\epsilon$ приближении. При этом мы считаем, что при $\epsilon = 0$ преобразование координат и полей является тождественным. Разлагая формулы преобразования в ряд Тейлора при малых $\epsilon$, получаем

$$\begin{aligned} x^\alpha \mapsto x'^\alpha &= x^\alpha + \delta x^\alpha + \mathsf{o}(\epsilon), \\ \varphi^a(x) \mapsto \varphi'^a(x') &= \varphi^a(x) + \bar{\delta}\varphi^a(x) + \mathsf{o}(\epsilon), \end{aligned} \tag{5.15}$$

где независимые вариации

$$\delta x^\alpha = \epsilon R^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi), \tag{5.16}$$

$$\bar{\delta}\varphi^a = \varphi'^a(x') - \varphi^a(x) = \epsilon R^a(x, \varphi, \partial\varphi) \tag{5.17}$$

определяются некоторыми функциями $R^\alpha(x, \varphi, \partial\varphi)$ и $R^a(x, \varphi, \partial\varphi)$. Отметим, что вариация полей (5.17) определена как разность значений полей в различных точках и не совпадает с вариацией формы поля. Напомним, что под вариацией формы функции мы понимаем разность значений этой функции после и до преобразования в одной и той же точке:

$$\delta\varphi^a(x) := \varphi'^a(x) - \varphi^a(x).$$

При этом преобразования (5.15) рассматриваются как активные. Тогда для вариации формы функции справедливо равенство

$$\delta\varphi^a(x) = \bar{\delta}\varphi^a - \delta x^\alpha \partial_\alpha \varphi^a = \epsilon(R^a - R^\alpha \partial_\alpha \varphi^a). \tag{5.18}$$

По построению, для постоянного параметра преобразования вариация формы функции $\delta$ перестановочна с операцией частного дифференцирования $\partial_\alpha$. Вариация действия относительно преобразований (5.15) имеет вид

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}'} dx'\, L(x') - \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x) = \int_{\mathbb{M}'} dx' \,\big(L(x) + \bar{\delta}L(x)\big) - \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x),$$

где $L(x) = L\bigl(x, \varphi(x), \partial_\alpha\varphi(x)\bigr)$. Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать вариацию действия только с точностью до слагаемых, линейных по $\epsilon$, и не будем это указывать. Вариации лагранжиана и элемента объема равны соответственно

$$\bar\delta L(x) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\varphi^a}\bar\delta\varphi^a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\bar\delta(\partial_\alpha\varphi^a) = \delta L + \frac{dL}{dx^\alpha}\delta x^\alpha, \tag{5.19}$$

$$dx' \approx dx + dx\frac{\partial(\delta x^\alpha)}{\partial x^\alpha}, \tag{5.20}$$

где

$$\frac{dL}{dx^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial\varphi^a}\partial_\alpha\varphi^a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta\varphi^a)}\partial^2_{\alpha\beta}\varphi^a.$$

Используя преобразование (5.20), перейдем от интегрирования по $\mathbb{M}'$ к интегрированию по исходной области $\mathbb{M}$ и перепишем вариацию действия в виде

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}} dx\,\left(\delta L + \frac{dL}{dx^\alpha}\delta x^\alpha + L\frac{\partial(\delta x^\alpha)}{\partial x^\alpha}\right) = \int_{\mathbb{M}} dx\,\bigl(\delta L + \partial_\alpha(L\delta x^\alpha)\bigr). \tag{5.21}$$

Теперь перепишем вариацию формы лагранжиана:

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial\varphi^a}\delta\varphi^a + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\delta(\partial_\alpha\varphi^a) = \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right)\delta\varphi^a + \partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\delta\varphi^a\right).\end{aligned} \tag{5.22}$$

При этом существенно, что параметр преобразования постоянен, $\epsilon = \mathsf{const}$, и, следовательно,

$$\delta(\partial_\alpha\varphi^a) = \partial_\alpha(\delta\varphi^a).$$

Воспользовавшись формулой Стокса, дивергентные слагаемые можно переписать в виде поверхностного интеграла. Таким образом, для вариации действия получаем окончательное выражение

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}} dx\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi^a} - \partial_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right)\delta\varphi^a + \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\delta\varphi^a + L\delta x^\alpha\right). \tag{5.23}$$

Поверхностный интеграл перепишем с учетом выражения для вариации формы функции (5.18):

$$\int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\bar\delta\varphi^a + \left(L\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\partial_\beta\varphi^a\right)\delta x^\beta\right).$$

Поскольку вариации координат $\delta x^\alpha$ и функций $\bar\delta\varphi^a$ произвольны и независимы, то из полученного выражения для вариации действия вытекает

Теорема 5.1.3. *Набор функций $\varphi$ является стационарной точкой действия $S[\varphi]$ в вариационной задаче с подвижной границей тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа (5.11) и граничным условиям:*

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\right|_{\partial\mathbb{M}} &= 0, \\ \left.L\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\partial_\beta\varphi^a\right|_{\partial\mathbb{M}} &= 0.\end{aligned} \tag{5.24}$$

В последней вариационной задаче с подвижной границей мы имеем $n(n + \mathrm{N})$ граничных условий, число которых быстро растет с увеличением размерности пространства. Соответствующая вариационная задача далеко не всегда имеет решение. Чтобы уменьшить число независимых граничных условий, предположим, что в окрестности границы $\partial\mathbb{M}$ поля принимают наперед заданные значения:

$$\varphi^a(x) = \Phi^a(x),$$

где достаточно гладкие функции $\Phi^a$ заданы в некоторой окрестности $\partial\mathbb{M}$. Тогда вариации функций и координат связаны соотношением

$$\bar\delta\varphi^a\big|_{\partial\mathbb{M}} = \delta x^\alpha \partial_\alpha \Phi^a|_{\partial\mathbb{M}}\,.$$

В этом случае вместо $n(n + \mathrm{N})$ граничных условий (5.24) остаются $n^2$ условий:

$$\left[L\delta^\alpha_\beta + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}(\partial_\beta\Phi^a - \partial_\beta\varphi^a)\right]_{\partial\mathbb{M}} = 0. \qquad (5.25)$$

Эти граничные условия называются *условиями трансверсальности.*

Стационарные точки действия для задачи с подвижной границей являются также стационарными точками для двух задач с фиксированной областью $\mathbb{M}$, рассмотренных ранее. Выполнение уравнений Эйлера–Лагранжа является необходимым условием во всех трех рассмотренных вариационных задачах. В задачах со свободными граничными условиями и с подвижной границей к уравнениям Эйлера–Лагранжа добавляются граничные условия.

**5.1.4. Задача на условную стационарную точку.** В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением вариационных задач на конечном отрезке $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ с заданными граничными условиями. Пусть требуется найти стационарную точку действия (5.1) в классе функций $\varphi^a \in \mathcal{C}^2\big([x_1, x_2]\big)$, $a = 1, \dots, \mathrm{N}$, при наличии $\mathrm{M} < \mathrm{N}$ независимых дополнительных условий, которые называются *связями*

$$G_{\mathrm{A}}(x, \varphi, \partial\varphi) = 0, \qquad \mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{M} < \mathrm{N}, \qquad (5.26)$$

где $G_{\mathrm{A}}$ – достаточно гладкие функции своих аргументов. Мы предполагаем, что связи $G_{\mathrm{A}}$ не противоречат граничным условиям и функционально независимы, т.е. ни одна из связей не является следствием остальных. В частности, ни одна из связей не выполняется тождественно для всех функций $\varphi$. Функциональная независимость связей означает, что матрица производных

$$\frac{\partial G_{\mathrm{A}}}{\partial\big(\varphi^a, \partial_x\varphi^b\big)}$$

имеет постоянный ранг $\mathrm{M}$. Отсюда следует, что локально связи можно разрешить относительно $\mathrm{M}$ функций или их первых производных, рассматривая остальные $2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$ функции и их производные как независимые.

В общем случае связи являются дифференциальными уравнениями, и их решения содержат произвольные постоянные. Мы предполагаем, что этот произвол устранен, например наложением граничных условий либо каким-то иным образом.

В частном случае связи могут быть алгебраическими уравнениями на неизвестные функции $G_{\mathrm{A}}(x, \varphi) = 0$. В этом случае они называются *голономными.* В противном случае связи (5.26) называются *неголономными.*

При наличии связей вариации функций не являются независимыми, и выполнение уравнений Эйлера–Лагранжа для исходного действия (5.1) не является необходимым условием. Прямым способом решения задачи на условный экстремум является явное разрешение связей относительно $\mathrm{M}$ функций, подстановка полученного решения в исходное действие и исследование нового действия от $\mathrm{N}-\mathrm{M}$ функций на безусловный экстремум.

Задачи на условную стационарную точку часто встречаются в математической физике. В частности, к ним приводят все калибровочные модели, инвариантные относительно локальных преобразований полей. В связи с этим введем удобную терминологию, которая часто используется в физике. А именно, назовем поля *нефизическими*, если связи разрешаются относительно этих полей. Остальные поля, относительно которых после исключения нефизических полей возникает задача на безусловную стационарную точку, называются *физическими*. Деление полей на физические и нефизические условно, так как связи можно разрешать относительно различных переменных. В то же время число физических ($\mathrm{N}-\mathrm{M}$) и нефизических ($\mathrm{M}$) полей, по предположению, постоянно.

Прямой способ исключения нефизических полей неприменим, если связи не решаются явно. Кроме этого исключение части полей может нарушить симметрию задачи, например, лоренц-инвариантность, что часто приводит к существенному усложнению вычислений. Поэтому используют метод неопределенных множителей Лагранжа. А именно, строят полное (total) действие

$$S_{\mathrm{T}} := \int_{x_1}^{x_2} dx (L - \lambda^{\mathrm{A}} G_{\mathrm{A}}), \tag{5.27}$$

где $\lambda(x) \in \mathcal{C}^1\big([x_1, x_2]\big)$ – новые функции, которые называются *множителями Лагранжа*. Это действие исследуется на безусловный экстремум. Вариация действия (5.27) по полям $\varphi^a$ и множителям Лагранжа $\lambda^{\mathrm{A}}$ приводит к $\mathrm{N}+\mathrm{M}$ уравнениям Эйлера–Лагранжа, $\mathrm{M}$ из которых, возникших при вариации по множителям Лагранжа, совпадают с уравнениями связей (5.26). При этом вариации множителей Лагранжа на границе не обязаны быть равными нулю, так как они входят в действие без производных и никаких дополнительных граничных условий не возникает. Решение новой задачи на безусловный экстремум дает решение исходной задачи на условный экстремум, что является содержанием следующего утверждения.

Теорема 5.1.4. *Для функций $\varphi$, на которых функционал (5.1) имеет стационарное значение при выполнении уравнений связей (5.26), существует такой набор множителей Лагранжа, что они вместе с полями $\varphi$ удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия (5.27):*

$$\frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta \varphi^a} = 0, \qquad \frac{\delta S_{\mathrm{T}}}{\delta \lambda^{\mathrm{A}}} = G_{\mathrm{A}} = 0.$$

Доказательство. См., например, [43], глава 9, § 1.

Сформулированная теорема позволяет свести вариационную задачу на условный экстремум к вариационной задаче на безусловный экстремум, но для действия, зависящего от большего числа функций. В теории поля вариационные задачи рассматриваются не на прямой $\mathbb{R}$, а в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда связи представляют собой в общем случае дифференциальные уравнения в частных производных. Для того чтобы доказать аналог теоремы о множителях Лагранжа, необходимо зафиксировать каким-либо образом класс рассматриваемых связей, что является сложной задачей. На практике метод неопределенных множителей Лагранжа часто используют, не заботясь о его применимости. В таком случае применимость метода необходимо доказывать в каждом конкретном случае.

**5.1.5. Другие задачи и терминология.** В общем случае функционал действия может зависеть от частных производных полей $\varphi^a$ любого порядка, вплоть до бесконечного:

$$S[\varphi] = \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \dots). \tag{5.28}$$

Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$S,_a = \frac{\partial L}{\partial(\varphi^a)} - \partial_\alpha \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)} + \partial^2_{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial(\partial^2_{\alpha\beta}\varphi^a)} - \ldots = 0. \tag{5.29}$$

Для простоты в настоящем разделе мы не будем обсуждать возможные граничные слагаемые.

Определение. Модели теории поля, лагранжиан которых зависит от производных бесконечного порядка, называются *нелокальными*. Для *локальных* моделей порядок производных ограничен и ряд (5.29) обрывается. Модели, для которых уравнения Эйлера–Лагранжа содержат производные третьего или более высокого, но конечного порядка, называются *моделями с высшими производными*.

Хорошо известно, что порядок уравнений можно понизить, рассматривая частные производные в качестве новых независимых переменных. В этом смысле любую теорию с высшими производными можно свести к модели без высших производных.

Замечание. С физической точки зрения теории с высшими производными представляют определенные трудности, так как наличие векторных лоренцевых индексов у полей, как правило, приводит к каноническому гамильтониану, неограниченному снизу за счет вклада временны́х компонент. После квантования такие теории приводят к гильбертову пространству с индефинитной метрикой, которая не допускает вероятностной интерпретации квантовой теории. Эти трудности можно избежать за счет выбора лагранжиана специального вида или налагая условие калибровочной инвариантности, которое позволяет исключить вклад временны́х компонент в канонический гамильтониан для физических степеней свободы. В квантовой теории поля модели с высшими производными принято считать неудовлетворительными до тех пор, пока не доказана положительная определенность канонического гамильтониана для физических степеней свободы.

Нелокальные теории поля представляют собой еще бо́льшие трудности для физической интерпретации, так как помимо проблем с индефинитной метрикой гильбертова пространства, в общем случае они нарушают причинность. Это следует из того, что значение функции, разложимой в ряд Тейлора в точке $x$, в точке $y \neq x$ выражаются через ее значения и значения ее производных в точке $x$ в виде бесконечного ряда. Следовательно, значение функции в некоторой точке может зависеть от ее значений в конусе будущего.

Допустим, что задана система уравнений Эйлера–Лагранжа. Функционал действия, приводящий к этим или эквивалентным уравнениям Эйлера–Лагранжа, определен неоднозначно. Во-первых, как уже отмечалось при рассмотрении вариационной задачи с заданными граничными условиями, уравнения не изменятся, если к лагранжиану добавить частную производную от функции, зависящей произвольным образом от полей и их частных производных. В частности, можно добавлять члены, имеющие вид дивергенции. Отметим, что если сам лагранжиан равен полной дивергенции, то он не приводит ни к каким уравнениям Эйлера–Лагранжа (получается тождество $0 = 0$). Во-вторых, вместо одного набора полей $\varphi^a$ можно выбрать другой: $\varphi'^a = \varphi'^a(\varphi)$. Если это преобразование полей невырождено, то новая система уравнений Эйлера–Лагранжа будет эквивалентна старой. Пример дают канонические преобразования в гамильтоновом формализме. Иногда можно изменить даже число новых переменных в лагранжиане и доказать биективность пространств возникающих решений уравнений Эйлера–Лагранжа. В частности, лагранжев и гамильтонов способы описания динамики точечных частиц, рассмотренные в следующей главе, приводят к эквивалентным системам уравнений, но для разного числа переменных.

Замечание. Выбор независимых переменных в действии, по которым проводится варьирование, чрезвычайно важен, поскольку может привести к существенному упрощению возникающих уравнений движения, особенно в нелинейных теориях. С другой стороны, квантования моделей теории поля, основанные на различном выборе динамических переменных, могут привести к различным квантовым теориям. В последнем случае теоретическим критерием выбора способа квантования является простота и самосогласованность конечной квантовой теории. Этот вопрос актуален для построения самосогласованной квантовой теории гравитации, которая в настоящее время отсутствует.

В релятивистских моделях математической физики, т.е. в моделях, инвариантных относительно преобразований из группы Пуанкаре, действие записывается в виде интеграла по всему пространству Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. В этом случае уравнения Эйлера–Лагранжа (5.11) называются также *уравнениями движения*, поскольку описывают эволюцию системы во времени. При этом для уравнений движения часто ставится не краевая задача, а задача Коши.

При рассмотрении моделей теории поля в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ действие, как правило, расходится. Например, действие в электродинамике для электромагнитных волн расходится. Это связано с бесконечным объемом интегрирования. Тем не менее с действием проводятся формальные выкладки, которые приводят к уравнениям Эйлера–Лагранжа, которые локальны и хорошо определены. При рассмотрении законов сохранения, связанных с первой теоремой Нётер, мы рассматриваем поля либо в конечном объеме, либо достаточно быстро убывающие на бесконечности.

Для корректной постановки вариационной задачи необходим глубокий анализ уравнений Эйлера–Лагранжа. Во многих важных случаях эти уравнения настолько сложны, что корректность постановки вариационной задачи доказать не удается. Поэтому в теоретической физике выбор действия означает, как правило, просто удобный способ задания уравнений движения для модели с заданными свойствами симметрии, что, конечно, чрезвычайно важно.

## 5.2. Первая теорема Нётер

В наиболее содержательных моделях математической физики функционал действия инвариантен относительно глобальных или локальных преобразований симметрии. С каждым преобразованием симметрии связан закон сохранения, что было установлено Эмми Нётер [44] в первой и второй теореме соответственно для глобальных и локальных преобразований.

Пусть функционал действия (5.1) инвариантен относительно бесконечно малых преобразований

$$x^\alpha \mapsto x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha, \tag{5.30}$$

$$\varphi^a(x) \mapsto \varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \bar\delta\varphi^a(x). \tag{5.31}$$

Рассмотрим независимые вариации координат и полей:

$$\delta x^\alpha = \epsilon^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^\alpha(x,\varphi,\partial\varphi), \tag{5.32}$$

$$\bar\delta\varphi^a = \varphi'^a(x') - \varphi^a(x) = \epsilon^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^a(x,\varphi,\partial\varphi), \tag{5.33}$$

где $R_{\text{A}}{}^\alpha(x,\varphi,\partial\varphi)$ и $R_{\text{A}}{}^a(x,\varphi,\partial\varphi)$ – некоторые достаточно гладкие и функционально независимые функции своих аргументов, которые называются *генераторами* преобразований симметрии, а $\epsilon^{\text{A}}(x)$, $\text{A} = 1, 2, \dots, \text{K}$, – постоянные или локальные параметры преобразований, число которых зависит от рассматриваемой модели. Мы говорим, что каждому значению индекса А соответствует одно преобразование симметрии.

Преобразования (5.30) и (5.31) уже рассматривались нами при обсуждении вариационной задачи с подвижной границей. Разница заключается в том, что сейчас у нас не один, а K параметров преобразования, которые, вдобавок, могут зависеть от точки $x \in \mathbb{M}$.

Начнем с доказательства первой теоремы Нётер, т.е. будем считать параметры преобразований постоянными, $\epsilon^{\text{A}} = \mathsf{const}$. Под инвариантностью функционала действия мы понимаем следующее равенство

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx\, L(x, \varphi, \partial\varphi) = \int_{\mathbb{M}'} dx'\, L(x', \varphi', \partial'\varphi'), \tag{5.34}$$

где интегрирование производится по ограниченной области $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$, которая отображается в $\mathbb{M}'$ при преобразовании (5.30).

Преобразования (5.32), (5.33) нетривиально действуют как на поля, так и на координаты. В дальнейшем нам понадобится вариация формы функции в данной точке $x \in \mathbb{M}$:

$$\delta\varphi^a(x) := \varphi'^a(x) - \varphi^a(x),$$

которая определяется разностью значений полей после и до преобразования в точке $x$. Она связана с вариацией (5.31) следующим соотношением

$$\delta\varphi^a(x) = \bar\delta\varphi^a - \delta x^\alpha \partial_\alpha \varphi^a = \epsilon^{\text{A}}({R_{\text{A}}}^a - {R_{\text{A}}}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a). \tag{5.35}$$

По построению, для постоянных параметров преобразований вариация формы функции $\delta$ перестановочна с операцией частного дифференцирования $\partial_\alpha$. Вариация действия относительно преобразований (5.30), (5.31) была вычислена ранее (5.23). Если выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа, то вариацию действия при постоянных параметрах преобразований симметрии запишем в виде

$$\delta S = -\int_{\mathbb{M}} dx\, \epsilon^{\text{A}} \partial_\alpha {J_{\text{A}}}^\alpha, \tag{5.36}$$

где

$${J_{\text{A}}}^\alpha := -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \varphi^a)}({R_{\text{A}}}^a - {R_{\text{A}}}^\beta \partial_\beta \varphi^a) - L{R_{\text{A}}}^\alpha. \tag{5.37}$$

Совокупность величин ${J_{\text{A}}}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, можно рассматривать как компоненты некоторого вектора (точнее, векторной плотности) $J_{\text{A}}$, который называется *сохраняющимся током* для каждого преобразования симметрии с параметром $\epsilon^{\text{A}}$. Из полученного выражения следует

Теорема 5.2.1 (первая теорема Нётер). *Если действие* (5.1) *инвариантно относительно преобразований* (5.30)–(5.33) *с постоянными параметрами* $\epsilon^{\text{A}}$*, то для каждого преобразования симметрии и любого решения уравнений Эйлера–Лагранжа токи сохраняются*:

$$\partial_\alpha {J_{\text{A}}}^\alpha = 0, \qquad \text{A} = 1, \dots, \text{K}. \tag{5.38}$$

Заметим, что для сохранения тока достаточно глобальной инвариантности, когда параметр преобразования не зависит от точек пространства-времени.

Поскольку лагранжиан не содержит производных выше первого порядка, то компоненты токов в общем случае зависят только от координат, полей и их первых производных.

Закон сохранения (5.38) не нарушится, если к току (5.37) добавить слагаемое

$${J'_{\text{A}}}^\alpha = {J_{\text{A}}}^\alpha + \partial_\beta {f_{\text{A}}}^{\beta\alpha}, \tag{5.39}$$

где ${f_{\text{A}}}^{\beta\alpha} = -{f_{\text{A}}}^{\alpha\beta}$ – произвольная антисимметричная по индексам $\alpha$, $\beta$ функция. Чтобы не менять структуры тока (5.37), будем считать, что она зависит только от координат $x^\alpha$, полей

$\varphi$ и их первых производных $\partial\varphi$. Это преобразование часто используется, чтобы упростить выражения для токов.

Перепишем закон сохранения (5.38) в интегральной форме и используем формулу Стокса

$$\int_{\mathbb{M}} dx\, \partial_\alpha J_{\text{A}}{}^\alpha = \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha\, J_{\text{A}}{}^\alpha = 0,$$

где интегрирование ведется по многообразию $\mathbb{M}$ и его краю $\partial\mathbb{M}$. Пусть на $\mathbb{M}$ задана (псевдо)риманова геометрия, т.е. метрика $g_{\alpha\beta}$ и связность Леви-Чивиты $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$. Тогда если индекс A не преобразуется при преобразовании координат, то первый интеграл по (псевдо)риманову многообразию можно переписать в ковариантной форме:

$$\int_{\mathbb{M}} dx\, \partial_\alpha J_{\text{A}}{}^\alpha = \int_{\mathbb{M}} dx\, \sqrt{|g|}\widetilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^\alpha\right),$$

где

$$\widetilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^\alpha\right) = \partial_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^\alpha\right) + \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\alpha \frac{1}{\sqrt{|g|}} J_{\text{A}}{}^\beta$$

– ковариантная производная от вектора тока и мы воспользовались формулой для дивергенции (см. [23], глава 6)

$$\widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} X^\alpha\right). \tag{5.40}$$

Рассмотрим действие (5.1) в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Пусть $\{x^\alpha\} = \{x^0, \boldsymbol{x}\}$ – декартова система координат и все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности:

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} \varphi^a = 0$$

для всех моментов времени. Тогда, интегрируя уравнение (5.38) по области пространства Минковского, которая ограничена двумя пространственноподобными сечениями $x^0_1 = \mathsf{const}$ и $x^0_2 = \mathsf{const}$, получим закон сохранения

$$Q_{\text{A}} = \int_{\mathbb{S}} d\boldsymbol{x}\, J_{\text{A}}{}^0 = \mathsf{const}, \tag{5.41}$$

где $\mathbb{S}$ – произвольное сечение $x^0 = \mathsf{const}$. Это означает, что каждому преобразованию симметрии соответствует закон сохранения: для любого решения уравнений движения, достаточно быстро убывающего на пространственной бесконечности, интеграл (5.41) не зависит от времени. Интеграл (5.41) называется *сохраняющимся зарядом*, соответствующим току $J_{\text{A}}{}^\alpha$. Если для уравнений движения поставлена задача Коши, то значение заряда $Q_{\text{A}}$ однозначно определяется начальными условиями.

**5.2.1. Тензор энергии-импульса.** Предположим, что некоторая модель описывается набором полей $\varphi^a$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ с декартовыми координатами $x^\alpha$. При этом метрика $\eta_{\alpha\beta} = \mathsf{diag}\,(+ - \ldots -)$ является заданной функцией в действии, по которой варьирование не проводится. Пусть действие инвариантно относительно трансляций

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha = \mathsf{const}, \tag{5.42}$$

$$\bar{\delta}\varphi^a = 0. \tag{5.43}$$

Для этого достаточно, чтобы лагранжиан модели $L(\varphi, \partial\varphi)$ не зависел явно от координат. Для трансляций индекс $\mathrm{A}$ в (5.32) пробегает те же значения, что и $\alpha$, генератор трансляций совпадает с символом Кронекера, $R_{\mathrm{A}}{}^{\alpha} \mapsto \delta^{\alpha}_{\beta}$, и $R_{\mathrm{A}}{}^{a} = 0$. В этом случае выражение для тока (5.37) имеет вид

$$T_{\alpha}{}^{\beta} = \partial_{\alpha}\varphi^{a}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\beta}\varphi^{a})} - \delta^{\beta}_{\alpha}L. \tag{5.44}$$

Это выражение называется *тензором энергии-импульса* полей $\varphi^{a}$. В силу первой теоремы Нётер, он сохраняется:

$$\partial_{\beta}T_{\alpha}{}^{\beta} = 0. \tag{5.45}$$

Тензор энергии-импульса (5.44) будем называть *каноническим*.

Если лагранжиан модели является скалярным полем (функцией) относительно глобальных преобразований Лоренца $\mathbb{O}(1, n-1)$, то выражение (5.44) представляет собой тензор второго ранга типа $(1,1)$. Ясно, что выражение для $T_{0}{}^{0}$ всегда совпадает с плотностью гамильтониана для полей $\varphi^{a}$, и это оправдывает название “канонический”.

Замечание. В общей теории относительности, основанной на псевдоримановой геометрии, постулируется, что тензор Эйнштейна пропорционален тензору энергии-импульса материи. При этом тензор энергии-импульса материи (7.10) определяется как вариационная производная действия для полей материи по метрике. При таком определении тензор энергии-импульса всегда симметричен. Для скалярного поля вариационная производная действия по метрике является ковариантным обобщением тензора (5.44). В других случаях связь двух определений сложнее и будет обсуждаться в каждом конкретном случае.

Вообще говоря, тензор энергии-импульса с опущенным верхним индексом $T_{\alpha\beta}$ не является симметричным. Если это так, то в ряде случаев можно провести симметризацию, добавив соответствующую дивергенцию (5.39). Однако это не всегда возможно. Действительно, после добавления дивергенции получим новый тензор энергии-импульса

$$T'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \partial^{\gamma}f_{\alpha\gamma\beta}.$$

Из условия симметрии $T'_{\alpha\beta} - T'_{\beta\alpha} = 0$ следуют уравнения на неизвестную функцию $f_{[\alpha\gamma\beta]} = 0$, в которые входят только полностью антисимметричные компоненты:

$$\partial^{\gamma}f_{[\alpha\gamma\beta]} = -\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}).$$

Таким образом, мы имеем $n(n-1)/2$ дифференциальных уравнений на $n(n-1)(n-2)/3!$ неизвестных компонент. При $n = 4$ возникает 6 уравнений на 4 неизвестные функции, которые не всегда имеют решения.

Введем стандартные 3-формы на координатных трехмерных гиперповерхностях в четырехмерном пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$ds_{\alpha} = \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta}. \tag{5.46}$$

Определим сохраняющийся во времени *ковектор энергии-импульса* с помощью интеграла

$$P_{\alpha} = \int\limits_{x^{0}=\mathsf{const}} ds_{\beta}\, T_{\alpha}{}^{\beta}, \tag{5.47}$$

где по индексу $\beta$ производится суммирование. Полученное выражение (5.47) по построению является ковектором относительно глобальных лоренцевых вращений. В предположении, что все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности, ковектор энергии-импульса определяется одним интегралом по пространству,

$$P_\alpha = \int\limits_{x^0=\mathsf{const}} d\boldsymbol{x}\, T_\alpha{}^0. \tag{5.48}$$

Выражение для нулевой компоненты $P_0$ совпадает с гамильтонианом системы полей $\varphi^a$, т.е. равно сохраняющейся полной энергии. Это оправдывает название ковектора энергии-импульса. Пространственные компоненты тензора энергии-импульса

$$T_i{}^0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\varphi^a)}\partial_i\varphi^a, \qquad i = 1, \dots, n-1, \tag{5.49}$$

определяют сохраняющийся полный импульс системы полей $\varphi^a$

$$P_i = \int\limits_{x^0=\mathsf{const}} d\boldsymbol{x}\, T_i{}^0.$$

Полная энергия системы $P_0$ и каждая компонента полного импульса $P_i$ относительно данной декартовой системы сохраняются во времени. В другой декартовой системе координат они тоже сохраняются, но имеют другие численные значения.

**5.2.2. Тензор момента количества движения.** Пусть действие $S[\varphi]$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ инвариантно относительно лоренцевых вращений. Мы предполагаем, что набор полей $\varphi^a$ преобразуется по некоторому, возможно, приводимому представлению группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, n-1)$. Обозначим представление генераторов группы для полей через $L_{\gamma\delta b}{}^a = -L_{\delta\gamma b}{}^a$. Тогда в инфинитезимальной форме лоренцевы вращения примут вид

$$\delta x^\alpha = -x^\beta\omega_\beta{}^\alpha = \sum_{\gamma<\delta}\omega^{\gamma\delta}(x_\delta\delta^\alpha_\gamma - x_\gamma\delta^\alpha_\delta), \tag{5.50}$$

$$\bar\delta\varphi^a = \sum_{\gamma<\delta}\omega^{\gamma\delta}L_{\gamma\delta b}{}^a\varphi^b, \tag{5.51}$$

где $\omega^{\gamma\delta} = -\omega^{\delta\gamma}$ – параметры преобразований, которые предполагаются постоянными. Для инвариантности действия достаточно, чтобы лагранжиан был скалярным полем (функцией) от координат, полей и их производных. Для лоренцевых вращений индекс $\mathrm{A} \mapsto (\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$ представляет собой пару антисимметричных векторных индексов.

Выражение для тока (5.37) приводит к следующему тензору *момента количества движения*, который мы представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} J_{\gamma\delta}{}^\alpha = &-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\varphi^a)}\Big(L_{\gamma\delta b}{}^a\varphi^b - (x_\delta\delta^\beta_\gamma - x_\gamma\delta^\beta_\delta)\partial_\beta\varphi^a\Big) - L(x_\delta\delta^\alpha_\gamma - x_\gamma\delta^\alpha_\delta) = \\ &= M_{\gamma\delta}{}^\alpha + S_{\gamma\delta}{}^\alpha, \end{aligned} \tag{5.52}$$

где введен *орбитальный* и *спиновый* моменты соответственно,

$$M_{\alpha\beta}{}^\gamma := x_\beta T_\alpha{}^\gamma - x_\alpha T_\beta{}^\gamma, \tag{5.53}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^\gamma := -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma\varphi^a)}L_{\alpha\beta b}{}^a\varphi^b. \tag{5.54}$$

Здесь $T_\alpha{}^\beta$ – канонический тензор энергии-импульса (5.44). Оба объекта являются тензорами третьего ранга относительно преобразований Лоренца. Обратим внимание, что орбитальный момент (5.53) не инвариантен относительно трансляций, так как явно зависит от координат. В противоположность этому спиновый момент инвариантен относительно трансляций.

Если все поля $\varphi^a$ являются скалярами относительно лоренцевых вращений, то $L_{\alpha\beta b}{}^a = 0$ и спиновый момент равен нулю, $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$.

Допустим, что действие для некоторой системы полей инвариантно относительно трансляций и лоренцевых вращений (группы Пуанкаре), и спиновый момент равен нулю $S_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ как для скалярных полей. Тогда закон сохранения момента количества движения принимает вид

$$\partial_\gamma M_{\alpha\beta}{}^\gamma = T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha} + x_\beta \partial_\gamma T_\alpha{}^\gamma - x_\alpha \partial_\gamma T_\beta{}^\gamma.$$

С учетом закона сохранения тензора энергии-импульса (5.45) отсюда вытекает, что для такой системы ковариантный тензор энергии-импульса симметричен:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}. \tag{5.55}$$

Так же как и для канонического тензора энергии-импульса, для тензора момента количества движения можно ввести полный момент системы. Для полей, достаточно быстро убывающих на пространственной бесконечности, он равен интегралу по пространству:

$$J_{\alpha\beta} = \int\limits_{x^0 = \mathsf{const}} d\boldsymbol{x}\, J_{\alpha\beta}{}^0. \tag{5.56}$$

Полный момент количества движения является антисимметричным тензором второго ранга относительно преобразований Лоренца.

Замечание. Требование инвариантности моделей математической физики относительно преобразований группы Пуанкаре имеет глубокий физический смысл и составляет основное содержание специальной теории относительности. Инвариантность действия относительно трансляций означает однородность пространства-времени. То есть все точки пространства-времени равноправны, и законы природы имеют одинаковый вид в декартовых координатах с произвольно выбранным началом. Инвариантность относительно преобразований Лоренца означает изотропность пространства-времени. То есть равноправие всех направлений и одинаковый вид законов природы в декартовых координатах с произвольной ориентацией осей. Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения к настоящему времени нашли многочисленные экспериментальные подтверждения в различных областях физики. Поэтому инвариантность фундаментальных моделей математической физики относительно действия группы Пуанкаре следует считать экспериментально установленным фактом.

Помимо этого требование инвариантности функционала действия относительно преобразований группы Пуанкаре в квантовой теории поля означает, что все элементарные частицы должны описываться полями, принадлежащими одному из неприводимых представлений группы Пуанкаре, которые характеризуются массой и спином. Использование этих понятий в экспериментальной физике элементарных частиц также чрезвычайно плодотворно. Это также можно рассматривать как экспериментальное подтверждение инвариантности законов природы относительно преобразований группы Пуанкаре.

## 5.3. Вторая теорема Нётер

Рассмотрим действие (5.1), которое инвариантно относительно преобразований (5.30)–(5.33) с локальными параметрами $\epsilon^{\mathrm{A}}(x)$, зависящими от точек пространства-времени. Мы допускаем, что эти преобразования могут зависеть от частных производных $\partial_\alpha \epsilon^{\mathrm{A}}$ первого и более высокого порядка. Чтобы упростить формулы, будем использовать обозначения Девитта [45], т.е. суммирование по индексу $\text{A}$ в формулах (5.30), (5.31) подразумевает интегрирование, а генераторы локальных преобразований рассматриваются как двухточечные функции, содержащие $\delta$-функции и (или) их производные.

Пример 5.3.1. Калибровочное преобразование в электродинамике

$$\delta A_\alpha = \partial_\alpha \epsilon$$

будем записывать в виде

$$\delta A_\alpha = \epsilon R_\alpha = \partial_\alpha \int dx' \, \epsilon(x') \delta(x' - x), \tag{5.57}$$

где

$$R_\alpha(x', x) := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(x' - x). \tag{5.58}$$

Пример 5.3.2. Бесконечно малые общие преобразования координат для электромагнитного поля можно записать в виде

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha = \epsilon^\beta R_\beta{}^\alpha, \tag{5.59}$$

$$\delta A_\alpha = -\partial_\alpha \epsilon^\beta A_\beta - \epsilon^\beta \partial_\beta A_\alpha = \epsilon^\beta N_{\beta\alpha}, \tag{5.60}$$

где

$$R_\beta{}^\alpha := \delta^\alpha_\beta \delta(x' - x), \tag{5.61}$$

$$N_{\beta\alpha} := F_{\alpha\beta}(x') \delta(x' - x) - A_\beta(x') \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(x' - x). \tag{5.62}$$

Определение. Преобразования полей (5.33) с локальными параметрами $\epsilon^{\text{A}}(x)$ называются *калибровочными.*

Рассмотрим одну из вариационных задач. Будем считать, что параметры $\epsilon^{\text{A}}$ и их производные равны нулю на границе области. Тогда инвариантность действия относительно калибровочных преобразований можно записать в виде

$$\delta S = \int dx \, \delta\varphi^a S,_a = \int dx \, \epsilon^{\text{A}} (R_{\text{A}}{}^a - R_{\text{A}}{}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) S,_a = 0. \tag{5.63}$$

При этом были отброшены все граничные слагаемые. Отсюда следует

Теорема 5.3.1 (вторая теорема Нётер). *Если функционал действия* (5.1) *инвариантен относительно калибровочных преобразований, которые параметризуются* $\text{K}$ *произвольными функциями* $\epsilon^{\text{A}}(x)$, $\text{A} = 1, \dots, \text{K}$, *то уравнения Эйлера–Лагранжа удовлетворяют* $\text{K}$ *тождествам*:

$$(R_{\text{A}}{}^a - R_{\text{A}}{}^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) S,_a = 0. \tag{5.64}$$

Замечание. В формулировке теоремы мы отбросили предположение о том, что параметры преобразований и их производные равны нулю на границе. Если это не так, то зависимость уравнений Эйлера–Лагранжа все равно сохранится. В этом случае из требования инвариантности действия появятся дополнительные следствия для граничных условий, которые мы не рассматриваем.

Напомним, что в линейном соотношении между уравнениями движения (5.64) суммирование по индексу $a$ предполагает интегрирование. Отсюда следует, что если калибровочные преобразования зависят от частных производных $l$-го порядка от параметра преобразования, то соотношения (5.64) представляют собой систему $K$ линейных дифференциальных уравнений в частных производных $l$-го порядка относительно вариационных производных $S,_a$.

Вторая теорема Нётер утверждает, что в калибровочных моделях, а также моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, не все уравнения движения являются линейно независимыми. Это указывает на то, что в решениях задачи Коши будет содержаться функциональный произвол, так как количества уравнений недостаточно для однозначного определения решений по начальным данным.

Для доказательства теоремы существенно, что параметры преобразований $\epsilon^{\mathrm{A}}(x)$ являются произвольными функциями, так как только в этом случае подынтегральное выражение в (5.63) согласно основной лемме вариационного исчисления должно обращаться в нуль.

Пример 5.3.3. Проведем аналогию с теорией функций многих переменных. Пусть $f = f(x)$ – функция $n$ переменных $x = \{x^\alpha\}$. Аналогом вариационной производной действия в таком случае является обычная частная производная $\partial_\alpha f$. Допустим, что $f$ инвариантна относительно калибровочных преобразований $\delta x^\alpha = \epsilon X^\alpha$, где $\epsilon = \epsilon(x)$ – параметр преобразования и $X^\alpha$ – векторное поле (генератор калибровочного преобразования), которое предполагается отличным от нуля. Тогда "зависимость уравнений движения" сводится к линейной зависимости частных производных $X^\alpha \partial_\alpha f = 0$. Поэтому функция $f$ постоянна вдоль интегральной кривой $x(t)$ векторного поля $X^\alpha$:

$$f\big(x(t)\big) = \mathsf{const}, \qquad \dot{x}^\alpha = X^\alpha.$$

Это значит, что локальный экстремум $\partial_\alpha f = 0$ достигается не в точке, а на интегральной кривой $x(t)$.

Из второй теоремы Нётер следует, что функционал действия для калибровочных моделей достигает экстремального значения не на отдельных функциях, а на классах функций, которые связаны между собой калибровочными преобразованиями.

Если некоторая модель инвариантна относительно локальных преобразований, то она, в частности, инвариантна относительно тех же преобразований с постоянными параметрами. Это значит, что токи (5.37) приводят к законам сохранения (5.41) и для локальных преобразований. Поэтому в моделях, инвариантных относительно локальных преобразований, можно применить обе теоремы Нётер. При этом первая теорема дает выражения для сохраняющихся токов, а вторая – зависимость уравнений движения. В общем случае это не одно и то же.

Пример 5.3.4. Рассмотрим модели математической физики, инвариантные относительно общих преобразований координат. Пусть действие $S = S(g, \Gamma)$ зависит только от метрики $g_{\alpha\beta}$ и аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$. Обозначим вариационные производные действия следующим образом:

$$\sqrt{|g|}S,^{\alpha\beta} := \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}, \qquad \sqrt{|g|}S,^{\alpha\beta}{}_\gamma := \frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma}. \tag{5.65}$$

Здесь мы явно ввели в качестве множителя определитель репера $\sqrt{|g|} = \mathsf{det}\, e_\alpha{}^a$, поскольку вариационные производные, так же как и лагранжиан, являются тензорными плотностями степени $-1$. Инвариантность действия относительно общих преобразований координат означает равенство нулю вариации:

$$\delta S = \int dx \sqrt{|g|}(S,^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + S,^{\alpha\beta}{}_\gamma \delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma) = 0.$$

Подставляя сюда вариации метрики и связности

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \epsilon^\gamma g_{\gamma\beta} - \partial_\beta \epsilon^\gamma g_{\alpha\gamma} - \epsilon^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \tag{5.66}$$

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\partial_\alpha \epsilon^\delta \Gamma_{\delta\beta}{}^\gamma - \partial_\beta \epsilon^\delta \Gamma_{\alpha\delta}{}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta \partial_\delta \epsilon^\gamma - \partial^2_{\alpha\beta} \epsilon^\gamma - \epsilon^\delta \partial_\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \tag{5.67}$$

и интегрируя по частям, получим тождества

$$\begin{aligned} 2\widetilde\nabla_\alpha S,{}^\alpha{}_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha S,{}^{\alpha\beta}{}_\gamma + \\ + \nabla_\beta (T_\alpha + \tfrac12 Q_\alpha) S,{}^{\alpha\beta}{}_\gamma + (T_\alpha + \tfrac12 Q_\alpha) \nabla_\beta (S,{}^{\alpha\beta}{}_\gamma + S,{}^{\beta\alpha}{}_\gamma) - \nabla_\alpha S,{}^{\alpha\beta}{}_\delta T_{\beta\gamma}{}^\delta - \\ - (T_\alpha + \tfrac12 Q_\alpha)(T_\beta + \tfrac12 Q_\beta) S,{}^{\alpha\beta}{}_\gamma + (T_\alpha + \tfrac12 Q_\alpha) T_{\beta\gamma}{}^\delta S,{}^{\alpha\beta}{}_\delta + S,{}^{\alpha\beta}{}_\delta R_{\alpha\gamma\beta}{}^\delta = 0, \end{aligned} \tag{5.68}$$

где $\widetilde\nabla_\alpha$ и $\nabla_\alpha$ – ковариантные производные соответственно со связностью Леви-Чивиты $\widetilde\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ и аффинной связностью $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$, а подъем и опускание индексов производится с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$. Таким образом, в моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, уравнения движения удовлетворяют $n = \mathsf{dim}\,\mathbb{M}$ линейным дифференциальным тождествам.

В (псевдо)римановой геометрии, когда гравитационная часть действия зависит только от метрики, эти тождества значительно упрощаются:

$$\widetilde\nabla_\alpha S,{}^\alpha{}_\beta = 0. \tag{5.69}$$

В общей теории относительности для действия Гильберта–Эйнштейна справедливо равенство

$$\widetilde\nabla_\alpha \left( \widetilde R^\alpha{}_\beta - \frac12 \delta^\alpha_\beta \widetilde R \right) = 0. \tag{5.70}$$

Это тождество совпадает со свернутыми тождествами Бианки (см. [23], глава 6)).

Пример 5.3.5. Модели гравитации, построенные в рамках геометрии Римана–Картана, в переменных Картана инвариантны относительно общих преобразований координат и локальных преобразований Лоренца. Как следствие второй теоремы Нётер, не все уравнения движения являются независимыми, поскольку удовлетворяют тождествам. Пусть действие $S = S(e, \omega)$ зависит только от репера $e_\alpha{}^a$ и лоренцевой связности $\omega_\alpha{}^{ab}$. Обозначим вариационные производные следующим образом:

$$\sqrt{|g|} S,{}^\alpha{}_a := \frac{\delta S}{\delta e_\alpha{}^a}, \qquad \sqrt{|g|} S,{}^\alpha{}_{ab} := \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha{}^{ab}}. \tag{5.71}$$

Бесконечно малые преобразования Лоренца для репера и лоренцевой связности при локальных лоренцевых вращениях имеют вид

$$\delta e_\alpha{}^a = -e_\alpha{}^b \omega_b{}^a, \tag{5.72}$$

$$\delta \omega_{\alpha a}{}^b = \ \omega_a{}^c \omega_{\alpha c}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c \omega_c{}^b + \partial_\alpha \omega_a{}^b. \tag{5.73}$$

Отсюда вытекает следующая зависимость уравнений движения

$$\widetilde\nabla_\alpha S,{}^\alpha{}_{ab} + \frac12 (S,{}_{ab} - S,{}_{ba}) = 0, \tag{5.74}$$

где переход от греческих индексов к латинским осуществляется с помощью репера. Полученная зависимость соответствует инвариантности действия относительно локальных лоренцевых вращений.

Вариации полей $e$ и $\omega$ при общих преобразованиях координат имеют вид

$$\delta e_\alpha{}^a = -\partial_\alpha\epsilon^\beta e_\beta{}^a - \epsilon^\beta\partial_\beta e_\alpha{}^a = -\widetilde{\nabla}_\alpha\epsilon^a + \epsilon^\beta\widetilde{\omega}_{\beta b}{}^a e_\alpha{}^b, \tag{5.75}$$

$$\delta\omega_\alpha{}^{ab} = -\partial_\alpha\epsilon^\beta\omega_\beta{}^{ab} - \epsilon^\beta\partial_\beta\omega_\alpha{}^{ab} = -\widetilde{\nabla}_\alpha\epsilon^\beta\omega_\beta{}^{ab} - \epsilon^\beta(\partial_\beta\omega_\alpha{}^{ab} - \widetilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\gamma\omega_\gamma{}^{ab}). \tag{5.76}$$

Поэтому инвариантность действия относительно общих преобразований координат приводит к тождествам:

$$\nabla_\alpha S,{}^\alpha{}_\beta + T_\alpha S,{}^\alpha{}_\beta + S,{}^\alpha{}_a T_{\alpha\beta}{}^a + S,{}^\alpha{}_{ab}R_{\alpha\beta}{}^{ab} = 0, \tag{5.77}$$

где мы учли полученное ранее тождество (5.74).

При добавлении к гравитационному действию слагаемых, зависящих от других полей (полей материи), тождества, которым удовлетворяют уравнения движения, меняются, так как необходимо учитывать вариации всех полей.

## 5.4. Эффективное действие

При исследовании моделей математической физики, действие которых зависит от нескольких полей, иногда удается решить часть уравнений Эйлера–Лагранжа явно. В этом случае вариационную задачу можно свести к новому эффективному действию, зависящему от меньшего числа переменных. В настоящем разделе мы докажем простую теорему, позволяющую строить эффективное действие в случае вариационной задачи с фиксированными граничными условиями. То есть будем пренебрегать всеми граничными слагаемыми. Обобщение на более сложные случаи будет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Начнем с простейшего случая. Пусть на ограниченной области $\mathbb{M}\subset\mathbb{R}^n$ заданы два скалярных поля $\varphi$ и $\psi$. Предположим, что функция $\psi=\psi(x,\varphi,\partial\varphi,\partial^2\varphi)$ в каждой точке $x\in\mathbb{M}$ задана как функция $\varphi$, ее первых и вторых частных производных: $\partial_\alpha\varphi$ и $\partial_\alpha\partial_\beta\varphi$. Представим значение функции $\psi(x):=\psi\big[x,\varphi(x),\partial\varphi(x),\partial^2\varphi(x)\big]$ в точке $x\in\mathbb{M}$ в виде функционала, используя $\delta$-функцию,

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{M}}\!dy\,\psi(y)\delta(y-x).$$

Вариация функционала $\psi(x)$, вызванная вариацией $\delta\varphi$, имеет вид

$$\delta\psi(x) = \int_{\mathbb{M}}\!dy\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\varphi)}\delta(\partial_\alpha\varphi) + \frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)}\delta(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi)\right)\delta(y-x).$$

Проинтегрировав второе и третье слагаемые по частям, получим выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta\psi(x)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\delta(y-x) - \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\varphi)}\delta(y-x)\right) + \partial_\alpha\partial_\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\psi)}\delta(y-x)\right), \tag{5.78}$$

где в правой части $\psi=\psi(y)$ и $\varphi=\varphi(y)$.

Теперь обсудим вариационную задачу. Пусть действие $S[\varphi,\psi]$ зависит от двух функций $\varphi$ и $\psi$. Тогда из принципа наименьшего действия следуют два уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} = 0, \tag{5.79}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\psi} = 0. \tag{5.80}$$

Допустим, что второе уравнение Эйлера–Лагранжа допускает общее решение для $\psi$ как функции от $\varphi$ и ее производных:

$$\psi = \psi(x, \varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi). \tag{5.81}$$

При этом мы предполагаем, что общее решение не имеет особенностей. Если действие зависит только от самих функций и их первых производных, то в общее решение будут входить производные от $\varphi$ не выше второго порядка. Поскольку уравнение Эйлера–Лагранжа (5.80) является дифференциальным уравнением в частных производных, то общее решение зависит также от некоторого набора произвольных функций и постоянных. Часть этих произвольных функций и постоянных фиксируется, если это возможно, граничными условиями $\psi|_{\partial\mathbb{M}} = \psi_0$ и $\varphi|_{\partial\mathbb{M}} = \varphi_0$. Используем полученное решение для построения нового *эффективного* действия

$$S_{\text{eff}}[\varphi] := S[\varphi, \psi(\varphi)], \tag{5.82}$$

которое зависит только от одной функции $\varphi$. Тогда уравнение Эйлера–Лагранжа для $\varphi$ связано со старыми уравнениями (5.79), (5.80) простым соотношением

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} + \frac{\delta S}{\delta\psi(y)}\frac{\delta\psi(y)}{\delta\varphi(x)}\bigg|_{\psi=\psi(\varphi)} = 0, \tag{5.83}$$

где во втором слагаемом подразумевается интегрирование по аргументу поля $\psi(y)$, которое снимается $\delta$-функцией в вариационной производной. Ясно, что второе слагаемое равно нулю, если выполнено уравнение Эйлера–Лагранжа для $\psi$ (5.80).

Проведенные вычисления остаются в силе и в том случае, когда мы рассматриваем наборы полей $\varphi = \{\varphi^a\}$, $a = 1, \dots, \text{N}$, и $\psi^{\text{A}}$, $\text{A} = 1, \dots, m$. Отсюда следует

Теорема 5.4.1. *Пусть дано действие $S[\varphi, \psi]$, зависящее от двух наборов полей $\varphi$ и $\psi$. Тогда множество решений уравнений Эйлера–Лагранжа для вариационной задачи с заданными граничными условиями совпадает с множеством решений уравнений Эйлера–Лагранжа для эффективного действия* (5.82), *дополненным выражением $\psi$ через $\varphi$* (5.81).

Эта теорема важна, поскольку позволяет строить эффективное действие, которое зависит от меньшего числа полей, подставляя решение части системы уравнений Эйлера–Лагранжа непосредственно в исходное действие.

При доказательстве теоремы 5.4.1 мы предположили, что всеми граничными слагаемыми можно пренебречь. В полевых моделях математической физики это не всегда так. В разделе 6.2.6 будет построен пример, где подстановка решения части уравнений Эйлера–Лагранжа в действие не воспроизводит оставшиеся уравнения движения. Это связано с нетривиальной ролью граничных слагаемых в действии для полевых моделей.

## 5.5. Редуцированное действие

В настоящем разделе мы рассмотрим еще один способ сведения сложной вариационной задачи к более простой. Пусть задано действие $S[\varphi]$. Рассмотрим для него вариационную задачу с фиксированными граничными условиями. Как правило, уравнения Эйлера–Лагранжа (уравнения движения) настолько сложны, что не позволяют найти все решения. В таких случаях для нахождения частных решений делают упрощающие предположения: решение уравнений движения ищется в определенном классе функций. Например, ищутся статические или сферически симметричные решения. Чтобы найти стационарную точку действия, упрощающую подстановку, которую часто называют *анзац* (от немецкого ansatz $\simeq$ исходное математическое выражение), следует производить в уравнения Эйлера–Лагранжа (5.11), а не в действие. В этом случае найденное точное решение уравнений движения действительно будет стационарной точкой исходного действия.

Однако в ряде случаев подстановки можно производить непосредственно в действие. Это означает следующее. Пусть в результате некоторых упрощающих предположений исходный набор функций $\varphi^a$, $a = 1, \dots, \mathrm{N}$, будет выражен через меньшее число независимых функций $\psi^{\mathrm{A}}$, $\mathrm{A} = 1, \dots, m$, и координаты:

$$\varphi^a = \varphi^a(x, \psi). \tag{5.84}$$

При этом функции $\psi$ могут зависеть от меньшего числа координат. В результате подстановки будет получено новое *редуцированное действие*

$$S_{\mathrm{red}}[\psi] := S[\varphi(\psi)], \tag{5.85}$$

зависящее от меньшего числа независимых полей.

Допустим, что найдено решение уравнений движения для редуцированного действия

$$\frac{\delta S_{\mathrm{red}}}{\delta \psi^{\mathrm{A}}} = 0.$$

Тогда функции (5.84), как правило, не будут удовлетворять исходным уравнениям (5.11). Тем не менее в ряде случаев исходные уравнения все же будут удовлетворены. Это замечательные случаи, которые позволяют существенно упростить вычисления. Вместе с этим наличие редуцированного действия помогает в анализе свойств рассматриваемой модели.

Опишем достаточные условия для возможности подстановки (5.84) непосредственно в действие. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ действует группа Ли преобразований $\mathbb{G}$ справа:

$$\mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni \qquad x, g \mapsto xg \qquad \in \mathbb{M}.$$

Предположим, что набор полей $\varphi^a(x)$ при этом преобразуется по некоторому представлению $T(g)_a{}^b$ группы Ли $\mathbb{G}$:

$$\varphi'^a(xg) = \varphi^b(x) T(g)_b{}^a, \tag{5.86}$$

где штрихом обозначены новые поля на $\mathbb{M}$, полученные в результате действия группы преобразований $\mathbb{G}$. Поля $\varphi^a(x)$ называются $\mathbb{G}$-*инвариантными*, если в равенстве (5.86) можно убрать штрих в левой части. То есть выполнено условие

$$\varphi^a(xg) = \varphi^b(x) T(g)_b{}^a,$$

или

$$\varphi^a(x) = \varphi^b(xg^{-1}) T(g)_b{}^a. \tag{5.87}$$

Эти условия представляют собой уравнения, определяющие $\mathbb{G}$-инвариантные поля на многообразии $\mathbb{M}$.

Теорема 5.5.1 (Принцип Коулмана). *Пусть исходный функционал действия $S[\varphi]$ инвариантен относительно действия группы Ли преобразований* (5.86),

$$S[\varphi'] = S[\varphi].$$

*Допустим, что множество всех $\mathbb{G}$-инвариантных полей на $\mathbb{M}$ параметризуется некоторым набором функций $\psi^{\mathrm{A}}$, которые могут зависеть от меньшего числа координат и не определяются из уравнений* (5.87). *В результате $\mathbb{G}$-инвариантные функции будут представлены в виде* (5.84). *Тогда поля* (5.84), *построенные для стационарных точек редуцированного действия* (5.85), *будут удовлетворять уравнениям Эйлера–Лагранжа исходного действия.*

Это утверждение известно как *принцип Коулмана*. Оно было высказано Коулманом и проиллюстрировано на нескольких примерах [46] (см. также [47]). Строгое доказательство вместе с ограничениями на его применимость было дано в статье [48]. Этот результат затем был обобщен в работах [49, 50]. Другая его формулировка, на языке теории стратов, была дана еще до Коулмана [51]. В настоящее время доказано, что принцип Коулмана справедлив для всех компактных групп преобразований, полупростых групп, а также для унитарных представлений некомпактных групп.

# 6. Канонический формализм

Трудно переоценить роль канонического (гамильтонова) формализма в классической и квантовой механике, а также в теории поля. Он предоставляет наиболее мощные методы интегрирования уравнений движения и является основой для канонического квантования различных моделей математической физики. К его недостаткам относится явное нарушение Лоренц-инвариантности моделей теории поля, поскольку время в гамильтоновом формализме играет выделенную роль. Это усложняет вычисления, проводимые в рамках теории возмущений. Однако принципиальные вопросы, связанные с физической интерпретацией математических моделей, невозможно решить без обращения к гамильтоновой формулировке. В настоящей главе рассматривается канонический формализм для системы точечных частиц, формализм Дирака для систем со связями и его обобщение на теорию поля.

## 6.1. Канонический формализм в механике точечных частиц

В настоящем разделе мы во многом следуем [52].

**6.1.1. Преобразование Лежандра.** Рассмотрим *выпуклую функцию* $y = f(x)$ на интервале $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty$, т.е. функцию, у которой $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Преобразованием Лежандра функции $f$ на интервале $(a, b)$ называется новая функция $g(p)$ нового переменного $p$, которая строится следующим образом (см. рис. 6.1). Нарисуем на плоскости $x, y$ график функции $f$. Рассмотрим прямую $y = px$, где $p$ – фиксированное число.

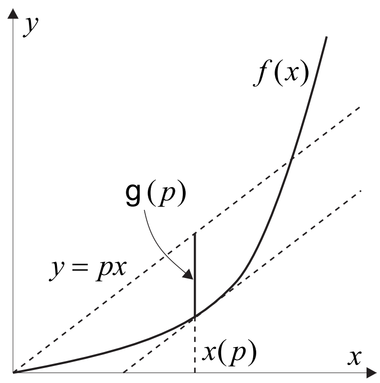


Рис. 6.1. Преобразование Лежандра $g(p)$ выпуклой функции $f(x)$

Найдем точку $x(p)$, в которой кривая дальше всего от прямой по вертикали, т.е. функция $F(x, p) := px - f(x)$ имеет максимум по $x$ при фиксированном $p$. Тогда, по определению, $g(p) := F\big(x(p), p\big)$. Функция $g(p)$ определена на некотором интервале $-\infty \leqslant c < p < d \leqslant \infty$.

Точка $x(p)$ определяется из условия экстремума $\partial F/\partial x = 0$ или

$$p = f'(x)$$

Ввиду выпуклости $f$, если это уравнение имеет решение, то оно единственно.

Пример 6.1.1. Нетрудно проверить, что функция $f(x) = \frac{mx^2}{2}$, $m = \mathsf{const} > 0$ выпукла на всей вещественной оси $x \in \mathbb{R}$ и $p = mx$. Ее преобразование Лежандра определено для всех

$p \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$g(p) = (xp - f)|_{x=p/m} = \frac{p^2}{2m}$$

Пусть функция $f$ достаточно гладкая. Тогда преобразование Лежандра переводит выпуклые функции в выпуклые. Это значит, что преобразование Лежандра можно применить дважды. Можно доказать [52], что преобразование Лежандра *инволютивно*, т.е. его квадрат равен тождественному преобразованию.

По определению, $F(x,p) := px - f(x) \leqslant g(p)$ для всех $x$ и $p$. Отсюда вытекает *неравенство Юнга*

$$px \leqslant f(x) + g(p)$$

Преобразование Лежандра без труда обобщается на функции нескольких переменных. Пусть $f(\boldsymbol{x})$ – выпуклая функция нескольких переменных $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, т.е. квадратичная форма $dx^\alpha dx^\beta \partial^2_{\alpha\beta} f$, $\alpha = 1, \dots, n$, положительно определена в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда преобразованием Лежандра называется функция $g(\boldsymbol{p})$ того же числа переменных $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$, которая строится аналогично случаю одного переменного:

$$g(\boldsymbol{p}) = F\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}\big) = \max_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}),$$

где

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) := x^\alpha p_\alpha - f(\boldsymbol{x}), \qquad \text{и} \qquad p_\alpha := \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$

Преобразование Лежандра $g(\boldsymbol{p})$ определено в некоторой окрестности $\boldsymbol{p} \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$, которая определяется исходной функцией $f(\boldsymbol{x})$.

В этом определении мы различаем верхние и нижние индексы по следующей причине. Поскольку $\boldsymbol{x}$ – точка многообразия $\mathbb{R}^n$, то индексы ее координат мы пишем сверху. По определению, $f$ – функция на $\mathbb{R}^n$. Поэтому набор переменных $p_\alpha$ определяет компоненты некоторого ковектора (1-формы). Отметим также, что в этом определении все координаты $x^\alpha$ равноправны.

Пример 6.1.2. Преобразованием Лежандра положительно определенной квадратичной формы

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta,$$

где $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ – постоянная матрица, снова является положительно определенная квадратичная форма

$$g = \big(x^\alpha p_\alpha - f(\boldsymbol{x})\big)\big|_{x^\alpha = g^{\alpha\beta} p_\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta,$$

где $g^{\alpha\beta}$ – матрица, обратная к $g_{\alpha\beta}$. При этом значения обеих форм в соответствующих точках совпадают:

$$f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})\big) = g(\boldsymbol{p}), \qquad g\big(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big) = f(\boldsymbol{x}).$$

Обе функции $f(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{p})$ определены на всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

**6.1.2. Гамильтонова динамика точечных частиц.** Механика точечных частиц может быть описана на двух эквивалентных языках: лагранжевом и гамильтоновом. Каждый подход имеет свои преимущества и недостатки. В лагранжевом подходе совокупность $\mathrm{N}$ частиц описывается обобщенными координатами $q^i(t)$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, зависящих от времени $t$. Если каждая частица движется в трехмерном пространстве, то $q^i$ представляет собой трехмерный вектор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ для каждого значения индекса $i$. Для определенности будем считать, что каждая частица движется в одномерном пространстве. Тогда совокупность всех координат $q^i$ можно также рассматривать, как координаты одной частицы в *конфигурационном* пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Размерность конфигурационного пространства называется *числом степеней свободы* механической системы. Говорят, что механическая система имеет $\mathrm{N}$ степеней свободы.

Для простоты обозначений условимся считать, что символ с индексом $q^i$ обозначает $i$-ю координату частицы, а по повторяющимся индексам производится суммирование. Если индекс отсутствует, то символ $q$ обозначает весь набор координат $q := (q^1, \dots, q^{\mathrm{N}})$. В лагранжевом подходе уравнения движения имеют второй порядок, поэтому будем рассматривать дважды непрерывно дифференцируемые функции $q^i \in \mathcal{C}^2\big([t_1, t_2]\big)$ для всех $i$ на конечном отрезке $[t_1, t_2]$.

Предположим, что механическая система описывается некоторым действием

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t), \tag{6.1}$$

где функция Лагранжа или лагранжиан $L(q, \dot q, t)$ зависит только от обобщенных координат $q$ и их первых производных по времени $\dot q$, которые называются обобщенными *скоростями*. Рассмотрим вариационную задачу с фиксированными граничными условиями

$$q(t_1) = q_1, \qquad q(t_2) = q_2, \tag{6.2}$$

т.е. траектория механической системы представляет собой кривую в конфигурационном пространстве, которая соединяет две фиксированные точки $q_1$ и $q_2$. Тем самым вариации координат на концах интервала обращаются в нуль.

Обычно предполагают, что конфигурационное пространство представляет собой евклидово пространство $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ с заданной метрикой $\delta_{ij}$, а обобщенные координаты – это декартовы координаты в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Кроме того, мы предполагаем, что лагранжиан в действии (6.1) представляет собой функцию (скалярное поле) от своих аргументов. Поэтому метрика необходима для построения инвариантов из координат $q^i$ и скоростей $\dot q^i$, и она входит в действие. В этом действии евклидова метрика рассматривается как внешнее поле, и по ней варьирование не проводится. Конечно, после того как задача поставлена, действие можно переписать в произвольной криволинейной системе координат в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Тогда обобщенные координаты $q^i$ станут криволинейными координатами в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, а компоненты евклидовой метрики $g_{ij}(x)$ будут нетривиальными функциями от $x$. Действие по этим компонентам не варьируется.

Замечание. При рассмотрении движения механической системы, естественная линейная структура в $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ не играет никакой роли и нигде не используется. Важно только наличие метрики. В общем случае можно считать, что конфигурационное пространство – это произвольное риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ с заданной метрикой $g$, которая необходима для построения инвариантов. Действие в этом случае будет зависеть от метрики, которая рассматривается как внешнее поле, и по ней варьирование не проводится. Заметим также, что задание лагранжиана ничего не говорит о глобальном устройстве конфигурационного пространства. Для того чтобы задать глобальное устройство $\mathbb{M}$, необходимо сделать какие-либо дополнительные предположения. В дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, топологически тривиальные конфигурационные пространства, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, с естественной топологией.

Уравнения Эйлера–Лагранжа (уравнения движения) для действия (6.1),

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} = 0, \tag{6.3}$$

представляют собой систему уравнений не выше второго порядка. Функции $q^i(t)$, удовлетворяющие уравнениям Эйлера–Лагранжа, соответствуют стационарным точкам действия (6.1).

Они определяют *траекторию* механической системы. Траектории частиц не зависят от выбора координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, которые выбираются из соображений удобства.

Как правило, решение системы уравнений движения (6.3) содержит $2\mathrm{N}$ произвольных постоянных, которые находятся из граничных условий (6.2). У краевой задачи решение может не существовать, а если оно существует, то может не быть единственным. Вместо краевой задачи можно также поставить задачу Коши, которая имеет единственное решение при корректной постановке. В этом случае произвольные постоянные, возникающие в решении уравнений движения, находятся из начальных данных для $q$ и $\dot q$ в начальный момент времени $t = 0$. Именно эта задача наиболее часто ставится в физических приложениях для уравнений движения (6.3).

Перейдем к гамильтонову или каноническому формализму. В этом случае механическая система, состоящая из $\mathrm{N}$ частиц, описывается $\mathrm{N}$ обобщенными координатами $q^i$ и $\mathrm{N}$ обобщенными импульсами

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}, \tag{6.4}$$

которые рассматриваются как независимые переменные. Обобщенные координаты и импульсы являются координатами механической системы в $2\mathrm{N}$-мерном *фазовом* пространстве. Мы говорим, что координаты и импульсы являются *канонически сопряженными* переменными.

Предположим, что конфигурационное пространство с координатами $q^i$ является $\mathrm{N}$-мерным многообразием $\mathbb{M}$. Тогда производные $\dot q^i$ являются компонентами касательного вектора вдоль траектории частицы. Это значит, что лагранжиан $L(q, \dot q)$ является функцией (скалярным полем) на касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. Тогда формула (6.4) определяет компоненты ковариантного вектора (1-формы). Это значит, что фазовое пространство есть ни что иное, как кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$ к конфигурационному пространству $\mathbb{M}$.

Поскольку $q^i$ и $p_i$ являются координатами в базе и в кокасательном слое, то мы пишем координатные индексы, соответственно, вверху и внизу.

Предположим, что функция Лагранжа $L(q, \dot q)$ выпукла по скоростям, т.е. квадратичная форма

$$\partial^2 L / \partial \dot q^i \partial \dot q^j, \tag{6.5}$$

которая называется *гессианом*, положительно определена. Это условие не является ковариантным относительно произвольной замены координат на касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. Однако оно ковариантно относительно общих преобразований координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{M}$. Действительно, при замене координат $q \mapsto q'(q)$ скорости преобразуются как векторы:

$$\dot q^i \mapsto \dot q'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} \dot q^j .$$

Поскольку якобиан преобразования $\partial q'^i / \partial q^j$ не зависит от скоростей, то гессиан преобразуется как ковариантный тензор второго ранга:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^i \partial \dot q^j} \mapsto \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q'^i \partial \dot q'^j} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial}{\partial \dot q^k} \left( \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \frac{\partial L}{\partial \dot q^l} \right) = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^l}{\partial q'^j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^k \partial \dot q^l}.$$

Таким образом, свойство выпуклости лагранжиана по скоростям не зависит от выбора координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{M}$.

Замечание. Рассмотрим координаты $q$ и время $t$ в определении обобщенных импульсов (6.4) как параметры. Тогда формулы (6.4) задают скорости $\dot q$ как неявные функции обобщенных импульсов $p$. Из курса математического анализа известно, что уравнения (6.4) локально разрешимы относительно скоростей тогда и только тогда, когда гессиан (6.5), который в данном случае совпадает с якобианом преобразования координат $\dot{q} \mapsto p$, является невырожденной матрицей.

Если функция Лагранжа выпукла по скоростям, то можно построить ее преобразование Лежандра (по скоростям):

$$H(q,p) := p_i \dot{q}^i - L(q,\dot{q}), \tag{6.6}$$

которое называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* системы. В силу определения преобразования Лежандра гамильтониан системы зависит только от обобщенных координат и импульсов. Это можно проверить и непосредственно

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0,$$

что следует из определения обобщенных импульсов (6.4).

Используя связь между гамильтонианом и лагранжианом (6.6), рассмотрим действие

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( p_i \dot{q}^i - H(q,p) \right) \tag{6.7}$$

как функционал от канонически сопряженных координат и импульсов. Соответствующая система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0, \tag{6.8}$$

$$\frac{\delta S}{\delta p_i} = \quad \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \tag{6.9}$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{N}$ уравнений Эйлера–Лагранжа второго порядка (6.3) эквивалентны $2\mathrm{N}$ уравнениям первого порядка (6.8). Понижение порядка уравнений движения произошло за счет введения новых независимых переменных – импульсов.

Поскольку конфигурационное и фазовое пространства имеют разную размерность, то уточним понятие эквивалентности. Для однозначного определения траектории частицы $q(t)$ в конфигурационном пространстве необходимо решить уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка (6.3), например, с начальными условиями $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = q_1$. Траектория движения в фазовом пространстве $q(t), p(t)$ однозначно находится решением уравнений движения первого порядка (6.8), (6.9) с начальными условиями $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$. Каждая траектория в фазовом пространстве естественным образом проектируется на траекторию в конфигурационном пространстве $\{q(t), p(t)\} \mapsto \{q(t)\}$, при этом начальное условие для скорости $q_1$ определяется из уравнения (6.9). Обратно. Для любой траектории в конфигурационном пространстве $q(t)$ уравнение (6.9) определяет импульсы $p(t)$ и начальные условия $p_0$ так, что пара $q(t), p(t)$ является траекторией в фазовом пространстве. Здесь мы предполагаем, что уравнение (6.9) имеет единственное решение для $p$ (в противном случае преобразование Лежандра не определено).

При постановке граничной задачи для действия (6.7) мы не можем рассматривать траектории, соединяющие две произвольные точки $(q_1, p_1)$ и $(q_2, p_2)$ фазового пространства, так как тогда возникнет $4\mathrm{N}$ условий для $2\mathrm{N}$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (6.8), (6.9). В этом случае количество граничных условий превышает количество уравнений, и задача может не иметь решения. Поэтому можно рассматривать, например, те траектории, которые имеют начало и конец на $\mathrm{N}$-мерных подмногообразиях фазового пространства, определяемых условиями (6.2), как и в лагранжевом подходе. При этом никаких граничных условий на импульсы не возникает, поскольку они входят в подынтегральное выражение без производных, и при вариации импульсов интегрирования по частям не происходит.

Замечание. Как правило, для уравнений Эйлера–Лагранжа в фазовом пространстве ставится задача Коши, которая имеет единственное решение. При этом начальной точкой траектории может быть произвольная точка фазового пространства $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) = \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$. Тем самым мы предполагаем, что фазовое пространство, так же как и конфигурационное пространство, топологически тривиально. Обсуждение области определения различных функций в конфигурационном и фазовом пространствах требует знания явного вида лагранжиана, гамильтониана и анализа уравнений движения. Поскольку в общем случае учесть все возможности нельзя, то в дальнейшем при обсуждении общей схемы все рассматриваемые функции будут считаться определенными на всем фазовом пространстве и достаточно гладкими. В каждом конкретном случае области определения должны быть проанализированы, а постановка задачи уточнена.

Посмотрим на уравнения (6.8), (6.9) с другой точки зрения. Пусть заданы две функции от канонических переменных $f(q,p)$ и $g(q,p)$, т.е. два скалярных поля на фазовом пространстве. Определим для них *скобку Пуассона*

$$[f,g] := \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{6.10}$$

Легко проверить, что она обладает следующими свойствами:

1) $[af+bg,h] = a[f,g]+b[g,h], \quad a,b\in\mathbb{R}$ – линейность,
2) $[f,g] = -[g,f]$ – антисимметрия,
3) $[f,gh] = [f,g]h + g[f,h]$ – правило Лейбница,
4) $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$ – тождество Якоби,

и, следовательно, определяет пуассонову структуру на фазовом пространстве (см. раздел 4.3).

Скобку Пуассона (6.10) можно переписать в эквивалентном виде. Обозначим координаты фазового пространства через $\{x^\alpha\} := (q^1\dots q^{\mathrm{N}}, p_1\dots p_{\mathrm{N}})$, $\alpha = 1,\dots,2\mathrm{N}$, или, короче, $x = (q,p)$. Тогда

$$[f,g] = \varpi^{-1\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}, \tag{6.11}$$

где

$$\varpi^{-1\alpha\beta} = [x^\alpha, x^\beta] = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

– каноническая пуассонова структура. Каноническая форма $\varpi$ невырождена и точна, $d\varpi = 0$, поскольку ее компоненты постоянны. Поэтому фазовое пространство представляет собой также симплектическое многообразие (см. раздел 4.2).

Рассмотрим простейшие свойства скобки Пуассона. Очевидно, скобки Пуассона произвольной функции $f$ с самой собой и константой $c$ равны нулю:

$$[f,f] = 0, \qquad [f,c] = 0.$$

Из определения (6.10) следует, что скобка Пуассона обобщенной координаты с импульсом равна символу Кронекера:

$$[q^i, p_j] = \delta^i_j. \tag{6.12}$$

Рассмотрим траекторию в фазовом пространстве $q(t)$, $p(t)$, где $t\in\mathbb{R}$. Тогда, используя скобку Пуассона, уравнения движения (6.8), (6.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot q^i &= [q^i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot p_i &= [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

При этом скобка Пуассона для координат фазового пространства (6.12) рассматривается как одновременная:

$$[q^i(t), p_j(t)] = \delta^i_j, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.14}$$

Скобка Пуассона для различных моментов времени $[q^i(t_1), p_j(t_2)]$ при $t_1 \neq t_2$ не определена. Вообще, эволюция во времени любой функции $f(t, q, p)$, зависящей от времени и канонических переменных определяется уравнением

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]. \tag{6.15}$$

В частности, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] = 0,$$

ввиду антисимметрии скобки Пуассона. Это значит, что для заданной траектории механической системы в фазовом пространстве гамильтониан является интегралом движения и его численное значение сохраняется. Это значение называется *энергией* механической системы и определяется начальными данными. Системы, у которых гамильтониан не зависит от времени, называются *консервативными*.

Пример 6.1.3 (гармонический осциллятор с затуханием). Рассмотрим функцию Лагранжа для одной точечной частицы (осциллятора), которая явно зависит от времени

$$L = \frac{1}{2}\,\mathsf{e}^{2\mu t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \qquad \mu, \omega = \mathsf{const}.$$

Постоянные $\omega$ и $\mu$ называются соответственно собственной частотой и коэффициентом затухания осциллятора. Обобщенный импульс частицы равен

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mathsf{e}^{2\mu t}\dot{q}.$$

Гамильтониан осциллятора также зависит от времени явно:

$$H = \frac{1}{2}\,\mathsf{e}^{-2\mu t}p^2 + \frac{1}{2}\,\mathsf{e}^{2\mu t}\omega^2 q^2.$$

Гамильтоновы и лагранжевы уравнения движения для осциллятора с затуханием имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \quad \mathsf{e}^{-2\mu t}p, \\ \dot{p} &= -\,\mathsf{e}^{2\mu t}\omega^2 q, \end{aligned}\right\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathsf{e}^{2\mu t}(\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \omega^2 q) = 0.$$

Общее решение этих уравнений параметризуется двумя постоянными: начальной амплитудой $A_0$ и фазой $\varphi$,

$$q = A_0\,\mathsf{e}^{-\mu t}\cos(\tilde{\omega}t + \varphi), \qquad \tilde{\omega}^2 := \omega^2 - \mu^2.$$

Произвольная фаза $\varphi$ соответствует произволу в выборе начала отсчета времени, и в дальнейшем мы положим $\varphi = 0$. Амплитуда колебаний $A_0\,\mathsf{e}^{-\mu t}$ экспоненциально затухает, если $\mu > 0$. Затухающие колебания происходят с частотой, меньшей собственной частоты осциллятора $\tilde{\omega} < \omega$. Для произвольной траектории численное значение гамильтониана зависит от времени явно:

$$H = \frac{1}{2}A_0^2\omega^2\left[1 - \frac{1}{2}\cos 2\tilde{\omega}t - \frac{1}{2}\cos(2\tilde{\omega}t + 2\psi)\right],$$

где $\cos\psi := \mu/\omega$.

Функция канонических переменных $f(q,p)$ называется *интегралом движения*, если

$$f(q,p) = \mathsf{const}$$

для любого решения канонических уравнений движения, т.е. является интегралом уравнений движения.

Теорема 6.1.1. *Если известны два интеграла движения $f$ и $g$, то их скобка Пуассона $[f,g]$ также является интегралом движения.*

Доказательство. Прямая проверка равенства $d[f,g]/dt = 0$.

Замечание. Теорема не гарантирует того, что вычисление скобки Пуассона двух интегралов движения дает новый интеграл движения. Часто она или равна нулю, или интегралы движения $f$, $g$ и $[f,g]$ – функционально зависимы.

Если гамильтониан не зависит от какой-либо из координат, например, от $q^1$, т.е. $\partial H/\partial q^1 = 0$, то эта координата называется *циклической*, а соответствующий обобщенный импульс сохраняется в силу второго уравнения (6.13)

$$p_1 = c = \mathsf{const}.$$

При этом изменение остальных координат и импульсов во времени такое же, как в системе с координатами $q^2, \dots, q^{\text{N}}$, импульсами $p_2, \dots, p_{\text{N}}$ и функцией Гамильтона $H(q^2, \dots, q^{\text{N}}, c, p_2, \dots, p_{\text{N}})$.

В большинстве физических приложений для системы уравнений Гамильтона (6.13) решается задача Коши, т.е. ищется решение системы уравнений (6.13) с заданными начальными условиями:

$$q(0) = q_0, \qquad p(0) = p_0. \tag{6.16}$$

Канонические уравнения движения (6.13) можно также записать в виде

$$\dot{x} = X,$$

где $x = (q,p)$, а правая часть уравнений определяются векторным полем

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

на фазовом пространстве. С геометрической точки зрения решение уравнений Гамильтона с заданными начальными условиями задает интегральную кривую этого векторного поля, проходящую через точку (6.16). Интегральные кривые векторного поля задают абелеву однопараметрическую группу преобразований многообразия, которым в данном случае является фазовое пространство. Эта группа преобразований в гамильтоновой динамике имеет специальное название.

Определение. *Фазовым потоком* называется однопараметрическая группа преобразований фазового пространства

$$s_t : \quad \mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \ni \qquad q(0), p(0) \mapsto q(t), p(t) \qquad \in \mathbb{T}^*(\mathbb{M}),$$

где $q(t), p(t)$ – решение системы уравнений Гамильтона (6.13).

**6.1.3. Потенциальное движение точечной частицы.** Потенциальное движение точечной частицы массы $m$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ с декартовыми координатами $q^i$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, описывается следующей функцией Лагранжа

$$L = m\frac{\dot{q}^i\dot{q}_i}{2} - U(q), \tag{6.17}$$

где $U(q) \geqslant 0$ – некоторая положительно определенная функция координат. В настоящем разделе подъем и опускание индексов производится с помощью евклидовой метрики $\delta_{ij} = \mathsf{diag}\,(+\dots+)$. Уравнения движения (*уравнения Ньютона*) при этом имеют вид

$$m\ddot{q}^i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{6.18}$$

Это – система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их решение зависит от $2\mathrm{N}$ произвольных постоянных. Для их определения решают, как правило, задачу Коши. То есть ищется решение уравнений (6.18) с заданными начальными условиями:

$$q(0) = q_0, \qquad \dot{q}(0) = v_0.$$

В физических приложениях функции $U(q)$ обычно таковы, что решение этой задачи существует, единственно и определено при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Заметим, что потенциальная энергия определена с точностью до постоянной, которая не влияет на уравнения движения.

Если потенциальная энергия имеет локальный экстремум в точке $q_0$, то

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q^i}\right|_{q=q_0} = 0.$$

Следовательно, постоянная траектория $q = q_0$ удовлетворяет системе уравнений (6.18). Таким образом, локальные экстремумы потенциальной энергии определяют положения равновесия частицы. Эти положения могут быть устойчивы или не устойчивы по отношению к малым возмущениям в зависимости от того является ли локальный экстремум минимумом или максимумом потенциальной энергии. Для положительно определенной потенциальной энергии существует по крайней мере одна точка равновесия – глобальный минимум.

Посмотрим на эту задачу с точки зрения принципа наименьшего действия. Во-первых, действие

$$S[q] = \int dt \left(m\frac{\dot{q}^i\dot{q}_i}{2} - U(q)\right)$$

не является положительно определенным. Поэтому нужно говорить не о минимуме действия, а только о стационарных точках. Во-вторых, для свободного движения, $U = 0$, траектории представляют собой прямые линии

$$q = v_0 t + q_0,$$

по которым частица движется с постоянной скоростью $v_0$. Соответствующее действие при интегрировании по бесконечному интервалу расходится и говорить даже о стационарности действия в этом случае не имеет смысла. Подытожить сделанные замечания можно следующим образом. Потенциальное движение точечной частицы происходит таким образом, что для каждого конечного интервала времени $(t_1, t_2)$ действие стационарно среди всех возможных траекторий, соединяющих точки $q_1$ и $q_2$. При этом первую граничную точку можно выбрать произвольным образом, а вторая должна быть такой, чтобы задача Коши, поставленная в первой точке, имела решение для некоторой скорости $\dot{q}_1 = v_0$.

Переформулируем потенциальное движение точечной частицы на гамильтоновом языке. Компоненты импульса и гамильтониан точечной частицы равны

$$
\begin{aligned}
p_i &= m\dot{q}_i, \\
H &= \frac{p^i p_i}{2m} + U(q).
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Гамильтоновы уравнения движения принимают вид

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \frac{p^i}{m}, \\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial U}{\partial q^i},
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

которые эквивалентны уравнениям Ньютона (6.18). Заметим, что в данном случае первое уравнение совпадает с определением импульса частицы.

Гамильтониан точечной частицы (6.19) положительно определен и для заданной траектории его значение (энергия) постоянно. Первое и второе слагаемые в (6.19) называются соответственно *кинетической* и *потенциально* энергией точечной частицы. Следующий пример показывает, что функция Гамильтона зависит от выбора системы координат в фазовом пространстве, а каноническая пуассонова структура – нет.

Пример 6.1.4. Рассмотрим частицу массы $m$, которая движется в трехмерном конфигурационном пространстве $q \in \mathbb{R}^3$ с заданным потенциалом $U$. Гамильтониан является функцией на фазовом пространстве и в произвольной криволинейной системе координат имеет вид

$$
H = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j + U(q),
$$

где $g^{ij} = g^{ij}(q)$ – обратная метрика в выбранной системе отсчета. Например, в декартовых координатах $x, y, z$

$$
H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x, y, z).
$$

В цилиндрических координатах $r, \varphi, z$

$$
H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z).
$$

В сферических координатах $r, \theta, \varphi$

$$
H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi).
$$

Каноническая пуассонова структура была определена в произвольной, в общем случае криволинейной, системе координат. Проверим корректность этого определения относительно преобразования координат, поскольку при переходе от одной системы координат к другой структурные функции могли бы измениться. Допустим, что мы определили каноническую пуассонову структуру в декартовой системе координат. В рассматриваемом случае преобразование координат имеет вид $q, p \mapsto Q(q), P(q, p)$, где большие буквы обозначают криволинейные (сферические или цилиндрические) координаты в конфигурационном пространстве. Скобки Пуассона новых координат и импульсов равны:

$$
\begin{aligned}
[Q^i, Q^j] &= 0, \\
[Q^i, P_j] &= \frac{\partial Q^i}{\partial q^k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}, \\
[P_i, P_j] &= \frac{\partial P_i}{\partial q^k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q^k}.
\end{aligned}
$$

Поскольку компоненты обобщенных импульсов являются компонентами ковектора, то они преобразуются по правилу

$$P_i = \frac{\partial q^k}{\partial Q^i} p_k.$$

Теперь нетрудно проверить выполнение скобок Пуассона:

$$[Q^i, P_j] = \delta^i_j, \qquad [Q^i, Q^j] = 0, \qquad [P_i, P_j] = 0.$$

Таким образом, структурные функции имеют канонический вид и не зависят от выбора системы координат в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассматриваемые преобразования координат $q, p \mapsto Q, P$ в фазовом пространстве относятся к классу канонических преобразований, которые будут рассмотрены позже в разделе 6.1.10.

Определение. Преобразование координат $q = q(Q)$ конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ называется *точечным*.

**6.1.4. Лемма Стокса.** В этом и следующих разделах механика частиц будет рассмотрена с более общей точки зрения. Начнем с геометрического рассмотрения, которое затем применим к гамильтоновой динамике точечных частиц. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ нечетной размерности $\dim \mathbb{M} = 2\mathrm{N} + 1$ задана 2-форма

$$B = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta B_{\alpha\beta}.$$

Поскольку матрица, задающая 2-форму в локальной системе координат антисимметрична, $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$, а многообразие нечетномерно, то ее определитель равен нулю. Это значит, что в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ у нее существует по крайней мере один нетривиальный собственный вектор $X = X^\alpha \partial_\alpha$ с нулевым собственным значением. Отсюда вытекает, что для 2-формы $B$ существует *нулевое* векторное поле $X$ со свойством

$$B(X, Y) = X^\alpha Y^\beta B_{\alpha\beta} = 0, \qquad \forall\, Y = Y^\alpha \partial_\alpha.$$

Пространство нулевых векторных полей линейно.

Определение. 2-форма называется *неособой*, если размерность пространства нулевых векторов минимальна, т.е. равна нулю или единице на многообразиях четной и нечетной размерности соответственно.

Пример 6.1.5. Рассмотрим 2-форму $\varpi$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с координатами $x = (x^1 \dots x^{2\mathrm{N}}) = (q^1 \dots q^{\mathrm{N}}, p_1 \dots p_{\mathrm{N}})$,

$$\varpi = dp_i \wedge dq^i = dx^{\mathrm{N}+1} \wedge dx^1 + dx^{\mathrm{N}+2} \wedge dx^2 + \dots + dx^{2\mathrm{N}} \wedge dx^{\mathrm{N}} = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \varpi_{\alpha\beta}, \tag{6.21}$$

где $\varpi$ – каноническая симплектическая форма (4.1). Эта форма неособа, так как ее определитель равен единице $\det \varpi_{\alpha\beta} = 1$ и размерность пространства нулевых векторов равна нулю.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = 2\text{N} + 1$, задана 1-форма $A = dx^\alpha A_\alpha$. Предположим, что внешний дифференциал этой формы является неособым. Это значит, что в каждой точке многообразия $x \in \mathbb{M}$ существует единственный, с точностью до умножения на постоянную, нулевой вектор $X$ такой, что

$$dA(X, Y) = 0, \qquad \forall\, Y. \tag{6.22}$$

Тем самым 1-форма $A$ определяет нулевое векторное поле $X$ на $\mathbb{M}$ с точностью до умножения на отличную от нуля функцию. Назовем интегральные кривые $x^\alpha(t)$,

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha,$$

нулевого векторного поля *характеристиками* формы $A$. Далее, пусть $\gamma_1$ – замкнутая кривая на $\mathbb{M}$, которая ни в одной своей точке не касается характеристик. Тогда множество характеристик, выходящих из точек кривой $\gamma_1$, образует *трубку характеристик*. Трубка характеристик определена по крайней мере в некоторой окрестности кривой $\gamma_1$.

Лемма 6.1.1 (Стокс). *Интеграл от* 1*-формы* $A$ *с неособым внешним дифференциалом* $dA$ *по любой из двух замкнутых кривых* $\gamma_1$ *и* $\gamma_2$, *охватывающих одну и ту же трубку характеристик, одинаков*:

$$\oint_{\gamma_1} A = \oint_{\gamma_2} A,$$

*если* $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial S$, *где* $S$ *– часть трубки характеристик.*

Доказательство. По формуле Стокса справедливы равенства

$$\oint_{\gamma_1} A - \oint_{\gamma_2} A = \oint_{\partial S} A = \int_S dA.$$

Этот интеграл обращается в нуль, так как значение формы $dA$ на любой паре векторов, касательных к трубке характеристик, равен нулю в силу (6.22).

**6.1.5. Канонические уравнения Гамильтона.** Из безобидной, на первый взгляд, леммы Стокса непосредственно вытекают все основные положения гамильтоновой динамики. Предположим, что механической системе соответствует топологически тривиальное фазовое пространство $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^\text{N}) \approx \mathbb{R}^{2\text{N}}$. Рассмотрим *расширенное фазовое пространство* $\mathbb{R}^{2\text{N}+1}$ с координатами $q^1, \dots, q^\text{N}$, $p_1, \dots, p_\text{N}, t$, в котором время $t$ рассматривается как независимая дополнительная координата.

Замечание. Предположение о том, что частица движется в тривиальном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^\text{N}$ и, следовательно, в тривиальном фазовом пространстве $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^\text{N}) \approx \mathbb{R}^{2\text{N}}$ не означает, что приведенные ниже формулы справедливы только для движения в топологически тривиальных пространствах. Данное предположение просто означает, что мы рассматриваем механическую систему в определенной карте. При движении частицы по нетривиальному многообразию необходимо дополнительно проследить за склейкой карт. В дальнейшем мы не будем обсуждать этот вопрос.

Пусть на расширенном фазовом пространстве задана некоторая функция Гамильтона $H(q, p, t)$. Определим 1-форму на расширенном фазовом пространстве

$$A := dq^i p_i - dtH. \tag{6.23}$$

Эта форма называется *интегральным инвариантом Пуанкаре–Картана*. Точнее, интегральный инвариант получается после интегрирования формы $A$ по замкнутому контуру в расширенном фазовом пространстве. Смысл названия будет ясен из дальнейшего рассмотрения.

Внешний дифференциал 1-формы (6.23) является неособым, так как каноническая форма $\varpi = dp_i \wedge dq^i$ неособа.

Теорема 6.1.2. *Характеристики формы $A$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$ однозначно проектируются на фазовое пространство $q, p$, т.е. задаются функциями $q(t)$, $p(t)$. Эти функции удовлетворяют уравнениям Гамильтона*:

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

*Другими словами, характеристики формы $A$ представляют собой траектории фазового потока в расширенном фазовом пространстве, т.е. интегральные кривые канонических уравнений* (6.24).

Доказательство. Дифференциал формы (6.23) равен

$$dA = dp_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt$$

Эта 2-форма неособа, так как ранг матрицы, составленной из ее координат, равен $2\mathrm{N}$. Прямая подстановка показывает, что вектор

$$X = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{6.25}$$

является нулевым вектором формы $A$:

$$dA(X, Y) = -\frac{\partial H}{\partial q^i} Y^i - Y_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} Y^0 \frac{\partial H}{\partial q^i} + Y^i \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial q^i} Y^0 \frac{\partial H}{\partial p_i} + Y_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0.$$

Это значит, что векторное поле (6.25) задает направление характеристик 1-формы (6.23). С другой стороны, вектор (6.25) является вектором скорости фазового потока (6.24). Действительно, интегральные кривые $\{q(\tau), p(\tau), t(\tau)\}$ в расширенном фазовом пространстве задаются уравнениями

$$\frac{dq^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad \frac{dt}{d\tau} = 1. \tag{6.26}$$

В силу последнего уравнения они однозначно проектируются на фазовое пространство. Таким образом, интегральные кривые (6.24) представляют собой проекции характеристик формы (6.23) на фазовое пространство.

Применим теперь лемму Стокса к интегральному инварианту Пуанкаре–Картана.

Теорема 6.1.3. *Пусть две замкнутые кривые $\gamma_1$ и $\gamma_2$ охватывают одну и ту же трубку характеристик формы* (6.23). *Тогда интегралы по ним от интегрального инварианта Пуанкаре–Картана одинаковы*:

$$\oint_{\gamma_1} \big(dq\, p - dtH\big) = \oint_{\gamma_2} \big(dq\, p - dtH\big).$$

Именно поэтому 1-форма $dqp - dtH$ называется интегральным инвариантом.

В частном случае, когда замкнутые кривые лежат в фазовом подпространстве, соответствующем постоянному значению времени, $t = \mathsf{const} \Leftrightarrow dt = 0$, получаем

Следствие. Фазовый поток сохраняет интеграл

$$\oint_\gamma dq\, p$$

вдоль произвольной замкнутой кривой в фазовом пространстве.

Форма $dq\, p := dq^i p_i$ в фазовом пространстве называется *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре* или *формой Лиувилля.* Точнее, интегральный инвариант получается после интегрирования формы Лиувилля по замкнутому контуру $\gamma$. Он имеет простой геометрический смысл. Пусть $S$ – двумерная ограниченная ориентированная поверхность с кусочно гладкой границей такая, что $\partial S = \gamma$, тогда по формуле Стокса

$$\oint_\gamma dqp = \int_S dp \wedge dq,$$

где $dp \wedge dq := dp_i \wedge dq^i$. Отсюда вытекает

Следствие. Фазовый поток $s_t := \mathsf{exp}\,(tX_H)$ сохраняет сумму ориентированных площадей проекций поверхности на $\mathrm{N}$ координатных плоскостей $q^i, p_i$:

$$\int_S dp \wedge dq = \int_{s_t S} dp \wedge dq.$$

В этом смысле каноническая 2-форма $\varpi = dp \wedge dq$ является абсолютным интегральным инвариантом фазового потока $s_t$.

Замечание. Эпитеты "относительный" и "абсолютный" интегральный инвариант не несут глубокого смысла. Исторически сложилась так, что относительным называют инвариант, полученный после интегрирования по замкнутому (компактному и без края) многообразию. Абсолютным называют инвариант, возникающий после интегрирования некоторой формы по компактному многообразию с краем.

**6.1.6. Принцип Мопертюи.** В приложениях часто встречаются гамильтонианы, не зависящие от времени явно $H = H(q, p)$. В этом случае численное значение гамильтониана (энергия) на фазовой траектории сохраняется

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] = 0.$$

Покажем, что наличие интеграла энергии позволяет понизить размерность расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$ на две единицы и свести задачу к интегрированию некоторой системы канонических уравнений в $(2\mathrm{N} - 1)$-мерном пространстве.

Предположим, что в некоторой области фазового пространства уравнение

$$H(q, p) = E$$

можно решить относительно $p_1$:

$$p_1 = K(Q, P, T; E),$$

где $Q := (q^2, \dots, q^{\mathrm{N}})$, $P := (p_2, \dots, p_{\mathrm{N}})$ и $T := -q^1$. Тогда

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT - d(Ht) + tdH. \tag{6.27}$$

Пусть $\gamma$ – интегральная кривая канонических уравнений (6.24). Она лежит на $2\mathrm{N}$-мерном подмногообразии $H(q,p) = E$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$. Спроектируем расширенное фазовое пространство на фазовое пространство $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$. При этом поверхность $H = E$ проектируется на $(2\mathrm{N} - 1)$-мерное подмногообразие $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$ фазового пространства, которое определяется тем же уравнением $H = E$, а кривая $\gamma$ – на кривую $\bar\gamma$, лежащую на этом подмногообразии. Переменные $Q, P, T$ образуют локальную систему координат на $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$. Но характеристики формы $PdQ - KdT$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона, поскольку $dH = 0$ на $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$, а полный дифференциал $d(Ht)$ в (6.27) не влияет на уравнения движения. Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 6.1.4. *Если гамильтониан не зависит от времени явно, то фазовые траектории канонических уравнений* (6.24) *на подмногообразии* $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$ *фазового пространства, определяемом уравнением* $H(q,p) = E$, *удовлетворяют каноническим уравнениям*

$$\frac{dq^i}{dq^1} = -\frac{\partial K}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dq^1} = \frac{\partial K}{\partial q^i}, \qquad i = 2, \dots, \mathrm{N}, \tag{6.28}$$

*где функция* $K(q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, p_2, \dots, p_{\mathrm{N}}, E)$ *определяется уравнением*

$$H(q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, K, p_2, \dots, p_{\mathrm{N}}) = E.$$

Замечание. В этой теореме роль времени играет первая координата $q^1$, и канонические уравнения определяют не динамику системы, а форму траектории.

Покажем, каким образом канонические уравнения Гамильтона связаны с принципом наименьшего действия. Рассмотрим интегральную кривую уравнений (6.26) в расширенном фазовом пространстве $(q, p, t)$, соединяющую две точки $(q_0, p_0, t_0)$ и $(q_1, p_1, t_1)$.

Теорема 6.1.5. *Кривая* $\gamma$ *является стационарной точкой интеграла*

$$\int_\gamma (dq\, p - dtH) \tag{6.29}$$

*при таких вариациях* $\gamma$, *когда концы кривой остаются на* $\mathrm{N}$-*мерных подмногообразиях* $(q = q_0, t = t_0)$ *и* $(q = q_1, t = t_1)$.

Доказательство. В силу третьего уравнения (6.26) вариацию интеграла (6.29) можно записать как вариацию функционала действия

$$\delta \int_\gamma dt(p\dot q - H) = p\delta q\Big|_{q_0}^{q_1} + \int_\gamma dt \left[\left(\dot q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\delta q^i\right].$$

Отсюда вытекает, что для исчезновения граничных вкладов достаточно зафиксировать только значения обобщенных координат при $t = t_{0,1}$.

Понижение размерности расширенного фазового пространства при гамильтониане, не зависящем от времени, позволяет по новому взглянуть и в определенной степени оправдать употребление термина “принцип наименьшего действия” в механике. Фазовые траектории исходных канонических уравнений (6.24) целиком лежат на подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$, $\dim \mathbb{M} = 2\mathrm{N} - 1$, соответствующем фиксированному значению энергии, и являются характеристиками формы $dq\, p = dQP - dTK$. Отсюда следует

Теорема 6.1.6. *Если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то фазовые траектории канонических уравнений (6.24), лежащие на подмногообразии* $\mathbb{M}^{2n-1}$, *соответствующем фиксированному значению энергии* $H(q,p)=E$, *являются стационарными точками интеграла*

$$\int dq\, p$$

*в классе кривых, лежащих на* $\mathbb{M}^{2\mathrm{N}-1}$ *и соединяющих подпространства* $q=q_0$ *и* $q=q_1$.

Рассмотрим теперь проекцию экстремали, лежащую на подмногообразии постоянной энергии $\mathbb{M}$ на конфигурационное пространство. Эта кривая соединяет точки с координатами $q_0$ и $q_1$. Пусть $q=q(\tau)$, $\tau\in[a,b]$ – некоторая кривая, соединяющая те же точки $q(a)=q_0$ и $q(b)=q_1$ в конфигурационном пространстве. Она является проекцией некоторой кривой $\gamma$ на подмногообразии $\mathbb{M}$. Эту кривую нетрудно построить. Для этого достаточно найти обобщенный импульс $p=\partial L/\partial\dot q$, где $\dot q:=dq/d\tau$ – вектор скорости кривой в конфигурационном пространстве. Если параметр $\tau$ подобран так, что $H(q,p)=E$, то мы получаем кривую $q=q(\tau)$, $p=\partial L/\partial\dot q$ на поверхности $\mathbb{M}$. Применяя предыдущую теорему, получаем

Следствие. Среди всех кривых $q=q(\tau)$, $\tau\in[a,b]$ соединяющих точки $q_0$ и $q_1$ в конфигурационном пространстве и параметризованных так, что функция Гамильтона имеет фиксированное значение

$$H(q,\partial L/\partial\dot q)=E$$

траекторией движения механической системы является экстремаль *укороченного действия*

$$\int_a^b d\tau\, p_i\dot q^i=\int_a^b d\tau\frac{\partial L}{\partial\dot q^i}\dot q^i. \tag{6.30}$$

Это следствие называется *принципом наименьшего действия Мопертюи*. Важно отметить, что отрезок $\tau\in[a,b]$ не фиксирован и может быть разным у сравниваемых кривых. Зато одинаковой должна быть энергия. Принцип Мопертюи определяет только форму траектории, а для определения зависимости координат от времени необходимо воспользоваться условием постоянства энергии. Заметим также, что во многих задачах подынтегральное выражение в (6.30) положительно определено. В таких случаях движение происходит действительно по экстремалям укороченного действия, и можно говорить о принципе наименьшего действия.

Пример 6.1.6. Покажем, что если материальная точка движется по риманову многообразию $(\mathbb{M},g)$ только под действием сил инерции, то движение происходит по экстремалям. Пусть $q(\tau)=\{q^i(\tau)\}$ – траектория частицы и $ds^2=dq^idq^jg_{ij}$ – интервал риманова многообразия. Тогда функция Лагранжа для инерциального движения частицы определяется только кинетической энергией:

$$L=T=H=\frac12\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=\frac12 g_{ij}\frac{dq^i}{d\tau}\frac{dq^j}{d\tau},\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot q^i}\dot q^i=2T=\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2.$$

Чтобы обеспечить фиксированное значение энергии вдоль траектории, параметр $\tau$ необходимо выбрать пропорциональным длине траектории $d\tau=ds/\sqrt{2E}$ (канонический параметр). Тогда укороченное действие принимает вид

$$\int_a^b d\tau\frac{\partial L}{\partial\dot q^i}\dot q^i=\sqrt{2E}\int_a^b ds.$$

Это означает, что инерциальное движение происходит по экстремалям римановой метрики $g_{ij}$.

Пример 6.1.7. Пусть движение материальной точки происходит по риманову многообразию $(\mathbb{M}, g)$ с интервалом $ds^2 = dq^i dq^j g_{ij}$ в потенциальном поле $U(q) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{M})$. Функция Лагранжа и гамильтониан имеют вид

$$L = T - U, \qquad H = T + U, \qquad T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2.$$

Чтобы обеспечить фиксированное значение энергии $H = E$, параметр $\tau$ вдоль траектории необходимо выбрать пропорциональным длине:

$$d\tau = \frac{ds}{\sqrt{2(E-U)}}.$$

Тогда укороченное действие примет вид

$$\int_\gamma d\tau \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = \int_\gamma ds\sqrt{2(E-U)}.$$

Это значит, что движение материальной частицы по риманову многообразию $(\mathbb{M}, g)$ в потенциальном поле $U$ происходит вдоль экстремалей метрики $\rho := g\,2(E-U)$, которая связана с исходной метрикой множителем $2(E-U)$. Эта метрика имеет особенность на границе $U(q) = E$.

Если начальная и конечная точки экстремали в рассмотренных примерах достаточно близки, то экстремум длины является минимумом. Это оправдывает название “принцип наименьшего действия”.

Пример 6.1.8 (метод факторизации). Для нахождения траектории частицы иногда удобно выделить из гамильтониана $H(q,p)$ отличный от нуля множитель. Пусть $f(q,p) > 0$ – некоторая положительная функция на фазовом пространстве. Рассмотрим новый гамильтониан

$$\widetilde{H} := f(q,p)\big(H(q,p) - E\big), \qquad E = \mathsf{const}.$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= \phantom{-}f\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}(H-E), \\ \frac{dp}{ds} &= -f\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}(H-E). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Эти уравнения на инвариантной поверхности фазового пространства, определяемой уравнением $\widetilde{H} = 0$ или $H = E$, эквивалентны гамильтоновым уравнениям (6.13) для исходного гамильтониана $H$. Уравнения (6.31) позволяют определить только форму траектории. Для определения эволюции частицы во времени достаточно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dt}{ds} = f\big(q(s), p(s)\big),$$

где $q(s), p(s)$ – соответствующая траектория.

**6.1.7. Уравнение Гамильтона–Якоби.** Рассмотрим *расширенное конфигурационное* пространство $\mathbb{R}^{\mathrm{N}+1}$ с координатами $\{q,t\} = (q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, t)$, которое получается из конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ добавлением еще одного измерения – времени.

Определение. *Функцией действия* $S(q,t)$ называется интеграл

$$S(q,t)=\int_\gamma d\tau L, \tag{6.32}$$

где $L(q,\dot q,\tau)$ – функция Лагранжа, и интегрирование ведется вдоль экстремали $\gamma := \{q(\tau),t(\tau)\}$, с фиксированным началом $q_0,t_0$ и переменным концом $q,t$ расширенного конфигурационного пространства.

Это определение корректно по крайней мере в малой окрестности начальной точки $q_0,t_0$. Точнее, функция действия (6.32) определена в некоторой окрестности $\mathbb{U}$ точки $q_0,t_0$, если любую точку этой окрестности можно соединить с точкой $q_0,t_0$ экстремалью, целиком лежащей в $\mathbb{U}$, и эта экстремаль единственна. Если точка $q,t$ лежит далеко от $q_0,t_0$, то интеграл (6.32) может не определить функцию действия $S(q,t)$ по двум причинам. Во-первых, может существовать несколько экстремалей, соединяющих точки $q_0,t_0$ и $q,t$. Во-вторых, возможно, что точки $q_0,t_0$ и $q,t$ вообще нельзя соединить экстремалью. С другой стороны, для любой точки $q,t$ расширенного конфигурационного пространства можно так подобрать начальную точку $q_0,t_0$, что функция действия будет определена в некоторой окрестности точки $q,t$. В дальнейшем мы будем считать, что точка $q_0,t_0$ фиксирована, и рассматривать те области расширенного конфигурационного пространства, где функция действия определена.

Аргументом функции действия является верхний предел интеграла (6.32), поэтому ее дифференциал равен

$$dS(q,t)=dq^ip_i-dtH, \tag{6.33}$$

где $p_i:=\partial L/\partial\dot q^i$ и $H:=\dot q^ip_i-L$ определяются в конечной точке кривой $\gamma$. Таким образом, дифференциал функции действия $dS$ является интегральным инвариантом Пуанкаре–Картана (6.23).

Теорема 6.1.7. *Функция действия удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби*

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0. \tag{6.34}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что из выражения (6.33) следуют равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H(q,p,t),\qquad p_i=\frac{\partial S}{\partial q^i}.$$

Очевидно, что любое решение уравнения Гамильтона–Якоби определено с точностью до аддитивной постоянной, которая соответствует произволу в выборе начальной точки $q_0,t_0$ экстремали $\gamma$ в определении функции действия (6.32).

Уравнение Гамильтона–Якоби представляет собой уравнение в частных производных первого порядка. Покажем, что его интегрирование сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона. Поставим для уравнения Гамильтона–Якоби задачу Коши, т.е. будем искать решение уравнения (6.34) с начальным условием

$$S(q,t_0)=S_0(q). \tag{6.35}$$

Чтобы построить решение этой задачи, рассмотрим задачу Коши для уравнений Гамильтона (6.24) с начальными условиями:

$$q^i(t_0)=q^i_0,\qquad p_i(t_0)=\left.\frac{\partial S_0}{\partial q^i}\right|_{q_0}.$$

Соответствующее этим начальным условиям решение изображается в расширенном конфигурационном пространстве кривой $q(t)$, которая является стационарной точкой действия $\int dtL$, где $L(q, \dot{q}, t)$ есть преобразование Лежандра по импульсу $p$ от гамильтониана $H(q, p, t)$. Эта траектория называется *характеристикой* задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби, выходящей из точки $q_0, t_0$. При временах, достаточно близких к $t_0$, значения $q(t), t$ можно принять за координаты в окрестности точки $q_0, t_0$ расширенного конфигурационного пространства. Построим теперь функцию действия

$$S(q, t) = S_0(q_0) + \int_{q_0, t_0}^{q, t} d\tau L(q, \dot{q}, \tau),$$

где интегрирование ведется вдоль экстремали, соединяющей точки $q_0, t_0$ и $q, t$. После этого проверяется, что эта функция действия удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (6.34) и начальному условию (6.35). Можно также доказать, что это решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби единственно.

Если гамильтониан не зависит от времени явно, то зависимость функции действия от времени легко находится:

$$S(q, t) = -Et + W(q), \tag{6.36}$$

где $W(q)$ – *укороченная функция действия*, зависящая только от координат, и $E = \mathsf{const}$. Из уравнения Гамильтона–Якоби (6.34) следует, что укороченная функция действия должна удовлетворять уравнению в частных производных

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E. \tag{6.37}$$

Отсюда следует, что постоянная $E$ равна энергии системы. Это уравнение называется *укороченным* уравнением Гамильтона–Якоби.

Пример 6.1.9. Поясним определение функции действия на простом примере свободной точечной частицы единичной массы, движущейся в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. В этом случае лагранжиан и гамильтониан частицы имеют вид

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}_i, \qquad H = \frac{1}{2}p^i p_i,$$

где подъем и опускание индексов осуществляется с помощью символов Кронекера. Траекториями свободной частицы являются прямые линии и только они. Экстремаль $q^i(\tau)$, соединяющая точки $q_0^i, t_0$ и $q^i, t$, задается линейной функцией

$$q^i(\tau) = q_0^i + \frac{q^i - q_0^i}{t - t_0}(\tau - t_0),$$

описывающей равномерное прямолинейное движение частицы со скоростью $\dot{q}^i = (q^i - q_0^i)/(t - t_0)$. Нетрудно вычислить соответствующую функцию действия

$$S(q, t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \frac{1}{2}\left(\frac{q - q_0}{t - t_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(q - q_0)^2}{t - t_0},$$

где

$$(q - q_0)^2 := (q^i - q_0^i)(q_i - q_{0i}).$$

Функция действия определена для всех $q \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $t > t_0$ и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial q^i}\frac{\partial S}{\partial q_i} = 0.$$

Поскольку гамильтониан частицы не зависит от времени явно, то для любой траектории частицы энергия сохраняется:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{q - q_0}{t - t_0}\right)^2 = \mathsf{const}.$$

Отсюда можно выразить время через координаты

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{(q - q_0)^2}{2E}}.$$

Поскольку $S = E(t - t_0)$, то укороченное действие равно

$$W = Et + S = 2E(t - t_0) + Et_0 = \sqrt{2E(q - q_0)^2} + Et_0.$$

Нетрудно проверить, что укороченное действие удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона–Якоби

$$E = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial q^i}\frac{\partial W}{\partial q_i}.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби предоставляет мощный метод решения задач механики точечных частиц. При обобщении этого метода на теорию поля возникают существенные усложнения. В настоящее время, насколько известно автору, это интересное обобщение не развито.

**6.1.8. Принцип Гюйгенса.** Многие понятия гамильтоновой механики возникли при перенесении на общие вариационные принципы весьма простых и наглядных понятий геометрической оптики. В настоящем разделе мы обсудим некоторые аспекты геометрической оптики.

Рассмотрим свет, распространяющийся в среде (конфигурационном пространстве), которую мы отождествим с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами $q^i$, $i = 1, 2, 3$. В общем случае скорость света зависит от точки $q \in \mathbb{R}^3$ (неоднородная среда) и направления луча света (неизотропная среда). Неизотропность среды можно описать, задав в каждой точке $q$ поверхность в касательном пространстве $\mathbb{T}_q(\mathbb{R}^3)$. Для этого отложим в начале координат касательного пространства $\mathbb{T}_q(\mathbb{R}^3)$ вектор скорости распространения света в точке $q$. Эта поверхность называется *индикатрисой*. Согласно *принципу Ферма*, свет распространяется в среде из точки $q_0$ в точку $q$ за кратчайшее время.

Если среда изотропна, то принцип Ферма приобретает простую математическую форму. Пусть $q(t)$ – траектория луча. Тогда для скорости света $v^i := dq^i/dt$ справедливо равенство

$$v^2 dt^2 = ds^2,$$

где $v^2 := v^i v^j \delta_{ij}$ и $ds^2 := dq^i dq^j \delta_{ij}$. Отсюда следует, что время прохождения луча между точками $q_0$ и $q$ вдоль траектории $q(t)$ равно

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{ds}{v},$$

где $v := \sqrt{v^2}$ и $ds := \sqrt{ds^2}$. Для изотропной среды показатель преломления $n$ равен отношению скорости света $c$ в вакууме к скорости света $v$ в среде, $n = c/v$. Поэтому время распространения луча света дается интегралом

$$t = \frac{1}{c}\int_{q_0}^{q} ds\, n. \tag{6.38}$$

Таким образом, принцип Ферма для распространения лучей света в изотропной среде сводится к вариационной задаче для действия (6.38), в котором показатель преломления $n(q)$ является заданной функцией на конфигурационном пространстве.

Распространение света в среде можно также описать на языке волновых фронтов. Допустим, что в момент времени $t = 0$ в точке $q_0$ произошла вспышка света. Рассмотрим множество точек, до которых свет дойдет за время, меньшее или равное $t > 0$. Граница этого множества $\Phi_0(t)$, которая представляет собой некоторую поверхность в $\mathbb{R}^3$, называется *волновым фронтом* точки $q_0$ через время $t$ и состоит из точек, до которых свет дойдет за время $t$ и не может дойти быстрее. При этом мы предполагаем, что среда такова, что волновые фронты представляют собой гладкие поверхности в $\mathbb{R}^3$. Тогда между волновыми фронтами для разных моментов времени $t$ имеется замечательное соотношение.

Теорема 6.1.8 (Принцип Гюйгенса). *Рассмотрим волновой фронт $\Phi_0(t)$ точки $q_0$ в момент времени $t$. Для каждой точки этого фронта $q \in \Phi_0(t)$ построим волновой фронт $\Phi_q(s)$ через время $s > 0$. Тогда волновой фронт $\Phi_0(t+s)$ точки $q_0$ через время $t + s$ будет огибающей поверхностью всех фронтов $\Phi_q(s)$ для $q \in \Phi_0(t)$.*

Доказательство. Пусть $q_{t+s} \in \Phi_0(t + s)$. Тогда существует путь из начальной точки $q_0$ в точку $q_{t+s}$, по которому свет распространяется за время $t + s$ и нет более короткого. Рассмотрим точку $q_t$ на этом пути, до которой свет идет время $t$. Никакого более короткого пути из $q_0$ в $q_t$ не существует, иначе путь не был бы кратчайшим. Поэтому точка $q_t$ лежит на фронте $\Phi_0(t)$. Точно так же путь из $q_t$ в $q_{t+s}$ свет проходит за время $s$ и нет более короткого

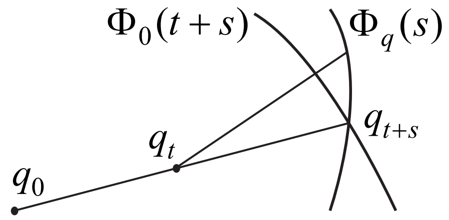


Рис. 6.2. Невозможность пересечения фронтов

пути между этими точками. Поэтому точка $q_{t+s}$ лежит на фронте $\Phi_q(s)$ точки $q(t)$ через время $s$. Осталось показать, что фронты $\Phi_q(s)$ и $\Phi_0(t + s)$ в точке $q(t + s)$ касаются. Действительно, предположим, что фронты пересекаются, как показано на рис.6.2. Тогда в некоторые точки фронта $\Phi_0(t + s)$ из точки $q_t$ можно было бы добраться за время, меньшее $s$. В свою очередь это значит, что в эти точки из $q_0$ можно было бы добраться за время, меньшее $t + s$, что противоречит определению фронта $\Phi_0(t + s)$.

Разумеется, точку $q_0$ в принципе Гюйгенса можно заменить на кривую, поверхность или вообще на произвольное замкнутое множество, а трехмерное евклидово пространство на произвольное дифференцируемое многообразие $\mathbb{M}$. При этом свет можно заменить на распространение любого возмущения, передающегося локально, т.е. вдоль линии $\gamma \in \mathbb{M}$, на которой некоторый функционал принимает наименьшее значение.

Принцип Гюйгенса приводит к двум способам описания распространения возмущений. Во-первых, можно следить за *лучами*, т.е. кратчайшими путями, вдоль которых распространяется свет (корпускулярная точка зрения). В этом случае распространение света задается вектором скорости $\dot{q}$ в каждой точке конфигурационного пространства, т.е. некоторой точкой на индикатрисе. Во-вторых, мы можем следить за распространением волнового фронта (волновая точка зрения).

Определим скорость движения $p$ волнового фронта следующим образом. Для каждой точки $q_0$ определим функцию $S_0(q)$ как наименьшее время распространения света из точки $q_0$ в точку $q$. По построению, поверхность уровня функции $S_0(q)$ является волновым фронтом:

$$\Phi_0(t) := \{q \in \mathbb{R}^3 : \quad S_0(q) = t\}.$$

Определение. Ковектор с компонентами

$$p_i := \frac{\partial S_0(q)}{\partial q^i}$$

называется *ковектором нормальной медлительности фронта.*

Такое название связано с тем, что чем больше градиент функции $S_0(q)$, тем медленнее движется фронт. Действительно, в линейном приближении справедливо равенство

$$S_0(q + dq) = S_0(q) + p_i dq^i = t + dt.$$

Отсюда следует, что чем больше расстояние $dq$, пройденное светом за время $dt$, тем меньше ковектор нормальной медлительности фронта $p$. Векторы $X$, касательные к волновому фронту, определяются как ортогональное дополнение к ковектору нормальной медлительности фронта:

$$X^i p_i = 0.$$

Если на конфигурационном пространстве определена риманова метрика $g_{ij}$, то можно определить вектор нормальной медлительности фронта с компонентами $p^i := g^{ij} p_j$. По построению, этот вектор ортогонален волновому фронту.

Если среда анизотропна, то направление лучей света $\dot{q}$ и направление движения фронта $p$ не совпадают. Однако они связаны между собой простым соотношением, которое легко выводится из принципа Гюйгенса. Напомним, что оптические свойства среды в точке $q$ характеризуются поверхностью в касательном пространстве $\mathbb{T}_q(\mathbb{R}^3)$ – индикатрисой.

Определение. Направление гиперплоскости (т.е. вектор, перпендикулярный к данной гиперплоскости), касающейся индикатрисы в точке $\dot{q}$, называется *сопряженным* к направлению $\dot{q}$.

Предложение 6.1.1. *Направление $p$ волнового фронта $\Phi_0(t)$ в точке $q_t$ сопряжено направлению луча $\dot{q}$ в данной точке.*

Доказательство. Рассмотрим точки $q_{t-\epsilon}$, лежащие на луче с началом в точке $q_0$ и концом в $q_t$, при малых $\epsilon > 0$. Фронт волны $\Phi_{q_{t-\epsilon}}(\epsilon)$ в точке $q_{t-\epsilon}$ в момент времени $\epsilon$ можно представить в виде

$$\Phi_{q_{t-\epsilon}}(\epsilon) = \{q^i_{t-\epsilon} + \dot{q}^i_t \epsilon\},$$

где вектор скорости $\dot{q}$ пробегает всю индикатрису, с точностью порядка $\mathsf{o}(\epsilon)$. Из принципа Гюйгенса следует, что фронт $\Phi_{q_{t-\epsilon}}(\epsilon)$ касается фронта $\Phi_0(t)$ в точке $q_t$. В пределе $\epsilon \to 0$ получаем утверждение предложения.

Теперь сравним геометрическую оптику с построениями предыдущего раздела. Лучом является траектория частицы $q(t)$ в конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^3$. Ковектор нормальной медлительности фронта – это импульс частицы $p$. Принцип Ферма соответствует принципу наименьшего действия. Функция $S_0(q)$ есть ни что иное, как функция действия (6.32), в которой время $t$ соответствует концу траектории $q = q(t)$. Поверхности уровня функции действия $S(q, t)$ соответствуют волновым фронтам.

**6.1.9. Переменные действие-угол.** Знание интегралов движения позволяет упросить задачу. При этом интерес представляют функционально независимые интегралы движения. Из определения функциональной независимости следует, что на фазовом пространстве размерности $2\mathrm{N}$ может существовать не более $2\mathrm{N}$ функционально независимых интегралов движения.

Чтобы проинтегрировать систему из $2\mathrm{N}$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, достаточно знать $2\mathrm{N}$ независимых первых интегралов. Оказывается, что если задана каноническая система уравнений движения, то ситуация существенно проще: достаточно знать только $\mathrm{N}$ независимых первых интегралов. Это происходит потому что каждый интеграл движения позволяет понизить порядок системы уравнений не на одну, а на две единицы.

Определение. Функция $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ на пуассоновом многообразии $\mathbb{M}$ называется *первым интегралом* механической системы с гамильтонианом $H$, если ее скобка Пуассона с гамильтонианом равна нулю, $[F, H] = 0$. Две функции $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ находятся в *инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю, $[F_1, F_2] = 0$.

Заметим, что условие $[F, H] = 0$ эквивалентно условию $\dot{F} = 0$, так как $\dot{F} = [F, H]$

Теорема 6.1.9 (Лиувилль). *Предположим, что на симплектическом многообразии $\mathbb{M}$ размерности $2\mathrm{N}$ заданы $\mathrm{N}$ функционально независимых дифференцируемых функций $\{F_i\}$, $i = 1, \dots \mathrm{N}$, которые находятся в инволюции, $[F_i, F_j] = 0$. Рассмотрим $\mathrm{N}$-мерное подмногообразие $\mathbb{M}_f \hookrightarrow \mathbb{M}$, которое является множеством уровня функций $F_i$:*

$$\mathbb{M}_f := \{x \in \mathbb{M} : \quad F_i = f_i = \mathsf{const}, \; i = 1, \dots, \mathrm{N}\}.$$

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Подмногообразие $\mathbb{M}_f$ инвариантно относительно фазового потока с функцией Гамильтона $H = F_i$ при любом фиксированном $i$.*
2) *Если подмногообразие $\mathbb{M}_f$ компактно и связно, то оно диффеоморфно $\mathrm{N}$-мерному тору $\mathbb{T}^{\mathrm{N}}$.*
3) *Фазовый поток с функцией Гамильтона $H$ определяет на $\mathbb{M}_f$ условно-периодическое движение, т.е. в угловых координатах $\{\varphi^i, \mod 2\pi\}$ на торе уравнения движения имеют вид*
$$\frac{d\varphi^i}{dt} = \omega^i, \qquad \omega^i = \omega^i(f) = \mathsf{const}, \quad \forall i. \tag{6.39}$$
4) *Канонические уравнения движения с функцией Гамильтона $H$ интегрируются в квадратурах.*

Доказательство. См., например, [52], глава 10, § 49, раздел А.

Прокомментируем первые два утверждения теоремы.

Поскольку фазовое пространство $\mathbb{M}$ является симплектическим и, следовательно, пуассоновым многообразием, то каждой функции $F_i$ ставится в соответствие векторное поле $X_i$ по правилу (4.27). При этом инволютивность первых интегралов движения влечет за собой инволютивность распределения векторных полей $\{X_i\}$. Согласно теореме Фробениуса у этого распределения существует интегральное подмногообразие, которым является $\mathbb{M}_f \hookrightarrow \mathbb{M}$. Отсюда следует инвариантность $\mathbb{M}_f$ относительно фазового потока для любой функции $F_i$.

Тор возникает из-за того, что векторные поля $X_i$, которые являются генераторами группы однопараметрических преобразований $\mathbb{M}_f$, не просто находятся в инволюции, а коммутируют между собой.

Замечание. Если гамильтониан механической системы $H$ не зависит от времени, то его можно выбрать в качестве одного из первых интегралов $F_i$.

Определение. Гамильтонова механическая система, называется *интегрируемой*, если она имеет N или более функционально независимых интегралов движения.

Если фазовое пространство механической системы таково, что выполнены условия теоремы Лиувилля, то на фазовом пространстве $\mathbb{M}$ существует выделенная система координат (*действие-угол*), в которой уравнения движения выглядят особенно просто. Для определенности будем считать, что гамильтониан системы совпадает с первым интегралом движения: $H := F_1$. В теореме Лиувилля утверждается, что подмногообразие $\mathbb{M}_f \hookrightarrow \mathbb{M}$ является N-мерным тором, инвариантно относительно фазового потока и на нем существуют угловые координаты $\varphi^i$, для которых уравнения движения имеют вид (6.39). Общее решение этих уравнений имеет простой вид

$$\varphi^i = \varphi^i_0 + \omega^i t, \qquad \varphi^i_0 = \mathsf{const}, \quad \forall\, i.$$

Поскольку интегралы движения функционально независимы, то в некоторой окрестности подмногообразия $\mathbb{M}_f$ в качестве координат можно выбрать совокупность функций $\{F_i, \varphi^i\}$. В этой системе координат уравнения движения принимают простой вид

$$\frac{dF_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi^i}{dt} = \omega(F),$$

и легко интегрируются:

$$F_i(t) = F_i(0), \qquad \varphi^i(t) = \varphi^i_0 + \omega^i\big(F(0)\big)t.$$

В общем случае в координатах $\{F_i, \varphi^i\}$ симплектическая форма не будет иметь канонического вида. Однако существует такой набор функционально независимых функций $\{I_i = I_i(F)\}$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, что переменные $\{I, \varphi\}$ образуют такую систему координат в окрестности $\mathbb{M}_f$, в которой симплектическая форма имеет канонический вид

$$\varpi = dI_i \wedge d\varphi^i. \tag{6.40}$$

Определение. Координаты $\{\varphi^1, \dots, \varphi^{\mathrm{N}}, I_1, \dots, I_{\mathrm{N}}\}$ в некоторой окрестности подмногообразия фазового пространства $\mathbb{M}_f \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$, в которых канонические уравнения движения имеют вид

$$\frac{dI}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(I),$$

и симплектическая форма является канонической (6.40) называются *переменными действие-угол.*

Переменные действие-угол являются координатами на фазовом пространстве. При этом угловые переменные удобно рассматривать как обобщенные координаты, а переменные действия – как сопряженные импульсы. Из определения сразу следует, что преобразование координат $q, p \mapsto \varphi, I$, если оно существует, является каноническим.

Переменные $I$ так же как и функции $F$ являются первыми интегралами движения. В переменных действие-угол гамильтониан механической системы имеет вид $H = F_1 = H(I)$ и не зависит от угловых переменных $\varphi$. То есть каждая из угловых координат $\varphi$ является циклической.

Теорема 6.1.10. *Координаты действие-угол $\{\varphi, I\}$ существуют в некоторой окрестности подмногообразия $\mathbb{M}_f \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество торов $\mathbb{M}_f$, соответствующих различным значениям интегралов движения $F_i$. Пусть $\gamma_i$, $i = 1, \dots, \mathrm{N}$, – базисные одномерные циклы (окружности) на торах $\mathbb{M}_f$, т.е. приращение координаты $\varphi^i$ на цикле $\gamma_j$ равно $2\pi$, если $i = j$ и $0$, если $i \neq j$. Каждое подмногообразие $\mathbb{M}_f \hookrightarrow \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ является нулевым. Действительно, векторные поля $X_i$, соответствующие интегралам движения $F_i$, образуют базис касательных пространств $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}_f)$ для всех $x \in \mathbb{M}_f$ и попарно коммутируют. Поэтому значение канонической симплектической формы $\varpi = dp_i \wedge dq^i$ на двух произвольных базисных полях равно нулю:

$$\varpi(X_i, X_j) = \varpi_{kl} X_i^k X_j^l = \varpi^{-1kl} \partial_k F_i \partial_l F_j = [F_i, F_j] = 0.$$

Следовательно, подмногообразие $\mathbb{M}_f$ является нулевым. Отсюда вытекает, что 1-форма $dq\, p$ замкнута на $\mathbb{M}_f$, т.е. ее внешняя производная $dp \wedge dq$ обращается в нуль на подмногообразии $\mathbb{M}_f$. Положим

$$I_i(F) := \oint_{\gamma_i} dq\, p.$$

Эти функции зависят от значений интегралов движения $F_i$, определяющих тор $\mathbb{M}_f$, но не зависят от выбора базисных циклов $\gamma_i$, так как форма $dq\, p$ замкнута. Это означает, что функции $I_i(F)$ не зависят от координат $\varphi$ на торе.

Теперь совершим два канонических преобразования. Поскольку скобка Пуассона интегралов движения $F_i$ между собой равна нулю, то их можно выбрать в качестве новых импульсов: $P_i := F_i$. Совершим первое каноническое преобразование $q, p \mapsto Q, F$ с производящей функцией $S_4(p, F)$ (см. следующий раздел), зависящей от новых и старых импульсов $F$ и $p$. Тогда старые и новые координаты определены соотношениями (6.69):

$$q^i = -\frac{\partial S_4}{\partial p_i}, \qquad Q^i = \frac{\partial S_4}{\partial F_i}.$$

Подмногообразие $\mathbb{M}_f$ в новой системе координат задано соотношениями $P = 0$. Следовательно, новые координаты $Q$ образуют некоторую систему координат на $\mathbb{M}_f$.

Зафиксируем точку $Q_0 \in \mathbb{M}_f$. В некоторой ее окрестности можно выбрать систему координат $Q, I$, так как функции $I = I(P)$ зависят только от импульсов $P = F$. При этом импульсы $P$ можно выразить как функции от $Q$ и $I$, т.е. $P = P(Q, I)$. Поскольку преобразование $q, p \mapsto Q, P$ каноническое, то 1-форма $dQP$ замкнута. Поэтому в односвязной окрестности $\mathbb{U}$ точки $Q_0 \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}_f$ определена функция

$$S_2(Q, I) = \int_{Q_0}^{Q} dQ' P(Q', I).$$

Этот интеграл не зависит от кривой, целиком лежащей в $\mathbb{U}$ и соединяющей точки $Q_0$ и $Q$. Следовательно, функцию $S_2(Q, I)$ можно выбрать в качестве производящей функции второго канонического преобразования $Q, P \mapsto \varphi, I$, зависящей от старых координат $Q$ и новых импульсов $I$. Формулы преобразования имеют вид (6.67):

$$P = \frac{\partial S_2}{\partial Q}, \qquad \varphi = \frac{\partial S_2}{\partial I}.$$

Таким образом, преобразование координат $q, p \mapsto \varphi, I$ является произведением двух канонических преобразований $q, p \mapsto Q, P$ и $Q, P \mapsto \varphi, I$ и, следовательно, само является каноническим. По построению, оно определено в окрестности тора $\mathbb{M}_f$.

Замечание. В доказательстве теоремы переход от координат $q, p$ к переменным действие-угол $\varphi, I$ содержит только алгебраические операции и интегрирование. Это доказывает утверждение 4 теоремы Лиувилля 6.1.9.

Переменные действие-угол определены неоднозначно. Очевидно, что координаты можно сдвигать:

$$I'_i = I_i + \mathsf{const}, \qquad \varphi'^i = \varphi^i + \mathsf{const}(I).$$

**6.1.10. Канонические преобразования.** Наиболее мощный и гибкий метод нахождения точных решений уравнений движения дают канонические преобразования. По-прежнему обозначим конфигурационное и фазовое пространства соответственно через $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, и $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \approx \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$. Будем считать, что на фазовом пространстве заданы координаты $\{x^\alpha\} = \{q^i, p_i\} := (q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, p_1, \dots, p_{\mathrm{N}})$ и каноническая пуассонова структура (4.31).

Определение. Достаточно гладкое биективное отображение $g$ фазового пространства (диффеоморфизм) $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ на себя называется каноническим, если оно сохраняет каноническую симплектическую форму:

$$g^* \varpi = \varpi,$$

где $\varpi := dp \wedge dq := dp_i \wedge dq^i$.

В координатах это определение записывается следующим образом. Отображение $g$ фазового пространства задается $2\mathrm{N}$ функциями, которые в общем случае могут зависеть от времени,

$$g: \quad \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \ni \qquad (q^i, p_i) \mapsto \big(Q^i(q,p,t), P_i(q,p,t)\big) \qquad \in \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \tag{6.41}$$

где время $t$ входит в качестве параметра. Поскольку ранг 2-формы $\varpi$ равен $2\mathrm{N}$, то канонические преобразования задают преобразование координат (диффеоморфизм) фазового пространства с отличным от нуля якобианом:

$$\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} \ne 0.$$

Условие сохранения канонической симплектической формы $\varpi$ принимает вид

$$dp_i \wedge dq^i = dP_i \wedge dQ^i. \tag{6.42}$$

Это равенство приводит к дифференциальным уравнениям на функции $Q^i(q,p,t)$, $P_i(q,p,t)$, которые мы рассмотрим позже.

Определение канонических преобразований можно записать в эквивалентном интегральном виде

$$\int_{\mathbb{S}} dp \wedge dq = \int_{g\mathbb{S}} dp \wedge dq, \tag{6.43}$$

где интегрирование ведется по произвольной двумерной поверхности $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ с кусочно гладкой границей. Поскольку кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ односвязно, то к интегралу (6.43) можно применить формулу Стокса:

$$\int_{\mathbb{S}} dp \wedge dq = \oint_{\partial\mathbb{S}} dq\, p,$$

где мы предположили, что граница $\partial\mathbb{S}$ такова, что $dq$ на ней может обратиться в нуль только в изолированных точках. Поэтому для односвязных фазовых пространств интегральное определение канонического преобразования (6.43) можно переписать в виде

$$\oint_{\gamma} dq\, p = \oint_{g\gamma} dq\, p, \tag{6.44}$$

где $\gamma$ – произвольная кусочно гладкая замкнутая кривая в фазовом пространстве.

В общем случае неодносвязных многообразий из равенства (6.44) следует (6.43), но не наоборот. То есть сохранение 1-формы $dq\,p$ является достаточным условием того, что преобразование будет каноническим.

Пример 6.1.10. Каноническая пуассонова структура определена на произвольном кокасательном расслоении $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. При этом вид структурных функций не зависит от выбора координат на конфигурационном пространстве $\mathbb{M}$. Поэтому преобразование $q, p \mapsto Q(q), P(q, P)$, где $Q$ зависит только от $q$, является каноническим (см., пример 6.1.4).

Пример 6.1.11. Пусть фазовое пространство топологически тривиально, $\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \approx \mathbb{R}^{2\text{N}}$. Поскольку линейное преобразование координат фазового пространства, порождаемое симплектической группой $\mathbb{SP}(\text{N}, \mathbb{R})$ (см. раздел 4.1), сохраняет каноническую симплектическую форму, то оно является каноническим.

На практике наиболее полезными и содержательными являются нелинейные канонические преобразования, связанные со спецификой задачи: симметриями и наличием интегралов движения.

Пример 6.1.12. Фазовый поток является каноническим отображением в силу следствия из теоремы 6.1.3.

Пример 6.1.13 (теория возмущений). Допустим, что гамильтониан механической системы состоит из двух слагаемых,

$$H(q, p) = H_0(q, p) + H_1(q, p). \tag{6.45}$$

При этом гамильтониан $H_0$ настолько прост, что для него известно общее решение

$$q = q(t; q_0, p_0), \qquad p = p(t; q_0, p_0), \tag{6.46}$$

задачи Коши с начальными условиями:

$$q(0; q_0, p_0) = q_0, \qquad p(0; q_0, p_0) = p_0.$$

Как было отмечено, фазовый поток определяет каноническое преобразование, которое задается функциями (6.46). Обратное преобразование $q, p \mapsto q_0, p_0$ также является каноническим. При этом преобразовании гамильтониан $H_0$ обращается в константу и уравнения движения исходной гамильтоновой системы упрощаются:

$$\dot{q}_0 = \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial p_0}, \qquad \dot{p}_0 = -\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial q_0},$$

где

$$\tilde{H}_1(q_0, p_0, t) := H_1\big(q(t; q_0, p_0), p(t; q_0, p_0)\big). \tag{6.47}$$

Обозначим через $\tilde{q}_0(t; q_0.p_0)$ и $\tilde{p}_0(t; q_0.p_0)$ решение задачи Коши для полученной системы уравнений движения с начальными данными:

$$\tilde{q}_0(0; q_0, p_0) = q_0, \qquad \tilde{p}_0(0; q_0, p_0) = p_0.$$

Это решение обладает замечательным свойством: для невозмущенной системы оно постоянно и совпадает с начальными данными. Таким образом, задача Коши для гамильтоновой системы (6.45) сведена к задаче Коши для возмущения, которое определяется гамильтонианом (6.47). Формулы для решения исходной задачи в старых координатах $q, p$ получаются после подстановки решения $\tilde{q}_0, \tilde{p}_0$ в общее решение (6.46) невозмущенной задачи.

Из определения канонических преобразований фазового пространства следует, что фазовое пространство вместе с каноническими отображениями образуют группу преобразований. Эта группа является подгруппой группы общих преобразований координат фазового пространства $\mathsf{diff}\,\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$. В общем случае канонические преобразования $q^i, p_i \mapsto Q^i, P_i$ не сохраняют структуру кокасательного расслоения на фазовом пространстве, соответствующую координатам $q^i, p_i$, так как могут перемешивать канонические координаты и импульсы.

По определению, каноническое преобразование сохраняет 2-форму $\varpi$ (6.21) и, следовательно, все ее внешние степени. Отсюда вытекает

Теорема 6.1.11. *Канонические преобразования сохраняют интегральные инварианты* $\varpi^2, \dots, \varpi^{\mathrm{N}}$.

Поскольку $2\mathrm{N}$-форма $\varpi^{\mathrm{N}}$ существует и невырождена, то на фазовом пространстве существует также форма объема $\upsilon$, которая ей пропорциональна (4.12). Отсюда вытекает

Следствие. Канонические преобразования сохраняют форму объема $\upsilon$ фазового пространства. Другими словами, якобиан канонического преобразования координат равен единице,

$$\mathsf{det}\,\frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = 1.$$

Это значит, что объем

$$V = \int_{\mathbb{U}} \upsilon$$

произвольной области $\mathbb{U}$ фазового пространства сохраняется при каноническом преобразовании: $gV = V$.

Поскольку фазовый поток для произвольной гамильтоновой системы является каноническим преобразованием, то он также имеет интегральные инварианты $\varpi, \varpi^2, \dots, \varpi^{\mathrm{N}}$. Последний из этих инвариантов есть фазовый объем. Отсюда следует

Теорема 6.1.12 (Лиувилль). *Фазовый поток сохраняет объем произвольной области фазового пространства.*

Верно также обратное утверждение. А именно, пусть задан функционал

$$I_k = \int_{\mathbb{U}} d^{2k}x F(t,x), \qquad k = 1, \dots, \mathrm{N},$$

где $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ – произвольное четномерное подмногообразие фазового пространства размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{U} = 2k$ с кусочно гладкой границей и $F(t,x)$ – некоторая функция времени и канонических переменных. Если этот функционал инвариантен относительно фазового потока с произвольным гамильтонианом, то он называется *интегральным инвариантом.*

Теорема 6.1.13. *Любой интегральный инвариант $I_k$ фазового потока с произвольным гамильтонианом имеет вид*

$$I_k = c_k \int_{\mathbb{U}} \varpi^k,$$

*где $c_k$ – некоторые постоянные, для всех $k = 1, \dots, \mathrm{N}$.*

Доказательство. Дано сравнительно недавно [53].

Важность канонических преобразований заключается в том, что они позволяют менять координаты в фазовом пространстве не меняя вида канонических уравнений движения. Чтобы показать это, рассмотрим преобразование координат в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$, с координатами $q, p, t$. Как было показано в разделе 6.1.5, фазовый поток взаимно однозначно связан с характеристиками интегрального инварианта Пуанкаре–Картана в расширенном фазовом пространстве. Поскольку характеристики 1-формы являются инвариантным объектом, то замену координат $q, p, t \mapsto Q, P, T$ удобно провести в расширенном фазовом пространстве.

Теорема 6.1.14. *Пусть $Q, P, T$ – новая система координат в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$ и $K(Q,P,T)$, $S(Q,P,T)$ – такие функции, что выполнено условие*

$$dq\,p - dtH = dQP - dTK + dS. \tag{6.48}$$

*Тогда траектории фазового потока (6.24) изображаются в координатах $Q, P, T$ интегральными кривыми канонических уравнений*

$$\frac{dQ^i}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}. \tag{6.49}$$

Доказательство. Поскольку $ddS = 0$, то 1-форма $dS$ не влияет на характеристики формы (6.48). Это значит, что фазовый поток определяется также характеристиками формы $dQP - dTK$. Уравнения (6.49) следуют из теоремы 6.1.2.

Каноническим преобразованиям координат в фазовом пространстве $q, p \mapsto Q, P$ соответствует преобразование координат $q, p, t \mapsto Q, P, t$ в расширенном фазовом пространстве, которое не меняет времени.

Теорема 6.1.15. *В новых координатах $Q, P$ канонические уравнения движения (6.24) имеют канонический вид (6.49) со старой функцией Гамильтона, выраженной через новые координаты $K(Q,P,t) = H\big(q(Q,P), p(Q,P), t\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим 1-форму $dqp - dQP$ в фазовом пространстве. Тогда для любой замкнутой кривой $\gamma$ справедливо равенство

$$\oint_\gamma (dq\,p - dQP) = 0,$$

поскольку преобразование является каноническим. Это равенство можно записать в дифференциальной форме $dq\,p - dQP = dS$, где $S(Q,P)$ – некоторая функция на фазовом пространстве. Следовательно, в расширенном фазовом пространстве имеем равенство

$$dq\,p - dtH = dQP - dtH + dS, \tag{6.50}$$

и справедлива предыдущая теорема.

Таким образом, мы показали, что при канонических преобразованиях вид гамильтоновых уравнений движения не меняется. Часто это свойство принимается за определение канонических преобразований. Следующий пример показывает, что такое определение является более общим, чем принятое в настоящей монографии.

Пример 6.1.14. Преобразование координат, которое заключается в растяжке импульсов:

$$\varphi_c: \quad \mathbb{R}^{2\mathrm{N}} \ni \qquad (q,p) \mapsto (Q = q, P = cp) \qquad \in \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}, \tag{6.51}$$

где $c \neq 0$ – некоторая постоянная, сохраняет гамильтонову форму уравнений движения с гамильтонианом $K = cH$. Тем не менее оно не является каноническим, так как каноническая форма

$$\varpi = dp \wedge dq = \frac{1}{c} dP \wedge dQ$$

меняет свой вид.

В более общем случае преобразование $Q = bq, P = cp$, где $b$ и $c$ – произвольные отличные от нуля постоянные, также сохраняет вид гамильтоновых уравнений движения. При этом новый гамильтониан равен $K = bcH$.

По сути дела этот пример описывает все отличия в разных определениях канонического преобразования.

Предложение 6.1.2. *Пусть при преобразовании координат* $\varphi : \quad q, p \mapsto Q, P$ *фазового пространства* $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ *гамильтоновы уравнения движения* (6.13) *сохраняют свой вид*:

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i},$$

*где* $K(Q, P)$ *– некоторый новый гамильтониан. Тогда*

$$\oint_{\varphi(\gamma)} dQP = c \oint_{\gamma} dq\, p, \tag{6.52}$$

*где* $c \neq 0$ *– некоторая постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}+1}$. Пусть $\gamma$ – замкнутый контур в фазовом пространстве, соответствующий фиксированному моменту времени $t = \mathsf{const}$. Тогда в силу следствия из теоремы 6.1.3 интегралы

$$\oint_{\gamma} dq\, p \qquad \text{и} \qquad \oint_{\varphi(\gamma)} dQP$$

являются интегральными инвариантами фазовых потоков. По теореме Стокса интеграл по контуру $\gamma$ преобразуется в интеграл по поверхности, натянутой на данный контур. Используя теорему 6.1.13, заключаем, что

$$\oint_{\varphi(\gamma)} dQP = c \oint_{\gamma} dq\, p,$$

где $c \neq 0$ – некоторая постоянная.

Ясно, что множество преобразований, сохраняющих вид гамильтоновых уравнений, образует группу преобразований фазового пространства.

Следствие. Любое преобразование координат $q, p \mapsto Q, P$ фазового пространства, которое сохраняет форму гамильтоновых уравнений движения, является композицией преобразования $\varphi_c$ (6.51) и некоторого канонического преобразования.

Доказательство. При преобразовании координат $q, p \mapsto Q, P$ относительный интегральный инвариант Пуанкаре–Картана умножается на некоторую постоянную $c$ (6.52). Представим это преобразование в виде двух последовательных преобразования координат:

$$\varphi_c : \ q, p \mapsto \tilde{q}, \tilde{p} \qquad \text{и} \qquad g : \ \tilde{q}, \tilde{p} \mapsto Q, P.$$

Поскольку при первом преобразовании инвариант умножается на ту же постоянную $c$, то при втором преобразовании координат он сохраняется,

$$g: \quad \oint_{\varphi_c(\gamma)} d\tilde{q}\,\tilde{p} = \oint_{g\circ\varphi_c(\gamma)} dQP.$$

Ввиду произвольности контура $\gamma$ это значит, что преобразование $g$ является каноническим.

Поскольку преобразование $\varphi_c$ (6.51) является простой растяжкой координат, то канонические преобразования составляют нетривиальную и наиболее содержательную часть преобразований координат, сохраняющих вид гамильтоновых уравнений движения.

Сформулируем три критерия каноничности преобразований. С этой целью введем новое понятие. Обозначим координаты фазового пространства через $\{x^\alpha\} = \{q^i, p_i\}$, $\alpha = 1, \ldots, 2\mathrm{N}$.

Определение. Пусть на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с координатами $\{x^\alpha\} = \{q^i, p_i\}$ и канонической симплектической формой $\varpi$ задано преобразование координат $\{x^\alpha\} \mapsto \{y^\alpha\} = \{Q^i(x), P_i(x)\}$. Назовем *скобкой Лагранжа* двух новых координат $y^\alpha$ и $y^\beta$ для заданного набора функций $q^i(y^\alpha, y^\beta)$, $p_i(y^\alpha, y^\beta)$, определяющих преобразование координат, следующее выражение

$$[y^\alpha, y^\beta]_{\mathrm{L}} := \varpi_{\delta\gamma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\delta}{\partial y^\beta} = \frac{\partial q^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial p_i}{\partial y^\beta} - \frac{\partial q^i}{\partial y^\beta}\frac{\partial p_i}{\partial y^\alpha}. \tag{6.53}$$

Скобка Лагранжа антисимметрична и определена для любой пары новых координат $y^\alpha$ и $y^\beta$. При этом мы не требуем, чтобы преобразование координат $x \mapsto y(x)$ было каноническим.

Замечание. Если на фазовом пространстве просто заданы две дифференцируемые функции $F, G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2\mathrm{N}})$, то скобка Лагранжа для них неопределена, так как не определены частные производные $\partial x^\alpha/\partial F$ и $\partial x^\alpha/\partial G$.

Теорема 6.1.16. *Для того чтобы преобразование координат фазового пространства $q, p \mapsto Q, P$ было каноническим, необходимо и достаточно выполнения следующих условий для скобок Лагранжа новых координат*:

$$[Q^i, Q^j]_{\mathrm{L}} = 0, \qquad [P_i, P_j]_{\mathrm{L}} = 0, \qquad [Q^i, P_j]_{\mathrm{L}} = \delta^i_j. \tag{6.54}$$

Доказательство. Подставляя в определение канонических преобразований (6.42) функции $q^i(Q, P)$, $p_i(Q, P)$, определяющие канонические преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned} dP_i \wedge dQ^i = \frac{1}{2}dQ^l \wedge dQ^k \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\frac{\partial p_i}{\partial Q^l} - \frac{\partial q^i}{\partial Q^l}\frac{\partial p_i}{\partial Q^k}\right) + \\ + dP_l \wedge dQ^k \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\frac{\partial p_i}{\partial P_l} - \frac{\partial q^i}{\partial P_l}\frac{\partial p_i}{\partial Q^k}\right) + \\ + \frac{1}{2}dP_l \wedge dP_k \left(\frac{\partial q^i}{\partial P_k}\frac{\partial p_i}{\partial P_l} - \frac{\partial q^i}{\partial P_l}\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right). \end{aligned} \tag{6.55}$$

Отсюда вытекает первый критерий каноничности преобразований координат.

Таким образом, при каноническом преобразовании скобки Лагранжа для новых координат обязаны совпадать со скобкой Пуассона.

Матрицы Якоби для канонических преобразований обладают замечательным свойством, которое можно сформулировать в виде второго критерия каноничности преобразований.

Теорема 6.1.17. *Преобразование координат фазового пространства является каноническим тогда и только тогда, когда матрица Якоби этого преобразования*

$$J_\alpha{}^\beta := \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial q} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial p} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

*является симплектической*, $J_\alpha{}^\beta \in \mathbb{SP}(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой равенства

$$\varpi_{\alpha\beta} = J_\alpha{}^\gamma J_\beta{}^\delta \varpi_{\gamma\delta} \tag{6.57}$$

с учетом свойств (6.54). Вычисления проще проводить в блочно-диагональном виде (6.56).

Поскольку определитель симплектической матрицы равен единице (4.5), то форма объема фазового пространства сохраняется при каноническом преобразовании. Отсюда также следует теорема Лиувилля 6.1.12.

Третий критерий каноничности преобразований формулируется в терминах скобок Пуассона.

Теорема 6.1.18. *Преобразование координат фазового пространства является каноническим тогда и только тогда, когда оно сохраняет скобки Пуассона*

$$[F, G]_{q,p} = [F, G]_{Q,P}. \tag{6.58}$$

*где $F$ и $G$ – две произвольные дифференцируемые функции на фазовом пространстве, и скобки Пуассона вычислены, соответственно, в координатах $q, p$ и $Q, P$ с одинаковыми каноническими структурными функциями $\varpi^{-1\alpha\beta}$.*

Доказательство. Канонические преобразования и только они сохраняют каноническую симплектическую форму. Сохранение этой формы эквивалентно сохранению матрицы $\varpi^{-1\alpha\beta}$, т.е. канонической пуассоновой структуры.

Пример 6.1.15. Преобразование

$$Q^i := q^i, \qquad P_i := p_i + \frac{\partial F(q)}{\partial q^i}, \tag{6.59}$$

где $F(q) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ – произвольная функция от обобщенных координат $q$, является каноническим. Действительно, скобки Пуассона

$$[Q^i, Q^j] = 0, \qquad [Q^i, P_j] = \delta^i_j$$

остаются прежними. Нетрудно также проверить, что

$$[P_i, P_j] = \left[P_i, \frac{\partial F}{\partial q^j}\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial q^i}, P_j\right] = 0.$$

Аналогично, преобразование

$$Q^i := q^i + \frac{\partial G(p)}{\partial p_i}, \qquad P_i = p_i,$$

где $G(p) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ – произвольная функция импульсов, также является каноническим.

Важность канонических преобразований сводится к следующему. Если удается найти такое каноническое преобразование, при котором гамильтониан упрощается настолько, что уравнения Гамильтона явно интегрируются, то тогда можно построить и решение исходной задачи. Соответствующие канонические преобразования зависят от конкретной задачи, и общего метода их нахождения не существует.

**6.1.11. Производящие функции канонических преобразований.** Широкий класс канонических преобразований (но не все) можно описать на языке производящих функций, которые строятся следующим образом. Рассмотрим фазовое пространство $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \approx \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с координатами $q, p$ и канонической пуассоновой структурой. Пусть $2\mathrm{N}$ функций $Q^i(q,p)$ и $P_i(q,p)$ от $2\mathrm{N}$ переменных задают каноническое преобразование. Тогда 1-форма

$$dq\,p - dQP = dS(q,p) \tag{6.60}$$

есть полный дифференциал.

Предположим, что в окрестности некоторой точки старые и новые координаты $(q,Q)$ можно выбрать в качестве координат фазового пространства. Это значит, что

$$\mathsf{det}\,\frac{\partial(q,Q)}{\partial(q,p)} = \mathsf{det}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q} & \dfrac{\partial Q}{\partial q} \\ 0 & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \end{pmatrix} = \mathsf{det}\,\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0. \tag{6.61}$$

Тогда функцию $S$ можно локально выразить через эти координаты:

$$S(q,p) = S_1(q,Q).$$

Функция $S_1(q,Q)$ называется *производящей функцией* канонического преобразования.

Из определения производящей функции и уравнения (6.60) следует, что

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}. \tag{6.62}$$

Конечно, эти формулы являются сокращенной записью равенств

$$p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q^i}, \qquad P_i = -\frac{\partial S_1}{\partial Q^i}.$$

Полученные уравнения служат для нахождения канонического преобразования

$$q, p \mapsto Q(q,p), P(q,p).$$

При этом выполнено равенство

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q^j} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i \partial Q^j}.$$

Таким образом, каждая производящая функция $S_1(q,Q)$ такая, что

$$\mathsf{det}\,\frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i \partial Q^j} \neq 0,$$

определяет некоторое каноническое преобразование по формулам (6.62), (6.61).

Для того чтобы получить гамильтониан $K(Q,P)$ для новых канонических переменных, необходимо просто подставить в старое выражение $H(q,p)$ функции $q = q(Q,P)$ и $p = p(Q,P)$:

$$K(Q,P) := H\big(q(Q,P), p(Q,P)\big). \tag{6.63}$$

Пример 6.1.16. Пусть $S_1 = q^i Q_i$. Тогда $Q_i = p_i$ и $P^i = -q^i$. Тем самым координаты и импульсы меняются местами. Этот пример показывает, что в каноническом формализме координаты и импульсы играют совершенно равноправную роль.

Пусть гамильтониан не зависит от времени явно. Покажем, что если производящая функция $S_1(q,Q)$ сама удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби по переменным $q$, то уравнения движения интегрируются в квадратурах. Для этого заметим, что если гамильтониан системы зависит только от новых координат $H = K(Q)$, то канонические уравнения

$$\dot{Q} = 0, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

просто интегрируются

$$Q = Q_0, \qquad P = P_0 - t\,\frac{\partial K}{\partial Q}\bigg|_{Q_0}.$$

Это, конечно, соответствует переходу к переменным действие-угол. Теперь будем искать производящую функцию $S_1(q,Q)$ этого канонического преобразования. Из первого условия (6.62) следует, что такая производящая функция должна удовлетворять уравнению

$$H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = K(Q). \tag{6.64}$$

То есть при каждом фиксированном значении $Q$ производящая функция $S_1(q,Q)$ должна удовлетворять укороченному уравнению Гамильтона–Якоби (6.37). Верно также и обратное утверждение.

Теорема 6.1.19 (Якоби). *Если найдено решение $S_1(q,Q)$ укороченного уравнения Гамильтона–Якоби* (6.64), *зависящее от* N *параметров $Q^i$ и такое, что*

$$\mathsf{det}\,\frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i \partial Q^j} \neq 0,$$

*то канонические уравнения* (6.24) *решаются в квадратурах, причем функции $Q(q,p)$, определяемые уравнениями $\partial S_1/\partial q^i = p_i$, являются* N *первыми интегралами уравнений Гамильтона.*

Доказательство. См., например, [52], глава 9, § 47, раздел Б.

Теорема Якоби сводит решение канонических уравнений к нахождению полного интеграла укороченного уравнения Гамильтона–Якоби. Может показаться удивительным, что сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем оказывается, что это – наиболее мощный из существующих в настоящее время методов интегрирования уравнений движения, и многие задачи, решенные методом Якоби, вообще не поддаются решению другими способами.

В качестве дополнительного аргумента производящей функции можно рассматривать время, $S_1 = S_1(q,Q,t)$. При этом все предыдущие формулы остаются в силе за исключением выражения (6.63) для нового гамильтониана. Оно получает дополнительное слагаемое

$$K = H + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \tag{6.65}$$

что следует из выражения для действия (6.50) в расширенном конфигурационном пространстве.

Если после канонического преобразования новый гамильтониан тождественно равен нулю, то уравнения движения, очевидно, интегрируются. Для этого необходимо выполнение уравнения

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + H(q,p,t) = 0.$$

Учитывая выражение для импульсов через производящую функцию (6.62) получаем, что производящая функция в этом случае должна удовлетворять уравнению Гамильтона–Якоби для всех значений $Q$. Тем самым доказана

Теорема 6.1.20 (Якоби). *Если найдено решение $S_1(q,Q,t)$ уравнения Гамильтона–Якоби (6.34), зависящее от* N *параметров $Q^i$ и такое, что*

$$\det\frac{\partial^2 S_1}{\partial q^i\partial Q^j}\ne 0,$$

*то канонические уравнения (6.24) решаются в квадратурах, причем координаты $Q^i = \mathsf{const}$ и импульсы $P_i := -\partial S_1/\partial Q^i = \mathsf{const}$ дают $2\mathrm{N}$ первых интегралов уравнений Гамильтона.*

Частное решение уравнения Гамильтона–Якоби, зависящее от $\mathrm{N}+1$ параметра (по числу независимых переменных), называется *полным интегралом.* Функция от $\mathrm{N}+1$ параметра $S_1(q,Q,t)+\mathsf{const}$, где $S_1$ – решение уравнения Гамильтона–Якоби из предыдущей теоремы является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби. В том случае, когда для уравнения Гамильтона–Якоби можно определить общее решение, оно будет зависеть от произвольных функций. Это значит, что полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби дает лишь незначительную часть всех решений.

Если известен полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби $S_1(q,Q,t)+\mathsf{const}$, то для нахождения траектории частицы, проходящей через заданную точку фазового пространства в начальный момент времени, необходимо решить дополнительные уравнения:

$$\frac{\partial S_1}{\partial Q^i}=c_i, \tag{6.66}$$

где $c_i$ – некоторые постоянные, определяемые начальным положением частицы.

Продолжим изучение производящих функций. Выше был рассмотрен случай, когда производящая функция зависит от старых и новых координат. Аналогичным образом можно показать, что канонические преобразования генерируются производящими функциями $S_2(q,P,t)$, зависящими от старых координат и новых импульсов. Если

$$\det\frac{\partial^2 S_2}{\partial q^i\partial P_j}\ne 0,$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$p:=\frac{\partial S_2}{\partial q},\qquad Q:=\frac{\partial S_2}{\partial P},\qquad K:=H+\frac{\partial S_2}{\partial t}. \tag{6.67}$$

Переход от производящей функции $S_1(q,Q)$ к $S_2(q,P)$ является преобразованием Лежандра по переменной $Q$ при этом

$$S_2(q,P,t)=S_1(q,Q,t)+PQ.$$

Пример 6.1.17. Каноническое преобразование, генерируемое производящей функцией $S_2=qP:=q^iP_i$ является тождественным.

Пример 6.1.18. Пусть $S_2=q^iS_i{}^jP_j$, где $S_i{}^j$ – произвольная невырожденная матрица. Тогда $P_i=S^{-1}{}_i{}^jp_j$ и $Q^i=q^jS_j{}^i$. То есть это преобразование генерирует линейное однородное преобразование фазового пространства.

Пример 6.1.19. Выберем производящую функцию бесконечно малых канонических преобразований в виде

$$S_2 = qP + \epsilon S(q, P, \epsilon), \qquad \epsilon \ll 1,$$

где $S(q, P, \epsilon)$ – произвольная функция, зависящая от параметра $\epsilon$. Тогда

$$Q = q + \epsilon \frac{\partial S}{\partial P}, \qquad p = P + \epsilon \frac{\partial S}{\partial q}.$$

Отсюда следует, что бесконечно малые канонические преобразования удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\left.\frac{dQ}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \left.\frac{dP}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

с функцией Гамильтона $H(q, p) = S(q, p, 0)$, так как в главном порядке $p = P$. Тем самым гамильтониан произвольной механической системы можно рассматривать как генератор бесконечно малых канонических преобразований по времени $t = \epsilon$, которые происходят по мере эволюции механической системы.

На самом деле движение частицы в фазовом пространстве $q(t)$, $p(t)$ можно рассматривать как последовательность канонических преобразований, параметризующихся одним параметром $t$. Допустим, что решение канонических уравнений движения определено для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда канонические уравнения движения (6.13) определяют однопараметрическую группу преобразований фазового пространства. Для каждого момента времени, по определению, выполнены канонические коммутационные соотношения (6.14). Следовательно, для каждого момента времени $t$ отображение фазового пространства

$$\mathbb{R}^{2\mathrm{N}} \ni \qquad \big(q(0), p(0)\big) \mapsto \big(q(t), p(t)\big) \qquad \in \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$$

представляет собой каноническое преобразование.

В заключение рассмотрим еще два вида производящих функций, часто встречающихся в приложениях. Если производящая функция $S_3(p, Q, t)$ зависит от старых импульсов и новых координат, и при этом

$$\det \frac{\partial^2 S_3}{\partial p_i \partial Q^j} \neq 0,$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$q := -\frac{\partial S_3}{\partial p}, \qquad P := -\frac{\partial S_3}{\partial Q}, \qquad K := H + \frac{\partial S_3}{\partial t}. \tag{6.68}$$

При этом производящая функция $S_3$ является преобразованием Лежандра функции $S_1$ по переменной $q$:

$$S_3(p, Q, t) = S_1(q, Q, t) - pq.$$

Пример 6.1.20. Каноническое преобразование, генерируемое производящей функцией $S_3 = -p_i Q^i$, является тождественным.

Производящая функция $S_3(p, Q, t)$ полезна в следующем случае. Допустим, что нам заранее известно, как удобно выбрать координаты в конфигурационном пространстве, т.е. заданы функции $q = q(Q)$. Например, если конфигурационное пространство инвариантно относительно действия некоторой группы преобразований, то новые координаты $Q$ удобно выбрать в соответствии с симметрией задачи. Тогда производящая функция $S_3 = -p_i q^i(Q)$ дает выражения для новых обобщенных импульсов $P_i$, сопряженных к координатам $Q^i$.

Точечные преобразования, рассмотренные в разделе 6.1.3, относятся именно к этому типу. Точечные преобразования – это все преобразования координат, которые допустимы в лагранжевой механике. Рассмотренный выше пример показывает, что точечные преобразования составляют лишь небольшой класс канонических преобразований. Все множество канонических преобразований намного шире, и это является причиной большей гибкости канонического формализма по сравнению с лагранжевым.

Продолжим изучение производящих функций. Если производящая функция $S_4(p, P, t)$ зависит от старых и новых импульсов, и

$$\det \frac{\partial^2 S_4}{\partial p_i \partial P_j} \neq 0,$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$q := -\frac{\partial S_4}{\partial p}, \qquad Q := \frac{\partial S_4}{\partial P}, \qquad K := H + \frac{\partial S_4}{\partial t}. \tag{6.69}$$

При этом производящая функция $S_4$ является двойным преобразованием Лежандра функции $S_1(q, Q)$ по переменным $q$ и $Q$:

$$S_4(p, P, t) = S_1(q, Q, t) - pq + PQ.$$

Пример 6.1.21. Каноническое преобразование, генерируемое производящей функцией $S_4 = p_i P^i$, меняет местами координаты и импульсы: $Q_i = p_i$, $P^i = -q_i$. Это преобразование совпадает с каноническим преобразованием из примера 6.1.16.

Пример 6.1.22 (Гармонический осциллятор). Продемонстрируем сложные построения последних разделов на примере гармонического осциллятора. Пусть задана функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2,$$

где $\omega = \mathsf{const}$ – собственная частота гармонического осциллятора. Конфигурационное пространство представляет собой прямую $q \in \mathbb{R}$. Импульс, сопряженный координате $q$, равен скорости

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}.$$

Преобразование Лежандра приводит к положительно определенному гамильтониану:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2.$$

Фазовым пространством для гармонического осциллятора является евклидова плоскость $(q, p) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^2$ с канонической пуассоновой структурой. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\omega^2 q, \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0. \tag{6.70}$$

Общее решение этих уравнений параметризуется двумя произвольными постоянными: амплитудой $A_0$ и фазой $\varphi$,

$$\begin{aligned} q &= A_0 \cos(\omega t + \varphi), \\ p &= -A_0 \omega \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{6.71}$$

Фаза $\varphi$ соответствует выбору начала отсчета времени. Полученное решение соответствует решению задачи Коши с начальными данными

$$\begin{aligned} q_0 &= \quad A_0 \cos\varphi, \\ p_0 &= -A_0\omega \sin\varphi. \end{aligned}$$

В терминах начальных условий общее решение (6.71) перепишется в виде

$$\begin{aligned} q &= \quad q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t, \\ p &= -\omega q_0 \sin\omega t + p_0\cos\omega t. \end{aligned}$$

Траекториями гармонического осциллятора в фазовом пространстве являются эллипсы. Как видим, эволюция во времени представляет собой эллиптическое вращение фазового пространства $(q_0, p_0) \mapsto \big(q(t), p(t)\big)$. Если $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{R}^2$ – произвольная ограниченная область фазового пространства, то в соответствии с теоремой Лиувилля (6.1.12) объем этой области сохраняется во времени:

$$\int_{\mathbb{V}_0} dq_0 dp_0 = \int_{\mathbb{V}(t)} dq dp = \int_{\mathbb{V}(t)} dq_0 dp_0,$$

так как якобиан преобразования координат равен единице,

$$\det\frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)} = 1.$$

Поскольку гамильтониан не зависит от времени явно, то энергия на каждой траектории постоянна $E = H = \mathsf{const}$.

Найдем функцию действия $S(q,t)$. Чтобы вычислить интеграл (6.32) необходимо исключить скорости $\dot q$ из лагранжиана. Поскольку интегрирование ведется вдоль траектории частицы, то в лагранжиан необходимо подставить

$$\dot q = p = \sqrt{2E - \omega^2 q^2}.$$

В этом выражении $E$ рассматривается как некоторая постоянная. После несложных вычислений получаем функцию действия

$$\begin{aligned} S(q,t) = -\int dtE + \int dq\sqrt{2E-\omega^2q^2} = \\ = -Et + \frac{E}{\omega}\arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{2E}} + \frac{q}{2}\sqrt{2E-\omega^2q^2} \end{aligned}$$

с точностью до несущественной постоянной, определяемой начальными данными. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2E-\omega^2q^2} = p.$$

Поэтому уравнение Гамильтона–Якоби (6.34) выполняется. Укороченное действие имеет вид

$$W(q,E) = \frac{E}{\omega}\arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{2E}} + \frac{q}{2}\sqrt{2E-\omega^2q^2}.$$

Таким образом, нам известно укороченное действие, зависящее от параметра $E$, причем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q\partial E} \neq 0.$$

Поэтому его можно выбрать в качестве производящей функции канонического преобразования $q,p \to Q,P$

$$S_2(q,P)=\frac{P}{\omega}\,\mathrm{arcsin}\,\frac{\omega q}{\sqrt{2P}}+\frac{q}{2}\sqrt{2P-\omega^2q^2}.$$

Воспользовавшись формулами (6.67), получаем явный вид канонических преобразований

$$\begin{aligned} q&=\frac{\sqrt{2P}}{\omega}\,\mathrm{sin}\,(\omega Q),\\ p&=\sqrt{2P}\,\mathrm{cos}\,(\omega Q). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает связь дифференциалов:

$$\begin{aligned} dq&=\quad\sqrt{2P}\,\mathrm{cos}\,(\omega Q)dQ+\frac{1}{\omega\sqrt{2P}}\,\mathrm{sin}\,(\omega Q)dP,\\ dp&=-\omega\sqrt{2P}\,\mathrm{sin}\,(\omega Q)dQ+\frac{1}{\sqrt{2P}}\,\mathrm{cos}\,(\omega Q)dP. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что построенное преобразование действительно является каноническим

$$dp\wedge dq=dP\wedge dQ.$$

В новых переменных гамильтониан имеет вид $H=P$ и уравнения движения

$$\dot Q=P,\qquad \dot P=0$$

тривиально интегрируются. Таким образом, укороченная функция действия для гармонического осциллятора является производящей функцией к переменным “действие-угол”. Фазовым пространством в переменных “действие-угол” является полуплоскость $Q\in\mathbb{R}$, $P\geqslant 0$, а траекториями – прямые линии $P=\mathrm{const}$.

В настоящем разделе мы рассмотрели широкий класс канонических преобразований, которые генерируются четырьмя видами производящих функций: $S_1(q,Q,t)$, $S_2(q,P,t)$, $S_3(p,Q,t)$ и $S_4(p,P,t)$. Существуют также производящие функции более общего вида, которые мы сейчас опишем.

Предложение 6.1.3. *Пусть заданы две системы координат $q,p$ и $Q,P$ в фазовом пространстве пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ с канонической пуассоновой структурой. Тогда среди $4\mathrm{N}$ координатных функций $q,p,Q,P$ всегда можно выбрать $2\mathrm{N}$ независимых функций так, чтобы среди них не было ни одной пары канонически сопряженных функций $q^i,p_i$ или $Q^i,P_i$.*

Доказательство. См., например, [54], глава IV, лемма из § 29.

Из данного утверждения следует, что в качестве координат на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$ всегда можно выбрать набор функций

$$q^1,\dots,q^L,\ p_{L+1},\dots,p_{\mathrm{N}},\ Q^1,\dots,Q^M,\ P_{M+1},\dots,P^{\mathrm{N}},\qquad 0\leqslant L,M\leqslant \mathrm{N},$$

состоящий из $\mathrm{N}$ старых и $\mathrm{N}$ новых координат. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \{z^i\}&:=\{q^1,\dots,q^L,p_{L+1},\dots,p_{\mathrm{N}}\},\\ \{Z^i\}&:=\{Q^1,\dots,Q^M,P_{M+1},\dots,P^{\mathrm{N}}\}. \end{aligned}$$

Допустим, что на фазовом пространстве задана функция $S(z,Z)$ такая, что

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial z^i \partial Z^j} \ne 0. \tag{6.72}$$

Тогда нетрудно проверить, что функция $S(z,Z)$ определяет каноническое преобразование:

$$\begin{aligned} p_i &:= \frac{\partial S}{\partial q^i}, && i = 1,\dots,L, \\ q^i &:= -\frac{\partial S}{\partial p_i}, && i = L+1,\dots,\mathrm{N}, \\ P_i &:= -\frac{\partial S}{\partial Q^i}, && i = 1,\dots,M, \\ Q^i &:= \frac{\partial S}{\partial P_i}, && i = M+1,\dots,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Рассмотренное каноническое преобразование включает в себя четыре предыдущих при $L = 0, \mathrm{N}$ и $M = 0, \mathrm{N}$. В общем случае производящая функция $S(z,Z)$ зависит от старых координат и импульсов и новых координат и импульсов. При этом среди них нет ни одной пары канонически сопряженных переменных. Примеры 6.1.16 и 6.1.21 показывают, что различные производящие функции могут приводить к одинаковым каноническим преобразованиям. Во всех случаях от производящей функции требуется отличие от нуля определителя (6.72). Поэтому производящие функции описывают широкий класс канонических преобразований, но не все.

Пример 6.1.23. В примере 6.1.15 из предыдущего раздела было рассмотрено каноническое преобразование, которое не охватывается производящими функциями, рассмотренными в настоящем разделе. Действительно, для преобразования (6.59) формула (6.60) принимает вид

$$-dq\frac{\partial F(q)}{\partial q} = dS(q,p) = dq\frac{\partial S}{\partial q} + dp\frac{\partial S}{\partial p}.$$

Откуда следуют равенства:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \qquad \frac{\partial S}{\partial p} = 0.$$

Таким образом, для канонических преобразований вида (6.59) функция $S(q,p)$ имеет вид

$$S(q,p) = -F(q) + \mathsf{const}$$

и не относится ни к одному типу производящих функций настоящего раздела.

**6.1.12. Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби.** Теорема Якоби 6.1.20 утверждает, что если найден полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, то канонические уравнения решаются в квадратурах. По-видимому, все известные в настоящее время полные интегралы могут быть найдены путем *разделения переменных* в уравнении Гамильтона–Якоби. Суть метода состоит в следующем.

Допустим, что одна из координат – обозначим ее $q^{\mathrm{N}}$ – и соответствующая ей производная $\partial S/\partial q^{\mathrm{N}}$ входят в уравнение Гамильтона–Якоби только в виде комбинации $f(q^{\mathrm{N}}, \partial S/\partial q^{\mathrm{N}})$, где $f$ – некоторая функция двух переменных, не зависящая от других координат, соответствующих производных действия и времени. Тогда будем искать решение уравнения Гамильтона–Якоби (6.34) в виде

$$S(q,t) = \check{S}(\check{q},t) + S_{\mathrm{N}}(q^{\mathrm{N}}),$$

где $\check{S}(\check{q}, t)$ – функция оставшихся переменных $\check{q} = (q^1, \ldots, q^{\mathrm{N}-1})$ и времени, а $S_{\mathrm{N}}(q^{\mathrm{N}})$ зависит только от отделяемой координаты $q^{\mathrm{N}}$. Тогда уравнение Гамильтона–Якоби принимает вид

$$\frac{\partial \check{S}}{\partial t} + H\left(\check{q}, \frac{\partial \check{S}}{\partial \check{q}}, f\left(q^{\mathrm{N}}, \frac{dS_{\mathrm{N}}}{dq^{\mathrm{N}}}\right), t\right) = 0. \tag{6.73}$$

Допустим, что решение этого уравнения найдено. Тогда, после подстановки найденного решения в уравнение (6.73) мы получаем тождество, справедливое для всех значений координат. При изменении координаты $q^{\mathrm{N}}$ меняется только функция $f$. Поэтому для выполнения уравнения (6.73) необходимо, чтобы функция $f$ сама была равна постоянной, которую мы обозначим $Q^{\mathrm{N}}$, для произвольного решения. Таким образом, уравнение Гамильтона–Якоби (6.73) распадается на два уравнения:

$$f\left(q^{\mathrm{N}}, \frac{dS_{\mathrm{N}}}{dq^{\mathrm{N}}}\right) = Q^{\mathrm{N}}, \tag{6.74}$$

$$\frac{\partial \check{S}}{\partial t} + H\left(\check{q}, \frac{\partial \check{S}}{\partial \check{q}}, Q^{\mathrm{N}}, t\right) = 0. \tag{6.75}$$

Первое уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, из которого можно определить функцию $S_{\mathrm{N}} = S_{\mathrm{N}}(q^{\mathrm{N}}; Q^{\mathrm{N}})$. Если функция $f$ достаточно проста, то это уравнение иногда удается проинтегрировать явно. Постоянная $Q^{\mathrm{N}}$ является первым интегралом исходного уравнения Гамильтона–Якоби. После этого остается решить оставшееся уравнение (6.75), которое также имеет вид уравнения Гамильтона–Якоби, но для системы с меньшим числом степеней свободы. Эта система описывается гамильтонианом, который получается из исходного путем замены функции $f$ для отделенной степени свободы на некоторую константу. Единственное ограничение на постоянную $Q^{\mathrm{N}}$ состоит в том, чтобы уравнение (6.74) имело решение.

Иногда этот процесс отделения переменных можно продолжить. Если таким образом можно разделить все N координат, то тогда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби находится в квадратурах. В этом случае мы говорим, что уравнение Гамильтона–Якоби допускает *разделение переменных*.

Замечание. Разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби для одной и той же механической системы возможно не во всякой системе координат конфигурационного пространства. Как правило системы координат, в которых переменные делятся полностью или частично связаны с симметрией системы. Процедура нахождения такой системы координат, в которой переменные для интегрируемой системы разделяются, представляет собой отдельную задачу.

Допустим, что механическая система консервативна и переменные делятся. Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид

$$S(q, t) = -E(Q^1, \ldots, Q^{\mathrm{N}})t + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} S_k(q^k; Q^k, \ldots, Q^{\mathrm{N}}), \tag{6.76}$$

где каждая функция $S_k$ зависит от одной координаты $q^k$, а энергия $E$ как функция первых интегралов $Q^1, \ldots, Q^{\mathrm{N}}$ получается подстановкой укороченного действия

$$W = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} S_k(q^k, Q^k, \ldots, Q^{\mathrm{N}})$$

в укороченное уравнение Гамильтона–Якоби (6.37).

Пример 6.1.24 (циклические координаты). Пусть $q^{\text{N}}$ – циклическая координата, т.е. гамильтониан от нее вообще не зависит. В этом случае функция $f(q^{\text{N}}, \partial S/\partial q^{\text{N}})$ сводится просто к $\partial S/\partial q^{\text{N}}$. Тогда из уравнения (6.74) следует, что $S_{\text{N}} = q^{\text{N}} Q_{\text{N}}$ (никакого суммирования). Тогда функция действия принимает вид

$$S(q,t) = \check{S}(\check{q},t) + q^{\text{N}} Q_{\text{N}}.$$

В этом случае первый интеграл $Q_{\text{N}} = \partial S/\partial q^{\text{N}} = p_{\text{N}}$ имеет смысл обобщенного импульса, сопряженного циклической координате $q^{\text{N}}$.

Отметим, что если время $t$ рассматривать как обобщенную координату, то отделение времени в виде слагаемого $-Et$ в функции действия (6.36) для консервативной системы соответствует методу разделения переменных для циклической координаты $t$. При этом энергия $E$ сохраняется и соответствует импульсу для обобщенной координаты $t$.

Разделение переменных для консервативной системы возможно также в следующем более общем случае. Пусть гамильтониан механической системы имеет вид

$$H(q,p) = \frac{f_1(q^1, p_1) + \ldots + f_{\text{N}}(q^{\text{N}}, p_{\text{N}})}{g_1(q^1, p_1) + \ldots + g_{\text{N}}(q^{\text{N}}, p_{\text{N}})},$$

где $f_i(q^i, p_i)$ и $g_i(q^i, p_i)$ – некоторые функции только от указанных аргументов. Предыдущий случай возникает, например, при $g_i = \mathsf{const}$, $i = 1, \ldots, \text{N}$, $\sum_i g_i \neq 0$. Будем искать решение уравнения Гамильтона–Якоби в виде

$$S(q,t) = -Et + \sum_{i=1}^{\text{N}} W_i(q^i).$$

Тогда укороченное уравнение Гамильтона–Якоби (6.37) примет вид

$$\sum_{i=1}^{\text{N}} \left[ f_i \left( q^i, \frac{dW_i}{dq_i} \right) - E g_i \left( q^i, \frac{dW_i}{dq_i} \right) \right] = 0.$$

Поскольку координаты $q_i$ меняются независимо, то каждое слагаемое в данной сумме должно быть равно некоторой постоянной,

$$f_i \left( q^i, \frac{dW_i}{dq_i} \right) - E g_i \left( q^i, \frac{dW_i}{dq_i} \right) = c_i. \tag{6.77}$$

При этом не все постоянные $c_i$ являются независимыми, так как должно быть выполнено равенство

$$c_1 + \ldots + c_{\text{N}} = 0.$$

Допустим, что все уравнения (6.77) можно разрешить относительно производных:

$$\frac{dW_i}{dq^i} = F_i(q^i, c_i).$$

Тогда полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби равен сумме

$$S(q,t) = -Et + \sum_{i=1}^{\text{N}} \int dq^i F_i(q^i, c_i, E).$$

Пример 6.1.25 (задача Кеплера). Рассмотрим частицу массы $m$, которая движется по плоскости с полярными координатами $r, \varphi$ под действием центральной силы с потенциалом $U(r)$. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H(r,\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + U(r). \tag{6.78}$$

К этой задаче сводится задача движения двух тел, находящихся под действием гравитационного взаимодействия с потенциалом $U(r) = -m_1 m_2/r$ после отделения движения центра масс. Поскольку гамильтониан не зависит от угла, то координата $\varphi$ является циклической, и переменные делятся. Поэтому функция действия имеет вид

$$S = -Et + W(r, E, M) + \varphi M, \tag{6.79}$$

где $p_\varphi = M = \mathsf{const}$ – сохраняющийся угловой импульс частицы (момент количества движения). В этом случае уравнение Гамильтона–Якоби сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 = 2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}. \tag{6.80}$$

Произвол в решении данного уравнения фиксируется положением частицы в начальный момент времени. В соответствии с общими утверждениями, функция действия (6.79), где $W$ – решение уравнения (6.80), зависит от двух постоянных: энергии $E$ и момента количества движения $M$, и представляет собой полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Таким образом, задача двух тел, взаимодействующих посредством центральных сил с произвольным потенциалом $U(r)$, решается в квадратурах. Чтобы найти траекторию частицы, проходящую через заданную точку фазового пространства в начальный момент времени, в соответствии с теоремой Якоби 6.1.20 необходимо решить дополнительные уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{\partial W}{\partial M} + \varphi = c_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = c_2,$$

где $c_{1,2}$ – некоторые постоянные (6.67), определяемые начальным положением частицы.

Заметим, что переменные в задаче Кеплера на плоскости делятся в полярных координатах (в трехмерном пространстве – в сферических), которые связаны со сферической симметрией потенциала взаимодействия. В декартовой системе координат переменные в уравнении Гамильтона–Якоби не делятся.

## 6.2. Гамильтонова динамика частиц со связями

В современной математической физике большую роль играют модели, инвариантные относительно действия локальных групп преобразований, которые принято называть калибровочными. С точки зрения гамильтонова формализма такие модели соответствуют системам со связями. В калибровочных моделях связи возникают не как дополнительные условия на канонические переменные, наложенные извне, а при переходе от вырожденного инвариантного лагранжиана к гамильтониану. Основы гамильтонова формализма для калибровочных моделей были заложены П. Дираком на примере точечных частиц [55, 56, 57]. Обобщение этого формализма на теорию поля представляет значительные трудности, и эта задача до сих пор не решена. В теории поля до настоящего времени, как правило, используют методы, развитые для точечных частиц. В простейших случаях это приводит к разумным результатам.

В последующих разделах мы обсудим вопрос о гамильтоновой динамике со связями для систем точечных частиц, оставив в стороне важную задачу перехода от вырожденных калибровочно инвариантных лагранжианов к гамильтонианам, которая подробно рассматривается в монографиях [58, 59, 60]. Квантование калибровочных моделей с помощью функционального интеграла в фазовом пространстве было развито в [61, 62].

**6.2.1. Связи в гамильтоновом формализме.** Рассмотрим систему $\mathrm{N}$ точечных частиц с действием (6.7). Предположим, что фазовое пространство представляет собой дифференцируемое многообразие $\mathbb{N}$ класса $\mathcal{C}^k$, $\operatorname{dim}\mathbb{N} = 2\mathrm{N}$. Для простоты предположим, что фазовое пространство топологически тривиально, $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$, и покрывается одной картой. Координаты на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, как и раньше, обозначим $(q,p) = (q^1,\dots,q^{\mathrm{N}},p_1,\dots,p_{\mathrm{N}})$. Мы предполагаем, что на фазовом пространстве задана каноническая пуассонова структура $[q^i,p_j] = \delta^i_j$.

Пусть на канонические переменные наложены *связи* в виде $2\mathrm{M}$ алгебраических условий:

$$\Phi^\mu(q,p) = 0, \qquad \Phi^\mu \in \mathcal{C}^k(\mathbb{N}), \quad \mu = 1,\dots,2\mathrm{M} < 2\mathrm{N}. \tag{6.81}$$

Мы пишем индекс связи вверху, поскольку в дальнейшем связи будут частью новых координатных функций. Условия (6.81) представляют собой систему уравнений на канонические переменные. Будем считать, что все $\Phi^\mu$ функционально независимы, т.е. ранг матрицы $\partial\Phi^\mu/\partial x^\alpha$, где $x = (q,p)$, максимален и равен $2\mathrm{M}$ в окрестности всех точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (6.81). Если все связи принадлежат классу $\mathcal{C}^k$, то их совокупность определяет подмногообразие

$$\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N}: \quad \Phi = 0\}$$

того же класса гладкости и размерности $\operatorname{dim}\mathbb{M} = 2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$. Это подмногообразие называется *поверхностью связей*, которую будем обозначать равенством $\Phi = 0$ без индекса.

Замечание. Вообще говоря, $\Phi^\mu(q,p)$ не являются функциями на фазовом пространстве, так как могут иметь тензорные индексы. Например, в электродинамике первичная связь имеет вид $p_0 = 0$.

Условие функциональной независимости связей налагает жесткие ограничения на вид функций $\Phi^\mu$.

Пример 6.2.1. Пусть на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ задана одна связь $\Phi(q,p) = 0$. Условие функциональной независимости означает, что ранг матрицы $\partial_\alpha\Phi$, которая в рассматриваемом случае представляет собой строку, равен единице, т.е. по крайней мере одна из частных производных в каждой точке поверхности связей $\mathbb{M}$ отлична от нуля. Если возвести связь в некоторую целую степень, то уравнение $\Phi^n = 0$ при $n > 1$ определяет ту же поверхность связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ (как множество точек). Однако связь $\Phi^n = 0$ не является функционально независимой. Действительно,

$$\partial_\alpha\Phi^n\big|_{\Phi=0} = n\Phi^{n-1}\partial_\alpha\Phi\big|_{\Phi=0} = 0.$$

Поэтому ранг матрицы $\partial_\alpha\Phi^n$ равен нулю и связь $\Phi^n = 0$ не является функционально независимой на $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, хотя и определяет ту же поверхность связей.

Рассмотренный пример показывает, что условие функциональной независимости связей означает не только определение поверхности связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, но и возможность выбора функций $\Phi^\mu$ в качестве трансверсальных координат к $\mathbb{M}$ в некоторой окрестности поверхности связей.

Уравнения, задающие поверхность связей, определены неоднозначно. Например, невырожденные линейные комбинации исходных связей

$$\Psi^\mu(q,p) := \Phi^\nu(q,p)S_\nu{}^\mu(q,p), \tag{6.82}$$

где матрица $S_\nu{}^\mu$ невырождена на всем фазовом пространстве $\mathbb{N}$, определяют ту же поверхность связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ и функционально независимы.

Определение. Системы связей $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$ называются *эквивалентными*, если они связаны между собой невырожденным линейным преобразованием (6.82) во всем фазовом пространстве.

Замечание. Если потребовать выполнения равенства (6.82) не во всем фазовом пространстве, а только на поверхности связей, то этого недостаточно для эквивалентности. Действительно, пусть поверхность связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ определена уравнениями $\Phi = 0$. Определим новые связи $\Psi = 0$ на поверхности связей с помощью некоторой невырожденной матрицы $S$, заданной на $\mathbb{M}$. После этого продолжим функции $\Psi$ на все фазовое пространство таким образом, чтобы уравнения $\Psi = 0$ определяли некоторое подмногообразие вида $\mathbb{M} \cup \mathbb{U} \subset \mathbb{N}$, где $\mathbb{U}$ – некоторое собственное подмногообразие $\mathbb{N}$ такое, что $\mathbb{U} \cap \mathbb{M} = \emptyset$. Никаких препятствий для этого нет. Таким образом, для новых связей условие (6.82) будет выполнено на $\mathbb{M}$, однако условия $\Psi = 0$ выделяют в фазовом пространстве $\mathbb{N}$ другое подмногообразие. Это означает, что матрица $S$ будет вырождена на $\mathbb{U}$.

Предложение 6.2.1. *Любая функция* $f(q,p) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{N})$, *обращающаяся в нуль на поверхности связей* $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, *в некоторой окрестности* $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{N}$ *произвольной точки* $(q_0,p_0) \in \mathbb{M}$ *представима в виде линейной комбинации связей*:

$$f(q,p) = \Phi^\mu(q,p) f_\mu(q,p), \qquad (q,p) \in \mathbb{U}_0, \tag{6.83}$$

*с достаточно гладкими коэффициентами* $f_\mu(q,p) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{U}_0)$.

Доказательство. Поскольку связи $\Phi^\mu$ функционально независимы, то в некоторой окрестности произвольной точки на поверхности связей $(q_0,p_0) \in \mathbb{M}$ их можно дополнить до системы координат $\{x^\alpha\} \to \{y^a, \Phi^\mu\}$, где $y^a$, $a = 1,\dots,2(\text{N} - \text{M})$, – координаты на поверхности связей. Тогда произвольная достаточно гладкая функция $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{U}_0)$ представима в виде

$$f(q,p) = f(q_0,p_0) + y^a(q,p) f_a(q,p) + \Phi^\mu(q,p) f_\mu(q,p)$$

с достаточно гладкими коэффициентами $f_\mu$, $f_a$. Так как функция $f$ равна нулю на поверхности связей $\mathbb{M}$, то $f(q_0,p_0) = 0$ и $f_a(q,p) = 0$ для всех $a$ и $(q,p) \in \mathbb{U}_0$. Поэтому справедливо представление (6.83).

**6.2.2. Гамильтонова динамика частиц со связями II рода.** Начнем рассмотрение гамильтоновой динамики частиц со связями с обсуждения связей второго рода, так как она значительно проще. Связи первого рода будут рассмотрены в следующем разделе. Там будет показано, что динамика частиц со связями I рода после наложения канонической калибровки сводится к рассмотрению частиц со связями II рода.

Определение. Связи $\Phi^\mu$, $\mu = 1,\dots,2\text{M}$, называются *связями II рода*, если определитель матрицы, составленной из скобок Пуассона связей между собой, отличен от нуля на поверхности связей:

$$\det{[\Phi^\mu, \Phi^\nu]}_{\Phi=0} \neq 0. \tag{6.84}$$

Отметим, что элементы матрицы, составленной из скобок Пуассона $[\Phi^\mu, \Phi^\nu]$, в общем случае зависят от точки фазового пространства. Условие (6.84) означает отличие определителя от нуля в каждой точке подмногообразия $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, определяемого связями (6.81). Из непрерывности функций $\Phi^\mu$ следует, что определитель (6.84) отличен от нуля не только на $\mathbb{M}$, но и в некоторой окрестности подмногообразия $\mathbb{M}$.

Поскольку матрица, составленная из скобок Пуассона,

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu} := [\Phi^\mu, \Phi^\nu], \tag{6.85}$$

антисимметрична, то ее определитель может быть отличен от нуля только при четном числе связей. Поэтому мы с самого начала предположили наличие четного числа связей $2\text{м}$. Это значит, что поверхность связей также имеет четную размерность $2(\text{n} - \text{м})$.

С точки зрения вариационного принципа при наличии связей на фазовом пространстве мы имеем задачу на условный экстремум, которую можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа. С этой целью рассмотрим *обобщенный* (*extended*) *гамильтониан*, который получается после добавления к исходному гамильтониану всех связей второго рода

$$H_\text{E} = H + \lambda_\mu \Phi^\mu, \tag{6.86}$$

где $\lambda_\mu = \lambda_\mu(q, p, t)$ – неопределенные множители Лагранжа. Этому гамильтониану соответствует *обобщенное действие*

$$S_\text{E} = \int_{t_1}^{t_2} dt(p\dot{q} - H - \lambda_\mu \Phi^\mu). \tag{6.87}$$

При варьировании этого действия мы считаем вариации координат на границе нулевыми, $\delta q(t_{1,2}) = 0$, а вариации импульсов и множителей Лагранжа могут быть произвольны, так как они входят в действие без производных. Канонические уравнения движения для обобщенного гамильтониана имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= [q^i, H_\text{E}] = [q^i, H] + \lambda_\mu [q^i, \Phi^\mu] + [q^i, \lambda_\mu]\Phi^\mu, \\ \dot{p}_i &= [p_i, H_\text{E}] = [p_i, H] + \lambda_\mu [p_i, \Phi^\mu] + [p_i, \lambda_\mu]\Phi^\mu. \end{aligned} \tag{6.88}$$

Эти уравнения необходимо дополнить уравнениями связей (6.81), возникающими при варьировании обобщенного действия по множителям Лагранжа. В уравнениях движения (6.88) последние слагаемые можно отбросить, так как они равны нулю на поверхности связей (6.81). Таким образом, мы имеем $2(\text{n} + \text{м})$ уравнений (6.88), (6.81) на $2(\text{n} + \text{м})$ переменных $q, p, \lambda$, из которых $2\text{n}$ уравнений являются дифференциальными. Решение этой задачи можно провести следующим образом.

Предложение 6.2.2. *Для того чтобы фазовая траектория гамильтоновой системы* (6.87), *проходящая через произвольную точку поверхности связей*, *целиком лежала на этой поверхности необходимо и достаточно*, *чтобы производная по времени от всех связей обращалась в нуль на поверхности связей*,

$$\dot{\Phi}^\mu = [\Phi^\mu, H_\text{E}]_{\Phi=0} = [\Phi^\mu, H]_{\Phi=0} + \lambda_\nu [\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\Phi=0} = 0. \tag{6.89}$$

Доказательство. Достаточность. Допустим, что в начальный момент времени траектория находилась на поверхности связей, т.е. $\Phi^\mu(q_0, p_0) = 0$, где $q_0 := q(0)$ и $p_0 := p(0)$. Тогда с течением времени уравнения $\Phi^\mu\big(q(t), p(t)\big) = 0$ будут выполнены на решении задачи Коши для системы уравнений (6.89).

Необходимость. Допустим, что каждая траектория, имеющая хотя бы одну точку на поверхности связей, целиком принадлежит этой поверхности. Тогда производная вдоль траектории от каждой связи должна быть равна нулю на поверхности связей, поскольку мы можем произвольно менять исходную точку на поверхности. Это означает выполнение условий (6.89) для всех значений индекса $\mu$.

Уравнения (6.89) можно рассматривать как уравнения на множители Лагранжа на поверхности связей. При этом условие, определяющее связи второго рода (6.84), является необходимым и достаточным для однозначного определения множителей Лагранжа $\lambda_\mu(x)$ на поверхности связей $\mathbb{M}$. Вне поверхности связей множители Лагранжа можно продолжить любым достаточно гладким образом, поскольку это не влияет на динамику частицы на поверхности связей. Для определенности, положим

$$\lambda_\mu = -J^{-1}_{\mu\nu}[\Phi^\nu, H] \tag{6.90}$$

в некоторой окрестности поверхности связей. Если продолжить множители Лагранжа вне поверхность связей каким-либо иным образом, то это изменит только траектории, лежащие вне поверхности связей, которые нас не интересуют. Множители Лагранжа (6.90) подставляем в уравнения (6.88) и решаем задачу Коши для координат и импульсов. Тогда, если в начальный момент времени точка фазового пространства находилась на поверхности связей, то она там и останется при эволюции системы. Это означает, что метод неопределенных множителей Лагранжа позволяет из вариационного принципа для обобщенного действия (6.87) определить множители Лагранжа и эволюцию динамических переменных.

Решение (6.90) для множителей Лагранжа означает, что, если связи выполняются в начальный момент времени для некоторой траектории, то множители Лагранжа всегда можно подобрать таким образом, что связи будут выполнены и во все последующие моменты времени.

Исключим множители Лагранжа (6.90) из уравнений движения (6.88):

$$\begin{aligned}\dot q^i &= [q^i, H] - [q^i, \Phi^\mu]J^{-1}_{\mu\nu}[\Phi^\nu, H],\\ \dot p_i &= [p_i, H] - [p_i, \Phi^\mu]J^{-1}_{\mu\nu}[\Phi^\nu, H].\end{aligned}$$

Эти уравнения можно записать в компактном виде с помощью нового важного понятия, которое было введено в [57].

Определение. Для любых функций $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{N})$ билинейная операция

$$[f, g]_{\text{D}} := [f, g] - [f, \Phi^\mu]J^{-1}_{\mu\nu}[\Phi^\nu, g], \tag{6.91}$$

называется *скобкой Дирака.*

Скобка Дирака, очевидно, антисимметрична и билинейна. Кроме того, нетрудно проверить, что для нее справедливо правило Лейбница и тождества Якоби. Следовательно, скобка Дирака определяет на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ новую пуассонову структуру (см. раздел 4.3). Напомним, что на фазовом пространстве уже существует каноническая пуассонова структура для координат и сопряженных импульсов $[f, g]$. Скобка Дирака определяет на $\mathbb{N}$ вторую *пуассонову структуру Дирака*, которая обладает рядом замечательных свойств для гамильтоновых систем со связями II рода.

Сначала заметим, что уравнения движения (6.88) можно записать в компактном виде

$$\dot q^i = [q^i, H]_{\text{D}}, \qquad \dot p_i = [p_i, H]_{\text{D}}. \tag{6.92}$$

В эти уравнения не входят явно множители Лагранжа, потому что достаточная информация о связях содержится в определении скобки Дирака.

Из определения (6.91) следует, что скобка Дирака каждой связи (6.81) с произвольной функцией $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{N})$ равна нулю:

$$[F, \Phi^\mu]_{\text{D}} = 0.$$

Отсюда вытекает, что диракова пуассонова структура вырождена и все связи второго рода являются функциями Казимира для скобки Дирака. Покажем, что других функционально независимых функций Казимира не существует.

Предложение 6.2.3. *На поверхности связей* $\Phi = 0$ *существует такая система координат* $y^a$, $a = 1, \dots, 2(\text{N} - \text{M})$, *что выполнены следующие условия*:

$$\det [y^a, y^b]_{\Phi=0} \neq 0, \qquad [y^a, \Phi^\mu]_{\Phi=0} = 0.$$

Доказательство. Поскольку связи функционально независимы, то их можно выбрать в качестве части координатных функций новой системы координат в некоторой окрестности поверхности связей. Выберем какие-либо координаты $\tilde{y}^a$, $a = 1, \dots, 2(\text{N} - \text{M})$, на поверхности связей. Тогда совокупность функций $\{\tilde{y}^a, \Phi^\mu\}$ образует систему координат в окрестности поверхности связей. В общем случае $[\tilde{y}^a, \Phi^\mu] \neq 0$. Тогда введем новые координаты на поверхности связей $y^a = \tilde{y}^a + \lambda^a_\mu \Phi^\mu$, где $\lambda^a_\mu$ – некоторые функции. На поверхности связей $\Phi = 0$ эти координаты совпадают со старыми. Выберем неизвестные функции $\lambda^a_\mu$ таким образом, чтобы на поверхности связей выполнялись уравнения:

$$[y^a, \Phi^\mu]_{\Phi=0} = [\tilde{y}^a, \Phi^\mu]_{\Phi=0} + \lambda^a_\nu [\Phi^\nu, \Phi^\mu]_{\Phi=0} = 0.$$

Это всегда можно сделать, поскольку связи $\Phi^\mu$ второго рода. В новой системе координат структурные функции канонической пуассоновой структуры на поверхности связей примут вид

$$J = \begin{pmatrix} [y^a, y^b]_{\Phi=0} & 0 \\ 0 & [\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\Phi=0} \end{pmatrix}.$$

Поскольку каноническая пуассонова структура невырождена, то $\det [y^a, y^b]_{\Phi=0} \neq 0$.

Из только что доказанного предложения следует, что в системе координат $\{y^a, \Phi^\mu\}$ структурные функции дираковой пуассоновой структуры примут вид

$$J_{\text{D}} = \begin{pmatrix} [y^a, y^b]_{\Phi=0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку $[y^a, y^b]_{\text{D}\Phi=0} = [y^a, y^b]_{\Phi=0}$. Отсюда следует, что в окрестности связей ранг $J_{\text{D}}$ равен $2(\text{N} - \text{M})$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 6.2.1. *Связи второго рода* $\Phi^\mu$ *и только они вместе со всеми их линейными комбинациями являются функциями Казимира для пуассоновой структуры Дирака* (6.91).

Используя скобку Дирака, для каждой связи $\Phi^\mu$ можно построить векторное поле с компонентами

$$X^\alpha_{\Phi^\mu} = [\Phi^\mu, x^\alpha]_{\text{D}},$$

где $x := (q, p)$ – координаты на фазовом пространстве $\mathbb{N}$. Согласно предложению 4.3.1 коммутаторы этих векторных полей равны нулю:

$$[X_{\Phi^\mu}, X_{\Phi^\nu}] = X_{[\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\text{D}}} = 0.$$

Следовательно, распределение векторных полей $\{X_{\Phi^\mu}\}$, $\mu = 1, \dots, 2\text{M}$, находится в инволюции и согласно теореме Фробениуса определяет интегральные подмногообразия в $\mathbb{N}$. Таким образом, постоянные значения функций Казимира слоят фазовое пространство $\mathbb{N}$ на симплектические сечения, одним из которых является поверхность связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.

Каноническая пуассонова структура на $\mathbb{N}$ не приспособлена для описания систем со связями, потому что ограничение скобки Пуассона двух функций на поверхность связей нельзя проводить до вычисления самой скобки:

$$[f, g]_{\Phi=0} \neq [f_{\Phi=0}, g_{\Phi=0}].$$

Например, мы сразу приходим к противоречию, если $f = \Phi^\mu$ и $g = \Phi^\nu$ для некоторых $\mu$ и $\nu$. В то же время ограничение скобки Дирака на поверхность связей можно проводить до вычисления самой скобки:

$$[f, g]_{\mathrm{D}}\big|_{\Phi=0} = \big[f_{\Phi=0}, g_{\Phi=0}\big]_{\mathrm{D}}. \tag{6.93}$$

Так как поверхность связей является подмногообразием $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, то ее можно рассматривать как вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$. Тогда равенство (6.93) означает, что вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$ является пуассоновым отображением для скобки Дирака, но не для канонической пуассоновой структуры на $\mathbb{N}$.

Поскольку скобки Дирака достаточно для описания эволюции всех переменных, то ее использование приносит существенные упрощения в описание динамики систем со связями II рода.

Скобка Дирака (6.91) определена с помощью канонической пуассоновой структуры на фазовом пространстве $\mathbb{N}$. В разделе 6.1.10 было показано, что канонические преобразования сохраняют вид канонической скобки Пуассона. Поэтому скобка Дирака двух функций также инвариантна относительно канонических преобразований, т.е. она имеет одинаковый вид в любых координатах на $\mathbb{N}$, связанных между собой каноническим преобразованием.

В физических приложениях важную роль играет специальная система координат на фазовом пространстве, которая строится с учетом вложения $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$. Ее существование обеспечивается следующим важным утверждением.

Теорема 6.2.2. *Пусть задано фазовое пространство $\mathbb{N}$ и набор функционально независимых связей второго рода* (6.81). *Тогда существует такое каноническое преобразование*

$$\{q^i, p_i\} \mapsto \{q^{*a}, p^*_a, Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}\}, \qquad a = 1, \dots, \mathrm{N} - \mathrm{M}, \qquad \mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{M},$$

*что набор связей $\Phi = 0$ эквивалентен связям*

$$Q = 0, \qquad P = 0.$$

*При этом координаты $q^*, p^*$ являются канонически сопряженными координатами и импульсами на поверхности связей $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$.*

Доказательство. Поскольку связи $\Phi^\mu$ являются связями второго рода, то согласно теореме Дарбу существуют такие координаты $Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}$, что $[Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}] = \delta^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ и уравнения $\Phi = 0$ эквивалентны уравнениям $Q = 0$, $P = 0$. После этого из теоремы Дарбу 4.5.3 следует существование системы координат $q^{*a}, p^*_a, Q^{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}$. Поскольку скобка Пуассона в новых координатах имеет канонический вид, то преобразование координат является каноническим.

Эта теорема локальна. Если найдены координаты $q^*, p^*, Q, P$ в явном виде, то ограничение функций на поверхность связей особенно просто: нужно просто положить $Q = 0$ и $P = 0$. В частности,

$$H_{\mathrm{E}}|_{\Phi=0} = H|_{Q=0,\, P=0}.$$

Поскольку

$$[q^*, Q] = 0, \quad [q^*, P] = 0 \qquad \text{и} \qquad [p^*, Q] = 0, \quad [p^*, P] = 0,$$

то уравнения движения (6.92) в новой системе координат примут вид

$$\begin{aligned} \dot q^* &= [q^*, H_{\mathrm{ph}}], & \dot p^* &= [p^*, H_{\mathrm{ph}}] \\ \dot Q^{\mathrm{A}} &= 0, & \dot P_{\mathrm{A}} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$H_{\mathrm{ph}}(q^*, p^*) = H_{\mathrm{E}}|_{\Phi=0} = H(q^*, p^*, Q, P)|_{Q=0,\, P=0}.$$

Мы видим, что динамика системы N частиц, на которую наложено 2M связей второго рода свелась к обычной динамике системы из N − M частиц, на которую уже не наложено никаких связей. По этой причине мы говорим, что система имеет N − M *физических степеней свободы* $q^*, p^*$. Координаты $Q, P$ описывают *нефизические степени свободы*, поскольку определяют связи. Динамика физических степеней свободы задается *эффективным* (*физическим*) *гамильтонианом* $H_{\text{ph}}$, зависящим только от физических координат и импульсов. Координаты на поверхности связей определены неоднозначно. Например, на $\mathbb{M}$ всегда можно совершить каноническое преобразование. Однако размерность поверхности связей (удвоенное число физических степеней свободы) фиксирована и всегда равна $2(\text{N} - \text{M})$. Мы говорим, что система N частиц с 2M связями II рода описывает N − M физических степеней свободы.

Замечание. На практике найти в явном виде координаты $q^*, p^*$ для физических степеней свободы удается только в простейших случаях. Кроме того, в теории поля связи часто представляют собой дифференциальные уравнения по пространственным координатам. В этих случаях переход к координатам $q^*, p^*$ задается нелокальными выражениями, как, например, в свободной электродинамике (см. раздел 9.3.3). Поэтому, вычисления обычно проводят в исходных координатах $q^i, p_i$, используя теорему 6.2.2 для доказательства общих утверждений.

Таким образом, если на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ с канонической пуассоновой структурой задана система связей $\{\Phi^\mu\}$ второго рода, то она определяет некоторое подмногообразие $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, на котором естественным образом определена каноническая пуассонова структура. Посмотрим на эту задачу с обратной точки зрения. Пусть задано вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$, и мы знаем, что подмногообразие $\mathbb{M}$ является фазовым пространством некоторой механической системы с канонической пуассоновой структурой. Возникает естественный вопрос может ли пространство-мишень также быть фазовым пространством? Ниже мы покажем, что ответ на этот вопрос положительный.

Пусть задано вложение

$$\varphi: \quad \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}, \qquad \mathsf{dim}\,\mathbb{M} = 2(\text{N} - \text{M}), \quad \mathsf{dim}\,\mathbb{N} = 2\text{N}, \ \text{M} < \text{N},$$

фазового пространства $\mathbb{M}$ с канонической пуассоновой структурой. Тогда в окрестности каждой точки $\mathbb{M}$ существует такая система координат $y^a$, $a = 1, \dots, 2(\text{N}-\text{M})$, в которой пуассонова структура имеет канонический вид

$$[y^a, y^b] = \varpi^{-1ab}.$$

Эта пуассонова структура определяет пуассонову структуру на образе $\varphi(\mathbb{M})$ с помощью дифференциала отображения $\varphi_*$. В дальнейшем образ отображения вложения мы отождествим с самим многообразием, т.е. положим $\mathbb{M} = \varphi(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$. Если $x^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 2\text{N}$, – система координат на $\mathbb{N}$, то индуцированная пуассонова структура на $\mathbb{M}$ в координатах $x^\alpha \in \mathbb{N}$ задается антисимметричной матрицей

$$J^{\alpha\beta} = \varpi^{-1ab} \partial_a x^\alpha \partial_b x^\beta, \tag{6.94}$$

где функции $x^\alpha(y)$ описывают вложение. Из свойств произведения матриц следует, что ранг этой пуассоновой структуры равен $2(\text{N} - \text{M})$, и поэтому она всегда вырождена. Следовательно, для индуцированной на $\mathbb{N}$ пуассоновой структуры существует 2M независимых функций Казимира $c^\mu$, $\mu = 1, \dots 2\text{M}$. Выберем координаты в окрестности $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ следующим образом

$$\{x^\alpha\} = \{y^a, c^\mu\}.$$

Тогда подмногообразие $\mathbb{M}$ задается постоянными значениями функций Казимира $c^\mu = \mathsf{const}$. Отсюда следует, что уравнения $c^\mu = \mathsf{const}$ эквивалентны исходной системе связей (6.81).

Проведенное построение показывает, что на фазовом пространстве $\mathbb{N}$ существует такая система координат, в которой индуцированная пуассонова структура имеет вид

$$J^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varpi^{-1ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым можно отождествить индуцированную пуассонову структуру с дираковой пуассоновой структурой, а функции Казимира $c^\mu$ со связями $\Phi^\mu$.

Ранее скобка Дирака была определена через каноническую пуассонову структуру на исходном многообразии $\mathbb{N}$ с помощью связей. В обратную сторону однозначного рецепта определения невырожденной пуассоновой структуры на $\mathbb{N}$ не существует, поскольку ранг индуцированной пуассоновой структуры $2(\mathrm{N} - \mathrm{M})$ меньше размерности многообразия $\dim \mathbb{N} = 2\mathrm{N}$. Здесь существует много возможностей. Например, можно просто положить $J^{\alpha\beta} = \varpi^{-1\alpha\beta}$ в координатах $\{y^a, c^\mu\}$. Тогда получим каноническую пуассонову структуру на $\mathbb{N}$.

**6.2.3. Гамильтонова динамика частиц со связями I рода.** Пусть действие для $\mathrm{N}$ точечных частиц в фазовом пространстве $\mathbb{N}$ имеет обычный вид (6.7). Будем искать решение канонических уравнений движения (6.24) при наличии $\mathrm{M} < \mathrm{N}$ связей на канонические переменные:

$$G_{\mathrm{A}}(q,p) = 0, \qquad \mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{M} < \mathrm{N}. \tag{6.95}$$

Другими словами, будем считать, что частицы не могут покинуть $(2\mathrm{N} - \mathrm{M})$-мерное подмногообразие фазового пространства $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$ (*поверхность связей*), определенного уравнениями (6.95). Из дальнейшего рассмотрения будет ясно, почему мы выбрали число связей первого рода в два раза меньшим числа связей второго рода и почему индекс у связей первого рода пишется внизу.

Предположим, что связи являются достаточно гладкими функциями и функционально независимы на поверхности связей (6.95), т.е. ранг матрицы $\partial G_{\mathrm{A}}/\partial x^\alpha$, где $x := (q^1, \dots, q^{\mathrm{N}}, p_1, \dots, p_{\mathrm{N}})$ – координаты фазового пространства, максимален и равен $\mathrm{M}$. Будем считать, что рассматриваемая гамильтонова система со связями находится в *инволюции*:

$$[G_{\mathrm{A}}, G_{\mathrm{B}}] = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} G_{\mathrm{C}} \approx 0, \tag{6.96}$$

$$[G_{\mathrm{A}}, H] = v_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} G_{\mathrm{B}} \approx 0, \tag{6.97}$$

где $f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}(q,p) = -f_{\mathrm{BA}}{}^{\mathrm{C}}(q,p)$ и $v_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}(q,p)$ – некоторые функции от точки фазового пространства $(q,p) \in \mathbb{N}$. Волнистый знак равенства $\approx$ обозначает, что данная функция обращается в нуль на поверхности связей:

$$f \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad f|_{G=0} = 0.$$

При этом говорят, что скобки Пуассона связей между собой и с гамильтонианом *слабо равны нулю.*

Для выполнения равенств (6.96) необходимо, чтобы количество связей не превосходило половины размерности фазового пространства $\mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$, что мы потребовали с самого начала (6.95). Действительно, при преобразованиях координат фазового пространства каноническая пуассонова структура не может вырождаться. В силу функциональной независимости функций $G_{\mathrm{A}}$ их можно выбрать в качестве части новых координат. Если $\mathrm{M} > \mathrm{N}$, то пуассонова структура была бы вырожденной, что невозможно для фазового пространства.

Определение. Связи (6.95), наложенные на канонические переменные механической системы с гамильтонианом $H(q,p)$, которые удовлетворяют условиям (6.96), (6.97), называются *связями I рода.*

Мы предполагаем, что все связи I рода учтены в системе уравнений (6.95), т.е. для заданной гамильтоновой системы не существует большего числа функционально независимых соотношений между каноническими переменными, для которых выполнены условия (6.96) и (6.97).

Скобки Пуассона (6.96) по виду напоминают коммутатор базисных векторных полей в алгебре Ли. Однако в рассматриваемом случае допускается нетривиальная зависимость *структурных функций* от точки фазового пространства: ${f_{\text{AB}}}^{\text{C}} = {f_{\text{AB}}}^{\text{C}}(q,p)$.

Напомним, что связи определены неоднозначно. А именно, невырожденные линейные комбинации связей определяют ту же поверхность связей. Это приведет к изменению структурных функций ${f_{\text{AB}}}^{\text{C}}$ и ${v_{\text{A}}}^{\text{B}}$, что важно при решении уравнений движения.

Функции ${f_{\text{AB}}}^{\text{C}}$ и ${v_{\text{A}}}^{\text{B}}$ не могут быть произвольными. По определению, скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Якоби. Рассмотрев скобки Пуассона $\big[[G_{\text{A}},G_{\text{B}}],G_{\text{C}}\big]$ и $\big[[G_{\text{A}},G_{\text{B}}],H\big]$ и их циклические перестановки, получим ограничения на структурные функции:

$$\begin{aligned} {f_{\text{AB}}}^{\text{D}}{f_{\text{DC}}}^{\text{E}} + {f_{\text{BC}}}^{\text{D}}{f_{\text{DA}}}^{\text{E}} + {f_{\text{CA}}}^{\text{D}}{f_{\text{DB}}}^{\text{E}} + [{f_{\text{AB}}}^{\text{E}},G_{\text{C}}] + [{f_{\text{BC}}}^{\text{E}},G_{\text{A}}] + [{f_{\text{CA}}}^{\text{E}},G_{\text{B}}] &= 0, \\ {f_{\text{AB}}}^{\text{D}}{v_{\text{D}}}^{\text{C}} + {v_{\text{B}}}^{\text{D}}{f_{\text{DA}}}^{\text{C}} - {v_{\text{A}}}^{\text{D}}{f_{\text{DB}}}^{\text{C}} + [{f_{\text{AB}}}^{\text{C}},H] + [{v_{\text{B}}}^{\text{C}},G_{\text{A}}] - [{v_{\text{A}}}^{\text{C}},G_{\text{B}}] &= 0. \end{aligned} \tag{6.98}$$

Тождество Якоби для двойной скобки Пуассона $\big[[G_{\text{A}},H],H\big]$ удовлетворяются автоматически в силу уравнения (6.97).

Если структурные функции постоянны, ${f_{\text{AB}}}^{\text{C}} = \mathsf{const}$, то множество всех линейных комбинаций $a^{\text{A}}G_{\text{A}}$, $a^{\text{A}} \in \mathbb{R}$, образует алгебру Ли с базисом $G_{\text{A}}$. Тогда уравнение (6.96) задает коммутатор базисных векторов, а соотношение (6.98) сводится к тождеству Якоби для структурных констант.

Предложение 6.2.4. *Для того чтобы фазовые траектории для гамильтониана $H$, проходящие через произвольную точку на поверхности связей, целиком лежали на этой поверхности необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия* (6.97).

Доказательство. Совпадает с доказательством предложения 6.2.2. Достаточно только заметить, что

$$\dot G_{\text{A}} = [G_{\text{A}},H] \approx 0, \tag{6.99}$$

и воспользоваться предложением 6.2.1.

С точки зрения вариационного принципа решение канонических уравнений (6.24) при наличии связей (6.95) является задачей на условный экстремум. Применим к решению этой задачи метод неопределенных множителей Лагранжа. С этой целью построим *полный* (*total*) *гамильтониан*, добавив к исходному гамильтониану линейную комбинацию связей первого рода,

$$H_{\text{T}} = H + \lambda^{\text{A}}G_{\text{A}}, \tag{6.100}$$

где $\lambda^{\text{A}} = \lambda^{\text{A}}(q,p,t)$ – неопределенные множители Лагранжа. Соответствующее действие, которое мы назовем *полным*, имеет вид

$$S_{\text{T}} = \int_{t_1}^{t_2} dt(p\dot q - H - \lambda^{\text{A}}G_{\text{A}}).$$

Из него вытекают уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta p_i} &= \phantom{-}\dot q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda^{\text{A}}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial p_i} = 0, \\ \frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta q^i} &= -\dot p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^{\text{A}}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial q^i} = 0, \end{aligned} \tag{6.101}$$

$$\frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta \lambda^{\text{A}}} = -G_{\text{A}} = 0, \tag{6.102}$$

где в правых частях уравнений движения (6.101) мы отбросили слагаемые, пропорциональные связям. При варьировании действия мы считаем вариации координат на границе равными нулю, $\delta q(t_{1,2}) = 0$, а вариации импульсов и множителей Лагранжа могут быть произвольны.

Предложение 6.2.5. *Для того чтобы фазовые траектории для полного действия $S_{\text{T}}$, проходящие через произвольную точку на поверхности связей, целиком лежали на этой поверхности достаточно, чтобы были выполнены условия* (6.96) *и* (6.97).

Доказательство. Повторяет доказательство предложения 6.2.2. Достаточно заметить, что

$$\dot{G}_{\text{A}} = [G_{\text{A}}, H] + \lambda^{\text{B}}[G_{\text{A}}, G_{\text{B}}] \approx 0.$$

Уравнения движения для систем со связями первого рода (6.101) существенно отличаются от уравнений для систем со связями второго рода. Дело в том, что они не позволяют определить ни одного множителя Лагранжа. Это связано с тем, что уравнения (6.89), из которых находились множители Лагранжа для связей второго рода, в рассматриваемом случае (6.99) на поверхности связей вовсе не содержат множителей Лагранжа. Тем самым любое решение уравнений движения для систем со связями первого рода содержит произвольные функции $\lambda^{\text{A}}(q, p, t)$, число которых совпадает с числом связей. Причиной функционального произвола в решении уравнений движения является калибровочная инвариантность.

Теорема 6.2.3. *Полное действие $S_{\text{T}}$ инвариантно относительно локальных инфинитезимальных преобразований, генерируемых каждой связью первого рода*:

$$\begin{aligned}
\delta q^i &= \epsilon^{\text{A}}[q^i, G_{\text{A}}] = \quad \epsilon^{\text{A}}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial p_i}, \\
\delta p_i &= \epsilon^{\text{A}}[p_i, G_{\text{A}}] = -\epsilon^{\text{A}}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial q^i}, \\
\delta\lambda^{\text{A}} &= \dot{\epsilon}^{\text{A}} + \epsilon^{\text{B}}{v_{\text{B}}}^{\text{A}} + \epsilon^{\text{B}}\lambda^{\text{C}}{f_{\text{BC}}}^{\text{A}},
\end{aligned} \tag{6.103}$$

*где $\epsilon^{\text{A}} = \epsilon^{\text{A}}(q, p, t)$ – малый параметр преобразований и $\dot{\epsilon} := \partial\epsilon/\partial t$. Параметр преобразований может быть произвольной функцией координат, импульсов и времени с нулевыми граничными условиями $\epsilon^{\text{A}}(t_{1,2}) = 0$ для всех $q$ и $p$.*

Доказательство. Вариация действия имеет вид

$$\delta S_{\text{T}} = \int dt \left( -\epsilon^{\text{A}}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial q^i}\dot{q}^i - \dot{p}_i\epsilon^{\text{A}}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial p_i} + \epsilon^{\text{A}}[G_{\text{A}}, H] + \epsilon^{\text{A}}\lambda^{\text{B}}[G_{\text{A}}, G_{\text{B}}] - \delta\lambda^{\text{A}}G_{\text{A}} \right).$$

Подставляя сюда вариацию множителей Лагранжа и интегрируя слагаемое $\dot{\epsilon}^{\text{A}}G_{\text{A}}$ по частям с учетом уравнений (6.96) и (6.97), получаем $\delta S_{\text{T}} = 0$. Условия на параметры калибровочных преобразований $\epsilon^{\text{A}}(t_{1,2}) = 0$ достаточны для того, чтобы интегрирование слагаемого $\dot{\epsilon}^{\text{A}}G_{\text{A}}$ по частям было возможно.

Согласно второй теореме Нётер локальная инвариантность приводит к линейной зависимости уравнений движения:

$$\frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta q}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial p} - \frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta p}\frac{\partial G_{\text{A}}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta\lambda^{\text{A}}}\right) + \frac{\delta S_{\text{T}}}{\delta\lambda^{\text{B}}}({v_{\text{A}}}^{\text{B}} + \lambda^{\text{C}}{f_{\text{AC}}}^{\text{B}}) = 0, \tag{6.104}$$

в чем нетрудно убедиться и прямой проверкой. В этом случае для любого решения системы уравнений (6.101) будет автоматически выполнено уравнение

$$\dot{G}_{\text{A}} = (v_{\text{A}}{}^{\text{B}} + \lambda^{\text{C}} f_{\text{AC}}{}^{\text{B}})G_{\text{B}}.$$

Для этой системы уравнений точка $G = 0$ является неподвижной. Поэтому, если в начальный момент времени фазовая траектория находится на поверхности связей, то для любого решения системы уравнений (6.101) при любых множителях Лагранжа $\lambda^{\text{A}}(q, p, t)$ связи $G_{\text{A}} = 0$ будут автоматически удовлетворены. Это и является причиной возникновения функционального произвола в решениях уравнений движения.

Замечание. Преобразования координат фазового пространства $q, p$ (6.103) с малым постоянным параметром $\epsilon = \mathsf{const}$ являются инфинитезимальной формой канонического преобразования, описанного в примере 6.1.19,

$$q^i(t) \;\mapsto\; q^i(t, \epsilon), \qquad p_i(t) \;\mapsto\; p_i(t, \epsilon),$$

определяемого уравнениями

$$\frac{\partial q^i}{\partial \epsilon^{\text{A}}} = [q^i, G_{\text{A}}], \qquad \frac{\partial p_i}{\partial \epsilon^{\text{A}}} = [p_i, G_{\text{A}}].$$

Определение. Модели, функционал действия которых инвариантен относительно локальных преобразований, называют *калибровочными*, а сами преобразования – *калибровочными*.

Замечание. Это название пришло из физики, где все калибровочные модели, в частности, электродинамика и поля Янга–Миллса обладают этим свойством.

Тем самым мы доказали, что каждой связи первого рода соответствует локальная инвариантность полного действия, а сама связь является генератором калибровочных преобразований. По аналогии с генераторами групп Ли мы пишем индексы у связей первого рода внизу.

Проанализируем уравнения движения подробнее. Поскольку среди $2\text{N} + \text{M}$ уравнений Эйлера–Лагранжа (6.101) и (6.102) только $2\text{N}$ являются независимыми, то в отличии от задачи на условный экстремум, рассмотренной в разделе 5.1, этих уравнений недостаточно для определения всех неизвестных функций $q(t)$, $p(t)$ и $\lambda(t)$. Допустим, что систему уравнений (6.101) можно решить относительно канонических переменных, для которых поставлена задача Коши: $q(t_1) = q_1$, $p(t_1) = p_1$. Тогда решение этой задачи будет зависеть от M произвольных функций времени, которыми являются множители Лагранжа, и $2\text{N}$ постоянных интегрирования. Все постоянные интегрирования определяются начальными данными. В этом случае через одну точку фазового пространства проходит множество фазовых траекторий, которые параметризуется множителями Лагранжа.

С физической точки зрения это означает следующее. Пусть некоторое физическое явление описывается калибровочной моделью. Тогда начальное состояние системы не определяет однозначно последующую эволюцию, что противоречит экспериментальным данным (детерминизм), если не принимать во внимание квантовомеханическую неопределенность. Тем не менее калибровочные модели в настоящее время широко используются в теоретической физике: классическим примером служит электродинамика.

Выход из этого противоречия прост. Для калибровочных моделей вводится постулат: все физические наблюдаемые калибровочно инвариантны, т.е. не зависят от произвольных функций, которые могут содержаться в решении уравнений движения. Отсюда следует, что физические наблюдаемые описываются функциями $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{N})$ на фазовом пространстве $\mathbb{N}$, которые являются калибровочно инвариантными. А именно, мы требуем, чтобы скобка Пуассона каждой наблюдаемой функции со связями обращалась в нуль на поверхности связей:

$$[f, G_{\text{A}}] = d_{\text{A}}{}^{\text{B}} G_{\text{B}} \approx 0, \tag{6.105}$$

где $d_{\text{A}}{}^{\text{B}}(q, p)$ – некоторые достаточно гладкие функции канонических переменных. Тогда в уравнении движения для калибровочно инвариантной функции

$$\dot{f} = [f, H] + \lambda^{\text{A}}[f, G_{\text{A}}] \approx [f, H],$$

все слагаемые с множителями Лагранжа обратятся в нуль на поверхности связей и, следовательно, на поверхности связей никакого произвола в эволюции калибровочно инвариантной функции нет.

Проведенное рассмотрение требует комментария, потому что каждой физической наблюдаемой соответствует не одна, а целый класс калибровочно инвариантных функций. Поскольку мы рассматриваем динамику частиц на поверхности связей (6.95), то физические наблюдаемые определяются значениями калибровочно инвариантных функций на поверхности связей. Пусть две калибровочно инвариантные функции $f_1$ и $f_2$ совпадают на поверхности связей $\mathbb{U}$. Тогда они могут отличаться только на линейную комбинацию связей:

$$f_2 = f_1 + \mu^{\text{A}} G_{\text{A}}, \tag{6.106}$$

где $\mu^{\text{A}}(q, p)$ – некоторые достаточно гладкие функции. Следовательно, все множество калибровочно инвариантных функций разбивается на классы эквивалентности (6.106). При этом каждый класс эквивалентности соответствует одной физической наблюдаемой.

Другими словами, калибровочно инвариантная функция задается на поверхности связей $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$, а затем продолжается на все фазовое пространство в значительной степени произвольным образом. Степень произвола описывается произвольными функциями $\mu^{\text{A}}(q, p)$. При этом физические наблюдаемые не зависят от способа продолжения.

Оценим произвол, с которым калибровочно инвариантная функция может быть задана на поверхности связей $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$. Условие калибровочной инвариантности (6.105) представляет собой систему $\text{M}$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которую можно переписать в виде

$$X_{G_{\text{A}}} f = 0,$$

где $X_{G_{\text{A}}}$ – векторное поле, соответствующее связи $G_{\text{A}}$ (4.27). Для этой системы уравнений условиями совместности являются уравнения (6.96). Действительно,

$$[X_{G_{\text{A}}}, X_{G_{\text{B}}}] f = X_{[G_{\text{A}}, G_{\text{B}}]} f = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} X_{G_{\text{C}}} f = 0,$$

где мы воспользовались равенством (4.28). Поэтому функция $f$ однозначно определяется начальными данными на некотором собственном подмногообразии $\mathbb{M} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{N}$ размерности $2\text{N} - \text{M} - \text{M} = 2(\text{N} - \text{M})$ и существенно зависит только от части координат на $\mathbb{U}$. Подмногообразие $\mathbb{M}$ можно задать с помощью $\text{M}$ дополнительных функционально независимых соотношений между координатами и импульсами:

$$F^{\text{A}}(q, p) = 0, \tag{6.107}$$

которые называются *калибровочными условиями*. Эти условия должны удовлетворять неравенству

$$\mathsf{det}\,[F^{\text{A}}, G_{\text{B}}]\Big|_{F=0,\,G=0} \neq 0, \tag{6.108}$$

так как только в этом случае на $\mathbb{M}$ можно задать начальные данные для системы уравнений (6.105). Условия (6.107) при выполнении (6.108) называются *канонической калибровкой*. Для точечных частиц отличие от нуля определителя (6.108) является необходимым и достаточным условием однозначного определения множителей Лагранжа в полном гамильтониане (6.100). В общем случае функции $F^{\text{A}}$, определяющие калибровочные условия, могут зависеть также от времени и множителей Лагранжа $\lambda^{\text{A}}$.

После фиксирования канонической калибровки на рассматриваемую гамильтонову систему будет наложено $2\text{M}$ связей (6.95) и (6.107). Введем для полной совокупности связей и калибровочных условий следующее обозначение

$$\{\Phi^\mu\} = (F^1, \dots, F^{\text{M}}, G_1, \dots, G_{\text{M}}), \qquad \mu = 1, \dots, 2\text{M}. \tag{6.109}$$

Очевидно, что

$$\mathsf{det}\,[\Phi^\mu, \Phi^\nu]_{\Phi=0} = \mathsf{det}\begin{pmatrix} [F^{\text{A}}, F^{\text{B}}] & [F^{\text{A}}, G_{\text{B}}] \\ [G_{\text{A}}, F^{\text{B}}] & [G_{\text{A}}, G_{\text{B}}] \end{pmatrix}_{\Phi=0} = \mathsf{det}^2[F^{\text{A}}, G_{\text{B}}]_{\Phi=0}, \tag{6.110}$$

так как $[G_{\text{A}}, G_{\text{B}}] \approx 0$. Поскольку определитель скобок Пуассона для канонических калибровочных условий со связями первого рода по построению отличен от нуля (6.108), то полная совокупность связей $\Phi^\mu$ представляет собой систему связей второго рода, рассмотренную в предыдущем разделе. Таким образом, калибровочные модели в канонической калибровке сведены к гамильтоновым системам со связями второго рода, для которых метод множителей Лагранжа применим в полном объеме. Заметим, что значение скобок Пуассона для канонических калибровочных условий между собой $[F^{\text{A}}, F^{\text{B}}]$ несущественно.

После наложения калибровочных условий возникает обобщенное действие

$$S_{\text{E}} = \int dt(p_i\dot q^i - H - \lambda^{\text{A}} G_{\text{A}} - \pi_{\text{A}} F^{\text{A}}) = \int dt(p_i\dot q^i - H - \lambda_\mu \Phi^\mu),$$

которое совпадает с выражением (6.87) для систем со связями II рода.

Каноническая калибровка выделяет в фазовом пространстве $\mathbb{N}$ единственную траекторию, проходящую через данную точку физического подпространства $\mathbb{M}$. Это происходит благодаря тому, что каноническая калибровка однозначно определяет множители Лагранжа на поверхности связей $\Phi = 0$. Верно также обратное утверждение: произвольный выбор множителей Лагранжа эквивалентен некоторой канонической калибровке. Действительно, при фиксированных множителях Лагранжа граничная задача для уравнений (6.101) имеет единственное решение $x(t) = \{q(t), p(t)\}$. Перепишем для данного решения уравнения (6.101), но теперь уже с неопределенными множителями Лагранжа. В результате получим переопределенную, но совместную систему $2\text{N}$ линейных алгебраических уравнений на $\text{M}$ множителей Лагранжа. Тогда соответствующие соотношения $x^{\text{A}} = x^{\text{A}}(t)$ можно принять в качестве канонических калибровочных условий. Это следует из того, что, поскольку условия $F^{\text{A}} = x^{\text{A}} - x^{\text{A}}(t)$ позволяют однозначно определить множители Лагранжа, то условие (6.108) выполнено. Напомним, что это условие является необходимым и достаточным для однозначного определения множителей Лагранжа $\lambda^{\text{A}}$ на поверхности связей, как следует из анализа, проведенного в предыдущем разделе, и (6.110).

Замечание. В приложениях часто рассматриваются неканонические калибровки. Например, лоренцева или временна́я калибровки в электродинамике не являются каноническими. Они не фиксируют калибровочную свободу полностью, и это создает определенные трудности, например, при квантовании. В электродинамике неканонические калибровочные условия можно использовать, так как уравнения движения линейны и их можно проанализировать. В общем случае существенно нелинейных моделей формализм для неканонических калибровок не развит и мы на них останавливаться не будем.

Таким образом, динамика частиц со связями I рода в канонических калибровках сводится к гамильтоновым моделям со связями II рода. Это сведение не является однозначным, так как от калибровочных условий требуется выполнение только неравенств (6.108). Выбор той или иной системы калибровочных условий диктуется рассматриваемой задачей и соображениями простоты. Как правило, исследование калибровочных моделей проводится в различных калибровках, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки.

**6.2.4. Калибровочная модель нерелятивистской частицы.** В настоящем разделе мы рассмотрим динамику точечной частицы с точки зрения калибровочных моделей и покажем трудности в определении энергии, которые при этом возникают.

Рассмотрим движение точечной частицы в фазовом пространстве $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ с координатами $q^* = \{q^{*a}\}$ и $p^* = \{p^*_a\}$, где $a = 1, \dots, \mathrm{N}$. Пусть динамика частицы задана гамильтонианом $H^*(q^*, p^*)$, не зависящим явно от времени. Действие такой частицы имеет обычный вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt(\dot{q}^{*a} p^*_a - H^*), \tag{6.111}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени $t$. Будем считать, что все координаты имеют фиксированные значения на границе $t = t_{1,2}$. Для каждой траектории частицы $q^*(t), p^*(t)$, которая определяется каноническими уравнениями движения

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \qquad \dot{p}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q^*},$$

где мы, для краткости, опустили индексы, выполнено равенство $\dot{H}^* = 0$. Это значит, что на каждой траектории гамильтониан имеет постоянное численное значение, которое называется энергией точечной частицы.

Переформулируем модель точечной частицы как калибровочную. С этой целью расширим фазовое пространство $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \to \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{\mathrm{N}+1})$ путем введения дополнительной пары сопряженных канонических переменных $Q, P$, и рассмотрим новое действие

$$S_{\mathrm{T}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(\dot{Q}P + \dot{q}^* p_* - \lambda G), \qquad G := -Q + H^*, \tag{6.112}$$

где $\lambda$ – множитель Лагранжа, а точка обозначает дифференцирование по некоторому параметру $\tau$, играющему роль времени. Уравнения движения для этой модели имеют вид

$$\dot{Q} = 0, \tag{6.113}$$

$$\dot{P} = \lambda, \tag{6.114}$$

$$\dot{q}^* = \lambda \frac{\partial H^*}{\partial p_*}, \tag{6.115}$$

$$\dot{p}_* = -\lambda \frac{\partial H^*}{\partial q^*}, \tag{6.116}$$

$$G = 0. \tag{6.117}$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение связи. Эта связь, очевидно, является связью первого рода, которая определяет гамильтониан системы.

Согласно общей теории действие (6.112) инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований с параметром $\epsilon(\tau)$, генерируемых связью $G$,

$$\begin{aligned} \delta Q &= \epsilon[Q, G] = 0, \\ \delta P &= \epsilon[P, G] = \epsilon, \\ \delta q^* &= \epsilon[q^*, G] = \epsilon\frac{\partial H^*}{\partial p_*}, \\ \delta p_* &= \epsilon[p_*, G] = -\epsilon\frac{\partial H^*}{\partial q^*}. \end{aligned} \tag{6.118}$$

При этом множитель Лагранжа преобразуется по правилу

$$\delta\lambda = \dot{\epsilon}. \tag{6.119}$$

Для того чтобы вариации $\delta q^*$ на границе были равны нулю, необходимо предположить, что $\epsilon(\tau_{1,2}) = 0$. Вариация множителя Лагранжа на границе несущественна, так как он входит в действие без производных. Отметим, что эволюцию во времени канонических переменных можно рассматривать как калибровочное преобразование с параметром $\epsilon = \lambda d\tau$.

Приведенные выше калибровочные преобразования представляют собой бесконечно малые преобразования, соответствующие инвариантности действия (6.112) относительно перепараметризации времени. При произвольном преобразовании временно́го параметра $\tau' = \tau'(\tau)$ мы постулируем, что координаты фазового пространства преобразуются как скаляры:

$$Q'(\tau') = Q(\tau), \qquad P'(\tau') = P(\tau)$$

(такие же формулы преобразования постулируются для $q^*$ и $p_*$). При этом множитель Лагранжа преобразуется как 1-форма:

$$\lambda'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\lambda(\tau).$$

Нетрудно проверить, что действие (6.112) инвариантно относительно произвольной перепараметризации времени $\tau$. Это и есть калибровочная инвариантность. При бесконечно малом преобразовании $\tau' = \tau + u(\tau)$ для вариаций формы функций имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \delta Q &= -u\dot{Q} = 0, \\ \delta P &= -u\dot{P} = -u\lambda, \\ \delta q^* &= -u\dot{q}^* = -u\lambda\frac{\partial H^*}{\partial p_*}, \\ \delta p_* &= -u\dot{p}_* = u\lambda\frac{\partial H^*}{\partial q^*}, \\ \delta\lambda &= -u\dot{\lambda} - \dot{u}\lambda = -\frac{d}{d\tau}(u\lambda), \end{aligned} \tag{6.120}$$

где в первых четырех уравнениях были использованы уравнения движения. Полученные преобразования совпадают с инфинитезимальными калибровочными преобразованиями (6.118), (6.119) при $\epsilon = -u\lambda$.

Таким образом, мы показали, что действие (6.112) инвариантно относительно произвольной перепараметризации времени. В модели имеется одна связь первого рода, и для фиксирования соответствующего произвола в решениях уравнений движения необходимо наложить одно калибровочное условие. Поскольку множитель Лагранжа $\lambda$ является произвольной функцией времени, то из уравнения движения (6.114) следует, что импульс $P$ также произволен. Чтобы устранить этот произвол, зафиксируем калибровку, наложив каноническое калибровочное условие

$$F_1 = P - \mathsf{const} = 0.$$

Тогда из уравнений движения определяется множитель Лагранжа $\lambda = 0$. При этом для действия получаем следующее выражение

$$S_{\text{т}}\big|_{F_1=0,\, G=0} = \int d\tau \dot{q}^* p^*.$$

Это значит, что в выбранной калибровке мы получили "замороженную" теорию, в которой не происходит никакой эволюции. При этом вся эволюция заменяется калибровочным преобразованием.

Можно рассмотреть класс калибровок, явно зависящих от времени. Пусть калибровочное условие имеет вид

$$F_2 = P - \tau = 0.$$

В этом случае из уравнений движения следует $\lambda = 1$, и эффективный гамильтониан для физических степеней свободы становится нетривиальным. Поскольку

$$\dot{Q}P = \frac{d}{d\tau}(QP) - Q\dot{P},$$

и

$$Q\dot{P}|_{F_2=0, G=0} = H^*(q^*, p^*),$$

то эффективное действие для физических степеней свободы равно

$$S_{\text{т}}\big|_{F_2=0, G=0} = \int d\tau (\dot{q}^* p^* - H^*),$$

что совпадает с исходным действием (6.111) для точечной частицы. Мы видим, что в калибровке $F_2 = 0$ нетривиальный эффективный гамильтониан возникает из кинетического слагаемого $\dot{Q}P$ для нефизической степени свободы.

Можно рассмотреть более общий класс калибровок

$$F_3 = P - f(\tau) = 0,$$

где $f(\tau)$ – произвольная функция времени с положительной производной, $\dot{f} > 0$. Для этой калибровки $\lambda = \dot{f}$, и полное действие принимает вид

$$S_{\text{т}}\big|_{F_3=0, G=0} = \int d\tau (\dot{q}^* p_* - \dot{f} H^*).$$

После перепараметризации траектории $dt := d\tau \dot{f}$, мы возвращаемся к исходному действию для точечной частицы (6.111).

Таким образом, действие (6.112) калибровочно инвариантно и после наложения калибровочного условия (из достаточно широкого класса калибровок) эквивалентно обычному действию для точечной частицы. В рассмотренном примере нефизическую степень свободы удалось в явном виде исключить из теории после решения связи и калибровочного условия. В подавляющем большинстве моделей математической физики это сделать не удается. Даже в электродинамике связи и калибровочные условия нельзя решить в явном виде. Ситуация в моделях Янга–Миллса и гравитации еще более сложная. Поэтому для проведения вычислений в калибровочных моделях используют методы, учитывающие как физические, так и нефизические степени свободы.

А теперь обратимся к вопросу об определении энергии в калибровочно инвариантных теориях. Во многих моделях математической физики исходное действие в гамильтоновой форме имеет вид (6.112). В таком виде гамильтониан системы при выполнении уравнений движения тождественно равен нулю, и принимать его за энергию системы не имеет никакого смысла. В рассмотренной модели за энергию частицы естественно принять численное значение гамильтониана $H^*$ для физических степеней свободы. Для того чтобы его построить, исходя из действия (6.112), необходимо сначала зафиксировать калибровку, зависящую явно от времени, а затем решить уравнения движения для нефизических степеней свободы и связь. При этом, выбирая различные функции времени в калибровочном условии $F_3 = 0$, можно получить, что множитель Лагранжа и, следовательно, эффективный гамильтониан будут явно зависеть от времени. Для простоты картины, следует выбрать такую функцию времени, чтобы эта зависимость исчезла. Если это возможно, то построенный таким образом гамильтониан следует принять за определение энергии, а соответствующий ему временно́й параметр назвать временем $\tau = t$.

**6.2.5. Частица в псевдоримановом пространстве.** Рассмотрим точечную частицу постоянной массы $m > 0$, которая движется в произвольном псевдоримановом пространстве $(\mathbb{M}, g)$ размерности $n$, на котором задана достаточно гладкая метрика лоренцевой сигнатуры. Пусть $x^\alpha$, $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$, – локальная система координат в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Будем считать, что координаты выбраны таким образом, что $x^0$ является временно́й координатой, т.е. $g_{00} > 0$, и все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны, т.е. пространственная часть метрики $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, n-1$ отрицательно определена или $N^2 > 0$, где $N$ – функция хода в АДМ параметризации метрики (см. раздел 8.2).

Поскольку на многообразии задана метрика лоренцевой сигнатуры, то в каждой точке заданы световые конусы прошлого и будущего. Будем считать, что на $\mathbb{M}$ выбрана ориентация во времени, т.е. световые конусы будущего непрерывно зависят от точки многообразия.

Рассмотрим времениподобную кривую $\gamma = q(t)$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, соединяющую две причинно связанные точки выбранной координатной окрестности $q(t_0), q(t_1) \in \mathbb{U}$ и целиком лежащую в $\mathbb{U}$. Действие для точечной частицы, по определению, пропорционально длине траектории (3.23) и имеет вид

$$S = \int_\gamma dt L(q, \dot q) := -m \int_\gamma dt \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta}. \tag{6.121}$$

Поскольку траектория частицы предполагается времениподобной, т.е.

$$\dot q^2 := g_{\alpha\beta} \dot q^\alpha \dot q^\beta > 0,$$

то подынтегральное выражение определено. В рассматриваемом действии метрика $g_{\alpha\beta}\big(q(t)\big)$ является внешним заданным полем и по ней варьирование не производится пока не включено взаимодействие с гравитационным полем, т.е. не добавлено, например, действие Гильберта–Эйнштейна.

Обозначения выбраны таким образом, чтобы производная, например, от метрики вдоль траектории частицы записывалась в виде

$$\dot g_{\alpha\beta} := \frac{d g_{\alpha\beta}}{dt} = \dot q^\alpha \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=q},$$

что следует из правила дифференцирования сложной функции.

Рассмотрим случай как положительных функций хода $N > 0$, так и отрицательных $N < 0$. Если в некоторой области функция хода меняет знак, то из непрерывности следует, что она где то обращается в нуль. В таких точках метрика становится вырожденной, и этот вопрос требует отдельного рассмотрения. Пока же предположим, что в области $\mathbb{U}$ функция хода либо положительна, либо отрицательна.

Мы рассматриваем оба возможных случая знака производных $\dot{q}^0 > 0$ и $\dot{q}^0 < 0$. В дальнейшем мы увидим, что в случае $\dot{q}^0 < 0$ действие (6.121) описывает античастицу, т.е. частицу той же массы $m$, но противоположного электрического заряда.

Следуя общим правилам, построим гамильтонов формализм для точечной массивной частицы, описываемой действием (6.121). Обобщенные импульсы, сопряженные координатам точечной частицы $q^\alpha$ имеют вид

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = -m\frac{g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta}{\sqrt{\dot{q}^2}}. \tag{6.122}$$

Отсюда следует, что импульсы удовлетворяют соотношению

$$p^2 := g^{\alpha\beta}(q)p_\alpha p_\beta = m^2, \tag{6.123}$$

которое должно быть выполнено для всех траекторий, вдоль которых частица может двигаться. Поэтому соотношение

$$\widetilde{G} := p^2 - m^2 = 0 \tag{6.124}$$

является первичной связью для точечной частицы.

Пример 6.2.2. В пространстве Минковского связь (6.124) зависит только от импульсов:

$$p_0^2 + \eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu - m^2 = 0,$$

где $\eta^{\mu\nu} = \mathsf{diag}\,(- \ldots -)$, и выделяет в фазовом пространстве $(q,p) \in \mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{1,n-1})$ двуполостный гиперболоид в кокасательном пространстве, умноженный на пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$, которое соответствует координатам $q$. Поверхность связей является несвязным подмногообразием в фазовом пространстве $\mathbb{T}^*(\mathbb{R}^{1,n-1})$ и состоит из двух компонент связности, определяемых неравенствами $p_0 > 0$ и $p_0 < 0$. Топологически поверхность связей в произвольном псевдоримановом многообразии устроена также.

Используя АДМ параметризацию метрики (см. раздел 8.2), связь (6.124) перепишем в виде произведения двух сомножителей:

$$p^2 - m^2 = \left[\frac{1}{N}(p_0 - N^\mu p_\mu) + \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}\right]\left[\frac{1}{N}(p_0 - N^\mu p_\mu) - \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}\right] = 0, \tag{6.125}$$

где введено обозначение $\hat{p}^2 := -\hat{g}^{\mu\nu}p_\mu p_\nu > 0$ для положительно определенного квадрата пространственных компонент импульса частицы. Напомним, что индексы из середины греческого алфавита пробегают только пространственные значения: $\mu, \nu, \ldots = 1, \ldots, n-1$ и $\hat{g}^{\mu\nu}$ – матрица, обратная к $g_{\mu\nu}$. В дальнейшем для подъема пространственных индексов всегда используется обратная метрика $\hat{g}^{\mu\nu}$.

Равенство нулю одного из сомножителей выделяет в фазовом пространстве одну полу "гиперболоида". То, на какой именно поле́ "гиперболоида" находится частица, определяется начальными данными. Если в начальный момент времени частица находилась, скажем, на поле́, определяемой первым сомножителем в (6.125), то из непрерывности следует, что она на ней и останется в процессе эволюции.

Из определения импульсов (6.122) следует равенство

$$p_0 - N^\mu p_\mu = -\frac{mN^2}{\sqrt{\dot{q}^2}}\dot{q}^0. \tag{6.126}$$

Мы видим, что знак производной $\dot{q}^0$ всегда противоположен знаку функции $p_0 - N^\mu p_\mu$. Поэтому, если $\dot{q}^0 N > 0$, то в нуль обращается первый сомножитель в формуле (6.125). В противном случае, $\dot{q}^0 N < 0$, равен нулю второй сомножитель. Следовательно, связь (6.124) эквивалентна связи

$$G := \sqrt{\hat{p}^2 + m^2} - \left|\frac{p_0 - N^\mu p_\mu}{N}\right| = 0, \tag{6.127}$$

где мы использовали знак модуля, чтобы объединить оба случая. В таком виде первичная связь будет удобна для дальнейших вычислений.

Мы предполагаем, что если в начальный момент времени частица находилась на какой то одной полé гиперболоида, то в процессе движения она на ней и останется. В противном случае траектория в фазовом пространстве не будет непрерывной. Это означает, что если в некоторой области пространства-времени функция хода меняет знак, то с точки зрения внешнего наблюдателя частица будет восприниматься как частица в области $N > 0$ и античастица в области $N < 0$, так как $\dot{q}^0$ меняет знак.

Перейдем к вычислению гамильтониана $H := p_\alpha \dot{q}^\alpha - L$. Поскольку в теории есть первичная связь, то гессиан модели вырожден и из определения обобщенных импульсов (6.122) нельзя определить все скорости как функции импульсов и координат. Ранг гессиана в рассматриваемом случае равен $n-1$, что позволяет определить пространственные компоненты скорости. Чтобы их найти, заметим, что

$$\dot{q}^2 = N^2(\dot{q}^0)^2 + g_{\mu\nu}(\dot{q}^\mu + N^\mu \dot{q}^0)(\dot{q}^\nu + N^\nu \dot{q}^0). \tag{6.128}$$

Далее, из определения импульсов (6.122) следует равенство

$$p_\mu \sqrt{\dot{q}^2} = -m(N_\mu \dot{q}^0 + g_{\mu\nu}\dot{q}^\nu).$$

Возведение этого равенства в квадрат с помощью метрики $\hat{g}^{\mu\nu}$ позволяет найти квадрат пространственных компонент скорости:

$$g_{\mu\nu}(\dot{q}^\mu + N^\mu \dot{q}^0)(\dot{q}^\nu + N^\nu \dot{q}^0) = -\frac{N^2 \hat{p}^2}{\hat{p}^2 + m^2}(\dot{q}^0)^2.$$

Подстановка полученного выражения в формулу (6.128) приводит к равенству

$$\sqrt{\dot{q}^2} = \frac{m|\dot{q}^0 N|}{\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}},$$

которое позволяет решить выражение для импульсов (6.122) относительно компонент скорости:

$$\frac{\dot{q}^0}{|\dot{q}^0|} = -\frac{p_0 - N^\nu p_\nu}{|N|\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}}, \tag{6.129}$$

$$\frac{\dot{q}^\mu}{|\dot{q}^0|} = -\frac{N^2 \hat{g}^{\mu\nu} p_\nu - N^\mu(p_0 - N^\nu p_\nu)}{|N|\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}}, \tag{6.130}$$

Мы видим, что уравнения (6.122) определяют только знак производной $\dot{q}^0$ и пространственные компоненты скорости $\dot{q}^\mu$. При этом модуль временнóй компоненты скорости $|\dot{q}^0|$ является произвольной функцией. Позже мы увидим, что она соответствует перепараметризации мировой линии частицы.

Поскольку мы нашли все $n-1$ пространственные компоненты скоростей, то это доказывает, что гессиан модели имеет ранг $n-1$, и других первичных связей в теории нет.

Теперь нетрудно вычислить гамильтониан

$$
\begin{aligned}
H := p\dot q - L = p_0\dot q^0 + p_\mu \dot q^\mu + m\sqrt{\dot q^2} = \\
= \frac{|\dot q^0|}{|N|\sqrt{\hat p^2+m^2}}\Big[p_0|N|\sqrt{\hat p^2+m^2} + N^\mu p_\mu(p_0 - N^\nu p_\nu) + N^2(\hat p^2+m^2)\Big] = \\
= \frac{|\dot q^0|}{|N|\sqrt{\hat p^2+m^2}}\left[-(p_0 - N^\mu p_\mu)^2 + N^2(\hat p^2+m^2)\right] = -\frac{|\dot q^0 N|}{\sqrt{\hat p^2+m^2}}\widetilde G,
\end{aligned}
\tag{6.131}
$$

где мы использовали связь (6.127) во второй строке. Таким образом, гамильтониан определен и пропорционален первичной связи $\widetilde G$. Он определен неоднозначно, так как в теории есть связь.

Перепишем гамильтониан в более удобной форме. С этой целью в предпоследнем выражении (6.131) используем связь (6.127):

$$
H = \frac{|\dot q^0|}{|N|\sqrt{\hat p^2+m^2}}\Big[\big|(p_0 - N^\mu p_\mu)N\big|\sqrt{\hat p^2+m^2} + N^2(\hat p^2+m^2)\Big] = |\dot q^0 N|G. \tag{6.132}
$$

Теперь гамильтониан пропорционален связи в форме (6.127).

Действие (6.121) в гамильтоновой форме принимает вид

$$
S = \int dt(p_\alpha \dot q^\alpha - H) = \int dt\left(p_\mu \dot q^\mu - |\dot q^0 N|\sqrt{\hat p^2+m^2} + \dot q^0 N^\mu p_\mu\right). \tag{6.133}
$$

Отметим сокращение кинетических слагаемых $p_0\dot q^0$. Как и исходное действие полученное выражение не зависит от знака функции хода и параметризационно инвариантно, если перепараметризация не меняет ориентацию кривой.

Действие (6.133) приводит к следующим уравнениям движения для пространственных координат и импульсов:

$$
\dot q^\mu = -\left.\frac{|\dot q_0 N|}{\sqrt{\hat p^2+m^2}}\right|_{x=q} p^\mu - \dot q^0 N^\mu\big|_{x=q}, \tag{6.134}
$$

$$
\dot p_\mu = -\partial_\mu\left[|\dot q^0 N|\sqrt{\hat p^2+m^2} - \dot q^0 N^\nu p_\nu\right]_{x=q} = \tag{6.135}
$$

$$
= -\,|\dot q^0|\sqrt{\hat p^2+m^2}\,\partial_\mu|N|\Big|_{x=q} - \left.\frac{|\dot q^0 N|p^\nu p^\rho \hat\Gamma_{\mu\nu\rho}}{\sqrt{\hat p^2+m^2}}\right|_{x=q} + \dot q^0\partial_\mu N^\nu p_\nu\big|_{x=q}, \tag{6.136}
$$

где $\hat\Gamma_{\mu\nu\rho}$ – символы Кристоффеля для пространственной метрики $g_{\mu\nu}$ и $p^\mu := \hat g^{\mu\nu}p_\nu$. В таком виде эквивалентность гамильтоновых и лагранжевых уравнений движения совсем не очевидна. В дальнейшем эквивалентность гамильтоновых и лагранжевых уравнений движения будет доказана для уравнений, записанных в другой форме.

Поскольку исходное действие инвариантно относительно произвольной перепараметризации мировой линии частицы (локальные преобразования), то рассматриваемая модель является калибровочной. Этому обстоятельству соответствует наличие одной связи первого рода (6.124). Поэтому частица имеет физические и нефизическую степень свободы. В качестве физических степеней свободы, для которых можно поставить задачу Коши, выберем пространственные компоненты координат и импульсов $q^\mu, p_\mu$, а нефизической степени свободы – $q^0, p_0$. Посмотрим с этой точки зрения на действие (6.133). Для определенности предположим, что $\dot q_0 N > 0$. Тогда действие можно переписать в виде

$$
S = \int dt\left(p_\mu \dot q^\mu - \dot q^0 H_{\text{eff}}\right), \tag{6.137}
$$

где

$$H_{\text{eff}} := N\sqrt{\hat{p}^2 + m^2} - N^\mu p_\mu$$

– эффективный гамильтониан для физических степеней свободы. При этом уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= \quad \dot{q}_0 \frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial p_\mu}, \\ \dot{p}_\mu &= -\dot{q}^0 \frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial q^\mu}. \end{aligned} \tag{6.138}$$

Легко проверить, что если выполнены уравнения движения и метрика $g_{\alpha\beta}$ не зависит от времени $x^0 = q^0$, то энергия сохранятся во времени,

$$E := H_{\text{eff}} = \mathsf{const},$$

для произвольной функции $q^0(t)$. Мы видим, что произвольная функция $q^0(t)$ не определяется уравнениями движения и соответствует свободе в выборе параметра вдоль мировой линии. От нее всегда можно избавиться, переопределив параметр, что соответствует выбору калибровки. Таким образом, нефизическая степень свободы убирается из модели путем решения связи (6.127) относительно временнóй компоненты импульса $p_0$ и наложения калибровочного условия на произвольную функцию $q^0(t)$.

Заметим, что вариационная производная действия (6.133) по $q_0$ имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta q^0} = \frac{dH_{\text{eff}}}{dt} = \dot{q}^\mu \frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial q^\mu} + \dot{p}_\mu \frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial p_\mu}.$$

Эта вариационная производная равна нулю на уравнениях движения (6.138). Следовательно, вариация действия (6.137) по $q^0$ не дает никаких новых уравнений движения.

Если предположить, что допускаются только те перепараметризации, которые сохраняют ориентацию мировой линии, т.е. $\dot{q}^0(t) > 0$, то отрицательной функции хода будет соответствовать эффективный гамильтониан

$$H_{\text{eff}} := -N\sqrt{\hat{p}^2 + m^2} - N^\mu p_\mu.$$

В любом случае эффективный гамильтониан для физических степеней свободы массивной точечной частицы положительно определен при $N^\mu = 0$.

В соответствии с общим методом, описанном в разделе 6.2.3, полный гамильтониан на первом этапе получается путем добавления первичной связи. Так как исходный гамильтониан уже пропорционален связи, то полный гамильтониан равен

$$H_{\text{т}} = \lambda G, \tag{6.139}$$

где $\lambda = \lambda(t)$ – неопределенный множитель Лагранжа.

Поскольку скобка Пуассона связи с собой равна нулю,

$$[G, G] = 0$$

(она должна быть антисимметрична, что невозможно для одной связи), то вторичных связей не возникает и связь $G = 0$ является связью первого рода. Поэтому система находится в инволюции, т.е. выполнены условия (6.96), (6.97). Отсюда вытекает, что полный гамильтониан системы (6.100) определяется единственной связью первого рода (6.139).

Гамильтониан (6.139) приводит к уравнениям движения, которые эквивалентны уравнениям движения для гамильтониана

$$\widetilde{H}_{\text{т}} = \mu\widetilde{G}, \tag{6.140}$$

где $\mu = \mu(t)$ – множитель Лагранжа, на поверхности связей, так как связи $\widetilde{G}$ и $G$ эквивалентны. Действительно, связи $G$ и $\widetilde{G}$ отличаются на отличный от нуля множитель (для каждой полы гиперболоида):

$$\widetilde{G} = fG, \qquad f(q,p) \neq 0.$$

Поэтому

$$\dot{q}^\alpha = \mu[q^\alpha, \widetilde{G}] = \mu[q^\alpha, f]G + \mu f[q^\alpha, G].$$

На поверхности связи $G = 0$, и поэтому первое слагаемое в правой части исчезает. Такой же вид имеет уравнение для импульсов. Следовательно, замена связи в полном гамильтониане $H_{\text{т}}$ приводит к переопределению множителя Лагранжа: $\lambda = \mu f$.

В дальнейшем, из соображений удобства, мы будем выбирать тот или иной вид полного гамильтониана.

Рассмотрим гамильтоновы уравнения движения (6.101) для гамильтониана (6.140)

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= 2\mu g^{\alpha\beta} p_\beta, \\ \dot{p}_\alpha &= \mu p^\beta p^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\big|_{x=q}. \end{aligned} \tag{6.141}$$

Для сравнения полученных уравнений движения с уравнениями для экстремалей (3.24), продифференцируем первое уравнение по времени и воспользуемся вторым уравнением для исключения $\dot{p}$. В результате получим уравнение для координат частицы

$$\ddot{q}^\alpha = \frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{q}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma. \tag{6.142}$$

С точностью до первого слагаемого в правой части оно совпадает с уравнением для экстремалей (3.24). Это слагаемое связано с произволом в выборе параметризации мировой линии частицы. Действительно, после преобразования $t \mapsto t'(t)$, где функция $t'(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dt'}{dt} = \mu(t), \qquad \mu > 0,$$

гамильтоновы уравнения движения будут иметь вид (6.142), но с $\mu = 1$. В этом случае уравнения движения совпадут с уравнениями для экстремалей, и, значит, параметр $t'$ является каноническим параметром вдоль экстремали.

Обратное утверждение также верно. Если выполнены уравнения для экстремалей

$$\ddot{q}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma,$$

то из них вытекают гамильтоновы уравнения (6.141) при $\mu = 1$. Таким образом мы доказали эквивалентность гамильтоновых и лагранжевых уравнений движения.

Поскольку модель содержит связь первого рода, то ей соответствует калибровочная инвариантность полного действия

$$S_{\text{т}} = \int_\gamma dt (p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mu\widetilde{G}). \tag{6.143}$$

Чтобы найти соответствующие преобразования симметрии, рассмотрим инфинитезимальные преобразования, которые генерируются связью (6.103):

$$\delta q^\alpha = \epsilon[q^\alpha, \widetilde{G}] = 2\epsilon g^{\alpha\beta} p_\beta,$$

$$\delta p_\alpha = \epsilon[p_\alpha, \widetilde{G}] = \epsilon p^\beta p^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma},$$
$$\delta\mu = \dot{\epsilon}.$$

Сравнение этих преобразований с уравнениями движения (6.141) показывает, что эволюция во времени канонических переменных представляет собой последовательность калибровочных преобразований, где $\epsilon = \mu dt$. Эта калибровочная симметрия описывает произвол в выборе параметра $t$ вдоль траектории частицы. Уравнения движения (6.141) вместе со связью (6.127) не определяют множитель Лагранжа $\mu$. Для его определения необходимо зафиксировать калибровку.

Если учесть выражение для импульсов (6.122), то кинетический член в действии (6.143) примет вид

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha = -m\sqrt{\dot{q}^2}.$$

После интегрирования кинетического члена получается исходное действие (6.121). Таким образом, на поверхности связей гамильтониан равен нулю, а исходное действие определяется только кинетическим слагаемым.

**Временна́я калибровка.** Продолжим исследование модели в соответствии с общей схемой. Зафиксируем *временну́ю калибровку*

$$F_{\text{т}} := q^0 - bt = 0, \qquad b = \mathsf{const} \neq 0. \tag{6.144}$$

Модуль свободного параметра $b$ связан с выбором единицы измерения времени, что не существенно. Поэтому, без ограничения общности, положим $|b| = 1$, т.е. $b = 1$, если время $q^0$ для внешнего наблюдателя увеличивается при увеличении параметра $t$ вдоль мировой линии частицы, и $b = -1$, если при увеличении $t$ время $q^0$ уменьшается.

Скобка Пуассона этого калибровочного условия со связью равна

$$[F_{\text{т}}, G] = -\frac{1}{|N|}\left[q^0, |p_0 - N^\mu p_\mu|\right] = \begin{cases} 1/|N|, & b > 0, \\ -1/|N|, & b < 0, \end{cases} \tag{6.145}$$

где мы использовали равенство (6.126) для определения знака выражения, стоящего под модулем. Поскольку функция хода отлична от нуля, $N \neq 0$, то скобка Пуассона (6.145) отлична от нуля во всем фазовом пространстве и, в частности, на поверхности связи $G = 0$. Следовательно, условие $q^0 = bt$ определяет каноническую калибровку.

Расширенный гамильтониан с учетом связи и калибровочного условия имеет вид

$$H_{\text{E}} = \lambda G + \pi F_{\text{т}},$$

где $\lambda$ и $\pi$ – множители Лагранжа. Из условий сохранения связи и калибровочного условия во времени,

$$\dot{G} = \lambda[G, G] + \pi[G, F_{\text{т}}] = \pi[G, F_{\text{т}}] \approx 0,$$
$$\dot{F}_{\text{т}} = \frac{\partial F_{\text{т}}}{\partial t} + \lambda[F_{\text{т}}, G] + \pi[F_{\text{т}}, F_{\text{т}}] = -b + \lambda[F_{\text{т}}, G] \approx 0,$$

находим множители Лагранжа:

$$\lambda = |N|, \qquad \pi = 0,$$

где мы объединили оба случая, $b > 0$ и $b < 0$, и учли равенство $|b| = 1$. Таким образом, в данной канонической калибровке полный гамильтониан (6.139) совпадает с исходным гамильтонианом (6.132), так как $|\dot{q}^0| = |b| = 1$.

Связь (6.127) и калибровочное условие (6.144) можно решить относительно нефизических переменных $q^0$ и $p_0$:

$$\begin{aligned}
&q^0 = bt,\\
&p_0 = -b|N|\sqrt{\hat{p}^2 + m^2} + N^\mu p_\mu.
\end{aligned}$$

Так как решения уравнений Эйлера–Лагранжа можно подставлять в действие (см. раздел 5.4), то эффективное действие для физических переменных $q^\mu, p_\mu$ принимает вид

$$S_{\text{eff}} = \int dt\,(p_0\dot{q}^0 + p_\mu\dot{q}^\mu) = \int dt\,(p_\mu\dot{q}^\mu - H_{\text{eff}})\,,$$

где эффективный гамильтониан для физических степеней свободы имеет вид

$$H_{\text{eff}} = |N|\sqrt{\hat{p}^2 + m^2} - bN^\mu p_\mu. \tag{6.146}$$

Как и в случае нерелятивистской точечной частицы эффективный гамильтониан для физических степеней свободы полностью определяется кинетическим слагаемым $p_0\dot{q}^0$ для нефизических степеней свободы. Эффективный гамильтониан зависит только от физических степеней свободы, которыми являются пространственные координаты точечной частицы и соответствующие импульсы, $\{q^\mu, p_\mu\}$, $\mu = 1, \ldots, n-1$. Компоненты метрики $N, N^\mu$ и $g_{\mu\nu}$ входят в гамильтониан в качестве внешних полей. Уравнения движения для физических степеней свободы во временнóй калибровке (6.144) имеют вид

$$\dot{q}^\mu = \frac{|N|p^\mu}{\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}} - bN^\mu, \tag{6.147}$$

$$\dot{p}_\mu = -\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}\,\partial_\mu|N| - \frac{|N|\partial_\mu\hat{g}^{\nu\rho}p_\nu p_\rho}{2\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}} + b\partial_\mu N^\nu p_\nu, \tag{6.148}$$

где $p^\mu := \hat{g}^{\mu\nu}p_\nu$.

Чтобы дать физическую интерпретацию двух возможных ориентаций мировой линии $b = \pm1$ рассмотрим следующий

Пример 6.2.3. В пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ компоненты метрики имеют вид

$$N = 1, \qquad N^\mu = 0, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathsf{diag}\,(-\ldots-),$$

и уравнения движения (6.147), (6.148) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^\mu &= \frac{p^\mu}{\sqrt{\hat{p}^2 + m^2}},\\
\dot{p}_\mu &= 0.
\end{aligned}$$

Эти уравнения имеют хорошо известный в специальной теории относительности вид. Возводя первое уравнение в квадрат с помощью пространственной метрики $\eta_{\mu\nu}$, получим выражение для пространственного импульса частицы через ее скорость:

$$p^\mu = \frac{m\dot{q}^\mu}{\sqrt{1 - \boldsymbol{u}^2}}, \tag{6.149}$$

где мы ввели квадрат пространственной скорости частицы $\boldsymbol{u}^2 := -\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu\eta_{\mu\nu} > 0$. Тогда уравнения движения для свободной точечной частицы в пространстве Минковского во временнóй калибровке сводятся просто к условию сохранения импульса: $p_\mu = \mathsf{const}$.

Для того чтобы дать физическую интерпретацию двум возможным ориентациям $\dot{q}^0 = \pm 1$ мировой линии частицы относительно временно́й координаты $q^0$ внешнего наблюдателя, рассмотрим взаимодействие частицы с внешним электромагнитным полем в четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. Такое взаимодействие описывается дополнительным слагаемым в лагранжиане:

$$L \mapsto L + eA_\alpha \dot{q}^\alpha,$$

где $A_\alpha(x)$ – четырехмерный потенциал электромагнитного поля и $e = \mathsf{const}$ – заряд частицы. С точки зрения внешнего наблюдателя, для которого временем является координата $q^0$, добавочное слагаемое в лагранжиане имеет вид

$$gA_\alpha \frac{dq^\alpha}{dq^0},$$

где $g := be = \pm e$ – наблюдаемый заряд частицы. Таким образом, для внешнего наблюдателя частица имеет либо положительный, либо отрицательный заряд. В остальном частицы совпадают. Такие частицы в физике принято называть частицей и античастицей. Например, электрон и позитрон (они, правда, имеют спин $1/2$, в то время как в рассматриваемом случае спин частиц равен нулю).

Таким образом, свобода в выборе ориентации мировой линии частицы относительно временно́й координаты внешнего наблюдателя соответствует двум возможным зарядам частицы $\pm e$. Это означает, что исходное действие (6.121) описывает частицу и античастицу, у которых массы совпадают, а заряды при включении внешнего электромагнитного поля имеют противоположный знак. Если заряд равен нулю, $e = 0$, то действие (6.121) описывает одну нейтральную частицу.

Заметим, что и частица, и античастица движутся вперед по времени $x^0$ с точки зрения внешнего наблюдателя. Однако собственное время античастицы $t$ движется в обратную сторону.

Гамильтоновы уравнения движения для точечной заряженной частицы принимают особенно простой вид при движении в постоянном магнитном поле. В этом случае временна́я компонента потенциала равна нулю, а пространственные компоненты зависят только от пространственных координат:

$$\{A_\alpha\} = \{A_0 = 0, A_\mu(\boldsymbol{x})\}.$$

Тогда все изменения в гамильтоновом формализме сводятся к переопределению пространственных компонент импульсов:

$$p_\mu \mapsto \tilde{p}_\mu := \frac{\partial(L + eA_\nu \dot{q}^\nu)}{\partial \dot{q}^\mu} = p_\mu + eA_\mu.$$

В частности, гамильтониан для физических степеней свободы и уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}} &= \sqrt{\tilde{p}^2 + m^2}, \\
\dot{q}^\mu &= \frac{p^\mu + eA^\mu}{\sqrt{\tilde{p}^2 + m^2}}, \\
\dot{p}_\mu &= -e\frac{\partial_\mu A_\nu (p^\nu + eA^\nu)}{\sqrt{\tilde{p}^2 + m^2}},
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\tilde{p}^2 := -g^{\mu\nu}(p_\mu + eA_\mu)(p_\nu + eA_\nu).$$

Как видим, при взаимодействии с внешним полем импульс больше не сохраняется, и траектория частицы в общем случае отличается от экстремали.

Точечные частицы под действием гравитационного поля двигаются в пространстве-времени вдоль экстремалей. В разделе 3.2 было показано, что через данную точку в данном направлении проходит одна и только одна экстремаль. Это значит, что при постановке задачи Коши для экстремали достаточно задать точку $x \in \mathbb{M}$ и вектор $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Анализ настоящего раздела показывает, что эта информация является избыточной. Действительно, длина касательного вектора к экстремали постоянна вдоль экстремали. Это значит, что для однозначного восстановления экстремали, проходящей через данную точку, достаточно задать не сам вектор, а его направление, которое определяется $n-1$ параметром. Кроме того, остается еще произвол в выборе параметризации. Во временно́й калибровке в качестве параметра выбирается наблюдаемое время $q^0 = \pm t$. Следовательно, для задания траектории частицы достаточно задать пространственные координаты $q^\mu$ и пространственные компоненты импульсов $p_\mu$ в начальный момент времени $q^0$. Поэтому точечная частица на псевдоримановом многообразии имеет $n-1$ степень свободы.

Пример 6.2.4. В четырехмерном пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ точечная массивная частица имеет три степени свободы.

**Калибровка светового конуса.** Для многих приложений, например, в суперсимметричных моделях, удобно использовать калибровку светового конуса. Эта калибровка упрощает многие формулы, если частица движется в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$, что мы и предположим.

Чтобы определить калибровку светового конуса, вместо двух первых координат частицы $q^0$ и $q^1$ введем новые конусные переменные

$$q^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(q^0 \pm q^1),$$

оставив остальные координаты без изменения. Поскольку известно выражение новых координат через старые, то совершим каноническое преобразование в фазовом пространстве с производящей функцией

$$S_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 + p_1)q^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 - p_1)q^- - p_2 q^2 - \ldots - p_{n-1}q^{n-1},$$

зависящей от новых координат и старых импульсов (см. раздел 6.1.11). Отсюда следуют выражения для новых импульсов, сопряженных $q^\pm$:

$$p_\pm = -\frac{\partial S_3}{\partial q^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_0 \pm p_1).$$

Остальные импульсы при этом не меняются.

В новых канонических переменных первичная связь (6.124) принимает вид

$$\widetilde{G} = 2p_+p_- + p^{\text{A}}p_{\text{A}} - m^2 = 0, \tag{6.150}$$

где суммирование ведется только по $n-2$ значениям индексов: $\text{A} = 2, \ldots, n-1$. Поскольку квадратичная форма $p^{\text{A}}p_{\text{A}} - m^2$ отрицательно определена, то $p_+p_- > 0$. Полы гиперболоида, соответствующего поверхности связей, определяются неравенствами $(p_+ > 0,\ p_- > 0)$ и $(p_+ < 0,\ p_- < 0)$. И в любом случае $p_+p_- \neq 0$. Связь (6.150) просто решается

$$p_+ = \frac{1}{2p_-}(-p^{\text{A}}p_{\text{A}} + m^2), \tag{6.151}$$

или

$$p_- = \frac{1}{2p_+}(-p^{\text{A}}p_{\text{A}} + m^2).$$

Зафиксируем калибровку *светового конуса*

$$F_{\text{LC}} := q^+ - at = 0, \qquad a = \pm 1. \tag{6.152}$$

Легко видеть, что

$$[\widetilde{G}, F_{\text{LC}}] = -2p_-.$$

Поскольку на поверхности связей $p_- \neq 0$, то условие (6.152) определяет каноническую калибровку.

Так как связи $\widetilde{G}$ и $G$ пропорциональны, то обобщенный гамильтониан можно записать в виде

$$H_{\text{E}} = \mu\widetilde{G} + \pi F_{\text{LC}},$$

где $\mu$ и $\pi$ – множители Лагранжа. Из условий сохранения связи и калибровочного условия во времени,

$$\dot{\widetilde{G}} = \mu[\widetilde{G}, \widetilde{G}] + \pi[\widetilde{G}, F_{\text{LC}}] = \pi[\widetilde{G}, F_{\text{LC}}] \approx 0,$$
$$\dot{F}_{\text{LC}} = \frac{\partial F_{\text{LC}}}{\partial t} + \mu[F_{\text{LC}}, \widetilde{G}] + \pi[F_{\text{LC}}, F_{\text{LC}}] = -a + \mu[F_{\text{LC}}, \widetilde{G}] \approx 0,$$

находим множители Лагранжа:

$$\mu = \frac{a}{2p_-}, \qquad \pi = 0.$$

В калибровке светового конуса (6.152) физическими переменными являются $\{q^-, q^{\text{A}}, p_-, p_{\text{A}}\}$, $\text{A} = 2, \ldots, n-1$. После подстановки решения уравнения связи (6.151) и калибровочного условия (6.152) в действие,

$$S_{\text{eff}} = \int dt(p_+\dot{q}^+ + p_-\dot{q}^- + p_{\text{A}}\dot{q}^{\text{A}}) = \int dt(p_-\dot{q}^- + p_{\text{A}}\dot{q}^{\text{A}} - H_{\text{eff}}),$$

получаем выражение для эффективного гамильтониана

$$H_{\text{eff}} = a\frac{p^{\text{A}}p_{\text{A}} - m^2}{2p_-}. \tag{6.153}$$

Как и раньше, нетривиальный эффективный гамильтониан для физических степеней свободы возникает из кинетического слагаемого $p_+\dot{q}^+$ для нефизической степени свободы.

Уравнения движения для физических степеней свободы имеют вид

$$\dot{q}^- = -a\frac{p^{\text{A}}p_{\text{A}} - m^2}{2p_-^2}, \qquad \dot{q}^{\text{A}} = a\frac{p^{\text{A}}}{p_-},$$
$$\dot{p}_- = 0, \qquad \dot{p}_{\text{A}} = 0.$$

Мы видим, что как и во временнóй калибровке уравнения движения в калибровке светового конуса сводятся к сохранению обобщенных импульсов свободной точечной частицы.

Замечание. В калибровке светового конуса параметр эволюции $t \in \mathbb{R}$ целиком лежит на световом конусе в пространстве Минковского, который является характеристикой волнового уравнения (см. раздел 3.6).

Эффективный гамильтониан (6.153) в калибровке светового конуса мало чем напоминает эффективный гамильтониан (6.146) во временно́й калибровке. Тем на менее оба гамильтониана описывают одну и ту же массивную частицу. Ее траектории в конфигурационном пространстве – это экстремали. Выбор той или иной калибровки является существенным для анализа уравнений движения и квантования. Часто калибровка светового конуса упрощает вычисления, особенно в квантовой теории поля.

**6.2.6. Граничные слагаемые в калибровочных моделях.** В настоящем разделе мы рассмотрим простой пример вариационной задачи, который проанализируем с различных точек зрения. Этот пример позволяет продемонстрировать тонкости вариационной задачи в теории поля, важную роль граничных слагаемых в действии и связь вариационной задачи на условную стационарную точку с фиксированием калибровки в калибровочных моделях.

**Лагранжева формулировка.** Обозначим декартовы координаты на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ через $x^0 = \tau$, $x^1 = \sigma$. Будем называть координату $\tau$ временем, а $\sigma$ – пространством, хотя мы не предполагаем наличие на $\mathbb{R}^2$ какой-либо метрики. Пусть в конечном прямоугольнике задано действие

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma (p\dot{q} + p^*\dot{q}^*), \tag{6.154}$$

зависящее от четырех полей $q, p, q^*, p^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. В действии точка обозначает дифференцирование по $\tau$. В дальнейшем пределы интегрирования, для краткости, будем опускать. Рассмотрим задачу на условный экстремум для действия (6.154). Пусть на поля наложены две связи:

$$G := -\partial_1 q + H^*(q^*, p^*) = 0, \tag{6.155}$$

$$F := p = 0. \tag{6.156}$$

Будем считать, что функция $H^*(q^*, p^*) \geqslant 0$ зависит только от полей и не зависит от их производных. Предположим также, что поля $q$ и $q^*$ имеют определенные граничные условия при $\tau = \tau_{1,2}$. Этого достаточно для того, чтобы избежать граничных вкладов в вариацию действия (6.154), возникающих при интегрировании по частям. Тогда для действия (6.154) определена задача на условный экстремум (см. раздел 5.1.4).

Решим эту задачу прямым методом и методом множителей Лагранжа. В первом случае исключим из действия переменные $q$ и $p$ с помощью уравнений связей. Поскольку на поверхности связей $p = 0$, то, независимо от вида функции $q(\tau, \sigma)$, первое слагаемое в (6.154) обращается в нуль, и мы получаем эффективное действие

$$S\Big|_{G=0,F=0} = \int d\tau d\sigma p^*\dot{q}^*, \tag{6.157}$$

в котором переменные $q^*$ и $p^*$ уже рассматриваются как независимые переменные. Поскольку вариация $\delta q^*$ равна нулю на границе $\tau = \tau_{1,2}$, то из вариационного принципа следуют только уравнения Эйлера–Лагранжа, которые просто интегрируются:

$$\frac{\delta S}{\delta p^*} = \quad \dot{q}^* = 0, \qquad \Rightarrow \qquad q^* = q^*(\sigma), \tag{6.158}$$

$$\frac{\delta S}{\delta q^*} = -\dot{p}^* = 0, \qquad \Rightarrow \qquad p^* = p^*(\sigma). \tag{6.159}$$

Мы видим, что решением уравнений Эйлера–Лагранжа являются произвольные функции от $\sigma$. Вид произвольной функции $q^*$ находится из граничных условий, которые должны быть заданы одинаковыми при $\tau = \tau_{1,2}$. Затем можно определить $q$ из уравнения связи (6.155). Таким образом, задача на условный экстремум имеет решение, хотя и не для очень широкого класса граничных условий.

Поскольку с помощью уравнений связей мы исключили переменные $q$ и $p$, то будем называть их нефизическими, а переменные $q^*$ и $p^*$ – физическими.

Теперь воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Построим расширенное действие

$$S_{\text{E}} = \int d\tau d\sigma (p\dot{q} + p^*\dot{q}^* - \lambda G - \mu F), \tag{6.160}$$

где $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ – множители Лагранжа. Для этого действия нефизическими полями являются $q, p, \lambda$ и $\mu$. Полная система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{E}}}{\delta p} = \quad \dot{q} - \mu = 0, \tag{6.161}$$

$$\frac{\delta S_{\text{E}}}{\delta q} = -\dot{p} - \partial_1\lambda = 0, \tag{6.162}$$

$$\frac{\delta S_{\text{E}}}{\delta p^*} = \quad \dot{q}^* - \lambda\frac{\partial H^*}{\partial p^*} = 0, \tag{6.163}$$

$$\frac{\delta S_{\text{E}}}{\delta q^*} = -\dot{p}^* - \lambda\frac{\partial H^*}{\partial q^*} = 0, \tag{6.164}$$

$$\frac{\delta S_{\text{E}}}{\delta \lambda} = -G = 0, \tag{6.165}$$

$$\frac{\delta S_{\text{E}}}{\delta \mu} = -F = 0. \tag{6.166}$$

При вариации слагаемого $-\lambda\partial_1 q$ по $q$ возникает также граничное условие на множитель Лагранжа

$$\lambda|_{\sigma_{1,2}} = 0, \tag{6.167}$$

поскольку значения переменной $q$ фиксированы только на пространственноподобной границе $\tau = \tau_{1,2}$ и, следовательно, вариации $\delta q$ на времениподобной границе $\sigma = \sigma_{1,2}$ произвольны.

Перейдем к анализу уравнений Эйлера–Лагранжа. Решение последней связи (6.166) тривиально. Решение связи (6.165) имеет вид

$$q = \int_{\sigma_1}^{\sigma} d\sigma' H^* + q_0(\tau), \tag{6.168}$$

где $q_0$ – произвольная функция $\tau$. Отсюда следует, что задание граничных условий $q|_{\sigma_2}$, будет противоречить уравнению связи (6.165), так как значение поля $q$ при $\sigma = \sigma_2$ определяется значениями физических полей $q^*$ и $p^*$ во внутренних точках области. Дифференцируя решение (6.168) по $\tau$ и используя уравнения (6.163) и (6.164), получим $\dot{q} = \dot{q}_0$. Затем решаем уравнения (6.161) и (6.162) относительно множителей Лагранжа:

$$\mu = \dot{q}_0, \qquad \lambda = \lambda_0(\tau), \tag{6.169}$$

где $\lambda_0(\tau)$ – произвольная функция. Таким образом, мы решили уравнения движения для нефизических переменных $q, p$ и множителей Лагранжа $\lambda, \mu$, и это решение зависит от двух произвольных функций $q_0(\tau)$ и $\lambda_0(\tau)$. Для физических переменных $q^*$ и $p^*$ остаются уравнения (6.163), (6.164), которые имеют вид обычной гамильтоновой системы. Эта система уравнений действительно воспроизводит уравнения Эйлера–Лагранжа на условный экстремум (6.158), (6.159) при $\lambda_0 = 0$. Заметим, что только это значение согласуется с граничным условием (6.167).

Таким образом, мы решили вариационную задачу для действия (6.154) с заданными граничными условиями для полей $q$ и $q^*$ на границе $\tau = \tau_{1,2}$ прямым способом и методом множителей Лагранжа. Как и следовало ожидать, результат одинаков, а класс решений очень беден.

Однако для расширенного действия (6.160) можно поставить более содержательную вариационную задачу. Предположим, что нефизическая переменная задана на всей границе $q|_{\sigma_{1,2}}$ и $q|_{\tau_{1,2}}$, а физическое поле – только на пространственноподобной границе $q^*|_{\tau_{1,2}}$. В этом случае вариации $\delta q$ равны нулю на границе и граничного условия на множитель Лагранжа (6.167) не возникнет. Тогда, при $\lambda_0 \neq 0$, вместо $\tau$ можно ввести новую переменную $t$, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{d\tau} = \lambda_0(\tau).$$

Это уравнение определяет координату $t$ с точностью до сдвига на постоянную величину, что несущественно. Тогда уравнения для физических полей (6.163), (6.164) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dq^*}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \\ \frac{dp^*}{dt} &= -\frac{\partial H^*}{\partial q^*}. \end{aligned} \tag{6.170}$$

Таким образом, мы получили систему гамильтоновых уравнений движения для физических полей, динамика которых определяется гамильтонианом $H^*(q^*, p^*)$. Это показывает, что модель, основанная на действии $S_{\text{E}}$ с множителями Лагранжа допускает постановку более широкого класса вариационных задач, чем исходная задача на условную стационарную точку, и является более содержательной.

Здесь выявляется специфика полевых моделей, поскольку важно, что поля зависят не только от времени $\tau$, но и от пространственной координаты $\sigma$. Действительно, если бы связь имела вид $-q + H^* = 0$, то уравнение (6.162) приняло бы вид $-\dot{p} + \lambda_0 = 0$. Откуда следовало бы единственное решение $\lambda_0 = 0$ при $p = 0$. (Мы употребили термины время и пространство, исходя из аналогии с теорией относительности, несмотря на то, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ никакой метрики не задано.)

Заметим, что подстановка решения связей в расширенное действие $S_{\text{E}}$ снова приводит к тривиальному действию (6.157), которое не воспроизводит уравнения Эйлера–Лагранжа (6.170). Это показывает, что подстановки решения части уравнений Эйлера–Лагранжа в действие и в оставшиеся уравнения в общем случае не эквивалентны. Это связано с тем, что в общем случае мы не можем налагать граничные условия на нефизические поля произвольным образом и рассматривать исчезающие на границе вариации. Действительно, вариация $\delta q$ определяется физическими полями и их вариациями во внутренних точках области:

$$\delta q = \int_{\sigma_1}^{\sigma} d\sigma' \left( \frac{\partial H^*}{\partial q^*}\delta q^* + \frac{\partial H^*}{\partial p^*}\delta p^* \right), \tag{6.171}$$

и в общем случае не равна нулю на границе $\sigma = \sigma_2$. То есть задание граничного условия $q|_{\sigma_2}$ противоречит уравнению связи (6.165).

Изменим постановку вариационной задачи таким образом, чтобы уравнения Эйлера–Лагранжа остались прежними, а исключение нефизических полей в действии приводило бы к новому действию, воспроизводящему уравнения (6.163), (6.164). Введем новое действие

$$S_{\text{ph}} := S_{\text{E}} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (\lambda q)\big|_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma_2}, \tag{6.172}$$

которое отличается от расширенного действия с множителями Лагранжа граничным слагаемым. Как и раньше, мы считаем, что на границе $\tau_{1,2}$ заданы значения переменных $q$ и $q^*$. Добавление граничного члена не меняет уравнений Эйлера–Лагранжа, но меняет граничные условия. Этот граничный член подобран таким образом, чтобы компенсировать граничный вклад в вариацию действия, обусловленный вариацией $\delta q$. Его необходимо добавить, если мы не хотим получить граничное условие $\lambda|_{\sigma_2} = 0$ при произвольной вариации $\delta q$ на границе. Теперь нетрудно проверить, что на решениях уравнений (6.162) и (6.165) действие принимает вид

$$S_{\text{ph}}\Big|_{G=0,F=0} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma p^* \dot{q}^* - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \lambda(\tau, \sigma_2) q(\sigma_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma (p^* \dot{q}^* - \lambda_0 H^*), \qquad (6.173)$$

где мы положили $\lambda_0(\tau) := \lambda(\tau, \sigma_2)$. Это действие воспроизводит гамильтоновы уравнения движения для физических полей. При этом мы отбросили слагаемое с $q_0(\tau)$, которое не влияет на уравнения Эйлера–Лагранжа, так как в этом действии функция $\lambda_0(\tau)$ рассматривается как заданная и не варьируется. Таким образом, добавление граничного слагаемого не меняет уравнений Эйлера–Лагранжа, позволяет избежать граничных условий на множители Лагранжа и, что самое важное, разрешает подстановку решений уравнений Эйлера–Лагранжа непосредственно в действие. При этом возникает нетривиальный гамильтониан для физических полей.

В предыдущем построении была выделена роль точки $\sigma_2$ в определении функции $\lambda_0(\tau)$. Это не существенно и связано с выбором начальной точки в решении уравнения связи (6.168). Замена $\sigma_1 \mapsto \sigma_2$ в нижнем пределе этого интеграла приведет к переопределению $\lambda_0(\tau) = \lambda(\tau, \sigma_1)$.

В принципе, можно было бы ограничиться случаем $\lambda = 0$ и не добавлять граничный член. Однако исходное действие в калибровочных моделях и в моделях, инвариантных относительно общих преобразований координат, в канонической формулировке имеют вид расширенного действия $S_{\text{E}}$, содержащего множители Лагранжа. При этом многие решения, важные с физической точки зрения, соответствуют $\lambda \neq 0$. Например, решение Шварцшильда соответствует нетривиальному множителю Лагранжа, роль которого играет функция хода $N$.

**Гамильтонова формулировка.** Обозначения в предыдущем разделе были выбраны не случайно. По сути дела модель (6.160) уже записана в гамильтоновой форме, при этом переменные $p$ и $p^*$ являются импульсами, сопряженными координатам $q$ и $q^*$. Нашей исходной точкой будет полное действие

$$S_{\text{T}} = \int d\tau d\sigma (p\dot{q} + p^* \dot{q}^* - \lambda G), \qquad (6.174)$$

которое получится из действия (6.160), если положить $\mu = 0$. Координаты $\tau$ и $\sigma$ будем считать времен́ной и пространственной соответственно. В рассматриваемом случае гамильтониан системы задан единственной связью

$$H = \int d\sigma \lambda G, \qquad G := -\partial_1 q + H^*(q^*, p^*). \qquad (6.175)$$

Будем считать, что интегрирование в (6.174) проводится по всей плоскости $\tau, \sigma$. При этом все возникающие интегралы предполагаются сходящимися.

Таким образом, модель описывается двумя парами канонически сопряженных переменных $q, p$ и $q^*, p^*$, на которые наложена одна связь $G = 0$. Уравнения движения имеют прежний вид (6.161)–(6.165) (при $\mu = 0$), где точка обозначает дифференцирование по времени. Нетрудно проверить, что связь $G$ является связью первого рода:

$$[G, G'] = 0,$$

где штрих обозначает, что соответствующие полевые переменные рассматриваются в точке $\sigma'$. Поэтому на поверхности связей

$$\dot{G} = [G, H] \approx 0,$$

и никаких дополнительных связей в модели не возникает. Наличие связи первого рода означает, что действие (6.174) калибровочно инвариантно. Генератором калибровочных преобразований для канонических переменных является функционал

$$T = \int d\sigma \epsilon G,$$

где $\epsilon(\tau, \sigma)$ – малый параметр локальных преобразований. Бесконечно малые преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta q &= [q, T] = 0, \\
\delta p &= [p, T] = -\partial_1 \epsilon, \\
\delta q^* &= [q^*, T] = \quad \epsilon \frac{\partial H^*}{\partial p^*}, \\
\delta p^* &= [p^*, T] = -\epsilon \frac{\partial H^*}{\partial q^*}.
\end{aligned} \tag{6.176}$$

Если дополнить эти преобразования преобразованием множителя Лагранжа

$$\delta \lambda = \dot{\epsilon},$$

то, как нетрудно убедиться с помощью прямой подстановки, действие (6.174) является калибровочно инвариантным (см. раздел 6.2.3). Отметим, что эволюция во времени канонических переменных (6.161)–(6.164) является в рассматриваемом случае калибровочным преобразованием с параметром $\epsilon = \lambda d\tau$.

Согласно второй теореме Нётер калибровочная инвариантность приводит к зависимости уравнений движения:

$$\partial_1 \left( \frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta p} \right) + \frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta q^*} \frac{\partial H^*}{\partial p^*} - \frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta p^*} \frac{\partial H^*}{\partial q^*} - \partial_\tau \frac{\delta S_{\text{т}}}{\delta \lambda} = 0.$$

С математической точки зрения наличие калибровочной инвариантности отражается в том, что решение уравнений движения зависит от произвольной функции $\lambda$, которая ничем не фиксирована. Основным предположением в моделях с калибровочной симметрией является утверждение о том, что все физические наблюдаемые калибровочно инвариантны. В данном случае это означает, что наблюдаемые функции от канонических переменных не зависят от $\lambda$. Чтобы исключить произвол в решениях уравнений движения и исключить нефизические переменные необходимо наложить калибровочное условие. Согласно канонической процедуре фиксирования калибровки мы должны наложить одно калибровочное условие по числу связей первого рода. Выберем его в виде

$$F = p - p_0(\sigma) = 0, \tag{6.177}$$

где $p_0(\sigma)$ – произвольная, но заданная функция только от $\sigma$. Скобка Пуассона связи с калибровочным условием имеет вид

$$[G, F'] = \delta'(\sigma' - \sigma),$$

где $\delta'$ обозначает производную от $\delta$-функции. Поскольку скобка Пуассона связи с калибровочным условием не обращается в нуль при выполнении связи, то вместе они не представляют собой систему связей первого рода. В то же время пара функций $G, F$ не представляет собой также и систему связей второго рода, поскольку $\mathsf{det}\,[G, F'] = 0$, так как у $\delta'$ нетривиально ядро, состоящее из констант.

Канонически сопряженные переменные $q, p$ являются нефизическими переменными, и могут быть исключены из рассмотрения. С этой целью решим их уравнения движения и связь, как это было сделано в предыдущем разделе. В результате получим, что модель описывает одну физическую пару канонически сопряженных полей $q^*, p^*$ с эффективным гамильтонианом $\lambda_0 H^*(q^*, p^*)$. При этом подстановка связи и калибровочного условия в действие (6.174) приводит к неверному результату, который не воспроизводит уравнения движения для физических полей $q^*$ и $p^*$. Причина этого и решение проблемы то же, что и в предыдущем разделе – к действию необходимо добавить граничный член (6.172). Заметим, что при выполнении уравнения связи граничный член в исходном действии превращается в интеграл по пространству от некоторой гамильтоновой плотности для физических переменных.

Исключение нефизических полей из уравнений движения не зависело от глобальной структуры пространства-времени, так как при этом решаются только уравнения движения, связи и калибровочные условия, которые локальны. Нетривиальный эффективный гамильтониан из "нулевого" исходного гамильтониана (6.175) для замкнутых многообразий можно получить следующим образом. Предположим, что пространство-время является прямым произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, где первый сомножитель соответствует времени, а второй – пространству. Поскольку окружность $\mathbb{S}^1$ – компактное многообразие без края, то, казалось бы, никаких граничных вкладов не возникает, и можно свободно интегрировать по частям. Однако при внимательном рассмотрении оказывается, что при таком подходе можно потерять много решений уравнений движения, представляющих физический интерес. Опишем это подробнее.

Пусть пространственная координата $\sigma \in [0, 2\pi]$ параметризует окружность $\mathbb{S}^1$. Поскольку физические поля $q^*$ и $p^*$ ничем не ограничены, то их можно считать достаточно гладкими функциями на окружности. В то же время нефизические поля должны удовлетворять уравнению связи (6.155), которое в общем случае не имеет непрерывных решений (6.168) на окружности:

$$q(0) = 0, \qquad q(2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma H^* \neq 0.$$

Кроме того, вариация нефизического поля (6.171) в общем случае не может быть определена как непрерывная функция на окружности. Это значит, что при постановке вариационной задачи необходимо сделать разрез и добавить к действию (6.174) граничный член, который и приведет к нетривиальному эффективному действию для физических переменных. Поэтому, если пространство представляет собой окружность, то в физическом действии и эффективном гамильтониане достаточно просто изменить пределы интегрирования по $\sigma$.

Покажем, что нетривиальный эффективный гамильтониан возникает также в более общих калибровках, зависящих от времени явно. Пусть калибровочное условие имеет вид

$$F = p - p_0(\tau, \sigma) = 0,$$

где функция $p_0(\tau, \sigma)$ задана. В этом случае действие на поверхности связей получит дополнительный вклад за счет слагаемого $p\dot{q}$. Нетрудно проверить, что дополнительный вклад не меняет окончательного ответа. Действительно,

$$\Delta S\Big|_{F=0, G=0} = \int d\tau d\sigma\, p\dot{q} = \int d\tau d\sigma\, (-\dot{p}q),$$

поскольку интегрирование по частям по времени $\tau$ допустимо. Используя уравнение (6.162), определяющее $\lambda$, и интегрируя по частям, получим равенство

$$\Delta S\Big|_{F=0,G=0} = \int d\tau d\sigma(-\lambda\partial_1 q) + \int d\tau\,(\lambda q)\Big|_{\sigma=\sigma_1}^{\sigma_2}.$$

Теперь первое слагаемое воспроизводит эффективный гамильтониан $\lambda H^*$, где $\lambda = \lambda(\tau,\sigma)$, а второе слагаемое сокращается с граничным членом, добавленным в физическое действие (6.172).

Таким образом, при подстановке связей и калибровочных условий в действие, необходимо проявлять осторожность. Рассмотренный пример показывает, что эффективный гамильтониан и действие для физических полей может полностью определяться граничным членом в исходном действии. Причина этого кроется в том, что связи могут не иметь решений, убывающих в бесконечности, и предположение о финитности вариации неправомерно. К сожалению, для определения явного вида граничных членов необходим глубокий анализ уравнений связей, что не всегда возможно, из-за их сложности.

# 7. Основы общей теории относительности

В настоящей главе мы приступим к изложению основ общей теории относительности, которая в настоящее время рассматривается в качестве основной модели гравитационных взаимодействий. После вступительного раздела, будут написаны уравнения и поставлена одна из основных задач, которая решается в теории гравитации.

## 7.1. Пространство-время, метрика и гравитация

В основе общей теории относительности лежит ряд постулатов. Выделим среди них три, на наш взгляд, основных.

1. Пространство-время $\mathbb{M}$, в котором мы живем, является четырехмерным многообразием. Гравитационное взаимодействие между материальными телами описывается метрикой $g$ лоренцевой сигнатуры, $\operatorname{sign} g = (+ - --)$, заданной на $\mathbb{M}$.
2. Метрика пространства-времени удовлетворяет уравнениям Эйнштейна.
3. Пробная точечная частица, собственным гравитационным полем которой в данной задаче можно пренебречь, под действием только гравитационного поля движется по экстремалям (геодезическим) пространства-времени $(\mathbb{M}, g)$.

Перечисленные постулаты являются следствиями фундаментальных физических принципов: принципа причинности, эквивалентности (см. ниже) и общей ковариантности.

Многие авторы используют сигнатуру метрики $(- + ++)$, что часто, но не всегда бывает удобнее.

Первый постулат является "кинематическим". Из него следует, что в общей теории относительности все законы природы формулируются на четырехмерном псевдоримановом многообразии (пространстве-времени) $(\mathbb{M}, g)$. Если выбрана некоторая система координат $x^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, то метрика имеет вид $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$, $\operatorname{sign} g_{\alpha\beta} = (+ - --)$. В общем случае, если пространство-время топологически нетривиально, система координат может быть выбрана только локально.

В общей теории относительности не предполагается, что пространство-время снабжено какой-либо линейной структурой, как это было в механике Ньютона и специальной теории относительности.

В общем случае глобальная структура (топология) пространства-времени $\mathbb{M}$ может быть нетривиальной и отличаться от пространства Минковского. Поскольку глобально структура $\mathbb{M}$ не фиксирована, то в моделях гравитации вводится новое требование. Пространство-время, по определению, должно быть максимально продолжено вдоль геодезических (экстремалей). Это значит, что любая геодезическая в пространстве-времени либо может быть продолжена до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны, либо при конечном значении канонического параметра она попадет в сингулярную точку, где какой-либо из геометрических инвариантов обращается в бесконечность. Поскольку канонический параметр вдоль экстремалей определен с точностью до линейных преобразований (см., главу 3), то данное требование инвариантно, т.е. не зависит от выбора системы координат.

Замечание. Требование максимального продолжения пространства-времени вдоль геодезических нельзя заменить на более жесткое требование геодезической полноты, так как многие важные точные решения уравнений Эйнштейна не являются геодезически полными. Например, для решений, описывающих черные дыры, времениподобные геодезические линии достигают сингулярного края, на котором квадрат тензора кривизны обращается в бесконечность при конечном значении канонического параметра (собственного времени).

Первая аксиома важна, поскольку позволяет описывать окружающий нас мир с помощью некоторого набора полей и формулировать законы природы в виде системы дифференциальных уравнений на $\mathbb{M}$. Этот подход оказался самым плодотворным в последние три столетия.

Вторая и третья аксиома являются “динамическими”. В общей теории относительности постулируется, что метрика на $\mathbb{M}$ должна удовлетворять уравнениям Эйнштейна (7.1). Тем самым компоненты метрики пространства-времени удовлетворяют некоторой системе уравнений движения так же, как и все другие поля. Это – очень важное отличие общей теории относительности от специальной, где метрика Лоренца $\eta_{\alpha\beta} := \mathsf{diag}\,(+---)$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ была постулирована.

Как мы увидим в дальнейшем, в правой части уравнений Эйнштейна стоит тензор энергии-импульса полей материи. Выбор полей материи зависит от рассматриваемой модели. Это может быть, например, сплошная среда, точечные массивные частицы, электромагнитное поле или что то еще. Возможны также произвольные комбинации полей материи.

Сама по себе система уравнений Эйнштейна не полна. Если мы выбрали какой-либо набор полей материи, то уравнения Эйнштейна необходимо дополнить уравнениями движения полей материи. Вид дополнительных уравнений зависит от рассматриваемой задачи.

Последний выделенный постулат говорит о следующем. Допустим, что мы выбрали некоторый набор полей материи, записали и решили полную систему уравнений для метрики и полей материи. В результате мы получим псевдориманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$, на котором заданы также поля материи. Теперь допустим, что к нашей системе добавлена точечная массивная частица, масса которой настолько мала, что она не влияет на решение уравнений Эйнштейна. То есть мы пренебрегаем собственным гравитационным полем частицы. Такую частицу назовем *пробной*. Тогда возникает вопрос, по какой траектории будет двигаться пробная частица под действием только гравитационных сил? Ответ на этот вопрос дает третий постулат: пробная частица будет двигаться по $\mathbb{M}$ вдоль экстремалей (геодезических), определяемых метрикой $g$. Мы также предполагаем, что безмассовые частицы (например, фотоны) также распространяются вдоль светоподобных экстремалей (геодезических).

На третьей аксиоме основано экспериментальное подтверждение общей теории относительности. Два классических теста: смещение перигелия Меркурия и отклонение лучей света в поле тяготения основаны на анализе геодезических для решения Шварцшильда, о котором речь пойдет позже. Третий классический тест – красное смещение частоты излучения – это следствие первой аксиомы.

Приведенные аксиомы выделены, потому что лежат в основе любой модели, построенной в рамках общей теории относительности. Их недостаточно для построения конкретной модели гравитации, так как необходимо выбрать поля материи и дополнить уравнения Эйнштейна. При этом используются дополнительные аксиомы, которые мы не выделяем, поскольку их столько же, сколько и моделей.

Теперь скажем несколько слов о гравитационном взаимодействии. Для описания движения планет в солнечной системе с хорошей точностью используется механика Ньютона и закон всемирного тяготения. Мы говорим, что между планетами действуют гравитационные силы, которые определяют их движение. При этом движение происходит в плоском трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а время играет роль параметра. Основное свойство гравитационного взаимодействия заключается в том, что движение пробной частицы, при заданных начальных условиях, не зависит от ее массы.

Пример 7.1.1. Ускорение свободного падения на Земле не зависит от массы падающего тела. Это утверждение в настоящее время экспериментально проверено с высокой степенью точности.

Независимость ускорения от массы частицы означает, что при одних и тех же начальных условиях траектории и мировые линии пробных частиц разной массы совпадают.

Замечание. В электродинамике траектория заряженной частицы зависит от ее заряда. Если электромагнитное поле задано, то траектория частицы однозначно определяется массой, зарядом и начальными условиями.

Рассмотрим движение пробной частицы в специальной теории относительности в инерциальной системе отсчета. По определению, если гравитационное поле отсутствует и на частицу не действуют никакие другие силы, то она движется равномерно и прямолинейно. Теперь рассмотрим движение той же частицы, но в неинерциальной системе отсчета, которая движется, например, с постоянным ускорением относительно инерциальной системы отсчета. В этой системе координат свободная частица движется с ускорением и наблюдатель в этой системе отсчета может сказать (если не наблюдает за другими телами), что его система инерциальна, а частица движется в постоянном и однородном гравитационном поле, которое и вызывает ускорение. При этом ускорение не зависит от массы частицы и определяется только неинерциальной системой координат. Поэтому часто формулируют

Принцип эквивалентности. Все физические процессы неразличимы в равноускоренной системе отсчета и в системе отсчета, находящейся в однородном гравитационном поле.

Для однородного гравитационного поля это так, поскольку можно перейти в покоящуюся систему координат. Однако, если гравитационное поле не однородно и тензор кривизны отличен от нуля, то не существует такой системы отсчета, где гравитационное поле отсутствует.

В инерциальной (декартовой) системе координат в пространстве Минковского метрика диагональна и имеет постоянные компоненты, $\eta_{\alpha\beta} = \mathsf{diag}\,(+---)$. В такой системе координат все экстремали и только они являются прямыми линиями. Поэтому можно сказать, что свободная пробная частица движется вдоль одной из экстремалей пространства Минковского. Если перейти в неинерциальную (криволинейную) систему координат, то в общем случае метрика перестанет быть диагональной, и ее компоненты станут зависеть от координат точки пространства-времени. В этой системе координат траектория свободной частицы уже не будет выглядеть прямолинейной, а движение – равномерным. Тем не менее траектория, конечно, будет оставаться экстремалью пространства Минковского, так как понятие экстремали инвариантно и не зависит от выбора системы координат.

В дифференциальной геометрии метрика является инвариантным объектом и определяется независимо от выбора системы координат. Метрика пространства Минковского не зависит от точки пространства-времени. Однако ее компоненты могут быть непостоянными функциями от координат точки: это зависит от системы координат.

Таким образом, утверждение о том, что свободная пробная частица движется в пространстве Минковского вдоль одной из экстремалей инвариантно относительно выбора системы координат и лежит в основе перехода от механики Ньютона к общей теории относительности. Как уже было сказано, в общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время представляет собой четырехмерное многообразие $\mathbb{M}$, на котором задана метрика лоренцевой сигнатуры. Мы постулируем, что любая пробная частица движется вдоль одной из экстремалей пространства-времени. Этот постулат согласуется с упомянутыми выше свойствами гравитационного взаимодействия: мировая линия пробной частицы не зависит от ее массы. При этом принцип эквивалентности является лишь наводящим соображением о том, что метрика с нетривиальными компонентами описывает гравитационное взаимодействие.

Тем самым метрика пространства-времени в общей теории относительности играет выделенную роль. Мы считаем, что метрика описывает гравитационные взаимодействия материальных тел и излучения. А именно, если частица движется в плоском пространстве-времени, которое изометрично пространству Минковского с лоренцевой метрикой, то на нее не действуют гравитационные силы. В этом случае частица в инерциальной системе координат движется равномерно и прямолинейно. Если гравитационное поле нетривиально, то частицы (массовые и безмассовые) движутся по экстремалям в искривленном пространстве-времени, т.е. по многообразию $\mathbb{M}$ с метрикой $g$ и связностью Леви-Чивиты $\widetilde{\Gamma}$, для которой тензор кривизны отличен от нуля. В этом случае отсутствует понятие инерциальной системы отсчета, а экстремали отличаются от прямых линий.

Поскольку в пространстве-времени $\mathbb{M}$ задана метрика, то она однозначно определяет связность Леви-Чивиты или символы Кристоффеля. Это позволяет использовать аппарат ковариантного дифференцирования для построения инвариантов и записи ковариантных уравнений движения. Введение связности Леви-Чивиты на многообразии $\mathbb{M}$ является постулатом общей теории относительности. То есть в теории тяготения Эйнштейна мы постулируем, что кручение и неметричность аффинной связности тождественно равны нулю.

В настоящее время теория тяготения Эйнштейна имеет много обобщений. Большой класс таких обобщений представляют собой модели, в которых на многообразии $\mathbb{M}$ помимо метрики задается также независимая аффинная связность $\Gamma$ с нетривиальным кручением $T$ и неметричностью $Q$. Эти обобщения естественны с геометрической точки зрения, так как метрика и аффинная связность являются совершенно независимыми геометрическими объектами. В общем случае, даже если ограничиться инвариантными лагранжианами, приводящими к уравнениям движения второго порядка, существует очень много возможностей для построения моделей, которые в настоящее время не исследованы в полной мере.

Считается, что общая теория относительности согласуется со всеми наблюдательными данными. Однако, поскольку мы не знаем экспериментальных следствий упомянутых выше геометрических обобщений теории тяготения, говорить о том, что они противоречат экспериментальным данным нельзя. Различные геометрические обобщения теории тяготения Эйнштейна представляют самостоятельный математический интерес и могут быть полезны при построении квантовой теории гравитации и единых моделей. В современной математической физике такие модели привлекают исследователей постоянно со времен создания общей теории относительности. Достаточно отметить, что геометрическими обобщениями общей теории относительности занимались А. Эйнштейн, Г. Вейль, Э. Шредингер и многие другие выдающиеся физики.

## 7.2. Действие Гильберта–Эйнштейна

В общей теории относительности постулируется, что пространство-время является псевдоримановым многообразием $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = 4$, с метрикой лоренцевой сигнатуры $g_{\alpha\beta}$. При этом считается, что метрика описывает гравитационные взаимодействия. Мы рассмотрим более общий случай произвольной размерности пространства-времени $n$, не ограничиваясь наиболее интересным случаем $n = 4$, потому что модели гравитации в большем и меньшем числе измерений также важны для приложений.

Мы рассматриваем метрику пространства-времени в качестве одной из полевых переменных и постулируем для нее *уравнения Эйнштейна*:

$$\kappa\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) + g_{\alpha\beta}\frac{n-2}{2}\Lambda = -\frac{1}{2}T_{\text{м}\alpha\beta}. \tag{7.1}$$

Для упрощения обозначений мы ввели постоянную

$$\kappa := \frac{c^4}{16\pi G},$$

где $c$ – скорость света и $G$ – гравитационная постоянная, стоящая в законе всемирного тяготения Ньютона (см. раздел 7.9). В дальнейшем постоянную $\kappa$ мы также будем называть гравитационной постоянной. Появление множителя $-1/2$ в правой части уравнений вызвано принятым ранее определением тензора кривизны и последующим определением тензора энергии-импульса. В левой части системы уравнений (7.1) для метрики стоит *тензор Эйнштейна*

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \tag{7.2}$$

умноженный на *гравитационную постоянную* $\kappa$, и *космологическая постоянная* $\Lambda \in \mathbb{R}$. В правой части уравнений Эйнштейна стоит *тензор энергии-импульса материи* $T_{\text{M}\alpha\beta}$. Эти уравнения при $\Lambda = 0$ и $n = 4$ были впервые предложены А. Эйнштейном в статье [63].

Тензор энергии-импульса материи зависит от рассматриваемой модели, и в общем случае уравнения Эйнштейна необходимо дополнить уравнениями для полей материи. То есть сама по себе система уравнений Эйнштейна неполна.

Замечание. В уравнении (7.1) тензор кривизны строится только по метрике при нулевом кручении и неметричности. То есть метрика $g$ на $\mathbb{M}$ определяет связность Леви-Чивиты (символы Кристоффеля), которые в свою очередь задают тензор кривизны.

Вклад космологической постоянной в уравнения Эйнштейна (7.1) можно перенести в правую часть

$$\kappa\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) = -\frac{1}{2}(T_{\text{M}\alpha\beta} + T_{\Lambda\alpha\beta}),$$

где

$$T_{\Lambda\alpha\beta} := (n-2)\Lambda g_{\alpha\beta}$$

и рассматривать его как дополнение к тензору энергии-импульса материи $T_{\text{M}\alpha\beta}$. Сравнивая это выражение с тензором энергии-импульса непрерывной среды (7.126), который будет рассмотрен позже, его можно интерпретировать как вклад среды с постоянными давлением $\mathcal{P} = -(n-2)\Lambda$ и плотностью энергии противоположного знака $\mathcal{E} = -\mathcal{P} = (n-2)\Lambda$. Разность знаков давления и плотности энергии не позволяет интерпретировать космологическую постоянную как распределение некоторой обычной материи. В космологических моделях вселенной ее часто связывают с наличием темной энергии. При этом важная проблема заключается в том является ли темная энергия следствием наличия космологической постоянной или она имеет какую-то иную природу.

Обсудим некоторые общие свойства уравнений Эйнштейна и введем терминологию.

Тензор Эйнштейна (7.2) инвариантен относительно вейлевского преобразования метрики с постоянным параметром

$$g_{\alpha\beta} \mapsto k g_{\alpha\beta}, \qquad k = \mathsf{const} \neq 0.$$

Эти преобразования меняют длины векторов, но сохраняют углы между ними.

Уравнения Эйнштейна при заданном тензоре энергии-импульса представляют собой систему из $n(n+1)/2$, где $n$ – размерность пространства-времени, нелинейных уравнений в частных производных второго порядка для метрики. В частности, в четырехмерном пространстве-времени мы имеем десять уравнений. Уравнения Эйнштейна чрезвычайно сложны, и в настоящее время известны лишь отдельные классы решений, часть из которых будет обсуждаться в дальнейшем.

Уравнения Эйнштейна можно переписать в другом виде. След равенства (7.1) эквивалентен уравнению

$$\kappa R = n\Lambda + \frac{1}{n-2} T_{\text{м}},$$

где $T_{\text{м}} := T_{\text{м}\alpha}{}^{\alpha}$ – след тензора энергии-импульса материи. Исключив скалярную кривизну из (7.1) с помощью этого равенства, получим эквивалентную систему уравнений

$$\kappa R_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}. \tag{7.3}$$

где

$$\rho_{\alpha\beta} := T_{\text{м}\alpha\beta} - \frac{1}{n-2} g_{\alpha\beta} T_{\text{м}}.$$

Пространство-время называется *пустым*, если тензор энергии-импульса материи всюду равен нулю. В этом случае уравнения Эйнштейна (7.3) принимают вид

$$\kappa R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}. \tag{7.4}$$

Это – *вакуумные уравнения Эйнштейна* с космологической постоянной. Отсюда следует, что скалярная кривизна пустого пространства постоянна:

$$R = \frac{n\Lambda}{\kappa}.$$

Замечание. Коэффициент перед космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна (7.1) подобран таким образом, чтобы вакуумные уравнения Эйнштейна имели вид (7.4) и не зависели от размерности пространства-времени.

При ненулевой космологической постоянной уравнения (7.4) означают, что тензор Риччи пропорционален метрике. Частным случаем таких пространств являются пространства постоянной кривизны. При нулевой космологической постоянной, $\Lambda = 0$, пустое пространство является *Риччи плоским*:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \tag{7.5}$$

Следовательно, в этом случае скалярная кривизна также равна нулю, $R = 0$.

Пример 7.2.1. Для метрики Лоренца тензор кривизны равен нулю. Следовательно, пространство Минковского является пространством постоянной – нулевой – кривизны. В частности, оно является Риччи плоским. Ясно, что метрика Лоренца удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна с нулевой космологической постоянной.

Пример 7.2.2. В дальнейшем мы увидим, что вакуумные уравнения Эйнштейна допускают решения в виде плоских волн. Для таких решений тензор Риччи равен нулю, но полный тензор кривизны отличен от нуля.

В двумерном пространстве-времени полный тензор кривизны однозначно восстанавливается по скалярной кривизне, а в трехмерном – по тензору Риччи и скалярной кривизне. Следовательно, полный тензор кривизны равен нулю, если выполнено условие (7.5). Это значит, что двумерное и трехмерное Риччи плоское пространство локально является пространством Минковского. То есть может быть либо пространством Минковского, либо цилиндром или тором. В четырех измерениях и выше равенства нулю тензора Риччи недостаточно для обращения в нуль полного тензора кривизны.

Пример 7.2.3. Решение Шварцшильда, описывающее черную и белую дыру, является Риччи плоским, но полный тензор кривизны отличен от нуля. А именно, отличен от нуля тензор Вейля.

Физическая интерпретация уравнений Эйнштейна при нулевой космологической постоянной следующая. В общей теории относительности постулируется, что метрика пространства-времени не является метрикой Лоренца, а находится как решение уравнений Эйнштейна. Таким образом, пространство-время представляет собой псевдориманово многообразие с метрикой специального вида, удовлетворяющей уравнениям (7.1). Эти пространства называются *пространствами Эйнштейна*. Следующий постулат состоит в том, что пробные частицы под действием гравитационных сил двигаются по экстремалям в пространстве Эйнштейна. При этом в правой части уравнений Эйнштейна подразумевается тензор энергии-импульса всей остальной материи. При этом мы говорим следующее. Пустое пространство при нулевой космологической постоянной и отсутствии гравитационных волн является пространством Минковского, и точечные частицы двигаются по прямым линиям. Это соответствует отсутствию сил тяготения. При наличии полей материи в уравнениях Эйнштейна появляется нетривиальная правая часть, что приводит к тому, что пространство-время становится нетривиальным псевдоримановым многообразием. В этом пространстве-времени экстремали уже не являются прямыми линиями, что интерпретируется как наличие сил тяготения. Мы говорим, что пробная частица движется в поле тяготения, созданном остальной материей. При этом закон всемирного тяготения является следствием уравнений Эйнштейна в определенном приближении, которое рассмотрено в разделе 7.9.

Существующие наблюдательные данные свидетельствуют о том, что в отсутствие сил тяготения пространство-время в масштабах солнечной системы близко к пространству Минковского. Это значит, что если космологическая постоянная существует, то является в определенном смысле малой величиной. Отметим, что равенство или неравенство космологической постоянной нулю имеет принципиальное значение. Действительно, наличие даже малой космологической постоянной приводит к тому, что метрика Лоренца уже не будет удовлетворять вакуумным уравнениям Эйнштейна.

Теперь обсудим принцип наименьшего действия для уравнений Эйнштейна. Левую часть уравнений (7.1) можно получить из *действия Гильберта–Эйнштейна* [64, 65]:

$$S_{\text{HE}} = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \left( \kappa R - (n-2)\Lambda \right), \tag{7.6}$$

где интегрирование ведется по всему пространству-времени $\mathbb{M}$ и варьирование производится по компонентам метрики $g_{\alpha\beta}$. Конечно, мы предполагаем, что интеграл сходится. Это действие было впервые предложено Д. Гильбертом в 1915 году в четырехмерном пространстве-времени. Он предложил действие в более общем виде, включающем также электромагнитное поле [64]. Несколько позже А. Эйнштейн тоже рассмотрел это действие для вывода уравнений общей теории относительности в такой системе координат, где $\det g_{\alpha\beta} = 1$ [65].

В следующем разделе мы покажем, что вариационная производная действия Гильберта–Эйнштейна по метрике имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{HE}}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|}\kappa \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) - \sqrt{|g|} \frac{n-2}{2} \Lambda g^{\alpha\beta}. \tag{7.7}$$

При доказательстве этого равенства были отброшены все граничные вклады, возникающие при интегрировании по частям.

При наличии полей материи чаще удобнее варьировать по обратной метрике, что приводит к изменению знака вариационной производной:

$$\frac{\delta S_{\text{HE}}}{\delta g^{\alpha\beta}} = \sqrt{|g|}\kappa\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) + \sqrt{|g|}\frac{n-2}{2}\Lambda g_{\alpha\beta}. \qquad (7.8)$$

Полное действие для гравитационного поля и полей материи имеет вид суммы

$$S = S_{\text{HE}} + S_{\text{M}}, \qquad (7.9)$$

где $S_{\text{M}}$ – действие для полей материи. Обычно действие для полей материи в теории гравитации получают путем *минимальной подстановки*: выбирают лоренц-инвариантное действие в пространстве Минковского, заменяют лоренцеву метрику на псевдориманову $\eta_{\alpha\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}(x)$, обычные производные – на ковариантные $\partial_\alpha \mapsto \widetilde{\nabla}_\alpha$, и умножают лагранжиан на определитель репера $\sqrt{|g|}$, чтобы получить инвариантную меру интегрирования. В результате получим действие для полей материи, инвариантное относительно общих преобразований координат. Сравнивая правую часть уравнений Эйнштейна (7.1) с вариационной производной (7.8), получаем выражение для тензора энергии-импульса материи

$$T_{\text{M}\alpha\beta} := \frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta g^{\alpha\beta}}. \qquad (7.10)$$

Эту вариационную производную часто принимают за определение *тензора энергии-импульса* полей материи в общей теории относительности. При таком определении тензор энергии-импульса всегда симметричен. В ряде случаев, например, для скалярного и калибровочного полей, это определение совпадает с ковариантным обобщением канонического тензора энергии-импульса, т.е. получается из выражения (5.44) путем минимальной подстановки. Однако в общем случае это не так, потому что действие для полей материи (например, спинорных полей) не всегда может быть выражено через метрику.

**Размерности постоянных и полей.** В теории поля важную роль играет анализ размерностей. Он помогает контролировать проведение вычислений путем сравнения размерностей различных слагаемых и в некоторых случаях делать общие выводы. В квантовой теории поля, например, размерность констант связи позволяет судить о перенормируемости моделей. Здесь принят упрощенный вариант подсчета размерностей, где все измеряется в единицах длины. Однако, для сравнения общей теории относительности с теорией гравитации Ньютона нам этого будет недостаточно. Поэтому мы опишем оба подхода к определению размерностей.

В квантовой теории поля, по определению, действие и метрика являются безразмерными величинами, а координаты имеют размерность длины (скорость света мы принимаем за единицу):

$$[S_{\text{HE}}] := [g_{\alpha\beta}] := 1, \qquad [x^\alpha] := l.$$

При этом мы ограничиваем класс допустимых преобразований координат. Например, декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ имеют размерность длины по определению. Однако в сферической системе координат углы являются безразмерными. Тем самым мы допускаем только такие преобразования систем координат, которые не меняют их размерностей. Размерность компонент тензора кривизны легко вычислить:

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] = [R_{\alpha\beta}] = [R] = l^{-2},$$

так как они содержат две производные. Отсюда следует, что гравитационная и космологическая постоянные являются размерными величинами:

$$[\kappa] = l^{2-n}, \qquad [\Lambda] = l^{-n}.$$

Для контроля вычислений такого описания размерностей, как правило, достаточно.

Теперь опишем размерности величин, как это принято в системе СГС, которые нам понадобятся в дальнейшем. При этом мы считаем, что размерность пространства-времени равна четырем, $n = 4$. Исходными являются размерности массы (грамм), расстояния (сантиметр) и времени (секунда):

$$[m] := \text{г}, \qquad [x^\mu] := \text{см}, \qquad [t] := \text{сек},$$

где индекс $\mu = 1, 2, 3$ пробегает только пространственные значения. Координата $x^0 := ct$, где $c$ – скорость света, также измеряется в сантиметрах. По определению, компоненты метрики безразмерны:

$$[g_{\alpha\beta}] = [g^{\alpha\beta}] := 1.$$

Поскольку кривизна содержит две производные по координатам, то

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] = [R_{\alpha\beta}] = [\widetilde{R}] = \frac{1}{\text{см}^2}.$$

Действие, как это принято в механике, имеет ту же размерность, что и произведение импульса на скорость $p\,dq$ или энергии на время $Edt$:

$$[S] := \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{сек}}.$$

Учитывая, что в действии $[dt\,d^3x] = \text{сек} \cdot \text{см}^3$, определяем размерность гравитационной постоянной:

$$[\kappa] = \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{сек}^2}. \tag{7.11}$$

В разделе 7.9 мы сравним эту гравитационную постоянную с той, которая входит во всемирный закон тяготения. Наконец, размерность космологической постоянной равна

$$[\Lambda] = \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}^2}.$$

В дальнейшем для упрощения формул мы часто будем полагать $c = 1$ и $\kappa = 1$. Там, где это необходимо, степени скорости света легко восстановить, исходя из соображений размерности.

### 7.3. Вариация действия Гильберта–Эйнштейна

Докажем равенство (7.7) в более общем виде, который полезен при рассмотрении моделей, основанных на геометрии Римана–Картана или аффинной геометрии. А именно, рассмотрим инвариантное действие

$$S = \int_{\mathbb{M}} dx\, L = \int_{\mathbb{M}} dx\, \sqrt{|g|}\,\varphi R, \tag{7.12}$$

зависящее от скалярного поля $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$ и скалярной кривизны $R(g, \Gamma)$, построенной по метрике $g_{\alpha\beta}$ и аффинной связности общего вида $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$. Мы предполагаем, что компоненты метрики и связности являются достаточно гладкими функциями, и интеграл (7.12) сходится. Кроме этого мы предположим, что всеми граничными слагаемыми, возникающими при интегрировании по частям, можно пренебречь.

Подстановка в действие (7.12) римановой кривизны $\widetilde{R}$, зависящей только от метрики, приводит к чрезвычайно трудоемкой вариационной задаче. Это связано с тем, что при дифференцировании по частям необходимо дифференцировать также и скалярное поле. Поскольку скалярная кривизна $\widetilde{R}$ содержит вторые производные от метрики, то интегрировать по частям необходимо два раза, и это приводит к большому числу слагаемых. Значительное упрощение вносят последовательные действия. Сначала варьируем по метрике $g_{\alpha\beta}$ и связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, рассматривая их как независимые переменные, а затем подставляем вариацию связности, выраженную через вариацию метрики, тензора кручения и неметричности. В общей теории относительности такой подход называется *формализмом первого порядка*.

Начнем с нескольких вспомогательных формул, необходимых в дальнейшем. Варьируя определение обратной метрики,

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma},$$

получаем тождество

$$\delta g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}+g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\gamma}=0.$$

Отсюда следует связь между вариацией самой метрики и ее обратной:

$$\delta g^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\delta g_{\gamma\delta}. \tag{7.13}$$

Из теории матриц известно, что для произвольной квадратной обратимой матрицы $A=(A_{\alpha\beta})$ справедливо тождество

$$\delta\,\mathsf{det}\,A=\,\mathsf{det}\,A\,A^{-1\alpha\beta}\delta A_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует, что вариация определителя метрики $g:=\,\mathsf{det}\,g_{\alpha\beta}$ равна

$$\delta g=gg^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}=-gg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{7.14}$$

Эту вариацию мы записали в двух видах, так как в приложениях часто бывает удобнее варьировать действие не по самой метрики, а по ее обратной. Наличие квадратного корня в мере объема $\sqrt{|g|}:=\sqrt{|\,\mathsf{det}\,g_{\alpha\beta}|}$ приводит к появлению множителя $1/2$. Поэтому для ее вариации справедливы равенства

$$\delta\sqrt{|g|}=\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\delta g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}. \tag{7.15}$$

Приступим к вариации действия (7.12). Вариационная производная по скалярному полю $\varphi$ очевидна

$$S_{,\varphi}:=\frac{\delta S}{\delta\varphi}=\sqrt{|g|}R. \tag{7.16}$$

Метрика входит в действие (7.12) дважды: в форму объема и в определение скалярной кривизны

$$R:=R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}, \tag{7.17}$$

причем без производных. Поэтому нетрудно проверить, что

$$S_{,}{}^{\alpha\beta}:=\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}=-\sqrt{|g|}\varphi\left(R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right). \tag{7.18}$$

Вариация действия по аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$, все компоненты которой рассматриваются как независимые переменные, более трудоемка. Это связано с тем, что приходится интегрировать по частям, так как тензор кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}:=\partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\delta}-\Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\epsilon}\Gamma_{\beta\epsilon}{}^{\delta}-(\alpha\leftrightarrow\beta) \tag{7.19}$$

зависит от производных аффинной связности. Прямые вычисления приводят к следующему выражению для вариации лагранжиана после интегрирования по частям

$$\begin{aligned}\delta L = -\sqrt{|g|}\partial_\alpha\varphi g^{\alpha\gamma}\delta\Gamma_{\beta\gamma}{}^\beta + \sqrt{|g|}\partial_\gamma\varphi g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \sqrt{|g|}\varphi\left(Q_\alpha{}^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}Q^\gamma\right)\delta\Gamma_{\beta\gamma}{}^\beta + \\ + \sqrt{|g|}\varphi\left[-\left(T_{\delta\gamma}{}^\delta + \frac{1}{2}Q_\gamma\right)g^{\alpha\beta} - T_\gamma{}^{\beta\alpha} - T_\gamma{}^{\alpha\beta} + Q_\gamma{}^{\alpha\beta}\right]\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma,\end{aligned} \tag{7.20}$$

где $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$ и $Q_{\alpha\beta\gamma}$ – тензоры кручения и неметричности. Для облегчения вычислений следует помнить, что выражение, стоящее перед вариацией связности, должно быть тензорным полем. Это поможет правильно сгруппировать слагаемые. Заметим также, что выражение, стоящее в квадратных скобках, симметрично по индексам $\alpha$ и $\beta$.

Теперь вычислим очень важную для приложений вариационную производную действия (7.12) по метрике $g_{\alpha\beta}$ в римановой геометрии. Обозначим соответствующее действие, зависящее только от скалярного поля и метрики, через

$$\widetilde{S} = \int_{\mathbb{M}} dx\, \widetilde{L} = \int_{\mathbb{M}} dx\, \sqrt{|g|}\,\varphi\widetilde{R}. \tag{7.21}$$

Поскольку кручение и неметричность в римановой геометрии равны нулю, то из (7.18) и (7.20) следует, что вариация подынтегрального выражения в действии по метрике равна

$$\delta\widetilde{L} = -\sqrt{|g|}\varphi\left(\widetilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\widetilde{R}\right)\delta g_{\alpha\beta} - \sqrt{|g|}\partial_\gamma\varphi g^{\gamma\beta}\delta\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\alpha + \sqrt{|g|}\partial_\gamma\varphi g^{\alpha\beta}\delta\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma.$$

Выразив вариацию связности $\delta\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ через вариацию метрики, проинтегрировав по частям и приведя подобные члены, получим окончательное выражение для вариационной производной

$$\widetilde{S},^{\alpha\beta} := \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|}\varphi\left(\widetilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\widetilde{R}\right) + \sqrt{|g|}\big(\widetilde{\Box}\varphi g^{\alpha\beta} - \widetilde{\nabla}^\alpha\widetilde{\nabla}^\beta\varphi\big). \tag{7.22}$$

Напомним, что в римановой геометрии ввиду симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам вторая ковариантная производная от скалярного поля симметрична: $\widetilde{\nabla}^\alpha\widetilde{\nabla}^\beta\varphi = \widetilde{\nabla}^\beta\widetilde{\nabla}^\alpha\varphi$.

Если скалярное поле равно единице, $\varphi = 1$, то действие (7.21) совпадает с действием Гильберта–Эйнштейна (7.6) без космологической постоянной, и мы получаем выражение для вариационной производной (7.7).

Формула для вариационной производной (7.22) со скалярным полем важна, например, при вычислении скобок Пуассона в канонической формулировке общей теории относительности.

Вариация действия (7.12) была проведена в пространстве произвольной размерности. Отметим, что в двумерном случае тензор Эйнштейна (7.2) тождественно равен нулю, и первое слагаемое в (7.22) отсутствует (см. раздел 11.1).

### 7.4. Зависимость уравнений Эйнштейна

В настоящем разделе мы считаем, что кручение и неметричность равны нулю, а связностью является связность Леви-Чивиты, построенная по заданной метрике.

Важным обстоятельством в общей теории относительности является линейная зависимость уравнений Эйнштейна (7.1). Предположим, что эти уравнения получены вариацией по метрике действия (7.9), которое инвариантно относительно общих преобразований координат. Если действие инвариантно относительно локальных преобразований, то согласно второй теореме Нётер между уравнениями движения существует линейная зависимость (5.64). Рассмотрим эту зависимость в случае общих преобразований координат. Для простоты предположим, что действие полей материи зависит только от некоторого набора скалярных полей $\varphi^a(x)$, $a = 1, \dots, N$. При бесконечно малых преобразованиях координат $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon^\alpha$ с параметром $\epsilon^\alpha(x)$ метрика и скалярные поля преобразуются по правилам:

$$\begin{aligned} \delta g_{\alpha\beta} &= -\widetilde{\nabla}_\alpha \epsilon_\beta - \widetilde{\nabla}_\beta \epsilon_\alpha, \\ \delta\varphi^a &= -\epsilon^\alpha \partial_\alpha \varphi^a, \end{aligned}$$

где $\epsilon_\alpha := g_{\alpha\beta}\epsilon^\beta$. Следовательно, инвариантность действия записывается в виде

$$\delta S = \int dx \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} (-2\widetilde{\nabla}_\beta \epsilon_\alpha) + \frac{\delta S}{\delta \varphi^a} (-\epsilon^\alpha \partial_\alpha \varphi^a) \right) = 0.$$

После интегрирования по частям первого слагаемого получаем искомую зависимость уравнений движения

$$2\sqrt{|g|}\widetilde{\nabla}_\beta \left( \frac{\delta(S_{\text{HE}} + S_{\text{M}})}{\sqrt{|g|}\delta g_{\alpha\beta}} \right) - \partial_\alpha \varphi^a \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta \varphi^a} = 0,$$

так как действие Гильберта–Эйнштейна не зависит от полей материи. Это – тождества, которые выполняются независимо от того удовлетворяют поля уравнениям движения или нет. Поскольку каждое слагаемое в действии инвариантно само по себе, то выполняются два тождества:

$$\widetilde{\nabla}_\beta G^{\beta\alpha} = 0, \tag{7.23}$$

$$\sqrt{|g|}\widetilde{\nabla}_\beta T_{\text{M}}{}^\beta{}_\alpha - \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta \varphi^a} \partial_\alpha \varphi^a = 0, \tag{7.24}$$

где мы воспользовались определением тензора энергии-импульса материи (7.10) в общей теории относительности. Первое из этих уравнений представляет собой свернутые тождества Бианки, а второе – ковариантный “закон сохранения” тензора энергии-импульса материи. Действительно, если выполнены уравнения для полей материи,

$$\frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta \varphi^a} = 0,$$

то ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса материи обращается в нуль

$$\widetilde{\nabla}_\beta T_{\text{M}}{}^\beta{}_\alpha = 0. \tag{7.25}$$

Нетрудно видеть, что аналогичные выкладки можно проделать для любого набора полей материи. При этом второе слагаемое в (7.24) может усложниться, но оно всегда будет пропорционально уравнениям движения для полей материи. Единственное условие – это инвариантность действия. Таким образом, получаем следующее

Предложение 7.4.1. *Если действие полей материи инвариантно относительно общих преобразований координат и поля материи удовлетворяют своим уравнениям Эйлера–Лагранжа, то ковариантная дивергенция тензора энергии-импульса* (7.25) *равна нулю.*

На формулу (7.25) можно взглянуть с другой точки зрения. Допустим, что нам заданы уравнения Эйнштейна (7.1), а про инвариантное действие, приводящее к этим уравнениям, ничего не известно. Уравнения Эйнштейна – это система дифференциальных уравнений на метрику, и у них есть условия интегрируемости. Чтобы их получить возьмем ковариантную производную от обеих частей уравнений Эйнштейна. Дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю (7.23) как следствие тождеств Бианки. Дивергенция метрики тоже равна нулю, так как связность Леви-Чивиты является метрической. Следовательно, ковариантный "закон сохранения" тензора энергии-импульса материи (7.25) является условием интегрируемости системы дифференциальных уравнений Эйнштейна для метрики (7.1). Это важно учитывать в тех случаях, когда тензор энергии-импульса материи получен не из принципа наименьшего действия, а из каких-либо других соображений.

Пример 7.4.1. Если в качестве материи рассматривать жидкость или газ, для которой уравнения движения не следуют из принципа наименьшего действия, то условие (7.25) является независимым уравнением.

## 7.5. Действие для полей материи в обобщенных моделях гравитации

В настоящем разделе мы покажем, что при минимальной подстановке ковариантное обобщение канонического тензора энергии-импульса материи является источником в уравнении для репера ${e_\alpha}^a$, а ковариантное обобщение спинового момента полей материи – источником в уравнении для лоренцевой связности ${\omega_{\alpha a}}^b$.

В различных обобщенных моделях гравитации мы обычно предполагаем, что инвариантное действие состоит из двух слагаемых

$$S = S_{\text{G}} + S_{\text{M}}, \tag{7.26}$$

где $S_{\text{G}}$ – гравитационная часть действия и $S_{\text{M}}$ – действие для полей материи, в которое, для простоты, мы включили также калибровочные поля (электромагнитное поле и поле Янга–Миллса). В общей теории относительности $S_{\text{G}} = S_{\text{HE}}$ – это действие Гильберта–Эйнштейна (7.6), равное интегралу от скалярной кривизны с возможным добавлением космологической постоянной. Это действие зависит только от метрики или репера. В более общих моделях гравитационная часть действия может включать также инварианты более высокого порядка по кривизне, кручению, тензору неметричности и их ковариантных производных. В таких случаях мы рассматриваем в качестве независимых переменных, по которым производится варьирование, переменные Картана: репер ${e_\alpha}^a$ и линейную $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ связность ${\omega_{\alpha a}}^b$.

Если действие для полей материи может быть выражено через метрику и аффинную связность, то в качестве независимых переменных можно рассматривать также метрику, кручение и неметричность. Однако это не всегда имеет место. Например, для спинорного поля в геометрии Римана–Картана лоренцева связность не может быть выражена через метрику и аффинную связность. В этом случае введение репера необходимо. Таким образом, в общем случае использование переменных Картана предпочтительнее.

В настоящем разделе мы обсудим общие свойства уравнений движения для полей материи, не используя конкретный вид гравитационной части действия $S_{\text{G}}$.

Остановимся более подробно на действии $S_{\text{M}}$ для полей материи. К полям материи в настоящем разделе мы относим скалярные, спинорные поля, электромагнитное поле, поля Янга–Миллса и все другие поля, кроме репера и линейной связности. Обозначим всю совокупность полей материи через $\varphi = \{\varphi^{\text{A}}\}$, $\text{A} = 1, 2, \dots$. Пусть действие для полей материи в плоском пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ с координатами $x^a$, $a = 0, 1, \dots, n-1$, имеет вид

$$S_{\text{M}} = \int_{\mathbb{R}^{1,n-1}} dx L_{\text{M}}(\eta, \hat{\eta}, \varphi, \partial\varphi),$$

где лагранжиан полей материи $L_{\text{M}}$ зависит от метрики Минковского $\eta = \{\eta_{ab}\}$, инвариантной метрики в пространстве-мишени для полей материи $\hat{\eta} = \{\eta_{\text{AB}}\}$ (во многих случаях это просто символ Кронекера, $\eta_{\text{AB}} = \delta_{\text{AB}}$), полей материи $\varphi = \{\varphi^{\text{A}}\}$ и их частных производных первого порядка $\partial\varphi = \{\partial_a\varphi^{\text{A}}\}$.

В моделях гравитации мы предполагаем, что пространство-время $\mathbb{M}$ является многообразием той же размерности, что и исходное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$. Обозначим локальные координаты на $\mathbb{M}$ через $x^\alpha$, $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$. В простейшем случае инвариантное действие для полей материи получается из действия в пространстве Минковского с помощью *минимальной подстановки*:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{1,n-1} &\to \mathbb{M}, \qquad \mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n,\\
L_{\text{M}} &\mapsto \sqrt{|g|}L_{\text{M}},\\
\eta_{ab} &\mapsto g_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b g_{ab},\\
\eta_{\text{AB}} &\mapsto g_{\text{AB}}(x),\\
\varphi^{\text{A}} &\mapsto \varphi^{\text{A}},\\
\partial_a\varphi^{\text{A}} &\mapsto \nabla_\alpha\varphi^{\text{A}}, \qquad \nabla_\alpha\varphi^{\text{A}} := \partial_\alpha\varphi^{\text{A}} + \omega_{\alpha\text{B}}{}^{\text{A}}\varphi^{\text{B}},
\end{aligned}$$

где $\omega_{\alpha\text{A}}{}^{\text{B}}$ – компоненты линейной связности в том представлении, в котором преобразуются поля материи.

В случае общей линейной группы преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ инвариантной метрики в пространстве-мишени не существует (если поля материи преобразуются по точному представлению $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$), и мы вынуждены рассматривать нетривиальную метрику в пространстве-мишени $g_{\text{AB}}(x)$ как дополнительное поле. Метрика $g_{ab}$ – это произвольная симметричная невырожденная матрица лоренцевой сигнатуры, с помощью которой определяется репер.

Пример 7.5.1. Рассмотрим набор массивных скалярных полей одинаковой массы, лагранжиан которых в пространстве Минковского имеет вид (см. раздел 9.1)

$$L_{\text{M}} = \frac{1}{2}\eta^{ab}\partial_a\varphi^{\text{A}}\partial_b\varphi^{\text{B}}\eta_{\text{AB}} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\text{A}}\varphi^{\text{B}}\eta_{\text{AB}}. \tag{7.27}$$

Мы считаем, что скалярные поля преобразуются по некоторому представлению группы Лоренца (индекс A), и $\eta_{\text{AB}}$ – инвариантная метрика. Этот лагранжиан инвариантен относительно глобальных преобразований Лоренца, действующих на координаты $x^a$ и поля $\varphi^{\text{A}}$. После минимальной подстановки он примет вид

$$L_{\text{M}} = \sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\varphi^{\text{A}}\nabla_\beta\varphi^{\text{B}}g_{\text{AB}} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\text{A}}\varphi^{\text{B}}g_{\text{AB}}\right),$$

где ковариантная производная определяется линейной связностью

$$\nabla_\alpha\varphi^{\text{A}} := \partial_\alpha\varphi^{\text{A}} + \omega_{\alpha\text{B}}{}^{\text{A}}\varphi^{\text{B}}, \qquad \omega_{\alpha\text{B}}{}^{\text{A}} := \omega_\alpha{}^{ab}L_{ab\text{B}}{}^{\text{A}}, \tag{7.28}$$

$g_{\text{AB}}$ – метрика в пространстве-мишени и $g^{\alpha\beta} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b g^{ab}$. В приведенной формуле $L_{ab\text{B}}{}^{\text{A}}$ – представление генераторов линейной группы для выбранного набора скалярных полей. Соответствующее действие инвариантно относительно общих преобразований координат и локальных $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ вращений в пространстве-мишени:

$$\begin{aligned}
e_\alpha{}^b &\mapsto e_\alpha{}^b S^{-1}{}_b{}^a,\\
g_{ab} &\mapsto S_a{}^c S_b{}^d g_{cd},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\alpha a}{}^{b} &\mapsto S_a{}^c \omega_{\alpha c}{}^d S^{-1}{}_d^{b} + \partial_\alpha S_a{}^c S^{-1}{}_c^{b},\\
\varphi^{\text{A}} &\mapsto \varphi^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}},\\
g_{\text{AB}} &\mapsto S_{\text{A}}{}^{\text{C}} S_{\text{B}}{}^{\text{D}} g_{\text{CD}},
\end{aligned}$$

где $S_a{}^b(x) \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ – матрица локальных вращений и $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ – ее представление, которое соответствует выбранному набору скалярных полей. Если ограничить группу $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ до группы Лоренца $\mathbb{O}(1,n-1)$, то в качестве метрики $g_{ab}(x)$ следует выбрать инвариантную метрику Лоренца $\eta_{ab}$, которая уже не будет зависеть от точки многообразия. Ей соответствует некоторая инвариантная метрика $\eta_{\text{AB}}$ в пространстве-мишени.

Ограничимся моделями, основанными на геометрии Римана–Картана. Тогда группа Ли общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ сужается до группы Лоренца, и мы полагаем $g_{ab} = \eta_{ab}$ и $g_{\text{AB}} = \eta_{\text{AB}}$.

Из общего выражения для действия (7.26) следуют уравнения Эйлера–Лагранжа для геометрических переменных $e_\alpha{}^a$, $\omega_{\alpha a}{}^b$ и полей материи $\varphi^{\text{A}}$:

$$\frac{\delta S}{\delta e_\alpha{}^a} = 0, \tag{7.29}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{\alpha a}{}^b} = 0, \tag{7.30}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi^{\text{A}}} = \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta \varphi^{\text{A}}} = 0. \tag{7.31}$$

Поскольку при минимальной подстановке репер входит в действие полей материи только в качестве общего множителя $\sqrt{|g|} := \det e_\alpha{}^a$ и в ковариантную производную с латинским индексом $\nabla_a \varphi^{\text{A}} := e^\alpha{}_a \nabla_\alpha \varphi^{\text{A}}$, то первое уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\delta S_{\text{G}}}{\delta e_\alpha{}^a} = \sqrt{|g|}\frac{\partial L_{\text{M}}}{\partial(\nabla_\alpha \varphi^{\text{A}})} e^\beta{}_a \nabla_\beta \varphi^{\text{A}} - \sqrt{|g|} e^\alpha{}_a L_{\text{M}} = \sqrt{|g|} e^\beta{}_a T_{\text{M}\beta}{}^\alpha, \tag{7.32}$$

где

$$T_{\text{M}\beta}{}^\alpha := -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta e_\alpha{}^a} e_\beta{}^a = \nabla_\beta \varphi^{\text{A}} \frac{\partial L_{\text{M}}}{\partial(\nabla_\alpha \varphi^{\text{A}})} - \delta^\alpha_\beta L_{\text{M}}.$$

Сравнивая последнее выражение с каноническим тензором энергии-импульса (5.44), полученным из теоремы Нётер, мы видим, что в правой части гравитационных уравнений (7.32), полученных после варьирования по реперу, стоит его ковариантное обобщение. Поэтому говорят, что тензор энергии-импульса материи является источником для репера.

Линейная связность $\omega_\alpha{}^{ab}$ входит в действие полей материи только через ковариантную производную. Поэтому уравнение (7.30) можно переписать в виде

$$\frac{\delta S_{\text{G}}}{\delta \omega_\alpha{}^{ab}} = -\sqrt{|g|}\frac{\partial L_{\text{M}}}{\partial(\nabla_\alpha \varphi^{\text{A}})} L_{ab\text{B}}{}^{\text{A}} \varphi^{\text{B}} = \sqrt{|g|} S_{\text{M}ab}{}^\alpha,$$

где

$$S_{\text{M}ab}{}^\alpha := -\frac{\partial L_{\text{M}}}{\partial(\nabla_\alpha \varphi^{\text{A}})} L_{ab\text{B}}{}^{\text{A}} \varphi^{\text{B}}. \tag{7.33}$$

В геометрии Римана–Картана общая линейная группа $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ сужается до группы Лоренца $\mathbb{O}(1,n-1)$, линейная связность $\omega_\alpha{}^{ab}$ становится лоренцевой связностью, $L_{ab\text{B}}{}^{\text{A}}$ – генераторы группы Лоренца, $g_{ab} = \eta_{ab}$, $g_{\text{AB}}$ – инвариантная метрика в пространстве-мишени, которая всегда существует, так как группа Лоренца проста. В этом случае выражение (7.33) является ковариантным обобщением спинового момента полей материи (5.54). Поэтому мы говорим, что спиновый момент полей материи является источником для лоренцевой связности.

Выбор переменных Картана для моделей гравитации позволил дать физическую интерпретацию источников гравитационного поля: тензор энергии-импульса материи является источником для репера и спиновый момент – источником для лоренцевой связности.

Замечание. При выборе в качестве независимых переменных в геометрии Римана–Картана метрики и кручения, в правой части соответствующих уравнений будут стоять выражения, которые не имеют столь простой и привлекательной интерпретации.

## 7.6. Скалярно-тензорные модели

В качестве одного из возможных обобщений эйнштейновской теории гравитации, основанного на римановой геометрии, рассматривают скалярно-тензорные модели, в которых гравитационное взаимодействие описывается метрикой $g_{\alpha\beta}$ и скалярным полем $\phi$. Лагранжиан скалярно-тензорных моделей обычно записывают в виде

$$L = \kappa\sqrt{|g|}\phi R + \sqrt{|g|}\frac{\omega(\phi)}{\phi}\partial\phi^2 - \sqrt{|g|}V(\phi) + L_{\text{м}}, \tag{7.34}$$

где $R(g)$ – скалярная кривизна (в настоящем разделе знаки тильды опущены),

$$\partial\phi^2 := g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi$$

– кинетический член для скалярного поля, $\kappa$ – гравитационная постоянная, $\omega(\phi)$ и $V(\phi)$ – некоторые достаточно гладкие функции от скалярного поля, характеризующие неминимальность взаимодействия и потенциал самодействия. Все остальные поля включены в лагранжиан полей материи $L_{\text{м}}$.

С точки зрения общей теории относительности можно сказать следующее. Лагранжиан (7.34) описывает гравитационное взаимодействие полей материи, причем гравитационная "постоянная" $\kappa\phi(x)$ зависит от точки пространства-времени, то есть является скалярным полем, которое удовлетворяет своим уравнениям движения. При этом связь этого скалярного поля с метрикой неминимальна и включается некоторое самодействие, описываемое потенциалом $V$.

При $n = 2$ лагранжиан вида (7.34) описывает двумерную дилатонную гравитацию общего вида, а скалярное поле $\phi$ называется полем дилатона. Этот класс моделей характеризуется двумя произвольными функциями $U(\phi) := 2\omega(\phi)/\phi$ и $V(\phi)$ и приводит к интегрируемым уравнениям движения.

Впервые действие вида (7.34) было рассмотрено М. Фирцем в 1956 году [66]. Скалярно-тензорные модели гравитации привлекли значительное внимание после работ П. Йордана [67] и С. Бранса и Р. Дике [68]. Основная идея этих исследований восходит к работе П. Дирака, который предположил, что гравитационная постоянная может меняться со временем [69]. М. Фирц пошел дальше, выдвинув гипотезу о том, что гравитационная постоянная описывается независимым скалярным полем, удовлетворяющим некоторому нелинейному уравнению движения.

Получим уравнения движения для скалярно-тензорных моделей (7.34). Используя вид вариационной производной (7.22), нетрудно получить вариационные производные действия (7.34) по обратной метрике и скалярному полю

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}}: \qquad \kappa\phi\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) - \kappa(\Box\phi g_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi) +$$

$$+\frac{\omega}{\phi}\left(\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\partial\phi^2\right)+\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V+\frac{1}{2}T_{\text{м}\alpha\beta}=0. \qquad (7.35)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta\phi}: \qquad \kappa R-2\frac{\omega}{\phi}\Box\phi-\frac{\omega'}{\phi}\partial\phi^2+\frac{\omega}{\phi^2}\partial\phi^2-V'=0, \qquad (7.36)$$

где $T_{\text{м}\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса материи (7.10), а штрих обозначает дифференцирование функции по аргументу. След уравнения (7.35) имеет вид

$$\phi(\tfrac{n}{2}-1)\left(\kappa R+\frac{\omega}{\phi^2}\partial\phi^2\right)+\kappa(n-1)\Box\phi-\frac{n}{2}V-T_{\text{м}}=0,$$

где $T_{\text{м}}:=T_{\text{м}\alpha}{}^{\alpha}$ – след тензора энергии-импульса материи. Это уравнение при $n\ne 2$ позволяет исключить сумму

$$\kappa R+\frac{\omega}{\phi^2}\partial\phi^2$$

из уравнения для скалярного поля (7.36). В результате получим эквивалентное уравнение

$$2\left(\frac{n-1}{n-2}\kappa+\omega\right)\Box\phi+\frac{1}{n-2}(nV+2T_{\text{м}})-\omega'\partial\phi^2-\phi V'=0. \qquad (7.37)$$

Таким образом, систему уравнений движения (7.35), (7.36) можно переписать в эквивалентном виде, заменив уравнение для скалярного поля (7.36) на уравнение (7.37). В четырехмерном пространстве-времени уравнения движения обычно записывают в виде

$$\begin{aligned}\kappa\phi\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)&=-\frac{1}{2}T_{\text{м}\alpha\beta}+\kappa(\Box\phi g_{\alpha\beta}-\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)-\\&-\frac{\omega}{\phi}\left(\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\partial\phi^2\right)-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V, \qquad (7.38)\end{aligned}$$

$$\Box\phi=\frac{1}{2\omega+3\kappa}(2V+T_{\text{м}}-\omega'\partial\phi^2-\phi V'). \qquad (7.39)$$

С математической точки зрения уравнения движения скалярно-тензорных моделей значительно сложнее уравнений общей теории относительности и изучены недостаточно полно. Поэтому практически ничего нельзя сказать о виде функций $\omega(\phi)$ и $V(\phi)$, которые приводят к удовлетворительным результатам с теоретической точки зрения и не противоречат существующим наблюдательным данным.

### 7.7. Полиномиальная форма действия Гильберта–Эйнштейна

Рассмотрим пространство-время $\mathbb{M}$ произвольной размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{M}=n\geqslant 3$. Обозначим локальные координаты пространства-времени через $x^\alpha$, $\alpha=0,1,\dots,n-1$. Уравнения движения для метрики $g_{\alpha\beta}(x)$ в общей теории относительности без полей материи следуют из вариационного принципа для действия Гильберта–Эйнштейна (7.6).

Действие Гильберта–Эйнштейна неполиномиально по компонентам метрики по двум причинам. Во-первых, оно содержит неполиномиальный элемент объема $\sqrt{|g|}$. Во-вторых, выражение для скалярной кривизны содержит обратную метрику $g^{\alpha\beta}$, компоненты которой также неполиномиальны по $g_{\alpha\beta}$. Поэтому действие Гильберта–Эйнштейна в теории возмущений представляет собой очень сложный бесконечный ряд, что является существенной технической трудностью при анализе уравнений движения и квантовании. По этим же причинам действие Гильберта–Эйнштейна неполиномиально по компонентам обратной метрики.

Покажем, что конфигурационное пространство общей теории относительности можно расширить, включив определитель метрики в качестве дополнительной независимой переменной таким образом, что действие примет полиномиальный вид. Эквивалентность полиномиального действия исходному действию достигается за счет наложения в расширенном конфигурационном пространстве связи, которая также полиномиальна по полям. Изложение настоящего раздела следует статьям [70, 71].

Координатами конфигурационного пространства $\mathcal{M}$ общей теории относительности являются компоненты метрики $g_{\alpha\beta}(x)$. Размерность этого пространства равна

$$\operatorname{dim}\mathcal{M}=\frac{n(n+1)}{2}\times\infty^{(n-1)},$$

где символический множитель $\infty^{(n-1)}$ соответствует точкам пространства в пространстве-времени $\mathbb{M}$.

Рассмотрим другое конфигурационное пространство $\mathcal{N}$ с координатами $\varrho(x)$, $k_{\alpha\beta}(x)$. При этом будем считать, что $\varrho>0$ и матрица $k_{\alpha\beta}$ симметрична и невырождена в каждой точке пространства-времени:

$$k_{\alpha\beta}=k_{\beta\alpha},\qquad \operatorname{det}k_{\alpha\beta}\ne0.$$

Мы предполагаем также, что матрицы $g_{\alpha\beta}$ и $k_{\alpha\beta}$ имеют одинаковую лоренцеву сигнатуру

$$\operatorname{sign}g_{\alpha\beta}=\operatorname{sign}k_{\alpha\beta}=(+\underbrace{-\dots-}_{n-1}).$$

Размерность нового конфигурационного пространства равна

$$\operatorname{dim}\mathcal{N}=\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)\times\infty^{(n-1)}.$$

Выделим в $\mathcal{N}$ подпространство $\mathcal{M}'$ с помощью дополнительного условия

$$\operatorname{det}k_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \operatorname{det}g_{\alpha\beta}>0, \quad \text{нечетные } n,\\ -1, & \operatorname{det}g_{\alpha\beta}<0, \quad \text{четные } n.\end{cases}\tag{7.40}$$

Тогда между точками подпространства $\mathcal{M}'\subset\mathcal{N}$ и исходного конфигурационного пространства $\mathcal{M}$ можно установить взаимно однозначное соответствие

$$g_{\alpha\beta}:=\varrho^2k_{\alpha\beta}.\tag{7.41}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\varrho=|\operatorname{det}g_{\alpha\beta}|^{1/2n},\qquad k_{\alpha\beta}=\varrho^{-2}g_{\alpha\beta}.\tag{7.42}$$

Поэтому мы отождествим $\mathcal{M}=\mathcal{M}'$. Представление для обратной метрики $g^{\alpha\beta}=\varrho^{-2}k^{\alpha\beta}$, где $k^{\alpha\beta}k_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma$ следует из уравнения (7.41).

Сделаем два важных замечания. Во-первых, компоненты обратной матрицы $k^{\alpha\beta}$ полиномиальны по $k_{\alpha\beta}$. В общем случае из условия (7.40) следует, что они являются полиномами степени $n-1$ по компонентам $k_{\alpha\beta}$. Во-вторых, компоненты $k_{\alpha\beta}$ являются компонентами не тензора, а тензорной плотности второго ранга. Действительно, потребуем, чтобы равенство (7.41) было выполнено в произвольной системе координат. Поскольку определитель метрики $g$ представляет собой скалярную плотность степени $\operatorname{deg}g=-2$, то матрица $k_{\alpha\beta}$ является симметричной тензорной плотностью второго ранга и степени $\operatorname{deg}k_{\alpha\beta}=2/n$, а поле $\varrho$ – скалярной плотностью степени $\operatorname{deg}\varrho = -1/n$. То есть при преобразовании координат $x^\alpha \to x^{\alpha'}(x)$ новые переменные преобразуется по правилу

$$k_{\alpha'\beta'} = \partial_{\alpha'}x^\alpha \partial_{\beta'}x^\beta k_{\alpha\beta}J^{2/n}, \qquad \varrho' = \varrho J^{-1/n},$$

где $J := \operatorname{det}\partial_\alpha x^{\alpha'}$ – якобиан преобразования координат. Это значит, что дополнительное условие (7.40) инвариантно относительно преобразования координат. В связи с этим будем называть поле $k_{\alpha\beta}(x)$ *плотностью метрики*.

Явная формула для компонент обратной плотности метрики имеет вид

$$k^{\alpha\beta} = \frac{1}{(n-1)!}\hat\varepsilon^{\alpha\gamma_2\dots\gamma_n}\hat\varepsilon^{\beta\delta_2\dots\delta_n}k_{\gamma_2\delta_2}\dots k_{\gamma_n\delta_n},$$

где $\hat\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_n}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность степени $-1$ с единичными компонентами $|\hat\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_n}| = 1$. Данная формула показывает, что компоненты $k^{\alpha\beta}$ – это полиномы степени $n-1$ от компонент $k_{\alpha\beta}$ и наоборот.

Перепишем действие Гильберта–Эйнштейна в новых переменных $\varrho, k_{\alpha\beta}$. Для вычислений нам понадобятся следующие тождества, которые следуют после дифференцирования равенства (7.40):

$$\begin{aligned} k^{\gamma\delta}\partial_\alpha k_{\gamma\delta} &= 0, \\ k^{\gamma\delta}\partial^2_{\alpha\beta}k_{\gamma\delta} - k^{\gamma\delta}k^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha k_{\gamma\epsilon}\partial_\beta k_{\delta\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Прямые вычисления приводят к равенствам:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \varrho^2\left(\partial_\alpha k_{\beta\gamma} + 2\partial_\alpha \ln\varrho\, k_{\beta\gamma}\right), \\ \partial^2_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} &= \varrho^2\big(\partial^2_{\alpha\beta}k_{\gamma\delta} + 2\partial^2_{\alpha\beta}\ln\varrho\, k_{\gamma\delta} + \\ &\qquad +2\partial_\alpha\ln\varrho\,\partial_\beta k_{\gamma\delta} + 2\partial_\beta\ln\varrho\,\partial_\alpha k_{\gamma\delta} + 4\partial_\alpha\ln\varrho\,\partial_\beta\ln\varrho\, k_{\gamma\delta}\big), \\ g^{\beta\delta}\partial_\alpha g_{\delta\gamma} &= k^{\beta\delta}\partial_\alpha k_{\delta\gamma} + 2\partial_\alpha\ln\varrho\delta^\beta_\gamma, \\ g^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha g_{\gamma\epsilon}\partial_\beta g_{\delta\zeta} &= \varrho^2\Big(k^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha k_{\beta\epsilon}\partial_\beta k_{\delta\zeta} + 2\partial_\alpha\ln\varrho\,\partial_\beta k_{\gamma\delta} + 2\partial_\beta\ln\varrho\,\partial_\alpha k_{\gamma\delta} + \\ &\qquad +4\partial_\alpha\ln\varrho\,\partial_\beta\ln\varrho\, k_{\gamma\delta}\Big), \\ g^{\gamma\delta}g^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha g_{\gamma\epsilon}\partial_\beta g_{\delta\zeta} &= k^{\gamma\delta}k^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha k_{\gamma\epsilon}\partial_\beta k_{\delta\zeta} + 4n\partial_\alpha\ln\varrho\,\partial_\beta\ln\varrho, \\ g^{\gamma\delta}\partial^2_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} &= k^{\gamma\delta}\partial^2_{\alpha\beta}k_{\gamma\delta} + 2n\partial^2_{\alpha\beta}\ln\varrho + 4n\partial_\alpha\ln\varrho\,\partial_\beta\ln\varrho, \\ \partial^2_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} - \frac12 g^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha g_{\gamma\epsilon}\partial_\beta g_{\delta\zeta} - \frac12 g^{\epsilon\zeta}\partial_\beta g_{\gamma\epsilon}\partial_\alpha g_{\delta\zeta} &= \\ = \varrho^2\left(\partial^2_{\alpha\beta}k_{\gamma\delta} - \frac12 k^{\epsilon\zeta}\partial_\alpha k_{\gamma\epsilon}\partial_\beta k_{\delta\zeta} - \frac12 k^{\epsilon\zeta}\partial_\beta k_{\gamma\epsilon}\partial_\alpha k_{\delta\zeta} + 2\partial^2_{\alpha\beta}\ln\varrho\, k_{\gamma\delta}\right)&. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Теперь нетрудно найти выражение для скалярной кривизны

$$R = \varrho^{-4}\left[\varrho^2 R^{(k)} + 2(n-1)\varrho\partial_\alpha(k^{\alpha\beta}\partial_\beta\varrho) + (n-1)(n-4)\partial\varrho^2\right], \tag{7.44}$$

где

$$\partial\varrho^2 := k^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varrho\partial_\beta\varrho,$$

и “скалярная” кривизна $R^{(k)}$ для плотности метрики $k_{\alpha\beta}$ принимает удивительно простой вид

$$R^{(k)} = \partial_{\alpha\beta}k^{\alpha\beta} + \frac12 k^{\alpha\beta}\partial_\alpha k^{\gamma\delta}\partial_\gamma k_{\beta\delta} - \frac14 k^{\alpha\beta}\partial_\alpha k^{\gamma\delta}\partial_\beta k_{\gamma\delta}. \tag{7.45}$$

Отметим, что это выражение полиномиально и по плотности метрики $k_{\alpha\beta}$, и по ее обратной $k^{\alpha\beta}$.

Заметим, что для заданной плотности метрики $k_{\alpha\beta}$ мы можем формально построить символы Кристоффеля, тензоры кривизны и Риччи, а также скалярную кривизну. Соответствующие "символы Кристоффеля" не определяют связность на $\mathbb{M}$, а "кривизна" не является тензором, потому что новая переменная $k_{\alpha\beta}$ является не тензором, а тензорной плотностью. Например, скаляром в выражении (7.44) является не просто $R^{(k)}$, а вся правая часть выражения. Вместе с этим, группа общих преобразований координат содержит подгруппу, состоящую из преобразований с единичным якобианом. Относительно этой подгруппы "символы Кристоффеля" $\Gamma^{(k)}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ для $k_{\alpha\beta}$ преобразуются как компоненты связности, а "кривизна" $R^{(k)}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ является тензором.

Вторые производные $\partial^2_{\alpha\beta}k^{\alpha\beta}$ и $\partial_\alpha(k^{\alpha\beta}\partial_\beta\varrho)$, как и в общей теории относительности, можно исключить из действия Гильберта–Эйнштейна (7.6), вычтя граничный член

$$\partial_\alpha\big(\varrho^{n-2}\partial_\beta k^{\alpha\beta}+2(n-1)\varrho^{n-3}k^{\alpha\beta}\partial_\beta\varrho\big).$$

Здесь, для краткости, мы положили $\kappa=0$. В результате действие примет вид

$$S_{\text{HE}}\overset{\mathsf{div}}{=}\int dxL_{\text{HE}}, \tag{7.46}$$

где

$$\begin{aligned} L_{\text{HE}}=\varrho^{n-4}\Big[\frac12\varrho^2k^{\alpha\beta}\partial_\alpha k^{\gamma\delta}\partial_\gamma k_{\beta\delta}-\frac14k^{\alpha\beta}\partial_\alpha k^{\gamma\delta}\partial_\beta k_{\gamma\delta}-&\\ -(n-2)\varrho\partial_\alpha k^{\alpha\beta}\partial_\beta\varrho-(n-1)(n-2)\partial\varrho^2-(n-2)\Lambda\varrho^4&\Big]. \end{aligned} \tag{7.47}$$

При размерности пространства-времени $n\geqslant4$ этот лагранжиан полиномиален по полям $\varrho,k_{\alpha\beta}$ со степенями $n$ и $n+1$ соответственно. Общая степень полинома равна $2n-1$. По построению, с точностью до граничных слагаемых это действие инвариантно относительно общих преобразований координат. Необходимо только помнить, что поля $\varrho$ и $k_{\alpha\beta}$ являются не тензорами, а тензорными плотностями.

Лагранжиан (7.47) имеет вид лагранжиана дилатонной гравитации, где роль дилатона играет определитель метрики. От обычных моделей он отличается тем, что содержит перекрестный член с производными $\partial_\alpha k^{\alpha\beta}\partial_\beta\varrho$. Кроме того, он содержит меньшее число независимых полей, так как на плотность метрики наложено условие (7.40).

Дополнительное условие на плотность метрики (7.40) можно учесть, добавив к лагранжиану связь,

$$L_{\text{HE}}\mapsto L_{\text{HE}}+\lambda(\,\mathsf{det}\,k_{\alpha\beta}\pm1),$$

где $\lambda(x)$ – множитель Лагранжа.

Введение множителей Лагранжа необязательно. Из условия (7.40) следует условие на вариации плотности метрики

$$\delta\,\mathsf{det}\,k_{\alpha\beta}=\pm k^{\alpha\beta}\delta k_{\alpha\beta}=\mp\delta k^{\alpha\beta}k_{\alpha\beta}=0. \tag{7.48}$$

Поэтому действие (7.46) можно варьировать по $k_{\alpha\beta}$ или $k^{\alpha\beta}$, рассматривая все компоненты как независимые, а затем взять бесследовую часть получившихся уравнений.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (7.46) эквивалентны вакуумным уравнениям Эйнштейна (7.4). Вариация действия по $\varrho$ приводит к уравнению

$$2(n-1)\varrho\Box\varrho+(n-1)(n-4)\partial\varrho^2+R^{(k)}\varrho^2=n\Lambda\varrho^4, \tag{7.49}$$

которое эквивалентно следу уравнений Эйнштейна (7.4). Вариация действия (7.46) по плотности метрики дает $n(n+1)/2-1$ уравнений:

$$\varrho^2\left(R^{(k)}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n}k_{\alpha\beta}R^{(k)}\right)+(n-2)(\varrho\nabla_\alpha\nabla_\beta\varrho-\nabla_\alpha\varrho\nabla_\beta\varrho)-\frac{n-2}{n}k_{\alpha\beta}(\varrho\Box\varrho-\partial\varrho^2)=0, \tag{7.50}$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\varrho&=\partial_\alpha\varrho,\\ \nabla_\alpha\nabla_\beta\varrho&=\partial^2_{\alpha\beta}\varrho-\Gamma^{(k)\gamma}_{\alpha\beta}\partial_\gamma\varrho,\\ \Box\varrho&=\partial_\alpha(k^{\alpha\beta}\partial_\beta\varrho),\end{aligned} \tag{7.51}$$

и символы Кристоффеля $\Gamma^{(k)\gamma}_{\alpha\beta}$ построены по плотности метрики $k_{\alpha\beta}$. Эти уравнения эквивалентны бесследовой части уравнений Эйнштейна, потому что при варьировании необходимо учесть условие на вариации компонент плотности метрики (7.48). Заметим, что "ковариантные" производные тензоров и тензорных плотностей при условии (7.40) совпадают, так как $\Gamma^{(k)\beta}_{\alpha\beta}=0$. "Тензор Риччи" в (7.50) имеет вид

$$\begin{aligned}R^{(k)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}k^{\gamma\delta}(\partial^2_{\gamma\delta}k_{\alpha\beta}-\partial^2_{\alpha\gamma}k_{\beta\delta}-\partial^2_{\beta\gamma}k_{\alpha\delta})-\frac{1}{2}\partial_\gamma k^{\gamma\delta}(\partial_\alpha k_{\beta\delta}+\partial_\beta k_{\alpha\delta}-\partial_\delta k_{\alpha\beta})-\\ -\frac{1}{4}\partial_\alpha k_{\gamma\delta}\partial_\beta k^{\gamma\delta}-\frac{1}{2}k^{\gamma\delta}k^{\epsilon\zeta}(\partial_\gamma k_{\alpha\epsilon}\partial_\delta k_{\beta\zeta}-\partial_\gamma k_{\alpha\epsilon}\partial_\zeta k_{\beta\delta}).\end{aligned}$$

Уравнения (7.49) и (7.50) представляют собой соответственно след и бесследовую часть уравнений Эйнштейна (7.4). Для любого решения уравнений (7.49) и (7.50) существует единственная метрика (7.41), которая удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (7.4). Наоборот, для любого решения уравнений Эйнштейна (7.4) можно построить единственные плотность метрики и поле $\varrho$ (7.42), которые будут удовлетворять уравнениям (7.49) и (7.50).

Таким образом, при $n\geqslant 4$, действие (7.46), уравнения Эйлера–Лагранжа (7.49), (7.50) и связь (7.40) полиномиальны по полям $\varrho, k_{\alpha\beta}$. Это существенное упрощение теории достигнуто за счет расширения конфигурационного пространства путем введения дополнительной полевой переменной $\varrho$. Если связь (7.40) явно решить относительно одной из компонент плотности метрики $k_{\alpha\beta}$ и подставить найденное решение в действие (7.46), то полиномиальность теории будет утеряна. Отметим, что введение нового поля и связи не является чем-то, из ряда вон выходящим: исходная метрика $g_{\alpha\beta}$ и так содержит нефизические степени свободы, которые исключаются из теории путем решения калибровочных условий и связей, содержащихся в общей теории относительности. Мы лишь увеличили число переменных и связей, оставив физические степени свободы прежними.

На гамильтоновом языке проведенная процедура означает следующее. Фазовое пространство, соответствующее переменным $\varrho, k_{\alpha\beta}$, также расширится, при этом возникнет дополнительная связь на импульсы (равенство нулю следа импульсов, соответствующих $k_{\alpha\beta}$), которая вместе со связью (7.40) образует пару связей второго рода. Однако полное фазовое пространство уже будет не симплектическим, а только пуассоновым, так как матрица скобок Пуассона координат этого пространства будет вырождена. Подробнее этот вопрос рассмотрен далее в разделе 8.7.

Добавление скалярного $\varphi(x)$ и электромагнитного $A_\alpha(x)$ полей сохраняет действие и уравнения Эйлера–Лагранжа полиномиальными. При минимальной подстановке получаем следующие лагранжианы:

$$L_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\big[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi-V(\varphi)\big]=\frac{1}{2}\varrho^{n-2}\big[k^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi-\varrho^2V(\varphi)\big],$$

$$L_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}\sqrt{g}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} = -\frac{1}{4}\varrho^{n-4}k^{\alpha\beta}k^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta},$$

где $V(\varphi)$ – потенциал скалярного поля, включая массовый член, и $F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ – напряженность электромагнитного поля.

В четырехмерном пространстве-времени уравнение (7.49) упрощается

$$\Box\varrho + \frac{1}{6}R^{(k)}\varrho = \frac{2}{3}\Lambda\varrho^3. \tag{7.52}$$

При этом мы разделили его на $\varrho$, что возможно в силу предположения $\varrho > 0$.

Отбросим на время условие на плотность метрики (7.52) и будем считать $k_{\alpha\beta}$ метрикой, а $\varrho$ – скалярным полем. Тогда уравнение (7.52) ковариантно относительно конформных преобразований

$$\bar{k}_{\alpha\beta} = \Omega^2 k_{\alpha\beta}, \qquad \bar{\varrho} = \Omega^{-1}\varrho, \tag{7.53}$$

где $\Omega(x) > 0$ – дважды дифференцируемая функция. Оно рассматривалось в [72, 73, 74] при $\Lambda = 0$ и в [75] при $\Lambda \neq 0$. Рассматриваемый подход существенно отличается, поскольку на плотность метрики $k_{\alpha\beta}$ наложено дополнительно условие (7.40), которое явно нарушает конформную инвариантность. Однако появление множителя $1/6$ в уравнении (7.52) не случайно, так как параметризация (7.41) по виду совпадает с конформным преобразованием метрики (7.53).

**Унимодулярная гравитация.** При создании общей теории относительности А. Эйнштейн для упрощения вычислений часто использовал систему координат, в которой форма объема $\sqrt{|g|}$ является постоянной. Не ограничивая общности, можно считать, что эта постоянная равна единице:

$$|g| := |\operatorname{det} g_{\alpha\beta}| = 1. \tag{7.54}$$

Дифференцируя это равенство по координатам, получим уравнения:

$$\partial_\alpha\sqrt{|g|} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_\alpha g = 0.$$

Используя формулу для дифференцирования определителя метрики, полученные условия можно также записать в другом эквивалентном виде

$$g^{\beta\gamma}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \widetilde{\Gamma}_\alpha := \widetilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\beta = 0.$$

Дивергенция произвольного векторного поля в унимодулярной гравитации имеет тот же вид, что и в плоском пространстве в декартовых координатах:

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \partial_\alpha X^\alpha.$$

В общековариантных теориях, которой является общая теория относительности, существует произвол в выборе системы координат, которым можно воспользоваться. Нетрудно доказать, что в окрестности произвольной точки пространства-времени существует такая система координат, что определитель метрики равен по модулю единице (7.54). Такие системы координат определены с точностью до преобразований координат с единичным якобианом. Условие $|\operatorname{det} g_{\alpha\beta}| = 1$ существенно упрощает многие формулы, в частности, выражение для скалярной кривизны (7.45) становится полиномиальным.

Модели гравитации для метрики с единичным определителем рассматривались в физике неоднократно. Этим обстоятельством пользовался Эйнштейн при создании общей теории относительности [65]. В настоящее время такие модели часто называют *унимодулярной гравитацией.* Если рассматривается только гравитация без взаимодействия с другими полями, то унимодулярная гравитация есть просто общая теория относительности в специальной фиксированной системе координат, которая упрощает вид многих формул. Поэтому она эквивалентна общей теории относительности. Однако при введении взаимодействия с полями материи возникают дополнительные возможности, которые мы обсуждать не будем.

### 7.8. Точечные частицы в теории гравитации

Пусть задано пространство-время, т.е. многообразие $\mathbb{M}$ с метрикой $g$ лоренцевой сигнатуры. Будем считать, что кручение и неметричность на $\mathbb{M}$ равны нулю, и, для простоты, не будем помечать это обстоятельство знаком тильды. Размерность пространства-времени пока не фиксируем, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n \geqslant 2$. Точечная частица движется в пространстве-времени $\mathbb{M}$ по некоторой дифференцируемой времениподобной кривой $\{q^\alpha(\tau)\} \in \mathbb{M}$, где $\tau \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр вдоль этой кривой. Напомним, что кривая называется времениподобной, если вектор скорости кривой, $u^\alpha := \dot q^\alpha := dq^\alpha/d\tau$, времениподобен, $u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} > 0$. Мы считаем, что частица движется в будущее, т.е. $u^0 > 0$. Форма кривой определяется рассматриваемой задачей и силами, которые действуют на частицу. В общем случае параметр вдоль кривой произволен, и его выбирают из соображений удобства. Наиболее часто в качестве параметра вдоль траектории частицы выбирают ее длину $s$, которая является каноническим параметром. Это всегда возможно, так как обыкновенное дифференциальное уравнение $ds = \sqrt{\dot q^\alpha \dot q^\beta g_{\alpha\beta}}\, d\tau$ разрешимо относительно $s = s(\tau)$. В дальнейшем точка, как правило, будет обозначать дифференцирование по параметру $s$.

Определение. Времениподобная дифференцируемая кривая $\{q^\alpha(\tau)\} \in \mathbb{M}$, вдоль которой движется точечная частица, называется *мировой линией* частицы. Проекция мировой линии на пространственное сечение пространства-времени называется ее *траекторией*. Если параметр вдоль мировой линии частицы совпадает с ее длиной, $\tau = s$, то он называется *собственным временем*. Векторное поле

$$u^\alpha := \frac{dq^\alpha}{ds}, \tag{7.55}$$

определенное на мировой линии частицы, называется *собственной скоростью* частицы. Ковариантная производная от скорости частицы вдоль ее мировой линии

$$w^\alpha := \frac{dq^\beta}{ds}\nabla_\beta u^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha \tag{7.56}$$

называется *ускорением* частицы. Частица называется *свободной*, если ее ускорение равно нулю. Производная вдоль мировой линии частицы

$$v^\alpha := \frac{dq^\alpha}{dq^0} = \frac{\dot q^\alpha}{\dot q^0} \tag{7.57}$$

называется *наблюдаемой скоростью* частицы в системе координат $x^\alpha$.

Собственная скорость и ускорение частицы являются $n$-мерными векторами, определенным вдоль мировой линии частицы. Собственное время – это то время, которое показывают часы наблюдателя, движущегося вместе с частицей. Когда наблюдатель движется вместе с частицей, то он может измерить свою скорость относительно системы координат $x^\alpha$, это и будут компоненты собственной скорости. Наблюдаемая скорость, как следует из определения, не является векторным полем и зависит от выбора системы координат. Это та скорость, которую измеряет внешний наблюдатель в выбранной системе отсчета.

Равенство нулю ускорения частицы

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0,$$

определяет экстремали (3.28). Это значит, что свободные частицы в теории тяготения движутся вдоль экстремалей пространства-времени. Если на частицу действуют негравитационные силы, например, электромагнитные, то в уравнении движения $mw^\alpha = f^\alpha$, где $m = \mathsf{const}$ – масса частицы, появится внешняя сила с компонентами $f^\alpha$. В этом случае ее мировая линия будет отличаться от экстремали.

Предложение 7.8.1. *Если параметр вдоль мировой линии частицы канонический, то квадрат собственной скорости равен единице,*

$$u^2 := u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1. \tag{7.58}$$

*При этом ускорение всегда ортогонально скорости*

$$u^\alpha w_\alpha = 0.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из определения:

$$u^2 = \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} g_{\alpha\beta} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$$

Продифференцируем это равенство вдоль мировой линии

$$u^\beta \nabla_\beta (u^2) = 2u^\beta u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 2u^\alpha w_\alpha = 0,$$

где мы воспользовались тем, что ковариантная производная от метрики для связности Леви-Чивиты равна нулю. Отсюда вытекает второе утверждение предложения.

Наблюдаемая скорость является нековариантным объектом. Из определения следует соотношение между компонентами собственной и наблюдаемой скоростями

$$v^\alpha = \frac{u^\alpha}{\dot q^0}. \tag{7.59}$$

Более подробно,

$$v^0 = 1, \qquad v^\mu = \frac{dq^\mu}{dq^0}.$$

Возведем равенство $v^\alpha \dot q^0 = u^\alpha$ в квадрат и учтем, что $u^2 = 1$. Тогда получим, что компоненты собственной скорости частицы можно записать в виде

$$u^0 := \dot q^0 = \frac{1}{\sqrt{v^2}}, \qquad u^\mu := \dot q^\mu = \frac{v^\mu}{\sqrt{v^2}}, \tag{7.60}$$

где $v^2 = v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}$ – квадрат наблюдаемой скорости. Из равенства (7.59) также следует, что $v^2 > 0$. Понятие наблюдаемой скорости частицы будет использовано в дальнейшем при определении ультрарелятивистского предела для точечной частицы.

Замечание. Определения даны для точечной частицы, находящейся под действием произвольных сил, не только гравитационных. Мы также предполагаем, что, если наблюдатель находится в определенной точке пространства в определенный момент времени, то ему известны значения всех координат $x^\alpha$, соответствующих данной точке пространства-времени. Мы также предполагаем, что ему известны координаты всех близлежащих точек, что необходимо для вычисления производных. Эти упрощающие предположения сделаны для того, чтобы обойти важный и интересный, но сложный вопрос измерений.

В общем случае, когда на частицу действуют произвольные силы, она может двигаться по любой времениподобной кривой. В моделях гравитации мы предполагаем, что точечная частица, на которую действуют только гравитационные силы, описывается инвариантным действием

$$S_{\mathrm{m}} = -mc\int_p^q ds = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\sqrt{\dot q^\alpha \dot q^\beta g_{\alpha\beta}}, \tag{7.61}$$

где $m = \mathsf{const} > 0$ – масса частицы, $c$ – скорость света и интегрирование проводится вдоль времениподобной кривой $q(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, соединяющей точки $p := q(\tau_1)$ и $q := q(\tau_2)$. Действие (7.61) отличается от длины мировой линии частицы (3.23) постоянным множителем $-mc$ и, если метрика задана, варьируется только по траектории частицы $\delta q^\alpha(\tau)$. В дальнейшем положим $c = 1$.

Допустим, что точки $p, q \in \mathbb{M}$ можно соединить времениподобной экстремалью и притом только одной. Ясно, что эти точки всегда можно соединить также ломаными светоподобными кривыми $\gamma$. Длина этих кривых равна нулю, потому что каждый сегмент ломаных светоподобен. Если некоторая времениподобная кривая аппроксимирует одну из этих кривых $\gamma$, то ее длина будет близка к нулю. Остальные времениподобные кривые, соединяющие точки $p$ и $q$ будут иметь некоторую положительную длину. Поэтому, если точки $p$ и $q$ соединяются только одной экстремалью, то это будет времениподобная кривая наибольшей длины. Благодаря знаку минус перед действием (7.61), экстремаль соответствует минимуму функционала (7.61) среди всех времениподобных кривых, соединяющих точки $p$ и $q$. Отсюда следует, что точечные частицы движутся вдоль экстремалей пространства-времени, если на них действуют только внешние гравитационные силы.

Если метрика пространства-времени считается заданной, то это означает, что мы не учитываем гравитационное поле, создаваемое самой частицей. Во многих случаях такая постановка задачи вполне допустима, например, если масса частицы мала. Такие частицы называются *пробными*.

Замечание. Мы предполагаем, что точечная частица описывается действием (7.61) независимо от того, задана ли на $\mathbb{M}$ аффинная геометрия общего вида с кручением и неметричностью или задана только метрика. Тогда в общем случае точечная частица будет двигаться по экстремали, а не по геодезической. Если кручение и неметричность пространства-времени равны нулю, то экстремали совпадают с геодезическими. Поэтому в общей теории относительности можно также сказать, что точечные частицы под действием гравитационных сил движутся по геодезическим. Если, помимо гравитационных сил, присутствуют также другие, например, электромагнитные взаимодействия, то вид действия (7.61) изменится. Поэтому при наличии сил негравитационного происхождения траектории частиц, вообще говоря, отличаются от экстремалей.

Выше было введено понятие собственного времени для произвольной времениподобной линии. Для экстремали собственное время по существу совпадает с каноническим параметром. Действительно, для любой экстремали квадрат вектора скорости сохраняется, $u^2 = \mathsf{const}$, (3.32). Поскольку канонический параметр определен с точностью до умножения на отличную от нуля постоянную, то его всегда можно выбрать таким образом, чтобы квадрат вектора скорости частицы был равен единице (7.58). Другими словами, в качестве канонического параметра выбирается длина экстремали, $\tau = s$.

Предположим, что в пространстве-времени находится $\mathrm{N}$ частиц с массами $m_{\mathrm{I}}$, $\mathrm{I} = 1, \dots, \mathrm{N}$, которые взаимодействуют между собой только посредством гравитационных сил. В общей теории относительности суммарное действие гравитационного поля и совокупности точечных частиц равно сумме действия Гильберта–Эйнштейна (7.6) и действий для каждой частицы:

$$S = S_{\text{HE}} + \sum_{\text{I}=1}^{\text{N}} S_{\text{I}} = \kappa \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} R - \sum_{\text{I}} m_{\text{I}} \int_{\tau_{\text{I}1}}^{\tau_{\text{I}2}} d\tau_{\text{I}} \sqrt{\dot q_{\text{I}}^\alpha \dot q_{\text{I}}^\beta g_{\alpha\beta}}, \tag{7.62}$$

где мы, для простоты, опустили космологическую постоянную и знак тильды у скалярной кривизны. Во втором слагаемом метрика рассматривается как сложная функция $g_{\alpha\beta}(\tau_{\text{I}}) = g_{\alpha\beta}\big(q(\tau_{\text{I}})\big)$, и параметры $\tau_{\text{I}}$ могут быть выбраны произвольно для каждой частицы. Первый интеграл берется по всему пространству-времени, а последующие – в пределах $\tau_{\text{I}1,2}$ (возможно, бесконечных), которые соответствуют пересечению мировых линий частиц с краем $\partial\mathbb{M}$, если таковой имеется. Для простоты, предположим, что мировые линии частиц нигде не пересекаются, т.е. частицы не сталкиваются между собой.

В настоящем разделе нас не будут интересовать граничные эффекты. Поэтому пределы интегрирования, для простоты, мы в дальнейшем опустим.

Действие (7.62) инвариантно относительно общих преобразований координат и независимой перепараметризации параметров $\tau_{\text{I}}$ вдоль каждой траектории. В дальнейшем мы предполагаем, что вдоль каждой траектории параметр совпадает с собственным временем. Более того, поскольку в действие входит сумма интегралов вдоль траекторий, то индекс I у параметров $\tau_{\text{I}}$ можно опустить,

$$S = \int dx \sqrt{|g|} \kappa R - \int d\tau \sum_{\text{I}} m_{\text{I}} \sqrt{\dot q_{\text{I}}^\alpha \dot q_{\text{I}}^\beta g_{\alpha\beta}}. \tag{7.63}$$

В общем случае пределы интегрирования для различных частиц могут отличаться. Однако, поскольку нас не интересуют граничные эффекты, мы этого указывать не будем.

В разделе 3.2 действие для экстремалей было проварьировано в предположении, что вдоль нее выбран канонический параметр. Сейчас мы получим уравнения без этого предположения, так как в ряде случаев удобнее выбирать параметр вдоль экстремалей, исходя из других соображений. Рассмотрим одну точечную частицу с мировой линией $q^\alpha(\tau)$ в произвольной параметризации. Простые вычисления приводят к следующим уравнениям движения

$$S_{\text{m},\alpha} := \frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta q^\alpha} = m \frac{g_{\alpha\beta}}{u^2} \left( \ddot q^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}{}^\beta \dot q^\gamma \dot q^\delta - \frac{\dot q^\beta}{2u^2} \frac{d(u^2)}{d\tau} \right) = 0, \tag{7.64}$$

где

$$u^2 := \dot q^\alpha \dot q^\beta g_{\alpha\beta}.$$

Поскольку исходное действие инвариантно относительно произвольной замены параметра вдоль мировой линии, то согласно второй теореме Нётер между уравнениями движения существует линейная зависимость. Чтобы ее найти, рассмотрим бесконечно малое изменение параметра

$$\tau \mapsto \tau + \epsilon(\tau).$$

Соответствующая вариация формы функций $q^\alpha(\tau)$ имеет вид

$$\delta q^\alpha = -\epsilon \dot q^\alpha.$$

Следовательно, вариация действия равна

$$\delta S_{\text{m}} = -\int d\tau S_{\text{m},\alpha} \epsilon \dot q^\alpha.$$

Поскольку функция $\epsilon(\tau)$ произвольна, то из инвариантности действия, $\delta S_{\mathrm{m}} = 0$, вытекает зависимость уравнений движения:

$$S_{\mathrm{m},\alpha}\dot{q}^\alpha = 0. \tag{7.65}$$

В этом тождестве можно убедиться прямой проверкой.

При произвольной параметризации мировой линии частицы квадрат вектора скорости не является постоянным, $u^2 \neq \mathsf{const}$. Если выбран канонический параметр вдоль экстремали, то $d(u^2)/d\tau = 0$, и последнее слагаемое в уравнении (7.64) обращается в нуль.

Действие для совокупности частиц (7.63) инвариантно относительно независимой перепараметризации каждой мировой линии. Поэтому вдоль каждой кривой можно выбрать свой канонический параметр. В дальнейшем мы это предположим.

Для вывода полной системы уравнений движения, действие (7.63) необходимо проварьировать по метрике $g_{\alpha\beta}(x)$ и траекториям частиц $q_{\mathrm{I}}^\alpha(\tau)$. Вариация действия для частиц по компонентам метрики $\delta g_{\alpha\beta}(x)$ неопределена, так как оно записано только вдоль траекторий. Поэтому мы преобразуем интегралы вдоль траекторий в интегралы по всему пространству-времени. Для этого вставим в подынтегральное выражение единицу,

$$1 = \int dx \delta(x - q_{\mathrm{I}}) := \int dx \delta(x^0 - q_{\mathrm{I}}^0)\delta(x^1 - q_{\mathrm{I}}^1)\dots\delta(x^{n-1} - q_{\mathrm{I}}^{n-1}),$$

и изменим порядок интегрирования, предположив, что это возможно. Тогда действие примет вид

$$S = \int dx \left[\kappa\sqrt{|g|}R - \int d\tau \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}}\sqrt{\dot{q}_{\mathrm{I}}^\alpha \dot{q}_{\mathrm{I}}^\beta g_{\alpha\beta}}\,\delta(x - q_{\mathrm{I}})\right]. \tag{7.66}$$

Теперь метрику во втором слагаемом можно рассматривать как функцию от точки пространства-времени, $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$. Вариационные производные этого действия по траекториям частиц и метрике при канонической параметризации равны

$$\frac{\delta S}{\delta q_{\mathrm{I}}^\alpha} = m_{\mathrm{I}}\left(\ddot{q}_{\mathrm{I}}^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}{}^\beta \dot{q}_{\mathrm{I}}^\gamma \dot{q}_{\mathrm{I}}^\delta\right) g_{\beta\alpha}, \tag{7.67}$$

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\sqrt{|g|}\kappa\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right) - \int d\tau \sum_{\mathrm{I}} \frac{m_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{\dot{q}_{\mathrm{I}}^\gamma \dot{q}_{\mathrm{I}}^\delta g_{\gamma\delta}}}\dot{q}_{\mathrm{I}}^\alpha \dot{q}_{\mathrm{I}}^\beta \delta(x - q_{\mathrm{I}}). \tag{7.68}$$

Вариационная производная по траекториям частиц (7.66) была получена ранее в произвольной параметризации (3.25). Вариационная производная действия Гильберта–Эйнштейна также была получена ранее в разделе (7.3). Для любого решения уравнения (7.67) канонический параметр $\tau$ можно выбрать так, что $\sqrt{\dot{q}_{\mathrm{I}}^\gamma \dot{q}_{\mathrm{I}}^\delta g_{\gamma\delta}} = 1$ для каждой частицы. Поэтому, не ограничивая общности, знаменатель во втором слагаемом (7.68) можно упростить, отбросив квадратный корень. Таким образом, связанная система уравнений движения гравитационного поля и системы точечных частиц примет вид

$$\kappa\sqrt{|g|}\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta}, \tag{7.69}$$

$$g_{\alpha\beta}\left(\ddot{q}_{\mathrm{I}}^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}{}^\beta \dot{q}_{\mathrm{I}}^\gamma \dot{q}_{\mathrm{I}}^\delta\right) = 0, \tag{7.70}$$

где

$$T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} := \frac{1}{\sqrt{|g|}}\int d\tau \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \dot{q}_{\mathrm{I}}^\alpha \dot{q}_{\mathrm{I}}^\beta \delta(x - q_{\mathrm{I}}) \tag{7.71}$$

– тензор энергии-импульса точечных частиц и $\dot{q}_{\text{I}\alpha} := \dot{q}_{\text{I}}^{\beta} g_{\beta\alpha}$. Интегрирование по каноническим параметру $\tau$ в тензоре энергии-импульса можно снять, использовав одну $\delta$-функцию, а именно $\delta\big(x^0 - q_{\text{I}}^0(\tau)\big)$. Поскольку $\dot{q}_{\text{I}}^0 > 0$ (все частицы движутся в будущее), то для тензора энергии-импульса точечных частиц получаем следующее выражение

$$T_{\text{m}}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\text{I}} \frac{m_{\text{I}} \dot{q}_{\text{I}}^{\alpha} \dot{q}_{\text{I}}{}^{\beta}}{\dot{q}_{\text{I}}^0} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\text{I}}), \tag{7.72}$$

где

$$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\text{I}}) := \delta(x^1 - q_{\text{I}}^1) \dots \delta(x^{n-1} - q_{\text{I}}^{n-1})$$

и параметр $\tau$ является неявной функцией $x^0$, заданной уравнением $x^0 = q^0(\tau)$.

Замечание. Появление множителя $1/\sqrt{|g|}$ в выражении для тензора энергии-импульса точечных частиц не случайно. Напомним, что $\delta$-функция является не функцией на многообразии, а скалярной плотностью степени $-1$, как и элемент объема $\sqrt{|g|}$.

Таким образом, для точечных частиц, на которые действуют только гравитационные силы, мы имеем связанную систему уравнений (7.69), (7.70). Каждая частица движется по экстремали пространства-времени в соответствии с уравнением (7.70), где метрика определяется уравнениями Эйнштейна (7.69). В свою очередь, метрика зависит от распределения частиц, так как в правой части уравнений Эйнштейна стоит нетривиальный тензор энергии-импульса.

Обсудим трудности, которые возникают при решении уравнений (7.69) и (7.70) в связи с наличием $\delta$-функций.

Уравнение для экстремалей (траекторий точечных частиц) (7.70) хорошо определены, если компоненты метрики – дифференцируемые функции, $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$. Однако детальный анализ системы уравнений движения показывает, что это условие не выполняется, так как компоненты метрики имеют особенности на мировых линиях частиц. Именно по этой причине мы не опустили индексы в уравнениях Эйнштейна (7.69). В рассматриваемом случае уравнения Эйнштейна с контравариантными и ковариантными индексами не эквивалентны. По этой же причине мы не сократили элемент объема $\sqrt{|g|}$, так как он обращается в нуль на мировых линиях частиц. В уравнениях для экстремалей (7.70) мы также не произвели каких-либо манипуляций с индексами.

Наличие $\delta$-функций в полной системе уравнений приводит к серьезным математическим трудностям. Поскольку есть $\delta$-функции, то решения системы уравнений Эйнштейна нужно понимать в обобщенном смысле после интегрирования с пробными функциями. Если в качестве пробных функций выбрать пространство гладких функций с финитными носителями $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ (см., например, [76]), то компоненты метрики должны лежать в сопряженном пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Однако уравнения Эйнштейна нелинейны, а умножение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ в общем случае определить нельзя. Насколько известно автору, решение этой проблемы в настоящее время отсутствует. Поэтому вычисления данного раздела следует рассматривать как ориентир, с которым следует сравнивать более строгие выкладки.

В заключение раздела проведем еще одно обобщение. Действие (7.63) описывает совокупность точечных частиц, взаимодействующих с гравитационным полем. Если частицы находятся дополнительно под действием некоторых потенциальных сил негравитационного происхождения, то действие можно обобщить, вставив соответствующий потенциал $V(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$:

$$S = \int dx \sqrt{|g|} \kappa R - \int d\tau \sum_{\text{I}} m_{\text{I}} V \sqrt{\dot{q}_{\text{I}}^{\alpha} \dot{q}_{\text{I}}^{\beta} g_{\alpha\beta}}, \tag{7.73}$$

где потенциал рассматривается на мировых линиях, $V(\tau) := V\big(g_{\text{I}}(\tau)\big)$. При этом мы не нарушаем инвариантность действия относительно независимого преобразования параметров мировых линий частиц. Если вдоль каждой мировой линии выбрать канонический параметр, то уравнения движения для действия (7.73) примут вид

$$\kappa\sqrt{|g|}\left(R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta}V, \tag{7.74}$$

$$Vg_{\alpha\beta}\left(\ddot{q}_{\mathrm{I}}^{\beta}+\Gamma_{\gamma\delta}{}^{\beta}\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\gamma}\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\delta}\right)+\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\gamma}\partial_{\gamma}Vg_{\alpha\beta}\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\beta}-\partial_{\alpha}V=0. \tag{7.75}$$

При $V\neq 0$ второе уравнение можно разделить на $V$ и переписать в следующем виде

$$g_{\alpha\beta}\left(\ddot{q}_{\mathrm{I}}^{\beta}+\Gamma_{\gamma\delta}{}^{\beta}\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\gamma}\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\beta}\right)=\Pi^{\mathrm{T}}{}_{\alpha}{}^{\beta}\partial_{\beta}\ln|V|, \tag{7.76}$$

где

$$\Pi^{\mathrm{T}}{}_{\alpha}{}^{\beta}:=\delta_{\alpha}^{\beta}-\dot{q}_{\mathrm{I}\alpha}\dot{q}_{\mathrm{I}}^{\beta}$$

– проекционный оператор на направление, перпендикулярное к мировой линии I-той частицы. То есть потенциальные силы всегда действуют в направлении, перпендикулярном траекториям.

**7.8.1. Нерелятивистский предел для точечной частицы.** В настоящем разделе будет показана связь между уравнениями движения для точечных частиц (7.70) и хорошо знакомыми уравнениями движения частиц под действием гравитационного поля в механике Ньютона.

Пусть метрика пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ имеет вид

$$\eta_{\alpha\beta}=\operatorname{diag}(1,\underbrace{-1,\dots,-1}_{n-1}). \tag{7.77}$$

Для простоты рассмотрим движение одной частицы. В пространстве-времени $\mathbb{M}$ с нетривиальной метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ функции $\{q^{\alpha}(\tau)\}$ задают мировую линию точечной частицы. Пусть $\tau=t$ – канонический параметр (собственное время). Предположим, что координата $x^0$ на $\mathbb{M}$ выбрана таким образом, что на траектории частицы $c\tau=ct=x^0$. Здесь мы ввели явно скорость света $c$ для того, чтобы в дальнейшем строить разложение по малому параметру $\boldsymbol{u}^2/c^2\ll 1$, где $\boldsymbol{u}$ – пространственная часть собственной скорости частицы. Условимся нумеровать, как обычно, пространственные координаты буквами из середины греческого алфавита:

$$\{x^{\alpha}\}=\{x^0,x^{\mu}\},\qquad \mu=1,\dots,n-1.$$

Поскольку исходное действие (7.61) инвариантно относительно общих преобразований координат, то у нас имеется возможность дополнительно фиксировать $n-1$ компонент метрики. Положим $g_{0\mu}=0$. Тогда метрика примет блочно-диагональный вид

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} g_{00} & 0\\ 0 & g_{\mu\nu}\end{pmatrix} \tag{7.78}$$

Другими словами, система координат выбрана таким образом, чтобы времениподобный вектор $\partial_0$ был ортогонален всем касательным векторам к пространственным сечениям $x^0=\mathsf{const}$.

Введем два параметра разложения. Во-первых, нерелятивистский предел соответствует скоростям, малым по сравнению со скоростью света,

$$\frac{\boldsymbol{u}^2}{c^2}\sim\epsilon\ll 1,\qquad \boldsymbol{u}^2:=-\eta_{\mu\nu}\dot{q}^{\mu}\dot{q}^{\nu}=\delta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}\geqslant 0.$$

Во-вторых, слабому гравитационному полю соответствует метрика, которая мало отличается от метрики Минковского:

$$g_{00} = 1 + h_{00}, \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad h_{00}, h_{\mu\nu} \sim \epsilon \ll 1.$$

Если гравитационное поле мало, $g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}$, то в нерелятивистском пределе $\boldsymbol{u}^2 \to 0$ временна́я компонента собственной скорости стремится к скорости света, $\dot{q}^0 \to c$, так как выполнено соотношение (7.58). Если гравитационное поле не очень велико, $0 < g_{00} < \mathsf{const}$, то в нерелятивистском пределе $g_{00}(\dot{q}^0)^2 \to c^2$ и производная $\dot{q}^0$ ограничена снизу некоторой положительной постоянной. Поскольку пространственные компоненты собственной $u^\mu$ и наблюдаемой $v^\mu$ скорости частицы отличаются на строго положительный множитель $\dot{q}^0$, то пределы $\boldsymbol{u}^2 \to 0$ и $\boldsymbol{v}^2 \to 0$, где $\boldsymbol{v}^2 := -\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \to 0$, эквивалентны.

Нерелятивистской частице в слабом гравитационном поле соответствует интервал

$$ds^2 = (c^2 + c^2 h_{00} + \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) dt^2.$$

В силу сделанных предположений о малости гравитационного поля и скоростей последним слагаемым в этом представлении можно пренебречь. Тогда в нерелятивистском пределе с учетом первой поправки интервал для точечной частицы примет вид

$$ds^2 \approx \left( c^2 + \frac{2U}{m} - \boldsymbol{u}^2 \right) dt^2, \tag{7.79}$$

где введено обозначение

$$h_{00}(x) =: \frac{2U(x)}{mc^2}. \tag{7.80}$$

Подставим приближенное выражение для интервала (7.79) в действие для точечной частицы (7.61), умноженное на скорость света, и разложим по степеням $\epsilon$. Тогда в первом порядке по $\epsilon$ получим приближенное выражение

$$S_{\mathrm{m}} \approx -mc \int d\tau \sqrt{c^2 + \frac{2U}{m} - \boldsymbol{u}^2} \approx \int d\tau \left( -mc^2 + \frac{m\boldsymbol{u}^2}{2} - U \right). \tag{7.81}$$

С точностью до энергии покоя точечной частицы с обратным знаком $-mc^2$ подынтегральное выражение совпадает с хорошо известным выражением для лагранжиана точечной частицы в нерелятивистской механике (6.17). Тем самым мы показали, что в нерелятивистском пределе поправка к временно́й компоненте метрики (7.80), умноженной на $mc^2$, следует интерпретировать как потенциальную энергию $U = mc^2 h_{00}/2$ точечной частицы, находящейся во внешнем гравитационном поле.

Отметим, что разумный нерелятивистский предел обусловливает выбор общего знака минус в исходном действии для точечной частицы (7.61).

Выше мы определили нерелятивистский предел (7.81) для действия. При этом вместо $n$ исходных уравнений в (7.67) у нас осталось только $n-1$ уравнение, так как переменная $q^0(\tau)$ не вошла в действие (7.81). Поэтому посмотрим на нерелятивистский предел не на уровне действия, а на уровне уравнений движения.

Интервалу (7.79) соответствует метрика

$$g_{\alpha\beta} = \mathsf{diag}\,(1 + 2U/(mc^2), -1, \dots, -1). \tag{7.82}$$

Предположим, что потенциал $U$ не зависит от времени $t$, то есть движение частицы происходит в статическом гравитационном поле. Символы Кристоффеля в первом порядке малости имеют только три нетривиальные компоненты:

$$\Gamma_{00}{}^{\mu} = -\frac{\eta^{\mu\nu}\partial_\nu U}{mc^2}, \qquad \Gamma_{0\mu}{}^{0} = \Gamma_{\mu 0}{}^{0} = \frac{\partial_\mu U}{mc^2}.$$

Соответствующие уравнения для экстремалей (3.24) принимают вид

$$\ddot{q}^0 = -2\frac{\partial_\mu U}{mc^2}\dot{q}^\mu, \tag{7.83}$$

$$\ddot{q}^\mu = -\frac{\delta^{\mu\nu}\partial_\nu U}{mc^2}. \tag{7.84}$$

Поскольку в выбранной системе координат $\ddot{q}^0 = 0$ и $\dot{U} = \dot{q}^\mu \partial_\mu U = 0$ (поле статично), то первое уравнение удовлетворяется автоматически. Второе уравнение совпадает с *вторым законом Ньютона* для движения точечной частицы в статическом потенциальном поле

$$m\ddot{q}^\mu = -\delta^{\mu\nu}\partial_\nu U. \tag{7.85}$$

Таким образом, потерянное уравнение выполняется с точностью $\epsilon^2$.

Тот факт, что уравнение для $q^0$ удовлетворяется с рассматриваемой степенью точности не является удивительным. Действительно, среди $n$ исходных уравнений для точечной частицы имеется одна линейная зависимость (7.65). Поэтому только $n-1$ уравнений являются независимыми, которые в нерелятивистском пределе сводятся к уравнениям Ньютона (7.85).

В общей теории относительности ($n = 4$) метрика вдали от тела массы $M$ дается решением Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где $G$ – гравитационная постоянная. Соответствующее нерелятивистское выражение для потенциальной энергии пробной частицы имеет вид

$$U = -G\frac{mM}{r}, \tag{7.86}$$

что совпадает с *законом всемирного тяготения*. Таким образом, мы показали, что закон всемирного тяготения вытекает из общей теории относительности в нерелятивистском пределе.

В конце предыдущего раздела было рассмотрено действие для точечных частиц, (7.73), взаимодействующих не только с гравитационным полем, но и с другими потенциальными полями. Нерелятивистский предел в этом случае определяется так же, как и раньше. Дополнительно мы требуем, чтобы потенциал $V$ мало отличался от единицы:

$$V = 1 + \frac{W}{mc^2}, \qquad \frac{W}{mc^2} \sim \epsilon \ll 1.$$

Тогда в нерелятивистском пределе приближенное выражение действия для точечной частицы (7.81) примет вид

$$S_{\mathrm{m}} \approx \int d\tau \left(-mc^2 + \frac{m\boldsymbol{u}^2}{2} - U - W\right).$$

В этом случае движение пробной частицы определяется суммой гравитационного потенциала $U$, который возник из $g_{00}$ компоненты метрики, и негравитационного потенциала $W$, который возник из множителя $V$.

**7.8.2. Теория гравитации Ньютона.** В настоящем разделе мы опишем гравитационное взаимодействие точечных частиц в механике Ньютона. При этом, по возможности, мы будем следовать общей схеме, принятой в общей теории относительности.

Пусть $\mathbb{M}$ – это тривиальное четырехмерное многообразие, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^4$, с декартовой системой координат $x = \{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\} = \{t, \boldsymbol{x}\}$, где $\alpha = 0, 1, 2, 3$ и $\mu = 1, 2, 3$. Как и раньше мы отождествим нулевую координату с временем, $x^0 = t$. Пусть в $\mathbb{M}$ движутся $\mathrm{N}$ точечных частиц по траекториям $q_{\mathrm{I}}(t) = \{q_{\mathrm{I}}^\mu(t)\}$, $\mathrm{I} = 1, \ldots, \mathrm{N}$. В механике Ньютона время имеет абсолютный характер в том смысле, что оно одинаково для всех частиц и играет роль параметра вдоль траектории каждой частицы. Предположим, что между частицами действуют только гравитационные силы. Это значит, что каждая частица движется в гравитационном поле, которое создается другими частицами. В свою очередь каждая частица создает собственное гравитационное поле, которое влияет на движение других частиц. Обозначим суммарный потенциал гравитационного поля через $\varphi(x)$, который, по определению, является функцией (скалярным полем) на $\mathbb{R}^4$.

Действие для точечных частиц, взаимодействующих посредством гравитационного поля, является суммой действия для гравитационного поля

$$S_{\mathrm{g}} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathbb{R}^4} dx \, \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi, \tag{7.87}$$

где $G$ – гравитационная постоянная и $\eta_{\mu\nu} = \mathsf{diag}\,(- - -)$ – отрицательно определенная пространственная метрика, и действия для точечных частиц

$$S_{\mathrm{m}} = -\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{1}{2} m_{\mathrm{I}} \dot{q}_{\mathrm{I}}^\mu \dot{q}_{\mathrm{I}}^\nu \eta_{\mu\nu} - \sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{N}} \int_{\mathbb{R}^4} dx \, m_{\mathrm{I}} \varphi \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}), \tag{7.88}$$

где второе слагаемое описывает взаимодействие точечной частицы с гравитационным полем. Действие для гравитационного поля (7.87) отрицательно определено и равно потенциальной энергии гравитационного поля, взятой с обратным знаком. Действие для точечных частиц (7.88) как обычно представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии. Отметим, что потенциальная энергия взаимодействия точечных частиц с гравитационным полем содержит только трехмерную дельта-функцию. Варьирование суммарного действия, $S = S_{\mathrm{g}} + S_{\mathrm{m}}$, по гравитационному полю и траекториям частиц дает уравнения движения:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{1}{4\pi G} \Delta \varphi - \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}) = 0, \tag{7.89}$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_{\mathrm{I}}} = m_{\mathrm{I}} \left( \ddot{q}_{\mathrm{I}\mu} - \partial_\mu \varphi \right) = 0, \tag{7.90}$$

где $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ – лапласиан, $\ddot{q}_{\mathrm{I}\mu} := \ddot{q}_{\mathrm{I}}^\nu \eta_{\mu\nu}$ и градиент потенциала гравитационного поля $\partial_\mu \varphi$ во втором уравнении берется в той точке $q_{\mathrm{I}} = \{t, q_{\mathrm{I}}^\mu\} \in \mathbb{M}$, где в данный момент времени расположена частица.

Уравнение для гравитационного поля (7.89) представляет собой уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi G \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}). \tag{7.91}$$

Мы рассматриваем решения этого уравнения в слабом смысле, т.е. равенство достигается только после свертки левой и правой части с основными функциями. Если ограничить класс рассматриваемых решений только теми решениями, которые равны нулю на бесконечности, то решение единственно и имеет вид (см., например, [76])

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) = -G \sum_{\text{I}} \frac{m_{\text{I}}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\text{I}}(t)|}, \tag{7.92}$$

где

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\text{I}}| = \sqrt{(x^1 - q^1_{\text{I}})^2 + (x^2 - q^2_{\text{I}})^2 + (x^3 - q^3_{\text{I}})^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}(x^\mu - q^\mu_{\text{I}})(x^\nu - q^\nu_{\text{I}})}$$

– расстояние от точки пространства $\boldsymbol{x} = \{x^\mu\} \in \mathbb{R}^3$ до I-той частицы в момент времени $t$.

Таким образом, мы нашли потенциал гравитационного поля для произвольного движения частиц, которое описывается функциями $\boldsymbol{q}_{\text{I}}(t)$. Принято говорить, что гравитационное взаимодействие в механике Ньютона является дальнодействующим и распространяется с бесконечной скоростью. Это отражает тот факт, что решение (7.92) в произвольной точке пространства в произвольный момент времени однозначно определяется только массами частиц и их расположением в тот же момент времени. Можно сказать по другому: изменение положения частицы мгновенно приводит к изменению гравитационного поля во всем пространстве.

Теперь подставим решение для потенциала гравитационного поля (7.92) в уравнения движения точечных частиц (7.90),

$$\ddot{q}_{\text{I}\mu} = -G \frac{\partial}{\partial q^\mu_{\text{I}}} \sum_{\text{J}} \frac{m_{\text{J}}}{|\boldsymbol{q}_{\text{I}} - \boldsymbol{q}_{\text{J}}|},$$

чтобы полностью исключить потенциал гравитационного поля. Однако на этом этапе возникает серьезная трудность, так как правая часть уравнения расходится в точке $\boldsymbol{q}_{\text{I}} = \boldsymbol{q}_{\text{J}}$ и поэтому неопределена. Чтобы устранить эту трудность, мы “руками” отбросим в сумме слагаемое с $\text{I} = \text{J}$. Физически это означает, что частица не взаимодействует с собственным гравитационным полем. Таким образом, получаем систему, состоящую из 3N обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}^\mu_{\text{I}} = -G \sum_{\text{J} \neq \text{I}} m_{\text{J}} \frac{q^\mu_{\text{I}} - q^\mu_{\text{J}}}{|\boldsymbol{q}_{\text{I}} - \boldsymbol{q}_{\text{J}}|^3}. \tag{7.93}$$

В механике Ньютона уравнение (7.93) интерпретируется следующим образом. Если имеется всего две частицы с массами $m_{\text{I}}$ и $m_{\text{J}}$, то между ними возникает притяжение, обусловленное гравитационным взаимодействием. При этом сила $\boldsymbol{F}_{\text{IJ}} = \{F^\mu_{\text{IJ}}\}$, действующая на частицу $m_{\text{I}}$ со стороны частицы $m_{\text{J}}$, равна

$$F^\mu_{\text{IJ}} = -G m_{\text{I}} m_{\text{J}} \frac{q^\mu_{\text{I}} - q^\mu_{\text{J}}}{|\boldsymbol{q}_{\text{I}} - \boldsymbol{q}_{\text{J}}|^3}. \tag{7.94}$$

Это – *закон всемирного тяготения* Ньютона.

Замечание. В настоящее время закон всемирного тяготения Ньютона подтвержден экспериментально с высокой степенью точности в лабораторных условиях и в небесной механике. С его помощью в главном приближении рассчитывают движение планет в солнечной системе и звезд в галактиках. Численное значение гравитационной постоянной в системе СГС равно

$$G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{сек}^2}.$$

Общая теория относительности в главном приближении приводит к результатам, которые совпадают с результатами, полученными в рамках механики Ньютона. Кроме этого общая теория относительности приводит к поправкам, которые называются *постньютоновскими*.

Систему уравнений движения для точечных частиц (7.93) можно получить из эффективного действия

$$S_{\text{eff}} = \int dt \left( -\sum_{\text{I}=1}^{\text{N}} \frac{1}{2}\dot{q}_{\text{I}}^{\mu}\dot{q}_{\text{I}}^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}G\sum_{\text{I}=1}^{\text{N}}\sum_{\text{J}\ne\text{I}}^{\text{N}} \frac{m_{\text{I}}m_{\text{J}}}{|\boldsymbol{q}_{\text{I}}-\boldsymbol{q}_{\text{J}}|} \right), \tag{7.95}$$

которое варьируется только по траекториям частиц. Это действие получается из исходного действия для точечных частиц (7.88) подстановкой в него общего решения уравнения Эйлера–Лагранжа для потенциала (7.92). Эта процедура подстановки решения части уравнений Эйлера–Лагранжа в исходное действие с целью исключения некоторых динамических переменных была описана в разделе эффективное действие (5.4) в общем виде. Множитель $1/2$ во втором слагаемом в действии (7.95) возникает из-за двойной суммы, где каждое слагаемое встречается дважды.

Таким образом, движение точечных частиц, между которыми действуют только гравитационные силы, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (7.93). Это полное описание, и в таком виде оно обычно встречается в курсах классической механики. Как видим, введение гравитационного поля $\varphi(x)$ в механике Ньютона совсем необязательно. Мы проделали более длинный путь с тем, чтобы показать аналогию с общей теорией относительности. К сожалению, решить уравнения Эйнштейна (7.69) для компонент метрики при произвольном движении частиц, как в случае механики Ньютона (7.92), не удается. Поэтому эффективное действие для точечных частиц в общей теории относительности в настоящее время неизвестно. Более того, его просто не существует. Дело в том, что при постановке задачи Коши в общей теории относительности необходимо задать не только начальные данные для точечных частиц, но и для части компонент метрики (гравитационные волны). Поэтому полного описания гравитационного взаимодействия частиц на языке эффективного действия не может существовать.

**7.8.3. Свойства тензора энергии-импульса точечных частиц.** В настоящем разделе мы обсудим некоторые свойства тензора энергии-импульса точечных частиц: ковариантное сохранение тензора энергии-импульса, аналогию с тензором энергии-импульса сплошной среды, неотрицательность следа тензора энергии-импульса и ультрарелятивистский предел. Для краткости мы не будем писать знак тильды над геометрическими объектами, построенными при нулевом кручении и неметричности.

**Ковариантное сохранение тензора энергии-импульса.** Ниже мы проведем формальные выкладки, предполагая, что компоненты метрики являются достаточно гладкими функциями на мировых линиях частиц. Как уже отмечалось, это предположение неверно: компоненты метрики расходятся на мировых линиях. Тем не менее, возможно, оправдание данных вычислений существует, если рассматривать точечные частицы в виде протяженных объектов.

Поскольку тензор энергии-импульса (7.71) получен из вариации действия, инвариантного относительно общих преобразований координат, то, в силу второй теоремы Нётер (см. раздел 5.3), между уравнениями движения существует зависимость,

$$2\sqrt{|g|}\nabla_\gamma \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g_{\beta\gamma}} \right) g_{\alpha\beta} + \sum_{\text{I}} \frac{\delta S}{\delta q_{\text{I}}^{\alpha}} = 0.$$

На языке уравнений движения (7.69), (7.70) это означает следующее. Возьмем ковариантную дивергенцию от уравнения (7.69). Поскольку тензор Эйнштейна удовлетворяет свернутым тождествам Бианки (5.70),

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0,$$

то тензор энергии-импульса точечных частиц ковариантно сохраняется,

$$\nabla_\alpha T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} = 0, \tag{7.96}$$

для любого решения системы уравнений движения для точечных частиц (7.70). То есть условия интегрируемости уравнений Эйнштейна выполняются автоматически, если выполнены уравнения движения точечных частиц.

Явная проверка ковариантного сохранения тензора энергии-импульса точечных частиц (7.96) требует осторожности. Поэтому проведем соответствующие вычисления, для простоты, для одной частицы,

$$\begin{aligned}\nabla_\beta T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} &= \partial_\alpha T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} + \Gamma_\alpha T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\beta} T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\gamma} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{|g|}}\left[\partial_\alpha \int d\tau \dot q^\alpha \dot q^\beta \delta(x-q) + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\beta}\int d\tau \dot q^\alpha \dot q^\gamma \delta(x-q)\right],\end{aligned}$$

где мы воспользовались определением тензора энергии-импульса (7.71) и тождеством

$$\partial_\alpha \sqrt{|g|} = \sqrt{|g|}\Gamma_\alpha.$$

Во втором слагаемом символы Кристоффеля можно внести под знак интеграла и рассматривать их как функции от $q$ ввиду наличия $\delta$-функции. Для первого слагаемого в слабом смысле справедливо равенство

$$\partial_\alpha \int d\tau \dot q^\alpha \dot q^\beta \delta(x-q) = \int d\tau \ddot q^\beta \delta(x-q). \tag{7.97}$$

Чтобы доказать это равенство, напомним определения [76].

Определение. Назовем функцию $\varphi$ на многообразии $\mathbb{M}$, $\operatorname{dim}\mathbb{M} = n$, *финитной*, если ее носитель (замыкание множества точек, в которых функция отлична от нуля) компактен. Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, состоящее из всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{M}$ называется пространством *основных* (*пробных*) функций. *Обобщенной функцией* или *распределением* $f$ на многообразии $\mathbb{M}$ называется линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Равенство двух обобщенных функций $f = g$ называется *слабым*, если для любой пробной функции справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{M}} dx\, \varphi f = \int_{\mathbb{M}} dx\, \varphi g,$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$.

Мы не будем останавливаться на определении топологии в пространствах основных и обобщенных функций, отсылая читателя к [76].

Вернемся к равенству (7.97). Умножим левую часть на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ и проинтегрируем по $\mathbb{M}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M}} dx\, \varphi \partial_\alpha \left(\int d\tau \dot q^\alpha \dot q^\beta \delta(x-q)\right) &= -\int_{\mathbb{M}} dx\, \partial_\alpha \varphi \int d\tau \dot q^\alpha \dot q^\beta \delta(x-q) = \\ &= -\int_{\mathbb{M}} dx \int d\tau \frac{d\varphi}{d\tau}\dot q^\beta \delta(x-q) = -\int d\tau \frac{d\varphi}{d\tau}\dot q^\beta = \int d\tau\, \varphi \ddot q^\beta,\end{aligned}$$

где мы два раза проинтегрировали по частям, воспользовались равенством $d\varphi/d\tau = \dot q^\alpha \partial\varphi/\partial q^\alpha$ и взяли интеграл по $\mathbb{M}$, используя $\delta$-функцию. Интеграл по $\mathbb{M}$ от правой части (7.97) с пробной функцией приводит, очевидно, к тому же результату. Таким образом, слабое равенство (7.97) доказано.

Теперь равенство (7.96) можно переписать в виде

$$\nabla_\alpha T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \int d\tau \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \left( \ddot{q}_{\mathrm{I}}^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta \dot{q}_{\mathrm{I}}^\alpha \dot{q}_{\mathrm{I}}^\gamma \right) \delta(x-q), \tag{7.98}$$

где мы вернулись к общему случаю $\mathrm{N}$ частиц. Отсюда следует, что тензор энергии-импульса точечных частиц ковариантно сохраняется, если выполнены уравнения движения (7.70). Таким образом, мы привели прямое доказательство

Предложение 7.8.2. *Тензор энергии-импульса точечных частиц ковариантно сохраняется (7.96) если выполнены уравнения движения для точечных частиц.*

**Аналогия с тензором энергии-импульса сплошной среды.** Введем новую временну́ю координату $\tau = \tau(x^0, x^\mu)$ в пространстве-времени $\mathbb{M}$ таким образом, чтобы вдоль каждой мировой линии частицы она совпадала с собственным временем $\tau(x^\alpha = q_{\mathrm{I}}^\alpha) = \tau$. Это всегда можно сделать, причем не единственным образом, так как траектории всех частиц не пересекаются, времениподобны, а канонический параметр определен с точностью до сдвигов. Продолжим векторные поля скоростей $\dot{q}_{\mathrm{I}}^\alpha$, определенных вдоль мировых линий частиц, на все пространство-время гладким образом. Тогда в новой системе координат $\tau, x^\mu$ производные $\dot{q}_{\mathrm{I}}^\alpha$ в выражении (7.71) можно заменить на частные производные $\dot{x}^\alpha = \partial x^\alpha / \partial\tau$ ввиду наличия $\delta$-функций, и вынести за знак интегрирования

$$T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} = \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{|g|}} \int d\tau \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \delta(x - q_{\mathrm{I}}) = \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mathrm{I}} \frac{m_{\mathrm{I}}}{\dot{q}_{\mathrm{I}}^0} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}), \tag{7.99}$$

где мы проинтегрировали одну $\delta$-функцию $\delta(x - q_{\mathrm{I}}^0)$. Полученное выражение для тензора энергии-импульса точечных частиц имеет такой же вид, как и для сплошной среды (7.126). Для точечных частиц давление равно нулю, $\mathcal{P} = 0$, а плотность энергии принимает вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mathrm{I}} \frac{m_{\mathrm{I}}}{\dot{q}_{\mathrm{I}}^0} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}).$$

Поскольку временна́я координата $x^0$ на траекториях частиц совпадает с собственным временем $\tau$, то $\dot{q}_{\mathrm{I}}^0 = 1$ и выражение для плотности энергии приобретает интуитивно ясную форму,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}).$$

То есть энергия сосредоточена в точках расположения частиц, и каждая частица несет энергию, которая равна ее массе. Тензор энергии-импульса точечных частиц соответствует пылевидной материи, поскольку давление равно нулю.

**След тензора энергии-импульса.** Вернемся в произвольную систему координат. Из формулы (7.72) следует выражение для следа тензора энергии-импульса произвольного распределения точечных частиц

$$T_{\mathrm{m}}{}^\alpha{}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mathrm{I}} \frac{m_{\mathrm{I}}}{\dot{q}_{\mathrm{I}}^0} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}). \tag{7.100}$$

Поскольку $m_{\mathrm{I}} > 0$ и $\dot{q}_{\mathrm{I}}^0 > 0$, то след тензора энергии-импульса положителен (при этом мы рассматриваем $\delta$-функцию как положительную).

Поскольку след тензора энергии-импульса положителен для *произвольного* распределения точечных частиц, то в моделях математической физики делается предположение о том, что след тензора энергии-импульса для любой обычной (наблюдаемой) материи всегда неотрицателен, $T^\alpha{}_\alpha \geqslant 0$. При этом равенство следа тензора энергии-импульса нулю, как будет показано ниже, достигается только для частиц, движущихся со скоростью света, или излучения.

След тензора энергии-импульса электромагнитного поля (9.143), который соответствует электромагнитному излучению, также равен нулю. Это согласуется с утверждением о том, что след тензора энергии-импульса произвольного распределения ультрарелятивистских частиц равен нулю. Напомним, что в квантовой электродинамике электромагнитное поле описывает безмассовые частицы – фотоны, которые распространяются со скоростью света.

Мы выделили рассмотрение следа тензора энергии-импульса точечных частиц в отдельный пункт именно в свете последнего замечания, так как положительность следа тензора энергии-импульса для произвольной материи ниоткуда больше не следует, и в то же время ведет к важным следствиям.

**Ультрарелятивистский предел.** Рассмотрим ультрарелятивистский предел для тензора энергии-импульса точечных частиц (7.99). Этот предел, прежде всего, требует определения, потому что, глядя на определение собственной скорости частицы (7.55), непонятно что и куда стремить. Тензор энергии-импульса точечных частиц и его след можно выразить через наблюдаемую скорость

$$T_{\mathrm{m}}{}^{\alpha\beta} = \frac{v^\alpha v^\beta}{\sqrt{|g| v^2}} \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}), \tag{7.101}$$

$$T_{\mathrm{m}}{}^\alpha{}_\alpha = \frac{\sqrt{v^2}}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}), \tag{7.102}$$

где мы воспользовались равенствами (7.59) и (7.60).

Определение. Предел, когда квадрат наблюдаемой скорости частицы (7.57) стремится к нулю,

$$v^2 = v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta} \to 0, \tag{7.103}$$

называется *ультрарелятивистским пределом* для точечной частицы.

Оправданием для такого определения является следующее замечание.

Если метрика имеет блочно-диагональный вид (7.78), то

$$v^2 = g_{00} - \boldsymbol{v}^2, \qquad \text{и} \qquad \{u^\alpha\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{00} - \boldsymbol{v}^2}}, \frac{v^\mu}{\sqrt{g_{00} - \boldsymbol{v}^2}} \right\}$$

где $\boldsymbol{v}^2 := -v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} \geqslant 0$ – квадрат пространственной наблюдаемой скорости и собственная скорость частицы $u^\alpha$ определена формулой (7.55). В этом случае ультрарелятивистский предел соответствует пределу $\boldsymbol{v}^2 \to g_{00}$. Для пространства Минковского это означает, что наблюдаемая скорость частицы стремится к скорости света.

В ультрарелятивистском пределе компоненты самого тензора энергии-импульса точечных частиц (7.101) не определены, однако след тензора энергии-импульса (7.102) стремится к нулю

$$\lim_{v^2 \to 0} T_{\mathrm{m}}{}^\alpha{}_\alpha = 0.$$

Это утверждение справедливо для произвольного количества и распределения точечных частиц, находящихся только под действием гравитационных сил. Если присутствуют другие взаимодействия, то действие для точечных частиц (7.63) может измениться и, следовательно, изменится выражение для тензора энергии-импульса. В таком случае требуется дополнительное исследование.

## 7.9. Ньютонов предел

Для того чтобы сказать, что общая теория относительности не противоречит экспериментальным данным, желательно показать, что теория тяготения Ньютона в каком то смысле (приближении) следует из уравнений Эйнштейна. Поскольку гравитация Ньютона находится в хорошем согласии с экспериментом, то в этом случае можно утверждать, что общая теория относительности описывает гравитационные взаимодействия по крайней мере не хуже, чем законы Ньютона. Такое приближение существует, и будет описано в настоящем разделе.

В разделе 7.8.1 было показано, что закон всемирного тяготения следует из уравнений Эйнштейна в частном случае, а именно, для решения Шварцшильда. Ниже мы рассмотрим общий случай.

Сначала сделаем общее замечание. Уравнения Эйнштейна существенно нелинейны, в то время как гравитация Ньютона линейна: гравитационные потенциалы различных массивных тел просто складываются. Поэтому естественно ожидать, что закон всемирного тяготения вытекает из уравнений Эйнштейна в линейном приближении.

Рассмотрим вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной в четырехмерном пространстве-времени

$$\kappa\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)=-\frac{1}{2}T_{\text{м}\alpha\beta}. \tag{7.104}$$

Будем считать, что пространство-время топологически тривиально, и существует глобальная система координат, в которой метрика, удовлетворяющая уравнениям (7.104), мало отличается от метрики Лоренца в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+\epsilon h_{\alpha\beta},\qquad \epsilon\ll 1. \tag{7.105}$$

При этом мы считаем малыми также все частные производные: $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\sim\epsilon$. Символы Кристоффеля пропорциональны производным $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}$, и поэтому их квадраты дают вклад в тензор кривизны порядка $\epsilon^2$. Тем самым вкладом квадратичных слагаемых по символам Кристоффеля в тензор кривизны можно пренебречь по сравнению со вторыми производными от компонент метрики, которые дают вклад прядка $\epsilon$. Таким образом, в линейном приближении по $\epsilon$ тензор Риччи имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon}R_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}(\partial^2_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}-\partial^2_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta}-\partial^2_{\beta\gamma}h_{\alpha\delta}+\partial^2_{\gamma\delta}h_{\alpha\beta}).$$

В правой части равенства свертка проводится с помощью метрики Лоренца, так как выражение в скобках имеет первый порядок. Скалярная кривизна имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon}R=\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}(\partial^2_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}-\partial^2_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta}).$$

Введем новые переменные

$$\bar h_{\alpha\beta}:=h_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \tag{7.106}$$

где $h:=\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ – след возмущения метрики. Обратное преобразование имеет вид

$$h_{\alpha\beta}=\bar h_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar h,\qquad \bar h:=\eta^{\alpha\beta}\bar h_{\alpha\beta}. \tag{7.107}$$

Тогда тензор Эйнштейна в линейном приближении равен следующему выражению

$$\frac{1}{\epsilon}\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)=\frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\big(\partial^2_{\gamma\delta}\bar{h}_{\alpha\beta}-\partial^2_{\alpha\gamma}\bar{h}_{\beta\delta}-\partial^2_{\beta\gamma}\bar{h}_{\alpha\delta}+\eta_{\alpha\beta}\eta^{\epsilon\zeta}\partial^2_{\gamma\epsilon}\bar{h}_{\delta\zeta}\big).$$

Теперь воспользуемся инвариантностью действия Гильберта–Эйнштейна относительно общих преобразований координат. Рассмотрим бесконечно малые преобразования координат, которые генерируются некоторым векторным полем $u$:

$$x^\alpha\mapsto x^\alpha+\epsilon u^\alpha(x). \tag{7.108}$$

При этом компоненты метрики получат приращение

$$h_{\alpha\beta}\mapsto h_{\alpha\beta}+\partial_\alpha u_\beta+\partial_\beta u_\alpha. \tag{7.109}$$

Возьмем в качестве компонент векторного поля $u^\alpha$ произвольные решения уравнения

$$\Box u^\alpha=-\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta},$$

где $\Box:=\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ – оператор Даламбера. Тогда в новой системе координат возмущение компонент метрики будет удовлетворять уравнению

$$\partial_\beta\bar{h}_\alpha{}^\beta=0. \tag{7.110}$$

Это есть ни что иное как условие гармоничности координат (3.69) в линейном приближении.

Замечание. Гармонические координаты в общей теории относительности являются аналогом лоренцевой калибровки в электродинамике (см. раздел 9.3).

С учетом условия гармоничности уравнения Эйнштейна (7.104) принимают вид

$$\epsilon\Box\bar{h}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{\kappa}T_{\text{м}\alpha\beta}. \tag{7.111}$$

Замечание. Если поля материи отсутствуют, $T_{\text{м}\alpha\beta}=0$, то система уравнений (7.110), (7.111) совпадает с уравнениями для безмассового поля со спином 2 в плоском пространстве-времени Минковского [77]. Поэтому общую теорию относительности в целом можно рассматривать как теорию безмассового поля со спином 2 и с некоторым самодействием, которое соответствует отброшенным нелинейным членам. Следует однако заметить, что понятие массы и спина требует наличия метрики Лоренца, которая является фоновой метрикой для линейного приближения. В общем случае, без обращения к линейному приближению, утверждению о том, что метрика описывает безмассовое поле спина 2 придать точный смысл весьма затруднительно.

Рассмотрим в качестве источника в уравнениях Эйнштейна одну частицу массы $M$. Поскольку мы рассматриваем слабые гравитационные поля, то будем считать, что $M\sim\epsilon$. Этой частице соответствует тензор энергии-импульса (7.72)

$$T_{\text{м}\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}M\frac{\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta}{\dot{q}^0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}).$$

В линейном приближении по $\epsilon$ можно сделать замену $\sqrt{|g|}\mapsto 1$.

Предположим, что частица покоится в начале координат, т.е. $\{\dot{q}^\alpha\} = (1,0,0,0)$ и $\{q^\alpha\} = (\tau,0,0,0)$. Предположим также, что компоненты метрики не зависят от времени (статическое решение). Тогда полная система уравнений Эйнштейна примет вид

$$\kappa\epsilon\Delta\bar{h}_{00} = M\delta(\boldsymbol{x}), \tag{7.112}$$

$$\Delta\bar{h}_{0\mu} = \Delta\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \tag{7.113}$$

где $\Delta := \partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$ – лапласиан в трехмерном евклидовом пространстве. Если предположить, что компоненты возмущений метрики $\bar{h}_{\alpha\beta}$ стремятся к нулю на бесконечности, то уравнения (7.113) имеют единственное решение

$$\bar{h}_{0\mu} = 0, \qquad \bar{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Для сравнения уравнения (7.112) с законом всемирного тяготения, необходимо восстановить размерные постоянные. Во-первых, положим

$$\epsilon\bar{h}_{00} =: \frac{4\varphi}{c^2},$$

где $\varphi$ – потенциал гравитационного поля. Это следует из нерелятивистского предела для точечной частицы (7.80). Кроме того, в правую часть уравнения (7.112) надо вставить множитель $c^2$: один множитель $c$ следует из опущенного множителя в действии для точечной частицы (7.61), а второй – из равенства $\dot{q}^0 = c$. Если после этого положить

$$\kappa := \frac{c^4}{16\pi G}, \tag{7.114}$$

где $G$ – гравитационная постоянная в законе тяготения Ньютона, то уравнение (7.112) совпадет с уравнением Пуассона для гравитационного поля (7.91). В этом случае решение уравнения Пуассона (7.112) примет вид

$$\varphi = -G\frac{M}{r},$$

где $r = |\boldsymbol{x}|$.

Ясно, что для найденных компонент метрики калибровочное условие (7.110) выполнено, и, следовательно, найдено самосогласованное решение задачи.

Поскольку след $\epsilon\bar{h} = 4\varphi/c^2$, то из формулы для обратного преобразования возмущения компонент метрики (7.107), получаем, что в ньютоновом приближении метрика имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 - G\dfrac{2M}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - G\dfrac{2M}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - G\dfrac{2M}{rc^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - G\dfrac{2M}{rc^2} \end{pmatrix}. \tag{7.115}$$

Напомним, что метрика имеет такой вид в линейном приближении в гармонической системе координат.

Таким образом, мы показали, что теория тяготения Ньютона согласуется с общей теорией относительности. Она возникает в статическом случае для слабых гравитационных полей. При этом константа связи перед действием Гильберта–Эйнштейна имеет вид (7.114). По этой причине многие авторы записывают действие Гильберта–Эйнштейна именно с такой константой связи, часто полагая $c = 1$.

Замечание. Наш выбор выражения для тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны через метрику и аффинную связность согласован с обычными обозначениями в теории калибровочных полей и приспособлен к анализу общей теории относительности. В то же время он отличается от стандартных определений, принятых в математической литературе. Например, скалярная кривизна сферы радиуса $r$, вложенной в трехмерное евклидово пространство, $\mathbb{S}^2_r \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, равна $-2/r^2$. В этом нет ничего страшного. Просто об этом следует помнить.

Несмотря на то, что общая теория относительности содержит в себе теорию тяготения Ньютона в качестве предельного случая, отметим принципиальное отличие. В механике Ньютона свободная частица движется по прямой линии. Если она находится в поле другой массивной частицы, то на нее действует сила гравитационного притяжения. Теперь она уже не является свободной и ее траектория отличается от прямой линии в соответствии с законом всемирного тяготения. В общей теории относительности ситуация совершенно иная. Массивная частица искривляет пространство-время в соответствии с уравнениями Эйнштейна. Пробная частица в гравитационном поле остается свободной и движется вдоль экстремали. Однако теперь экстремаль не является прямой линией, поскольку пространство-время перестает быть плоским из-за наличия массивной частицы.

## 7.10. Гравитационные волны

В механике Ньютона гравитационных волн нет, что вытекает из системы уравнений (7.89), (7.90). При этом изменение положения одного из массивных тел мгновенно приводит к изменению гравитационного поля во всем пространстве. Кроме этого, если массивные тела отсутствуют, то потенциал гравитационного поля равен нулю. В общей теории относительности ситуация другая. Во-первых, гравитационные взаимодействия распространяются с конечной постоянной скоростью света $c$ в локально инерциальной системе отсчета. Во-вторых, даже если материальные тела отсутствуют, уравнения Эйнштейна допускают нетривиальные решения в виде гравитационных волн. То есть гравитационное поле может быть отлично от нуля даже если материальные тела отсутствуют. В настоящем разделе мы изучим решения уравнений Эйнштейна, описывающие гравитационные волны.

Рассмотрим вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной

$$R_{\alpha\beta} = 0. \tag{7.116}$$

Как и в предыдущем разделе будем считать, что пространство-время топологически тривиально, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^4$, и существует глобальная система координат, в которой метрика мало отличается от метрики Лоренца (7.105). В нулевом порядке по $\epsilon$ вакуумные уравнения Эйнштейна, очевидно, удовлетворяются, так как кривизна пространства Минковского равна нулю. Найдем решение уравнений (7.116) в первом порядке по $\epsilon$.

Используя инвариантность действия Гильберта–Эйнштейна относительно общих преобразований координат, выберем систему отсчета таким образом, чтобы выполнялось калибровочное условие (7.110) (гармонические координаты). Тогда все компоненты метрики в первом порядке будут удовлетворять волновому уравнению

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Box h_{\alpha\beta} = 0,$$

где компоненты $\bar{h}_{\alpha\beta}$ определены уравнением (7.106) и $\Box$ – оператор Даламбера в пространстве Минковского. Однако далеко не все компоненты метрики являются независимыми и описывают физические степени свободы, от которых нельзя избавиться путем выбора соответствующей системы координат.

Покажем это. Во-первых, выберем гармоническую систему координат. Тогда в линейном приближении выполнено уравнение (7.110), которое рассматривается как калибровочное условие. Это условие не фиксирует систему координат однозначно. Действительно, допустим, что в некоторой системе координат это условие выполнено. Совершим преобразование координат $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon u^\alpha$, где все компоненты векторного поля $u$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\Box u^\alpha = 0. \tag{7.117}$$

Нетрудно проверить, что в новой системе координат калибровочное условие (7.110) будет также выполнено. Следовательно, оставшуюся свободу в выборе системы координат можно использовать для того, чтобы зафиксировать дополнительные компоненты метрики.

Чтобы найти подходящие дополнительные калибровочные условия, необходимо решить уравнения (7.117) с некоторыми начальными условиями. Посмотрим как преобразуется след возмущений метрики $h := h_\alpha{}^\alpha$ и компоненты $h_{0\mu}$, $\mu = 1, 2.3$, при бесконечно малых преобразованиях координат (7.108):

$$\begin{aligned} h &\mapsto h + 2\partial_\alpha u^\alpha, \\ h_{0\mu} &\mapsto h_{0\mu} + \partial_0 u_\mu + \partial_\mu u_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим пространственное сечение $x^0 := t = \mathsf{const}$ в качестве поверхности Коши для уравнения (7.117). На этой поверхности найдем какое-либо решение системы линейных уравнений

$$2\left(\dot u_0 + \partial_\mu u^\mu\right) = -h, \tag{7.118}$$

$$2\left(\Delta u_0 + \partial_\mu \dot u^\mu\right) = -\dot h, \tag{7.119}$$

$$\dot u_\mu + \partial_\mu u_0 = -h_{0\mu}, \tag{7.120}$$

$$\Delta u_\mu + \partial_\mu \dot u_0 = -\dot h_{0\mu}, \tag{7.121}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени $t$. Из этой системы уравнений определяем компоненты $u^\alpha$ и их производные по времени $\dot u^\alpha$ на поверхности Коши. После этого решаем задачу Коши для уравнений (7.117) с найденными начальными условиями в обе стороны по времени и определяем векторное поле $u$ во всем пространстве-времени. Поскольку выполнены уравнения (7.118)–(7.121), то на поверхности Коши справедливы равенства

$$\begin{aligned} h &= 0, & \dot h &= 0, \\ h_{0\mu} &= 0, & \dot h_{0\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{7.122}$$

Это очевидно, если заметить, что уравнения (7.119) и (7.121) возникают после дифференцирования уравнений (7.118) и (7.120) по времени и использования уравнений движения. Поскольку компоненты $h$ и $h_{0\mu}$ удовлетворяют волновому уравнению, то условия (7.122) выполнены также во всем пространстве-времени.

Определение. Система координат, в которой в линейном приближении выполнены условия

$$\partial_\beta h_\alpha{}^\beta = 0, \qquad h = 0, \qquad h_{0\mu} = 0 \tag{7.123}$$

называется *радиационной калибровкой.*

Предложение 7.10.1. *При отсутствии полей материи и космологической постоянной радиационная калибровка существует в линейном приближении к метрике Лоренца.*

Доказательство. Было приведено выше.

Несмотря на то, что в четырехмерном пространстве-времени общие преобразования координат параметризуются четырьмя произвольными функциями, мы сумели наложить восемь калибровочных условий (7.123).

Замечание. В электродинамике аналогичная калибровка называется кулоновской.

Из первого условия (7.123) с учетом того, что $h_{0\mu} = 0$, получаем уравнение $\dot{h}_{00} = 0$, которое должно быть выполнено во всем пространстве-времени. Тогда уравнение движения для временнóй компоненты сводится к уравнению Лапласа $\Delta h_{00} = 0$. С учетом нулевых граничных условий на бесконечности получаем дополнительное условие на компоненты метрики: $h_{00} = 0$.

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется в направлении волнового вектора $k = \{k^\alpha\}$:

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}\, \mathrm{e}^{ik_\gamma x^\gamma}, \tag{7.124}$$

где $H_{\alpha\beta}$ – некоторая постоянная матрица и $k^2 := k^\alpha k_\alpha = 0$. Радиационная калибровка (7.123) для этого решения уравнений движения задается следующими восемью условиями:

$$k^\beta H_{\alpha\beta} = 0, \qquad H_\alpha{}^\alpha = 0, \qquad H_{0\mu} = 0.$$

Из первого и третьего условия вытекает равенство $k^0 H_{00}$. Для нетривиального решения $k^0 \neq 0$, и поэтому $H_{00} = 0$. Ввиду симметрии по индексам матрица $H_{\alpha\beta}$ имеет 10 независимых элементов. Радиационная калибровка налагает на них 8 независимых условий. Отсюда вытекает, что в выбранной системе координат только 2 компоненты возмущения метрики являются независимыми.

Допустим, что гравитационная волна распространяется вдоль оси $x^1$, т.е. нормированный волновой вектор имеет только две отличные от нуля компоненты $k = (1, 1, 0, 0)$. Тогда матрица $H_{\alpha\beta}$ в радиационной калибровке имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & B & -A \end{pmatrix},$$

где $H_{22} = -H_{33} = A$ и $H_{23} = H_{32} = B$ – два произвольных числа (амплитуды волн).

Введем новое понятие спиральности плоской волны. Для этого рассмотрим вращение пространства $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{1,3}$ на угол $\omega$ вокруг оси $x^1$. Матрица вращения задана в явном виде формулой

$$S_+(\omega) := \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \qquad \det S_+ = 1,$$

и ясно, что такое вращение не меняет волнового вектора $k$. При преобразовании координат компоненты метрики преобразуются по тензорному закону

$$g_{\alpha\beta} \mapsto g'_{\alpha\beta} = S_\alpha{}^\gamma S_\beta{}^\delta g_{\gamma\delta}$$

с соответствующей матрицей вращений $S$. Простые вычисления приводят к равенствам для новых амплитуд:

$$\begin{aligned} A' &= \phantom{-}\cos 2\omega A + \sin 2\omega B, \\ B' &= -\sin 2\omega A + \cos 2\omega B. \end{aligned}$$

Это означает, что при повороте системы координат на угол $\omega$ амплитуда волны поворачивается на удвоенный угол $2\omega$. В физике часто рассматривают комплексные амплитуды

$$H_\pm := H_{22} \mp iH_{23} = A \mp iB.$$

При вращении они преобразуются по правилу

$$H'_\pm = \mathsf{e}^{\pm 2i\omega} H_\pm.$$

Определение. Если амплитуда плоской поперечной волны при повороте на угол $\omega$ вокруг направления распространения волны поворачивается на угол $h\omega$, то говорят, что волна имеет *спиральность* $h$.

Таким образом, плоские гравитационные волны описывают поперечные волны спиральности два.

Тензор Риччи и скалярная кривизна для данного решения вакуумных уравнений Эйнштейна в линейном приближении равны, конечно, нулю. Это следует из того, что мы решаем вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной (7.5). Тем не менее полный тензор кривизны отличен от нуля. В линейном приближении тензор кривизны имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial^2_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} - \partial^2_{\alpha\delta} h_{\beta\gamma} - \partial^2_{\beta\gamma} h_{\alpha\delta} + \partial^2_{\beta\delta} h_{\alpha\gamma}). \tag{7.125}$$

Простые вычисления показывают, что среди 20 независимых компонент тензора кривизны только 9 отличны от нуля:

$$\begin{aligned} &R_{0303} = -R_{0202} = R_{1313} = -R_{1212} = R_{0212} = -R_{0313} = \frac{1}{2}\epsilon A\, \mathsf{e}^{i(t-x^1)}, \\ &R_{0203} = R_{1213} = -R_{0213} = -\frac{1}{2}\epsilon B\, \mathsf{e}^{i(t-x^1)}. \end{aligned}$$

При преобразовании координат компоненты тензора кривизны ведут себя ковариантным образом – на то он и тензор. Однако в линейном приближении они не просто ковариантны, а инвариантны. Нетрудно проверить, что выражение (7.125) действительно инвариантно относительно преобразований (7.109) с произвольным вектором $u$.

Из явного выражения для нетривиальных компонент тензора кривизны вытекает, что амплитуды волн $A$ и $B$ нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат. Следовательно, они описывают физические распространяющиеся степени свободы.

Поскольку вакуумные уравнения Эйнштейна в линейном приближении линейны, то им будет удовлетворять произвольная суперпозиция плоских волн. В частности, поправки к метрике вида

$$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}\big[f(x^1 - t) + g(x^1 + t)\big],$$

где $f$ и $g$ – произвольные функции, описывающие распространение волн вдоль оси $x^1$ в положительную и отрицательную стороны, также удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйнштейна в радиационной калибровке. Отсюда, в частности, следует, что для однозначного задания волнового решения уравнений Эйнштейна необходимо задать четыре функции на поверхности Коши: по две для каждой волны. При этом функции можно задать произвольным образом. Таким образом, вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной описывают распространение двух физических степеней свободы, которые порождают нетривиальную кривизну пространства-времени и не устраняются никаким преобразованием координат. Данный подсчет степеней свободы приводит к тому же результату, что и общий подход, основанный на гамильтоновом формализме, который будет рассмотрен позже в главе 8.

## 7.11. Сплошная среда в общей теории относительности

В правой части уравнений Эйнштейна (7.1) находится тензор энергии-импульса материи ${T_{\text{м}}}^{\alpha\beta}$. В случае скалярного, электромагнитного и других полей, уравнения движения которых следуют из вариационного принципа, правая часть уравнений Эйнштейна определяется вариацией соответствующего действия по метрике. В этом случае вопросов с определением тензора энергии-импульса материи не возникает. Некоторые из этих тензоров будут рассмотрены в дальнейшем.

В то же время в общей теории относительности существует ряд важных моделей (особенно в космологии), для которых тензор энергии-импульса материи не следует из вариационного принципа. В настоящем разделе мы определим тензор энергии-импульса материи ${T_{\text{м}}}^{\alpha\beta}$, которая рассматривается как сплошная среда, и изучим некоторые из его свойств. При этом мы не будем опираться на вариационный принцип.

Пусть пространство-время $(\mathbb{M}, g)$ топологически тривиально $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^{1,3}$ и покрыто одной картой. Мы предполагаем, что координаты $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\}$ выбраны таким образом, что координата $x^0$ является временем, т.е. $g_{00} > 0$. Кроме того, мы считаем, что все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ – пространственноподобны.

Можно привести ряд физических аргументов [6] в пользу того, что тензор энергии-импульса материи, которая рассматривается как сплошная среда, имеет вид

$$ {T_{\text{м}}}^{\alpha\beta} := (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\alpha u^\beta - \mathcal{P} g^{\alpha\beta}, \tag{7.126} $$

где $\mathcal{E}(x)$ и $\mathcal{P}(x)$ – плотность энергии и давление материи в точке $x \in \mathbb{M}$, и

$$ u^\alpha := dx^\alpha / ds, \qquad ds := \sqrt{|ds^2|}, \qquad ds^2 := g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, $$

– четырехмерная скорость материи в точке $x \in \mathbb{M}$, которая удовлетворяет тождеству $u^\alpha u_\alpha = 1$. Здесь мы предполагаем, что каждая точка материи движется вдоль времениподобной мировой линии $x^\alpha(s)$ в будущее, т.е. $u^0 > 0$. Ясно, что мировые линии точек материи – это интегральные кривые векторного поля скорости $u$.

При рассмотрении моделей сплошной среды задают, как правило, не линии тока $x^\alpha(s)$, а векторное поле скоростей $u^\alpha(s)$. Мы предполагаем, что поле скоростей является достаточно гладким, и через каждую точку многообразия проходит одна линия тока. Математически это означает, что система уравнений

$$ \frac{dy^\alpha}{ds} = u^\alpha(y), $$

с начальным условием $y^\alpha(0) = x^\alpha$ имеет единственное решение для всех $x \in \mathbb{M}$, которое определено для всех $t \in \mathbb{R}$.

Поскольку $u^\alpha$ и $g^{\alpha\beta}$ являются соответственно компонентами вектора и тензора относительно преобразований координат, то мы считаем, что плотность энергии $\mathcal{E}$ и давление материи $\mathcal{P}$ являются достаточно гладкими скалярными полями на пространстве-времени $\mathbb{M}$. В этом случае правая часть равенства (7.126) представляет собой ковариантный симметричный тензор второго ранга. Для обычной (наблюдаемой) материи плотность энергии предполагается положительной, $\mathcal{E} > 0$, а давление – неотрицательным, $\mathcal{P} \geqslant 0$[1].

[1] Давление, в принципе, может быть отрицательным. Примером является резина. Для нее увеличение объема по сравнению с состоянием равновесия приводит к увеличению давления. Поскольку выбор точки отсчета давления в классической механике сплошных сред является условным, то нельзя утверждать, что ограничение $\mathcal{P} \geqslant 0$ обосновано с физической точки зрения. В современных космологических моделях предполагается наличие темной энергии. Этот вид материи имеет положительную плотность энергии, но отрицательное давление (см. раздел 18.3.4).

В используемых обозначениях, $[\kappa]=1$, размерность тензора энергии-импульса совпадает с размерностью тензора Риччи:
$$[T_{\text{м}\alpha\beta}]=[R_{\alpha\beta}]=l^{-2}.$$
Поскольку компоненты метрики и скорости безразмерны, то плотность энергии и давления имеют следующие размерности:
$$[\mathcal{E}]=[\mathcal{P}]=l^{-2}.$$

Мы не обсуждаем физических аргументов, приводящих к тензору энергии-импульса (7.126), отсылая читателя к монографии [6]. В настоящем разделе мы рассматриваем, в основном, математические свойства данного определения.

Замечание. В гидро- и газодинамике все уравнения записываются таким образом, что в них входит не сама энергия и давление, а только их градиенты. Это означает, что энергия и давление определены с точностью до добавления произвольной постоянной. В общей теории относительности ситуация отличается принципиально, так как уравнения меняются, если к $\mathcal{E}$ или $\mathcal{P}$ добавить постоянную. В частности, наличие космологической постоянной можно интерпретировать как среду с постоянной плотностью энергии $\mathcal{E}=\mathsf{const}$ и постоянным давлением $\mathcal{P}=-\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}>0$, то давление отрицательно, $\mathcal{P}<0$. Поэтому космологическую постоянную можно интерпретировать как некоторую среду, заполняющую все пространство-время со свойствами обыкновенной резины.

Из общих физических представлений следует, что след тензора энергии-импульса для обычной материи должен быть неотрицательным [6]
$$T_{\text{м}\alpha}{}^{\alpha}=\mathcal{E}-3\mathcal{P}\geqslant 0. \tag{7.127}$$
Этим свойством обладает, в частности, тензор энергии-импульса для произвольного распределения точечных частиц (7.100). Отсюда вытекает ограничение на давление
$$\mathcal{P}\leqslant\frac{\mathcal{E}}{3}. \tag{7.128}$$

Поскольку давление, по предположению, неотрицательно, то с учетом равенства (7.128) существует два крайних случая. Если материя, которой заполнена вселенная, настолько разрежена, что давление можно считать равным нулю, то говорят, что материя пылевидна. Максимальное возможное давление, $\mathcal{P}=\mathcal{E}/3$, соответствует газу ультрарелятивистских частиц, скорости которых близки к скорости света (см. раздел 7.8.3). В этом случае говорят, что вселенная заполнена газом излучения или, просто, излучением.
$$\begin{aligned}\mathcal{P}&=0 && \text{– \textit{пыль}},\\ \mathcal{P}&=\frac{\mathcal{E}}{3} && \text{– \textit{излучение}}.\end{aligned} \tag{7.129}$$
Для обычной материи $0\leqslant\mathcal{P}\leqslant\mathcal{E}/3$.

Пример 7.11.1 (нерелятивистская гидродинамика). Рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ в декартовой системе координат с метрикой Лоренца $\eta_{\alpha\beta}=\mathsf{diag}\,(+---)$. Пусть пространство-время заполнено идеальной (без вязкости) жидкостью. Течение жидкости описывается плотностью $\rho$, давлением $\mathcal{P}$ и трехмерной скоростью $u^\mu$, $\mu=1,2,3$. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости в общей теории относительности, по определению, имеет вид (7.126). Покажем, что уравнения движения нерелятивистской идеальной жидкости (если не считать уравнения состояния) следуют из закона сохранения четырехмерного тензора энергии-импульса, $\partial_\beta {T_{\text{м}}}^{\alpha\beta} = 0$.

В нерелятивистском приближении мы считаем, что пространственные компоненты скорости малы: $u^0 \approx 1$, $u^\mu \ll 1$, где $\{u^\alpha\} = \{u^0, u^\mu\}$, $\alpha = 0,1,2,3$. Кроме того, давление мало, $\mathcal{P} \ll \mathcal{E}$, и в нулевом приближении плотность энергии совпадает с плотностью жидкости, $\mathcal{E} \approx \rho$. Тогда в главном приближении компоненты тензора энергии-импульса равны:

$$\begin{aligned} {T_{\text{м}}}^{00} &= (\mathcal{E}+\mathcal{P})u^0u^0 - \mathcal{P} && \approx \rho, \\ {T_{\text{м}}}^{0\mu} = {T_{\text{м}}}^{\mu 0} &= (\mathcal{E}+\mathcal{P})u^0u^\mu && \approx \rho u^\mu, \\ {T_{\text{м}}}^{\mu\nu} &= (\mathcal{E}+\mathcal{P})u^\mu u^\nu - \mathcal{P}\eta^{\mu\nu} && \approx \rho u^\mu u^\nu - \mathcal{P}\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{7.130}$$

Рассмотрим закон сохранения энергии-импульса $\partial_\beta {T_{\text{м}}}^{\alpha\beta} = 0$. Нулевая компонента этого равенства в главном приближении имеет вид

$$\partial_\beta {T_{\text{м}}}^{0\beta} = \partial_0 {T_{\text{м}}}^{00} + \partial_\mu {T_{\text{м}}}^{0\mu} \approx \partial_0\rho + \partial_\mu(\rho u^\mu) = 0. \tag{7.131}$$

Полученное уравнение совпадает с *уравнением непрерывности*. Пространственные компоненты закона сохранения энергии-импульса в главном приближении приводят к равенству

$$\partial_\beta {T_{\text{м}}}^{\mu\beta} = \partial_0 {T_{\text{м}}}^{\mu 0} + \partial_\nu {T_{\text{м}}}^{\mu\nu} \approx \rho\partial_0 u^\mu + u^\mu\left[\partial_0\rho + \partial_\nu(\rho u^\nu)\right] + \rho u^\nu \partial_\nu u^\mu - \partial^\mu\mathcal{P} = 0,$$

что, с учетом уравнения непрерывности (7.131), дает *уравнение Эйлера*

$$\partial_0 u^\mu + u^\nu\partial_\nu u^\mu = \frac{1}{\rho}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\mathcal{P}. \tag{7.132}$$

Если дополнить уравнение непрерывности и уравнение Эйлера уравнением состояния идеальной жидкости $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$, связывающим давление и плотность, то получим полную систему уравнений для идеальной жидкости. Таким образом, уравнения движения нерелятивистской идеальной жидкости следуют из закона сохранения четырехмерного тензора энергии-импульса (7.126), дополненного уравнениям состояния.

Эта же система уравнений (7.131), (7.132) описывает движение идеального газа. Разница заключается только в уравнении состояния. Для совершенного газа уравнение состояния имеет вид

$$\mathcal{P} = \frac{\rho}{\mu}RT, \tag{7.133}$$

где $\mu, R$ и $T$ есть, соответственно, молекулярный вес, универсальная газовая постоянная и абсолютная температура. При постоянной температуре $T = \mathsf{const}$ давление идеального газа прямо пропорционально плотности.

Наличие в пространстве-времени метрики и времениподобного векторного поля $u$, $u^2 = 1$, позволяет определить проекционные операторы:

$$\Pi^{\text{L}}_\alpha{}^\beta := u_\alpha u^\beta, \qquad \Pi^{\text{T}}_\alpha{}^\beta := \delta^\beta_\alpha - u_\alpha u^\beta.$$

В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ эти операторы проектируют тензорные поля, соответственно, на направление вектора скорости $u$ и перпендикулярную гиперплоскость в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Например, проекция метрики имеет вид

$$\begin{aligned} g^{\text{L}}_{\alpha\beta} &:= \Pi^{\text{L}}_\alpha{}^\gamma \Pi^{\text{L}}_\beta{}^\delta g_{\gamma\delta} = u_\alpha u_\beta, \\ g^{\text{T}}_{\alpha\beta} &:= \Pi^{\text{T}}_\alpha{}^\gamma \Pi^{\text{T}}_\beta{}^\delta g_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta. \end{aligned}$$

Ясно также, что

$$u^{\text{L}\alpha} := u^\beta \Pi^{\text{L}}_\beta{}^\alpha = u^\alpha, \qquad u^{\text{T}} := u^\beta \Pi^{\text{T}}_\beta{}^\alpha = 0.$$

Поэтому тензор энергии-импульса (7.126) можно переписать с помощью проекционных операторов

$$T_{\text{M}}{}^{\alpha\beta} = \mathcal{E} g^{\text{L}\alpha\beta} - \mathcal{P} g^{\text{T}\alpha\beta}. \tag{7.134}$$

Поскольку тензор энергии-импульса сплошной среды (7.126) не был получен из вариационного принципа, то на него необходимо наложить дополнительное условие

$$\nabla_\beta T_{\text{M}}{}^{\beta\alpha} = 0, \tag{7.135}$$

которое является условием совместности уравнений Эйнштейна. Более подробно

$$(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\beta \nabla_\beta u^\alpha + u^\alpha \nabla_\beta \big[ (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\beta \big] - g^{\alpha\beta} \partial_\beta \mathcal{P} = 0,$$

где мы воспользовались условием метричности связности Леви-Чивиты $\nabla_\beta g^{\gamma\alpha} = 0$. Проекции этого уравнения на вектор $u$ и перпендикулярную гиперплоскость имеют следующий вид

$$(\mathcal{E} + \mathcal{P}) \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \partial_\alpha \mathcal{E} = 0, \tag{7.136}$$

$$(\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^\beta \nabla_\beta u^\alpha - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\beta \mathcal{P} = 0, \tag{7.137}$$

где мы воспользовались уравнением $u_\alpha \nabla_\beta u^\alpha = 0$, которое следует из условия $u^2 = 0$ после дифференцирования. Легко проверить, что свертка уравнений (7.137) с ковектором $u_\alpha$ тождественно обращается в нуль. Следовательно, только четыре уравнения из (7.136), (7.137) являются независимыми, и они эквивалентны условию ковариантного сохранения тензора энергии-импульса $\nabla_\beta T_{\text{M}}{}^{\beta\alpha} = 0$.

Уравнение (7.136) является ковариантным обобщением уравнения непрерывности для нерелятивистской жидкости (7.131), а уравнение (7.137) – ковариантным обобщением уравнения Эйлера (7.132). Эти уравнения представляют собой систему уравнений *релятивистской гидродинамики*.

Система уравнений (7.136), (7.137) вместе с уравнениями Эйнштейна не образует полной системы уравнений релятивистской гидродинамики. Ее необходимо дополнить уравнением состояния. Широкий класс моделей описывается уравнением состояния $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$, связывающим давление с плотностью энергии в каждой точке пространства-времени. Такие жидкости называются *баротропными*.

Второе слагаемое в уравнении Эйлера (7.137) после опускания индекса имеет вид

$$\Pi^{\text{T}}_\alpha{}^\beta \partial_\beta \mathcal{P} = (\delta^\beta_\alpha - u_\alpha u^\beta) \partial_\beta \mathcal{P}.$$

Если оно равно нулю, т.е. градиент давления параллелен вектору скорости, то уравнение Эйлера упрощается $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$. Это есть уравнение экстремалей. В этом случае точки жидкости движутся так же, как и точечные частицы под действием только гравитационных сил.

Для пылевидной материи давление равно нулю и система уравнений релятивистской гидродинамики существенно упрощается:

$$\nabla_\alpha (\mathcal{E} u^\alpha) = 0, \qquad u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0. \tag{7.138}$$

Мы видим, что пылевидная материя движется вдоль экстремалей как множество точечных частиц.

При анализе общих свойств решений уравнений Эйнштейна на тензор энергии-импульса материи налагаются определенные *энергетические условия*. Перечислим три наиболее распространенных.

Определение. Говорят, что источники (поля материи) удовлетворяют:

1) *слабому энергетическому условию*, если для любого времениподобного векторного поля $X$ выполнено неравенство
$$T_{\text{м}\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant 0; \tag{7.139}$$
2) *сильному энергетическому условию*, если для любого времениподобного векторного поля $X$ выполнено неравенство
$$\rho_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta \geqslant 0, \qquad \text{где} \quad \rho_{\alpha\beta} := T_{\text{м}\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}g_{\alpha\beta}T_{\text{м}\gamma}{}^\gamma, \tag{7.140}$$
где $n$ – размерность пространства-времени. Это условие называется также *условием положительности Риччи* (см. уравнение (7.3));
3) *доминантному энергетическому условию*, если для произвольного времениподобного векторного поля $X$, направленного в будущее, векторное поле с компонентами $T_{\text{м}\beta}{}^\alpha X^\beta$ также времениподобно и направлено в будущее.

В данном определении векторное поле $X$ времениподобно, т.е. $X^2 := X^\alpha X_\alpha > 0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что оно нормировано на единицу, $X^2 = 1$. Кроме того, всегда можно выбрать такую систему координат, в которой произвольное времениподобное векторное поле имеет только одну нетривиальную компоненту $X = (1, 0, \dots, 0)$. Поэтому слабое и сильное энергетические условия можно переформулировать. В произвольной системе координат, в которой координата $x^0$ является временем, должны выполняться равенства: $T_{\text{м}00} \geqslant 0$ или $\rho_{00} \geqslant 0$, соответственно.

Ясно, что если выполнено доминантное энергетическое условие, то $T_{\text{м}\alpha\beta}X^\alpha X^\beta > 0$. Следовательно, из условия 3) следует 1). Кроме того, если след тензора энергии-импульса материи положителен, как, например, для точечных частиц (см. раздел 7.8.3), то из сильного энергетического условия вытекает слабое, причем получается строгое неравенство $T_{\text{м}\alpha\beta}X^\alpha X^\beta > 0$. Если же след тензора энергии-импульса материи отрицателен, то, наоборот, слабое энергетическое условие сильнее, чем сильное энергетическое условие.

Предложение 7.11.1. *Если выполнены условия $\mathcal{E} > 0$, $\mathcal{P} \geqslant 0$, то тензор энергии-импульса сплошной среды удовлетворяет слабому и сильному энергетическим условиям.*

Доказательство. Зафиксируем систему координат, в которой времениподобное векторное поле имеет вид $X = (1, 0, 0, 0)$. Тогда слабое энергетическое условие эквивалентно неравенству
$$T_{\text{м}00} = \mathcal{E}u_0^2 + \mathcal{P}(u_0^2 - g_{00}) \geqslant 0.$$
Первое слагаемое в этом выражении, очевидно, неотрицательно (в принципе оно может обратиться в нуль, так как условия $u^0 > 0$ недостаточно для положительности нулевой ковариантной компоненты скорости $u_0$). Поскольку
$$u_0 := g_{00}u^0 + g_{0\mu}u^\mu,$$
то второе слагаемое принимает вид
$$\mathcal{P}\left(g_{00}^2(u^0)^2 + 2g_{00}g_{0\mu}u^0u^\mu + (g_{0\mu}u^\mu)^2 - g_{00}\right) = -\mathcal{P}g_{00}\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}\right)u^\mu u^\nu,$$
где мы воспользовались тождеством $u^2 = 1$. На лоренцевом многообразии матрица в скобках в правой части равенства отрицательно определена, и поэтому слабое энергетическое условие выполнено.

Для тензора энергии-импульса сплошной среды справедливо равенство

$$\rho_{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u_\alpha u_\beta - \mathcal{P}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}(\mathcal{E} - 3\mathcal{P})g_{\alpha\beta}.$$

Отсюда следует выражение для нулевой компоненты

$$\rho_{00} = \mathcal{E}(u_0^2 - g_{00}) + \mathcal{P}(u_0^2 - g_{00}) + \frac{n-3}{n-2}\mathcal{E}g_{00} + \frac{3}{n-2}\mathcal{P}g_{00}.$$

Первые два слагаемых неотрицательны в силу предыдущих рассуждений. Последние два слагаемых положительны, так как координата $x^0$ является временем и, следовательно, $g_{00} > 0$.

Замечание. В доказательстве предложения мы не использовали неравенство $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{E}/3$, обеспечивающее неотрицательность следа тензора энергии-импульса.

Предложение 7.11.2. *Если выполнено условие $|\mathcal{P}| < |\mathcal{E}|$, то тензор энергии-импульса сплошной среды удовлетворяет условию энергодоминантности.*

Доказательство. В системе координат, где $X = (1, 0, 0, 0)$, условие энергодоминантности имеет вид

$$T_{\text{м}0}{}^{\alpha}T_{\text{м}0\alpha} > 0.$$

Подставляя в это неравенство выражение для тензора энергии-импульса (7.126), получим соотношение

$$(\mathcal{E}^2 - \mathcal{P}^2)u_0^2 + \mathcal{P}^2 g_{00} > 0.$$

Очевидно, что неравенство $|\mathcal{P}| < |\mathcal{E}|$ достаточно для выполнения условия энергодоминантности.

Таким образом, для обычной материи все три энергетических условия выполнены, так как давление удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \mathcal{P} \leqslant \mathcal{E}/3$.

**7.11.1. Акустические фононы в нерелятивистской гидродинамике.** В физике всегда большой интерес вызывали аналогии между явлениями из разных областей. В настоящем разделе мы покажем, что некоторые явления в нерелятивистской гидродинамике и общей теории относительности описываются уравнениями, которые обладают рядом одинаковых свойств.

Уравнения движения для акустических фононов следуют из классических нерелятивистских уравнений гидродинамики следующим образом. Рассмотрим некоторое точное решение уравнений гидродинамики. Тогда уравнение для малых возбуждений (фононов) вблизи этого решения сводится к уравнению Даламбера с нетривиальной эффективной четырехмерной метрикой лоренцевой сигнатуры, в которой роль скорости света играет скорость звука в жидкости. Отличие от общей теории относительности сводится к тому, что эффективная метрика для фононов определяется уравнениями гидродинамики, а не уравнениями Эйнштейна. Тем не менее уравнение для фононов задается нетривиальной четырехмерной метрикой, для которой тензор кривизны отличен от нуля. Другими словами, фононы двигаются на многообразии с нетривиальной геометрией. При этом возможно возникновение горизонтов, когда скорость течения жидкости превышает скорость звука, и, следовательно, образование акустических аналогов черных дыр.

В настоящем разделе мы следуем выводу уравнения для фононов, предложенному в [78, 79] (см. также [80]).

Рассмотрим 4-мерное галилеево пространство-время с декартовой системой координат $\{x^\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, которые мы будем обозначать индексами из начала греческого алфавита

$\alpha, \beta, \ldots$ . Координату $x^0 \in \mathbb{R}$ мы отождествляем с временем, $x^0 = t$. Пространственные координаты $\{x^\mu\} \in \mathbb{R}^3$ мы будем обозначать индексами из середины греческого алфавита $\mu, \nu, \ldots$ . Жидкость без вязкости называется *идеальной* и описывается плотностью $\rho(x)$, давлением $\mathcal{P}(x)$ и вектором скорости $\boldsymbol{u} = \{u^\mu(x)\}$, где $x = \{x^\alpha\}$. Движение идеальной жидкости или идеального газа в пространстве определяется следующей замкнутой системой из пяти нелинейных уравнений для пяти переменных (см., например, [81])

$$\rho\dot{\boldsymbol{u}} + \rho(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla\mathcal{P} + \boldsymbol{f}, \tag{7.141}$$

$$\dot{\rho} + \mathsf{div}\,(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \tag{7.142}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho), \tag{7.143}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени и $\nabla$ – градиент. Уравнение (7.141) называется уравнением Эйлера (7.132) и представляет собой второй закон Ньютона для элемента объема жидкости. Здесь $\boldsymbol{f}(x)$ – плотность внешних сил. Например, в гравитационном поле $\boldsymbol{f} = -\rho\nabla\varphi$, где $\varphi(x)$ – потенциал гравитационного поля. В дальнейшем мы ограничимся только этим случаем. Уравнение (7.142) является уравнением непрерывности (7.131). Последнее уравнение (7.143) является уравнением состояния жидкости, которое характеризует саму жидкость и считается заданным. Здесь мы предполагаем, что давление жидкости зависит только от ее плотности, т.е. она является баротропной.

Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathsf{const}$ и уравнение непрерывности принимает вид $\mathsf{div}\,\boldsymbol{u} = 0$.

Уравнения (7.141)–(7.143) записаны в стандартном для гидродинамики виде, где не делается различие между верхними и нижними индексами.

Если уравнение состояния задано, то давление $\mathcal{P}$ (или плотность $\rho$) можно исключить из системы уравнений движения. Для этого заметим, что

$$\nabla\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{d\rho}\nabla\rho = c^2\nabla\rho,$$

где введена скорость звука $c(\rho)$:

$$c^2 := \frac{d\mathcal{P}}{d\rho}. \tag{7.144}$$

Для обычных жидкостей с увеличением плотности давление увеличивается, и поэтому $c^2 > 0$. Тогда уравнение Эйлера можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -c^2\frac{\nabla\rho}{\rho} - \nabla\varphi, \tag{7.145}$$

где скорость звука $c = c(\rho)$ рассматривается как заданная функция от плотности жидкости. Уравнение Эйлера (7.145) вместе с уравнением непрерывности (7.142) однозначно описывают движение такой жидкости при заданных начальных и граничных условиях.

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}^2 = [\boldsymbol{u},\, \mathsf{rot}\,\boldsymbol{u}] + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u},$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение, уравнение Эйлера (7.145) можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{u}} - [\boldsymbol{u},\, \mathsf{rot}\,\boldsymbol{u}] = -\nabla\left(h + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \varphi\right),$$

где введена *энтальпия* жидкости

$$h(\mathcal{P}) := \int_0^{\mathcal{P}} \frac{d\mathcal{P}'}{\rho(\mathcal{P}')}.$$

Предположим, что движение жидкости является безвихревым:

$$\mathsf{rot}\,\boldsymbol{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu = 0. \tag{7.146}$$

На геометрическом языке это означает, что 1-форма $dx^\mu u_\mu$ является замкнутой на пространственном сечении $x^0 = \mathsf{const}$. Тогда локально (во всем $\mathbb{R}^3$) существует потенциальное поле $\psi(x)$ (потенциал) такое, что

$$u_\mu = -\partial_\mu \psi. \tag{7.147}$$

Для безвихревой жидкости уравнение Эйлера эквивалентно *уравнению Бернулли*

$$-\dot{\psi} + h + \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + \varphi = F(t), \tag{7.148}$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени. Поскольку потенциал $\psi$ определен с точностью до добавления произвольной функции времени, то, без ограничения общности, положим $F(t) = 0$.

Теперь можно приступить к изучению фононов в нерелятивистской гидродинамике. Допустим, что нам известно точное решение уравнений гидродинамики $\rho_0(x)$, $\mathcal{P}_0(x)$ и $\boldsymbol{u}_0(x) = -\nabla\psi_0$. Получим уравнение, описывающее распространение акустических возбуждений (фононов) вблизи этого решения. Пусть

$$\begin{aligned} \rho &\approx \rho_0 + \epsilon\rho_1, \\ \mathcal{P} &\approx \mathcal{P}_0 + \epsilon\mathcal{P}_1, \\ u^\mu &\approx u_0^\mu + \epsilon u_1^\mu, \\ \psi &\approx \psi_0 + \epsilon\psi_1. \end{aligned} \tag{7.149}$$

где $\epsilon \ll 1$ – малый параметр разложения. При этом мы считаем внешние силы заданными $\varphi = \varphi_0$.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения, принятые в дифференциальной геометрии, и различать верхние и нижние индексы. Пространственные индексы в декартовой системе координат поднимаются и опускаются с помощью метрики $\eta_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ и ее обратной, которая отличается от евклидовой метрики знаком. В наших обозначениях $u_\mu = \partial_\mu\psi$, $u^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\psi = -\partial_\mu\psi$.

Уравнение Бернулли (7.148) в нулевом и первом порядке по $\epsilon$ имеет вид

$$\epsilon^0: \qquad -\partial_0\psi_0 + h_0 - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_0\partial_\nu\psi_0 + \varphi_0 = 0, \tag{7.150}$$

$$\epsilon^1: \qquad -\partial_0\psi_1 + \frac{\mathcal{P}_1}{\rho_0} - u_0^\mu\partial_\mu\psi_1 = 0, \tag{7.151}$$

где учтено разложение для энтальпии

$$h(\mathcal{P}) \simeq h(\mathcal{P}_0) + \epsilon\frac{\mathcal{P}_1}{\rho_0}.$$

Учтем, что

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{d\mathcal{P}}\mathcal{P}_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{c^2},$$

и найдем поправку к плотности $\rho_1$ из уравнения (7.151)

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{c^2}(\partial_0\psi_1 + u_0^\mu \partial_\mu \psi_1). \tag{7.152}$$

Уравнение непрерывности в нулевом и первом порядке по $\epsilon$ имеет вид

$$\epsilon^0: \qquad \partial_0\rho_0 + \partial_\mu(\rho_0 u_0^\mu) = 0, \tag{7.153}$$

$$\epsilon^1: \qquad \partial_1\rho_1 + \partial_\mu(\rho_0 u_1^\mu + \rho_1 u_0^\mu) = 0. \tag{7.154}$$

Подставим во второе уравнение решение для поправки к плотности (7.152). В результате получим уравнение для поправки к потенциалу скорости:

$$\partial_0\left[\frac{\rho_0}{c^2}(\partial_0\psi_1 + u_0^\mu\partial_\mu\psi_1)\right] + \partial_\mu\left[\rho_0\partial^\mu\psi_1 + \frac{\rho_0}{c^2}u_0^\mu(\partial_0\psi_1 + u_0^\nu\partial_\nu\psi_1)\right] = 0. \tag{7.155}$$

Это волновое уравнение для $\psi_1(x)$ полностью определяет распространение акустических колебаний в движущейся жидкости, описываемой плотностью $\rho_0(x)$ и полем скоростей $u_0^\mu(x)$, с заданным уравнением состояния $c = c(\rho)$. В случае, когда скорость жидкости равна нулю, $u_0 = 0$, а плотность $\rho_0$ и величина $c$ постоянны, уравнение (7.155) сводится к уравнению Даламбера, которое описывает распространение акустических возбуждений со скоростью $c$. Это оправдывает введенное выше понятие скорости звука (7.144).

Если решение для $\psi_1(x)$ известно, то поправка к плотности $\rho_1$ однозначно определяется формулой (7.152).

Уравнение (7.155), как легко проверить, можно записать в матричных обозначениях

$$\partial_\alpha(f^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi_1) = 0,$$

где

$$f^{\alpha\beta} := \frac{\rho_0}{c^2}\begin{pmatrix} 1 & u_0^\nu \\ u_0^\mu & c^2\eta^{\mu\nu} + u_0^\mu u_0^\nu. \end{pmatrix}$$

Введем метрику в галилеевом пространстве

$$g_{\alpha\beta} := \frac{\rho_0}{c}\begin{pmatrix} c^2 + u_0^\mu u_{0\mu} & -u_{0\nu} \\ -u_{0\mu} & \eta_{\mu\nu}, \end{pmatrix} \tag{7.156}$$

и ее обратную

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\rho_0 c}\begin{pmatrix} 1 & u_0^\nu \\ u_0^\mu & c^2\eta^{\mu\nu} + u_0^\mu u_0^\nu. \end{pmatrix} \tag{7.157}$$

Интервал, соответствующий метрике (7.156), можно записать в виде

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c}\left[c^2dt^2 + \eta_{\mu\nu}(dx^\mu - u_0^\mu dt)(dx^\nu - u_0^\nu dt)\right]. \tag{7.158}$$

“Эффективная” метрика (7.156) имеет лоренцеву сигнатуру $(+ - --)$, и ее определитель равен

$$g := \det g_{\alpha\beta} = -\frac{\rho_0^4}{c^2}.$$

Сравнение метрики (7.156) с АДМ параметризацией произвольной псевдоримановой метрики (8.5) дает следующее выражение для функций хода и сдвига:

$$N = \sqrt{\rho_0 c}, \qquad N^\mu = -\frac{\rho_0 u_0^\mu}{c}.$$

Вернемся к уравнению для фононов. Обратная метрика $g^{\alpha\beta}$ отличается от матрицы $f^{\alpha\beta}$ простым множителем:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{c}{\rho_0^2} f^{\alpha\beta}.$$

Теперь уравнение для акустических фононов можно переписать в инвариантном относительно общих преобразований координат виде

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \big( \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta \psi \big) = 0, \tag{7.159}$$

где мы, для простоты обозначений, отбросили индекс у поправки к потенциалу скорости.

Таким образом, распространение фононов в движущейся жидкости описывается инвариантным волновым уравнением в четырехмерном пространстве-времени с нетривиальной метрикой лоренцевой сигнатуры (7.156). Эта метрика определяется плотностью $\rho_0$, скоростью звука $c$ и полем скоростей $\boldsymbol{u}_0$, которые удовлетворяют исходным уравнениям (7.150), (7.154). Подчеркнем, что движение самой жидкости происходит в плоском галилеевом пространстве-времени, а распространение акустических возбуждений в этой движущейся жидкости описывается волновым уравнением на псевдоримановом пространстве-времени с нетривиальной "эффективной" метрикой.

Мы считаем, что уравнение состояния жидкости задано, и, следовательно, задана скорость звука в жидкости как функция плотности. Тогда эффективная метрика определяется четырьмя функциями $\rho_0(x)$ и $\boldsymbol{u}_0(x)$, которые удовлетворяют уравнениям гидродинамики. При постановке задачи Коши для однозначного определения этих функций необходимо задать четыре произвольные функции в качестве начальных условий. В общей теории относительности метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна и имеет две распространяющихся степени свободы. При постановке задачи Коши для уравнений Эйнштейна также необходимо задать четыре произвольные функции на пространственноподобном сечении: по две на каждую степень свободы, так как уравнения движения второго порядка.

Нулевая компонента метрики $g_{00}$ в (7.156) меняет знак в тех точках пространства-времени, где течение жидкости становится сверхзвуковым: $c^2 = \boldsymbol{u}^2 := -u^\mu u_\mu$. Эти поверхности в пространстве соответствуют горизонтам черных дыр. Действительно, поскольку скорость фононов ограничена скоростью звука в жидкости, то они не могут покинуть область сверхзвукового течения. Следовательно, в быстро текущей жидкости для фононов могут образовываться аналоги черных дыр в общей теории относительности. На рис.7.1 показана качественная картинка образования черной дыры в жидкости. Представим, что все трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ заполнено несжимаемой жидкостью, и в центре декартовой системы координат находится точечный сток, в который жидкость засасывается. Предположим, что жидкость на бесконечности покоится, и ее движение радиально. Поскольку скорость жидкости стремится к бесконечности при приближении к стоку, то существует сфера некоторого радиуса, на которой скорость жидкости равна скорости звука. Эта сфера называется горизонтом. Если фонон испущен в некоторой точке, лежащей вне горизонта, то он может либо попасть в сток, либо уйти на бесконечность. Если же фонон испущен из точки, лежащей внутри горизонта, то он неминуемо попадет в сток, так как его скорости недостаточно для прохождения через горизонт. Описанная ситуация является аналогом черных дыр в общей теории относительности. Надо только

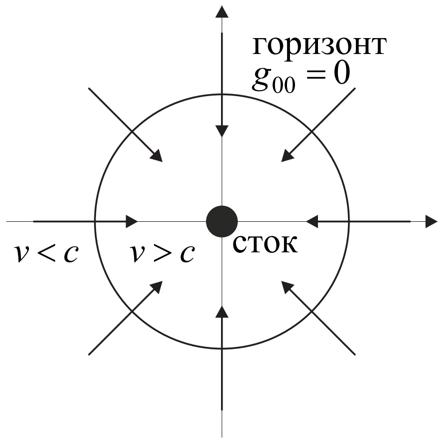


Рис. 7.1. Черная дыра для акустических фононов. Горизонт определяется равенством модуля скорости жидкости $v := \sqrt{-u_0^\mu u_{0\mu}}$ скорости звука $c$

скорость звука заменить на скорость света. Аналогом фононов является электромагнитное излучение – фотоны.

## 7.12. Выбор системы координат

Уравнения общей теории относительности ковариантны относительно общих преобразований координат. Эту свободу можно использовать для выбора подходящей системы отсчета, которая может упростить уравнения Эйнштейна. В настоящем разделе будут описаны несколько широко распространенных способа фиксирования системы координат.

**7.12.1. Сопутствующая система координат.** Рассмотрим уравнения Эйнштейна

$$\kappa\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right) = -\frac{1}{2}T_{\text{м}\alpha\beta} \tag{7.160}$$

для сплошной среды с тензором энергии-импульса (см. раздел 7.11)

$$T_{\text{м}}{}^{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^\alpha u^\beta - \mathcal{P}g^{\alpha\beta}. \tag{7.161}$$

Для получения замкнутой системы уравнений уравнения Эйнштейна необходимо дополнить законом сохранения (уравнениями релятивистской гидродинамики)

$$\nabla_\beta T_{\text{м}}{}^{\beta\alpha} = 0 \tag{7.162}$$

и уравнением состояния среды

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E}), \tag{7.163}$$

предполагая среду баротропной. Если среда не является баротропной то возникнут дополнительные уравнения. Система уравнений (7.160), (7.162) и (7.163) образуют полную систему для неизвестных функций: $g_{\alpha\beta}$, $u^\alpha$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$. Нетрудно проверить, что число уравнений равно числу неизвестных (напомним, что на вектор скорости $u$ наложено условие $u^2 = 1$ и число его независимых компонент на единицу меньше размерности пространства-времени).

Поскольку плотность энергии $\mathcal{E}(x)$ и давление $\mathcal{P}(x)$ являются скалярными полями, то уравнение состояния (7.163) является корректным.

По построению, все уравнения ковариантны. Поэтому преобразования координат можно использовать для упрощения системы уравнений. Обычно преобразования координат используют для фиксирования части компонент метрики. Однако для системы уравнений (7.160), (7.162) и (7.163) существует другая естественная возможность. Если размерность пространства-времени равна $n$, то в нашем распоряжение имеется $n$ функций, которых достаточно для фиксирования векторного поля скорости. Тем самым число неизвестных функций уменьшится, и задача упростится. Такой подход часто используется в космологии.

Опишем этот способ задания системы координат. Рассмотрим псевдориманово многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, с метрикой $g$ лоренцевой сигнатуры. Пусть на нем задано произвольное достаточно гладкое времениподобное векторное поле $u = u^\alpha(x)\partial_\alpha$, всюду отличное от нуля, $u^2 \neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$u^2 := g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1.$$

В противном случае можно просто заменить $u^\alpha \mapsto u^\alpha / u^2$.

Пример 7.12.1. Пусть пространство-время $\mathbb{M}$ заполнено сплошной средой. Тогда задано векторное поле скорости каждой точки среды $u$, для которого $u^2 = 1$.

В окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой все компоненты векторного поля, кроме одной, равны нулю. Для единичного времениподобного векторного поля нетривиальная компонента равна единице:

$$\{u^\alpha\} = \{1, 0, \dots, 0\}. \tag{7.164}$$

Определение. Система координат, в которой для единичного времениподобного векторного поля выполнено условие (7.164), называется *сопутствующей векторному полю $u$*.

В этой системе координат ковариантная производная векторного поля $u$ равна символам Кристоффеля с одним временны́м индексом,

$$\nabla_\alpha u^\beta = \partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta u^g = \Gamma_{\alpha 0}{}^\beta.$$

В сопутствующей системе координат $\partial_\alpha u^\beta = 0$, поэтому при бесконечно малых преобразованиях координат вариация формы компонент вектора и ковектора содержит только одно слагаемое. Аналогично преобразуются компоненты произвольного тензора. Отсюда вытекает, что производная Ли от любого тензора $Y$ типа $(r, s)$ вдоль векторного поля $u$ совпадает с производной по времени $x^0$:

$$\mathsf{L}_u Y^{\alpha_1\dots\alpha_r}{}_{\beta_1\dots\beta_s} = \partial_0 Y^{\alpha_1\dots\alpha_r}{}_{\beta_1\dots\beta_s}$$

и не зависит от связности, как, впрочем, любая производная Ли.

С физической точки зрения сопутствующую систему координат можно представить следующим образом. Допустим, что некоторая среда заполняет все пространство-время. Тогда с каждой точкой среды связана мировая линия $x(s)$ (линия тока). Мы предполагаем, что касательные векторы к мировым линиям образуют достаточно гладкое времениподобное векторное поле (вектор скорости)

$$u = u^\alpha\partial_\alpha, \qquad u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{ds}, \qquad ds := \sqrt{g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta},$$

на многообразии $\mathbb{M}$. Выберем произвольное сечение $\mathbb{S}$, которое пересекает все линии тока один раз, и зададим произвольную систему координат $x^\mu$, $\mu = 1, \dots, n-1$, на $\mathbb{S}$. Это сечение совсем не обязано быть пространственноподобным. Тогда сопутствующими координатами произвольной точки $y \in \mathbb{M}$ является набор чисел $\{x^0 := s, x^\mu\}$, где $x^\mu$ – координаты точки пересечения поверхности $\mathbb{S}$ с кривой $x(s)$, проходящей через точку $y$. Для определенности будем считать, что каждая линия тока пересекает поверхность $\mathbb{S}$ при $s = 0$.

Замечание. В предыдущем разделе мы установили, что пылевидная материя движется вдоль экстремалей (7.138). Это значит, что в общем случае при наличии давления или других негравитационных сил линии тока среды в общем случае отличаются от экстремалей.

Если производная Ли от некоторого тензора вдоль векторного поля скорости $u$ равна нулю, то в сопутствующей системе координат компоненты этого тензора могут зависеть только от координат $x^\mu$, $\mu = 1, \ldots, n-1$ на сечении $\mathbb{S}$. Это значит, что соответствующий тензор жестко связан с движущейся средой и движется вместе с ней. В дальнейшем мы будем предполагать, что все сечения $s = \mathsf{const}$ и, в частности, сечение $\mathbb{S}$ пространственноподобны.

Сопутствующая векторному полю система координат определена неоднозначно. Действительно, совершим преобразование координат $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$. Тогда компоненты скорости преобразуются по тензорному закону:

$$u^\alpha \mapsto u^{\alpha'} := \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha.$$

Если до и после преобразования координат система координат является сопутствующей, то функции преобразования координат должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$1 = \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}, \qquad 0 = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^0}.$$

Общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$x^0 \mapsto x^0 + f(\boldsymbol{x}), \qquad x^\mu \mapsto x^{\mu'} = x^\mu + f^\mu(\boldsymbol{x}), \tag{7.165}$$

где $f, f^\mu$ – $n$ произвольных функций координат на сечении $\mathbb{S} \subset \mathbb{M}$ и $\boldsymbol{x} = \{x^\mu\}$. Функция $f$ соответствует произволу в выборе сечения $x^0 = \mathsf{const}$, и функции $f^\mu$ – свободе в выборе координат $x^\mu$ на данных сечениях.

Таким образом, мы устранили $n$ неизвестных функций в полной системе уравнений (7.160), (7.162) и (7.163). В этой системе координат тензор энергии-импульса (7.161) принимает вид

$${T_{\text{м}}}^{00} = (\mathcal{E} + \mathcal{P}) - \mathcal{P} g^{00}, \qquad {T_{\text{м}}}^{0\mu} = -\mathcal{P} g^{0\mu}, \qquad {T_{\text{м}}}^{\mu\nu} = -\mathcal{P} g^{\mu\nu}.$$

В общем случае ни он, ни тензор энергии-импульса с одним опущенным индексом индексом ${T_{\text{м}\alpha}}^\beta$ не будут диагональны.

Теперь определим другую систему координат, которую также естественно назвать сопутствующей.

Если задано единичное времениподобное векторное поле $u$, то в каждой точке пространства-времени $x \in \mathbb{M}$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ его можно дополнить $n-1$ линейно независимыми векторами $e_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n-1$, которые перпендикулярны вектору $u$. Тогда совокупность векторов $\{u, e_\mu\}$ образует в каждой точке репер. Ясно, что векторы $e_\mu$ пространственноподобны, и их можно выбрать достаточно гладкими. Тогда они задают $n-1$ мерное распределение векторных полей на $\mathbb{M}$. Согласно теореме Фробениуса для этого распределения существуют интегральные подмногообразия тогда и только тогда, когда векторные поля $e_\mu$ находятся в инволюции. В общем случае это не так (это зависит от метрики). Отсюда следует, что остаточного произвола в выборе сопутствующей системы координат (7.165) недостаточно для того, чтобы выбрать секущую поверхность $\mathbb{S}$ таким образом, чтобы вектор $u$ был к ней всюду ортогонален.

При определении системы координат, сопутствующей векторному полю, за основу взяты мировые линии точек среды. Теперь мы введем другое понятие сопутствующей системы координат, где за основу определения будет взята система гиперповерхностей, а не векторное поле.

Рассмотрим систему локальных координат $x^\alpha$ на $\mathbb{M}$, где координата $x^0$ является временем, и все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны. По предположению, на $\mathbb{M}$ задана метрика лоренцевой сигнатуры, для которой мы будем использовать АДМ параметризацию (8.5). Выберем базис $n, e_\mu$ в касательном пространстве, состоящий из пространственных векторов $e_\mu = e_\mu{}^\alpha \partial_\alpha = \partial_\mu$ (символ $e_\mu{}^\alpha := \delta_\mu^\alpha$ введен для удобства последующих выкладок), касательных к гиперповерхностям $x^0 = \mathsf{const}$, и векторное поле

$$n := \frac{1}{N}(\partial_0 - N^\mu \partial_\mu), \tag{7.166}$$

где $N$ – функция хода и $N^\mu$ – функции сдвига. Это векторное поле перпендикулярно пространственным гиперповерхностям:

$$(n, e_\mu) := n^\alpha e_\mu{}^\beta g_{\alpha\beta} = n^0 e_\mu{}^\nu g_{0\nu} + n^\rho e_\mu{}^\nu g_{\rho\nu} = 0,$$

и имеет единичную длину, $n^2 = 1$.

В общем случае коммутатор векторных полей $[n, e_\mu]$ отличен от нуля. Поэтому пространственные координаты $x^\mu$ нельзя дополнить временеподобной координатой $x^{0'}$ так, чтобы вектор $n$ был касателен к соответствующей координатной линии: $n = \partial_{0'}$. То есть базис $n, e_\mu$ является неголономным.

Нормальному вектору соответствует ортонормальная 1-форма

$$n = dx^\alpha n_\alpha = dx^0 N, \tag{7.167}$$

где $n_\alpha := n^\beta g_{\beta\alpha}$, для которой мы будем использовать то же обозначение.

Для векторов и 1-форм справедливы разложения на перпендикулярную и касательные составляющие:

$$X^\alpha = X^\perp n^\alpha + \tilde{X}^\mu e_\mu{}^\alpha, \qquad X_\alpha = X_\perp n_\alpha + \tilde{X}_\mu e^\mu{}_\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} X^\perp &= X^0 N, & \tilde{X}^\mu &= X^0 N^\mu + X^\mu, \\ X_\perp &= \frac{1}{N}(X_0 - N^\mu X_\mu), & \tilde{X}_\mu &= X_\mu. \end{aligned}$$

Поскольку $X_0 := X^\alpha g_{\alpha 0}$ и $X_\mu := X^\alpha g_{\alpha\mu}$, то нетрудно проверить, что $X_\perp = X^\perp$ и $\tilde{X}_\mu = \tilde{X}^\nu g_{\nu\mu}$.

Аналогично раскладываются тензоры произвольного ранга.

Определение. Система координат называется *сопутствующей*, если в этой системе координат скорость $\{u^\alpha\}$ каждой точки сплошной среды имеет вид

$$\{u^\alpha\} = \{n^\alpha\} = \left\{ \sqrt{g^{00}}, \frac{g^{0\mu}}{\sqrt{g^{00}}} \right\} = \left\{ \frac{1}{N}, -\frac{N^\mu}{N} \right\}. \tag{7.168}$$

То есть единичный нормальный вектор к пространственным сечениям совпадает с векторным полем скорости.

В правой части равенства (7.168), определяющего сопутствующую систему координат, стоят определенные компоненты метрики, которые не образуют компонент вектора. Следовательно, равенство (7.168) нековариантно и действительно фиксирует систему координат.

Название сопутствующая система координат оправдано следующим образом. Поскольку вектор нормали $n$ к пространственному сечению $x^0 = \mathsf{const}$ совпадает с вектором скорости $u$, то репер $n, e_\mu$ привязан к среде и движется вместе с ней.

Если метрика имеет блочно-диагональный вид, т.е. $N^\mu = 0$ и $N = 1$, и, следовательно, выбрана временна́я калибровка (см. следующий раздел), то вектор скорости материи в каждой точке пространства-времени имеет только временну́ю составляющую $\{u^\alpha\} = (1, 0, 0, 0)$. В этом случае сопутствующая система координат совпадает с системой координат, сопутствующей векторному полю скорости $u$, которая была введена в начале раздела. Это значит, что в сопутствующей системе координат каждая точка материи покоится. Другими словами, система координат движется вместе с материей. При этом каждая точка среды движется по времениподобной экстремали (геодезической).

При наличии сил негравитационного происхождения, например, давления, точки материи могут двигаться не по экстремалям, и метрика в общем случае не будет блочно-диагональна. Математически это означает, что в общем случае нельзя одновременно удовлетворить условию (7.168) и условию блочной диагональности метрики. Поэтому данные выше два определения сопутствующей системы координат не эквивалентны.

Обозначим тензорные индексы по отношению к базису $\{e_a\} := \{n, e_\mu\}$ латинскими буквами $a, b, \ldots$ . Тогда они принимают значения $\{a\} = \{\perp, \mu\} = (\perp, 1, \ldots, n-1)$. Отличие этого базиса от координатного базиса в касательном пространстве заключается в том, что он неголономен, т.е. в общем случае не существует такой системы координат $y^a(x)$, в которой были бы выполнены условия:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^0} = n^\alpha, \qquad \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} = \delta^\nu_\mu$$

(см. [23], раздел 6.9). В базисе $e_a$ метрика имеет блочно-диагональный вид

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{7.169}$$

поскольку базисные векторы $n$ были выбраны единичными и перпендикулярными к гиперповерхностям. В каждой точке пространства-времени векторы скорости (7.168) в базисе $n, \partial_\mu$ имеют только одну отличную от нуля компоненту,

$$\{u^a\} = (1, 0, 0, 0).$$

Это значит, что в рассматриваемом базисе материя покоится, что оправдывает название сопутствующая.

Понятие сопутствующей системы координат полезно, так как позволяет исключить из тензора энергии-импульса сплошной среды компоненты скорости $u^\alpha$, заменив их на компоненты метрики следующим образом. Мы предполагаем, что тензор энергии-импульса материи с одним контравариантным и одним ковариантным индексом в сопутствующей системе координат

(7.168), и, следовательно, относительно базиса $n, \partial_\mu$ является диагональным. Например, в четырехмерном пространстве-времени положим

$$T_{\text{м}a}{}^{b} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{pmatrix}. \tag{7.170}$$

Тогда в координатном базисе $\{\partial_\alpha\}$ его контравариантные компоненты имеют вид

$$T_{\text{м}}{}^{00} = \mathcal{E}\frac{1}{N^2}, \qquad T_{\text{м}}{}^{0\mu} = T_{\text{м}}{}^{\mu 0} = -\mathcal{E}\frac{N^\mu}{N^2}, \qquad T_{\text{м}}{}^{\mu\nu} = \mathcal{E}\frac{N^\mu N^\nu}{N^2} - \mathcal{P}\hat{g}^{\mu\nu}. \tag{7.171}$$

Тем самым компоненты контравариантного тензора энергии-импульса не зависят от векторного поля скоростей сплошной среды.

Предложение 7.12.1. *Сопутствующая система координат* (7.168) *определена по крайней мере с точностью до масштабных преобразований* (*растяжки, гомотетии*) *пространственных координат*:

$$x^0 \mapsto x'^0 = x^0, \qquad x^\mu \mapsto x'^\mu = k(t)x^\mu, \tag{7.172}$$

*где* $k(t) \neq 0$ *– достаточно гладкая функция времени* $t := x^0$.

Доказательство. При преобразовании координат (7.172) координатный базис преобразуется по правилам:

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \partial'_0 + \dot{k}x^\mu\partial'_\mu, & dx^0 &= dx'^0, \\ \partial_\mu &= k\partial'_\mu, & dx^\mu &= \frac{dx'^\mu}{k} - \frac{x'^\mu\dot{k}dt}{k^2}, \end{aligned}$$

где $\dot{k} := dk/dt$. Тогда в новой системе координат компоненты метрики примут вид

$$\begin{aligned} N' &= N, & & \\ N'_\mu &= \frac{N_\mu}{k} - \frac{\dot{k}x_\mu}{k^2}, & N'^\mu &= kN^\mu - \dot{k}x^\mu, \\ g'_{\mu\nu} &= \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}, & \hat{g}'^{\mu\nu} &= k^2\hat{g}^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Теперь из формул (7.171) следует, что плотность энергии и давление в сопутствующей системе координат не меняются при масштабном преобразовании (7.172)

$$\mathcal{E}'(x') = \mathcal{E}(x), \qquad \mathcal{P}'(x') = \mathcal{P}(x).$$

При этом компоненты вектора скорости преобразуются по правилам

$$u'^0 = u^0, \qquad u'^\mu = ku^\mu + \dot{k}u^0x^\mu.$$

То есть так же, как и правая часть определения (7.168).

Инвариантность плотности энергии и давления относительно масштабного преобразования следовало ожидать, так как плотность энергии и давление являются скалярными полями и инвариантны относительно любых преобразований координат пространства-времени $x^\alpha$ и, в частности, растяжений (7.172). Нетривиальность проведенного рассмотрения заключается в том, что в правой части равенства (7.168), определяющего сопутствующую систему координат, стоят определенные компоненты метрики, которые в общем случае не совпадают с компонентами никакого вектора.

Уравнения релятивистской гидродинамики (7.162), которые были выписаны в начале раздела, можно записать в сопутствующей системе координат (7.168). Прямые вычисления приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} - N^\mu \partial_\mu \mathcal{E} - NK(\mathcal{E} + \mathcal{P}) &= 0, \\ \partial_\mu \mathcal{P} + \frac{\partial_\mu N}{N}(\mathcal{E} + \mathcal{P}) &= 0, \end{aligned} \tag{7.173}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени $\dot{\mathcal{E}} := \partial\mathcal{E}/\partial t$ и

$$K = \frac{1}{2N}(2\hat{\nabla}^\mu N_\mu - \hat{g}^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu}) \tag{7.174}$$

– внешняя скалярная кривизна пространственной гиперповерхности (8.45).

**7.12.2. Времення́я калибровка.** Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, на котором задана метрика лоренцевой сигнатуры $g_{\alpha\beta}(x)$, $\mathsf{sign}\, g_{\alpha\beta} = (+ - \dots -)$.

Определение. Система координат, в которой метрика имеет блочно-диагональный вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{7.175}$$

где $g_{\mu\nu}$ – отрицательно определенная риманова метрика на пространственноподобных сечениях $x^0 = \mathsf{const}$, называется *временно́й калибровкой*. Эту систему координат называют также *синхронной*, *гауссовой или полугеодезической*.

В синхронной системе отсчета координата $x^0$ является временем и явно выделена. Напомним, что греческие буквы из начала алфавита пробегают все значения индексов: $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, n-1$, а из середины – только пространственные: $\mu, \nu, \dots = 1, 2, \dots, n-1$.

При переходе в синхронную систему отсчета $n$ произвольных функций, параметризующих диффеоморфизмы, используются для фиксирования $n$ компонент метрики:

$$g_{00} = 1, \qquad g_{0\mu} = 0.$$

В АДМ параметризации метрики (см. раздел 8.2) времення́я калибровка соответствует условиям $N = 1$, $N_\mu = 0$.

Замечание. Названия гауссова или полугеодезическая система координат распространены в математической литературе, когда рассматриваются римановы пространства с положительно определенной метрикой. В физической литературе, где преимущественно рассматриваются многообразия с метрикой лоренцевой сигнатуры, чаще употребляют термины времення́я калибровка или синхронная система координат, потому что в этой системе отсчета координата $x^0$ действительно играет роль наблюдаемого времени.

Название синхронная система координат для метрики (7.175) оправдано следующим обстоятельством.

**Синхронизация часов.** Рассмотрим произвольную систему координат. В общем случае интервал между двумя близкими событиями $\{x^\alpha\}$ и $\{x^\alpha + dx^\alpha\}$ имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Предположим, что координата $x^0$ является наблюдаемым временем, т.е. $g_{00} > 0$, и все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны. Если два события C и D произошли в данной системе координат в одной и той же точке пространства, то они имеют координаты $\mathrm{C} = \{x^0_{\mathrm{C}}, x^\mu\}$ и $\mathrm{D} = \{x^0_{\mathrm{D}}, x^\mu\}$. При этом данные события разделены интервалом собственного времени

$$\Delta s = \int_{x^0_{\mathrm{C}}}^{x^0_{\mathrm{D}}} dx^0 \sqrt{g_{00}}. \tag{7.176}$$

Этот интеграл равен длине времениподобной кривой

$$x^0 = x^0_{\mathrm{C}} + (x^0_{\mathrm{D}} - x^0_{\mathrm{C}})\tau, \qquad x^\mu = \mathsf{const}, \qquad \tau \in [0, 1],$$

соединяющей события C и D. Конечно, в другой системе координат эти события могут произойти не только в разное наблюдаемое время, но и в разных точках пространства.

Таким образом, если два события, произошедшие в одной точке пространства в данной системе координат, разделены наблюдаемым временем $x^0_{\mathrm{D}} - x^0_{\mathrm{C}}$, то они разделены интервалом собственного времени (7.176). При этом нулевая компонента метрики $g_{00}$ определяет различие собственного и наблюдаемого времени для событий, произошедших в одной точке.

Теперь определим понятие одновременности для событий, которые произошли в двух разных, но близких точках пространства в данной фиксированной системе координат. Пусть событие A имеет пространственные координаты $x^\mu$, а событие B – близкие координаты $x^\mu + dx^\mu$. На рис.7.2 сплошными линиями показаны временны́е оси, проходящие через точки A и B. Возникает следующий вопрос одновременности. Допустим, что событие A имеет координаты $\{x^0, x^\mu\}$. Какова временна́я координата $x^0 + \Delta x^0$ события, произошедшего в точке B, которое можно назвать одновременным с событием A?

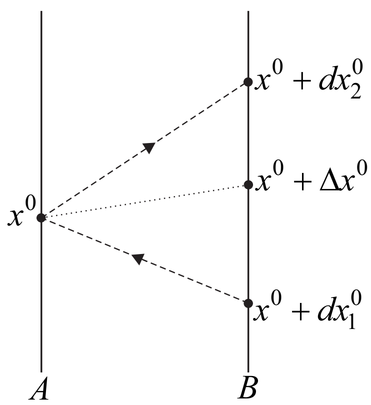


Рис. 7.2. Одновременность близких событий A и B

Чтобы определить одновременность, испустим свет в точке B в некоторый момент времени $x^0 + dx^0_1$ (величина $dx^0_1$ отрицательна). Как только свет попадет в точку A, сразу отразим его. Допустим, что свет вернулся в точку B в момент времени $x^0 + dx^0_2$. Поскольку для света $ds^2 = 0$, то изменение наблюдаемого времени в обоих случаях должно удовлетворять уравнению

$$g_{00}\big(dx^0_{1,2}\big)^2 + 2g_{0\mu} dx^0_{1,2} dx^\mu + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения:

$$dx_1^0 = \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0\mu}dx^\mu - \sqrt{(g_{0\mu}g_{0\nu} - g_{\mu\nu}g_{00})dx^\mu dx^\nu}\right],$$

$$dx_2^0 = \frac{1}{g_{00}}\left[-g_{0\mu}dx^\mu + \sqrt{(g_{0\mu}g_{0\nu} - g_{\mu\nu}g_{00})dx^\mu dx^\nu}\right].$$

Поскольку мы предположили, что $g_{00} > 0$ и метрика $g_{\mu\nu}$ отрицательно определена, то отсюда вытекает, что $dx_2^0 > 0$, а $dx_1^0 < 0$.

Определение. Назовем событие в точке B *одновременным* событию $\mathrm{A} = \{x^0, x^\mu\}$, если его временная координата равна $x^0 + \Delta x^0$, где

$$\Delta x^0 := \frac{dx_1^0 + dx_2^0}{2} = -\frac{g_{0\mu}dx^\mu}{g_{00}},$$

т.е. лежит посередине между $x^0 + dx_2^0$ и $x^0 + dx_1^0$.

Таким образом можно синхронизировать часы, расположенные в различных, но близких точках пространства. Этот процесс можно продолжить вдоль произвольной кривой в пространстве. Конечно, данная процедура синхронизации часов зависит от выбора системы координат (нековариантна) и зависит также от выбора кривой, соединяющей две точки пространства-времени.

Рассмотрим замкнутую кривую $\gamma$ в пространстве-времени с началом и концом в точке A. Произведем синхронизацию часов вдоль кривой $\gamma$ описанным выше способом. Тогда после возвращения в точку A временна́я координата получит приращение

$$\Delta x^0 := -\oint_\gamma \frac{g_{0\mu}dx^\mu}{g_{00}}.$$

Отсюда следует, что синхронизация часов в общем случае невозможна, так как приращение $\Delta x^0$ в точке A может быть отлично от нуля. Кроме того, если мы хотим синхронизировать часы во всей области пространства-времени $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, которая покрывается данной системой координат, то равенство $\Delta x^0 = 0$ должно также выполняться для любой замкнутой кривой $\gamma$, целиком лежащей в $\mathbb{U}$. Отсюда вытекает

Предложение 7.12.2. *Для того чтобы в выбранной системе координат $x^\alpha$, где $x^0$ – время и все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны, покрывающей некоторую область $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, можно было синхронизировать часы во всей области $\mathbb{U}$ необходимо и достаточно чтобы $g_{0\mu} = 0$.*

Если в некоторой области смешанные компоненты метрики равны нулю, $g_{0\mu} = 0$, то часы можно синхронизировать. В этом случае одновременными будут те события, которые происходят при одинаковом значении наблюдаемого времени $x_0$.

Вернемся к рассмотрению синхронной системы координат и докажем теорему существования.

Предложение 7.12.3. *Пусть задано пространство-время $\mathbb{M}$ с метрикой лоренцевой сигнатуры. Тогда в некоторой окрестности каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует система координат, в которой метрика имеет блочно-диагональный вид* (7.175).

Доказательство. Выберем в многообразии $\mathbb{M}$ произвольную достаточно гладкую пространственноподобную гиперповерхность $\mathbb{N}$, содержащую точку $x \in \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Пусть $y^\mu$ – некоторая система координат на гиперповерхности в окрестности точки $x$. Построим на $\mathbb{N}$ векторное поле $n$, перпендикулярное к гиперповерхности. Через каждую точку $y \in \mathbb{N}$ в направлении

$n$ проведем экстремаль в обоих направлениях. Мы уже знаем, что такая экстремаль существует и единственна (см. раздел 3). Поскольку гиперповерхность пространственноподобна, то векторное поле и экстремали времениподобны. Выберем в качестве канонического параметра вдоль каждой экстремали ее длину $t$ таким образом, чтобы гиперповерхность $\mathbb{N}$ задавалась уравнением $t = 0$. Тогда в некоторой окрестности $\mathbb{U}$ гиперповерхности, $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, будет определена система координат $y = \{y^0 := t, y^\mu\} \in \mathbb{U}$. Это и есть искомая синхронная система координат.

Покажем это. По построению, координатная кривая $\{y^0 = t, y^\mu = \mathsf{const}\}$, $t \in \mathbb{R}$, является экстремалью. Ее вектор скорости в построенной системе координат имеет одну отличную от нуля компоненту $\dot y^\alpha = \delta^\alpha_0$. Поскольку экстремаль удовлетворяет уравнению

$$\ddot y^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot y^\beta \dot y^\gamma,$$

то в построенной системе координат на метрику наложены условия $\Gamma_{00}{}^\alpha = 0$. Опустив индекс $\alpha$, получим уравнения на компоненты метрики:

$$\partial_0 g_{0\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{00} = 0. \qquad (7.177)$$

Поскольку в качестве параметра вдоль экстремали выбрана ее длина, то касательный вектор $\partial_0$ имеет единичную длину. Следовательно, в построенной системе координат $g_{00} = 1$. Тогда уравнения (7.177) примут вид $\partial_0 g_{0\alpha} = 0$, т.е. компоненты $g_{0\mu}$ не зависят от времени. Кроме того, вектор скорости по построению перпендикулярен гиперповерхности на $\mathbb{N}$. Это значит, что в начальный момент времени $t$ пространственно-временны́е компоненты метрики равны нулю, $g_{0\mu}(t = 0) = 0$. Поскольку они не зависят от времени, то это равенство выполнено всюду в $\mathbb{U}$. Тем самым построенная система координат является синхронной.

Ниже мы докажем обратное утверждение: если метрика имеет блочно-диагональный вид (7.175), то координатные линии, соответствующие времени, являются экстремалями. Это значит, что единственный произвол при построении синхронной системы отсчета – это выбор пространственного сечения $\mathbb{N}$, которое может быть произвольно, и выбор пространственных координат на $\mathbb{N}$.

Замечание. Если в качестве исходной гиперповерхности $\mathbb{N}$ для построения координат выбрать времениподобную гиперповерхность, то метрика примет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix},$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика лоренцевой сигнатуры на сечениях $x^0 = \mathsf{const}$. Вообще говоря, построенная система координат не зависит от сигнатуры метрики. Аналогичные системы координат рассматривались еще Гауссом в римановой геометрии.

Замечание. Построение синхронной системы координат начиналось с выбора гиперповерхности $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$, которая имеет размерность $n-1$. Аналогичные системы координат можно строить, стартуя с подмногообразия $\mathbb{N}$ произвольной размерности, $0 \leqslant \dim\mathbb{N} < n$. Детали построения таких систем координат, которые названы полугеодезическими, можно найти в [82]. В частном случае, когда все экстремали стартуют из одной точки, $\dim\mathbb{N} = 0$, получаем нормальные координаты, рассмотренные в разделе 3.9.

Определение. Сечения пространства-времени в синхронной системе координат $x^0 = t = \mathsf{const}$ образуют семейство гиперповерхностей, которые называются (*геодезически*) *параллельными* друг другу.

Для римановых многообразий понятие экстремали и геодезической совпадают. Поэтому построенная система координат иногда называется *полугеодезической*. Мы будем использовать принятый в физике термин "временна́я калибровка" для метрики.

Обратная метрика во временно́й калибровке имеет вид

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{7.178}$$

где $g^{\mu\nu}$ – метрика, обратная к $g_{\mu\nu}$. Ясно, что требование блочной диагональности метрики (7.175) эквивалентно требованию блочной диагональности обратной метрики.

Чтобы найти явный вид преобразований координат к синхронной системе отсчета $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$, необходимо проинтегрировать уравнения экстремалей с заданными начальными условиями на гиперповерхности $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Это – обычная механическая задача, которую можно решить, интегрируя уравнение Гамильтона–Якоби (см. раздел 6.1.7). Обрисуем кратко этот подход.

При преобразовании к синхронной системе координат $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$ временна́я компонента обратной метрики преобразуется по тензорному закону. Следовательно, функция перехода $y^0(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$1 = g^{\alpha\beta} \frac{\partial y^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^0}{\partial x^\beta}. \tag{7.179}$$

Это уравнение на функцию $y^0(x)$ совпадает с укороченным уравнением Гамильтона–Якоби (3.58). Поэтому временную координату $y^0$ можно отождествить с функцией действия точечной частицы. Общий интеграл укороченного уравнения Гамильтона–Якоби зависит от $n$ постоянных. Поскольку функция действия определена с точностью до добавления постоянной, то одна из постоянных интегрирования аддитивна. Поэтому общий интеграл уравнения Гамильтона–Якоби можно представить в виде

$$y^0 = f(x, c) + A(c),$$

где $f$ – некоторая функция от точки многообразия и $n - 1$ постоянных интегрирования $c = \{c^\mu\} = (c^1, \dots, c^{n-1})$, а $A(c)$ – аддитивная постоянная, которую можно рассматривать как некоторую функцию постоянных $c$. Уравнения $y^0 = \mathsf{const}$ определяют гиперповерхность $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Локально решение этого уравнения можно представить в виде $x^\alpha = x^\alpha(c)$. То есть постоянные $c$ образуют систему координат на $\mathbb{N}$. Временны́е координатные линии $y^0$ определяются уравнениями $\partial y^0 / \partial c^\mu = 0$ или

$$\frac{\partial f}{\partial c^\mu} = -\frac{\partial A}{\partial c^\mu}.$$

Если зафиксировать точку на гиперповерхности $\mathbb{N}$ (постоянные $c$), то в правой части данной системы уравнений будут стоять некоторые константы. Соответствующее решение системы $x^\mu = x^\mu(x^0)$ определит кривую, где роль параметра вдоль кривой играет координата $x^0$, проходящую через данную точку $c \in \mathbb{N}$. Эти кривые являются траекториями частиц и, следовательно, экстремалями.

Из вида обратной метрики (7.178) следует уравнение

$$\delta^{0\gamma} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial y^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\beta}, \qquad \gamma = 0, \dots, n-1,$$

которое обобщает уравнение (7.179). Умножив его на матрицу Якоби преобразования координат, получим равенство

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial y^0}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial x^\beta}{\partial y^0}. \tag{7.180}$$

Вектор нормали к гиперповерхностям имеет вид

$$n=g^{\alpha\beta}\frac{\partial y^0}{\partial x^\beta}\partial_\alpha.$$

С учетом равенства (7.180) отсюда следует, что вектор нормали касателен к координатным линиям $y^0$:

$$\frac{\partial}{\partial y^0}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^0}\partial_\alpha=g^{\alpha\beta}\frac{\partial y^0}{\partial x^\beta}\partial_\alpha.$$

Таким образом, координатные линии $y^0$ являются экстремалями, перпендикулярными к гиперповерхностям $y^0=\mathsf{const}$.

Перейдем к вычислению явного вида основных геометрических объектов в синхронной системе координат. Прямые вычисления приводят к следующим выражениям для символов Кристоффеля (2.15):

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{00}{}^0=\Gamma_{00}{}^\mu=\Gamma_{0\mu}{}^0=\Gamma_{\mu0}{}^0=0,\\
&\Gamma_{0\mu}{}^\nu=\Gamma_{\mu0}{}^\nu=\frac12 g^{\nu\rho}\partial_0 g_{\mu\rho},\\
&\Gamma_{\mu\nu}{}^0=-\frac12\partial_0 g_{\mu\nu},\\
&\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho=\hat\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho,
\end{aligned} \tag{7.181}$$

где $\hat\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho$ – символы Кристоффеля на пространственноподобном сечении $x^0=\mathsf{const}$, построенные только по метрике $g_{\mu\nu}$. В настоящем разделе знак тильды, который мы используем для обозначения геометрических объектов римановой геометрии при нулевых тензорах кручения и неметричности, для простоты, опущен.

Несложные вычисления приводят к следующим выражениям для компонент тензора кривизны со всеми опущенными индексами

$$\begin{aligned}
&R_{0\mu0\nu}=\frac12\partial^2_{00}g_{\mu\nu}-\frac14 g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma},\\
&R_{0\mu\nu\rho}=-R_{\mu0\nu\rho}=\frac12(\hat\nabla_\nu\partial_0 g_{\mu\rho}-\hat\nabla_\rho\partial_0 g_{\mu\nu}),\\
&R_{\mu\nu\rho\sigma}=\hat R_{\mu\nu\rho\sigma}+\frac14(\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma}-\partial_0 g_{\nu\rho}\partial_0 g_{\mu\sigma}),
\end{aligned} \tag{7.182}$$

где $\hat\nabla_\nu$ обозначает ковариантную производную на пространственноподобном сечении

$$\hat\nabla_\nu\partial_0 g_{\mu\rho}:=\partial_\nu\partial_0 g_{\mu\rho}-\hat\Gamma_{\nu\mu}{}^\sigma\partial_0 g_{\sigma\rho}-\hat\Gamma_{\nu\rho}{}^\sigma\partial_0 g_{\mu\sigma},$$

и $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор кривизны пространственноподобного сечения $t = \mathsf{const}$, построенный только по метрике $g_{\mu\nu}$. Свертка с обратной метрикой дает соответствующие тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial^2_{00} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma},\\
R_{0\mu} &= R_{\mu 0} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}(\hat{\nabla}_\mu \partial_0 g_{\nu\rho} - \hat{\nabla}_\rho \partial_0 g_{\nu\mu}),\\
R_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^2_{00} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\partial_0 g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\rho\sigma},\\
R &= \hat{R} + g^{\mu\nu}\partial^2_{00} g_{\mu\nu} - \frac{3}{4} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}\partial_0 g_{\mu\rho}\partial_0 g_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}(g^{\mu\nu}\partial_0 g_{\mu\nu})^2.
\end{aligned} \tag{7.183}$$

Уравнения для экстремалей $x^\alpha(\tau)$ во временно́й калибровке имеют вид

$$\ddot{x}^0 = \frac{1}{2}\partial_0 g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \tag{7.184}$$

$$\ddot{x}^\mu = -g^{\mu\nu}\partial_0 g_{\nu\rho}\dot{x}^0\dot{x}^\rho - \hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho, \tag{7.185}$$

где точка обозначает дифференцирование по каноническому параметру $\tau$. Из вида уравнений сразу следует

Предложение 7.12.4. *Если выбрана синхронная система координат, то временны́е координатные линии $\{x^0 = t, x^\mu = \mathsf{const}\}$ являются экстремалями.*

Это утверждение уже было доказано другим способом при рассмотрении укороченного уравнения Гамильтона–Якоби (7.179).

Из уравнений для времениподобных экстремалей, отличных от координатных линий $x^0$, можно исключить временну́ю компоненту скорости. Для этого воспользуемся законом сохранения (3.32)

$$(\dot{x}^0)^2 - \dot{\boldsymbol{x}}^2 = C_0 = \mathsf{const}, \tag{7.186}$$

где $\dot{\boldsymbol{x}}^2 := -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, и исключим производную $\dot{x}^0$ из уравнения (7.185). В результате получим замкнутую систему уравнений только для пространственных координат экстремали:

$$\ddot{x}^\mu = -g^{\mu\nu}\partial_0 g_{\nu\rho}\dot{x}^\rho\sqrt{|C_0 + \dot{\boldsymbol{x}}^2|} - \hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho.$$

Неоднозначность при извлечении корня несущественна, так как соответствует обращению времени $x^0 \mapsto -x^0$. Отсюда следует, что во временно́й калибровке пространственные компоненты экстремали $\{x^\mu(t)\}$ в общем случае не являются экстремалями для пространственной части метрики $g_{\mu\nu}$. В частном случае, когда пространственная метрика $g_{\mu\nu}$ не зависит от времени $x^0$, проекция экстремали $\{x^\alpha(\tau)\} \mapsto \{c^0, x^\mu(\tau)\}$ на пространственное сечение $x^0 = c^0 = \mathsf{const}$ является экстремалью для метрики $g_{\mu\nu}$ на этом сечении.

Рассмотрим еще один способ записи уравнений для экстремалей. Пусть $\dot{x}^0 \neq 0$. Тогда уравнения для экстремалей во временно́й калибровке (7.184), (7.185) можно переписать в эквивалентном виде, заменив канонический параметр $\tau$ на наблюдаемое время $x^0$. Другими словами, рассмотрим траектории $x^\mu(x^0)$. Поскольку

$$\begin{aligned}
\partial_0 x^\mu &= \frac{\dot{x}^\mu}{\dot{x}^0},\\
\partial^2_{00} x^\mu &= \frac{\ddot{x}^\mu\dot{x}^0 - \dot{x}^\mu\ddot{x}^0}{(\dot{x}^0)^3},
\end{aligned}$$

то, воспользовавшись уравнениями для экстремалей, получим равенство

$$\partial^2_{00}x^\mu = -\hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu\partial_0x^\nu\partial_0x^\rho - g^{\mu\nu}\partial_0g_{\nu\rho}\partial_0x^\rho - \frac{1}{2}\partial_0x^\mu\partial_0g_{\nu\rho}\partial_0x^\nu\partial_0x^\rho. \tag{7.187}$$

Это и есть уравнение для траекторий $x^\mu(x^0)$. Зависимость канонического параметра $\tau$ от наблюдаемого времени $x^0$ можно определить из закона сохранения (7.186), который можно переписать в виде

$$(\dot{x}^0)^2(1 + g_{\mu\nu}\partial_0x^\mu\partial_0x^\nu) = C_0.$$

Отсюда для ненулевых экстремалей, $C_0 \neq 0$, получаем выражение для производной

$$\dot{x}^0 = \pm\sqrt{\frac{C_0}{1 + g_{\mu\nu}\partial_0x^\mu\partial_0x^\nu}}.$$

Это уравнение позволяет определить зависимость $x^0(\tau)$ для заданной траектории.

Для нулевых экстремалей $C_0 = 0$ и $1 + g_{\mu\nu}\partial_0x^\mu\partial_0x^\nu = 0$. Последнее условие согласуется с уравнениями (7.187). Действительно, прямые вычисления приводят к равенству

$$\partial_0(1 + g_{\mu\nu}\partial_0x^\mu\partial_0x^\nu) = -(1 + g_{\mu\nu}\partial_0x^\mu\partial_0x^\nu)\partial_0g_{\rho\sigma}\partial_0x^\rho\partial_0x^\sigma.$$

То есть, если условие $1+g_{\mu\nu}\partial_0x^\mu\partial_0x^\nu = 0$ выполнено в начальный момент времени, то оно будет также выполнено во все последующие моменты. Это значит, что для нулевых экстремалей зависимость $x^0(\tau)$ не определяется уравнениями (7.187) и может быть произвольна. В этом случае канонический параметр можно просто отождествить с временем: $\tau := x^0$.

Теперь покажем, что синхронная система координат в общей теории относительности при наличии материи не может быть статична в том смысле, что ее пространственные компоненты $g_{\mu\nu}$ обязательно зависят от $x^0$. Для определенности рассмотрим четырехмерное пространство-время. С этой целью введем обозначение для производных по времени от компонент метрики

$$p_{\mu\nu} := \partial_0g_{\mu\nu}.$$

Это нечто, напоминающее импульсы, сопряженные к пространственным компонентам метрики. След новых переменных равен производной от определителя метрики

$$p := g^{\mu\nu}p_{\mu\nu} = \partial_0[\ln(-g)], \qquad g := \det g_{\alpha\beta},$$

так как во временно́й калибровке $\det g_{\alpha\beta} = \det g_{\mu\nu}$. В новых переменных компоненты тензора Риччи (7.183) примут вид:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}\partial_0p + \frac{1}{4}p_{\mu\nu}p^{\mu\nu}, \\ R_{0\mu} &= \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\mu p - \frac{1}{2}\hat{\nabla}_\nu p_\mu{}^\nu, \\ R_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_0p_{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\mu{}^\rho p_{\nu\rho} + \frac{1}{4}p_{\mu\nu}p. \end{aligned} \tag{7.188}$$

Запишем уравнения Эйнштейна (7.3) без космологической постоянной

$$R_{00} = -\frac{1}{2\kappa}\left(T_{\text{м}00} - \frac{1}{2}T_{\text{м}}\right), \tag{7.189}$$

$$R_{0\mu} = -\frac{1}{2\kappa}T_{\text{м}0\mu}, \tag{7.190}$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa}\left(T_{\text{м}\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\text{м}}\right). \tag{7.191}$$

Эти уравнения для непрерывной среды с тензором энергии-импульса (7.126) принимают вид

$$R_{00} = -\frac{1}{2\kappa}\left((\mathcal{E}+\mathcal{P})(u_0)^2 - \frac{1}{2}\mathcal{E} + \frac{1}{2}\mathcal{P}\right), \tag{7.192}$$

$$R_{0\mu} = -\frac{1}{2\kappa}(\mathcal{E}+\mathcal{P})u_0u_\mu, \tag{7.193}$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa}\left((\mathcal{E}+\mathcal{P})u_\mu u_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{E} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{P}\right). \tag{7.194}$$

Предложение 7.12.5. *Пусть пространство-время заполнено непрерывной средой с положительной плотностью энергии и давлением:* $\mathcal{E} > 0$ *и* $\mathcal{P} > 0$. *Тогда уравнения Эйнштейна* (7.192)–(7.194) *без космологической постоянной в синхронной системе координат не имеют статических решений.*

Доказательство. В синхронной системе координат $u^2 = (u_0)^2 + g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 1$, и поэтому $u_0 \geqslant 1$. Статичность метрики означает, что $p_{\mu\nu} = 0$. В этом случае $R_{0\mu} = 0$, и из уравнения (7.193) следует равенство $u_\mu = 0$. Следовательно, $u_0 = 1$. Тогда уравнение (7.192) примет вид

$$0 = \frac{1}{2}\mathcal{E} + \frac{3}{2}\mathcal{P},$$

что противоречит сделанным предположениям.

Предложение 7.12.6. *Вакуумные уравнения Эйнштейна без космологической постоянной в синхронной системе координат имеют только плоские статические решения, для которых тензор кривизны равен нулю.*

Доказательство. При нулевом тензоре энергии-импульса материи, $T_{\text{м}\alpha\beta} = 0$, уравнения (7.189) и (7.190) для $p_{\mu\nu} = 0$ удовлетворяются автоматически. Уравнение (7.194) сводится к уравнению

$$\hat{R}_{\mu\nu} = 0.$$

Если пространство трехмерно, то полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется тензором Риччи и, следовательно, полный тензор кривизны пространства равен нулю, $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Теперь из выражения для компонент тензора кривизны (7.182) следует, что полный тензор кривизны пространства-времени также обращается в нуль, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. В свою очередь, это значит, что локально существует такая система координат, в которой метрика четырехмерного пространства-времени является лоренцевой, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Это и означает тривиальность решений уравнений Эйнштейна. Глобально соответствующее пространство-время представляет либо пространство Минковского, либо все возможные торы или цилиндры, получающиеся из пространства Минковского путем отображения всех или части декартовых координат на окружность.

В заключение раздела рассмотрим еще одно свойство решений уравнений Эйнштейна в синхронной системе отсчета. Предположим, что выполнено сильное энергетическое условие (7.140). Тогда из уравнения (7.192) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\partial_0 p + \frac{1}{4}p_\mu{}^\nu p_\nu{}^\mu \leqslant 0.$$

Справедливо алгебраическое неравенство

$$p_\mu{}^\nu p_\nu{}^\mu \geqslant \frac{1}{3}p^2,$$

которое нетрудно доказать путем диагонализации матрицы $p_\mu{}^\nu$. Поэтому должно быть выполнено неравенство

$$\partial_0 p + \frac{1}{6}p^2 \leqslant 0.$$

Перепишем его в виде

$$\partial_0 \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{6}. \tag{7.195}$$

Допустим, что в некоторый момент времени $x^0 := t$ величина $1/p$ положительна. Тогда при уменьшении времени $t$ за конечное время функция $1/p$ обратится в нуль, поскольку производная больше нуля. Это означает, что модуль определителя метрики $|g|$ обращается в нуль. Допустим, что это происходит в момент времени $t_0$. Вблизи этой точки положим

$$-g = C(t - t_0)^k, \qquad C = \mathsf{const},$$

с некоторым показателем степени $k \in \mathbb{R}_+$. Тогда неравенство (7.195) ограничивает показатель степени $k \leqslant 6$. Отсюда следует, что модуль определителя метрики обращается в нуль не быстрее, чем $(t - t_0)^6$.

Если в начальный момент времени $t = 0$ величина $1/p$ отрицательна, то то же самое происходит при положительных временах.

Обращение в нуль определителя метрики отнюдь не означает, что возникает сингулярность в пространстве-времени. Например, определитель евклидовой метрики в сферической системе координат равен нулю в начале координат. Как правило, обращение в нуль определителя метрики связано с выбором системы отсчета. Выше было показано, что синхронная система координат возникает при построении семейства экстремалей, которые ортогональны некоторой пространственноподобной гиперповерхности. В общем случае на конечном расстоянии эти экстремали начинают пересекаться, образуя каустические поверхности. В точках пересечения экстремалей система координат вырождается, что может приводить к обращению в нуль определителя метрики.

**7.12.3. Калибровка светового конуса.** Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M} = n$, на котором задана метрика $g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры.

Определение. Система координат, в которой метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & g_{\mu\nu} & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \alpha, \beta &= 0, 1, \dots, n-1, \\ \mu, \nu &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \tag{7.196}$$

называется калибровкой *светового конуса*.

Ниже мы докажем, что локально калибровка светового конуса существует. При этом $n$ произвольных функций, параметризующих преобразования координат, используются для фиксирования $n$ компонент метрики:

$$g_{00} = g_{02} = g_{03} = \dots = g_{0\,n-1} = 0, \qquad g_{01} = 1.$$

Для построения, системы координат, соответствующей калибровке светового конуса, введем несколько определений. Допустим, что гиперповерхность $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$ задана параметрически

$x^\alpha = x^\alpha(y^\mu)$, где $y^\mu$ – координаты на гиперповерхности. Вложение $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$ индуцирует на гиперповерхности метрику

$$ds^2 = h_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} dy^\mu dy^\nu. \tag{7.197}$$

В этом выражении индуцированная метрика $h_{\mu\nu}$ в общем случае не совпадает с блоком $g_{\mu\nu}$, входящим в выражение (7.196).

Определение. Если индуцированная метрика $h_{\mu\nu}$ на гиперповерхности невырождена, то гиперповерхность называется *неизотропной*. В противном случае, если $\det h_{\mu\nu} = 0$, гиперповерхность называется *изотропной*.

В дальнейшем мы увидим, что индуцированная метрика может быть вырождена только тогда, когда метрика на исходном многообразии $\mathbb{M}$ не является положительно или отрицательно определенной. Например, она может иметь лоренцеву сигнатуру.

Набор $n-1$ векторных полей на $\mathbb{S}$, которые нумеруются индексом $\mu$,

$$e_\mu := \partial_\mu x^\alpha \partial_\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \partial_\alpha$$

образуют базис касательного пространства к гиперповерхности $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Вектор $m = m^\alpha \partial_\alpha$ ортогонален к гиперповерхности, если его скалярное произведение со всеми касательными векторами равно нулю:

$$(m, e_\mu) := g_{\alpha\beta} m^\alpha \partial_\mu x^\beta = m_\alpha \partial_\mu x^\alpha = 0, \qquad \forall \mu = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{7.198}$$

где скобки означают скалярное произведение. Поскольку ранги матриц $g_{\alpha\beta}$ и $\partial_\mu x^\alpha$ равны, соответственно, $n$ и $n-1$, то ранг матрицы $g_{\alpha\beta}\partial_\mu x^\beta$ равен $n-1$. Это означает, что система линейных однородных уравнений на компоненты нормального вектора $m^\alpha$ имеет единственное нетривиальное решение с точностью до умножения на произвольную отличную от нуля постоянную.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее

Предложение 7.12.7. *Нормаль к гиперповерхности изотропна тогда и только тогда, когда поверхность изотропна.*

Доказательство. Индуцированную метрику $h_{\mu\nu}$ (7.197) можно рассматривать как произведение двух прямоугольных матриц $\partial_\mu x^\alpha$ и $g_{\alpha\beta}\partial_\mu x^\beta$ размеров, соответственно, $(n-1) \times n$ и $n \times (n-1)$. Тогда из формулы Бине–Коши следует, что

$$\det h_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=1}^{n} \det{}_\gamma(\partial_\mu x^\alpha) \det{}_\gamma(g_{\alpha\beta}\partial_\mu x^\beta),$$

где $\det_\gamma$ обозначает определитель квадратной матрицы, полученной из матрицы размера $(n-1) \times n$ вычеркиванием $\gamma$-го столбца. Поскольку $m_\alpha \partial_\mu x^\alpha = 0$, то между столбцами матрицы $\partial_\mu x^\alpha = 0$ имеется линейная зависимость. Предположим, что некоторая компонента ковектора $\{m_\alpha\}$ отлична от нуля, например, $m_{\delta_1} \neq 0$. Тогда, в силу свойств определителя и линейной зависимости столбцов, справедливо равенство

$$\det{}_\gamma(\partial_\mu x^\alpha) = m_\gamma \frac{(-1)^{\delta_1 - \gamma} \det_{\delta_1}(\partial_\mu x^\alpha)}{m_{\delta_1}}.$$

Аналогичная формула имеет место и для второго определителя под знаком суммы

$$\det{}_\gamma(g_{\alpha\beta}\partial_\mu x^\beta) = m^\gamma \frac{(-1)^{\delta_2-\gamma}\det{}_{\delta_2}(g_{\alpha\beta}\partial_\mu x^\beta)}{m^{\delta_2}}$$

для некоторого индекса $\delta_2$. Таким образом, определитель индуцированной метрики пропорционален длине нормального вектора к гиперповерхности

$$\det h_{\mu\nu} = (-1)^{\delta_1+\delta_2}\frac{\det{}_{\delta_1}(\partial_\mu x^\alpha)\det{}_{\delta_2}(g_{\alpha\beta}\partial_\mu x^\beta)}{m_{\delta_1}m^{\delta_2}} m_\gamma m^\gamma,$$

где в правой части предполагается суммирование только по индексу $\gamma$. Индексы $\delta_1$ и $\delta_2$ фиксированы и выбраны таким образом, что $m_{\delta_1} \neq 0$ и $m^{\delta_2} \neq 0$. Поскольку коэффициент пропорциональности между $\det h_{\mu\nu}$ и $m_\gamma m^\gamma$ отличен от нуля, то из этого равенства следует утверждение предложения.

Рассмотрим некоторые свойства изотропных гиперповерхностей.

Допустим, что изотропная гиперповерхность $\mathbb{S}$ задана уравнением

$$W(x) = \mathsf{const}, \tag{7.199}$$

где $W(x)$ – некоторая достаточно гладкая функция координат. При этом мы считаем, что различным значениям постоянной соответствуют различные непересекающиеся изотропные гиперповерхности. Обозначим, как и ранее, координаты на $\mathbb{S}$ через $y^\mu$. То есть функции $x^\alpha(y)$ удовлетворяют уравнению (7.199) для всех $y$. Продифференцируем это уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}e_\mu{}^\alpha = 0.$$

Сравнение полученного равенства с определением нормали (7.198) показывает, что вектор нормали к гиперповерхности имеет вид

$$m = m^\alpha\partial_\alpha = g^{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial x^\beta}\partial_\alpha. \tag{7.200}$$

Поскольку вектор нормали к изотропной гиперповерхности имеет нулевую длину, то выполнено равенство

$$m^2 = g^{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\frac{\partial W}{\partial x^\beta} = 0. \tag{7.201}$$

Таким образом, доказано

Предложение 7.12.8. *Поверхность $\mathbb{S}$, определяемая уравнением* (7.199), *изотропна тогда и только тогда, когда выполнено равенство* (7.201).

Следующее утверждение не имеет аналога в римановой геометрии.

Предложение 7.12.9. *Нормальный вектор к изотропной поверхности $\mathbb{S}$ является также и касательным к ней.*

Доказательство. Дополним координаты на гиперповерхности до системы координат в $\mathbb{M}$ еще одной координатой $y^0 := W$. В новой системе координат гиперповерхности определяются условиями $y^0 = \mathsf{const}$, и уравнение (7.201) примет вид $g^{00} = 0$. Тогда нулевая компонента нормального вектора (7.200) обратится в нуль, $m^0 = 0$, так как $\partial W/\partial y^\mu = 0$. Это значит, что нормальный вектор является также и касательным.

На самом деле сделанное утверждение очевидно. Действительно, вектор $k$ будет касательным к гиперповерхности $\mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда его скалярное произведение с вектором нормали равно нулю, $(k, m) = 0$. Это и означает, что вектор нормали $m$ является касательным к $\mathbb{S}$, так как $m^2 = 0$.

Рассмотрим интегральные кривые $x(u)$ векторного поля $m$:

$$\dot{x}^\alpha = m^\alpha, \qquad m^\alpha := g^{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial x^\beta}, \tag{7.202}$$

где точка обозначает дифференцирование по параметру $u \in \mathbb{R}$. Эти кривые изотропны, так как выполнено равенство (7.201). Кроме того, они перпендикулярны изотропной поверхности $\mathbb{S}$. С другой стороны, вдоль каждой кривой выполнено равенство

$$\frac{dW}{du} = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{du} = g^{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\frac{\partial W}{\partial x^\beta} = 0.$$

Отсюда следует, что, если интегральная кривая $x(u)$ начинается на изотропной поверхности $\mathbb{S}$, то она целиком лежит на этой поверхности.

Можно сказать по-другому. Поскольку векторное поле $m$ касательно к $\mathbb{S}$, то его интегральные кривые лежат на $\mathbb{S}$.

Вычислим теперь ускорение данной кривой:

$$\dot{x}^\alpha \nabla_\alpha \dot{x}^\beta = \dot{x}^\alpha g^{\beta\gamma}\nabla_\alpha \frac{\partial W}{\partial x^\gamma} = g^{\alpha\delta}\frac{\partial W}{\partial x^\delta} g^{\beta\gamma}\nabla_\alpha\frac{\partial W}{\partial x^\gamma}.$$

С другой стороны, продифференцируем определяющее уравнение (7.201):

$$\nabla_\alpha\left(g^{\beta\gamma}\frac{\partial W}{\partial x^\beta}\frac{\partial W}{\partial x^\gamma}\right) = 2g^{\beta\gamma}\frac{\partial W}{\partial x^\beta}\nabla_\alpha\frac{\partial W}{\partial x^\gamma} = 0.$$

Поскольку $\nabla_\alpha\nabla_\gamma W = \nabla_\gamma\nabla_\alpha W$, то отсюда вытекает, что ускорение кривой (7.202) равно нулю, $\dot{x}^\alpha\nabla_\alpha\dot{x}^\beta = 0$. Таким образом, интегральные кривые векторного поля $m$ являются экстремалями. Отсюда следует

Предложение 7.12.10. *Все изотропные (нулевые) экстремали, которые касаются изотропной поверхности $\mathbb{S}$ хотя бы в одной точке, целиком лежат на этой поверхности.*

Теперь докажем существование калибровки светового конуса.

Предложение 7.12.11. *Пусть задано пространство-время $\mathbb{M}$ с метрикой лоренцевой сигнатуры. Тогда в некоторой окрестности каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует система координат, в которой метрика имеет вид* (7.196).

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 7.12.3. Выберем произвольную пространственноподобную поверхность $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$ с координатами $y^\mu$. В каждой точке $y \in \mathbb{N}$ строим нормальный вектор $n$. Он временниподобен. Выберем координаты $y^\mu$ на $\mathbb{N}$ таким образом, чтобы вектор

$$e_1 := \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^1}\partial_\alpha$$

имел единичную длину, $e_1^2 = -1$, и был перпендикулярен всем остальным касательным векторам:

$$(e_1, e_{\text{A}}) = 0, \qquad \text{A} = 2, \dots, n-1.$$

Это всегда возможно в силу предложения 7.12.3. То есть мы фиксируем временну́ю калибровку на поверхности $\mathbb{N}$. Затем строим вектор

$$m = n - e_1.$$

По построению, этот вектор определен на поверхности $\mathbb{N}$, имеет нулевую длину, $m^2 = 0$, перпендикулярен всем касательным векторам $e_{\mathrm{A}}$, и выполнено равенство $(m, e_1) = 1$. Другими словами, в каждом световом конусе в точке $y \in \mathbb{N}$ мы выбираем единственный вектор $m$, скалярное произведение которого с касательным вектором $e_1$ равно единице, а с остальными касательными векторами равно нулю.

Затем через каждую точку $y \in \mathbb{N}$ в направлении $m$ проводим экстремаль. Выбираем канонический параметр $y^0$ вдоль экстремалей таким образом, чтобы гиперповерхность $\mathbb{N}$ определялась уравнением $y^0 = 0$. Тогда в некоторой окрестности гиперповерхности $\mathbb{N}$ определена система координат $\{y^\alpha\} = \{y^0, y^\mu\}$.

По построению, координатные линии $y^0$ являются экстремалями. Поэтому на компоненты метрики в новой системе координат имеются ограничения (7.177). В рассматриваемом случае касательный вектор к координатной линии $y^0$ изотропен, и, следовательно, $g_{00} = 0$. Поэтому на компоненты метрики возникает уравнение (7.177), которое сводится к условию

$$\partial_0 g_{0\mu} = 0. \tag{7.203}$$

По построению, координаты $y^\mu$ на $\mathbb{N}$ и изотропный вектор $m$ выбраны таким образом, что на поверхности $\mathbb{N}$ выполнены условия:

$$g_{00} = 0, \qquad g_{01} = 1, \qquad g_{02} = g_{03} = \ldots = g_{0\,n-1} = 0.$$

Тогда из уравнений (7.203) следует, что эти условия будут выполнены во все последующие моменты времени. Следовательно, система координат, в которой выполнена калибровка светового конуса построена.

Аналогичное построение можно провести, если в качестве исходной поверхности $\mathbb{N}$ выбрать поверхность с метрикой лоренцевой сигнатуры.

Посмотрим теперь на построение калибровки светового конуса с точки зрения уравнения Гамильтона–Якоби. Предположим, что изотропная гиперповерхность $\mathbb{S}$ задана уравнением $W(x) = 0$. Тогда условие изотропности поверхности примет вид (7.201), которое должно быть выполнено на изотропной гиперповерхности $\mathbb{S}$. Изотропная гиперповерхность, задаваемая уравнением $W = 0$, является ни чем иным, как характеристикой волнового уравнения (3.59). Уравнение (7.201) представляет собой укороченное уравнение Гамильтона–Якоби для нулевых экстремалей, где $W(x)$ – укороченная функция действия.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W \partial_\beta \varphi = 0$$

на функцию $\varphi(x)$. Известно, что эта система имеет $n-1$ функционально независимых решений, которые обозначим через $\varphi^\mu(x)$, $\mu = 1, \ldots, n-1$. Среди этих решений содержится, очевидно, и $W(x)$. Не ограничивая общности, положим $\varphi^1(x) := W(x)$. Введем новую систему координат

$$y^0 := \psi(x), \quad y^\mu := \varphi^\mu(x),$$

где $\psi(x)$ – некоторая функция, функционально независимая от $\varphi^\mu(x)$, т.е.

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \neq 0$$

где $\{y^\alpha\} = \{y^0, y^\mu\}$. В новой системе координат компоненты обратной метрики примут вид

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta}.$$

По построению,

$$g'^{01} = g'^{10} = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha W \partial_\beta \psi \neq 0, \qquad g'^{1\mu} = g'^{\mu 1} = 0,$$

причем $g'^{01} \neq 0$, так как $\psi$ функционально независима от $\varphi^\mu$. Эту функцию всегда можно подобрать таким образом, что $g'^{01} = 1$. Таким образом, в новой системе координат обратная метрика примет вид

$$g'^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g'^{00} & 1 & g'^{0\text{в}} \\ 1 & 0 & 0 \\ g'^{\text{а}0} & 0 & g'^{\text{ав}} \end{pmatrix}, \qquad \text{а}, \text{в} = 2, 3, \dots, n-1.$$

Нетрудно проверить, что метрика $g'_{\alpha\beta}$, которая обратна к матрице $g'^{\alpha\beta}$, в новой системе координат имеет вид (7.196). Тем самым локальное существование калибровки светового конуса доказано еще раз. В этой калибровке изотропные гиперповерхности $\mathbb{S}$ задаются условиями $y^1 = \mathsf{const}$. Векторы $\partial_0$, касательные к координатным линиям $y^0$ и, следовательно, касательные также к изотропной гиперповерхности, имеют нулевую длину, $(\partial_0, \partial_0) = g_{00} = 0$. Метрика, индуцированная на гиперповерхностях $y^1 = \mathsf{const}$, имеет вид

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g'_{\text{ав}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad \text{а}, \text{в} = 2, 3, \dots, n-1,$$

и является, очевидно, вырожденной.

Вернемся к прежним обозначениям координат через $x^\alpha$ вместо $y^\alpha$. То есть будем считать, что в координатах $x^\alpha$ зафиксирована калибровка светового конуса, и метрика имеет вид (7.196), или

$$ds^2 = 2dx^0 dx^1 + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{7.204}$$

Наша интуиция основана на таких системах координат, в которых метрика диагональна. Поскольку в калибровке светового конуса метрика недиагональна, то полезно рассмотреть простой пример плоского пространства Минковского.

Пример 7.12.2. Рассмотрим трехмерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. В инерциальной (декартовой) системе отсчета $t, x, y$ метрика Лоренца имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2.$$

В плоскости $t, x$ можно ввести координаты светового конуса

$$u := \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x), \qquad v := \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x).$$

Рассмотрим более общее преобразование координат

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((2 - a)t + ax\big), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x), \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{7.205}$$

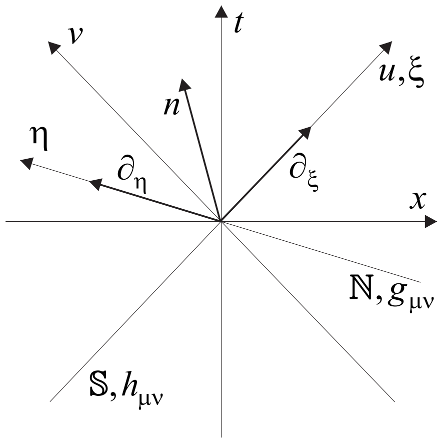


Рис. 7.3. Координаты $\xi,\eta$ в плоскости $t,x$

которое параметризуется одним вещественным параметром $a$. Эти координаты в плоскости $t,x$ показаны на рис. 7.3. На рисунке показаны конусные оси $v$ и $u$, которые определяются уравнениями, соответственно, $u=0$ и $v=0$. Ось $\xi$ совпадает с осью $u$. Показана также ось $\eta$ при $0<a<1$. В рассматриваемой системе координат, координата $\xi$ по-прежнему является конусной, а координата $\eta$ совпадает с конусной координатой $v$ только при $a=1$. Легко найти обратное преобразование координат:

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+a\eta),\qquad x=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\xi+(a-2)\eta\big).$$

Метрика Лоренца в координатах $(x^0,x^1,x^2):=(\xi,\eta,y)$ имеет вид

$$ds^2=2d\xi d\eta+2(a-1)d\eta^2-dy^2.$$

Компоненты метрики и ее обратной в координатах $\xi,\eta,y$ равны

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&2(a-1)&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}-2(a-1)&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, координаты $(x^0,x^1,x^2)=(\xi,\eta,y)$ задают калибровку светового конуса.

Отметим, что метрика $g_{\mu\nu}$ на плоскостях $\xi=\mathsf{const}$ является отрицательно определенной при $a<1$ и имеет лоренцеву сигнатуру при $a>1$.

В трехмерном пространстве Минковского существует два типа изотропных гиперповерхностей: плоскости и конусы (характеристики в примере 3.7.1). Изотропные плоскости – это все плоскости, имеющие угол $\pi/4$ с осью $t$.

Сравним координаты светового конуса данного примера при $0<a<1$ с системой координат, построенной в предложении (7.12.11) (см. рис.7.3). Пространственноподобная поверхность $\mathbb{N}$ натянута на векторы $\partial_\eta,\partial_y$ и определяется уравнением $x^0=\xi=0$. Изотропные поверхности $\mathbb{S}$ натянуты на векторы $\partial_\xi,\partial_y$ и определяются уравнениями $x^1=\eta=\mathsf{const}$. Вектор

$$\partial_\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_t+\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x$$

касается изотропной поверхности $\mathbb{S}$. Вектор

$$\partial_\eta=\frac{a}{\sqrt{2}}\partial_t-\frac{2-a}{\sqrt{2}}\partial_x$$

касается поверхности $\mathbb{N}$. Нормированный вектор $e_1$ пропорционален $\partial_\eta$:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1-a)}}\partial_\eta = \frac{a}{2\sqrt{1-a}}\partial_t - \frac{2-a}{2\sqrt{1-a}}\partial_x.$$

Нормированный вектор нормали $n$ к пространственноподобной поверхности $\mathbb{N}$ имеет вид

$$n = \frac{2-a}{2\sqrt{1-a}}\partial_t - \frac{a}{2\sqrt{1-a}}\partial_x.$$

Вычислим изотропный вектор $m$:

$$m := n - e_1 = \sqrt{1-a}\,\partial_t + \sqrt{1-a}\,\partial_x = \sqrt{2(1-a)}\,\partial_\xi.$$

Как и следовало ожидать, он пропорционален вектору $\partial_\xi$.

Рассмотренный пример показывает, что калибровка светового конуса (7.204) определена неоднозначно и может быть зафиксирована таким образом, что метрика $g_{\mu\nu}$ на гиперповерхностях $x^0 = \mathsf{const}$ будет либо отрицательно определена, либо иметь лоренцеву сигнатуру в произвольной конечной области $\mathbb{U}$.

## 7.13. О постановке задач в теории гравитации

Отметим специфику задач, возникающих при рассмотрении произвольного функционала действия, инвариантного относительно общих преобразований координат и содержащего метрику. Уравнения Эйлера–Лагранжа записываются и решаются в произвольной, но фиксированной системе координат, т.е. локальны. Допустим, что мы нашли какое-то решение уравнений Эйлера–Лагранжа в системе координат, совпадающей со всем $\mathbb{R}^n$. Поскольку исходное действие инвариантно относительно общих преобразований координат, то без потери общности можно отобразить все $\mathbb{R}^n$, и тем самым найденное решение, на ограниченную область, например, в открытый шар конечного радиуса. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли найденное решение продолжить, т.е. существует ли решение в большей области, сужение которого совпадает с уже найденным решением в шаре. Для ответа на этот вопрос необходимо инвариантное определение глобальности решения, которое дается через полноту геодезических и экстремалей.

В теории гравитации, основанной на аффинной геометрии, так же как и в общей теории относительности, понятие геодезической и экстремали является чрезвычайно важным, поскольку позволяет установить связь между локальными решениями уравнений движения и глобальными свойствами многообразий.

Определение. Назовем многообразие $\mathbb{M}$ с заданной аффинной геометрией, т.е. тройку $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$, *полным*, если любую геодезическую и экстремаль в $\mathbb{M}$ можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра в обе стороны. На практике часто локальное решение уравнений движения нельзя продолжить до полного решения, поскольку возможно появление сингулярностей. Назовем точку многообразия $\mathbb{M}$ *сингулярной*, если в этой точке по крайней мере одно скалярное поле, построенное из метрики и (или) аффинной связности обращается в бесконечность.

В этом определении важно, чтобы в сингулярной точке именно скалярная комбинация геометрических объектов обращалась в бесконечность, поскольку наряду с истинными сингулярностями могут существовать координатные сингулярности, связанные с неудачным выбором системы координат. Например, хорошо известна координатная особенность метрики на горизонте событий для решения Шварцшильда, от которой можно избавиться, перейдя, например, к системе координат Эддингтона–Финкельстейна или Крускала–Секереша (см. главу 17). Простейшими функциями, определяющими положение сингулярностей являются скалярная кривизна и квадрат тензора кручения, имеющие одинаковую размерность. Примером истинной сингулярности может служить черная дыра в решении Шварцшильда, в которой квадрат тензора кривизны в начале системы координат обращается в бесконечность.

В связи с возможным существованием сингулярностей оказывается полезным понятие максимально продолженного многообразия.

Определение. Многообразие с заданной аффинной геометрией назовем *максимально продолженным*, если любую геодезическую и экстремаль либо можно продолжить до бесконечного значения канонического параметра, либо они продолжаются до сингулярной точки при конечном значении канонического параметра. Соответствующую тройку $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ назовем *глобальным решением* в теории гравитации.

Слово "продолжение" в этом определении связано с тем, что в моделях математической физики, как правило, метрика и кручение сначала находятся только локально в какой-либо области как решение уравнений движения в заданной системе координат, а затем, если необходимо, это решение гладко продолжается в соседние области до тех пор, пока дальнейшее продолжение становится невозможным либо вследствие сингулярностей, либо в связи с тем, что полученное решение станет полным.

Важно отметить, что определение максимально продолженного многообразия является инвариантным и не зависит от выбора локальной системы координат. Это связано с тем, что канонический параметр определяется однозначно с точностью до линейного преобразования и не зависит от системы координат.

Пример 7.13.1. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в полярных координатах $r, \varphi$. Будем считать, что полярный угол меняется в бесконечном интервале, $0 < \varphi < \infty$.

Определение. *Гиперболической спиралью* называется кривая на евклидовой плоскости, которая в полярных координатах задана уравнением

$$r = \frac{1}{\varphi}, \qquad 0 < \varphi < \infty. \tag{7.206}$$

Гиперболическая спираль соединяет бесконечно удаленную точку с декартовыми координатами $(\infty, 0)$ и начало координат $(0, 0)$, вокруг которого она наматывается бесконечное число раз. Если полярный угол меняется в интервале $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \subset (0, \infty)$, то ее длина определяется интегралом

$$l(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \frac{\sqrt{1 + \varphi^2}}{\varphi^2}.$$

Этот интеграл расходится на обоих концах гиперболической спирали как при $\varphi \to 0$, так и при $\varphi \to \infty$. Расходимость интеграла при $\varphi \to 0$ естественна, так как любая кривая, уходящая в бесконечность, имеет бесконечную длину. Начало координат является конечной точкой, так как любая экстремаль, проходящая через эту точку, проходит ее при конечном значении канонического параметра. В то же время не любая кривая, подходящая к этой точке, имеет конечную длину. Это связано с тем, что гиперболическая спираль достаточно быстро наматывается вокруг начала координат.

Данный пример показывает, что в определении полноты многообразий требование полноты именно экстремалей, а не произвольных кривых является существенным.

С физической точки зрения требование полноты или максимального продолжения пространства-времени $\mathbb{M}$ является естественным. Действительно, если рассмотреть движение точечной частицы в сопутствующей системе отсчета, в которой время является каноническим параметром, то естественно предположить, что эволюция либо продолжается бесконечно долго, либо обрывается в сингулярной точке.

Отметим, что полное многообразие не может иметь края. При этом существуют две возможности: пространство-время $\mathbb{M}$ либо некомпактно, либо компактно и без края (замкнутая вселенная). В первом случае геометрические инварианты в бесконечности могут стремиться как к конечным, так и бесконечным значениям. В космологии принята следующая терминология. Если все пространственные сечения пространства-времени $\mathbb{M}$ некомпактны, то вселенная *бесконечна*. Если все пространственные сечения компактны и без края, то говорят, что вселенная *замкнута*. При наличии сингулярностей, соответствующих конечному значению канонического параметра, сингулярные точки образуют край пространства-времени, находящийся на конечном расстоянии (при конечных значениях канонического параметра).

Чтобы найти максимально продолженное решение необходимо пройти несколько этапов: 1) решить уравнения Эйлера–Лагранжа в некоторой области, 2) найти и проанализировать полноту всех геодезических и экстремалей для соответствующей метрики и связности, 3) если область, где найдено решение, оказалась неполной, то продолжить решение. Первые два этапа чрезвычайно сложны, поскольку предполагают решение нелинейных систем дифференциальных уравнений. Последний этап также сложен. Его можно осуществить по крайней мере двумя способами. Либо перейти в новую систему координат, охватывающую бóльшую область, либо найти решение в соседней области, а затем доказать гладкость склейки.

В общей теории относительности существуют только отдельные примеры максимально продолженных многообразий. Например, расширение Крускала–Секереша решения Шварцшильда, которое будет обсуждаться в дальнейшем.

## 8. Гамильтонова формулировка общей теории относительности

В настоящей главе мы перепишем вакуумные (без полей материи) уравнения Эйнштейна в гамильтоновом виде. Эта задача важна как для исследования классических уравнений движения, в частности, при рассмотрении задачи Коши, так и для построения квантовой теории гравитации.

Каноническая формулировка общей теории относительности была впервые дана Дираком в формализме второго порядка [56]. Он показал, что гамильтониан гравитационного поля равен линейной комбинации связей и нашел его явное выражение. Позже Арновитт, Дезер и Мизнер в серии статей, завершившихся обзором [83] (без ссылки на Дирака), существенно упростили вычисления и прояснили геометрический смысл канонических импульсов, выразив их через внешнюю кривизну пространственной гиперповерхности, вложенной в четырехмерное пространство-время. Выражение для гамильтониана было найдено ими в формализме первого порядка, когда метрика $g_{\alpha\beta}$ и симметричная аффинная связность $\Gamma_{\{\alpha\beta\}}{}^{\gamma}$ рассматриваются в качестве независимых переменных. По сути дела этот подход и упростил вычисления.

### 8.1. Лагранжиан Гильберта–Эйнштейна

Рассмотрим пространство-время $\mathbb{M}$ произвольной размерности, $\operatorname{\mathsf{dim}}\mathbb{M} = n \geqslant 3$. Локальные координаты, как и ранее, мы нумеруем греческими буквами из начала алфавита $x^\alpha$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$. Мы предполагаем, что на $\mathbb{M}$ задана метрика $g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры, а кручение и тензор неметричности тождественно равны нулю (псевдориманова геометрия). Как и ранее мы предполагаем, что координата $x^0$ является временем, и все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространственноподобны. Уравнения движения для метрики в общей теории относительности при отсутствии полей материи следуют из вариационного принципа для действия Гильберта–Эйнштейна (7.6)

$$S_{\text{HE}} = \int dx \sqrt{|g|} R, \qquad \sqrt{|g|} := \mathsf{det}\, e_\alpha{}^a = \sqrt{|\,\mathsf{det}\, g_{\alpha\beta}|}, \tag{8.1}$$

где $R$ – псевдориманова скалярная кривизна, построенная по метрике $g_{\alpha\beta}$. В настоящей главе мы опускаем знак тильды для геометрических объектов псевдоримановой геометрии, чтобы упростить обозначения. Гравитационную постоянную перед действием Гильберта–Эйнштейна мы положили равной единице, $\kappa = 1$, поскольку уравнения не меняются при умножении полного действия на постоянную. Космологическую постоянную мы пока положим равной нулю, $\Lambda = 0$, так как ее учет приводит только к изменению потенциала для метрики и не вызывает трудностей при канонической формулировке общей теории относительности.

Действие Гильберта–Эйнштейна в виде (8.1) содержит вторые производные от метрики, что создает определенные трудности для перехода к каноническому формализму. Однако, из явного вида тензора кривизны следует, что вторые производные входят линейно. Поэтому от них можно избавиться, добавив к подынтегральному выражению полную производную. При этом мы потеряем явную ковариантность, зато действие будет зависеть только от первых производных метрики. С этой целью представим скалярную кривизну в виде двух слагаемых, что проверяется прямой проверкой,

$$R = \partial\Gamma - L_{\text{HE}}, \tag{8.2}$$

где

$$L_{\text{НЕ}} := g^{\alpha\beta}(\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Gamma_{\gamma} - \Gamma_{\alpha\delta}{}^{\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\delta}), \tag{8.3}$$

$$\partial\Gamma := g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}\Gamma_{\beta} - \partial_{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_{\alpha}\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta} - \sqrt{|g|}g^{\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\right) + 2L_{\text{НЕ}}. \tag{8.4}$$

Отсюда следует, что лагранжиан Гильберта–Эйнштейна $\sqrt{|g|}L_{\text{НЕ}}$ отличается от скалярной кривизны, умноженной на определитель репера, на полную производную:

$$\sqrt{|g|}R - \partial_{\alpha}\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\Gamma_{\beta} - \sqrt{|g|}g^{\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\right) = \sqrt{|g|}L_{\text{НЕ}},$$

и, следовательно, приводит к тем же уравнениям Эйлера–Лагранжа. Он квадратичен по символам Кристоффеля и поэтому зависит только от первых производных метрики.

## 8.2. АДМ параметризация метрики и репера

При анализе гамильтоновой структуры уравнений общей теории относительности Арновитт, Дезер и Мизнер (АДМ) [83] использовали специальную параметризацию метрики, которая существенно упростила вычисления. В настоящем разделе будет описана АДМ параметризация метрики и соответствующая параметризация репера, которая упрощает вычисления в переменных Картана.

Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M} = n$, с метрикой лоренцевой сигнатуры $(+-\ldots-)$. Пусть $\{x^{\alpha}\}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, – система локальных координат. Выделим среди координат время $t = x^0$, тогда $\{x^{\alpha}\} = \{x^0, x^{\mu}\}$, $\mu = 1, \ldots, n-1$. В дальнейшем буквы из начала греческого алфавита $\alpha, \beta, \ldots$ будут пробегать все значения индексов, а из середины $\mu, \nu, \ldots$ – только пространственные значения. Это правило легко запомнить по следующим включениям: $\{\mu, \nu, \ldots\} \subset \{\alpha, \beta, \ldots\}$ и $\{1, 2, \ldots\} \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$. АДМ параметризация метрики имеет следующий вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} N^2 + N^{\rho}N_{\rho} & N_{\nu} \\ N_{\mu} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика на $(n-1)$-мерных сечениях многообразия $x^0 = \mathsf{const}$, которые предполагаются пространственноподобными. В выбранной параметризации вместо $n$ компонент метрики, содержащих хотя бы один временно́й индекс, $g_{00}$ и $g_{0\mu}$, введены $n$ функций $N$ и $N_{\mu}$. Выше $N^{\rho} := \hat{g}^{\rho\mu}N_{\mu}$, где $\hat{g}^{\rho\mu}$ – $(n-1)\times(n-1)$ матрица, обратная к $g_{\mu\nu}$:

$$\hat{g}^{\rho\mu}g_{\mu\nu} = \delta^{\rho}_{\nu},$$

которую мы называем обратной пространственной метрикой. В настоящей главе подъем пространственных индексов будет всегда осуществляться с помощью обратной метрики $\hat{g}^{\rho\mu}$, помеченной шляпкой, которая в общем случае не совпадает с “пространственной” частью метрики $g^{\alpha\beta}$, обратной к $g_{\alpha\beta}$: $\hat{g}^{\rho\mu} \neq g^{\rho\mu}$. Функция $N = N(x)$ называется *функцией хода*, а функции $N_{\mu} = N_{\mu}(x)$ – *функциями сдвига*. Не ограничивая общности, можно считать, что функция хода положительна $N > 0$. В этом случае АДМ параметризация метрики (8.5) является взаимно однозначной.

Интервал, соответствующий параметризации (8.5), можно записать в виде

$$ds^2 = N^2dt^2 + g_{\mu\nu}(dx^{\mu} + N^{\mu}dt)(dx^{\nu} + N^{\nu}dt).$$

Вообще, квадрат произвольного вектора $X = X^{\alpha}\partial_{\alpha}$ в АДМ параметризации метрики (8.5) имеет вид суммы двух квадратов:

$$X^2 := g_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta} = N^2(X^0)^2 + g_{\mu\nu}(X^{\mu} + N^{\mu}X^0)(X^{\nu} + N^{\nu}X^0),$$

где выделен квадрат временнóй компоненты. Первое слагаемое в этом выражении положительно, а второе – отрицательно, так как метрика на пространственноподобных сечениях отрицательно определена.

Мы предполагаем, что координата $x^0 = t$ является временем, т.е. касательный вектор $\partial_0$ к координатной линии $x^0$ времениподобен. Формально это условие записывается в виде

$$(\partial_0, \partial_0) = g_{00} = N^2 + N^\rho N_\rho > 0. \tag{8.6}$$

В этом случае метрика $g_{\alpha\beta}$ имеет лоренцеву сигнатуру тогда и только тогда, когда матрица

$$g_{\mu\nu} - \frac{N_\mu N_\nu}{N^2 + N^\rho N_\rho} \tag{8.7}$$

отрицательно определена. Отметим, что сама метрика $g_{\mu\nu}$, индуцированная на сечении $x^0 = \mathsf{const}$, может и не быть отрицательно определенной. Это значит, что сечение $x^0 = \mathsf{const}$ в общем случае не является пространственноподобным. В дальнейшем мы будем дополнительно предполагать, что координаты выбраны таким образом, чтобы все сечения $x^0 = \mathsf{const}$ были пространственноподобны, т.е. метрика $g_{\mu\nu}$ также отрицательно определена. Это удобно для постановки задачи Коши, когда начальные данные задаются на пространственноподобной поверхности, и рассматривается их эволюция во времени.

Замечание. Аналогичным образом можно параметризовать метрику и на римановом многообразии с положительно определенной метрикой, для этого вместо времени достаточно явно выделить произвольную координату.

Метрика, обратная к (8.5), имеет вид

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N^2} & -\dfrac{N^\nu}{N^2} \\ -\dfrac{N^\mu}{N^2} & \hat g^{\mu\nu} + \dfrac{N^\mu N^\nu}{N^2} \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Предложение 8.2.1. *Пространственная матрица в правом нижнем блоке*

$$g^{\mu\nu} = \hat g^{\mu\nu} + \frac{N^\mu N^\nu}{N^2}, \tag{8.9}$$

*отрицательно определена.*

Доказательство. Легко проверить, матрица (8.9) является обратной к метрике (8.7). Это значит, что отрицательная определенность метрики (8.7) эквивалентна отрицательной определенности матрицы $g^{\mu\nu}$.

Заметим, что, если метрика на многообразии $\mathbb{M}$ имеет лоренцеву сигнатуру, то условие пространственноподобности всех сечений $x^0 = \mathsf{const}$ эквивалентно условию $N^2 > 0$. Действительно, из отрицательной определенности $g_{\mu\nu}$ следует отрицательная определенность обратной матрицы $\hat g^{\mu\nu}$. Тогда из уравнения (8.9) вытекает отрицательная определенность матрицы

$$g^{\mu\nu} - \frac{N^\mu N^\nu}{N^2}.$$

Это, в свою очередь, эквивалентно условию $g^{00} > 0$ или $N^2 > 0$.

Чтобы продемонстрировать тонкости, которые могут возникнуть при АДМ параметризации метрики, приведем простой

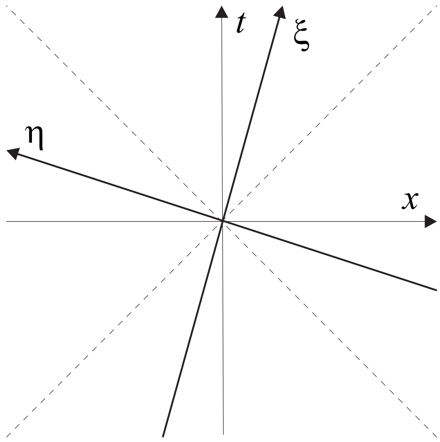


Рис. 8.1. Выбор координат на плоскости Минковского. Рисунок соответствует следующим значениям параметров: $0 < a < 1$ и $b > 1$

Пример 8.2.1. Рассмотрим двумерное пространство-время Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с декартовыми координатами $t, x$. Введем новую систему координат $\xi, \eta$, зависящую от двух вещественных параметров $a$ и $b$ (см. рис.8.1)

$$\xi = t + ax, \quad \eta = t - bx, \qquad |a| \neq 1, \quad |b| \neq 1, \quad a + b \neq 0.$$

Легко получить формулы обратного преобразования

$$t = \frac{b\xi + a\eta}{a+b}, \qquad x = \frac{\xi - \eta}{a+b}.$$

В новых координатах лоренцева метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = \frac{1}{(a+b)^2}\left[(b^2-1)d\xi^2 + 2(ab+1)d\xi d\eta + (a^2-1)d\eta^2\right].$$

Векторы, касательные к координатным линиям $\xi$ и $\eta$ имеют следующие компоненты:

$$\partial_\xi = \frac{b}{a+b}\partial_t + \frac{1}{a+b}\partial_x, \qquad \partial_\eta = \frac{a}{a+b}\partial_t - \frac{1}{a+b}\partial_x.$$

Проанализируем АДМ параметризацию метрики в координатах $x^0 = \xi$, $x^1 = \eta$. Метрика имеет следующие компоненты:

$$g_{00} = \frac{b^2-1}{(a+b)^2}, \qquad g_{01} = \frac{ab+1}{(a+b)^2}, \qquad g_{11} = \frac{a^2-1}{(a+b)^2}.$$

Функции хода и сдвига имеют вид

$$N^2 = -\frac{1}{a^2-1}, \qquad N_1 = \frac{ab+1}{(a+b)^2}.$$

Из условий $g_{00} > 0$ и $g_{11} < 0$ следует, соответственно, что $|b| > 1$ и $|a| < 1$. Мы видим, что эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы координатная линия $\xi$ была времениподобной, а $\eta$ – пространственноподобной. Нетрудно также проверить эквивалентность условий:

$$g_{00} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g_{11} - \frac{N_1 N_1}{N^2 + N^1 N_1} = -\frac{1}{b^2-1} < 0,$$

а также условий:

$$g^{00} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{g}^{11} = g^{11} - \frac{N^1 N^1}{N^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2 - 1} < 0.$$

Обратная метрика (8.8) удобна в приложениях тем, что квадрат произвольного ковектора (1-формы) $A = dx^\alpha A_\alpha$ имеет вид суммы двух квадратов:

$$A^2 := g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = \frac{1}{N^2}(A_0 - N^\mu A_\mu)^2 + \hat{g}^{\mu\nu} A_\mu A_\nu,$$

где выделен квадрат пространственных компонент. Здесь первое слагаемое положительно, а второе отрицательно.

Выражение для определителя метрики (8.5) имеет вид

$$\det g_{\alpha\beta} = N^2 \det g_{\mu\nu}. \tag{8.10}$$

Отсюда следует выражение для элемента объема

$$\sqrt{|g|} = N\sqrt{|\hat{g}|}, \qquad \sqrt{|g|} := \sqrt{|\det g_{\alpha\beta}|}, \qquad \sqrt{|\hat{g}|} := \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}. \tag{8.11}$$

Последняя формула является обобщением хорошо известной из школьного курса геометрии правила: объем призмы равен произведению площади основания на высоту. В рассматриваемом случае площадью основания является $\sqrt{|\hat{g}|}$, а высотой – функция хода $N$.

При проведении вычислений оказываются полезными следующие формулы, которые проверяются прямой проверкой,

$$\begin{aligned} g^{00}g^{\mu\nu} - g^{0\mu}g^{0\nu} &= \frac{\hat{g}^{\mu\nu}}{N^2}, \\ g^{\sigma\mu}g^{0\nu} - g^{\sigma\nu}g^{0\mu} &= \frac{N^\mu \hat{g}^{\sigma\nu} - N^\nu \hat{g}^{\sigma\mu}}{N^2}, \\ g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} &= \delta^\mu_\sigma + \frac{N^\mu N_\sigma}{N^2}, \\ g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= n - 1 + \frac{N^\mu N_\mu}{N^2}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

В аффинной геометрии вместо метрики $g_{\alpha\beta}$ и аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ удобно использовать переменные Картана: репер $e_\alpha{}^a$ и $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ связность $\omega_{\alpha a}{}^b$, где $a, b, \ldots = \mathit{0}, 1, \ldots, n-1$. Здесь и в дальнейшем мы примем следующее обозначение. Если латинский индекс $a$ принимает значение нуль, то мы будем писать его курсивом: $a = \mathit{0}$. Это правило принято потому что в дальнейшем значение нуль будут принимать как греческие, так и латинские индексы, что необходимо различать. Выделим в ортонормальном базисе касательного пространства временно́й вектор $e_{\mathit{0}}$, $\{e_a\} = \{e_{\mathit{0}}, e_i\}$, тогда метрика Минковского примет вид

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta_{ij} \end{pmatrix}, \qquad i, j = 1, \ldots, n-1,$$

где $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$ – евклидова метрика с обратным знаком для пространственных компонент тензоров. Как и раньше, мы принимаем следующее соглашение. Латинские индексы из начала алфавита $a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, n-1$ пробегают все значения, а индексы из середины алфавита $i, j, \ldots = 1, \ldots, n-1$ – только пространственные. Поскольку репер содержит большее число независимых компонент, чем метрика, то его параметризация, соответствующая выделенной временно́й координате, является более громоздкой:

$$e_\alpha{}^a = \begin{pmatrix} N\sqrt{1-M^2}+(MN) & N^i - NM^i + \dfrac{\sqrt{1-M^2}-1}{M^2}(MN)M^i \\ M_\mu & \hat e_\mu{}^i + \dfrac{\sqrt{1-M^2}-1}{M^2}M_\mu M^i \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

где $M_\mu$ – дополнительное $(n-1)$-компонентное пространственноподобное векторное поле (относительно трехмерных диффеоморфизмов). Ниже будет показано, что это поле пропорционально трехмерному вектору скорости, параметризующему преобразования Лоренца. Репер со шляпкой в (8.13) $\hat e_\mu{}^i$ на сечении $x^0 = \mathsf{const}$ определяется трехмерной метрикой:

$$g_{\mu\nu} = \hat e_\mu{}^i \hat e_\nu{}^j \eta_{ij}, \tag{8.14}$$

В параметризации репера (8.13) использованы также обозначения $(MN) := M^\mu N_\mu = M^i N_i$ и $M^2 := M^\mu M_\mu = M^i M_i < 0$. Переход от пространственных латинских индексов к пространственным греческим индексам осуществляется с помощью репера $\hat e_\mu{}^i$ и его обратного $\hat e^\mu{}_i$, которые мы пометили шляпкой,

$$\hat g^{\mu\nu} = \hat e^\mu{}_i \hat e^\nu{}_j \eta^{ij}.$$

Например, $M^i := M_\mu \hat e^{\mu i}$. Как и для метрики, реперы со шляпкой и без нее необходимо различать: $\hat e_\mu{}^i \ne e_\mu{}^i$, $\hat e^\mu{}_i \ne e^\mu{}_i$. Из определения репера со шляпкой (8.14) следует равенство для определителей

$$\mathsf{det}\, \hat e_\mu{}^i = \sqrt{|\,\mathsf{det}\, g_{\mu\nu}|},$$

что согласуется с обозначением в (8.11).

С помощью прямых вычислений нетрудно проверить, что приведенная параметризация репера соответствует АДМ параметризации метрики (8.5)

$$N^2 + N^\rho N_\rho = e_0{}^a e_{0a}, \qquad N_\mu = e_0{}^a e_{\mu a}, \qquad g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a e_{\nu a}.$$

Обратный репер имеет вид

$$e^\alpha{}_a = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{1-M^2}}{N} & -\dfrac{M_i}{N} \\ M^\mu - \dfrac{\sqrt{1-M^2}}{N}N^\mu & \hat e^\mu{}_i + \dfrac{N^\mu M_i}{N} + \dfrac{\sqrt{1-M^2}-1}{M^2}M^\mu M_i. \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

Чтобы понять геометрический смысл параметров $M_i$, рассмотрим преобразования касательного пространства. Связная компонента единицы группы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, n-1)$ имеет подгруппу вращений $\mathbb{SO}(n-1)$, действующую на пространственные компоненты репера $\hat e_\mu{}^i$. Эта подгруппа параметризуется $(n-1)(n-2)/2$ параметрами. Остальные $n-1$ параметров соответствуют лоренцевым бустам, которые параметризуются функциями $M_i$. В этом нетрудно убедиться. Представим репер (8.13) в виде

$$e_\alpha{}^a = \overset{\circ}{e}_\alpha{}^b S_b{}^a,$$

где

$$\overset{\circ}{e}_\alpha{}^a := \begin{pmatrix} N & N^i \\ 0 & \hat e_\mu{}^i \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

– фиксированный репер, который преобразуется с помощью лоренцевых бустов

$$S_b{}^a = \begin{pmatrix} \sqrt{1-M^2} & -M^j \\ M_i & S_i{}^j \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{SO}_0(1,n-1), \tag{8.17}$$

где введено обозначение для пространственной части матрицы лоренцевых вращений

$$S_i{}^j := \delta_i^j + \frac{\sqrt{1-M^2}-1}{M^2} M_i M^j \tag{8.18}$$

Можно проверить, что матрица (8.17) действительно задает преобразования Лоренца. Репер, обратный к (8.16), имеет вид

$$\overset{\circ}{e}{}^\alpha{}_a = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N} & 0 \\ -\dfrac{N^\mu}{N} & \hat{e}^\mu{}_i \end{pmatrix}.$$

Формулы для фиксированного репера $\overset{\circ}{e}_\alpha{}^a$ и его обратного $\overset{\circ}{e}{}^\alpha{}_a$ получаются из (8.13) и (8.15) при $M_i = 0$.

Матрица пространственных вращений (8.18) часто используется в вычислениях, поэтому приведем для нее несколько полезных соотношений, которые проверяются прямой проверкой,

$$\begin{aligned} S^{-1}{}_i{}^j &= \delta_i^j - \frac{\sqrt{1-M^2}-1}{M^2\sqrt{1-M^2}} M_i M^j \\ S_i{}^j(M) &= S_i{}^j(-M), \qquad\qquad S_{ij} = S_{ji}, \\ S_i{}^j M_j &= \sqrt{1-M^2} M_i, \\ S_i{}^k S_{jk} &= \eta_{ij} - M_i M_j, \\ S^{-1}{}_i{}^k S^{-1}{}_{jk} &= \eta_{ij} + \frac{M_i M_j}{\sqrt{1-M^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо $n^2$ независимых компонент репера мы ввели функцию сдвига $N$ (1 компонента), функции хода $N^i$ ($n-1$ компонент), лоренцевы бусты $M_i$ ($n-1$ компонент) и пространственный репер $\hat{e}_\mu{}^i$ ($(n-1)^2$ компонент). Эта параметризация при $N > 0$ является взаимно однозначной.

Отметим, что единичный нормальный вектор к сечению $x^0 = \mathsf{const}$ (7.166) относительно неголономного базиса $e_a = e^\mu{}_a \partial_\mu$ имеет вид

$$n = \sqrt{1-M^2} e_0 - M^i e_i.$$

То есть его компоненты относительно неголономного базиса полностью определяются лоренцевыми бустами.

Приведем более привычную параметризацию лоренцевых вращений $S_a{}^b$ с помощью вектора скорости. Вектор $M^i$ взаимно однозначно параметризуется вектором скорости $V^i$:

$$M^i = \frac{V^i}{\sqrt{1-\boldsymbol{V}^2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad V^i = \frac{M^i}{\sqrt{1-M^2}},$$

где $\boldsymbol{V}^2 := -V^i V_i$. По определению, $M^2 < 0$ и, следовательно, $0 < \boldsymbol{V}^2 < 1$. Тогда

$$S_a{}^b = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{V}^2}} & -\dfrac{V^j}{\sqrt{1-\boldsymbol{V}^2}} \\ \dfrac{V_i}{\sqrt{1-V^2}} & \delta_i^j - \dfrac{V_i V^j}{\boldsymbol{V}^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2}} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Замечание. В римановом пространстве с положительно определенной метрикой репер можно параметризовать похожим образом, заменив матрицу лоренцевых вращений на ортогональную матрицу.

## 8.3. Геометрия гиперповерхностей

При гамильтоновой формулировке моделей гравитации мы рассматриваем пространство-время как семейство пространственноподобных гиперповерхностей, которое параметризуется временем. Другими словами, для каждого момента времени пространство представляет собой гиперповерхность, вложенную в пространство-время. Поскольку уравнения моделей гравитации определяют геометрию всего пространства-времени, то полезно знать, какая геометрия возникает при этом на пространственноподобных сечениях. В настоящем разделе мы подойдем к этому вопросу с общей точки зрения, предполагая, что на объемлющем многообразии задана аффинная геометрия общего вида, т.е. независимые метрика и связность, не предполагая лоренцевой сигнатуры метрики.

Рассмотрим $(n-1)$-мерную гиперповерхность $\mathbb{U}$, вложенную в $n$-мерное многообразие $\mathbb{M}$:

$$f: \qquad \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{M}. \tag{8.19}$$

Обозначим координаты на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{U}$ соответственно через $x^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$, и $u^i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда вложение $\mathbb{U}$ в $\mathbb{M}$ локально задается $n$ функциями $x^\alpha(u)$, которые предполагаются достаточно гладкими. Произвольное векторное поле $X = \{X^i\} \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$, на гиперповерхности, отображается в векторное поле $Y = \{Y^\alpha\} \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ на $\mathbb{M}$ с помощью дифференциала отображения

$$f_*: \quad \mathcal{X}(\mathbb{U}) \ni \qquad X = X^i\partial_i \mapsto Y = Y^\alpha\partial_\alpha \qquad \in \mathcal{X}(\mathbb{M}),$$

где

$$Y^\alpha := e^\alpha{}_i X^i, \qquad e^\alpha{}_i := \partial_i x^\alpha.$$

Матрица Якоби $e^\alpha{}_i$ отображения $f$ прямоугольна, имеет размер $n \times (n-1)$, ранг $n-1$ и, естественно, необратима. Возврат отображения $f$ каждому ковекторному полю (1-форме) на $\mathbb{M}$ ставит в соответствие ковекторное поле на $\mathbb{U}$:

$$f^*: \quad \Lambda_1(\mathbb{M}) \ni \qquad A = dx^\alpha A_\alpha \mapsto B = du^i B_i \qquad \in \Lambda_1(\mathbb{U}),$$

где

$$B_i := A_\alpha e^\alpha{}_i.$$

В дальнейшем мы будем отождествлять гиперповерхность $\mathbb{U}$ с ее образом: $\mathbb{U} = f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{M}$.

1-форма $n = dx^\alpha n_\alpha$, определяемая системой алгебраических уравнений

$$n_\alpha e^\alpha{}_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{8.20}$$

ортогональна гиперповерхности $\mathbb{U}$ и задает на многообразии $\mathbb{M}$ распределение $(n-1)$-мерных подпространств, касательных к $\mathbb{U}$. Уравнения (8.20) имеют единственное нетривиальное решение с точностью до умножения на произвольную отличную от нуля функцию, поскольку из определения вложения следует, что ранг матрицы Якоби равен $n-1$.

Матрица Якоби $e^\alpha{}_i$ задает в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, где $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, набор из $n-1$ векторов $e_i = e^\alpha{}_i\partial_\alpha$, которые образуют базис касательного пространства к гиперповерхности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

Это все, что можно сказать о гиперповерхности $\mathbb{U}$, если задано только вложение (8.19). Теория становится намного более содержательной, если на многообразии $\mathbb{M}$ заданы дополнительные структуры. Остановимся на этом вопросе подробно.

Пусть на $\mathbb{M}$ задана аффинная геометрия, т.е. метрика $g_{\alpha\beta}$ и аффинная связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$. Рассмотрим, какая геометрия возникает на гиперповерхности $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{M}$. Возврат отображения $f^*$ индуцирует на гиперповерхности единственную метрику:

$$f^*: \quad g_{\alpha\beta} \mapsto g_{ij} := g_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_i e^{\beta}{}_j. \tag{8.21}$$

Для многообразий с метрикой лоренцевой сигнатуры мы предполагаем, что гиперповерхность $\mathbb{U}$ пространственноподобна и, следовательно, индуцированная метрика невырождена и отрицательно определена. Наличие двух метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{ij}$ соответственно на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{U}$ позволяет опускать и поднимать индексы у матрицы Якоби:

$$e_{\alpha}{}^{i} := g_{\alpha\beta} e^{\beta}{}_j g^{ij}.$$

Эта матрица проектирует произвольный вектор из $\mathbb{T}_{f(u)}(\mathbb{M})$ в касательное пространство к гиперповерхности $\mathbb{T}_u(\mathbb{U})$

$$\mathbb{T}_{f(u)}(\mathbb{M}) \ni \qquad \{X^{\alpha}\} \mapsto \{X^i := X^{\alpha} e_{\alpha}{}^{i}\} \qquad \in \mathbb{T}_u(\mathbb{U}). \tag{8.22}$$

Теперь определим связность на гиперповерхности $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{M}$, спроектировав ковариантную производную в $\mathbb{M}$ на гиперповерхность $\mathbb{U}$:

$$\hat{\nabla}_i X^k := (\nabla_{\alpha} X^{\beta}) e^{\alpha}{}_i e_{\beta}{}^{k}, \tag{8.23}$$

где компоненты $X^i$ определены отображением (8.22).

Замечание. Из приведенного определения нельзя выразить ковариантную производную $\nabla_{\alpha} X^{\beta}$ в $\mathbb{M}$ через ковариантную производную $\hat{\nabla}_i X^k$ на $\mathbb{U}$, так как оригинал нельзя восстановить по его проекции.

Раскрытие равенства (8.23) приводит к выражению для компонент индуцированной связности на гиперповерхности $\mathbb{U}$:

$$\hat{\Gamma}_{ij}{}^{k} = (\partial^2_{ij} x^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} e^{\alpha}{}_i e^{\beta}{}_j) e_{\gamma}{}^{k}. \tag{8.24}$$

Эта связность единственна. Отметим, что если исходная связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ симметрична, то индуцированная связность $\hat{\Gamma}_{ij}{}^{k}$ также симметрична. Кроме того, связность на $\mathbb{U}$ определяется единственным образом только в том случае, если на $\mathbb{M}$ помимо связности задана также метрика.

Из уравнения (8.24) следует, что тензор кручения на $\mathbb{M}$ индуцирует кручение на гиперповерхности:

$$T_{ij}{}^{k} = T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} e^{\alpha}{}_i e^{\beta}{}_j e_{\gamma}{}^{k}. \tag{8.25}$$

Прямые вычисления дают следующее выражение для ковариантной производной от индуцированной метрики на гиперповерхности

$$\hat{\nabla}_i g_{jk} = \partial_i g_{ij} - \hat{\Gamma}_{ij}{}^{l} g_{lk} - \hat{\Gamma}_{ik}{}^{l} g_{jl} = (\nabla_{\alpha} g_{\beta\gamma}) e^{\alpha}{}_i e^{\beta}{}_j e^{\gamma}{}_k.$$

Отсюда вытекает выражение для тензора неметричности на гиперповерхности

$$Q_{ijk} = Q_{\alpha\beta\gamma} e^{\alpha}{}_i e^{\beta}{}_j e^{\gamma}{}_k.$$

В частности, если связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ на $\mathbb{M}$ является метрической, то и индуцированная связность $\hat{\Gamma}_{ij}{}^{k}$ на $\mathbb{U}$ также метрическая.

Таким образом, метрика $g_{\alpha\beta}$ и связность $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ на $\mathbb{M}$ индуцируют единственные метрику $g_{ij}$ и связность $\hat{\Gamma}_{ij}{}^{k}$ на гиперповерхности $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$. Обратное утверждение, конечно, неверно. Если метрика и связность заданы на гиперповерхности $\mathbb{U}$, то они не индуцируют на $\mathbb{M}$ геометрию единственным образом. Это понятно, поскольку размерность гиперповерхности меньше размерности самого многообразия.

В дальнейшем все геометрические объекты, относящиеся только к гиперповерхности и построенные по индуцированной метрике $g_{ij}$ и связности $\hat{\Gamma}_{ij}{}^{k}$ мы будем отмечать шляпкой.

Наличие метрики $g_{\alpha\beta}$ позволяет построить единичное векторное поле $n=n^\alpha\partial_\alpha$, ортогональное к гиперповерхности. Как уже отмечалось, система уравнений $n_\alpha e^\alpha{}_i=0$ определяет 1-форму $dx^\alpha n_\alpha$ с точностью до умножения на произвольную функцию. Воспользуемся этим произволом для того, чтобы в каждой точке вектор с компонентами $n^\alpha:=g^{\alpha\beta}n_\beta$ имел единичную длину $(n,n)=n^\alpha n^\beta g_{\alpha\beta}=1$. По построению, этот вектор ортогонален всем векторам, касательным к гиперповерхности:

$$(n,e_i)=n^\alpha e^\beta{}_i g_{\alpha\beta}=n_\alpha e^\alpha{}_i=0.$$

Если в многообразии задана гиперповерхность, то естественно рассматривать базис $\{n,e_i\}$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, $x\in\mathbb{U}$, определяемый этой гиперповерхностью. Ему соответствует сопряженный базис $\{n:=dx^\alpha n_\alpha, e^i:=dx^\alpha e_\alpha{}^i\}$ в кокасательном пространстве $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$. Тогда произвольный вектор $X$ и 1-форма $A$ раскладываются по этим базисам:

$$\begin{aligned}
X^\alpha &= X^\perp n^\alpha + X^i e^\alpha{}_i, \qquad & X^\perp &= X^\alpha n_\alpha, \quad & X^i &= X^\alpha e_\alpha{}^i,\\
A_\alpha &= A_\perp n_\alpha + A_i e_\alpha{}^i, \qquad & A_\perp &= A_\alpha n^\alpha, \quad & A_i &= A_\alpha e^\alpha{}_i.
\end{aligned}$$

Аналогично можно разложить тензор произвольного ранга. В частности, разложение ковариантного тензора второго ранга имеет вид

$$A_{\alpha\beta}=A_{\perp\perp}n_\alpha n_\beta + A_{\perp i}n_\alpha e_\beta{}^i + A_{i\perp}e_\alpha{}^i n_\beta + A_{ij}e_\alpha{}^i e_\beta{}^j,$$

где

$$A_{\perp\perp}=A_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta,\quad A_{\perp i}=A_{\alpha\beta}n^\alpha e^\beta{}_i,\quad A_{i\perp}=A_{\alpha\beta}e^\alpha{}_i n^\beta,\quad A_{ij}=A_{\alpha\beta}e^\alpha{}_i e^\beta{}_j.$$

Нетрудно проверить, что разложение для метрики гораздо проще:

$$g_{\alpha\beta}=n_\alpha n_\beta + e_\alpha{}^i e_\beta{}^j g_{ij}. \tag{8.26}$$

Разложение для обратной метрики имеет аналогичный вид:

$$g^{\alpha\beta}=n^\alpha n^\beta + e^\alpha{}_i e^\beta{}_j g^{ij}. \tag{8.27}$$

Из определения обратной метрики $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma$ следует правило суммирования матрицы Якоби по латинским индексам:

$$e^\alpha{}_i e_\beta{}^i=\delta^\alpha_\beta - n^\alpha n_\beta. \tag{8.28}$$

Нетрудно также проверить, что из определения обратной индуцированной метрики $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$ следует равенство

$$e^\alpha{}_i e_\alpha{}^j=\delta^j_i, \tag{8.29}$$

где суммирование проводится по греческим индексам. С учетом этого правила из равенства (8.27) следует представление для обратной индуцированной метрики

$$g^{ij} = g^{\alpha\beta} e_\alpha{}^i e_\beta{}^j.$$

Индуцированные метрика (8.21) и связность (8.24) задают внутреннюю геометрию гиперповерхности $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{M}$. В частности, индуцированная связность задает тензор внутренней кривизны гиперповерхности

$$\hat{R}_{ijk}{}^l(\hat{\Gamma}) = \partial_i \hat{\Gamma}_{jk}{}^l - \hat{\Gamma}_{ik}{}^m \hat{\Gamma}_{jm}{}^l - (i \leftrightarrow j).$$

Вложение гиперповерхности $f: \ \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{M}$ позволяет определить еще один важный объект, характеризующий то, как гиперповерхность $\mathbb{U}$ вложена в $\mathbb{M}$.

Определение. Тензор второго ранга с компонентами

$$K_{ij} := -(\nabla_\alpha n_\beta) e^\alpha{}_i e^\beta{}_j, \tag{8.30}$$

определен на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ и называется *внешней кривизной* гиперповерхности. Он равен ковариантной производной нормали, спроектированной на касательное пространство к гиперповерхности и взятой с обратным знаком.

В отличии от тензора внутренней кривизны внешняя кривизна является тензором второго, а не четвертого ранга и в общем случае никакой симметрии по индексам не имеет. Этот тензор характеризует изменение нормали при ее параллельном переносе вдоль кривой на гиперповерхности.

Раскрывая определение тензора внешней кривизны, с учетом равенства (8.20) получим, что

$$K_{ij} = n_\alpha (\partial^2_{ij} x^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha e^\beta{}_i e^\gamma{}_j).$$

Отсюда следует, что антисимметричная часть тензора внешней кривизны определяется тензором кручения

$$K_{[ij]} = \frac{1}{2} n_\alpha T_{\beta\gamma}{}^\alpha e^\beta{}_i e^\gamma{}_j = \frac{1}{2} T_{ij}{}^\perp. \tag{8.31}$$

Это доказывает следующее

Предложение 8.3.1. *Внешняя кривизна гиперповерхности $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{M}$ симметрична тогда и только тогда, когда сужение кручения связности $\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha$ на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ удовлетворяет условию $T_{ij}{}^\perp = 0$.*

Вычислим ковариантную производную от матрицы Якоби

$$\nabla_i e^\alpha{}_j = e^\beta{}_i (\partial_\beta e^\alpha{}_j + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha e^\gamma{}_j) - \hat{\Gamma}_{ij}{}^k e^\alpha{}_k. \tag{8.32}$$

Разложение этого равенства (индекс $\alpha$) по базису $n, e_i$ показывает, что эта ковариантная производная имеет только нормальную составляющую и пропорциональна внешней кривизне:

$$\nabla_i e^\alpha{}_j = n^\alpha K_{ij}. \tag{8.33}$$

Введем специальное обозначение для "половины" ковариантной производной (8.32), которая содержит связность только для греческих индексов,

$$\check{\nabla}_i e^\alpha{}_j := e^\beta{}_i (\partial_\beta e^\alpha{}_j + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha e^\gamma{}_j).$$

Она ковариантна относительно преобразований координат $x^\alpha$ в $\mathbb{M}$, но не на $\mathbb{U}$. Разлагая ее по базису $n, e_i$, получим равенство

$$\check\nabla_i e^\alpha{}_j = n^\alpha K_{ij} + \hat\Gamma_{ij}{}^k e^\alpha{}_k. \tag{8.34}$$

Это соотношение известно как *формула Гаусса–Вейнгартена*.

Из равенств (8.33) и (8.34) следует ещё одно представление для тензора внешней кривизны

$$K_{ij} = n_\alpha \nabla_i e^\alpha{}_j = n_\alpha \check\nabla_i e^\alpha{}_j. \tag{8.35}$$

Полный тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, спроектированный на гиперповерхность, можно выразить через тензор внутренней кривизны $\hat R_{ijkl}$, построенный только по индуцированной метрике (8.21) и связности (8.24), и тензор внешней кривизны. Для этого рассмотрим коммутатор ковариантных производных ковекторного поля, который определяется тензором кривизны и кручения (2.13)

$$\begin{aligned} X_\gamma &= -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta X_\delta - T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta X_\gamma = \\ &= -R_{\alpha\beta\gamma i}X^i - R_{\alpha\beta\gamma\perp}X^\perp - T_{\alpha\beta}{}^i\nabla_i X_\gamma - T_{\alpha\beta}{}^\perp \nabla_\perp X_\gamma, \end{aligned} \tag{8.36}$$

где в правой части сначала вычисляются ковариантные производные, а затем проектируются на гиперповерхность и ортогональное направления:

$$\nabla_i X_\gamma := e^\alpha{}_i \nabla_\alpha X_\gamma, \qquad \nabla_\perp X_\gamma := n^\alpha \nabla_\alpha X_\gamma.$$

Для того чтобы спроектировать равенство (8.36) на гиперповерхность, спроектируем сначала ковариантную производную:

$$\nabla_i X_j := e^\alpha{}_i(\nabla_\alpha X_\beta)e^\beta{}_j = e^\alpha{}_i\nabla_\alpha(X_\beta e^\beta{}_j) - e^\alpha{}_i X_\beta \nabla_\alpha e^\beta{}_j = \hat\nabla_i X_j - X_\perp K_{ij},$$

где мы воспользовались равенством (8.33) и

$$\hat\nabla_i X_j := \partial_i X_j - \hat\Gamma_{ij}{}^k X_k$$

– $(n-1)$-мерная ковариантная производная на гиперповерхности. Аналогично проектируется вторая ковариантная производная:

$$\begin{aligned} \nabla_i\nabla_j X_k &= \hat\nabla_i(\nabla_j X_k) - \nabla_\perp X_k K_{ij} - \nabla_j X_\perp K_{ik} = \\ &= \hat\nabla_i\hat\nabla_j X_k - \hat\nabla_i X_\perp K_{jk} - X_\perp \hat\nabla_i K_{jk} - \nabla_\perp X_k K_{ij} - \hat\nabla_j X_\perp K_{ik} - X^l K_{lj}K_{ik}, \end{aligned}$$

где

$$\nabla_j X_\perp := e^\alpha{}_j(\nabla_\alpha X_\beta)n^\beta = \hat\nabla_j X_\perp + X^l K_{lj}.$$

Антисимметризация полученного выражения по индексам $i, j$ дает проекцию коммутатора (8.36) на гиперповерхность:

$$\begin{aligned} X_k &= -R_{ijkl}X^l - R_{ijk\perp}X^\perp - T_{ij}{}^l\nabla_l X_k - T_{ij}{}^\perp\nabla_\perp X_k = \\ &= -R_{ijkl}X^l - R_{ijk\perp}X^\perp - T_{ij}{}^l\hat\nabla_l X_k + T_{ij}{}^l X_\perp K_{lk} - T_{ij}{}^\perp \nabla_\perp X_k. \end{aligned}$$

Учитывая независимость компонент $X^l$ и $X^\perp$ и выражения для компонент тензора кручения (8.25), (8.31), получаем выражение для проекций полного тензора кривизны на гиперповерхность:

$$R_{ijkl} = \hat R_{ijkl} + K_{ik}K_{lj} - K_{jk}K_{li}, \tag{8.37}$$

$$R_{ijk\perp} = \hat{\nabla}_i K_{jk} - \hat{\nabla}_j K_{ik} + T_{ij}{}^l K_{lk}. \tag{8.38}$$

Полученные соотношения являются обобщением *уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци* на случай, когда на объемлющем многообразии $\mathbb{M}$ задана не риманова геометрия, а произвольная аффинная геометрия с ненулевым кручением и неметричностью.

В заключение настоящего раздела вычислим нормальные компоненты $G_{\perp\perp}$ и $G_{\perp i}$ тензора Эйнштейна

$$G_{\alpha\beta} := \widetilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \widetilde{R},$$

которые играют важную роль при анализе уравнений движения общей теории относительности. Знак тильды в правой части, как и ранее, означает, что кручение и неметричность связности, заданной на $\mathbb{M}$, равны нулю. В этом случае тензор кривизны обладает дополнительной симметрией относительно перестановки индексов, и тензор внешней кривизны симметричен: $K_{ij} = K_{ji}$.

Ниже, для простоты, мы опустим знак тильды.

Сначала вычислим скалярную кривизну

$$R = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2R_{\perp\perp} + g^{ik} g^{jl} R_{ijkl},$$

где $R_{\perp\perp} = g^{ij} R_{i\perp j\perp}$ – нормальная составляющая тензора Риччи и учтено представление для обратной метрики (8.27). С учетом уравнений Гаусса–Петерсона–Кодацци (8.37) получаем равенство

$$g^{ik} g^{jl} R_{ijkl} = \hat{R} + K^2 - K^{ij} K_{ij},$$

где $\hat{R}$ – скалярная внутренняя кривизна гиперповерхности, $K := g^{ij} K_{ij}$ – скалярная внешняя кривизна гиперповерхности. Отсюда следуют выражения для нормальных компонент тензора Эйнштейна:

$$\begin{aligned} G_{\perp\perp} &= -\frac{1}{2}(\hat{R} + K^2 - K^{ij} K_{ij}), \\ G_{\perp i} &= \hat{\nabla}_j K_i{}^j - \hat{\nabla}_i K. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Важным обстоятельством является то, что эти компоненты тензора Эйнштейна вообще не содержат нормальных производных к гиперповерхности $\nabla_\perp$ от индуцированной метрики и тензора внешней кривизны. На гамильтоновом языке это означает отсутствие производных по времени, и что вакуумные уравнения Эйнштейна $G_{\perp\perp} = 0$ и $G_{\perp i} = 0$ представляют собой связи, поскольку компоненты тензора внешней кривизны $K^{ij}$, как будет показано в следующем разделе, пропорциональны импульсам, канонически сопряженным компонентам индуцированной метрики $g_{ij}$.

## 8.4. Кривизна в АДМ параметризации метрики

АДМ параметризация метрики (8.5) удобна для канонической формулировки общей теории относительности, в которой исходными независимыми переменными являются компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ (обобщенные координаты) и канонически сопряженные импульсы $p^{\alpha\beta}$. Однако, чтобы перейти от лагранжиана к гамильтониану, необходимо произвести довольно громоздкие вычисления, чем мы и займемся в настоящем разделе.

Для существенного упрощения вычислений следует воспользоваться результатами раздела 8.3, в котором описана геометрия гиперповерхностей. Будем считать, что пространство-время является топологическим произведением $\mathbb{M} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, где первый сомножитель соответствует времени $x^0$. Тогда сечения $x^0 = \mathsf{const}$ пространства-времени $\mathbb{M}$ задают семейство гиперповерхностей $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, которые, по предположению, являются пространственноподобными. В качестве координат на гиперповерхностях выберем пространственные координаты:

$$\{u^i\} \mapsto \{x^\mu\}.$$

При этом мы теряем возможность независимого преобразования координат в пространстве-времени $\mathbb{M}$ и пространственноподобной гиперповерхности $\mathbb{U}$, зато многие формулы упрощаются.

Матрица Якоби вложения гиперповерхности в рассматриваемом случае имеет вид

$$\{e^\alpha{}_i\} \mapsto \{0_\mu, \delta^\nu_\mu\}, \qquad \{e_\alpha{}^i\} \mapsto \{N^\mu, \delta^\mu_\nu\},$$

где символ $0_\mu$ обозначает строку, состоящую из $n-1$ нулей. Вложение индуцирует на гиперповерхностях метрику $g_{\mu\nu}$ согласно формуле (8.21).

Построим векторное поле $n = n^\alpha \partial_\alpha$, ортогональное семейству пространственноподобных гиперповерхностей $x^0 = \mathsf{const}$. Из условия ортогональности $(n, X) = 0$, где $X = X^\mu \partial_\mu$ – произвольный вектор, касательный к сечению $x^0 = 0$, следует, что

$$n = n^0(\partial_0 - N^\mu \partial_\mu),$$

где $n^0$ – произвольная отличная от нуля функция. Если, кроме того, положить $n^0 = 1/N$, то длина нормального вектора будет равна единице, $n^2 = 1$. Таким образом, единичный вектор, нормальный к сечениям $x^0 = \mathsf{const}$ имеет вид

$$n = \frac{1}{N}(\partial_0 - N^\mu \partial_\mu) \tag{8.40}$$

и всегда является времениподобным. Ему соответствует ортонормальная 1-форма

$$n = dx^0 N. \tag{8.41}$$

Заметим, что если функции хода равны нулю, $N_\mu = 0$, то нормальный вектор пропорционален вектору, касательному к оси времени, $n \sim \partial_0$.

Произвольный тензор на $\mathbb{M}$ можно разложить по базису $\{n, e_\mu\}$. В частности, для векторов и 1-форм справедливы разложения:

$$X^\alpha = X^\perp n^\alpha + \tilde{X}^\mu e^\alpha{}_\mu, \qquad X_\alpha = X_\perp n_\alpha + \tilde{X}_\mu e_\alpha{}^\mu,$$

где

$$\begin{aligned} X^\perp &= X^0 N, & \tilde{X}^\mu &= X^0 N^\mu + X^\mu, \\ X_\perp &= \frac{1}{N}(X_0 - N^\mu X_\mu), & \tilde{X}_\mu &= X_\mu. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Нетрудно проверить, что

$$X^\perp = X_\perp \qquad \text{и} \qquad \tilde{X}^\mu = \hat{g}^{\mu\nu} \tilde{X}_\nu.$$

Представления для метрики (8.26) всего пространства-времени и ее обратной (8.27) принимает вид

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= n_\alpha n_\beta + g_{\mu\nu} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu, \\ g^{\alpha\beta} &= n^\alpha n^\beta + \hat{g}^{\mu\nu} e_\mu{}^\alpha e_\nu{}^\beta. \end{aligned} \tag{8.43}$$

В касательном пространстве можно выбрать неголономный базис $n, \partial_\mu$, состоящий из касательных векторов к гиперповерхности $\partial_\mu$ и ортогонального вектора $n$. Обозначим тензорные индексы по отношению к этому базису латинскими буквами $a, b, \ldots$ . Тогда они принимают значения $\{a\} = \{\perp, \mu\} = \{\perp, 1, 2, 3\}$. В этом базисе метрика и ее обратная имеют блочно-диагональный вид:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad g^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{g}^{\mu\nu} \end{pmatrix}.$$

Слово "неголономный" означает, что в общем случае такой системы координат, в которой базис $n, \partial_\mu$ был бы координатным, не существует.

Связность (8.24), индуцированная на гиперповерхностях – это символы Кристоффеля $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho$, построенные по пространственной метрике $g_{\mu\nu}$.

Тензор внешней кривизны (8.30) гиперповерхности $x^0 = \mathsf{const}$ в АДМ параметризации метрики имеет вид

$$K_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}{}^0 N = \frac{1}{2N}(\hat{\nabla}_\mu N_\nu + \hat{\nabla}_\nu N_\mu - \dot{g}_{\mu\nu}), \tag{8.44}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени, $\dot{g}_{\mu\nu} := \partial_0 g_{\mu\nu}$, и $\hat{\nabla}_\mu N_\nu := \partial_\mu N_\nu - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho N_\rho$ – пространственная ковариантная производная. Тензор внешней кривизны симметричен, $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$, поскольку кручение в общей теории относительности равно нулю. В дальнейшем нам понадобится также след тензора внешней кривизны

$$K := K_\mu{}^\mu = \hat{g}^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}(2\hat{\nabla}_\mu N^\mu - \hat{g}^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu}). \tag{8.45}$$

При вычислении тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ пространства-времени $\mathbb{M}$ все производные по времени от пространственной части метрики $\dot{g}_{\mu\nu}$ удобно выражать через $K_{\mu\nu}$. Кроме этого, для исключения вторых производных по времени $\ddot{g}_{\mu\nu}$ нам понадобится производная по времени от тензора внешней кривизны,

$$\dot{K}_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}\left[\hat{\nabla}_\mu \dot{N}_\nu + \hat{\nabla}_\nu \dot{N}_\mu - \ddot{g}_{\mu\nu} - N^\rho(\hat{\nabla}_\mu \dot{g}_{\nu\rho} + \hat{\nabla}_\nu \dot{g}_{\mu\rho} - \hat{\nabla}_\rho \dot{g}_{\mu\nu})\right] - \frac{\dot{N}}{N} K_{\mu\nu},$$

где

$$\hat{\nabla}_\mu \dot{N}_\nu = \partial_\mu \dot{N}_\nu - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho \dot{N}_\rho$$

и куда при вычислениях мы должны подставить выражение для $\dot{g}_{\mu\nu}$ через $K_{\mu\nu}$.

Приступим к вычислению тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ для метрики, записанной в виде (8.5). Первый шаг состоит в вычислении символов Кристоффеля (2.15). Прямые выкладки приводят к следующим выражениям для линейно независимых символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}{}^0 &= \frac{1}{N}\left(\dot{N} + N^\rho \partial_\rho N + N^\rho N^\sigma K_{\rho\sigma}\right), \\
\Gamma_{00}{}^\mu &= \hat{g}^{\mu\nu}(\dot{N}_\nu - N\partial_\nu N - N^\rho \hat{\nabla}_\nu N_\rho) - \frac{N^\mu}{N}\left(\dot{N} + N^\rho \partial_\rho N + N^\rho N^\sigma K_{\rho\sigma}\right), \\
\Gamma_{0\mu}{}^0 &= \frac{1}{N}\left(\partial_\mu N + N^\nu K_{\mu\nu}\right), \\
\Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \hat{\nabla}_\mu N^\nu - N K_\mu{}^\nu - \frac{N^\nu}{N}(\partial_\mu N + N^\rho K_{\mu\rho}), \\
\Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= \frac{1}{N} K_{\mu\nu}, \\
\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho - \frac{N^\rho}{N} K_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{8.46}$$

В дальнейшем нам понадобятся два независимых следа символов Кристоффеля:

$$\Gamma_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\beta, \qquad \Xi^\alpha := g^{\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha.$$

Несложные вычисления приводят к формулам

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \frac{\dot N}{N} + \hat\nabla_\mu N^\mu - NK,\\
&\Gamma_\mu = \hat\Gamma_\mu + \frac{\partial_\mu N}{N},\\
&\Xi^0 = \frac{1}{N}K + \frac{1}{N^3}(\dot N - N^\mu\partial_\mu N),\\
&\Xi^\mu = \left(\hat g^{\rho\sigma} + \frac{N^\rho N^\sigma}{N^2}\right)\hat\Gamma_{\rho\sigma}{}^\mu - \frac{N^\mu}{N}K - \frac{N^\mu}{N^3}(\dot N - N^\rho\partial_\rho N) +\\
&\qquad + \frac{1}{N^2}\hat g^{\mu\rho}(\dot N_\rho - N\partial_\rho N - N^\sigma\hat\nabla_\rho N_\sigma - 2N^\sigma\hat\nabla_\sigma N_\rho + 2NN^\sigma K_{\rho\sigma}).
\end{aligned}
\tag{8.47}
$$

Выпишем также формулы дифференцирования по времени для символов Кристоффеля:

$$
\begin{aligned}
\partial_0\hat\Gamma_{\mu\nu\rho} &= \frac12(\hat\nabla_\mu\dot g_{\nu\rho} + \hat\nabla_\nu\dot g_{\mu\rho} - \hat\nabla_\rho\dot g_{\mu\nu}) + \hat\Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma\dot g_{\rho\sigma},\\
\partial_0\hat\Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma &= \frac12\hat g^{\sigma\rho}(\hat\nabla_\mu\dot g_{\nu\rho} + \hat\nabla_\nu\dot g_{\mu\rho} - \hat\nabla_\rho\dot g_{\mu\nu}),\\
\partial_0\hat\Gamma_\mu &= \frac12\hat g^{\nu\rho}\hat\nabla_\mu\dot g_{\nu\rho}.
\end{aligned}
\tag{8.48}
$$

В этих выражениях производные по времени $\dot g_{\mu\nu}$ также исключаются с помощью соотношения (8.44).

Теперь вычислим линейно независимые компоненты тензора кривизны:

$$
\begin{aligned}
R_{0\mu0\nu} &= -N\dot K_{\mu\nu} + \hat R_{\mu\rho\nu\sigma}N^\rho N^\sigma + NN^\rho(\hat\nabla_\mu K_{\nu\rho} + \hat\nabla_\nu K_{\mu\rho} - \hat\nabla_\rho K_{\mu\nu}) +\\
&\quad + N\hat\nabla_\mu\hat\nabla_\nu N + K_{\mu\nu}N^\rho N^\sigma K_{\rho\sigma} + N(K_\mu{}^\rho\hat\nabla_\nu N_\rho + K_\nu{}^\rho\hat\nabla_\mu N_\rho) -\\
&\quad - N^2K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho} - N^\rho N^\sigma K_{\mu\rho}K_{\nu\sigma},\\
R_{\mu\nu\rho0} &= \hat R_{\mu\nu\rho\sigma}N^\sigma + N(\hat\nabla_\mu K_{\nu\rho} - \hat\nabla_\nu K_{\mu\rho}) + (K_{\mu\rho}K_{\nu\sigma} - K_{\nu\rho}K_{\mu\sigma})N^\sigma,\\
R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \hat R_{\mu\nu\rho\sigma} + K_{\mu\rho}K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma}K_{\nu\rho},
\end{aligned}
\tag{8.49}
$$

где мы воспользовались формулой для коммутатора ковариантных производных:

$$(\hat\nabla_\mu\hat\nabla_\nu - \hat\nabla_\nu\hat\nabla_\mu)N_\rho = -\hat R_{\mu\nu\rho\sigma}N^\sigma.$$

Компоненты тензора кривизны, имеющие по крайней мере один временно́й индекс, относительно ортонормального базиса $n, e_\mu$ выглядят проще:

$$
\begin{aligned}
R_{\perp\mu\perp\nu} &= \frac1N\left(-\dot K_{\mu\nu} + \hat\nabla_\mu\hat\nabla_\nu N + K_{\mu\rho}\hat\nabla_\nu N^\rho + K_{\nu\rho}\hat\nabla_\mu N^\rho - NK_{\mu\rho}K_\nu{}^\rho + N^\rho\hat\nabla_\rho K_{\mu\nu}\right),\\
R_{\mu\nu\rho\perp} &= \hat\nabla_\mu K_{\nu\rho} - \hat\nabla_\nu K_{\mu\rho}.
\end{aligned}
\tag{8.50}
$$

Фактически, компоненты тензора кривизны $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ и $R_{\mu\nu\rho\perp}$ уже были получены в предыдущем разделе, см. формулы (8.37), (8.38), без прямых вычислений.

Тензор Риччи имеет следующие линейно независимые компоненты:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -N\hat{g}^{\mu\nu}\dot{K}_{\mu\nu} + \hat{R}_{\mu\nu}N^\mu N^\nu + NN^\mu(2\hat{\nabla}_\nu K^\nu{}_\mu - \partial_\mu K) + N\hat{\nabla}^\mu\hat{\nabla}_\mu N + \\
&\quad + N^\mu N^\nu K_{\mu\nu}K + 2NK^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\mu N_\nu - N^2K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - 2N^\mu N^\nu K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho} + \\
&\quad + \frac{N^\mu N^\nu}{N}\left(-\dot{K}_{\mu\nu} + N^\rho\hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} + \hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu N + 2K_\mu{}^\rho\hat{\nabla}_\nu N_\rho\right), \\
R_{0\mu} &= \frac{N^\nu}{N}\left(-\dot{K}_{\mu\nu} + N^\sigma\hat{\nabla}_\nu K_{\mu\sigma} + \hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu N + K_\mu{}^\rho\hat{\nabla}_\nu N_\rho + K_\nu{}^\rho\hat{\nabla}_\mu N_\rho\right) \\
&\quad + \hat{R}_{\mu\nu}N^\nu + N\left(\hat{\nabla}_\nu K^\nu{}_\mu - \partial_\mu K\right) + K_{\mu\nu}N^\nu K - 2K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho}N^\nu, \\
R_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{N}\left(-\dot{K}_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu N + K_\mu{}^\rho\hat{\nabla}_\nu N_\rho + K_\nu{}^\rho\hat{\nabla}_\mu N_\rho + N^\rho\hat{\nabla}_\rho K_{\mu\nu}\right) + \\
&\quad + K_{\mu\nu}K - 2K_\mu{}^\rho K_{\nu\rho}.
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Опять же, компоненты тензора Риччи относительно неголономного базиса $n, e_\mu$ существенно проще:

$$\begin{aligned}
R_{\perp\perp} &= -\frac{1}{N}\hat{g}^{\mu\nu}\dot{K}_{\mu\nu} + \frac{1}{N}\hat{\nabla}^\mu\hat{\nabla}_\mu N + \frac{2}{N}K^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\mu N_\nu - K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} + \frac{N^\mu}{N}\partial_\mu K, \\
R_{\perp\mu} &= \hat{\nabla}_\nu K^\nu{}_\mu - \partial_\mu K.
\end{aligned} \tag{8.52}$$

При этом пространственные компоненты тензора Риччи $R_{\mu\nu}$ относительно базиса $n, \partial_\mu$ остаются прежними, что следует из последнего равенства (8.42).

Далее, вычисляем скалярную кривизну

$$R = \hat{R} + \frac{2}{N}\left(-\hat{g}^{\mu\nu}\dot{K}_{\mu\nu} + \hat{\nabla}^\mu\hat{\nabla}_\mu N + 2K^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\mu N_\nu + N^\mu\partial_\mu K\right) - 3K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} + K^2. \tag{8.53}$$

Вакуумные уравнения Эйнштейна

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0$$

также можно переписать в базисе $n, e^\mu$. Выражения для $G_{\perp\perp}$ и $G_{0\perp}$ уже были получены в предыдущем разделе менее трудоемким образом (8.39). Выражение для $G_{\mu\nu}$ в АДМ параметризации метрики следует из выражения для тензора Риччи (8.51) и скалярной кривизны (8.53). Оно громоздко и мы не будем его выписывать, так как в дальнейшем оно нам не понадобится.

Если функции хода равны нулю, то справедливы равенства

$$R_{00} = N^2R_{\perp\perp}, \qquad R_{0\mu} = NR_{\perp\mu},$$

поскольку в этом случае метрика имеет блочно-диагональный вид, и времениподобные векторы $\partial_0$ перпендикулярны пространственным гиперповерхностям.

Как уже отмечалось, тензор Эйнштейна удовлетворяет свернутым тождествам Бианки. Эти тождества полезно переписать в АДМ параметризации метрики:

$$\nabla_\beta G^{\beta\alpha} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[(\nabla_\beta G^{\beta\alpha})n_\alpha = 0, \quad (\nabla_\beta G^{\beta\alpha})e_\alpha{}^\mu = 0\right].$$

После довольно утомительных вычислений получим равенства:

$$(\nabla_\beta G^{\beta\alpha})n_\alpha = \frac{1}{N}\dot{G}^{\perp\perp} - \frac{N^\mu}{N}\partial_\mu G^{\perp\perp} - G^{\perp\perp}K + \hat{\nabla}_\mu G^{\mu\perp} + 2\frac{\partial_\mu N}{N}G^{\mu\perp} + G^{\mu\nu}K_{\mu\nu}, \tag{8.54}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_\beta G^{\beta\alpha})e_\alpha{}^\mu &= \frac{1}{N}\dot{G}^{\perp\mu} - \frac{N^\nu}{N}\hat{\nabla}_\nu G^{\perp\mu} - G^{\perp\mu}K + \hat{\nabla}_\nu G^{\nu\mu} + \frac{\partial_\nu N}{N}G^{\nu\mu} - \\
&\quad - \frac{1}{N}G^{\perp\perp}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\nu N + \frac{1}{N}G^{\perp\nu}\hat{\nabla}_\nu N^\mu - 2G^{\perp\nu}K_\nu{}^\mu.
\end{aligned} \tag{8.55}$$

Эти тождества будут полезны при анализе вторичных связей в общей теории относительности.

### 8.5. Гамильтониан

Скалярная кривизна содержит вторые производные от компонент метрики как по времени, так и по пространственным координатам и поэтому неудобна для канонической формулировки общей теории относительности. Чтобы исключить из лагранжиана все вторые производные, в разделе 8.1 к действию был добавлен граничный член. Однако для канонической формулировки достаточно исключить из лагранжиана только вторые производные по времени. Наиболее простой вид лагранжиан принимает после добавления следующего граничного члена

$$L_{\text{ADM}} = N\hat{e}R + 2\partial_0(\hat{e}K) - 2\partial_\mu(\hat{e}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\nu N), \tag{8.56}$$

где

$$\hat{e} := \det \hat{e}_\mu{}^i = \sqrt{|\hat{g}|} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}.$$

Прямые вычисления приводят к следующему простому выражению

$$L_{\text{ADM}} = N\hat{e}\left(K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - K^2 + \hat{R}\right). \tag{8.57}$$

Теперь нетрудно перейти к гамильтонову формализму. Во-первых, АДМ-лагранжиан не содержит производных по времени от функции хода $N$ и функций сдвига $N_\mu$. Это значит, что теория содержит $n$ первичных связей:

$$p^0 := \frac{\partial L_{\text{ADM}}}{\partial \dot{N}} = 0, \qquad p^\mu := \frac{\partial L_{\text{ADM}}}{\partial \dot{N}_\mu} = 0, \tag{8.58}$$

число которых совпадает с числом независимых функций, параметризующих диффеоморфизмы. Импульсы, канонически сопряженные к пространственной метрике $g_{\mu\nu}$, имеют вид

$$p^{\mu\nu} := \frac{\partial L_{\text{ADM}}}{\partial \dot{g}_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2N}\frac{\partial L_{\text{ADM}}}{\partial K_{\mu\nu}} = -\hat{e}\left(K^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}K\right), \tag{8.59}$$

где мы воспользовались выражением для внешней кривизны (8.44). Отсюда следует, что обобщенные импульсы пропорциональны тензору внешней кривизны. Отметим, что импульсы являются не тензорами относительно преобразований координат $x^\mu$, а тензорными плотностями степени $-1$, как и определитель репера, степень которого, по определению, равна

$$\deg \hat{e} = -1.$$

Поэтому ковариантная производная от импульсов в соответствии с правилом ковариантного дифференцирования имеет вид

$$\hat{\nabla}_\mu p^{\nu\rho} = \partial_\mu p^{\nu\rho} + \hat{\Gamma}_{\mu\sigma}{}^\nu p^{\sigma\rho} + \hat{\Gamma}_{\mu\sigma}{}^\rho p^{\nu\sigma} - \hat{\Gamma}_\mu p^{\nu\rho}.$$

Чтобы исключить из АДМ-лагранжиана скорости $\dot{g}_{\mu\nu}$, разложим импульсы на неприводимые компоненты, выделив из $p^{\mu\nu}$ след,

$$p^{\mu\nu} = \tilde{p}^{\mu\nu} + \frac{1}{n-1}p\hat{g}^{\mu\nu}, \tag{8.60}$$

где мы ввели след импульсов

$$p := p^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \hat{e}(n-2)K \tag{8.61}$$

и симметричную бесследовую часть

$$\tilde{p}^{\mu\nu} = \tilde{p}^{\nu\mu} := -\hat{e}\left(K^{\mu\nu} - \frac{1}{n-1}\hat{g}^{\mu\nu}K\right), \qquad \tilde{p}^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 0.$$

Импульсы $p^{\mu\nu}$ и внешняя кривизна $K^{\mu\nu}$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Из формулы (8.59) следует выражение внешней кривизны через импульсы

$$K^{\mu\nu} = -\frac{1}{\hat{e}}\left(p^{\mu\nu} - \frac{1}{n-2}g^{\mu\nu}p\right). \tag{8.62}$$

Теперь можно решить уравнение (8.59) относительно скоростей, воспользовавшись соотношением (8.44),

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \frac{2N}{\hat{e}}\left(p_{\mu\nu} - \frac{1}{(n-2)}pg_{\mu\nu}\right) + \hat{\nabla}_\mu N_\nu + \hat{\nabla}_\nu N_\mu.$$

Несложные вычисления приводят к гамильтоновой плотности

$$H = p^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} - L_{\text{ADM}} = NH_\perp + N^\mu H_\mu + 2\partial_\mu(p^{\mu\nu}N_\nu), \tag{8.63}$$

где

$$\begin{aligned} H_\perp &:= \frac{1}{\hat{e}}\left(p^{\mu\nu}p_{\mu\nu} - \frac{1}{(n-2)}p^2\right) - \hat{e}\hat{R}, \\ H_\mu &:= -2\hat{\nabla}_\nu p^\nu{}_\mu = -2\partial_\nu p^\nu{}_\mu + \partial_\mu g_{\nu\rho}p^{\nu\rho}, \end{aligned} \tag{8.64}$$

и $p_{\mu\nu} := g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}p^{\rho\sigma}$.

Замечание. Ковариантная производная от импульсов в последнем выражении содержит только одно слагаемое с символами Кристоффеля, так как импульсы являются тензорными плотностями.

Отбрасывая в выражении для гамильтониана (8.63) дивергенцию, приходим к окончательному выражению для гамильтониана

$$\mathcal{H}_{\text{ADM}} = \int d\boldsymbol{x} H_{\text{ADM}} = \int d\boldsymbol{x}(NH_\perp + N^\mu H_\mu). \tag{8.65}$$

Для функционалов, полученных интегрированием по пространственным сечениям $x^0 = \mathsf{const}$, будем использовать каллиграфический шрифт.

Перепишем выражение для $H_\perp$ в терминах неприводимых компонент импульсов (8.60):

$$H_\perp = \frac{1}{\hat{e}}\left[\tilde{p}^{\mu\nu}\tilde{p}_{\mu\nu} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}p^2\right] - \hat{e}\hat{R}.$$

Отсюда следует, что квадратичная форма импульсов в $H_\perp$ при $n \geqslant 3$ не является положительно определенной. Отсутствие положительной определенности квадратичной формы импульсов в гамильтониане представляет серьезные трудности для физической интерпретации моделей. В рассматриваемом случае не все компоненты импульсов являются физическими, так как общая теория относительности инвариантна относительно общих преобразований координат. После исключения нефизических степеней свободы с помощью связей и калибровочных условий квадратичная форма импульсов для физических степеней свободы будет положительно определена.

### 8.6. Вторичные связи

Для завершения построения гамильтонова формализма необходимо исследовать согласованность первичных связей (8.58) с уравнениями движения. Фазовое пространство общей теории относительности бесконечномерно и описывается $n(n+1)$ сопряженными координатами и импульсами: $(N, p^0)$, $(N_\mu, p^\mu)$, $(g_{\mu\nu}, p^{\mu\nu})$, в каждой точке пространства $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$. На этом фазовом пространстве задана каноническая пуассонова структура с помощью одновременны́х скобок Пуассона:

$$[N, p'^0] = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \qquad [N_\mu, p'^\nu] = \delta_\mu^\nu \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \qquad [g_{\mu\nu}, p'^{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \tag{8.66}$$

где штрих у полевой переменной означает, что она рассматривается в точке $\boldsymbol{x}' = (x'^1, \dots, x'^{n-1})$. Все поля рассматриваются в момент времени $t = x^0$. В правых частях скобок Пуассона, для краткости, использованы следующие обозначения для пространственной $(n-1)$-мерной $\delta$-функции и симметризованной комбинации символов Кронекера:

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') &:= \delta(x^1 - x'^1) \dots \delta(x^{n-1} - x'^{n-1}), \\ \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} &:= \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma + \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho). \end{aligned} \tag{8.67}$$

Если заданы два функционала

$$\mathcal{F} = \int d\boldsymbol{x}\, F, \qquad \mathcal{G} = \int d\boldsymbol{x}\, G,$$

где $F$ и $G$ – некоторые функции от пространственной метрики $g_{\mu\nu}$, сопряженных импульсов $p^{\mu\nu}$ и их производных, то скобка Пуассона этих функционалов определяется следующим интегралом

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] := \int d\boldsymbol{x} \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\delta G}{\delta p^{\mu\nu}} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta p^{\mu\nu}} \frac{\delta G}{\delta g_{\mu\nu}} \right). \tag{8.68}$$

Напомним, что сами компоненты метрики и импульсов также можно рассматривать в виде функционалов. Например,

$$g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{x}' g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}') \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}').$$

Тогда последняя скобка Пуассона в (8.66) является следствием общего определения канонической пуассоновой структуры на множестве функционалов (8.68).

Аналогично определяется скобка Пуассона для функционалов, зависящих от полного набора канонических переменных: $(N, p^0)$, $(N_\mu, p^\mu)$, $(g_{\mu\nu}, p^{\mu\nu})$.

Рассмотрим теперь гамильтоновы уравнения движения для первичных связей (8.58):

$$\begin{aligned} \dot{p}^0 &= [p^0, \mathcal{H}_{\text{ADM}}] = -\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{ADM}}}{\delta N} = -H_\perp, \\ \dot{p}^\mu &= [p^\mu, \mathcal{H}_{\text{ADM}}] = -\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{ADM}}}{\delta N^\mu} = -H^\mu. \end{aligned}$$

Из условия согласованности первичных связей с уравнениями движения $\dot{p}^0 = 0$, $\dot{p}^\mu = 0$ следуют вторичные связи:

$$H_\perp = 0, \qquad H_\mu = 0. \tag{8.69}$$

Отметим, что вторичные связи являются не тензорами, а тензорными плотностями степени $-1$. Кроме того, вместо связей $H^\mu$ удобнее рассматривать эквивалентную систему связей с опущенным индексом $H_\mu := g_{\mu\nu}H^\nu$. В следующем разделе будет показано, что эти связи определяют генераторы преобразований координат на сечениях $x^0 = \mathsf{const}$ и удовлетворяют более простой алгебре.

Связи $H_\mu$ линейны по импульсам и метрике. Связь $H_\perp$ квадратична по импульсам и неполиномиальна по метрике $g_{\mu\nu}$, поскольку зависит от корня из определителя метрики $\hat{e}$ и обратной метрики $\hat{g}^{\mu\nu}$. Последнее обстоятельство является существенной технической трудностью при построении теории возмущений.

Вторичные связи не зависят от канонических переменных $(N, p^0)$, $(N_\mu, p^\mu)$, и их можно исключить, рассматривая $n(n-1)\times\infty^{n-1}$-мерное фазовое пространство переменных $g_{\mu\nu}$ и $p^{\mu\nu}$, на которые наложены связи (8.69). В этом случае функция хода $N$ и функции сдвига $N_\mu$ рассматриваются как множители Лагранжа в задаче на условный экстремум для действия

$$S = \int dx(p^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} - H_{\text{ADM}}). \tag{8.70}$$

Поскольку гамильтониан общей теории относительности (8.65) представляет собой линейную комбинацию связей, то для исследования согласованности вторичных связей (8.69) с уравнениями движения необходимо вычислить скобки Пуассона связей между собой. Алгебра связей в общей теории относительности хорошо известна:

$$[H_\perp, H'_\perp] = -(H_\mu\hat{g}^{\mu\nu} + H'_\mu\hat{g}'^{\mu\nu})\delta_\nu, \tag{8.71}$$

$$[H_\perp, H'_\mu] = -H'_\perp\delta_\mu, \tag{8.72}$$

$$[H_\mu, H'_\nu] = -H_\nu\delta_\mu - H'_\mu\delta_\nu, \tag{8.73}$$

где введено сокращенное обозначение для производной $\delta$-функции:

$$\delta_\mu := \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}).$$

Вид двух скобок Пуассона (8.72) и (8.73) можно найти, не прибегая к прямым вычислениям. С этой целью рассмотрим функционал

$$\mathcal{T}_u := -\int d\boldsymbol{x}\; u^\mu H_\mu,$$

где $u^\mu$ малое дифференцируемое векторное поле, которое мы рассматриваем как инфинитезимальный параметр преобразования. Вычисление скобок Пуассона координат фазового пространства $g_{\mu\nu}$, $p^{\mu\nu}$ с $\mathcal{T}_u$ приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
\delta_u g_{\mu\nu} &:= [g_{\mu\nu}, \mathcal{T}_u] = -\partial_\mu u^\rho g_{\rho\nu} - \partial_\nu u^\rho g_{\mu\rho} - u^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu},\\
\delta_u p^{\mu\nu} &:= [p^{\mu\nu}, \mathcal{T}_u] = \partial_\rho u^\mu p^{\rho\nu} + \partial_\rho u^\nu p^{\mu\rho} - \partial_\rho(u^\rho p^{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

Это значит, что функционал $\mathcal{T}_u$, который определяется связями $H_\mu$, является генератором общих преобразований координат на гиперповерхностях $x^0 = \mathsf{const}$. Напомним, что импульсы $p^{\mu\nu}$ являются тензорными плотностями степени $-1$. Алгебра преобразований координат хорошо известна и задается скобкой Пуассона (8.73). Скобку Пуассона (8.72) также можно не вычислять явно. Ее вид следует из того, что связь $H_\perp$ является скалярной плотностью степени $-1$. Таким образом, необходимо вычислить только скобку Пуассона (8.71). Эти вычисления очень громоздки, и впервые, по-видимому, были проделаны намного позже ДеВиттом [84]. В следующем разделе мы вычислим эту скобку после канонического преобразования, приводящего связи к полиномиальному виду, что существенно упрощает вычисления.

Ввиду того что связи $H_\mu$ задают только пространственные диффеоморфизмы, мы будем называть их кинематическими. Они также не зависят от констант связи в действии, если таковые имеются. Связь $H_\perp$ называется динамической, так как она определяет развитие начальных данных во времени и существенно зависит от исходного действия, в частности, от констант связи.

Для сравнения приведем скобку Пуассона связей $H^\mu = 0$ с контравариантным индексом, которые эквивалентны связям $H_\mu = 0$,

$$[H^\mu, H'^\nu] = \left(\hat g^{\mu\nu} H^\rho + \hat g'^{\mu\nu} H'^\rho\right)\delta_\rho + \left(\hat g^{\mu\rho}\partial_\rho g_{\sigma\lambda}\hat g^{\nu\sigma} - \hat g^{\nu\rho}\partial_\rho g_{\sigma\lambda}\hat g^{\mu\sigma}\right) H^\lambda \delta.$$

Как видим, данная скобка Пуассона выглядит сложнее (8.73). Это говорит о том, что выбор вида связей из эквивалентных наборов является очень важным и может привести к существенному упрощению вычислений. К сожалению, общего рецепта как поступать в таких случаях не существует, и действует метод “пристального всматривания”.

Теперь посмотрим на вторичные связи с другой точки зрения. Сравнение выражения для связей (8.64) с тензором Эйнштейна (8.39) приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} H_\perp &= 2\hat e G_{\perp\perp} = \frac{2\hat e}{N^2}(G_{00} - 2N^\mu G_{0\mu} + N^\mu N^\nu G_{\mu\nu}),\\ H_\mu &= 2\hat e G_{\perp\mu} = \frac{2\hat e}{N}(G_{0\mu} - N^\nu G_{\nu\mu}). \end{aligned}$$

Мы видим, что вторичные связи (8.69) эквивалентны четырем уравнениям Эйнштейна

$$G_{\perp\perp} = 0, \qquad G_{\perp\mu} = 0,$$

которые представляют собой определенные комбинации всех вакуумных уравнений Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$. Если выполнены все уравнения Эйнштейна, а также вторичные связи в начальный момент времени, то вторичные связи будут выполнены также во все последующие моменты времени. Это следует из того, что $\dot G_{\perp\perp} = 0$ и $\dot G_{\perp\mu} = 0$ как следствие свернутых тождеств Бианки (8.54), (8.55). Таким образом, мы доказали, что вторичные связи в общей теории относительности согласованы с уравнениями движения, т.е. представляют собой связи первого рода. Для этого необязательно вычислять в явном виде алгебру связей (8.71)–(8.73). Однако знание алгебры связей полезно.

В заключение данного раздела выпишем канонические уравнения движения для пространственных компонент метрики и импульсов

$$\dot g_{\mu\nu} = \frac{2N}{\hat e} p_{\mu\nu} - \frac{2N}{\hat e(n-2)} g_{\mu\nu} p + \hat\nabla_\mu N_\nu + \hat\nabla_\nu N_\mu, \tag{8.74}$$

$$\begin{aligned} \dot p^{\mu\nu} = {}& \frac{N}{2\hat e}\hat g^{\mu\nu}\left(p^{\rho\sigma}p_{\rho\sigma} - \frac{1}{n-2}p^2\right) - \frac{2N}{\hat e}\left(p^{\mu\rho}p^\nu{}_\rho - \frac{1}{n-2}p^{\mu\nu}p\right) -\\ & - \hat e N\left(\hat R^{\mu\nu} - \frac12 \hat g^{\mu\nu}\hat R\right) + \hat e(\Delta N \hat g^{\mu\nu} - \hat\nabla^\mu\hat\nabla^\nu N) -\\ & - p^{\mu\rho}\hat\nabla_\rho N^\nu - p^{\nu\rho}\hat\nabla_\rho N^\mu + \hat\nabla_\rho(N^\rho p^{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{8.75}$$

где $\Delta := \hat\nabla^\mu\hat\nabla_\mu$ – оператор Лапласа–Бельтрами.

Уравнение (8.74), конечно, совпадает с определением импульсов (8.59). Уравнения для импульсов (8.75) эквивалентны уравнениям Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 0$. Чтобы доказать это, запишем уравнения (8.75) в виде

$$\dot p^{\mu\nu} - (\dots)^{\mu\nu} = 0,$$

где точки обозначают все слагаемые в правой части (8.75). Тогда можно проверить, что выполнено равенство

$$g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}[\dot{p}^{\rho\sigma} - (\dots)^{\rho\sigma}] = N\hat{e}G_{\mu\nu}.$$

Таким образом, канонические уравнения движения (8.74), (8.75) с учетом уравнений связей (8.69) эквивалентны полной системе вакуумных уравнений Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$.

## 8.7. Полиномиальная гамильтонова форма

Гамильтониан для лагранжиана Гильберта–Эйнштейна(8.65), построенный ранее, полиномиален по импульсам $p^{\mu\nu}$, но неполиномиален по компонентам пространственной части метрики $g_{\mu\nu}$, так как содержит скалярную кривизну $\hat{R}$ и определитель репера, которые входят в динамическую связь $H_\perp$. В настоящем разделе мы опишем каноническое преобразование, которое приводит к полиномиальной форме гамильтониана и, следовательно, к полиномиальной форме гамильтоновых уравнений движения. Это преобразование является аналогом полиномиальной лагранжевой формы действия Гильберта–Эйнштейна, рассмотренной в разделе 7.7.

Идея канонического преобразования состоит в следующем. Импульсы $p^{\mu\nu}$ приводимы и разлагаются на бесследовую часть $\tilde{p}^{\mu\nu}$ и след $p$ в соответствии с формулой (8.60). При вычислениях, как правило, удобнее работать с неприводимыми компонентами, поскольку много слагаемых автоматически сокращаются. Поставим вопрос: “Нельзя ли совершить такое каноническое преобразование, после которого новыми импульсами будут неприводимые компоненты $\tilde{p}^{\mu\nu}$ и $p$?”. Этот вопрос нетривиален, потому что разложение импульсов включает метрику, компоненты которой сами являются координатами фазового пространства. Ответ на поставленный вопрос отрицательный, потому что скобка Пуассона импульсов между собой отлична от нуля. Например, $[\tilde{p}^{\mu\nu}, p'] \neq 0$, где $p' := p(t, \boldsymbol{x}')$. Однако существует такое каноническое преобразование, что новые импульсы будут пропорциональны неприводимым компонентам $\tilde{p}^{\mu\nu}$ и $p$. Построением этого канонического преобразования мы и займемся в настоящем разделе.

Рассмотрим каноническое преобразование

$$(g_{\mu\nu}, p^{\rho\sigma}) \quad \mapsto \quad (k_{\mu\nu}, P^{\rho\sigma}), (\varrho, P), \tag{8.76}$$

к новым парам канонически сопряженных координат $k_{\mu\nu}, \varrho$ и импульсов $P^{\mu\nu}, P$, где на координаты $k_{\mu\nu}$ и сопряженные им импульсы $P^{\mu\nu}$ наложены дополнительные условия

$$|\operatorname{det} k_{\mu\nu}| = 1, \qquad P^{\mu\nu}k_{\mu\nu} = 0. \tag{8.77}$$

В качестве производящего функционала канонического преобразования выберем функционал

$$\mathcal{F} = -\int d\boldsymbol{x}\, \varrho^s k_{\mu\nu} p^{\mu\nu}, \qquad s \in \mathbb{R}, \quad s \neq 0, \tag{8.78}$$

зависящий от новых координат $\varrho, k_{\mu\nu}$ и старых импульсов $p^{\mu\nu}$, а также от вещественного параметра $s$, который будет определен позже. Тогда старые координаты и новые импульсы определяются вариационными производными (см. раздел 6.1.11)

$$g_{\mu\nu} := -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta p^{\mu\nu}} = \varrho^s k_{\mu\nu}, \tag{8.79}$$

$$P^{\mu\nu} := -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta k_{\mu\nu}} = \varrho^s \tilde{p}^{\mu\nu}, \tag{8.80}$$

$$P := -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varrho} = \frac{s}{\varrho}p. \tag{8.81}$$

При вычислении вариационной производной по $k_{\mu\nu}$ учтено условие $|\det k_{\mu\nu}| = 1$, из которого вытекает ограничение на вариации $k^{\mu\nu}\delta k_{\mu\nu} = 0$, где $k^{\mu\nu}$ – тензорная плотность, обратная к $k_{\mu\nu}$: $k^{\mu\nu}k_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma}$. Тем самым равенство нулю следа импульсов (8.77) автоматически следует из условия единичности определителя плотности $k_{\mu\nu}$ для производящего функционала (8.78). В выражении (8.81) учтено соотношение (8.79).

По сути дела, в качестве новой канонической переменной из метрики выделен ее определитель в некоторой степени, как следует из равенства (8.79):

$$|\det g_{\mu\nu}| = \hat{e}^2 = \varrho^{s(n-1)}.$$

Поскольку метрика $g_{\mu\nu}$ невырождена, то отсюда, в частности, следует равенство $\varrho > 0$.

В дальнейшем симметричную тензорную плотность с единичным определителем $k_{\mu\nu}$ мы, для краткости, также будем называть метрикой.

Из формул (8.80), (8.81) следует, что новые импульсы $P^{\mu\nu}$ и $P$ пропорциональны неприводимым компонентам старых импульсов $\tilde{p}^{\mu\nu}$ и $p$.

Отметим, что все новые канонические переменные являются тензорными плотностями следующих степеней:

$$\begin{aligned} \deg k_{\mu\nu} &= \frac{2}{n-1}, & \deg \varrho &= -\frac{2}{s(n-1)}, \\ \deg P^{\mu\nu} &= -\frac{2}{n-1} - 1, & \deg P &= \frac{2}{s(n-1)} - 1. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить скалярную кривизну $\hat{R}$, входящую в связь (8.64), заметим, что каноническое преобразование (8.79) имеет вид преобразования Вейля $g_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\phi}k_{\mu\nu}$, где $\phi = s\ln\varrho/2$. Прямые вычисления приводят к следующему выражению для скалярной кривизны сечения $x^0 = \mathrm{const}$ в новых координатах:

$$\hat{R} = \varrho^{-s-2}\left[\varrho^2 R^{(k)} + s(n-2)\varrho\partial_\mu(k^{\mu\nu}\partial_\nu\varrho) + s(n-2)\left(s\frac{n-3}{4} - 1\right)(\partial\varrho)^2\right], \tag{8.82}$$

где $(\partial\varrho)^2 := k^{\mu\nu}\partial_\mu\varrho\partial_\nu\varrho$. Скалярная кривизна, построенная по метрике $k_{\mu\nu}$, принимает удивительно простой вид

$$R^{(k)} = \partial^2_{\mu\nu}k^{\mu\nu} + \frac{1}{2}k^{\mu\nu}\partial_\rho k_{\mu\sigma}\partial_\nu k^{\rho\sigma} - \frac{1}{4}k^{\mu\nu}\partial_\mu k_{\rho\sigma}\partial_\nu k^{\rho\sigma}. \tag{8.83}$$

Из единичности определителя метрики следует, что компоненты обратной метрики $k^{\mu\nu}$ являются полиномами степени $n-2$ по компонентам $k_{\mu\nu}$:

$$k^{\mu\nu} = \frac{1}{(n-2)!}\hat{\varepsilon}^{\mu\rho_1\dots\rho_{n-2}}\hat{\varepsilon}^{\nu\sigma_1\dots\sigma_{n-2}}k_{\rho_1\sigma_1}\dots k_{\rho_{n-2}\sigma_{n-2}},$$

где $\hat{\varepsilon}^{\mu_1\dots\mu_{n-1}}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность ранга $n-1$. Поэтому скалярная кривизна $R^{(k)}$ полиномиальна как по метрике $k_{\mu\nu}$, так и по обратной метрике $k^{\mu\nu}$.

Динамическая связь в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} H_\perp = \varrho^{-\frac{s(n-1)}{2}}&\left[P^{\mu\nu}P_{\mu\nu} - \frac{\varrho^2}{s^2(n-1)(n-2)}P^2\right] - \\ &- \varrho^{\frac{s(n-1)}{2}-s-2}\left[\varrho^2 R^{(k)} + s(n-2)\varrho\partial_\mu(k^{\mu\nu}\partial_\nu\varrho) + s(n-2)\left(s\frac{n-3}{4} - 1\right)(\partial\varrho)^2\right], \end{aligned}$$

где опускание индексов у импульсов производится с помощью новой метрики, $P_{\mu\nu} := k_{\mu\rho}k_{\nu\sigma}P^{\rho\sigma}$.

Проанализируем возможность такого выбора постоянной $s$, чтобы динамическая связь имела полиномиальный вид. Оба выражения в квадратных скобках полиномиальны по всем динамическим переменным. Поскольку $n \geqslant 3$, то для положительности степени плотности $\varrho$ перед первой квадратной скобкой необходимо выполнение неравенства $s < 0$. В этом случае степень $\varrho$ перед второй квадратной скобкой будет отрицательна. Таким образом, за счет выбора параметра $s$ добиться полиномиальности самой связи $H_\perp$ нельзя. Однако, связь можно умножить целиком на произвольный множитель, отличный от нуля. При этом поверхность в фазовом пространстве, определяемая данной связью не изменится. Минимальная степень $\varrho$, на которую необходимо умножить $H_\perp$ будет тогда, когда степени $\varrho$ перед квадратными скобками будут равны. Отсюда следует равенство

$$s = \frac{2}{n-2}.$$

Тогда, умножив динамическую связь на степень $\rho$,

$$K_\perp := \varrho^{\frac{n-1}{n-2}} H_\perp, \tag{8.84}$$

получим эквивалентную полиномиальную связь

$$K_\perp = P^{\mu\nu}P_{\mu\nu} - \frac{n-2}{4(n-1)}\varrho^2P^2 - \varrho^2R^{(k)} - 2\varrho\partial_\mu(k^{\mu\nu}\partial_\nu\rho) + \frac{n-1}{n-2}(\partial\varrho)^2 = 0. \tag{8.85}$$

Кинематические связи в новых динамических переменных сохраняют свою полиномиальность:

$$H_\mu = -2\partial_\nu(P^{\nu\sigma}k_{\sigma\mu}) + P^{\nu\sigma}\partial_\mu k_{\nu\sigma} - \frac{n-2}{n-1}\partial_\mu(P\varrho) + P\partial_\mu\varrho = 0. \tag{8.86}$$

Исходя из явного выражения для новых канонических переменных (8.79)–(8.81), вычислим основные скобки Пуассона. Отличными от нуля являются только три скобки:

$$[k_{\mu\nu}, P'^{\varrho\sigma}] = \left(\delta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} - \frac{1}{n-1}k_{\mu\nu}k^{\rho\sigma}\right)\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}), \tag{8.87}$$

$$[P^{\mu\nu}, P'^{\rho\sigma}] = \frac{1}{n-1}\big(P^{\mu\nu}k^{\rho\sigma} - P^{\rho\sigma}k^{\mu\nu}\big)\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}), \tag{8.88}$$

$$[\varrho, P'] = \delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}), \tag{8.89}$$

где

$$\delta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\big(\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu + \delta^\sigma_\mu\delta^\rho_\nu\big).$$

Скобка Пуассона (8.87) не имеет канонического вида для фазовых переменных. Появление дополнительного слагаемого в (8.87) связано с тем, что на поля $k_{\mu\nu}$ и $P^{\mu\nu}$ наложены дополнительные условия (8.77). По этой же причине отлична от нуля скобка Пуассона (8.88).

Нетрудно проверить, что пуассонова структура, определяемая скобками Пуассона (8.87)–(8.89) является вырожденной. Это значит, что все многообразие $\mathbb{N}$, задаваемое координатами $(k_{\mu\nu}, P^{\mu\nu})$ и $(\varrho, P)$ является не симплектическим, а только пуассоновым многообразием (см. раздел 4.3). На пуассоновом многообразии $\mathbb{N}$ существуют две функции Казимира:

$$c^1 := \mathsf{det}\, k_{\mu\nu}, \qquad c^2 := P^{\mu\nu}k_{\mu\nu}.$$

Действительно, из определения пуассоновой структуры (8.87)–(8.89) следует, что следующие скобки Пуассона равны нулю:

$$[c^{1,2}, k'_{\mu\nu}] = [c^{1,2}, P'^{\mu\nu}] = [c^{1,2}, \varrho'] = [c^{1,2}, P'] = 0.$$

Отсюда вытекает, что скобка Пуассона $[c^{1,2}, f'] = 0$, где $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{N})$ – произвольная дифференцируемая функция на $\mathbb{N}$. Пуассонова структура, ограниченная на сечения $\mathbb{V} \subset \mathbb{N}$, которые определяются уравнениями $c^1 = \mathsf{const}$ и $c^2 = \mathsf{const}$, невырождена. Следовательно, эти сечения являются симплектическими. Новым фазовым пространством общей теории относительности в рассматриваемом случае является подмногообразие $\mathbb{V} \subset \mathbb{N}$, определяемое двумя фиксированными значениями функций Казимира (8.77). Строго говоря, каноническое преобразование (8.76) является каноническим, т.е. сохраняющим вид скобок Пуассона, только между исходным фазовым пространством и подмногообразием $\mathbb{V}$. Полиномиальность связей достигнута за счет расширения исходного фазового пространства до пуассонова многообразия $\mathbb{N}$. Если решить дополнительные связи (8.77) явно, то полиномиальность будет нарушена. В этом нет ничего необычного. Например, электродинамика содержит связи, явное решение которых приводит даже к нелокальному действию для физических степеней свободы (см., например, [85]).

Рассмотрим алгебру связей. Поскольку вместо динамической связи $H_\perp$ мы ввели новую связь $K_\perp$, то алгебра связей изменится. Несложные вычисления приводят к равенствам

$$[K_\perp, K'_\perp] = -(\varrho^2 H^\mu + \varrho'^2 H'^\mu)\delta_\mu(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}), \tag{8.90}$$

$$[K_\perp, H'_\mu] = -(K_\perp + K'_\perp)\delta_\mu(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}), \tag{8.91}$$

$$[H_\mu, H'_\nu] = -H_\nu\delta_\mu(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) - H'_\mu\delta_\nu(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}), \tag{8.92}$$

где

$$H_\mu := k_{\mu\nu}H^\nu, \quad \text{и} \quad \delta_\mu(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) := \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}).$$

По сравнению с исходной алгеброй (8.71)–(8.72), изменения касаются скобок Пуассона (8.90) и (8.91). Скобка Пуассона (8.90) является результатом прямого счета. Вторая скобка Пуассона (8.91) носит кинематический характер и определяется тем, что новая связь является не функцией, а скалярной плотностью.

Получим явные выражения для геометрических объектов в новых переменных. Сначала вычислим символы Кристоффеля:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho = \frac{1}{(n-2)\varrho}(\partial_\mu\varrho\delta^\rho_\nu + \partial_\nu\varrho\delta^\rho_\mu - k_{\mu\nu}k^{\rho\sigma}\partial_\sigma\varrho) + \Gamma^{(k)}_{\mu\nu}{}^\rho,$$

где “символы Кристоффеля” $\Gamma^{(k)}_{\mu\nu}{}^\rho$ выражаются через тензорную плотность $k_{\mu\nu}$ по тем же формулам, что и символы Кристоффеля через метрику. Конечно, “символы Кристоффеля” $\Gamma^{(k)}_{\mu\nu}{}^\rho$ никакой связности не определяют. Отсюда следует выражение для следа символов Кристоффеля, который определяет дополнительные слагаемые в ковариантных производных тензорных плотностей,

$$\hat{\Gamma}_\mu = \frac{n-1}{n-2}\frac{\partial_\mu\varrho}{\varrho},$$

так как

$$\Gamma^{(k)}_\mu := \Gamma^{(k)}_{\nu\mu}{}^\nu = \frac{1}{2}k^{\nu\rho}\partial_\mu k_{\nu\rho} = 0$$

в силу условия $|\det k_{\mu\nu}| = 1$. Нетрудно проверить ковариантное постоянство новых переменных:

$$\hat{\nabla}_\mu k_{\nu\rho} = 0, \qquad \hat{\nabla}_\mu\varrho = 0.$$

Прямые вычисления приводят к следующему тензору Риччи

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R^{(k)}_{\mu\nu} + \frac{n-3}{n-2}\frac{\partial^2_{\mu\nu}\varrho}{\varrho} - \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2}\frac{\partial_\mu\varrho\partial_\nu\varrho}{\varrho^2} - \frac{n-3}{n-2}\Gamma^{(k)}_{\mu\nu}{}^\rho\frac{\partial_\rho\varrho}{\varrho} - \\ - \frac{1}{(n-2)^2}k_{\mu\nu}\frac{\partial\varrho^2}{\varrho^2} + \frac{1}{n-2}k_{\mu\nu}\frac{\partial_\rho(k^{\rho\sigma}\partial_\sigma\varrho)}{\varrho}, \qquad (8.93)$$

где введен “тензор Риччи” $R^{(k)}_{\mu\nu}$, построенный по “метрике” $k_{\mu\nu}$. Отсюда следует выражение для тензорной плотности скалярной кривизны, которая возникает после свертки тензора Риччи с $k^{\mu\nu}$:

$$\check{R} := k^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} = \varrho^{\frac{2}{n-2}}\hat{R} = R^{(k)} + 2\frac{\partial_\mu(k^{\mu\nu}\partial_\nu\varrho)}{\varrho} - \frac{n-1}{n-2}\frac{(\partial\varrho)^2}{\varrho^2}.$$

После переопределения динамической связи (8.84) гамильтониан также равен линейной комбинации связей:

$$\mathcal{H} = \int d\boldsymbol{x}(\tilde{N}K_\perp + N^\mu H_\mu),$$

только с новым множителем Лагранжа $\tilde{N} := \varrho^{-\frac{n-1}{n-2}}N$. Соответствующее действие содержит дополнительные слагаемые:

$$S_{\text{HE}} = \int dx\big(P^{\mu\nu}\dot{k}_{\mu\nu} + P\dot{\varrho} - \tilde{N}K_\perp - N^\mu H_\mu - \lambda(|\det k_{\mu\nu}| - 1) - \mu P^{\mu\nu}k_{\mu\nu}\big),$$

где мы учли связи (8.77) с помощью множителей Лагранжа $\lambda$ и $\mu$. Уравнения движения для новых канонических переменных примут вид:

$$\dot{\varrho} = -\frac{n-2}{2(n-1)}\tilde{N}\varrho^2 P + \frac{n-2}{n-1}\hat{\nabla}_\mu N^\mu\varrho, \qquad (8.94)$$

$$\dot{P} = \frac{n-2}{2(n-1)}\tilde{N}\varrho P^2 + 2\tilde{N}\varrho\check{R} + 2k^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\tilde{N}\varrho + \frac{1}{n-1}\hat{\nabla}_\mu N^\mu P + N^\mu\hat{\nabla}_\mu P, \qquad (8.95)$$

$$\dot{k}_{\mu\nu} = 2\tilde{N}P_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\mu N^\rho k_{\nu\rho} + \hat{\nabla}_\nu N^\rho k_{\mu\rho} - \frac{2}{n-1}\hat{\nabla}_\rho N^\rho k_{\mu\nu}, \qquad (8.96)$$

$$\dot{P}^{\mu\nu} = -2\tilde{N}P^{\mu\rho}P^\nu{}_\rho + \hat{\nabla}_\rho(N^\rho P^{\mu\nu}) + \frac{2}{n-1}\hat{\nabla}_\rho N^\rho P^{\mu\nu} - P^{\mu\rho}\hat{\nabla}_\rho N^\nu - P^{\nu\rho}\hat{\nabla}_\rho N^\mu - \\ - \varrho^2 k^{\mu\rho}k^{\nu\sigma}\left(\tilde{N}\hat{R}_{\rho\sigma} + \hat{\nabla}_\rho\hat{\nabla}_\sigma\tilde{N}\right) + \frac{\varrho^2 k^{\mu\nu}}{n-1}\left(\tilde{N}\check{R} + k^{\rho\sigma}\hat{\nabla}_\rho\hat{\nabla}_\sigma\tilde{N}\right). \qquad (8.97)$$

Отметим, что множители Лагранжа $\lambda$ и $\mu$ в уравнения движения вообще не входят, так как связи являются функциями Казимира. Эта система уравнений движения записана для тензорных плотностей:

$$\deg k_{\mu\nu} = \frac{2}{n-1}, \qquad \deg\varrho = -\frac{n-2}{n-1},$$
$$\deg P^{\mu\nu} = -\frac{n+1}{n-1}, \qquad \deg P = -\frac{1}{n-1}.$$

Новый множитель Лагранжа также является тензорной плотностью:

$$\deg\tilde{N} = 1, \qquad \deg N^\mu = 0.$$

Поскольку степени тензорных плотностей при умножении складываются, то

$$\deg(\tilde{N}\varrho) = \frac{1}{n-1}, \qquad \deg(\tilde{N}\varrho k^{\mu\nu}) = -\frac{1}{n-1}.$$

Ковариантные производные от тензорных плотностей в системе уравнений (8.94)–(8.97) имеют следующий вид:

$$\hat{\nabla}_\mu \tilde{N} = \partial_\mu \tilde{N} + \frac{n-1}{n-2}\frac{\partial_\mu \varrho}{\varrho}\tilde{N},$$
$$\hat{\nabla}_\mu P = \partial_\mu P - \frac{1}{n-2}\frac{\partial_\mu \varrho}{\varrho}P.$$

Полученная система уравнений движения (8.94)–(8.97) является полиномиальной.

## 8.8. Проблема энергии в теории гравитации

Определение энергии гравитационного поля является одной из главных нерешенных проблем, которая привлекает большое внимание с момента создания общей теории относительности. Взгляд на эту проблему существенно меняется с течением времени, поэтому мы опишем несколько подходов.

Сначала сформулируем в чем именно заключается проблема. В механике точечных частиц, а также в теории поля в пространстве Минковского под энергией понимают численное значение гамильтониана системы. Если гамильтониан не зависит от времени явно, то энергия сохраняется. Закон сохранения энергии можно получить также из теоремы Нётер. Если действие инвариантно относительно трансляций во времени $t \mapsto t + \mathsf{const}$, то из первой теоремы Нётер следует закон сохранения энергии (см. раздел 5.2.1), при этом компонента $T_0{}^0$ энергии-импульса в теории поля совпадает с определением гамильтоновой плотности системы полей. Этот подход к определению энергии в теории гравитации приводит к ответу, мало удовлетворительному с физической точки зрения. В теории гравитации действие инвариантно относительно общих преобразований координат и, тем более, относительно трансляций во времени. С другой стороны, мы уже показали в разделе 6.2.4, что канонический гамильтониан для любой модели, инвариантной относительно произвольного невырожденного преобразования временно́й координаты пропорционален связи и равен нулю на уравнениях движения. Это значит, что формальный подход к определению энергии в теории гравитации дает нуль для любого решения уравнений движения. Этот результат малосодержателен и плохо согласуется с нашим интуитивным представлением об энергии, так как наличие материи ассоциируется с наличием энергии. Заметим также, что в пространстве-времени Минковского действие инвариантно относительно трансляций только в декартовой системе координат. В общековариантных моделях гравитации действие инвариантно относительно трансляций в произвольной криволинейной системе координат.

Замечание. В настоящем разделе мы рассмотрим определение энергии в общей теории относительности, то есть при нулевых тензорах кручения и неметричности. Обобщение определения на более общий случай аффинной геометрии проблемы не составляет, так как основная трудность, связанная с общей ковариантностью уравнений движения, присутствует во всех моделях.

**8.8.1. Тензор энергии-импульса полей материи.** Первые попытки определить энергию как сохраняющуюся величину для системы полей материи и гравитационного поля, были предприняты на заре исследований по общей теории относительности. В этой модели действие представляет собой сумму действия Гильберта–Эйнштейна (7.6) и действия для полей материи $S_{\text{м}}$:

$$S = S_{\text{HE}} + S_{\text{м}}. \tag{8.98}$$

Предположим, что действие полей материи зависит только от полей материи и метрики. Тогда вариация действия по метрике приводит к уравнениям Эйнштейна (7.1), где

$$T_{\text{M}\alpha\beta} := \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta g^{\alpha\beta}} \tag{8.99}$$

– тензор энергии-импульса полей материи. В общем случае мы предполагаем, что действие для полей материи в моделях гравитации получено из действия, записанного в плоском пространстве-времени Минковского, путем минимальной подстановки, т.е. замены обычных производных на ковариантные $\partial_\alpha \mapsto \nabla_\alpha$ и метрики Минковского на нетривиальную метрику пространства-времени $\eta_{ab} \mapsto g_{\alpha\beta} = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \eta_{ab}$. Возможно также введение инвариантных слагаемых неминимального взаимодействия, которые обращаются в нуль в пространстве Минковского. В таких случаях действие зависит только от самих полей материи и репера. Соответствующее выражение для тензора энергии-импульса можно записать через вариационную производную по реперу:

$$T_{\text{M}\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{\text{M}}}{\delta e^\alpha{}_a} e_{\beta a}. \tag{8.100}$$

Если действие для полей материи может быть записано через метрику, то данное определение совпадает с (8.99) и приводит к симметричному тензору энергии-импульса. В общем случае это не так. Например, лагранжиан спинорного поля не может быть записан через метрику, так как лоренцева связность выражается через репер, и ее нельзя выразить через компоненты метрики. Определение тензора энергии-импульса через репер (8.100) не всегда приводит к симметричному тензору энергии-импульса.

В разделе (7.4) было показано, что инвариантное действие приводит к ковариантному закону сохранения тензора энергии-импульса:

$$\nabla_\beta T_{\text{M}\alpha}{}^\beta = 0. \tag{8.101}$$

Однако это ковариантное равенство не является законом сохранения. Покажем это. Прямые вычисления приводят к равенству

$$\nabla_\beta T_{\text{M}\alpha}{}^\beta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\beta \left( \sqrt{|g|} T_{\text{M}\alpha}{}^\beta \right) - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} T_{\text{M}}{}^{\beta\gamma} = 0. \tag{8.102}$$

При интегрировании этого равенства по объему первое слагаемое для каждого значения индекса $\alpha$ преобразуется с помощью формулы Стокса в интеграл по граничной поверхности:

$$\int_{\mathbb{M}} dx \partial_\beta \left( \sqrt{|g|} T_{\text{M}\alpha}{}^\beta \right) = \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\beta \sqrt{|g|} T_{\text{M}\alpha}{}^\beta,$$

где $ds_\alpha$ – ориентированный элемент граничной гиперповерхности $\partial\mathbb{M}$. Этот интеграл привел бы к закону сохранения в выбранной системе координат, если бы не наличие второго слагаемого в равенстве (8.102).

**8.8.2. Псевдотензор энергии-импульса для гравитации.** Для решения проблемы сохранения энергии к тензору энергии-импульса материи, который мы будем записывать с одним верхним и одним нижним индексом $T_{\text{M}\alpha}{}^\beta$, было предложено добавить некоторый объект с компонентами $t_\alpha{}^\beta$, зависящими только от метрики и ее первых производных таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\partial_\beta \left[ \sqrt{|g|} (T_{\text{M}\alpha}{}^\beta + t_\alpha{}^\beta) \right] = 0. \tag{8.103}$$

Объект с компонентами $t_\alpha{}^\beta$ называется *псевдотензором энергии-импульса* гравитационного поля. При этом равенство (8.103) принято рассматривать как закон сохранения энергии-импульса полей материи и гравитационного поля. Приставка “псевдо” в данном случае означает, что для выполнения равенства (8.103) компоненты $t_\alpha{}^\beta$ не могут образовывать тензор.

Задача о нахождении явного вида псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля $t_\alpha{}^\beta$ может быть решена следующим образом. Закон сохранения (8.103) имеет тот же вид, что и закон сохранения энергии-импульса, вытекающий из первой теоремы Нётер (5.45). Из инвариантности полного действия (8.98) относительно трансляций в пространстве-времени следует закон сохранения

$$\partial_\beta\left(\sqrt{|g|}T_\alpha{}^\beta\right)=0, \tag{8.104}$$

где суммарный тензор энергии-импульса материи и гравитационного поля, умноженный на определитель репера, имеет вид

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}T_\alpha{}^\beta&=\partial_\alpha g^{\gamma\delta}\frac{\partial L_{\text{НЕ}}}{\partial(\partial_\beta g^{\gamma\delta})}+\partial_\alpha\varphi^a\frac{\partial L_{\text{M}}}{\partial(\partial_\beta\varphi^a)}-\delta_\alpha^\beta(L_{\text{НЕ}}+L_{\text{M}})=\\&=\sqrt{|g|}T^{(\text{c})\beta}_{\text{M}\alpha}+\partial_\alpha g^{\gamma\delta}\frac{\partial L_{\text{НЕ}}}{\partial(\partial_\beta g^{\gamma\delta})}-\delta_\alpha^\beta L_{\text{НЕ}},\end{aligned} \tag{8.105}$$

где $\varphi^a$, $a=1,2,\dots,$ – совокупность всех полей материи. В этом выражении $T^{(\text{c})\beta}_{\text{M}\alpha}$ – канонический тензор энергии-импульса полей материи, определенный соотношением

$$\sqrt{|g|}T^{(\text{c})\beta}_{\text{M}\alpha}:=\partial_\alpha\varphi^a\frac{\partial L_{\text{M}}}{\partial(\partial_\beta\varphi^a)}-\delta_\alpha^\beta L_{\text{M}}.$$

В том случае, когда определение тензора энергии-импульса (8.99) является ковариантным обобщением канонического тензора энергии-импульса материи в пространстве Минковского, имеет место формула

$$T_{\text{M}\alpha}{}^\beta=T^{(\text{c})\beta}_{\text{M}\alpha}.$$

Тогда последние два слагаемых в выражении (8.105), зависящие только от метрики и ее первых производных, можно принять за определение псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля

$$\sqrt{|g|}t_\alpha{}^\beta:=\partial_\alpha g^{\gamma\delta}\frac{\partial L_{\text{НЕ}}}{\partial(\partial_\beta g^{\gamma\delta})}-\delta_\alpha^\beta L_{\text{НЕ}}. \tag{8.106}$$

Напомним, что под лагранжианом $L_{\text{НЕ}}$ понимается функция, полученная из $\kappa\sqrt{|g|}R(g)$ добавлением полной производной, которая приводит к сокращению вторых производных от метрики (см. раздел 8.1). Полученное выражение для псевдотензора энергии-импульса широко использовалось, в том числе классиками науки: Г. Вейлем [86], П. Дираком [13], В. Паули [87], Э. Шредингером [88] и др. После несложных вычислений можно получить явное выражение для псевдотензора энергии-импульса

$$\sqrt{|g|}t_\alpha{}^\beta=\kappa(\Gamma_{\gamma\delta}{}^\beta-\delta_\gamma^\beta\Gamma_{\delta\epsilon}{}^\epsilon)\partial_\alpha\big(\sqrt{|g|}g^{\gamma\delta}\big)-\delta_\alpha^\beta L_{\text{НЕ}}. \tag{8.107}$$

Отметим недостатки такого определения псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Из полученного выражения следует, что в нормальной системе координат, где все символы Кристоффеля обращаются в нуль в некоторой точке, все компоненты псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля равны нулю. То есть, независимо от кривизны пространства, в любой заданной точке пространства-времени можно обратить в нуль все компоненты псевдотензора энергии-импульса. В то же время в плоском пространстве-времени (отсутствие гравитационного поля) в криволинейной системе координат символы Кристоффеля и, следовательно, компоненты псевдотензора энергии-импульса в общем случае отличны от нуля. Отметим также, что компонента тензора энергии-импульса ${T_0}^0$ в законе сохранения (8.104) совпадает с гамильтонианом системы и обращается в нуль на уравнениях движения. Эти замечания ставят под сомнение возможность физической интерпретации псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля.

Если равенство (8.103) принято за определение псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, то последний определен неоднозначно. Очевидно, что псевдотензор

$$t'_\alpha{}^\beta := t_\alpha{}^\beta + \partial_\gamma B_\alpha{}^{\gamma\beta}, \tag{8.108}$$

где $B_\alpha{}^{\gamma\beta} = -B_\alpha{}^{\beta\gamma}$ – произвольный “тензор” третьего ранга, антисимметричный по верхним индексам, также удовлетворяет закону сохранения. В процессе исследования общей теории относительности было предложено несколько явных выражений для псевдотензора энергии-импульса, которые обладают своими достоинствами и недостатками и отличаются между собой на некоторый “тензор” $B_\alpha{}^{\gamma\beta}$. Мы не будем останавливаться на обсуждении различных подходов, а отметим лишь общий недостаток. Псевдотензор энергии-импульса $t_\alpha{}^\beta$ не является тензором. Это значит, что энергия в различных системах координат может быть положительна, равна нулю или отрицательна, что является неудовлетворительным с физической точки зрения.

Аналогичное построение псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля можно провести в реперном формализме. При этом все недостатки псевдотензора сохраняются.

Проведенное обсуждение показывает, что в теории гравитации невозможно дать локальное определение энергии-импульса, удовлетворив одновременно двум условиям: 1) компоненты энергии-импульса должны образовывать тензорное поле второго ранга и 2) должен быть выполнен закон сохранения (8.103).

**8.8.3. Законы сохранения и векторы Киллинга.** Другой подход к законам сохранения связан с симметриями пространства-времени. Если метрика пространства-времени допускает группу движений, то появляется возможность определить законы сохранения для тензора энергии-импульса полей материи без привлечения понятия псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Пусть тензор энергии-импульса полей материи – это симметричный тензор второго ранга $T_{\text{M}}^{\alpha\beta} = T_{\text{M}}^{\beta\alpha}$, удовлетворяющий условию (8.101). Предположим, что метрика $g_{\alpha\beta}$ имеет $\text{N}$ векторов Киллинга $K_{\text{A}} = K_{\text{A}}{}^\alpha \partial_\alpha$, $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$. Рассмотрим $\text{N}$ векторов

$$P_{\text{A}}^\alpha := K_{\text{A}}{}^\beta T_{\text{M}\beta}{}^\alpha.$$

Тогда справедливо равенство

$$\nabla_\alpha P_{\text{A}}^\alpha = \nabla_\alpha K_{\text{A}}{}^\beta T_{\text{M}\beta}{}^\alpha + K_{\text{A}}{}^\beta \nabla_\alpha T_{\text{M}\beta}{}^\alpha = 0.$$

Здесь первое слагаемое равно нулю как следствие симметричности тензора энергии-импульса и уравнения Киллинга (2.4). Второе слагаемое обращается в нуль в силу уравнения (8.101). С другой стороны, справедливо тождество (5.40)

$$\nabla_\alpha P_{\text{A}}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} P_{\text{A}}^\alpha).$$

Поэтому, если $\mathbb{M}$ – компактная ориентируемая область пространства-времени с краем $\partial\mathbb{M}$, то объемный интеграл можно преобразовать в поверхностный по формуле Стокса:

$$\int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} \nabla_\alpha P_{\text{A}}^\alpha = \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha P_{\text{A}}^\alpha = 0, \tag{8.109}$$

где $ds_\alpha$ – ориентированный элемент площади края. Таким образом, каждому вектору Киллинга соответствует закон сохранения. В частности, если существует вектор Киллинга $K_0 = \partial_0$ и поля материи исчезают на пространственной бесконечности, то ему соответствует закон сохранения энергии $\partial_0 E = 0$, где

$$E = \int d\boldsymbol{x}\, P^0 = \int d\boldsymbol{x}\, T_{\text{M}0}{}^0.$$

Отметим, что в этом выражении присутствует гамильтонова плотность только для полей материи.

В четырехмерном пространстве-времени Минковского метрика имеет десять векторов Киллинга: четыре вектора соответствуют трансляциям и шесть – (псевдо)вращениям. Этим векторам Киллинга соответствуют законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

**8.8.4. Полная гравитационная энергия асимптотически плоского пространства-времени.** Дальнейшее развитие общей теории относительности изменило подход к определению полной энергии гравитационного поля и материи. Это определение основано на сферически симметричном решении Шварцшильда и учете граничных вкладов в действие Гильберта–Эйнштейна.

Запишем решение Шварцшильда в асимптотически декартовой системе координат, где координаты $x, y, z$ связаны с координатами $r, \theta, \varphi$ обычными формулами трехмерного евклидова пространства:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{2M}{r^2(r - 2M)}(xdx + ydy + xdz)^2. \end{aligned} \tag{8.110}$$

Метрика Шварцшильда на больших расстояниях в первом порядке по $M/r \to 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} ds^2 \simeq \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \\ - \frac{4M}{r}(xydxdy + xzdxdz + yzdydz). \end{aligned} \tag{8.111}$$

Очевидно, что в нулевом порядке эта метрика совпадает с метрикой Лоренца. Последнее выражение используется для определения асимптотически плоского [4] пространства-времени.

Определение. Топологически тривиальное пространство-время $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^{1,3}$ называется *асимптотически плоским*, если существует такая система координат $t, x, y, z$, что его метрика при $r \to \infty$, где $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и всех моментов времени $t \in \mathbb{R}$, достаточно быстро стремится к метрике Шварцшильда (8.111), записанной в декартовой системе координат.

Максимально продолженное пространство-время Шварцшильда описывает черные дыры и не является топологически тривиальным. Понятие асимптотически плоского пространства-времени просто обобщается на многообразия с нетривиальной топологией.

Определение. Пусть пространство-время имеет вид прямого произведения $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, где явно выделено время $x^0 = t \in \mathbb{R}$. Допустим, что существует компактное подмножество $\mathbb{K} \subset \mathbb{U}$ такое, что разность $\mathbb{U} \setminus \mathbb{K}$ представляет собой несвязное объединение открытых множеств $\mathbb{S}_\text{A}$, $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$. Если в каждом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_\text{A}$ существует такая система координат $t, x, y, z$, что метрика при $r \to \infty$ и всех $t \in \mathbb{R}$ достаточно быстро стремится к метрике

Шварцшильда (8.111) в декартовой системе координат, то пространство-время $\mathbb{M}$ называется *асимптотически плоским*.

Рассмотрим действие Гильберта–Эйнштейна в гамильтоновой форме, которое вытекает из выражения для гамильтониана (8.65),

$$S_{\text{HE}} = \int dx \left( p^{\mu\nu} \dot{g}_{\mu\nu} - N H_\perp - N^\mu H_\mu \right),$$

где функции хода и сдвига рассматриваются в качестве множителей Лагранжа. Динамическая связь $H_\perp$ (8.64) содержит трехмерную скалярную кривизну и, следовательно, вторые производные от пространственных компонент метрики $g_{\mu\nu}$. При вариации действия $L_{\text{HE}}$ по компонентам метрики приходится интегрировать по частям, отбрасывая граничные члены. Ниже будет показано, что в асимптотически плоском пространстве-времени (для решения Шварцшильда) граничный вклад, возникающий при интегрировании по частям слагаемого со вторыми производными, отличен от нуля. В настоящее время это граничное слагаемое принято в качестве определения полной энергии асимптотически плоского распределения масс. Рассмотрим данный вопрос подробно.

Воспользуемся формулами (8.2)–(8.4) и запишем трехмерную скалярную кривизну, умноженную на определитель репера, в виде

$$\hat{e}\hat{R} = \partial_\mu \left[ \hat{e}(\hat{g}^{\mu\nu} \hat{\Gamma}_{\rho\nu}{}^\rho - \hat{g}^{\nu\rho} \hat{\Gamma}_{\nu\rho}{}^\mu) \right] + \hat{e}\hat{L}_{\text{HE}},$$

где последнее слагаемое $\hat{L}_{\text{HE}}$ квадратично по символам Кристоффеля (его вид в настоящий момент не важен). Первое слагаемое в этом представлении имеет вид дивергенции, которую можно выразить через компоненты метрики:

$$\partial_\mu \left[ \hat{e} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \right],$$

где мы воспользовались выражением символов Кристоффеля через метрику (2.15). При интегрировании этого слагаемого по частям возникает граничное слагаемое, которое, как мы увидим ниже, отлично от нуля. Поэтому для того, чтобы компенсировать его вклад, добавим к исходному действию граничный член с самого начала:

$$S_{\text{HE}} \mapsto S_{\text{HE}} + \kappa \int dx\, \partial_\mu B^\mu,$$

где

$$B^\mu := N \hat{e} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \tag{8.112}$$

и мы восстановили гравитационную константу связи $\kappa$.

Определение. *Полной энергией* асимптотически плоского распределения масс называется интеграл

$$E := \kappa \sum_{\text{A}} \int_{\text{A}} d\boldsymbol{x}\, \partial_\mu B^\mu, \tag{8.113}$$

где компоненты $B^\mu$ определены в (8.112), и интегрирование проводится по пространственно-подобному сечению $x^0 = \mathsf{const}$.

Компоненты $B^\mu$ образуют вектор относительно глобальных преобразований координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. В целом, определение полной энергии неинвариантно и зависит от выбора системы координат.

Для трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в декартовой системе координат метрика имеет вид $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$. Поэтому $B^\mu = 0$ и, следовательно, полная энергия плоского пространства равна нулю, $E = 0$. Уже на этом этапе видна важность выбора системы координат в определении энергии (8.113). Действительно, если система координат не является асимптотически декартовой, то полная энергия трехмерного евклидова пространства может быть отлична от нуля.

Вычислим полную энергию для решения Шварцшильда и, тем самым, для произвольного асимптотически плоского пространства-времени в первом порядке по $M/r \to \infty$. Для этого запишем решение Шварцшильда в декартовой системе координат (8.110). Пространственная часть метрики отличается от евклидовой метрики: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где

$$h_{\mu\nu} = -\frac{2M}{r^2(r-2M)}\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

На больших расстояниях, $r \gg M$, эта поправка к метрике стремится к нулю. В определении вектора $B^\mu$ (8.112) выражение в скобках имеет первый порядок малости. Поэтому остальные сомножители достаточно участь в нулевом порядке:

$$N = 1, \qquad \hat{e} = 1, \qquad \hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}.$$

Простые вычисления дают следующие выражения для компонент вектора $B^\mu$ в первом порядке по $M/r$:

$$B^x \approx \frac{4Mx}{r^3}, \qquad B^y \approx \frac{4My}{r^3}, \qquad B^z \approx \frac{4Mz}{r^3}.$$

Нормальный единичный ковектор к сфере с центром в начале координат евклидова пространства имеет вид

$$\{n_\mu\} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \qquad n^2 = -1.$$

Поэтому

$$B^\mu n_\mu \approx \frac{4M}{r^2}.$$

Теперь можно вычислить полную энергию. Для каждой компоненты связности $\mathbb{S}_\text{A}$ в первом порядке получаем равенство

$$E = \kappa \int d\boldsymbol{x}\, \partial_\mu B^\mu = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2 \sin\theta (B^\mu n_\mu) \simeq 16\pi\kappa M. \tag{8.114}$$

Чтобы придать полученному выражению более привлекательный вид, восстановим размерные константы. Это полезно делать хотя бы изредка. Компоненты метрики, по определению, являются безразмерными $[g_{\alpha\beta}] = 1$. Поскольку

$$\left[\frac{M}{r}\right] = \frac{\text{г}}{\text{см}},$$

то это отношение необходимо обезразмерить, умножив на некоторую комбинацию гравитационной постоянной и скорости света, которые имеют следующие размерности:

$$[G] = \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{сек}^2}, \qquad [c] = \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

Это можно сделать единственным образом путем замены

$$M \mapsto \frac{GM}{c^2}. \tag{8.115}$$

Если воспользоваться выражением (7.114) для константы связи $\kappa$ через гравитационную постоянную $G$, которое было получено при рассмотрении ньютонова предела в общей теории относительности, то выражение для полной энергии примет вид

$$E = Mc^2. \tag{8.116}$$

То, что гравитационная энергия асимптотически плоского пространства-времени совпадает с энергией покоя для массы в решении Шварцшильда, привлекательно с физической точки зрения и оправдывает определение полной энергии через поверхностный интеграл (8.113). Численное значение полной гравитационной энергии зависит от выбора системы координат, так как данное определение не инвариантно относительно преобразований координат.

Поскольку $M$ – постоянная интегрирования уравнений Эйнштейна, то полная энергия в асимптотически плоском пространстве-времени сохраняется.

В заключение запишем действие Гильберта–Эйнштейна с размерными постоянными

$$S_{\text{HE}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int dx R. \tag{8.117}$$

Именно в таком виде (обычно при $c = 1$) его часто можно встретить в литературе.

## Список литературы


[1] П. К. Рашевский. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* Наука, Москва, 1967. Третье изд.

[2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, and А. Т. Фоменко. *Современная геометрия. Методы и приложения.* Наука, Москва, издание четвертое, 1998.

[3] С. П. Новиков and И. А. Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля.* МЦНМО, Москва, 2005.

[4] L. P. Eisenhart. *Riemannian Geometry.* Princeton University Press, Princeton, 1926. Перевод Л. П. Эйзенхарт. *Риманова геометрия.* М.: ИЛ, 1948. 316 с.

[5] L. P. Eisenhart. *Continuous Groups of Transformations.* Dover Publ., New York, 1961. Перевод Л. П. Эйзенхарт. *Непрерывные группы преобразований.* М.: ИЛ, 1947. 316 с.

[6] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. *Теория поля. Издание седьмое.* Наука, Москва, 1988.

[7] В. А. Фок. *Теория пространства, времени и тяготения. Издание второе.* Физматгиз, Москва, 1961.

[8] J. L. Synge. *Relativity: The general theory.* North–Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960. Перевод: Дж. Синг. *Общая теория относительности.* М.: ИЛ, 1963.

[9] R. Penrose. *Structure of Space-time.* W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam, 1968. Перевод: Пенроуз Р. *Структура пространства-времени.* М.: Мир, 1972. 183 с.

[10] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology.* Wiley, New York, 1972. Перевод: С. Вейнберг. *Гравитация и космология.* М.: Мир, 1975.

[11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space–Time.* Cambridge University Press, Cambridge, 1973. Перевод: С. Хокинг, Дж. Эллис. *Крупномасштабная структура пространства-времени.* М.: Мир, 1977.

[12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973. Перевод: Ч. Мизнер, К. С. Торн, Дж. Уилер *Гравитация. Тт.* 1–3. М.: Мир, 1977.

[13] P. A. M. Dirac. *General Theory of Relativity.* John Wiley & Sons, Inc., New York – London, 1975. Перевод: *Общая теория относительности.* М.: Атомиздат, 1978.

[14] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt. *Exact Solutions of the Einsteins Field Equations.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980. Перевод: Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., Мак-Каллум М. *Точные решения уравнений Эйнштейна.* М.: Энергоиздат, 1982.

[15] S. Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*, volume 1,2. Clarendon Press, Oxford, 1983. Перевод: Чандрасекар С. *Математическая теория черных дыр.* Т.1,2 М.: Мир, 1986.

[16] R. M. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[17] И. Д. Новиков and В. П. Фролов. *Физика черных дыр.* Наука, Москва, 1986.

[18] Д. Д. Иваненко (ред.). *Новейшие проблемы гравитации.* ИЛ, Москва, 1961.

[19] Д. Д. Иваненко (ред.). *Гравитация и топология. Актуальные проблемы.* Мир, Москва, 1966.

[20] S. W. Hawking and W. Israel, editors. *General relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 1979. Перевод: С. Хокинг, В. Израэль, ред. *Общая теория относительности.* М.: Мир, 1983.

[21] W. Killing. Über die Grunglagen der Geometrie. *J. Reine Angew. Math.*, 109:121–186, 1892.

[22] L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni.* Spoerri, Pisa, 1918.

[23] М. О. Катанаев. *Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть* 1. Лекционные курсы НОЦ. МИАН, Москва, 2015.

[24] J. A. Wolf. *Spaces of constant curvature.* University of California, Berkley, California, 1972. Перевод: Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны.* М.: Наука, 1982. 480 с.

[25] P. Stäckel. *Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differentialgleichung mittelst Separation der Variablen.* Habilitationsschrift, Halle, 1891.

[26] P. Stäckel. Über die Bewegung eines Punktes in einer $n$-fachen Mannigfaltigkeit. *Math. Ann.*, 42:537–563, 1893.

[27] P. Stäckel. Sur des problem de dynamique se reduisent a des quadratures. *Comptes rendus hebd, S. Acad. Sci. (Paris)*, 116:1284–1286, 1893.

[28] P. Stäckel. Sur une classe de problemes de dynamique. *Comptes rendus hebd, S. Acad. Sci. (Paris)*, 116:485–487, 1893.

[29] P. Stäckel. Sur l'integration de l'équation différentialle de Hamilton. *Comptes rendus hebd, S. Acad. Sci. (Paris)*, 121:489–492, 1895.

[30] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11(5):237–238, 1963.

[31] В. В. Обухов. *Штеккелевы пространства в теории гравитации.* Изд. Томского государственного педагогического университета, Томск, 2006.

[32] В. В. Обухов and К. Е. Осетрин. *Классификационные проблемы в теории гравитации.* Изд. Томского государственного педагогического университета, Томск, 2007.

[33] Th. De Donder. *La Gravifique Einsteinienne.* Gauthier-Villars & cie, Paris, 1921.

[34] K. Lanczos. Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen. *Phys. Zs.*, 23:537–539, 1922.

[35] В. А. Фок. О движении конечных масс в общей теории относительности. *ЖЭТФ*, 9(4):375–410, 1939.

[36] E. Fermi. Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat.*, 31:Three parts, pp. 21–23, 51–52, 101–103, 1922.

[37] J. H. C. Whitehead. Convex regions in the geometry of paths. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 3:33–42, 1932.

[38] А. Т. Фоменко. *Симплектическая геометрия.* Издательство МГУ, Москва, 1988.

[39] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* American Mathematical Society, Rhode Island, 2001. Перевод: Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства.* М.: Факториал Пресс, 2005.

[40] М. М. Постников. *Группы и алгебры Ли.* Наука, Москва, 1982.

[41] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. *Механика. Издание четвертое.* Наука, Москва, 1988.

[42] P. J. Olver. *Application of Lie Groups to Differential Equations.* Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg, 1986. Перевод: Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М.: Мир, 1989. 637 с.

[43] Л. Э. Эльсгольц. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* УРСС, Москва, 1998.

[44] E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, pages 235–257, 1918. Перевод в кн. *Вариационные принципы в механике.* М.: Физматгиз, 1959, с. 611.

[45] B. DeWitt. *Dynamical Theory of Groups and Fields.* Gordon and Breach, New York – London, 1965. Перевод: ДеВитт Б. С. *Динамическая теория групп и полей.* М.: Наука, 1987. 287 с.

[46] S. Coleman. Classical lumps and their quantum descendants. lectures at the 1975 international school of subnuclear physics "ettore majorana"(erice). In A. Zichichi, editor, *New Phenomena in Subnuclear Physics*, pages 297–421, New York, 1977. Plenum Press.

[47] Л. Д. Фаддеев. В поисках многомерных солитонов. В сб. статей "Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля", сс. 207–223. Д2-9788. Дубна, 1977. ОИЯИ.

[48] R. Palais. The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.*, 69(1):19–30, 1979.

[49] О. А. Ладыженская and Л. В. Капитанский. О принципе Коулмена нахождения стационарных точек инвариантных функционалов. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, 127(15):84–102, 1983.

[50] R. Schmid and L. Simoni. On infinite-dimensional variational principles with constraints. *J. Math. Phys.*, 30(5):1171–1176, 1989.

[51] L. Michel and L. Radicati. On the dynamical breaking of $su(3)$. In B. Krsunoglu A. Pearlmutter, C. A. Hurst, editor, *Proc. 5th Coral Gables Conf. Symmetry Principle at High Energy*, New York, 1968. Benjamin.

[52] В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* Наука, Москва, 1989. Третье изд. 472 с.

[53] Lee Hwa-Chung. Invariants of hamilton systems and applications to to the theory of canonical transformations. *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, A62:237–247, 1947.

[54] Ф. Р. Гантмахер. *Лекции по аналитической механике. Третье изд.* Физматлит, Москва, 2001.

[55] P. A. M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. *Proc. Roy. Soc. London*, A246:326–332, 1958. Перевод в сб. "Новейшие проблемы гравитации" под редакцией Д. Иваненко. М.: ИЛ, 1961.

[56] P. A. M. Dirac. The theory of gravitation in hamiltonian form. *Proc. Roy. Soc. London*, A246(1246):333–343, 1958. Перевод в сб. "Новейшие проблемы гравитации" под редакцией Д. Иваненко. М.: ИЛ, 1961.

[57] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer, Yeshiva University, New York, 1964. Перевод в кн.: Дирак П. А. М. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979. С. 408–475.

[58] D. M. Gitman and I. V. Tyutin. *Quantization of Fields with Constraints*. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg, 1990.

[59] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, 1992.

[60] В. П. Павлов. *Неголономная механика Дирака и дифференциальная геометрия*. Лекционные курсы НОЦ. МИАН, Москва, 2014.

[61] Л. Д. Фаддеев. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. *ТМФ*, 1(1):3–18, 1969.

[62] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky. Quantization of relativistic systems with constraints – equivalence of canonical and covariant formalism in quantum theory of gravitational field. *CERN Preprint TH* 2332, 1977.

[63] A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, 48(2):844–847, 1915. Перевод: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 448–451.

[64] D. Hilbert. Die grundlagen der physik. *Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math.-phys.*, Heft 3:395, Klasse 1915. Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 133–145.

[65] A. Einstein. Die-Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Ann. d. Phys.*, 49:769–822, 1916. Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 146–196.

[66] von M. Fierz. Über die physikalische deutung der erweiterten gravitationstheorie P. Jordans. *Helv. Phys. Acta*, 29:128–134, 1956.

[67] P. Jordan. Zum gegenwärtigen stand der diracschen kosmologischen hypothesen. *Z. Phys.*, 157:112–121, 1959.

[68] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's prinsiple and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124(3):925–935, 1961.

[69] P. A. M. Dirac. A new basis for cosmology. *Proc. Roy. Soc. London*, A165(921):199–208, 1938.

[70] A. Peres. Polynomial expansion of gravitational lagrangian. *Nuovo Cimento*, 28(4):865–867, 1963.

[71] M. O. Katanaev. Polynomial form of the Hilbert–Einstein action. *Gen. Rel. Grav.*, 38:1233–1240, 2006. gr-qc/0507026.

[72] R. Penrose. A remarkable property of plane waves in general relativity. *Rev. Mod. Phys.*, 37(1):215–220, 1965.

[73] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov. Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A9(2):109–141, 1968.

[74] Н. Х. Ибрагимов. К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка. *ДАН*, 183(2):274–277, 1968.

[75] C. G. Callan, S. Coleman, and R. Jackiw. A new improved energy–momentum tensor. *Ann. Phys.*, 59:42–73, 1970.

[76] В. С. Владимиров. *Уравнения математической физики*. Наука, Москва, издание пятое, 1988.

[77] M. Fierz and W. Pauli. Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. London*, A173:211–232, 1939.

[78] W. G. Unruh. Experimental black-hole evaporation? *Phys. Rev. Lett.*, 46:1351–1353, 1981.

[79] W. G. Unruh. Sonic analogue of black holes and the effect of high frequencies on black holes evaporation. *Phys. Rev.*, D51(6):2827–2838, 1995.

[80] M. Visser. Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation. *Class. Quantum Grav.*, 15:1767–1791, 1998.

[81] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. *Гидродинамика*. Наука, Москва, третье edition, 1986.

[82] А. З. Петров. *Новые методы в общей теории относительности*. Наука, Москва, 1966.

[83] R. Arnowitt, S. Deser, and S. W. Misner. The dynamics of general general relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation: an introduction to current research*, New York – London, 1962. John Wiley & Sons, Inc. gr-qc/0405109.

[84] B. S. DeWitt. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. *Phys. Rev.*, 160(5):1113–1148, 1967.

[85] Д. М. Гитман and И. В. Тютин. *Каноническое квантование полей со связями.* Наука, Москва, 1986.

[86] H. Weyl. *Raum – Zeit – Materie.* Springer, Berlin, 1918. Перевод: Г. Вейль. *Пространство, время, материя.* М.: Янус, 1996.

[87] W. Pauli. *Theory of Relativity.* Pergamon Press, New York, 1958. Перевод: Паули В. *Теория относительности.* М.: Наука, 1991.

[88] E. Schrödinger. *Space-time Structure.* Cambridge U.P., Cambridge, 1950. Перевод: Шредингер Э. *Пространственно-временна́я структура Вселенной.* М.: Наука, 1986.

[89] W. Gordon. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zs. f. Phys.*, 40(1,2):117–133, 1926.

[90] V. A. Fock. Zur Schrödingerschen Wellenmechanik. *Zs. f. Phys.*, 38(3):242–250, 1926.

[91] V. A. Fock. über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungs- gleichungen für einen geladenen Massenpunkt. *Zs. f. Phys.*, 39(2,3):226–232, 1926.

[92] O. Klein. Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. *Zs. f. Phys.*, 41(10):407–442, 1927.

[93] J. Goldstone. Field theories with “superconductor” solutions. *Nuovo Cim.*, 19(1):154–164, 1961.

[94] E. P. Wigner. *Group Theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra.* Academic Press, New York – London, 1959. Перевод: Вейль Е. *Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров.* М.: Иностраннная литература, 1961.

[95] J. van Bladel. Lorenz or Lorentz ? *IEEE Antennas and Propagation Magazin*, 33(2):69, 1991.

[96] F. Englert and R Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13(9):321–323, 1964.

[97] P. W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12(2):132–133, 1964.

[98] A. Proca. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. Physique*, 8:347–353, 1936.

[99] A. Proca. Sur la théorie du positon. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 202:1366, 1936.

[100] А. Н. Тихонов and А. А. Самарский. *Уравнения математической физики. 5 изд.* Наука, Москва, 1977.

[101] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, and З. Я. Шапиро. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения.* Физ.-мат. лит., Москва, 1958.

[102] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, and И. Т. Тодоров. *Общие принципы квантовой теории поля.* Наука, Москва, 1987.

[103] W. Pauli. Contributions mathematiques a la theorie des matrices de dirac. *Ann. Inst. H. Poincare*, 6:109, 1936.

[104] Jr. R. H. Good. Properties of the dirac matrices. *Rev. Mod. Phys.*, 27:187, 1955.

[105] M. Fierz. Zur fermischen theorie des $\beta$-zerfalls. *Z. Phys.*, 104:553–556, 1937.

[106] R. F. Streater and A. S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics and All That.* W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam, 1964. Перевод: Р. Стритер, А. С. Вайтман. *PCT, спин, статистика и все такое*. М.: Наука, 1966.

[107] P. A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. London*, A117:610–624, 1928. Перевод в сб. П. А. М. Дирак “К созданию квантовой теории поля” Ред. Б. В. Медведев. М.: Наука, 1990, сс. 113–128.

[108] P. A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. part ii. *Proc. Roy. Soc. London*, A118:351–361, 1928. Перевод в сб. П. А. М. Дирак “К созданию квантовой теории поля” Ред. Б. В. Медведев. М.: Наука, 1990, сс. 129–141.

[109] E. Majorana. Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone. *Nuovo Cim.*, 14:171–195, 1937.

[110] V. A. Fock. Geometrizierung der Diracschen Theorie des Electrons. *Zs. f. Phys.*, 57(3,4):261–277, 1929. Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 415–432.

[111] H. Weyl. Gravitation and the electron. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 15:323–334, 1929.

[112] В. С. Владимиров and В. В. Жаринов. *Уравнения математической физики.* Физ-мат литература, Лаборатория базовых знаний, Москва, 2000.

[113] J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry.* Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg, 1979. Перевод: Дж. Торп. *Начальные главы дифференциальной геомерии.* М.: Мир, 1982.

[114] T. K. Milnor. Efimov’s theorem about complete immersed surfaces of negative curvature. *Advances in Math.*, 8:474–543, 1972.

[115] N. H. Kuiper. On $\mathcal{C}^1$ isometric embeddings. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 58:683–689, 1955.

[116] M. O. Katanaev. All universal coverings of two-dimensional gravity with torsion. *J. Math. Phys.*, 34(2):700–736, 1993.

[117] L. Liouville. Sur l'équation aux différences partielles $\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u \partial v} \pm \lambda a^2 = 0$. *J. Math. Pures Appl.*, 18:71–72, 1853.

[118] M. D. Kruskal. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119(5):1743–1745, 1960.

[119] G. Szekeres. On the singularities of a riemannian manifold. *Publ. Mat. Debrecen*, 7(1–4):285–301, 1960.

[120] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin*, pages 189–196, 1916. Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199–207.

[121] J. Droste. Over het veld van een enkel centrum in einstein's theorie der zwaarte-kracht. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 23:968–981, 1914–1915. English translation: "On the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation". Proc. Acad. Sci. Amsterdam 17(1915)998– 1011.

[122] J. Droste. Het veld van twee bolvormige restunde centra in einstein's theorie der zwaartekracht. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 24:749–757, 1915–1916. English translation: "On the field of two Spherical Fixed Centres in Einstein's Theory of Gravitation". Proc. Acad. Sci. Amsterdam 18(1916)760–769.

[123] J. Droste. Het veld van een enkel centrum in einstein's theorie der zwaartekracht, en de beweging van een stoffelijk punt in dat veld. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam*, 25:163–180, 1916–1917. English translation: "The Field of a Single Centre in Einstein's Theory of Gravitation, and the Motion of a Particle in That Field". Proc. Acad. Sci. Amsterdam 19(1917)197–215. Reprinted, with historical comments, in *Gen. Rel. Grav.* 34(2002)1545.

[124] M. O. Katanaev and I. V. Volovich. String model with dynamical geometry and torsion. *Phys. Lett.*, 175B(4):413–416, 1986.

[125] T. Klösch and T. Strobl. Classical and quantum gravity in 1+1 dimensions: II. The universal coverings. *Class. Quantum Grav.*, 13:2395–2421, 1996.

[126] M. O. Katanaev, W. Kummer, and H. Liebl. Geometric interpretation and classification of global solutions in generalized dilaton gravity. *Phys. Rev. D*, 53(10):5609–5618, 1996.

[127] M. O. Katanaev, W. Kummer, and H. Liebl. On the completeness of the black hole singularity in 2d dilaton theories. *Nucl. Phys.*, B486:353–370, 1997.

[128] M. O. Katanaev. Global solutions in gravity: Euclidean signature. In D. Vassilevich D. Grumiller, A. Rebhan, editor, *In "Fundumental Interactions. A Memorial Volume for Wolfgang Kummer"*, pages 249–266, Singapore, 2010. World Scientific. gr-qc/0808.1559.

[129] B. Carter. Black hole equilibrium states. In C. DeWitt and B. C. DeWitt, editors, *Black Holes*, pages 58–214, New York, 1973. Gordon & Breach.

[130] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Ann. Physik* (*Leipzig*), 50:106–120, 1916.

[131] G Nordström. On the energy of the gravitational field in einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:1238–1245, 1918.

[132] A. S. Eddington. A comparison of Whitehead's and Einstein's formulae. *Nature*, 113:192, 1924.

[133] D. Finkelstein. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110(4):965–967, 1958.

[134] И. В. Волович and М. О. Катанаев. Квантовые струны с динамической геометрией. *Письма в ЖЭТФ*, 43(5):212–213, 1986.

[135] M. O. Katanaev and I. V. Volovich. Two-dimensional gravity with dynamical torsion and strings. *Ann. Phys.*, 197(1):1–32, 1990.

[136] М. О. Катанаев. Новая интегрируемая модель – двумерная гравитация с динамическим кручением. *ДАН СССР*, 309(3):591–593, 1989.

[137] M. O. Katanaev. Complete integrability of two-dimensional gravity with dynamical torsion. *J. Math. Phys.*, 31(4):882–891, 1990.

[138] M. O. Katanaev. Conformal invariance, extremals, and geodesics in two-dimensional gravity with torsion. *J. Math. Phys.*, 32(9):2483–2496, 1991.

[139] M. O. Katanaev, T. Klösch, and W. Kummer. Global properties of warped solutions in general relativity. *Ann. Phys.*, 276:191–222, 1999.

[140] M. O. Katanaev. Canonical quantization of the string with dynamical geometry and anomaly free nontrivial string in two dimensions. *Nucl. Phys. B*, 416:563–605, 1994.

[141] W. Kummer, H. Liebl, and D. V. Vassilevich. Exact path integral quantization of generic 2D dilaton gravity. *Nucl. Phys.*, B493:491–502, 1997.

[142] W. Kummer and G. Tieber. Universal conservation law and modified Noether symmetry in $2d$ models of gravity with matter. *Phys. Rev. D*, 59:044001, 1998.

[143] M. O. Katanaev. New integrable model – two-dimensional gravity with dynamical torsion. *Sov. Phys. Dokl.*, 34(3):982–984, 1989.

[144] W. Kummer and D. J. Schwarz. General analytic solution of $R^2$–gravity with dynamical torsion in two dimensions. *Phys. Rev. D*, 45(8):3628–3635, 1992.

[145] S. N. Solodukhin. Black-hole solution in $2d$ gravity with torsion. *JETP Lett.*, 57(6):329–334, 1993.

[146] E. W. Mielke, F. Gronwald, Yu. N. Obukhov, R. Tresguerres, and F. W. Hehl. Towards complete integrability of two dimensional Poincaré gauge gravity. *Phys. Rev. D*, 48(8):3648–3662, 1993.

[147] P. Schaller and T. Strobl. Canonical quantization of non-Einsteinian gravity and the problem of time. *Class. Quantum Grav.*, 11:331–346, 1994.

[148] W. Kummer and P. Widerin. Conserved quasilocal quantities and general covariant theories in two dimensions. *Phys. Rev.*, D52(12):6965–6975, 1995.

[149] B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, and A. M. Chervjakov. Solitons is some geometrical field theories. *Theor. Math. Phys.*, 40(1):15–27, 1979.

[150] R. Jackiw. Liouville field theory: a two-dimensional model for gravity. In S. Christensen, editor, *Quantum theory of gravity*, pages 403–420, Bristol, 1984. Hilger.

[151] C. Teitelboim. Gravitation and Hamiltonian structure in two spacetime dimensions. *Phys. Lett.*, 126B(1,2):41–45, 1983.

[152] N. Ikeda and K.-J. Izawa. General form of dilaton gravity and nonlinear gauge theory. *Prog. Theor. Phys.*, 89(5):237–246, 1993.

[153] P. Schaller and T. Strobl. Poisson structure induced (topological) field theories. *Mod. Phys. Lett.*, A9(33):3129–3136, 1994.

[154] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, and E. Herlt. *Exact Solutions of the Einsteins Field Equations*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[155] G. D. Birkhoff. *Relativity and modern physics*. Cambridge, Harvard University Press, Cambridge, 1923.

[156] J. T. Jebsen. Uber die allgemeinen kugelsymmetrischen losungen der einsteinschen gravitationsgleichungen im vakuum. *Ark. Mat. Ast. Fys.*, 15(18):1–9, 1921.

[157] F. Kottler. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Ann. Physik (Leipzig), ser.* 4, 56(14):401–462, 1918.

[158] A. Einstein and N Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 43:73–77, 1935.

[159] L. Flamm. Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physik. Z.*, 17:448, 1916.

[160] P. Peinlevé. La mécanique classique el la theorie de la relativité. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 173:677–680, 1921.

[161] A. Gullstrand. Allegemeine lösung des statischen einkörper-problems in der Einsteinshen gravitations theorie. *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, 16(8):1–15, 1922.

[162] E. Kasner. The impossiility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions. *Am. J. Math.*, 43(2):126–129, 1921.

[163] С. А. Пастон and А. А. Шейкин. Вложения для решений уравнений Эйнштейна. *ТМФ*, 175(3):429–441, 2013.

[164] C. Fronsdal. Completion and embedding of the schwarzschild solution. *Phys. Rev.*, 116(3):778–781, 1959.

[165] E. Kasner. Finite representation of the solar gravitational field if flat space of six dimensions. *Am. J. Math.*, 43(2):130–133, 1921.

[166] T. Fujitani, M. Ikeda, and M. Matsumoto. On the embedding of the Schwarzschild. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1(1):43–61, 1961.

[167] A. K. Raychaudhuri. Relativistic cosmology. I. *Phys. Rev.*, 98(4):1123–1126, 1955. Reprinted, with historical comments: *Gen. Rel. Grav.*32(2000) 743.

[168] A. K. Raychaudhuri. Singular state in relativistic cosmology. *Phys. Rev.*, 106:172, 1957.

[169] J. Ehlers. Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien [contributions to the relativistic mechanics of continuous media]. *Abhandlungen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Akademie der Wissenschaften und Literatur Mainz*, 11, 1961. English translation: *Gen. Rel. Grav.* 25, no 12, (1993)1225–1266.

[170] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophys. J.*, 142(3):419–421, 1965.

[171] A. Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Zs. Phys.*, 10:377–386, 1922.

[172] A. Friedmann. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. *Zs. Phys.*, 21:326–332, 1924.

[173] S. Perlmutter and et al. Measurements of $\omega$ and $\lambda$ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517(2):565–586, 1999.

[174] A. G. Riess and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116(3):1009–1038, 1998.

[175] J. H. Jeans. The motions of stars in a kapteyn-universe. *MNRAS*, 82:122–132, 1922.

[176] J. C. Kapteyn. First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system. *Astrophys. J.*, 55:302–328, 1922.

[177] A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, 1:142–152, 1917. Перевод: Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 601–612.

[178] P. Hájiček. *An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation*. Springer, Heidelberg, 2008.

[179] W. de Sitter. On the relativity of inertia: Remark concerning einstein's latest hypothesis. *Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet.*, 19:1217–1225, 1916–1917.

[180] W. de Sitter. On the curvature of space. *Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet.*, 20:229–243, 1917.

[181] H. P. Robertson. Relativistic cosmology. *Rev. Mod. Phys.*, 5:62–90, 1933.

[182] L. Bianchi. Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti. *Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat.*, 11:267, 1897.

[183] E. Kasner. Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations. *Am. J. Math.*, 43(4):217–221, 1921.

# Предметный указатель

*Научное издание*

**Лекционные курсы НОЦ**

**Выпуск 28**

***Михаил Орионович Катанаев***

**Математические основы общей теории относительности. Часть 1**

Тираж 50 экз.
Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/`      e-mail: `journals@mi.ras.ru`