ISSN 2226-5929

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 22

Издание выходит с 2003 года

Интегральные операторы Харди–Стеклова

Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Москва
2016

УДК 517.51+517.98
ББК 22.16
С56

Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова

С56 Интегральные операторы Харди–Стеклова – М.: МИАН, 2016. – 186 с. – (Современные проблемы математики, ISSN 2226-5929; Вып. 22).

ISBN 978-5-98419-070-1

Серия "Современные проблемы математики" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук (МИАН). Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 14-11-00443).

DOI: 10.4213/spm55
DOI: 10.4213/book1629

ISBN 978-5-98419-070-1

Содержание

Введение

Цель монографии состоит в полном и замкнутом исследовании интегральных преобразований вида

$$\mathscr{K} f(x) := w(x) \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,y) f(y) v(y)\, dy, \qquad x > 0, \tag{0.0.1}$$

с локально интегрируемыми весовыми функциями v, w на $(0, \infty)$ и неотрицательным на области

$$\{(x,y)\colon x > 0,\ a(x) < y < b(x)\}$$

ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим некоторым свойствам обобщенной монотонности по каждой из переменных. Граничные функции $a(x)$ и $b(x)$ в модельном случае удовлетворяют следующим условиям:

(i) $a(x)$ и $b(x)$ дифференцируемы и строго возрастают на $(0, \infty)$;

(ii) $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) < b(x)$ для $0 < x < \infty$ и $a(\infty) = b(\infty) = \infty$.

Основные вопросы о преобразованиях (0.0.1) состоят в нахождении критериев (необходимых и достаточных условий) их L^p–L^q ограниченности и компактности в пространствах Лебега, а также поведении аппроксимативных и энтропийных чисел. Здесь наиболее продвинутым является случай операторов Харди–Стеклова, возникающий при $k(x,y) \equiv 1$.

В монографической литературе хорошо представлены исследования преобразований (0.0.1) при $a(x) = 0$, $b(x) = x$, известных как операторы Харди (при $k(x,y) \equiv 1$) и операторы типа Харди (при $k(x,y) \not\equiv 1$) (см., например, [1], [2], [3], [4], [5]). Собственно преобразованиям (0.0.1) уделено внимание лишь в [2; гл. 3], в настоящей работе мы значительно перекрываем эти результаты.

Одним из первоисточников указанных исследований являются весовые L^p–L^q неравенства с операторами типа Харди, значение которых в действительном анализе и его приложениях хорошо известны.

В гл. 1 дается исчерпывающее изучение этих вопросов при $0 < p, q < +\infty$ в пространствах Лебега с произвольными мерами.

Основные результаты об операторах Харди–Стеклова содержатся в гл. 2. Здесь вводится понятие фарватер-функции, с помощью которой находятся критерии L^p–L^q ограниченности операторов Харди–Стеклова в нескольких альтернативных формах, каждая из которых важна для приложений.

В гл. 3 найденные в гл. 2 критерии ограниченности оператора Харди–Стеклова позволяют в 3.1 решить аналогичную задачу для оператора геометрического среднего вида

$$\mathscr{G} f(x) := \exp\biggl(\frac{1}{b(x) - a(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} \log f(y)\, dy\biggr), \qquad f(y) \geqslant 0.$$

Следующий пункт 3.2 посвящен характеризации функциональных пространств, ассоциированных к весовым пространствам Соболева первого порядка на действительной оси. При этом обнаружен ряд неожиданных эффектов, отличающих рассматриваемую ситуацию от случая функциональных пространств Банаха [6].

Заключительные пункты 3.3 и 3.4 посвящены нахождению критериев выполнения теорем вложения весовых пространств Соболева в весовые пространства Лебега.

Содержание монографии базируется на результатах ее авторов, в значительной мере опубликованных в журнальной периодике.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \leqslant cB$ с константой c, зависящей только от параметров суммирования и, возможно, от других несущественных параметров. Мы пишем $A \approx B$ вместо $A \lesssim B \lesssim A$ или $A = cB$. Символ $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, χ_E – характеристическую функцию (индикатор) множества E. Мы используем знаки $:=$ и $=:$ для определения новых величин.

Глава 1. Неравенства Харди с мерами

1.1. Предварительные замечания

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, под топологией на X понимаем топологию, индуцированную евклидовой топологией $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(X)$ σ-алгебру борелевских подмножеств множества X. Символ $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}(X)$ обозначает σ-алгебру подмножеств множества X, содержащую $\mathfrak{B}$. Через $\{\mathfrak{M}\}^+$ обозначим класс всех $\mathfrak{M}$-измеримых функций $f\colon X \to [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$. Фраза "$\mu$ есть мера на X" означает, что существует σ-алгебра $\mathfrak{M}$ такая, что μ суть счетно-аддитивная функция, заданная на $\mathfrak{M}$, со значениями в расширенной полупрямой $[0,+\infty) \cup \{+\infty\}$, при этом предполагаем, что существует хотя бы одно $E \in \mathfrak{M}$, на котором $\mu(E) < +\infty$. Для выделения той σ-алгебры, на которой задана мера λ, будем использовать запись $\mathfrak{M}_\lambda$. Также положим $\mathfrak{M}_{\lambda,\mu} := \mathfrak{M}_\lambda \cap \mathfrak{M}_\mu$.

На расширенной полупрямой $[0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ введены следующие аксиомы:

$$\begin{gathered} 0 + (+\infty) = a + (+\infty) = a \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad \text{если} \quad a \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}; \\ 0 \cdot (+\infty) = 0; \\ (+\infty)^\alpha = 0^{-\alpha} = +\infty,\ (+\infty)^{-\alpha} = 0^\alpha = 0, \qquad \text{если} \quad \alpha \in (0,+\infty). \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

Для единообразия записи для произвольных $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leqslant b$, положим

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad [a,b) := [a,b] \setminus \{b\}, \qquad (a,b] := [a,b] \setminus \{a\}.$$

Лемма 1.1. *Пусть λ – σ-конечная мера на $[a,b]$, $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ и $\Lambda_f(x) := \int_{[a,x]} f\,d\lambda$. Если $\gamma > 0$, то*

$$\frac{\Lambda_f(b)^{\gamma+1}}{\max\{1,\gamma+1\}} \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) \leqslant \frac{\Lambda_f(b)^{\gamma+1}}{\min\{1,\gamma+1\}}. \tag{1.1.2}$$

Если $\gamma \in (-1,0)$ и $\Lambda_f(b) < +\infty$, то выполнено (1.1.2).

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$. Тогда второе неравенство в (1.1.2) следует из монотонности Λ_f. Докажем первое неравенство. Пусть

$$\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) < +\infty.$$

Тогда для любого $x \in [a,b]$ выполнено $\int_{\{x\}} f\,d\lambda < +\infty$.

Предположим, что $\Lambda_f(b) = +\infty$. Обозначим

$$E := \{x \in [a,b] \mid \Lambda_f(x) = +\infty\} \qquad \text{и} \qquad c := \begin{cases} \inf E & \text{при } E \neq \varnothing, \\ b & \text{при } E = \varnothing. \end{cases}$$

Если существует $\xi \in (c,b]$ такое, что $\int_{(\xi,b]} f\,d\lambda \neq 0$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) \geqslant \Lambda_f(\xi)^\gamma \int_{(\xi,b]} f\,d\lambda = +\infty,$$

т.е. получаем противоречие. Следовательно, для любого $\xi \in (c,b]$ выполнено $\int_{(\xi,b]} f\,d\lambda = 0$. Откуда по теореме о монотонной сходимости $\int_{(c,b]} f\,d\lambda = 0$ и, значит, $\Lambda_f(c) = +\infty$. Учитывая конечность интеграла $\int_{\{x\}} f\,d\lambda$ для любого $x \in [a,b]$, имеем $c > a$ и $\int_{[a,c)} f\,d\lambda = +\infty$. В силу этого существует $t \in [a,c)$ такое, что $\Lambda_f(t) > 0$. Тогда

$$\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) \geqslant \Lambda_f(t)^\gamma \int_{(t,c)} f\,d\lambda = +\infty$$

в силу выбора точки c. Получили противоречие.

Пусть $\Lambda_f(b) < +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) &= \gamma \int_{[a,b]} f(x)\biggl(\int_0^{\Lambda_f(x)} s^{\gamma-1}\,ds\biggr)\,d\lambda(x)\\ &= \gamma \int_0^{\Lambda_f(b)} s^{\gamma-1}\biggl(\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[0,\Lambda_f(x)]}(s)\,d\lambda(x)\biggr)\,ds.\end{aligned}$$

Для $s \geqslant 0$ положим $E_s := \{x \in [a,b] \mid \Lambda_f(x) < s\}$. Если $E_s = \varnothing$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[0,\Lambda_f(x)]}(s)\,d\lambda(x) = \Lambda_f(b) \geqslant \Lambda_f(b) - s.$$

Пусть $E_s \neq \varnothing$, $c_s := \sup E_s$ и последовательность $\{t_n^{(s)}\}_1^\infty \subset E_s$ такая, что $t_n^{(s)} \uparrow c_s$ при $n \to \infty$. Тогда если $c_s \in E_s$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[0,\Lambda_f(x)]}(s)\,d\lambda(x) = \int_{(c_s,b]} f\,d\lambda = \Lambda_f(b) - \Lambda_f(c_s) \geqslant \Lambda_f(b) - s.$$

Если $c_s \notin E_s$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[0,\Lambda_f(x)]}(s)\,d\lambda(x) = \int_{[c_s,b]} f\,d\lambda = \Lambda_f(b) - \lim_{n\to\infty} \Lambda_f(t_n^{(s)}) \geqslant \Lambda_f(b) - s.$$

Таким образом,

$$\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) \geqslant \Lambda_f(b)^{\gamma+1} - \frac{\gamma\Lambda_f(b)^{\gamma+1}}{\gamma+1} = \frac{\Lambda_f(b)^{\gamma+1}}{\gamma+1}$$

и, тем самым, случай $\gamma > 0$ рассмотрен.

Пусть $\gamma \in (-1,0)$ и $\Lambda_f(b) < +\infty$. Тогда первое неравенство в (1.1.2) следует из монотонности Λ_f. Докажем второе неравенство. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) &= -\gamma \int_{[a,b]} f(x)\biggl(\int_{\Lambda_f(x)}^{+\infty} s^{\gamma-1}\,ds\biggr)\,d\lambda(x)\\ &= -\gamma \int_{[a,b]} f(x)\biggl(\int_0^{\Lambda_f(b)} s^{\gamma-1}\chi_{[\Lambda_f(x),\Lambda_f(b)]}(s)\,ds + \int_{\Lambda_f(b)}^{+\infty} s^{\gamma-1}\,ds\biggr)\,d\lambda(x)\\ &= -\gamma \int_0^{\Lambda_f(b)} s^{\gamma-1}\biggl(\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[\Lambda_f(x),\Lambda_f(b)]}(s)\,d\lambda(x)\biggr)\,ds + \Lambda_f(b)^{\gamma+1}.\end{aligned}$$

Для $s \geqslant 0$ положим $E_s := \{x \in [a,b] \mid \Lambda_f(x) \leqslant s\}$. Если $E_s = \varnothing$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[\Lambda_f(x),\Lambda_f(b)]}(s)\,d\lambda(x) = 0 \leqslant s.$$

Пусть $E_s \neq \varnothing$, $c_s := \sup E_s$ и последовательность $\{t_n^{(s)}\}_1^\infty \subset E_s$ такая, что $t_n^{(s)} \uparrow c_s$ при $n \to \infty$. Тогда если $c_s \in E_s$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[\Lambda_f(x),\Lambda_f(b)]}(s)\,d\lambda(x) = \int_{[a,c_s]} f\,d\lambda = \Lambda_f(c_s) \leqslant s.$$

Если $c_s \notin E_s$, то

$$\int_{[a,b]} f(x)\chi_{[\Lambda_f(x),\Lambda_f(b)]}(s)\,d\lambda(x) = \int_{[a,c_s)} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Lambda_f(t_n^{(s)}) \leqslant s.$$

Таким образом,

$$\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) \leqslant -\gamma \int_0^{\Lambda_f(b)} s^\gamma\,ds + \Lambda_f(b)^{\gamma+1} = \frac{\Lambda_f(b)^{\gamma+1}}{\gamma+1},$$

и лемма доказана.

Справедливо аналогичное утверждение для интеграла с переменным нижним пределом.

Лемма 1.2. *Пусть* λ *–* σ*-конечная мера на* $[a,b]$, $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ *и* $\overline{\Lambda}_f(x) := \int_{[x,b]} f\,d\lambda$. *Если* $\gamma > 0$, *то выполнено*

$$\frac{\overline{\Lambda}_f(a)^{\gamma+1}}{\max\{1,\gamma+1\}} \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\overline{\Lambda}_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) \leqslant \frac{\overline{\Lambda}_f(a)^{\gamma+1}}{\min\{1,\gamma+1\}}. \tag{1.1.3}$$

Если $\gamma \in (-1,0)$ *и* $\overline{\Lambda}_f(a) < +\infty$, *то выполнено* (1.1.3).

При $\gamma \in (-1,0)$ и $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = +\infty$ вторые неравенства в (1.1.2) и (1.1.3), очевидно, выполнены, однако первые могут не выполняться. Так, например, $\int_{[a,b]} f(x)\Lambda_f(x)^\gamma\,d\lambda(x) = 0$, если $\Lambda_f(x) = +\infty$ для любого $x \in [a,b]$.

Следующая лемма для случая меры Лебега доказана в [7; теорема 190]. В общем случае она фактически содержится в рассуждениях, доказывающих совпадение нормы интегрального функционала над L^p с нормой функции в $L^{p'}$ (см., например, [8; § IV.8]).

Лемма 1.3. *Пусть* X *– пространство с* σ*-конечной мерой* λ, $p > 1$, g *неотрицательная измеримая функция на* X *и* E *–* λ*-измеримое множество. Если* $\int_E g^{p'}\,d\lambda = +\infty$, *то существует неотрицательная* λ*-измеримая функция* f *на* X *такая, что* $\int_E f^p\,d\lambda < +\infty$ *и* $\int_E fg\,d\lambda = +\infty$.

Доказательство. Заметим, что $\lambda(E) > 0$, ибо $\int_E g^{p'}\,d\lambda = +\infty$. Так как λ – σ-конечная мера, то $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, где $\lambda(A_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ и $A_n \cap A_{n'} = \varnothing$ для $n \neq n'$. Пусть $F := \{x \in E \mid g(x) = +\infty\}$. Если $\lambda(F) > 0$, то существует $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\lambda(A_n \cap F) > 0$. Положим $f = \chi_{A_n\cap F}$. Функция f искомая. Пусть теперь $\lambda(F) = 0$. Положим

$$E_{n,k} := \{x \in A_n \mid 2^k \leqslant g(x) < 2^{k+1}\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Занумеруем счетное семейство $\{E_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ одним индексом: $\{E_{n,k}\}_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} = \{E'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, и для $j \in \mathbb{N}$ положим $a_j := 2^k$, если $E'_j = E_{n,k}$. Пусть также $s := \min\{j \in \mathbb{N} \mid \lambda(E'_j) \neq 0\} - 1$. Тогда для любого $x \in E'_j$ выполнено $a_j \leqslant g(x) \leqslant 2a_j$ и

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{s+i}^{p'}\lambda(E'_{s+i}) \geqslant 2^{-p'} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{E'_{s+i}} g^{p'}\,d\lambda = 2^{-p'} \int_E g^{p'}\,d\lambda = +\infty.$$

Положим

$$f := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{s+j}^{p'-1}\left[\sum_{i=1}^{j} a_{s+i}^{p'}\lambda(E'_{s+i})\right]^{-1}\chi_{E'_{s+j}}.$$

Функция f искомая, ибо

$$\int_E f^p\,d\lambda = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{s+j}^{p'}\lambda(E'_{s+j})\left[\sum_{i=1}^{j} a_{s+i}^{p'}\lambda(E'_{s+i})\right]^{-p} < +\infty$$

и

$$\int_E fg\,d\lambda = \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{E'_{s+j}} fg\,d\lambda \geqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{s+j}^{p'}\lambda(E'_{s+j})\left[\sum_{i=1}^{j} a_{s+i}^{p'}\lambda(E'_{s+i})\right]^{-1} = +\infty$$

в силу теоремы Абеля (см. [7; теорема 162]).

Лемма 1.4. *Пусть $L \in \mathfrak{M}_\lambda(\mathbb{R})$ и $L_t := L\cap(-\infty,t]$, $\overline{L}_t := L\cap[t,+\infty)$, $t\in\mathbb{R}$. 1) Если для любого $t\in L$ выполнено $\lambda(L_t)=0$, то $\lambda(L)=0$. 2) Если для любого $t\in L$ выполнено $\lambda(\overline{L}_t)=0$, то $\lambda(L)=0$.*

Доказательство. Если $L=\varnothing$, то $\lambda(L)=0$. Пусть, теперь, $L\neq\varnothing$, $s:=\sup L$, $i:=\inf L$ и последовательности $\{t_n\}_1^\infty$, $\{\bar t_n\}_1^\infty\subset L$ такие, что $t_n\uparrow s$, $\bar t_n\downarrow i$ при $n\to\infty$. 1) Если $s\in L$, то $L=L_s$ и $\lambda(L)=\lambda(L_s)=0$. Если $s\notin L$, то $L:=\bigcup_1^\infty L_{t_n}$ и утверждение следует из свойств меры. Случай 2) доказывается аналогично, используя последовательность $\{\bar t_n\}$.

Лемма 1.5. *Пусть $0<p,q<+\infty$, λ,μ суть σ-конечные меры на $[a,b]$; $u,\tau\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v\in\{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, функция k определена на $[a,b]^2$, принадлежит классу $\{\mathfrak{M}_\mu\times\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, и удовлетворяет условию: существует константа $\alpha>0$ такая, что $k(x_1,y)\leqslant\alpha k(x_2,y)$ для $x_1<x_2$. Тогда следующие неравенства:*

$$\left[\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)f(y)\tau(y)\,d\lambda(y)\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q} \leqslant C\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right]^{1/p} \qquad \text{для всех}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \tag{1.1.4}$$

$$\left[\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)g(y)\,d\lambda(y)\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q} \leqslant C\left[\int_{[a,b]} g^p\tau^{-p}\,d\lambda\right]^{1/p} \qquad \text{для всех}\quad g\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \tag{1.1.5}$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (1.1.5). Фиксируем произвольную функцию $f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Подставляя $g=f\tau$ в (1.1.5), получим

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)f(y)\tau(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]}(f\tau)^p\tau^{-p}\,d\lambda\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p}$$

в силу $\tau^p\tau^{-p}\leqslant 1$.

Пусть выполнено (1.1.4). Для $t \in [a,b]$ положим

$$F_t := \{x \in [a,t] \mid \tau(x) = +\infty \wedge k(t,x)u(x) \neq 0\}, \qquad E := \{t \in [a,b] \mid \lambda(F_t) > 0\}.$$

Так как функция k квази возрастает по первой переменной, то $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ при $t_1 < t_2$ и функция $\lambda(F_t)$ неубывающая на $[a,b]$. Поэтому E борелевское. Если $E = \varnothing$, то $\int_E v\,d\mu = 0$. Пусть $E \neq \varnothing$. Фиксируем произвольное $t \in E$. По [9; лемма 6.9] существует $\mathfrak{M}_\lambda$-измеримая функция f такая, что $\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda < +\infty$ и $f(x) \in (0,1)$, $x \in [a,b]$. Тогда

$$\int_{F_t} k(t,x)u(x)f(x)\tau(x)\,d\lambda(x) = +\infty.$$

Подставляя функцию $f\chi_{F_t}$ в (1.1.4), находим

$$\left(\int_{[t,b]} v\,d\mu\right)^{1/q} \int_{F_t} k(t,x)u(x)f(x)\tau(x)\,d\lambda(x) < +\infty.$$

Значит, $\int_{[t,b]} v\,d\mu = 0$. Так как t – произвольный элемент E, лемма 1.4 влечет $\int_E v\,d\mu = 0$, и неравенство (1.1.5) эквивалентно

$$\left[\int_{[a,b]\setminus E} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)g(y)\,d\lambda(y)\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q}$$
$$\leqslant C\left[\int_{[a,b]} g^p\tau^{-p}\,d\lambda\right]^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad g \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+. \tag{1.1.6}$$

Заметим, что $\lambda(F_x) = 0$ выполнено для любого $x \in [a,b] \setminus E$.

Фиксируем теперь произвольную функцию $g \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Если $\int_{[a,b]} g^p\tau^{-p}\,d\lambda = +\infty$, то (1.1.5) выполнено. Пусть $\int_{[a,b]} g^p\tau^{-p}\,d\lambda < +\infty$. Тогда функция $g^p\tau^{-p}$ конечна λ-п.в., в частности, для $E_1 := \{x \in [a,b] \mid g(x) \neq 0 \wedge \tau(x) = 0\}$ имеем $\lambda(E_1) = 0$. Подставляя $f(y) = g(y)\tau(y)^{-1}$, $y \in [a,b]$ в (1.1.4), получим

$$\left(\int_{[a,b]\setminus E} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)g(y)\tau(y)^{-1}\tau(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C\left(\int_{[a,b]} (g(y)\tau(y)^{-1})^p\,d\lambda(y)\right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство влечет (1.1.6), ибо

$$\big\{y \in [a,x] \mid k(x,y)u(y)g(y)\tau(y)^{-1}\tau(y) \neq k(x,y)u(y)g(y)\big\} \subset E_1 \cup F_x$$

для любого $x \in [a,b] \setminus E$.

Лемма 1.6. *Пусть $0 < p,q < +\infty$, μ, λ и ν суть σ-конечные меры на $[a,b]$, меры λ,ν определены на $\mathfrak{M}_\lambda$, $w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $\widetilde{k} \in \{\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda\}^+$; (ν_a,ν_s) разложение Лебега меры ν относительно λ, т.е. $\nu = \nu_a + \nu_s$, где ν_a абсолютно непрерывна относительно λ ($\nu_a \ll \lambda$), а ν_s и λ взаимно сингулярны ($\nu_s \perp \lambda$). Тогда следующие неравенства:*

$$\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p w\,d\nu\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \tag{1.1.7}$$

$$\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]}k(x,y)f(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{[a,b]}f^p w\,d\nu_a\right)^{1/p}\qquad \text{\textit{для всех}}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \tag{1.1.8}$$

эквивалентны.

Доказательство. Так как $\nu=\nu_a+\nu_s$, то (1.1.8) влечет (1.1.7). Обратно, пусть выполнено (1.1.7). Фиксируем произвольную $f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Так как ν_s и λ взаимно сингулярны, то существует множество $A\in\mathfrak{M}_\lambda$ такое, что $\lambda(A)=0$ и ν_s сконцентрирована на A. Так как ν_a абсолютно непрерывна относительно λ и $\lambda(E)=0$ для любого $E\in\mathfrak{M}_\lambda$, являющегося подмножеством A, то мера ν_a сконцентрирована на $[a,b]\setminus A$. Положим $\overline{f}:=f\chi_{[a,b]\setminus A}$. Подставляя функцию $\overline{f}$ в неравенство (1.1.7), находим

$$\begin{aligned}&\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]}k(x,y)f(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\\ &\quad=\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]}k(x,y)\overline{f}(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{[a,b]}\overline{f}^p w\,d\nu\right)^{1/p}\\ &\quad=C\left(\int_{[a,b]}\overline{f}^p w\,d\nu_a+\int_{[a,b]}\overline{f}^p w\,d\nu_s\right)^{1/p}=C\left(\int_{[a,b]}f^p w\,d\nu_a\right)^{1/p},\end{aligned}$$

т.е. выполнено неравенство (1.1.8).

1.2. Неравенство Харди с тремя мерами

В этой части доказываются критерии выполнения неравенства Харди вида

$$\left(\int_{[a,b]}v(x)\left(\int_{[a,x]}fu\,d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{[a,b]}f^p w\,d\nu\right)^{1/p}\qquad\text{для всех}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+,$$

где $1<p<+\infty$, $0<q<+\infty$, $1/r=1/q-1/p$; μ, λ и ν – σ-конечные меры на $[a,b]$, λ,ν определены на σ-алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$; $u,w\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v\in\{\mathfrak{M}_\mu\}^+$.

Случай, когда меры λ, μ, и ν являются абсолютно непрерывными относительно меры Лебега (весовое неравенство Харди), полностью характеризован в работах многих авторов (см. монографии [5] и [2]).

В теоремах 1.1 и 1.2 рассматривается случай $\lambda=\nu$. Базируясь на полученных результатах, теорема 1.4 характеризует неравенство Харди в общем случае.

Теорема 1.1. *Пусть $1<p\leqslant q<+\infty$, μ и λ суть σ-конечные меры на $[a,b]$; $u\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v\in\{\mathfrak{M}_\mu\}^+$. Неравенство*

$$\left(\int_{[a,b]}v(x)\left(\int_{[a,x]}fu\,d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_{[a,b]}f^p\,d\lambda\right)^{1/p}\qquad\text{\textit{для всех}}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \tag{1.2.1}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $A<+\infty$, где

$$A:=\sup_{t\in[a,b]}A(t):=\sup_{t\in[a,b]}\left(\int_{[t,b]}v\,d\mu\right)^{1/q}\left(\int_{[a,t]}u^{p'}\,d\lambda\right)^{1/p'}.$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (1.2.1) справедливо $C\approx A$.

Доказательство. Пусть

$$I_0 := \left\{ x \in [a,b] \;\Big|\; \int_{[a,x]} u\,d\lambda = 0 \right\}, \qquad I_\infty := \left\{ x \in [a,b] \;\Big|\; \int_{[a,x]} u^{p'}\,d\lambda = +\infty \right\},$$
$$I := [a,b] \setminus (I_0 \cup I_\infty).$$

Тогда $I_0, I_\infty, I \in \mathfrak{B}$. Заметим, что $\int_{I_0} u\,d\lambda = 0$ в силу леммы 1.4, ибо для любого $t \in I_0$ выполнено $I_0 \cap (-\infty, t] \subset [a,t]$ и $\int_{[a,t]} u\,d\lambda = 0$. Положим

$$U(x) := \int_{[a,x]} u^{p'}\,d\lambda, \quad V(x) := \int_{[x,b]} v\,d\mu, \qquad x \in [a,b].$$

Покажем, что неравенство (1.2.1) выполнено, если и только если $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$, $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ и

$$\left(\int_I v(x) \left(\int_{[a,x]} f u\,d\lambda \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda \right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+. \tag{1.2.2}$$

Пусть (1.2.1) выполнено. Тогда выполнено (1.2.2). Далее, если $I_\infty = \varnothing$, то $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$. Предположим, что $I_\infty \neq \varnothing$. Фиксируем произвольное $t \in I_\infty$. По лемме 1.3 существует $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ такая, что $\int_{[a,t]} f^p\,d\lambda < +\infty$ и $\int_{[a,t]} f u\,d\lambda = +\infty$. Подставляя функцию $f\chi_{[a,t]}$ в неравенство (1.2.1), получим

$$V(t)^{1/q} \int_{[a,t]} f u\,d\lambda \leqslant C \left(\int_{[a,t]} f^p\,d\lambda \right)^{1/p}.$$

Откуда $\int_{[t,b]} v\,d\mu = 0$, что в силу леммы 1.4 влечет $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$. Обратно, если $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$, то, учитывая $\int_{I_0} u\,d\lambda = 0$, левые части неравенств (1.2.2) и (1.2.1) равны. Таким образом, из (1.2.2) вытекает (1.2.1).

Кроме того, соотношение $A < +\infty$ равносильно

$$\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0, \qquad A' := \sup_{t \in I} A(t) < +\infty. \tag{1.2.3}$$

Действительно, из (1.2.3) следует $A = A' < +\infty$. Обратно, пусть $A < +\infty$. Тогда для любого $x \in I_\infty$ выполнено $\int_{[x,b]} v\,d\mu = 0$. Что по лемме 1.4 влечет $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$. Кроме того, $A' = A$.

Из приведенных рассуждений, также следует, что утверждение теоремы выполнено, если $I = \varnothing$. Поэтому далее предполагаем, что $I \neq \varnothing$.

Достаточность. Пусть $A < +\infty$ и, в частности, $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$. Фиксируем произвольную $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Так как $\int_{I_0} u\,d\lambda = 0$, то, применяя неравенство Гёльдера с показателями p и p', для любого $x \in I$ находим

$$\int_{[a,x]} f u\,d\lambda = \int_{[a,x]\cap I} f u\,d\lambda = \int_{[a,x]\cap I} f(y) u(y) U(y)^{1/(pp')} U(y)^{-1/(pp')}\,d\lambda(y)$$
$$\leqslant \left[\int_{[a,x]\cap I} f(y)^p U(y)^{1/p'}\,d\lambda(y) \right]^{1/p} \left[\int_{[a,x]} u(y)^{p'} U(y)^{-1/p}\,d\lambda(y) \right]^{1/p'}.$$

Откуда по лемме 1.1 для любого $x \in I$ следует

$$\int_{[a,x]} f u\,d\lambda \lesssim \left(\int_{[a,x]} f(y)^p U(y)^{1/p'}\,d\lambda(y) \right)^{1/p} U(x)^{1/(p')^2}$$
$$\leqslant A^{1/p'} \left(\int_{[a,x]} f(y)^p U(y)^{1/p'}\,d\lambda(y) \right)^{1/p} V(x)^{-1/(qp')}.$$

Применяя полученное соотношение, неравенство Минковского и лемму 1.2, получим следующую оценку левой части (1.2.2)

$$\begin{aligned}
&\left[\int_I v(x)\left[\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q}\\
&\quad\lesssim A^{1/p'}\left[\int_I v(x)\left[\int_{[a,x]} f(y)^p U(y)^{1/p'}\,d\lambda(y)\right]^{q/p} V(x)^{-1/p'}\,d\mu(x)\right]^{1/q}\\
&\quad\leqslant A^{1/p'}\left[\int_{[a,b]} f(y)^p U(y)^{1/p'}\left[\int_{I\cap[y,b]} V(x)^{-1/p'} v(x)\,d\mu(x)\right]^{p/q} d\lambda(y)\right]^{1/p}\\
&\quad\lesssim A^{1/p'}\left[\int_{[a,b]} f(y)^p U(y)^{1/p'} V(y)^{1/q}\,d\lambda(y)\right]^{1/p} \leqslant A\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Необходимость. Пусть выполнено неравенство (1.2.1). Тогда выполнено $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ и справедливо (1.2.2). Фиксируем произвольное $t\in I$. Полагая $f = u^{p'-1}\chi_{[a,t]}$ в (1.2.2), находим

$$V(t)^{1/q}U(t)\leqslant CU(t)^{1/p}.$$

Откуда $A'\leqslant C$ и теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть $0<q<p<+\infty$, $p>1$, $1/r = 1/q-1/p$; μ и λ суть σ-конечные меры на $[a,b]$; $u\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v\in\{\mathfrak{M}_\mu\}^+$. Неравенство (1.2.1) выполнено тогда и только тогда, когда $B<+\infty$, где*

$$B := \left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]} u^{p'}\,d\lambda\right)^{r/p'}\left(\int_{[x,b]} v\,d\mu\right)^{r/p} v(x)\,d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (1.2.1) справедливо $C\approx B$.

Доказательство. Пусть промежутки I_0, I_∞ и I определены, как в доказательстве теоремы 1.1. Также положим $U(x) := \int_{[a,x]} u^{p'}\,d\lambda$, $V(x) := \int_{[x,b]} v\,d\mu$, $x\in[a,b]$. Действуя аналогично доказательству теоремы 1.1, находим, что $\int_{I_0} u\,d\lambda = 0$ и что неравенство (1.2.1) выполнено, если и только если $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ и выполнено неравенство (1.2.2). Кроме того, соотношение $B<+\infty$ равносильно выполнению $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ и

$$B' := \left(\int_I U(x)^{r/p'} V(x)^{r/p} v(x)\,d\mu(x)\right)^{1/r} < +\infty.$$

Действительно, из $\int_{I_0} u\,d\lambda = 0$, $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ и $B'<+\infty$ следует $B = B' < +\infty$. Обратно, пусть $B<+\infty$. Тогда по лемме 1.2 для любого $t\in[a,b]$ имеет место оценка

$$B\geqslant\left(\int_{[t,b]} U(x)^{r/p'} V(x)^{r/p} v(x)\,d\mu(x)\right)^{1/r} \gtrsim U(t)^{1/p'} V(t)^{1/q} = A(t).$$

Откуда $A\lesssim B<+\infty$, что как показано в теореме 1.1, влечет равенство $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$. Учитывая это и $\int_{I_0} u\,d\lambda = 0$, имеем $B' = B < +\infty$. Из приведенных рассуждений, в частности, следует, что утверждение теоремы выполнено, если $I=\varnothing$. Поэтому далее предполагаем, что $I\neq\varnothing$.

Достаточность. Пусть $B<+\infty$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \chi_I(x)\left(\int_{[a,x]} U(s)^{r/q'} V(s)^{r/p} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right)^{q/r}.$$

Заметим, что $h \in \{\mathfrak{B}\}^+$. Для произвольного $x \in I$ лемма 1.1 влечет $h(x) \gtrsim V(x)^{q/p}U(x)^{q/p'}$, и если $h(x) = 0$, то $\int_{[x,b]} v\,d\mu = 0$. Откуда, применяя лемму 1.4, получим $\int_{\{x\in I\,|\,h(x)=0\}} v\,d\mu = 0$. Кроме того, переставляя интегралы и применяя леммы 1.2 и 1.1, находим, что

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} vh^{r/q}\,d\mu &\leqslant \int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} U(s)^{r/q'}V(s)^{r/p}u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]d\mu(x)\\ &= \int_{[a,b]} U(s)^{r/q'}V(s)^{r/q}u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\\ &\lesssim \int_{[a,b]} U(s)^{r/q'}\left[\int_{[s,b]} v(x)V(x)^{r/p}\,d\mu(x)\right]u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\\ &= \int_{[a,b]}\left[\int_{[a,x]} U(s)^{r/q'}u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]V(x)^{r/p}v(x)\,d\mu(x) \lesssim B^r.\end{aligned}$$

В частности, из данной оценки следует, что $\int_{\{x\in I\,|\,h(x)=+\infty\}} v\,d\mu = 0$. Используя это и доказанное выше соотношение $\int_{\{x\in I\,|\,h(x)=0\}} v\,d\mu = 0$ и применяя неравенство Гёльдера с показателями r/q и p/q, получим следующую оценку левой части неравенства: (1.2.2)

$$\begin{aligned}\left[\int_I v(x)\left[\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q} &= \left[\int_I v(x)h(x)h(x)^{-1}\left[\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q}\\ &\leqslant \left(\int_{[a,b]} vh^{r/q}\,d\mu\right)^{1/r}\left(\int_I v(x)h(x)^{-p/q}\left(\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\ &\lesssim B\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right)^p d\widetilde{\mu}(x)\right)^{1/p},\end{aligned}$$

где $\widetilde{\mu}$ суть мера, заданная на $\mathfrak{M}_\mu$ равенством $d\widetilde{\mu} := \chi_I vh^{-p/q}\,d\mu$.

Фиксируем произвольное $t \in I$. Ввиду конечности константы A выполнено $\int_{[t,b]} v\,d\mu < +\infty$ и, если $\int_{[t,b]} v\,d\mu = 0$, то $\widetilde{\mu}([t,b]) = 0$. Пусть $\int_{[t,b]} v\,d\mu > 0$. Тогда, пользуясь монотонностью h на I и леммой 1.1, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}([t,b]) = \int_{[t,b]} \chi_I vh^{-p/q}\,d\mu &\leqslant \int_{[t,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} U(s)^{r/q'}V(s)^{r/p}u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]^{-p/r} d\mu(x)\\ &\leqslant \int_{[t,b]} v(x)\left[\int_{[a,t]} U(s)^{r/q'}V(s)^{r/p}u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]^{-p/r} d\mu(x)\\ &\leqslant V(t)\left[V(t)^{r/p}\int_{[a,t]} U(s)^{r/q'}u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]^{-p/r} \approx U(t)^{-p/p'} < +\infty.\end{aligned}$$

В частности, отсюда следует

$$\sup_{t\in I}\widetilde{\mu}([t,b])^{1/p}U(t)^{1/p'} \lesssim 1. \tag{1.2.4}$$

Далее пусть $c = \inf I$. Если $c \in I$, то $I \subset [c,b]$ и

$$\widetilde{\mu}([a,b]) = \int_I vh^{-p/q}\,d\mu = \int_{[c,b]} \chi_I vh^{-p/q}\,d\mu = \widetilde{\mu}([c,b]) < +\infty.$$

Если $c \notin I$, то $I \subset (c,b]$ и $\widetilde{\mu}([a,c]) = 0$. Фиксируем в этом случае произвольную последовательность $\{t_n\}_1^\infty \subset I$ такую, что $t_n \downarrow c$ при $n \to \infty$ и положим $E_n = [a,c] \cup [t_n,b]$. Тогда $[a,b] =$

$\bigcup_1^\infty E_n$ и $\widetilde{\mu}(E_n) < +\infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\widetilde{\mu}$ – σ-конечная мера на $[a,b]$. Кроме того, $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ влечет $\widetilde{\mu}(I_\infty) = 0$. Откуда, учитывая (1.2.4), по теореме 1.1 получим

$$\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right)^p d\widetilde{\mu}(x)\right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p},$$

и достаточность доказана.

Необходимость. Пусть имеет место неравенство (1.2.1), и, следовательно, $\int_{I_\infty} v\,d\mu = 0$ и выполнено (1.2.2). В силу σ-конечности μ существует последовательность $\{E_n\}_1^\infty$ множеств такая, что $[a,b] = \bigcup_1^\infty E_n$ и $\mu(E_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Не теряя общности, можно считать также, что $E_n \subset E_{n+1}$ и $E_n \cap I \neq \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{t_n\}_1^\infty \subset I$ такая, что $t_n \uparrow \sup I$, и для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_n := \begin{cases} E_n \cap I & \text{при } \sup I \in I, \\ E_n \cap I \cap [a, t_n] & \text{при } \sup I \notin I. \end{cases}$$

Тогда $\bigcup_1^\infty F_n = I$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $F_n \subset F_{n+1}$, $\mu(F_n) < +\infty$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $v_n := \min\{v, n\}$, $d\mu_n := v_n \chi_{F_n}\,d\mu$ и

$$B_n := \left(\int_I U(x)^{r/p'} \mu_n([x,b])^{r/p}\,d\mu_n(x)\right)^{1/r} = \left(\int_{F_n} U(x)^{r/p'}\left(\int_{[x,b]} v_n\chi_{F_n}\,d\mu\right)^{r/p} v_n(x)\,d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Если $F_n = \varnothing$, то $B_n < +\infty$. Если $F_n \neq \varnothing$, то $\sup F_n \in I$ и

$$\begin{aligned} B_n &\leqslant \left(\int_{[a,\sup F_n]} u^{p'}\,d\lambda\right)^{1/p'} \left(\int_{F_n}\left(\int_{[x,b]} v_n\chi_{F_n}\,d\mu\right)^{r/p} v_n(x)\,d\mu(x)\right)^{1/r} \\ &\leqslant \left[\int_{[a,\sup F_n]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{1/p'} \mu_n(F_n)^{1/q} = \left[\int_{[a,\sup F_n]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{1/p'} (n\mu(F_n))^{1/q} < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть $f(s) = \mu_n([s,b])^{r/(pq)} U(s)^{r/(pq')} u(s)^{p'-1}\chi_I(s)$. Тогда по лемме 1.1

$$\begin{aligned} &\left(\int_I\left(\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right)^q d\mu_n(x)\right)^{1/q} \\ &\quad= \left[\int_I\left[\int_{[a,x]\cap I} \mu_n([s,b])^{r/(pq)} U(s)^{r/(pq')} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]^q d\mu_n(x)\right]^{1/q} \\ &\quad\geqslant \left[\int_I \mu_n([x,b])^{r/p}\left[\int_{[a,x]\cap I} U(s)^{r/(pq')} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]^q d\mu_n(x)\right]^{1/q} \\ &\quad= \left[\int_I \mu_n([x,b])^{r/p}\left[\int_{[a,x]} U(s)^{r/(pq')} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right]^q d\mu_n(x)\right]^{1/q} \approx B_n^{r/q}. \end{aligned}$$

С другой стороны, применяя леммы 1.2 и 1.1, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p} &= \left(\int_I \mu_n([s,b])^{r/q} U(s)^{r/q'} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right)^{1/p} \\ &\approx \left(\int_I\left[\int_{[s,b]} \mu_n([x,b])^{r/p}\,d\mu_n(x)\right] U(s)^{r/q'} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{[a,b]} \mu_n([x,b])^{r/p}\left[\int_{[a,x]\cap I} U(s)^{r/q'} u(s)^{p'}\,d\lambda(s)\right] d\mu_n(x)\right)^{1/p} \lesssim B_n^{r/p}. \end{aligned}$$

Подставляя f в (1.2.2), в силу найденных оценок имеем $B_n^{r/q} \lesssim C B_n^{r/p}$. Откуда $B_n \lesssim C$ в силу конечности B_n.

Далее так как $\bigcup_1^\infty F_n = I$, $F_n \subset F_{n+1}$, то $v_n \chi_{F_n} \uparrow v$ при $n \to \infty$, и по теореме о монотонной сходимости $B' \lesssim C$.

Аналогично доказывается критерий справедливости двойственного неравенства.

Теорема 1.3. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < q < +\infty$ *и* $1/r = 1/q - 1/p$; μ *и* λ *суть* σ*-конечные меры на* $[a,b]$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$. *Если* $p \leqslant q$, *то неравенство*

$$\left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[x,b]} f u \, d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \qquad (1.2.5)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $A^* < +\infty$, *где*

$$A^* := \sup_{t \in [a,b]} \left(\int_{[a,t]} v \, d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{[t,b]} u^{p'} \, d\lambda\right)^{1/p'}.$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (1.2.5) *справедливо* $C \approx A^*$.

Если $q < p$, *то неравенство* (1.2.5) *выполнено тогда и только тогда, когда* $B^* < +\infty$, *где*

$$B^* := \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[x,b]} u^{p'} \, d\lambda\right)^{r/p'} \left(\int_{[a,x]} v \, d\mu\right)^{r/p} v(x) \, d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (1.2.5) *справедливо* $C \approx B^*$.

Общий результат выглядит следующим образом.

Теорема 1.4. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < q < +\infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; μ, λ *и* ν *суть* σ*-конечные меры на* $[a,b]$, λ, ν *определены на* σ*-алгебре* $\mathfrak{M}_\lambda$; $u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; (ν_a, ν_s) *– разложение Лебега меры* ν *относительно меры* λ, *т.е.* $\nu = \nu_a + \nu_s$, *где мера* ν_a *абсолютно непрерывна относительно* λ $(\nu_a \ll \lambda)$, *меры* ν_s *и* λ *взаимно сингулярны* $(\nu_s \perp \lambda)$ *и* $d\nu_a/d\lambda$ *– производная Радона–Никодима меры* ν_a *относительно меры* λ.

Если $p \leqslant q$, *то неравенство*

$$\left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} f u \, d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{[a,b]} f^p w \, d\nu\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \qquad (1.2.6)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\mathscr{A} < +\infty$, *где*

$$\mathscr{A} := \sup_{t \in [a,b]} \left(\int_{[t,b]} v \, d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{[a,t]} u^{p'} \left(w \, \frac{d\nu_a}{d\lambda}\right)^{1-p'} d\lambda\right)^{1/p'}.$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (1.2.6) *справедливо* $C \approx \mathscr{A}$.

Если $q < p$, *то неравенство* (1.2.6) *выполнено тогда и только тогда, когда* $\mathscr{B} < +\infty$, *где*

$$\mathscr{B} := \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,x]} u^{p'} \left(w \, \frac{d\nu_a}{d\lambda}\right)^{1-p'} d\lambda\right)^{r/p'} \left(\int_{[x,b]} v \, d\mu\right)^{r/p} v(x) \, d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (1.2.6) *справедливо* $C \approx \mathscr{B}$.

Доказательство. По лемме 1.6 неравенство (1.2.6) равносильно

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p w\left(\frac{d\nu_a}{d\lambda}\right) d\lambda\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

Данное неравенство ввиду леммы 1.5 равносильно неравенству

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} fu\left(w\,\frac{d\nu_a}{d\lambda}\right)^{-1/p} d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

Применение к последнему неравенству теорем 1.1 и 1.2 заканчивает доказательство теоремы.

Общий результат для двойственного неравенства следующий.

Теорема 1.5. *Пусть $1 < p < +\infty$, $0 < q < +\infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; μ, λ и ν суть σ-конечные меры на $[a,b]$, λ, ν определены на σ-алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$; $u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; (ν_a, ν_s) – разложение Лебега меры ν относительно меры λ, т.е. $\nu = \nu_a + \nu_s$, где мера ν_a абсолютно непрерывна относительно λ ($\nu_a \ll \lambda$), меры ν_s и λ взаимно сингулярны ($\nu_s \perp \lambda$), и $d\nu_a/d\lambda$ – производная Радона–Никодима меры ν_a относительно меры λ.*

Если $p \leqslant q$, то неравенство

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[x,b]} fu\,d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p w\,d\nu\right)^{1/p} \qquad \textit{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \tag{1.2.7}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}^* < +\infty$, где

$$\mathscr{A}^* := \sup_{t\in[a,b]} \left(\int_{[a,t]} v\,d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{[t,b]} u^{p'}\left(w\,\frac{d\nu_a}{d\lambda}\right)^{1-p'} d\lambda\right)^{1/p'}.$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (1.2.7) справедливо $C \approx \mathscr{A}^*$.

Если $q < p$, то неравенство (1.2.7) выполнено тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}^* < +\infty$, где

$$\mathscr{B}^* := \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[x,b]} u^{p'}\left(w\,\frac{d\nu_a}{d\lambda}\right)^{1-p'} d\lambda\right)^{r/p'} \left(\int_{[a,x]} v\,d\mu\right)^{r/p} v(x)\,d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (1.2.7) справедливо $C \approx \mathscr{B}^*$.

1.3. Неравенство для оператора с ядром

В этой части рассмотрим неравенство

$$\left(\int_{[a,b]} v(Kf)^q\,d\mu\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p w\,d\nu\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \tag{1.3.1}$$

где μ, λ и ν суть σ-конечные меры на $[a,b]$, λ, ν определены на одной σ-алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$;

$$(Kf)(x) := \int_{[a,x]} k(x,y)u(y)f(y)\,d\lambda(y),$$

$u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, ядро k определено на $[a,b]^2$, $(\mathfrak{M}_{\mu,\lambda} \times \mathfrak{M}_{\mu,\lambda})$-измеримо, неотрицательно и удовлетворяет условию Ойнарова: существует константа D такая, что

$$D^{-1}(k(x,z)+k(z,y)) \leqslant k(x,y) \leqslant D(k(x,z)+k(z,y)), \qquad \text{если} \quad x \geqslant z \geqslant y. \tag{1.3.2}$$

Стандартными примерами такого класса ядер являются:

(i) ядро интегрального оператора Римана–Лиувилля в случае $\alpha \geqslant 1$:

$$k(x,y) = (\max\{x-y,0\})^{\alpha-1};$$

(ii) некоторые ядра с логарифмическими функциями:

$$k(x,y) = \log^\beta(1+\max\{x-y,0\}), \quad k(x,y) = \log^\beta\left(\max\left\{\frac{x}{y},1\right\}\right), \qquad \beta \geqslant 0;$$

и их различные комбинации.

Случай, когда λ, μ, ν абсолютно непрерывны относительно меры Лебега (весовое неравенство типа Харди), полностью характеризован различными способами в работах Р. Ойнарова [10], С. Блума и Р. Кермана [11], В. Д. Степанова [12].

В этом пункте соотношения $A \lesssim B$ и $B \gtrsim A$ означают $A \leqslant cB$, где константа c зависит от p, q, D (а D суть константа из условия (1.3.2)).

Для $s > 0$, $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $g \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, $x, y \in [a,b]$ обозначим

$$(K_s f)(x) := \int_{[a,x]} k(x,y)^s u(y)^s f(y)\,d\lambda(y), \qquad (K_0 f)(x) := \int_{[a,x]} u(y) f(y)\,d\lambda(y),$$
$$(K_s^* g)(y) := \int_{[y,b]} v(x) k(x,y)^s g(x)\,d\mu(x), \qquad (K_0^* g)(y) := \int_{[y,b]} v(x) g(x)\,d\mu(x).$$

Лемма 1.7. *Пусть $1 < p, q < +\infty$, μ и λ суть σ-конечные меры на $[a,b]$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; k определена на $[a,b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$-измерима и удовлетворяет условию: существуют константы $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ такие, что $k(x,y_1) \geqslant \alpha_1 k(x,y_2)$ для $y_1 < y_2$, $k(x_1,y) \leqslant \alpha_2 k(x_2,y)$ для $x_1 < x_2$. Положим*

$$I_0 := \{x \in [a,b] \mid (K1)(x) = 0\}, \qquad I_\infty := \{x \in [a,b] \mid (K_{p'}1)(x) = +\infty\},$$
$$\overline{I}_0 := \{x \in [a,b] \mid (K_1^*1)(x) = 0\}, \qquad \overline{I}_\infty := \{x \in [a,b] \mid (K_q^*1)(x) = +\infty\},$$
$$I := [a,b] \setminus (I_0 \cup I_\infty), \qquad \overline{I} := [a,b] \setminus (\overline{I}_0 \cup \overline{I}_\infty).$$

Тогда

1) *$x < y < z$ выполнено для всех $x \in I_0$, $y \in I$ и $z \in I_\infty$;*

2) *$x < y < z$ выполнено для всех $x \in \overline{I}_\infty$, $y \in \overline{I}$ и $z \in \overline{I}_0$.*

В частности, все введенные множества связные и, значит, борелевские.

Доказательство. 1) Пусть $x \in I_0$, $y \in I$ и $z \in I_\infty$. Тогда x, y, z – различные точки $[a,b]$. Если $t \in [a,x)$, то

$$\int_{[a,t]} k(t,s)u(s)\,d\lambda(s) \leqslant \alpha_2 \int_{[a,x]} k(x,s)u(s)\,d\lambda(s) = 0$$

и $t \in I_0$. Откуда $y > x$ и $z > x$. Если $t \in (z,b]$, то имеем

$$\alpha_2^{p'} \int_{[a,t]} k(t,s)^{p'} u(s)^{p'}\,d\lambda(s) \geqslant \int_{[a,z]} k(z,s)^{p'} u(s)^{p'}\,d\lambda(s) = +\infty,$$

т.е. $t \in I_\infty$, и, следовательно, $y < z$. Таким образом, $x < y < z$.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

В доказательстве леммы 1.8 и теорем 1.6, 1.7 следуем идее работы [12], где аналогичный результат доказан для мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега.

Лемма 1.8. *Пусть μ и λ суть σ-конечные меры на $[a,b]$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; k определена на $[a,b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_{\mu,\lambda} \times \mathfrak{M}_{\mu,\lambda})$-измерима и удовлетворяет условию Ойнарова (1.3.2). Если $1 < q < +\infty$, $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ и $J := \int_{[a,b]} v(Kf)^q \, d\mu < +\infty$, то*

$$J \approx \int_{[a,b]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^* 1) \, d\lambda + \int_{[a,b]} uf(Kf)^{q-1}(K_1^* 1) \, d\lambda. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Имеем

$$J = \int_{[a,b]} v(Kf)(Kf)^{q-1} \, d\mu = \int_{[a,b]} uf(K_1^*[(Kf)^{q-1}]) \, d\lambda.$$

Положим $w := fu$ и

$$J_1 := \int_{[a,b]} w(y) \, d\lambda(y) \int_{[y,b]} v(x) \left[\int_{[a,y]} k(x,z) w(z) \, d\lambda(z) \right]^{q-1} k(x,y) \, d\mu(x),$$

$$J_2 := \int_{[a,b]} w(y) \, d\lambda(y) \int_{[y,b]} v(x) \left[\int_{[y,x]} k(x,z) w(z) \, d\lambda(z) \right]^{q-1} k(x,y) \, d\mu(x).$$

Тогда $J \gtrsim J_1$ и $J \lesssim J_1 + J_2$. Так как k удовлетворяет условию (1.3.2), то

$$\int_{[a,y]} k(x,z) w(z) \, d\lambda(z) \approx \int_{[a,y]} (k(x,y) + k(y,z)) w(z) \, d\lambda(z)$$

и, следовательно,

$$J_1 \approx \int_{[a,b]} w(K_0 f)^{q-1}(K_q^* 1) \, d\lambda + \int_{[a,b]} w(Kf)^{q-1}(K_1^* 1) \, d\lambda.$$

В частности, последнее соотношение влечет нижнюю оценку на J в (1.3.3). Отметим, что в случае $q > 2$ справедлива также оценка

$$J_1 \lesssim \left[\int_{[a,b]} w(K_0 f)^{q-1}(K_q^* 1) \, d\lambda + \int_{[a,b]} w(Kf)^{q-1}(K_1^* 1) \, d\lambda \right]^{1/(q-1)} J^{(q-2)/(q-1)}. \tag{1.3.4}$$

Пусть $q = 2$. Дважды меняя порядок интегрирования и используя (1.3.2), находим

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{[a,b]} w(z) \, d\lambda(z) \int_{[a,z]} w(y) \, d\lambda(y) \int_{[z,b]} v(x) k(x,z) k(x,y) \, d\mu(x) \\ &\approx \int_{[a,b]} w(z) \, d\lambda(z) \int_{[a,z]} w(y) \, d\lambda(y) \int_{[z,b]} v(x) k(x,z) [k(x,z) + k(z,y)] \, d\mu(x) \\ &= \int_{[a,b]} w(K_0 f)(K_2^* 1) \, d\lambda + \int_{[a,b]} w(Kf)(K_1^* 1) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, (1.3.3) выполнено при $q = 2$.

Рассмотрим случай $q \neq 2$. Для произвольного $y \in [a,b]$ положим

$$h(y) := \int_{[y,b]} v(x) k(x,y) \left[\int_{[y,x]} k(x,z) w(z) \, d\lambda(z) \right]^{q-1} d\mu(x).$$

Так как $J < +\infty$, то $\mu\{x \in [a,b] \mid (Kf)(x) = +\infty \wedge v(x) \neq 0\} = 0$, что для любого $y \in [a,b]$ влечет

$$\begin{aligned}
h(y) &= \int_{[y,b]} v(x)k(x,y)\left[\int_{[y,x]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t)\right]^{1+(q-2)} d\mu(x) \\
&= \int_{[y,b]} w(z)\,d\lambda(z)\int_{[z,b]} v(x)k(x,z)k(x,y)\,d\mu(x)\left[\int_{[y,x]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t)\right]^{q-2} \\
&\approx \int_{[y,b]} w(z)\,d\lambda(z)\int_{[z,b]} v(x)k(x,z)^2\,d\mu(x)\left[\int_{[y,x]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t)\right]^{q-2} \\
&\qquad + \int_{[y,b]} w(z)\,d\lambda(z)\int_{[z,b]} v(x)k(x,z)k(z,y)\,d\mu(x)\left[\int_{[y,x]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t)\right]^{q-2} \\
&=: h_1(y) + h_2(y).
\end{aligned}$$

Пусть $q > 2$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $q-1$ и $(q-1)/(q-2)$, имеем

$$\begin{aligned}
h_1(y) &\leqslant \int_{[y,b]} w(z)\,d\lambda(z)\int_{[z,b]} v(x)k(x,z)^2(Kf)(x)^{q-2}\,d\mu(x) \\
&\leqslant \int_{[y,b]} w(z)(K_q^*1)(z)^{1/(q-1)}\,d\lambda(z)\left[\int_{[z,b]} v(x)k(x,z)(Kf)(x)^{q-1}\,d\mu(x)\right]^{(q-2)/(q-1)} \\
&= \int_{[y,b]} w(z)(K_q^*1)(z)^{1/(q-1)}[(K_1^*[(Kf)^{q-1}])(z)]^{(q-2)/(q-1)}\,d\lambda(z).
\end{aligned}$$

Используя эту оценку и неравенство Гёльдера с показателями $q-1$ и $(q-1)/(q-2)$, получим

$$\begin{aligned}
J_{2,1} &:= \int_{[a,b]} wh_1\,d\lambda \\
&\leqslant \int_{[a,b]} w(y)\,d\lambda(y)\int_{[y,b]} w(z)(K_q^*1)(z)^{1/(q-1)}\left[(K_1^*[(Kf)^{q-1}])(z)\right]^{(q-2)/(q-1)} d\lambda(z) \\
&= \int_{[a,b]} w(z)(K_0f)(z)(K_q^*1)(z)^{1/(q-1)}\left[(K_1^*[(Kf)^{q-1}])(z)\right]^{(q-2)/(q-1)} d\lambda(z) \\
&\leqslant \left[\int_{[a,b]} w(K_0f)^{q-1}(K_q^*1)\,d\lambda\right]^{1/(q-1)} J^{(q-2)/(q-1)}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
h_2(y) &\leqslant \int_{[y,b]} k(z,y)w(z)\,d\lambda(z)\int_{[z,b]} v(x)k(x,z)(Kf)(x)^{q-2}\,d\mu(x) \\
&\leqslant \int_{[y,b]} k(z,y)w(z)(K_1^*1)(z)^{1/(q-1)}\left[(K_1^*[(Kf)^{q-1}])(z)\right]^{(q-2)/(q-1)} d\lambda(z)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J_{2,2} &:= \int_{[a,b]} wh_2\,d\lambda \\
&\leqslant \int_{[a,b]} w(y)\,d\lambda(y)\int_{[y,b]} k(z,y)w(z)(K_1^*1)(z)^{1/(q-1)}\left[(K_1^*[(Kf)^{q-1}])(z)\right]^{(q-2)/(q-1)} d\lambda(z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[a,b]} w(z)(Kf)(z)(K_1^*1)(z)^{1/(q-1)} \Big[(K_1^*[(Kf)^{q-1}])(z)\Big]^{(q-2)/(q-1)} d\lambda(z) \\
&\leqslant \Big[\int_{[a,b]} w(Kf)^{q-1}(K_1^*1)\,d\lambda\Big]^{1/(q-1)} J^{(q-2)/(q-1)}.
\end{aligned}
$$

Однако, $J_2 \lesssim J_{2,1} + J_{2,2}$. Поэтому

$$
J_2 \lesssim \Big[\int_{[a,b]} w(K_0 f)^{q-1}(K_q^*1)\,d\lambda + \int_{[a,b]} w(Kf)^{q-1}(K_1^*1)\,d\lambda\Big]^{1/(q-1)} J^{(q-2)/(q-1)}.
$$

Что вместе с оценкой (1.3.4) влечет (1.3.3) для $q > 2$.

В случае $q \in (1,2)$, так как

$$
\int_{[y,x]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t) \geqslant \int_{[y,z]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t) \geqslant D^{-1}k(x,z)\int_{[y,z]} w\,d\lambda
$$

для $x \geqslant z \geqslant y$, имеем

$$
h_1(y) \lesssim \int_{[y,b]} w(z)(K_q^*1)(z)\Big(\int_{[y,z]} w\,d\lambda\Big)^{q-2} d\lambda(z).
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
J_{2,1} &\lesssim \int_{[a,b]} w(y)\,d\lambda(y) \int_{[y,b]} w(z)(K_q^*1)(z)\Big(\int_{[y,z]} w\,d\lambda\Big)^{q-2} d\lambda(z) \\
&= \int_{[a,b]} w(z)(K_q^*1)(z)\Big[\int_{[a,z]} w(y)\Big(\int_{[y,z]} w\,d\lambda\Big)^{q-2} d\lambda(y)\Big] d\lambda(z) \\
&\lesssim \int_{[a,b]} w(K_0 f)^{q-1}(K_q^*1)\,d\lambda
\end{aligned}
$$

в силу леммы 1.2. Аналогично, используя

$$
\int_{[y,x]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t) \geqslant \int_{[y,z]} k(x,t)w(t)\,d\lambda(t) \geqslant D^{-1}\int_{[y,z]} k(z,t)w(t)\,d\lambda(t)
$$

для $x \geqslant z \geqslant y$, получим

$$
h_2(y) \lesssim \int_{[y,b]} k(z,y)w(z)(K_1^*1)(z)\Big[\int_{[y,z]} k(z,t)w(t)\,d\lambda(t)\Big]^{q-2} d\lambda(z)
$$

и

$$
\begin{aligned}
J_{2,2} &\lesssim \int_{[a,b]} w(y)\,d\lambda(y) \int_{[y,b]} k(z,y)w(z)(K_1^*1)(z)\Big[\int_{[y,z]} k(z,t)w(t)\,d\lambda(t)\Big]^{q-2} d\lambda(z) \\
&= \int_{[a,b]} w(z)(K_1^*1)(z)\,d\lambda(z) \int_{[a,z]} k(z,y)w(y)\,d\lambda(y)\Big[\int_{[y,z]} k(z,t)w(t)\,d\lambda(t)\Big]^{q-2} \\
&\lesssim \int_{[a,b]} w(Kf)^{q-1}(K_1^*1)\,d\lambda
\end{aligned}
$$

в силу леммы 1.2. Таким образом,

$$
J_2 \lesssim J_{2,1} + J_{2,2} \lesssim \int_{[a,b]} w(K_0 f)^{q-1}(K_q^*1)\,d\lambda + \int_{[a,b]} w(Kf)^{q-1}(K_1^*1)\,d\lambda,
$$

и (1.3.3) доказано для $q \in (1,\, 2)$.

Теорема 1.6. *Пусть* $1 < p \leqslant q < +\infty$, μ *и* λ *суть* σ*-конечные меры на* $[a,b]$, $\nu = \lambda$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, $w \equiv 1$; k *определена на* $[a,b]^2$, *неотрицательна,* $(\mathfrak{M}_{\mu,\lambda} \times \mathfrak{M}_{\mu,\lambda})$*-измерима и удовлетворяет условию Ойнарова* (1.3.2). *Тогда для существования константы* $C \geqslant 0$ *такой, что неравенство* (1.3.1) *выполнено, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbb{A} < +\infty$, *где* $\mathbb{A} := \max\{\mathbb{A}_1,\, \mathbb{A}_2\}$,

$$\mathbb{A}_1 := \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{A}_1(t) := \sup_{t\in[a,b]} \biggl(\int_{[t,b]} v(x) k(x,t)^q \, d\mu(x)\biggr)^{1/q} \biggl(\int_{[a,t]} u^{p'} \, d\lambda\biggr)^{1/p'},$$

$$\mathbb{A}_2 := \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{A}_2(t) := \sup_{t\in[a,b]} \biggl(\int_{[t,b]} v \, d\mu\biggr)^{1/q} \biggl(\int_{[a,t]} k(t,y)^{p'} u(y)^{p'} \, d\lambda(y)\biggr)^{1/p'}.$$

Более того, $\mathbb{A} \approx C$ *для наименьшей возможной константы* C *в* (1.3.1).

Доказательство. Пусть промежутки I_0, I_∞, I и $\overline{I}_0$, $\overline{I}_\infty$, $\overline{I}$ определены как в лемме 1.7.

Необходимость. Фиксируем произвольное $t \in [a,b]$. Если $t \in I_0$, то $\mathbb{A}_2(t) = 0 \leqslant C$. Пусть $t \in I_\infty$. Тогда по лемме 1.3 существует функция $f_t \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ такая, что $\int_{[a,t]} f_t^p \, d\lambda < +\infty$ и $\int_{[a,t]} k(t,y) u(y) f_t(y) \, d\lambda(y) = +\infty$. Подставляя эту функцию в неравенство (1.3.1), находим

$$\biggl(\int_{[t,b]} v \, d\mu\biggr)^{1/q} D^{-1} \int_{[a,t]} k(t,y) u(y) f_t(y) \, d\lambda(y) \leqslant C \biggl(\int_{[a,t]} f_t^p \, d\lambda\biggr)^{1/p},$$

что влечет $\int_{[t,b]} v \, d\mu = 0$ и $\mathbb{A}_2(t) = 0 \leqslant C$.

Пусть $t \in I$. Подставляя $f(y) = \chi_{[a,t]}(y) k(t,y)^{p'-1} u(y)^{p'-1}$ в (1.3.1), получим

$$\biggl(\int_{[t,b]} v(x) \biggl(\int_{[a,t]} k(x,y) k(t,y)^{p'-1} u(y)^{p'} \, d\lambda(y)\biggr)^q d\mu(x)\biggr)^{1/q} \leqslant C \biggl(\int_{[a,t]} k(t,y)^{p'} u(y)^{p'} \, d\lambda(y)\biggr)^{1/p}.$$

Откуда в силу свойств ядра k имеем

$$\biggl[\int_{[t,b]} v \, d\mu\biggr]^{1/q} \int_{[a,t]} [k(t,y) u(y)]^{p'} \, d\lambda(y) \lesssim C \biggl[\int_{[a,t]} [k(t,y) u(y)]^{p'} \, d\lambda(y)\biggr]^{1/p}.$$

Таким образом, $\mathbb{A}_2(t) \lesssim C$.

Схожими рассуждениями для двойственного к (1.3.1) неравенства

$$\biggl(\int_{[a,b]} u^{p'} (K_1^* g)^{p'} \, d\lambda\biggr)^{1/p'} \leqslant C \biggl(\int_{[a,b]} g^{q'} \, d\mu\biggr)^{1/q'} \qquad \text{для всех} \quad g \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+, \tag{1.3.5}$$

получим $\mathbb{A}_1(t) \lesssim C$.

Достаточность. Пусть $\mathbb{A} < +\infty$. Тогда для любого $t \in I_\infty$ выполнено $\int_{[t,b]} v \, d\mu = 0$, что по лемме 1.4 влечет $\int_{I_\infty} v \, d\mu = 0$. Следовательно, (1.3.1) эквивалентно

$$\biggl(\int_I v (Kf)^q \, d\mu\biggr)^{1/q} \leqslant C \biggl(\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda\biggr)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+. \tag{1.3.6}$$

Если $I = \varnothing$, то неравенство (1.3.6) выполнено. Пусть $I \neq \varnothing$. Так как μ есть σ-конечная мера, то существует последовательность множеств $\{\widetilde{F}_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{M}_\mu$ такая, что $[a,b] = \bigcup_1^\infty \widetilde{F}_n$ и

$\mu(\widetilde{F}_n) < +\infty$, $\widetilde{F}_n \subset \widetilde{F}_{n+1}$, $\widetilde{F}_n \cap I \neq \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем две числовые последовательности $\{t_n\}_1^\infty \subset I$ и $\{s_n\}_1^\infty \subset I$ такие, что $t_n \uparrow \sup I$, $s_n \downarrow \inf I$ и для произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_n := \begin{cases} \widetilde{F}_n \cap I, & \text{если } \sup I \in I \wedge \inf I \in I, \\ \widetilde{F}_n \cap I \cap [a, t_n], & \text{если } \sup I \notin I \wedge \inf I \in I, \\ \widetilde{F}_n \cap I \cap [s_n, b], & \text{если } \sup I \in I \wedge \inf I \notin I, \\ \widetilde{F}_n \cap I \cap [s_n, t_n], & \text{если } \sup I \notin I \wedge \inf I \notin I. \end{cases}$$

Тогда $\bigcup_1^\infty F_n = I$ и $F_n \subset F_{n+1}$, $\mu(F_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $d\mu_n := \chi_{F_n}\, d\mu$.

Фиксируем произвольную функцию $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ такую, что выполнено $\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda < +\infty$, и любое $n \in \mathbb{N}$. Если $F_n = \varnothing$, то

$$\left[\int_{[a,b]} v(Kf)^q\, d\mu_n\right]^{1/q} \leqslant c(p,q,D)\mathbb{A}\left[\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda\right]^{1/p}. \tag{1.3.7}$$

Пусть $F_n \neq \varnothing$ и $\alpha_n = \inf F_n$, $\beta_n = \sup F_n$. Тогда $\alpha_n, \beta_n \in I$ и, применяя неравенство Гёльдера с показателями p и p', получим

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} v(Kf)^q\, d\mu_n &\leqslant D^q \int_{F_n} v(x)\left(\int_{[a,\beta_n]} k(\beta_n, y)u(y)f(y)\, d\lambda(y)\right)^q d\mu(x) \\ &\leqslant D^q \int_{[\alpha_n,b]} v\, d\mu\left(\int_{[a,\beta_n]} k(\beta_n,y)^{p'} u(y)^{p'}\, d\lambda(y)\right)^{q/p'}\left[\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda\right]^{q/p} < +\infty, \end{aligned}$$

что по лемме 1.8 влечет

$$\int_{[a,b]} v(Kf)^q\, d\mu_n \approx \int_{[a,b]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^*\chi_{F_n})\, d\lambda + \int_{[a,b]} uf(Kf)^{q-1}(K_1^*\chi_{F_n})\, d\lambda. \tag{1.3.8}$$

Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому (1.3.8), находим

$$\int_{[a,b]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^*\chi_{F_n})\, d\lambda \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda\right)^{1/p} H_1^{1/p'},$$

где

$$H_1 := \int_{[a,b]} u^{p'}(K_0 f)^{p'(q-1)}(K_q^*\chi_{F_n})^{p'}\, d\lambda = \int_{[a,b]} u(t)^{p'}\left(\int_{[a,t]} uf\, d\lambda\right)^{p'(q-1)}(K_q^*\chi_{F_n})(t)^{p'}\, d\lambda(t).$$

В силу теоремы 1.4 имеем

$$H_1^{1/(p'(q-1))} \lesssim \mathcal{H}_1\left(\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda\right)^{1/p},$$

где

$$\mathcal{H}_1 = \sup_{s\in[a,b]}\left(\int_{[s,b]} u^{p'}(K_q^*\chi_{F_n})^{p'}\, d\lambda\right)^{1/(p'(q-1))}\left(\int_{[a,s]} u^{p'}\, d\lambda\right)^{1/p'}.$$

Из условий теоремы следует, что для любого $s \in [a,b]$ выполнено

$$\int_{[s,b]} u^{p'}(K_q^*\chi_{F_n})^{p'}\, d\lambda \leqslant \int_{[s,b]} u^{p'}(K_q^* 1)^{p'}\, d\lambda \leqslant \mathbb{A}_1^{p'q}\int_{[s,b]} u^{p'}(t)\left(\int_{[a,t]} u^{p'}\, d\lambda\right)^{-q} d\lambda(t).$$

Обозначим $U(t) := \left[\int_{[a,t]} u^{p'}\, d\lambda, +\infty\right)$ и оценим последнее соотношение

$$\begin{aligned}\int_{[s,b]} u(t)^{p'} \left(\int_{[a,t]} u^{p'}\, d\lambda\right)^{-q} d\lambda(t) &= \int_{[s,b]} u(t)^{p'} \int_{U(t)} q x^{-q-1}\, dx\, d\lambda(t)\\ &= \int_{[s,b]} u(t)^{p'} \int_{U(s)} q x^{-q-1} \chi_{U(t)}(x)\, dx\, d\lambda(t)\\ &= q \int_{U(s)} x^{-q-1}\, dx \int_{[s,b]} u(t)^{p'} \chi_{U(t)}(x)\, d\lambda(t)\\ &=: q \int_{U(s)} x^{-q-1} L(x)\, dx.\end{aligned}$$

Для $x \in U(s)$ положим $E_x := \{t \in [s,b] \mid \int_{[a,t]} u^{p'}\, d\lambda \leqslant x\}$. Если $E_x = \varnothing$, то $L(x) = 0 \leqslant x$. Пусть $E_x \neq \varnothing$, $c_x := \sup E_x$ и последовательность $\{t_m\}_1^\infty \subset E_x$ такая, что $t_m \uparrow c_x$ при $m \to \infty$. Если $c_x \in E_x$, то

$$L(x) = \int_{[s,c_x]} u^{p'}\, d\lambda \leqslant \int_{[a,c_x]} u^{p'}\, d\lambda \leqslant x.$$

Если же $c_x \notin E_x$, то

$$L(x) = \int_{[s,c_x)} u^{p'}\, d\lambda \leqslant \int_{[a,c_x)} u^{p'}\, d\lambda = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,t_m]} u^{p'}\, d\lambda \leqslant x.$$

Таким образом,

$$\int_{[s,b]} u(t)^{p'} \left[\int_{[a,t]} u^{p'}\, d\lambda\right]^{-q} d\lambda(t) \leqslant q \int_{U(s)} x^{-q}\, dx = q' \left(\int_{[a,s]} u^{p'}\, d\lambda\right)^{1-q}, \tag{1.3.9}$$

что влечет

$$\left(\int_{[s,b]} u^{p'} (K_q^* \chi_{F_n})^{p'}\, d\lambda\right)^{1/(p'(q-1))} \lesssim \mathbb{A}_1^{q'} \left(\int_{[a,s]} u^{p'}\, d\lambda\right)^{-1/p'}$$

для любого $s \in [a,b]$. Значит, $\mathcal{H}_1 \lesssim \mathbb{A}_1^{q'}$ и

$$\int_{[a,b]} u f (K_0 f)^{q-1} (K_q^* \chi_{F_n})\, d\lambda \leqslant \mathbb{A}_1^q \left(\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda\right)^{q/p}. \tag{1.3.10}$$

Применяя неравенство Гёльдера, находим, что

$$\int_{[a,b]} u f (K f)^{q-1} (K_1^* \chi_{F_n})\, d\lambda \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^p\, d\lambda\right)^{1/p} H_2^{1/p'}, \tag{1.3.11}$$

где

$$H_2 := \int_{[a,b]} u^{p'} (K f)^{p'(q-1)} (K_1^* \chi_{F_n})^{p'}\, d\lambda.$$

Для $y \leqslant x$ обозначим $\overline{k}(x,y) := \sup_{y\leqslant s\leqslant x} \sup_{y\leqslant t\leqslant s} k(s,t)$. Тогда функция $\overline{k}$ не убывает по первой переменной и не возрастает по второй, и в силу условия (1.3.2) имеет место соотношение

$$k(x,y) \leqslant \overline{k}(x,y) \leqslant D^2 k(x,y).$$

Для $t \in [a,b]$ положим

$$g(t) := \left(\int_{[a,t]} \overline{k}(t,y) u(y) f(y)\, d\lambda(y)\right)^{p'(q-1)}$$

и заметим, что функция g не убывает на $[a,b]$. В частности, g – борелевская функция и ядро $\chi_{[0,g(t)]}(s)$, $t\in[a,b]$, $s\in[0,g(b)]$ суть $(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B})$-измеримая функция, определенная на декартовом произведении $[a,b]\times[0,g(b)]$. Далее,

$$
\begin{aligned}
H_2 &\leqslant \int_{[a,b]} u^{p'} g(K_1^*\chi_{F_n})^{p'}\,d\lambda = \int_{[a,b]} u(t)^{p'}\biggl(\int_{[0,g(b)]}\chi_{[0,g(t)]}(s)\,ds\biggr)(K_1^*\chi_{F_n})(t)^{p'}\,d\lambda(t)\\
&= \int_{[0,g(b)]}\biggl[\int_{[a,b]} u(t)^{p'}\chi_{[0,g(t)]}(s)\biggl(\int_{[t,b]} v(x)k(x,t)\,d\mu_n(x)\biggr)^{p'}d\lambda(t)\biggr]\,ds.
\end{aligned}
$$

Применяя неравенство Минковского и учитывая неубывание функции g, в силу условий теоремы получаем

$$
\begin{aligned}
H_2 &\leqslant \int_{[0,g(b)]}\biggl[\int_{[a,b]} v(x)\biggl[\int_{[a,x]}[k(x,t)u(t)]^{p'}\chi_{[0,g(t)]}(s)\,d\lambda(t)\biggr]^{1/p'}d\mu_n(x)\biggr]^{p'}ds\\
&\leqslant \int_{[0,g(b)]}\biggl[\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\biggl[\int_{[a,x]} k(x,t)^{p'}u(t)^{p'}\,d\lambda(t)\biggr]^{1/p'}d\mu_n(x)\biggr]^{p'}ds\\
&\leqslant \int_{[0,g(b)]}\biggl[\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\mathbb{A}_2\biggl[\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\biggr]^{-1/q}d\mu_n(x)\biggr]^{p'}ds\\
&=: \mathbb{A}_2^{p'}\int_{[0,g(b)]} M(s)^{p'}\,ds.
\end{aligned}
$$

Для $s\geqslant 0$ положим $E_s:=\{x\in[a,b]\mid g(x)\geqslant s\}$. Если $E_s=\varnothing$, то $M(s)=0$. Пусть $E_s\neq\varnothing$, $c_s:=\inf E_s$ и последовательность $\{t_m\}_1^\infty\subset E_s$ такая, что $t_m\downarrow c_s$ при $m\to\infty$. Если $c_s\in E_s$, то по лемме 1.2 получим

$$
\begin{aligned}
M(s) &= \int_{[c_s,b]} v(x)\biggl(\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\biggr)^{-1/q}d\mu_n(x)\\
&\lesssim \biggl[\int_{[c_s,b]} v\,d\mu_n\biggr]^{1/q'} = \biggl[\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\,d\mu_n(x)\biggr]^{1/q'}.
\end{aligned}
$$

Если $c_s\notin E_s$, то по лемме 1.2 имеем

$$
\begin{aligned}
M(s) &= \int_{(c_s,b]} v(x)\biggl(\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\biggr)^{-1/q}d\mu_n(x) = \lim_{m\to\infty}\int_{[t_m,b]} v(x)\biggl(\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\biggr)^{-1/q}d\mu_n(x)\\
&\lesssim \lim_{m\to\infty}\biggl(\int_{[t_m,b]} v\,d\mu_n\biggr)^{1/q'} = \biggl(\int_{(c_s,b]} v\,d\mu_n\biggr)^{1/q'} = \biggl(\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\,d\mu_n(x)\biggr)^{1/q'}.
\end{aligned}
$$

Во всех случаях в силу неравенства Минковского получим

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,g(b)]} M(s)^{p'}\,ds &\lesssim \int_{[0,g(b)]}\biggl(\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\,d\mu_n(x)\biggr)^{p'/q'}ds\\
&\leqslant \biggl(\int_{[a,b]} v(x)\biggl(\int_{[0,g(b)]}\chi_{[0,g(x)]}(s)\,ds\biggr)^{q'/p'}d\mu_n(x)\biggr)^{p'/q'}\\
&= \biggl(\int_{[a,b]} v(x)g(x)^{q'/p'}\,d\mu_n(x)\biggr)^{p'/q'} \leqslant D^{2p'(q-1)}\biggl(\int_{[a,b]} v(Kf)^q\,d\mu_n\biggr)^{p'/q'}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$H_2 \lesssim \mathbb{A}_2^{p'} \left(\int_{[a,b]} v(Kf)^q \, d\mu_n \right)^{p'/q'}$$

и, следовательно,

$$\int_{[a,b]} uf(Kf)^{q-1}(K_1^* \chi_{F_n}) \, d\lambda \lesssim \mathbb{A}_2 \left(\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int_{[a,b]} v(Kf)^q \, d\mu_n \right)^{1/q'}.$$

Из этой оценки и соотношения (1.3.10) находим

$$\int_{[a,b]} v(Kf)^q \, d\mu_n \lesssim \mathbb{A}^q \left[\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda \right]^{q/p} + \mathbb{A} \left[\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda \right]^{1/p} \left[\int_{[a,b]} v(Kf)^q \, d\mu_n \right]^{1/q'},$$

т.е. (1.3.7) выполнено. По теореме о монотонной сходимости при $n \to \infty$ соотношение (1.3.7) влечет (1.3.6) с оценкой $C \lesssim \mathbb{A}$ на константу.

Теорема 1.7. *Пусть $1 < q < p < +\infty$, $1/r = 1/q - 1/p$, μ и λ суть σ-конечные меры на $[a,b]$, $\nu = \lambda$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, $w \equiv 1$; k определена на $[a,b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_{\mu,\lambda} \times \mathfrak{M}_{\mu,\lambda})$-измерима и удовлетворяет условию Ойнарова (1.3.2). Тогда для существования константы $C \geqslant 0$ такой, что неравенство (1.3.1) выполнено, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbb{B} < +\infty$, где $\mathbb{B} := \max\{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2\}$,*

$$\mathbb{B}_1 := \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} v(x)k(x,t)^q \, d\mu(x) \right)^{r/q} \left(\int_{[a,t]} u^{p'} \, d\lambda \right)^{r/q'} u(t)^{p'} \, d\lambda(t) \right)^{1/r},$$

$$\mathbb{B}_2 := \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} v \, d\mu \right)^{r/p} \left(\int_{[a,t]} k(t,y)^{p'} u(y)^{p'} \, d\lambda(y) \right)^{r/p'} v(t) \, d\mu(t) \right)^{1/r}.$$

Более того, $\mathbb{B} \approx C$ для наименьшей возможной константы C в (1.3.1).

Доказательство. Пусть промежутки I_0, I_∞, I и $\overline{I}_0$, $\overline{I}_\infty$, $\overline{I}$ определены как в лемме 1.7.

Достаточность. Пусть $\mathbb{B} < +\infty$. Заметим, что в силу леммы 1.1 для любого $s \in [a,b]$ справедливо

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1^r &\geqslant \int_{[a,s]} \left(\int_{[t,b]} v(x)k(x,t)^q \, d\mu(x) \right)^{r/q} \left(\int_{[a,t]} u^{p'} \, d\lambda \right)^{r/q'} u(t)^{p'} \, d\lambda(t) \\ &\gtrsim \left(\int_{[s,b]} v(x)k(x,s)^q \, d\mu(x) \right)^{r/q} \int_{[a,s]} \left[\int_{[a,t]} u^{p'} \, d\lambda \right]^{r/q'} u(t)^{p'} \, d\lambda(t) \approx \mathbb{A}_1(s)^r,\end{aligned}$$

и, аналогично, выполнено $\mathbb{B}_2 \gtrsim \mathbb{A}_2(s)$ в силу леммы 1.2. Следовательно, $\mathbb{A} < +\infty$, и, действуя аналогично доказательству теоремы 1.6, находим, что неравенство (1.3.1) эквивалентно неравенству (1.3.6). Более того, сохраняя конструкцию последовательности $\{F_n\}$, построенной в теореме 1.6, имеем (1.3.8).

Начнем с оценки первого слагаемого правой части (1.3.8). Так как $\mathbb{A}_1 < +\infty$, то для любого $s \in [a,b]$ равенство $\int_{[a,s]} u^{p'} \, d\lambda = +\infty$ влечет $(K_q^* \chi_{F_n})(s) = 0$, кроме того, очевидно, что равенство $\int_{[a,s]} u^{p'} \, d\lambda = 0$ влечет

$$\int_{[a,s]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^* \chi_{F_n}) \, d\lambda = 0.$$

Положим $E := \{s \in [a,b] \mid \int_{[a,s]} u^{p'}\,d\lambda > 0\}$. Тогда

$$\int_{[a,b]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^*\chi_{F_n})\,d\lambda = \int_{[a,b]\cap E} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^*\chi_{F_n})\,d\lambda$$
$$= \int_{[a,b]\cap E} u(t)f(t)(K_0 f)(t)^{q-1}\left[\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{(1-q)+(q-1)}(K_q^*\chi_{F_n})(t)\,d\lambda(t)$$

и, применяя неравенство Гёльдера с тремя показателями p, $p/(q-1)$, r/q, оценим

$$\int_{[a,b]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^*\chi_{F_n})\,d\lambda$$
$$\leqslant \left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p}\left(\int_{[a,b]}(K_0 f)(t)^p\left[\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{-p} u(t)^{p'}\,d\lambda(t)\right)^{(q-1)/p}\mathbb{B}_1^q.$$

По теореме 1.4 имеем

$$\left(\int_{[a,b]}(K_0 f)(t)^p\left[\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{-p} u(t)^{p'}\,d\lambda(t)\right)^{1/p} \lesssim \left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p},$$

ибо для любого $s \in [a,b]$ выполнено (см. доказательство (1.3.9)) соотношение

$$\left(\int_{[s,b]}\left[\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{-p} u(t)^{p'}\,d\lambda(t)\right)^{1/p}\left(\int_{[a,s]} u^{p'}\,d\lambda\right)^{1/p'} \leqslant (p')^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\int_{[a,b]} uf(K_0 f)^{q-1}(K_q^*\chi_{F_n})\,d\lambda \lesssim \mathbb{B}_1^q\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{q/p}. \tag{1.3.12}$$

Применяя неравенство Гёльдера ко второму слагаемому правой части соотношения (1.3.8), получим (1.3.11). Пусть $\overline{k}$ то же ядро, что в теореме 1.6. Обозначим через g функцию

$$g(t) := \int_{[a,t]} \overline{k}(t,y)u(y)f(y)\,d\lambda(y), \qquad t \in [a,b],$$

и заметим, что g – неубывающая функция на $[a,b]$. Тогда

$$H_2 \leqslant \int_{[a,b]} u^{p'} g^{(q-1)p'}(K_1^*\chi_{F_n})^{p'}\,d\lambda$$
$$\approx \int_{[a,b]} u(t)^{p'}\left(\int_{[0,g(b)]}\chi_{[0,g(t)]}(s)s^{(q-1)p'-1}\,ds\right)(K_1^*\chi_{F_n})(t)^{p'}\,d\lambda(t)$$
$$= \int_{[0,g(b)]} s^{(q-1)p'-1}\left(\int_{[a,b]} u(t)^{p'}\chi_{[0,g(t)]}(s)(K_1^*\chi_{F_n})(t)^{p'}\,d\lambda(t)\right)ds.$$

Применяя неравенство Минковского и учитывая монотонность g, находим

$$H_2 \lesssim \int_{[0,g(b)]} s^{(q-1)p'-1}\left(\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)(K_{p'}1)(x)^{1/p'}\,d\mu_n(x)\right)^{p'} ds.$$

Так как $\mathbb{A}_2 < +\infty$, то для любого $t \in [a,b]$ равенство $\int_{[t,b]} v\,d\mu_n = +\infty$ влечет $(K_{p'}1)(t) = 0$ и, кроме того, $\int_{[t,b]} v\,d\mu_n = 0$ влечет

$$\int_{[t,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)(K_{p'}1)(x)^{1/p'}\,d\mu_n(x) = 0.$$

Положим $E := \{t \in [a,b] \mid \int_{[t,b]} v\,d\mu_n > 0\}$. Тогда

$$\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)(K_{p'}1)(x)^{1/p'}\,d\mu_n(x) \\ = \int_{[a,b]\cap E} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)(K_{p'}1)(x)^{1/p'}\left[\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\right]^{1/p-1/p} d\mu_n(x).$$

Зафиксируем число $\gamma \in (p', r)$ и, используя неравенство Гёльдера с параметрами γ и γ', получим

$$\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)(K_{p'}1)(x)^{1/p'}\,d\mu_n(x) \\ \leqslant \Omega(s)^{1/\gamma}\left(\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\left[\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\right]^{-\gamma'/p} d\mu_n(x)\right)^{1/\gamma'},$$

где

$$\Omega(s) := \int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)(K_{p'}1)(x)^{\gamma/p'}\left[\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\right]^{\gamma/p} d\mu_n(x).$$

Однако (см. доказательство теоремы 1.6)

$$\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\left[\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\right]^{-\gamma'/p} d\mu_n(x) \lesssim \left(\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\,d\mu_n(x)\right)^{1-\gamma'/p}.$$

Следовательно,

$$H_2 \lesssim \int_{[0,g(b)]} s^{(q-1)p'-1}\Omega(s)^{p'/\gamma}\left(\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\,d\mu_n(x)\right)^{1-p'/\gamma} ds.$$

Так как

$$(q-1)p'-1 = \left[p'(q-1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\gamma}\right)-1\right] + \left[p'(q-1)\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{\gamma}\right)\right],$$

неравенство Гёльдера с параметрами γ/p' и $\gamma/(\gamma-p')$ влечет

$$H_2 \lesssim \left(\int_{[0,g(b)]} s^{\gamma(q-1)(1/p+1/\gamma)-\gamma/p'}\Omega(s)\,ds\right)^{p'/\gamma} \\ \times\left(\int_{[0,g(b)]} s^{q-1}\,ds\int_{[a,b]} v(x)\chi_{[0,g(x)]}(s)\,d\mu_n(x)\right)^{1-p'/\gamma} \\ \approx \left(\int_{[a,b]} v(x)(K_{p'}1)(x)^{\gamma/p'}\left[\int_{[x,b]} v\,d\mu_n\right]^{\gamma/p}(Kf)(x)^{q(1-\gamma/r)}\,d\mu_n(x)\right)^{p'/\gamma} \\ \times\left(\int_{[a,b]} v(Kf)^q\,d\mu_n\right)^{1-p'/\gamma}.$$

Применяя теперь неравенство Гёльдера с параметрами r/γ и $r/(r-\gamma)$ к первому сомножителю, получим

$$H_2 \lesssim \mathbb{B}_2^{p'}\left(\int_{[a,b]} v(Kf)^q\,d\mu_n\right)^{1-p'/r}.$$

Из этой оценки вместе с (1.3.11), (1.3.8) и (1.3.12) следует

$$\int_{[a,b]} v(Kf)^q\,d\mu_n \lesssim \mathbb{B}^q\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right]^{q/p} + \mathbb{B}\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right]^{1/p}\left[\int_{[a,b]} v(Kf)^q\,d\mu_n\right]^{1/q'}.$$

Таким образом, справедливо

$$\left(\int_{[a,b]} v\chi_{F_n}(Kf)^q\,d\mu\right)^{1/q} \leqslant c(p,q,D)\mathbb{B}\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p}.$$

По теореме о монотонной сходимости при $n\to\infty$ последнее неравенство влечет (1.3.6) с оценкой $C\lesssim\mathbb{B}$ на константу.

Необходимость. Пусть (1.3.1) выполнено. Так же, как в доказательстве теоремы 1.6, находим $\mathbb{A}<+\infty$. Тогда для любого $t\in\overline{I}_\infty$ имеем $\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda=0$, что по лемме 1.4 влечет $\int_{\overline{I}_\infty} u^{p'}\,d\lambda=0$. Значит,

$$\mathbb{B}_1=\left(\int_{\overline{I}}(K_q^*1)(t)^{r/q}\left(\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right)^{r/q'} u(t)^{p'}\,d\lambda(t)\right)^{1/r}.$$

Кроме того, $\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda<+\infty$ выполнено для произвольного $t\in\overline{I}$. Если $\overline{I}=\varnothing$, то $\mathbb{B}_1=0\leqslant C$. Пусть $\overline{I}\neq\varnothing$. Так как λ есть σ-конечная мера, то существует последовательность $\{\widetilde{G}_n\}_1^\infty$ такая, что $[a,b]=\bigcup_1^\infty \widetilde{G}_n$ и $\lambda(\widetilde{G}_n)<+\infty$, $\widetilde{G}_n\subset\widetilde{G}_{n+1}$, $\widetilde{G}_n\cap\overline{I}\neq\varnothing$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Пусть $\{t_n\}_1^\infty\subset\overline{I}$ и $\{s_n\}_1^\infty\subset\overline{I}$ такие, что $t_n\uparrow\sup\overline{I}$, $s_n\downarrow\inf\overline{I}$, и для $n\in\mathbb{N}$ положим

$$G_n:=\begin{cases}\widetilde{G}_n\cap\overline{I}, & \text{если }\ \sup\overline{I}\in I\wedge\inf\overline{I}\in\overline{I},\\ \widetilde{G}_n\cap\overline{I}\cap[a,t_n], & \text{если }\ \sup\overline{I}\notin\overline{I}\wedge\inf\overline{I}\in\overline{I},\\ \widetilde{G}_n\cap\overline{I}\cap[s_n,b], & \text{если }\ \sup\overline{I}\in\overline{I}\wedge\inf\overline{I}\notin\overline{I},\\ \widetilde{G}_n\cap\overline{I}\cap[s_n,t_n], & \text{если }\ \sup\overline{I}\notin\overline{I}\wedge\inf\overline{I}\notin\overline{I}.\end{cases}$$

Тогда $\bigcup_1^\infty G_n=\overline{I}$ и $G_n\subset G_{n+1}$, $\lambda(G_n)<+\infty$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Обозначим

$$\mathbb{B}_1(n):=\left(\int_{\overline{I}}(K_q^*1)(t)^{r/q}\left(\int_{[a,t]} u^{p'}\chi_{G_n}\,d\lambda\right)^{r/q'} u(t)^{p'}\chi_{G_n}(t)\,d\lambda(t)\right)^{1/r}.$$

Если $G_n=\varnothing$, то $\mathbb{B}_1(n)=0$. Пусть $G_n\neq\varnothing$ и $\alpha_n:=\inf G_n$, $\beta_n:=\sup G_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_1(n)&\leqslant\left(\int_{[\alpha_n,\beta_n]}(K_q^*1)(t)^{r/q}\left(\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right)^{r/q'} u(t)^{p'}\chi_{G_n}(t)\,d\lambda(t)\right)^{1/r}\\ &\leqslant (K_q^*1)(\alpha_n)^{1/q}\left(\int_{[a,\beta_n]}\left[\int_{[a,t]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{r/q'} u(t)^{p'}\,d\lambda(t)\right)^{1/r}\\ &\lesssim (K_q^*1)(\alpha_n)^{1/q}\left[\int_{[a,\beta_n]} u^{p'}\,d\lambda\right]^{1/p'}<+\infty.\end{aligned}$$

Далее, для функции

$$f_n(t):=(K_q^*1)(t)^{r/(pq)}\left[\int_{[a,t]} u^{p'}\chi_{G_n}\,d\lambda\right]^{r/(pq')} u(t)^{p'-1}\chi_{G_n}(t),$$

имеем $\int_{[a,b]} f_n^p \, d\lambda = \mathbb{B}_1(n)^r$. Кроме того,

$$(K_1^*[(Kf_n)^{q-1}])(y) \geqslant \int_{[y,b]} v(x) \left[\int_{[a,y]} k(x,z)u(z)f_n(z)\, d\lambda(z) \right]^{q-1} k(x,y)\, d\mu(x)$$
$$\gtrsim (K_q^* 1)(y) \left(\int_{[a,y]} u f_n \, d\lambda \right)^{q-1},$$

и по лемме 1.1

$$\int_{[a,y]} u f_n \, d\lambda = \int_{[a,y]} (K_q^* 1)(t)^{r/(pq)} \left[\int_{[a,t]} u^{p'} \chi_{G_n} \, d\lambda \right]^{r/(pq')} u(t)^{p'} \chi_{G_n}(t)\, d\lambda(t)$$
$$\gtrsim (K_q^* 1)(y)^{r/(pq)} \int_{[a,y]} \left[\int_{[a,t]} u^{p'} \chi_{G_n} \, d\lambda \right]^{r/(pq')} u(t)^{p'} \chi_{G_n}(t)\, d\lambda(t)$$
$$\gtrsim (K_q^* 1)(y)^{r/(pq)} \left[\int_{[a,y]} u^{p'} \chi_{G_n} \, d\lambda \right]^{r/(p'q)}.$$

Следовательно,

$$\int_{[a,b]} v (Kf_n)^q \, d\mu = \int_{[a,b]} u f_n (K_1^*[(Kf_n)^{q-1}])\, d\lambda$$
$$\gtrsim \int_{[a,b]} u(y) f_n(y) (K_q^* 1)(y) \left(\int_{[a,y]} u f_n \, d\lambda \right)^{q-1} d\lambda(y)$$
$$\gtrsim \int_{[a,b]} u(y) f_n(y) (K_q^* 1)(y)^{1+r/(pq')} \left[\int_{[a,y]} u^{p'} \chi_{G_n} \, d\lambda \right]^{r/(p'q')} d\lambda(y) = \mathbb{B}_1(n)^r.$$

Таким образом, подставляя f_n в (1.3.1), получим $\mathbb{B}_1(n) \leqslant c(p,q,D)\, C$. По теореме о монотонной сходимости последнее неравенство при $n \to \infty$ влечет $\mathbb{B}_1 \lesssim C$. Аналогичными рассуждениями для двойственного к (1.3.1) неравенства (1.3.5) получим $\mathbb{B}_2 \lesssim C$.

Общий случай характеризует следующая теорема.

Теорема 1.8. *Пусть $1 < p, q < +\infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; μ, λ и ν суть σ-конечные меры на $[a,b]$, λ, ν определены на одной σ-алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$; $u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; (ν_a, ν_s) разложение Лебега меры ν относительно λ и $d\nu_a/d\lambda$ – производная Радона–Никодима ν_a относительно λ; k определена на $[a,b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_{\mu,\lambda} \times \mathfrak{M}_{\mu,\lambda})$-измерима и удовлетворяет условию Ойнарова (1.3.2). Положим $\omega := u^{p'} (w \, d\nu_a/d\lambda)^{1-p'}$.*

Если $p \leqslant q$, то для существования константы $C \geqslant 0$ такой, что выполнено неравенство (1.3.1), необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{A} := \max\{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2\} < +\infty$, где

$$\mathscr{A}_1 := \sup_{t \in [a,b]} \left(\int_{[t,b]} v(x) k(x,t)^q \, d\mu(x) \right)^{1/q} \left(\int_{[a,t]} \omega \, d\lambda \right)^{1/p'},$$
$$\mathscr{A}_2 := \sup_{t \in [a,b]} \left(\int_{[t,b]} v \, d\mu \right)^{1/q} \left(\int_{[a,t]} k(t,y)^{p'} \omega(y)\, d\lambda(y) \right)^{1/p'}.$$

Более того, $\mathscr{A} \approx C$ для наименьшей возможной константы C в (1.3.1).

Если $q < p$, то для существования константы $C \geqslant 0$ такой, что выполнено неравенство (1.3.1) необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{B} := \max\{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2\} < +\infty$, где

$$\mathscr{B}_1 := \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} v(x) k(x,t)^q \, d\mu(x) \right)^{r/q} \left(\int_{[a,t]} \omega \, d\lambda \right)^{r/q'} \omega(t)\, d\lambda(t) \right)^{1/r},$$

$$\mathscr{B}_2 := \left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[t,b]} v\,d\mu\right)^{r/p}\left(\int_{[a,t]} k(t,y)^{p'}\omega(y)\,d\lambda(y)\right)^{r/p'} v(t)\,d\mu(t)\right)^{1/r}.$$

Более того, $\mathscr{B} \approx C$ *для наименьшей возможной константы* C *в* (1.3.1).

Доказательство. По лемме 1.6 неравенство (1.3.1) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)f(y)\,d\lambda(y)\right)^{q} d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p w\left(\frac{d\nu_a}{d\lambda}\right) d\lambda\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

По лемме 1.5 последнее неравенство эквивалентно

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)u(y)f(y)\left(w(y)\frac{d\nu_a}{d\lambda}(y)\right)^{-1/p} d\lambda(y)\right)^{q} d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

Применяя теперь теоремы 1.6 и 1.7, получим требуемое.

Данный результат позволяет охарактеризовать при $1<p,q<+\infty$ следующее неравенство

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x)} fu\,d\lambda\right)^{q} d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p w\,d\nu\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \tag{1.3.13}$$

Следствие 1.1. *Пусть* $1<p,q<+\infty$, $1/r=1/q-1/p$; μ, λ *и* ν *суть* σ*-конечные меры на* $[a,b]$, λ,ν *определены на одной* σ*-алгебре* $\mathfrak{M}_\lambda$; $u,w\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v\in\{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; (ν_a,ν_s) – *разложение Лебега меры* ν *относительно* λ *и* $d\nu_a/d\lambda$ – *производная Радона–Никодима* ν_a *относительно* λ; k *определена на* $[a,b]^2$, *неотрицательна,* $(\mathfrak{M}_{\mu,\lambda}\times\mathfrak{M}_{\mu,\lambda})$*-измерима и удовлетворяет условию Ойнарова* (1.3.2). *Положим* $\omega := u^{p'}(w\,d\nu_a/d\lambda)^{1-p'}$.

Если $p\leqslant q$, *то для существования константы* $C\geqslant 0$ *такой, что выполнено неравенство* (1.3.13), *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathscr{A}'<+\infty$, *где*

$$\mathscr{A}' := \sup_{t\in[a,b]}\left(\int_{[t,b]} v\,d\mu\right)^{1/q}\left(\int_{[a,t)}\omega\,d\lambda\right)^{1/p'}.$$

Более того, $\mathscr{A}'\approx C$ *для наименьшей возможной константы* C *в* (1.3.13).

Если $q<p$, *то для существования константы* $C\geqslant 0$ *такой, что выполнено неравенство* (1.3.13), *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathscr{B}'<+\infty$, *где*

$$\mathscr{B}' := \left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[t,b]} v\,d\mu\right)^{r/p}\left(\int_{[a,t)}\omega\,d\lambda\right)^{r/p'} v(t)\,d\mu(t)\right)^{1/r}.$$

Более того, $\mathscr{B}'\approx C$ *для наименьшей возможной константы* C *в* (1.3.13).

Доказательство. Функция

$$k(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}$$

удовлетворяет условию (1.3.2) и принадлежит классу $\{\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\}^+$. Следовательно, по теореме 1.8 при $p\leqslant q$ неравенство (1.3.13) выполнено, если и только если $\max\{\mathscr{A}_1',\,\mathscr{A}_2'\}<+\infty$, где

$$\mathscr{A}_1' := \sup_{t\in[a,b]}\biggl(\int_{(t,b]} v\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{[a,t]} \omega\,d\lambda\biggr)^{1/p'},$$
$$\mathscr{A}_2' := \sup_{t\in[a,b]}\biggl(\int_{[t,b]} v\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{[a,t)} \omega\,d\lambda\biggr)^{1/p'}.$$

При $q<p$ неравенство (1.3.13) характеризует конечность константы $\max\{\mathscr{B}_1',\,\mathscr{B}_2'\}$, где

$$\mathscr{B}_1' := \biggl(\int_{[a,b]}\biggl(\int_{(t,b]} v\,d\mu\biggr)^{r/q}\biggl(\int_{[a,t]} \omega\,d\lambda\biggr)^{r/q'}\omega(t)\,d\lambda(t)\biggr)^{1/r},$$
$$\mathscr{B}_2' := \biggl(\int_{[a,b]}\biggl(\int_{[t,b]} v\,d\mu\biggr)^{r/p}\biggl(\int_{[a,t)} \omega\,d\lambda\biggr)^{r/p'}v(t)\,d\mu(t)\biggr)^{1/r}.$$

Покажем эквивалентность $\mathscr{A}_1'$ и $\mathscr{A}_2'$, а также $\mathscr{B}_1'$ и $\mathscr{B}_2'$.

Пусть, например, конечна константа $\mathscr{A}_1'$. При $t=a$ имеем $\int_{[a,t)}\omega\,d\lambda=0$. Фиксируем произвольное $t\in(a,b]$. Пусть $\{t_n\}_1^\infty$ – возрастающая последовательность точек промежутка $[a,t)$, сходящаяся к точке t при $n\to\infty$. Тогда

$$\int_{[a,t)}\omega\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,t_n]}\omega\,d\lambda.$$

Если при всех $n\in\mathbb{N}$ выполнено $\int_{(t_n,b]}v\,d\mu=+\infty$, то $\int_{[a,t_n]}\omega\,d\lambda=0$ для любого $n\in\mathbb{N}$ и, следовательно, $\int_{[a,t)}\omega\,d\lambda=0$. В противном случае

$$\biggl(\int_{[t,b]} v\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{[a,t)} \omega\,d\lambda\biggr)^{1/p'}=\lim_{n\to\infty}\biggl(\int_{(t_n,b]} v\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{[a,t_n]} \omega\,d\lambda\biggr)^{1/p'}.$$

Таким образом, $\mathscr{A}_2'\leqslant\mathscr{A}_1'$. Соотношение $\mathscr{A}_1'\leqslant\mathscr{A}_2'$ доказывается аналогично.

По лемме 1.1 для любого $t\in[a,b]$ имеем

$$\biggl(\int_{[a,t)}\omega\,d\lambda\biggr)^{r/p'}\approx\int_{[a,t)}\biggl(\int_{[a,s]}\omega\,d\lambda\biggr)^{r/q'}\omega(s)\,d\lambda(s).$$

Откуда, переставляя интегралы и применяя лемму 1.2, находим

$$\begin{aligned}[\mathscr{B}_2']^r&\approx\int_{[a,b]}\biggl[\int_{[t,b]}v\,d\mu\biggr]^{r/p}\biggl(\int_{[a,t)}\biggl[\int_{[a,s]}\omega\,d\lambda\biggr]^{r/q'}\omega(s)\,d\lambda(s)\biggr)v(t)\,d\mu(t)\\&=\int_{[a,b]}\biggl[\int_{[a,s]}\omega\,d\lambda\biggr]^{r/q'}\biggl[\int_{(s,b]}\biggl[\int_{[t,b]}v\,d\mu\biggr]^{r/p}v(t)\,d\mu(t)\biggr]\omega(s)\,d\lambda(s)\approx[\mathscr{B}_1']^r.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathscr{A}'=\mathscr{A}_2'$ и $\mathscr{B}'\approx\mathscr{B}_2'$, требуемое утверждение доказано.

Пример 1.1. Пусть $a=0$, $b=2$; $u\equiv1$, $v(1)=+\infty$, $v(x)=1$ при $x\in[0,2]\setminus\{1\}$ и для любого борелевского $E\subset[0,2]$ положим

$$\mu(E)=\begin{cases}2, & \{1,2\}\subset E,\\ 0, & \{1,2\}\cap E=\varnothing,\\ 1, & \text{иначе},\end{cases}\qquad \lambda(E)=\begin{cases}1, & 1\in E,\\ 0, & 1\notin E.\end{cases}$$

Тогда по следствию 1.1 имеет место неравенство

$$\left[\int_{[0,2]} v(x)\left[\int_{[0,x)} f u\,d\lambda\right]^2 d\mu(x)\right]^{1/2} \leqslant C\left[\int_{[0,2]} f^2\,d\lambda\right]^{1/2} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{B}\}^+,$$

ибо соответствующая константа $\mathscr{A}' = 1$. Но не выполнено неравенство

$$\left[\int_{[0,2]} v(x)\left[\int_{[0,x]} f u\,d\lambda\right]^2 d\mu(x)\right]^{1/2} \leqslant C\left[\int_{[0,2]} f^2\,d\lambda\right]^{1/2} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{B}\}^+,$$

ибо характеризующая согласно теореме 1.1 данное неравенство константа

$$A \geqslant \left(\int_{[1,2]} v\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int_{[0,1]} u^2\,d\lambda\right)^{1/2} = +\infty.$$

1.4. Случай $0 < p < 1$

Случай $0<p<1$ для мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега, не представляет большого интереса, поскольку в этом случае неравенство (1.3.1) выполнено только если левая часть (1.3.1) равна нулю. Неравенство Харди для последовательностей характеризовано в работах Г. Беннета [13] К.-Г. Гроссе-Эрдмана [14] и М. Л. Гольдмана [15]. В частности, в [14; теорема 9.2] указан следующий результат.

Теорема 1.9. *Пусть* $0<q<p<1$, $1/r=1/q-1/p$; $a_n \geqslant 0$, $w_n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$. *Для выполнения неравенства*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left(\sum_{m=1}^{n} u_m a_m\right)^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \qquad \textit{для любой} \quad \{a_n\}_1^{\infty} \tag{1.4.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы $F < +\infty$, *где*

$$F := \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^r(W_n^r - W_{n+1}^r)\right)^{1/r}, \qquad U_n := \sup_{1\leqslant m\leqslant n} u_m, \qquad W_n := \left(\sum_{m=n}^{\infty} w_m\right)^{1/q}.$$

При этом $F \approx C$.

Доказательство. Пусть $0 < q < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n\left(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\right)^q \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^\nu}\sum_{k\in I_\nu} u_k a_k\right)^q \tag{1.4.2}$$

где

$$I_\nu := [m_\nu, m_{\nu+1}-1], \qquad m_\nu := \min\left\{n : \left(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{2^\nu}\right\}.$$

Имеем

$$J_\nu := \sum_{n\in I_\nu} w_n\left(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\right)^q \leqslant \sum_{n\in I_\nu} w_n\left(\sum_{k=1}^{m_{\nu+1}-1} u_k a_k\right)^q \leqslant \frac{1}{2^{q\nu}}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}\sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\right)^q.$$

Если $q > 1$, то по неравенству Гёльдера

$$J_\nu \leqslant \frac{1}{2^{q\nu}}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{2^\mu}{2^\nu}\cdot\frac{2^\nu}{2^\mu}\sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\right)^q \lesssim \frac{1}{2^{q\nu}}\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{2^{\nu(q-1)}}{2^{\mu(q-1)}}\left(\sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\right)^q.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\Big)^q = \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu \lesssim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q\nu}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{2^{\nu(q-1)}}{2^{\mu(q-1)}} \Big(\sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\Big)^q \lesssim \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^\mu} \sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\Big)^q.$$

При $0 < q \leqslant 1$

$$\Big(\sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\Big)^q \leqslant \sum_{\mu=0}^{\nu} \Big(\sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\Big)^q,$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\Big)^q \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q\nu}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \Big(\sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\Big)^q \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^\mu} \sum_{k\in I_\mu} u_k a_k\Big)^q.$$

Обратно, из определения m_ν следует, что

$$\frac{1}{2^{(\nu+1)q}} < \sum_{n\geqslant m_\nu} w_n \leqslant \frac{1}{2^{\nu q}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2^{\nu q}} \approx \frac{1}{2^{(\nu+2)q}} - \frac{1}{2^{(\nu+3)q}} < \sum_{n\geqslant m_{\nu+1}} w_n - \sum_{n\geqslant m_{\nu+3}} w_n = \sum_{n\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+3}-1]} w_n \tag{1.4.3}$$

Отсюда

$$\Big(\frac{1}{2^\nu} \sum_{k\in I_\nu} u_k a_k\Big)^q \lesssim \sum_{n\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+3}-1]} w_n \Big(\sum_{k\in I_\nu} u_k a_k\Big)^q \leqslant \sum_{n\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+3}-1]} w_n \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\Big)^q.$$

Далее, применяя (1.4.3),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^\nu} \sum_{k\in I_\nu} u_k a_k\Big)^q \lesssim \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+3}-1]} w_n \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\Big)^q \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} w_n \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\Big)^q,$$

и формула (1.4.2) доказана.

Теперь докажем достаточность условия $F < \infty$ для выполнения (1.4.1). По неравенствам Йенсена и Гёльдера, применяя (1.4.2), находим

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} w_n \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k a_k\Big)^q &\approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^\nu} \sum_{k\in I_\nu} u_k a_k\Big)^q \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q\nu}} \sup_{k\in I_\nu} u_k^q \Big(\sum_{k\in I_\nu} a_k^p\Big)^{q/p} \\ &\leqslant \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r\nu}} \sup_{k\in I_\nu} u_k^r\Big)^{q/r} \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k\in I_\nu} a_k^p\Big)^{q/p} =: J^{q/r} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^p\Big)^{q/p}.\end{aligned}$$

Из (1.4.3) следует, что

$$\begin{aligned}J &\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum_{m_{\nu+1}}^{m_{\nu+3}-1} w_n\Big)^{r/q} \sup_{k\in I_\nu} u_k^r \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{k\in I_\nu} u_k^r \sum_{m_{\nu+1}}^{m_{\nu+3}-1} w_n \Big(\sum_{k=n}^{m_{\nu+3}-1} w_k\Big)^{r/p} \\ &\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m_{\nu+1}}^{m_{\nu+3}-1} w_n \Big(\sum_{k=n}^{\infty} w_k\Big)^{r/p} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} u_k^r \approx F^r.\end{aligned}$$

Для оценки снизу заметим, что в силу (1.4.2) неравенство (1.4.1) эквивалентно

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^\nu}\sum_{k\in I_\nu}u_k a_k\right)^q\right)^{1/q}\leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{1/p}. \tag{1.4.4}$$

Пусть $k_\nu\in I_\nu$ таково, что $u_{k_\nu}=\sup_{k\in I_\nu}u_k$. Применяя (1.4.4) к последовательности a_k такой, что $a_k=0$ при $k\neq k_\nu$ и $a_{k_\nu}=\beta_\nu\geqslant 0$, где β_ν – произвольная последовательность, получаем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{q\nu}}u_{k_\nu}^q\beta_\nu^q\right)^{1/q}\leqslant C\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu^p\right)^{1/p}.$$

Имеем

$$F^r=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n\in I_\nu}\left(W_n^r-W_{n+1}^r\right)\sup_{1\leqslant k\leqslant n}u_k^r=:\sum_{\nu=0}^{\infty}G_\nu,$$

$$G_\nu\lesssim\frac{1}{2^{r\nu}}\sup_{1\leqslant k<m_{\nu+1}}u_k^r=\frac{1}{2^{r\nu}}\sup_{0\leqslant\mu\leqslant\nu}\sup_{k\in I_\mu}u_k^r=\frac{1}{2^{r\nu}}\sup_{0\leqslant\mu\leqslant\nu}u_{k_\mu}^r\leqslant\frac{1}{2^{r\nu}}\sum_{\mu=0}^{\nu}u_{k_\mu}^r.$$

Отсюда

$$F^r\lesssim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r\nu}}\sum_{\mu=0}^{\nu}u_{k_\mu}^r\approx\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r\mu}}u_{k_\mu}^r\leqslant C^r.$$

Определение 1.1. Пусть λ – мера на $[a,b]$.

(a) Мера λ называется *непрерывной*, если для любого $x\in[a,b]$ выполнено $\lambda(\{x\})=0$;

(b) мера λ называется *дискретной*, если существует не более чем счетное множество E_λ такое, что $\lambda([a,b]\setminus E_\lambda)=0$ и для любого $x\in E_\lambda$ выполнено $\lambda(\{x\})>0$.

Лемма 1.9. *Пусть λ суть σ-конечная мера на $[a,b]$.*

(a) *Множество $G:=\{x\in[a,b]\mid\lambda(\{x\})>0\}$ не более чем счетное.*

(b) *Существуют меры λ_c, λ_d, определенные на $\mathfrak{M}_\lambda$, такие, что λ_c непрерывная, λ_d дискретная и $\lambda=\lambda_c+\lambda_d$.*

Доказательство. (a) В силу σ-конечности меры λ существует последовательность $\{E_n\}\subset\mathfrak{M}_\lambda$ такая, что $\lambda(E_n)<+\infty$ и $[a,b]=\cup_n E_n$. Определим меру λ_n, положив для любого $E\in\mathfrak{M}_\lambda$

$$\lambda_n(E):=\lambda(E\cap E_n),$$

и через F_n обозначим функцию распределения меры λ_n:

$$F_n(x):=\lambda_n([a,x)),\quad x\in[a,b].$$

Так как F_n – ограниченная монотонная функция, то множество ее точек разрыва не более чем счетное. Фиксируем произвольную точку $x_0\in G$. Тогда существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что $x_0\in E_{n_0}$. При этом $\lambda_{n_0}(\{x_0\})>0$. Тогда x_0 – точка разрыва функции F_{n_0}. Таким образом, множество G содержится в объединении множеств точек разрыва функций F_n, которое представляет собой не более чем счетное множество.

(b) Для любого $E\in\mathfrak{M}_\lambda$ положим $\lambda_d(E):=\lambda(G\cap E)$, где G – множество из пункта (a), и определим λ_c равенством $\lambda_c:=\lambda-\lambda_d$. Тогда не более чем счетное множество G есть носитель меры λ_d, причем для любого $x\in G$ выполнено $\lambda_d(\{x\})>0$, т.е. λ_d – дискретная мера. Также из определения G вытекает непрерывность меры λ_c.

Теорема 1.10. *Пусть* $0 < p < 1$, $0 < q < +\infty$; λ *и* μ *суть* σ*-конечные меры на* $[a,b]$, λ *непрерывная*; k *определена на* $[a,b]^2$, *неотрицательна и* $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$*-измерима. Обозначим*

$$E := \left\{ x \in [a,b] \;\middle|\; \int_{[a,b]} k(x,y)\, d\lambda(y) \neq 0 \right\}.$$

Для справедливости неравенства

$$\left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) f(y)\, d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \tag{1.4.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu(E) = 0$.

Доказательство. *Достаточность* очевидна.

Необходимость. Если $\lambda([a,b]) = 0$, то $E = \varnothing$ и $\mu(E) = 0$. Пусть $\lambda([a,b]) > 0$. Сначала предположим, что мера μ конечная. Так как λ есть σ-конечная мера, то $[a,b] = \bigcup_1^\infty E_j'$, и для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено $\lambda(E_j') < +\infty$. Положим

$$E_j'' := \left(\bigcup_{i=1}^{j} E_i' \right) \cap [-j, j], \quad j \in \mathbb{N}, \qquad s := \min\{ i \in \mathbb{N} \mid \lambda(E_i'') > 0 \} - 1, \qquad E_j := E_{s+j}'', \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $[a,b] = \bigcup_1^\infty E_j$, и для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено $0 < \lambda(E_j) < +\infty$, E_j ограничено.

Фиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через I_j отрезок, содержащий E_j. Существует такое $m_j \in \mathbb{N}$, что, разбив отрезок I_j на 2^{m_j} равных отрезков $I_j^1, \ldots, I_j^{2^{m_j}}$, получим $\lambda(E_j \cap I_j^s) < n^{p/(p-1)}$ для любого $s \in \{1, \ldots, 2^{m_j}\}$. В противном случае можно было построить последовательность вложенных отрезков $\{J_k\}$, длины которых стремятся к 0 и таких, что $\lambda(E_j \cap J_k) \geqslant n^{p/(p-1)}$, $k \in \mathbb{N}$. При этом $\bigcap_{k=1}^\infty (E_j \cap J_k)$ либо есть $\varnothing$, либо одноточечное множество. Но так как $\lambda(E_j) < +\infty$, то

$$\lambda\left(\bigcap_{k=1}^\infty (E_j \cap J_k) \right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_j \cap J_k) \geqslant n^{p/(p-1)} > 0,$$

что противоречит непрерывности меры λ.

Положим

$$N^0(n) := \bigcup_{j \in \mathbb{N},\, s \in \{1,\ldots,2^{m_j}\} :\ \lambda(E_j \cap I_j^s) = 0} E_j \cap I_j^s,$$

а все $E_j \cap I_j^s$ такие, что $\lambda(E_j \cap I_j^s) \neq 0$, занумеруем одним индексом, обозначив через F_i, $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, $[a,b] \setminus N^0(n) = \bigcup_1^\infty F_i$, причем $0 < \lambda(F_i) < n^{p/(p-1)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Фиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$ и произвольное $\mathfrak{M}_\lambda$-измеримое $F \subset F_i$ такое, что $\lambda(F) > 0$. Обозначим $\gamma := \min\{q, 1\}$ и $f := \chi_F \lambda(F)^{-1/p}$. Имеем $\int_{[a,b]} f^p \, d\lambda = 1$. При $q \leqslant 1$ в силу неравенства Минковского левая часть (1.4.5) оценивается снизу:

$$\begin{aligned} \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) f(y)\, d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} &= \lambda(F)^{-1/p} \left(\int_{[a,b]} \left(\int_F k(x,y)\, d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &\geqslant \lambda(F)^{-1/p} \int_F \left(\int_{[a,b]} k(x,y)^q \, d\mu(x) \right)^{1/q} d\lambda(y). \end{aligned}$$

При $q > 1$, применяя неравенство Гёльдера с показателями $1/q$ и $1/(1-q)$, находим

$$\begin{aligned}\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,b]} k(x,y)f(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\\ &= \lambda(F)^{-1/p}\left(\int_{[a,b]}\left(\int_F k(x,y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}\\ &\geqslant \lambda(F)^{-1/p}\mu([a,b])^{1/q-1}\int_{[a,b]}\left(\int_F k(x,y)\,d\lambda(y)\right)d\mu(x)\\ &= \lambda(F)^{-1/p}\mu([a,b])^{1/q-1}\int_F\left(\int_{[a,b]} k(x,y)\,d\mu(x)\right)d\lambda(y).\end{aligned}$$

В обоих случаях

$$\left(\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,b]} k(x,y)f(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \geqslant \frac{nC_1}{\lambda(F)}\int_F\left(\int_{[a,b]} k(x,y)^\gamma\,d\mu(x)\right)^{1/\gamma} d\lambda(y),$$

где $C_1 := \min\{1, \mu([a,b])^{1/q-1}\}$.

Следовательно, подставляя f в неравенство (1.4.5), получим

$$\frac{1}{\lambda(F)}\int_F\left(\int_{[a,b]} k(x,y)^\gamma\,d\mu(x)\right)^{1/\gamma} d\lambda(y) \leqslant \frac{C_2}{n},$$

где $C_2 = C\cdot C_1^{-1}$. Так как F – произвольное $\mathfrak{M}_\lambda$-измеримое подмножество F_i такое, что $\lambda(F) > 0$, то (см. [9; теорема 1.40]) существует множество $N_i \subset F_i$ такое, что $\lambda(N_i) = 0$, и для любого $y \in F_i \setminus N_i$ выполнено

$$\left(\int_{[a,b]} k(x,y)^\gamma\,d\mu(x)\right)^{1/\gamma} \leqslant \frac{C_2}{n}. \tag{1.4.6}$$

Пусть $N^n := \bigcup_{i=1}^\infty N_i$. Тогда $\lambda(N^n) = 0$ и для любого $y \in [a,b] \setminus (N^0(n) \cup N^n)$ выполнено (1.4.6). Пусть $N := \bigcup_{n=1}^\infty (N^0(n) \cup N^n)$. Тогда $\lambda(N) = 0$ и для любого $y \in [a,b] \setminus N$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено (1.4.6). Следовательно, для любого $y \in [a,b] \setminus N$ имеет место

$$\int_{[a,b]} k(x,y)\,d\mu(x) = 0,$$

откуда

$$\int_{[a,b]}\left(\int_{[a,b]} k(x,y)\,d\lambda(y)\right)d\mu(x) = \int_{[a,b]}\left(\int_{[a,b]} k(x,y)\,d\mu(x)\right)d\lambda(y) = 0,$$

т.е. $\mu(E) = 0$.

Рассмотрим, теперь, общий случай. Так как мера μ σ-конечная на $[a,b]$, то существует последовательность $\{G_n\}$ $\mathfrak{M}_\mu$-измеримых множеств такая, что $G_n \subset G_{n+1}$, $\mu(G_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [a,b]$. Для любого $\mathfrak{M}_\mu$-измеримого G положим $\mu_n(G) := \mu(G \cap G_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Из (1.4.5) следует справедливость неравенства, аналогичного (1.4.5), в котором стоит μ_n вместо μ. По доказанному $\mu(E \cap G_n) = \mu_n(E) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mu(E) = 0$.

Теорема 1.11. *Пусть $0 < p \leqslant 1$, $p \leqslant q < +\infty$; λ и μ суть σ-конечные меры на $[a,b]$, λ – дискретная мера, и ее носитель – счетное множество точек $\{c_n\}_1^\infty \subset [a,b]$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; k определена на $[a,b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$-измерима и удовлетворяет* *условию: существует константа* $\alpha > 0$ *такая, что* $k(x, y_1) \geqslant \alpha k(x, y_2)$ *для* $y_1 < y_2$. *Неравенство*

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)u(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \tag{1.4.7}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} < +\infty$, *где*

$$\mathcal{F} := \sup_{t\in[a,b]}\left(\int_{[t,b]} v(x)k(x,t)^q\,d\mu(x)\right)^{1/q} H(t),$$
$$H(x) := \sup_{n\colon c_n\in[a,x]} u(c_n)\lambda(\{c_n\})^{1/p'}, \qquad x\in[a,b].$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (1.4.7) *справедливо* $\alpha\mathcal{F} \leqslant C \leqslant \mathcal{F}$.

Доказательство. *Достаточность.* Зафиксируем произвольную функцию $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. В силу неравенства Йенсена имеем

$$\begin{aligned}\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)u(y)\,d\lambda(y) &= \sum_{n:\ c_n\in[a,x]} k(x,c_n)f(c_n)u(c_n)\lambda(\{c_n\})\\ &\leqslant \sum_{n:\ c_n\in[a,x]} k(x,c_n)f(c_n)\lambda(\{c_n\})^{1/p}H(c_n)\\ &\leqslant \left(\sum_{n:\ c_n\in[a,x]} k(x,c_n)^p f(c_n)^p\lambda(\{c_n\})H(c_n)^p\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{[a,x]} k(x,y)^p f(y)^p H(y)^p\,d\lambda(y)\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Минковского, находим

$$\begin{aligned}&\left(\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)u(y)\,d\lambda(y)\right]^q d\mu(x)\right)^{1/q}\\ &\quad\leqslant \left(\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)^p f(y)^p H(y)^p\,d\lambda(y)\right]^{q/p} d\mu(x)\right)^{1/q}\\ &\quad\leqslant \left(\int_{[a,b]} f(y)^p H(y)^p\left[\int_{[y,b]} v(x)k(x,y)^q\,d\mu(x)\right]^{p/q} d\lambda(y)\right)^{1/p} \leqslant \mathcal{F}\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Необходимость. Пусть выполнено неравенство (1.4.7). Фиксируем произвольное $t \in [a,b]$ и натуральное число n такие, что $c_n \in [a,t]$. Полагая $f := \lambda(\{c_n\})^{-1/p}\chi_{\{c_n\}}$ в (1.4.7), получим

$$\alpha\, u(c_n)\lambda(\{c_n\})^{1/p'}\left(\int_{[t,b]} v(x)k(x,t)^q\,d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C,$$

откуда следует требуемая оценка.

Теорема 1.12. *Пусть* $0<q<p\leqslant 1$, $1/r=1/q-1/p$; λ *и* μ *суть* σ*-конечные меры на* $[a,b]$, λ *– дискретная мера, и ее носитель – счетное множество точек* $\{c_n\}_1^\infty\subset[a,b]$; $u\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v\in\{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, $k\equiv 1$. *Неравенство* (1.4.7) *выполнено тогда и только тогда, когда* $\mathcal{G}<+\infty$, *где*

$$\mathcal{G}:=\left(\int_{[a,b]}v(x)\left(\int_{[x,b]}v\,d\mu\right)^{r/p}H(x)^r\,d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Более того, для наименьшей константы C *в неравенстве* (1.4.7) *справедливо* $C\approx\mathcal{G}$.

Доказательство. *Достаточность.* Зафиксируем произвольную функцию $f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$ такую, что правая часть неравенства (1.4.7) конечна. Для произвольного $t\in[a,b]$ положим

$$h(t)^{r/q}:=\int_{[0,H(b)]}s^{r-1}\chi_{[0,H(t)]}(s)\left[\int_{[a,b]}v(x)\chi_{[0,H(x)]}(s)\,d\mu(x)\right]^{r/p}ds.$$

Заметим, что функция H не убывает на $[a,b]$. В частности, H борелевская функция и ядро $\chi_{[0,H(t)]}(s)$, $t\in[a,b]$, $s\in[0,H(b)]$ суть $(\mathfrak{B}\times\mathfrak{B})$-измеримая функция на декартовом произведении $[a,b]\times[0,H(b)]$.

Во-первых, для любого $t\in[a,b]$ выполнено

$$\begin{aligned}H(t)\left[\int_{[t,b]}vh^{-p/q}\,d\mu\right]^{1/p}&\leqslant H(t)\left[\int_{[t,b]}v\,d\mu\right]^{1/p}h(t)^{-1/q}\\&\leqslant H(t)\left[\int_{[t,b]}v\,d\mu\right]^{1/p}\left[\int_{[t,b]}v\,d\mu\right]^{-1/p}\left[\int_{[0,H(b)]}s^{r-1}\chi_{[0,H(t)]}(s)\,ds\right]^{-1/r}\approx 1,\end{aligned}$$

ибо при $\chi_{[t,b]}(x)=1$ и $s\in[0,H(t)]$ выполнено $s\in[0,H(x)]$, а следовательно, $\chi_{[0,H(x)]}(s)=1$. Доказанное соотношение в силу теоремы 1.11 влечет оценку

$$\left(\int_{[a,b]}v(x)h(x)^{-p/q}\left(\int_{[a,x]}fu\,d\lambda\right)^p d\mu(x)\right)^{1/q}\lesssim\left(\int_{[a,b]}f^p\,d\lambda\right)^{1/p}.$$

В частности, из данной оценки следует, что

$$\int_{\{x\in[a,b]\,|\,h(x)=0\}}v(x)\left(\int_{[a,x]}fu\,d\lambda\right)^q d\mu(x)=0.$$

Во-вторых, имеем

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}v(x)h(x)^{r/q}\,d\mu(x)&=\int_{[0,H(b)]}s^{r-1}\left(\int_{[a,b]}v(x)\chi_{[0,H(x)]}(s)\,d\mu(x)\right)^{r/q}ds\\&\approx\int_{[0,H(b)]}s^{r-1}\int_{[a,b]}v(x)\chi_{[0,H(x)]}(s)\left[\int_{[x,b]}v(x)\chi_{[0,H(t)]}(s)\,d\mu(t)\right]^{r/p}d\mu(x)\,ds\\&=\int_{[a,b]}v(x)\int_{[0,H(b)]}\chi_{[0,H(x)]}(s)\left[\int_{[x,b]}v(x)\chi_{[0,H(t)]}(s)\,d\mu(t)\right]^{r/p}s^{r-1}\,ds\,d\mu(x)\\&\leqslant\int_{[a,b]}v(x)\left(\int_{[x,b]}v\,d\mu\right)^{r/p}\left[\int_{[0,H(b)]}s^{r-1}\chi_{[0,H(x)]}(s)\,ds\right]d\mu(x)\approx\mathcal{G}^r.\end{aligned}$$

В частности, из данной оценки следует, что

$$\int_{\{x\in[a,b]\,|\,h(x)=+\infty\}}v\,d\mu=0.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями r/q и p/q и объединяя обе оценки, получим

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} = \left(\int_{[a,b]} v(x)h(x)h(x)^{-1}\left[\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right]^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant \left[\int_{[a,b]} vh^{r/q}\,d\mu\right]^{1/r}\left(\int_{[a,b]} v(x)h(x)^{-p/q}\left[\int_{[a,x]} fu\,d\lambda\right]^p d\mu(x)\right)^{1/p} \lesssim \mathcal{G}\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p}.$$

Необходимость. Из σ-конечности меры μ на $[a,b]$ следует существование последовательности $\{G_n\}$ $\mathfrak{M}_\mu$-измеримых множеств такой, что $G_n \subset G_{n+1}$, $\mu(G_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = [a,b]$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $v_n := \min\{v,n\}\chi_{G_n}$, $u_n := \min\{u,n\}$. Также для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$-измеримого множества E положим

$$\lambda_k(E) := \lambda(E \cap \{c_1,\dots,c_k\}).$$

Тогда неравенство (1.4.7) влечет

$$\left(\int_{[a,b]} v_n(x)\left(\int_{[a,x]} gu_n\,d\lambda_k\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{[a,b]} g^p\,d\lambda_k\right)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad g \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+. \tag{1.4.8}$$

Пусть $\{c_i'\}_{i=1}^k$ – возрастающая перестановка набора точек $\{c_i\}_{i=1}^k$ и

$$\Delta_0 := [a, c_1'), \qquad \Delta_k := [c_k', b], \qquad \Delta_j := [c_j', c_{j+1}'), \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1.$$

Фиксируем произвольный набор $\{d_j\}_{j=1}^k$ неотрицательных вещественных чисел и положим $g := \sum_{j=1}^k d_j\lambda(\{c_j'\})^{-1/p}\chi_{\Delta_j}$. Имеем

$$\int_{[a,b]} v_n(x)\left[\int_{[a,x]} gu_n\,d\lambda_k\right]^q d\mu(x) = \sum_{i=0}^k \int_{\Delta_i} v_n(x)\left[\int_{[a,x]} gu_n\,d\lambda_k\right]^q d\mu(x)$$
$$= \sum_{i=1}^k \int_{\Delta_i} v_n\,d\mu\left(\sum_{j=1}^i g(c_j')u_n(c_j')\lambda(\{c_j'\})\right)^q = \sum_{i=1}^k w_i\left(\sum_{j=1}^i d_j\varphi_j\right)^q,$$

где

$$w_i := \int_{\Delta_i} v_n\,d\mu, \qquad \varphi_j := u_n(c_j')\lambda(\{c_j'\})^{1/p'}.$$

Кроме того,

$$\int_{[a,b]} g^p\,d\lambda_k = \sum_{i=0}^k \int_{\Delta_i} g^p\,d\lambda_k = \sum_{i=1}^k d_i^p.$$

Таким образом, неравенство (1.4.8) влечет

$$\left(\sum_{i=1}^k w_i\left(\sum_{j=1}^i d_j\varphi_j\right)^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^k d_i^p\right)^{1/p}$$

для всех наборов $\{d_j\}_{j=1}^k$ неотрицательных чисел. Применяя теорему 1.9, получим оценку

$$C^r \gtrsim \sum_{i=1}^k\left(\sup_{1\leqslant m\leqslant i}\varphi_m\right)^r\left[\left(\sum_{j=i}^k w_j\right)^{r/q} - \left(\sum_{j=i+1}^k w_j\right)^{r/q}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sup_{1 \leqslant m \leqslant i} \varphi_m \Big)^r \left[\Big(\int_{[c_i, b]} v_n \, d\mu \Big)^{r/q} - \Big(\int_{[c_{i+1}, b]} v_n \, d\mu \Big)^{r/q} \right]$$
$$\gtrsim \sum_{i=1}^{k} \Big(\sup_{1 \leqslant m \leqslant i} u_n(c'_m) \lambda(\{c'_m\})^{1/p'} \Big)^r \int_{\Delta_i} v_n \, d\mu \Big(\int_{[c_i, b]} v_n \, d\mu \Big)^{r/p}.$$

Откуда по теореме о монотонной сходимости

$$C^r \gtrsim \sum_{i=1}^{k} \Big(\sup_{1 \leqslant m \leqslant i} u(c'_m) \lambda(\{c'_m\})^{1/p'} \Big)^r \int_{\Delta_i} v \, d\mu \Big(\int_{[c_i, b]} v \, d\mu \Big)^{r/p}$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{\Delta_i} v(x) \Big(\int_{[x, b]} v \, d\mu \Big)^{r/p} H_k(x)^r \, d\mu(x) = \int_{[a, b]} v(x) \Big(\int_{[x, b]} v \, d\mu \Big)^{r/p} H_k(x)^r \, d\mu(x),$$

где

$$H_k(x) := \sup_{m\colon 1 \leqslant m \leqslant k,\, c_m \in [a, x]} u(c_m) \lambda(\{c_m\})^{1/p'}, \qquad x \in [a, b].$$

Так как для любого фиксированного $x \in [a, b]$ последовательность $\{H_k(x)\}_k$, возрастая, сходится к $H(x)$ при $k \to \infty$, то теорема о монотонной сходимости влечет оценку $C \gtrsim \mathcal{G}$.

Теорема 1.13. *Пусть $0 < p < 1$, $0 < q < +\infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; μ, λ и ν суть σ-конечные меры на $[a, b]$, λ, ν определены на одной σ-алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$, $\lambda = \lambda_c + \lambda_d$, где λ_c – непрерывная, а λ_d – дискретная составляющие λ; $u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; (ν_a, ν_s) – разложение Лебега меры ν относительно λ, т.е.*

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \qquad \nu_a \lesssim \lambda, \qquad \nu_s \perp \lambda,$$

и $d\nu_a/d\lambda$ – производная Радона–Никодима ν_a относительно λ; k определена на $[a, b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$-измерима и удовлетворяет условию: существуют константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ такие, что $k(x, y_1) \geqslant \alpha_1 k(x, y_2)$ для $y_1 < y_2$, $k(x_1, y) \leqslant \alpha_2 k(x_2, y)$ для $x_1 < x_2$. Положим

$$\omega(x) := u(x) \Big(w(x) \frac{d\nu_a}{d\lambda}(x) \Big)^{-1/p}, \qquad x \in [a, b],$$
$$E = \Big\{ x \in [a, b] \;\Big|\; v(x) \int_{[a, x]} k(x, y) \omega(y) \, d\lambda_c(y) \neq 0 \Big\},$$
$$\mathcal{H}(x) := \sup_{t \in [a, x], \lambda_d(\{t\}) \neq 0} \omega(t) \lambda_d(\{t\})^{1/p'}, \qquad x \in [a, b].$$

Если $p \leqslant q$, то для выполнения неравенства

$$\Big(\int_{[a, b]} v(x) \Big(\int_{[a, x]} k(x, y) f(y) u(y) \, d\lambda(y) \Big)^q d\mu(x) \Big)^{1/q}$$
$$\leqslant C \Big(\int_{[a, b]} f^p \, w d\nu \Big)^{1/p} \qquad \text{для всех} \quad f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \tag{1.4.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu(E) = 0$ и $\mathbb{F} < +\infty$, где

$$\mathbb{F} := \sup_{x \in [a, b]} \Big(\int_{[x, b]} v(t) k(t, x)^q \, d\mu(t) \Big)^{1/q} \mathcal{H}(x).$$

Если $q<p$ *и* $k\equiv 1$, *то для выполнения неравенства* (1.4.9) *необходимо и достаточно, чтобы* $\mu(E)=0$ *и* $\mathbb{F}<+\infty$, *где*

$$\mathbb{F}:=\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[x,b]} v\,d\mu\right)^{r/p}\mathcal{H}(x)^r\,d\mu(x)\right)^{1/r}.$$

Более того, при $p\leqslant q$ *наименьшая константа* C *в неравенстве* (1.4.9) *удовлетворяет оценке* $\alpha_1\mathbb{F}\leqslant C\leqslant\mathbb{F}$, *а при* $q<p$ *выполнено* $C\approx\mathbb{F}$.

Доказательство. В силу лемм 1.5, 1.6 неравенство (1.4.9) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\omega(y)\,d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C\left(\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right)^{1/p}\qquad\text{для всех}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

Полученное неравенство влечет справедливость пары неравенств (с такой же константой C)

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\omega(y)\,d\lambda_c(y)\right]^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda_c\right]^{1/p}\qquad\text{для всех}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$
$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\omega(y)\,d\lambda_d(y)\right]^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda_d\right]^{1/p}\qquad\text{для всех}\quad f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

Применяя теорему 1.10 к первому неравенству и теоремы 1.11, 1.12 ко второму, докажем необходимость требуемого утверждения.

Пусть теперь $\mu(E)=0$ и $\mathbb{F}<+\infty$. Фиксируем произвольную функцию $f\in\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Так как $\mu(E)=0$, то

$$\left(\int_{[a,b]} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\omega(y)\ d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$=\left(\int_{[a,b]\setminus E} v(x)\left(\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\omega(y)\ d\lambda(y)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q}$$
$$=\left[\int_{[a,b]} v(x)\left[\int_{[a,x]} k(x,y)f(y)\omega(y)\ d\lambda_d(y)\right]^q d\mu(x)\right]^{1/q}$$
$$\lesssim\mathbb{F}\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda_d\right]^{1/p}\leqslant\mathbb{F}\left[\int_{[a,b]} f^p\,d\lambda\right]^{1/p},$$

что доказывает достаточность требуемого утверждения.

1.5. Дальнейшие результаты

Этот пункт содержит дополнительные результаты, часть из которых вытекает из утверждений пунктов 1.2, 1.3. Некоторые из них будут использоваться далее для исследования свойств операторов интегрирования с двумя переменными пределами. Здесь и далее $\mathfrak{M}$ обозначает σ-алгебру измеримых по Лебегу подмножеств $[a,b]$.

1.5.1. Весовое неравенство. В этой части рассматривается неравенство (1.3.1), где $a=0$, λ есть мера Лебега, $\lambda=\nu=\mu$, $w=1$ и $0<q<1\leqslant p<\infty$, т.е. весовое неравенство типа Харди с ядром Ойнарова вида

$$\left(\int_0^b [(Kf)(x)]^q v(x)\,dx\right)^{1/q} \leqslant C_K\left(\int_0^b f(x)^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad f\in\{\mathfrak{M}\}^+, \tag{1.5.1}$$

где интегральный оператор K определен равенством

$$(Kf)(x) := \int_0^x k(x,y)u(y)f(y)\,dy, \qquad x\in[0,b].$$

Пусть $\alpha := D^q+1$ и $\int_t^b v<\infty$ для всех $t\in(0,b)$. Определим функцию $\zeta:[0,b)\to[0,b)$ формулой (здесь полагаем $\sup\varnothing=0$):

$$\zeta(x) := \sup\left\{y\in(0,b): \int_y^b v\geqslant\alpha\int_x^b v\right\}, \qquad x\in[0,b).$$

Для $m\in\mathbb{N}$ через ζ_m обозначим композицию m функций ζ. Заметим, что ζ_m – неубывающая на $[0,b)$ функция.

Теорема 1.14. *Пусть $1\leqslant p<\infty$, $0<q<\infty$, $1/r=1/q-1/p$; $u,v\in\{\mathfrak{M}\}^+$, $\int_t^b u<\infty$ для всех $t\in(0,b)$; ядро k – борелевская функция на $[0,b]^2$, удовлетворяющая условию Ойнарова* (1.3.2). *Для выполнения неравенства* (1.5.1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\left(\int_0^b v(x)k(x,\zeta_2(x))^q\left(\int_0^{\zeta_2(x)} fu\right)^q dx\right)^{1/q} \leqslant C_\zeta\left(\int_0^b f^p\right)^{1/p}, \qquad f\in\{\mathfrak{M}\}^+, \tag{1.5.2}$$

и $B<\infty$, где

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t\in(0,b)}\left(\int_t^b v\right)^{1/q}\|\chi_{(a,t)}(\,\cdot\,)k(t,\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}, & p\leqslant q,\\ \left(\int_0^b v(x)\left[\int_x^b v\right]^{r/p}\|\chi_{(\zeta_3(x),x)}(\,\cdot\,)k(x,\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r\,dx\right)^{1/r}, & q<p. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

Более того, $C_K\approx B+C_\zeta$.

Доказательство. Для $n\in\mathbb{Z}$ положим (здесь $\sup\varnothing=0$)

$$a_n := \sup\left\{y\in(0,b): \int_y^b v\geqslant\alpha^{-n}\right\}.$$

Заметим, что $\zeta(a_{n+1})=a_n$.

Достаточность. Запишем

$$\begin{aligned}\|(Kf)v^{1/q}\|_q^q &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{a_n}^{a_{n+1}} v(x)\left(\int_0^x k(x,y)f(y)u(y)\,dy\right)^q dx\\ &\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{-n}\left(\int_0^{a_{n+1}} k(a_{n+1},y)f(y)u(y)\,dy\right)^q \lesssim I_1+I_2,\end{aligned}$$

где

$$I_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{-n}\left(\int_{a_{n-1}}^{a_{n+1}} k(a_{n+1},y)f(y)u(y)\,dy\right)^q,$$
$$I_2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{-n}\left(\int_{0}^{a_{n-1}} k(a_{n+1},y)f(y)u(y)\,dy\right)^q.$$

Применяя интегральное неравенство Гёльдера, получим

$$I_1 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{-n}\|\chi_{(a_{n-1},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^q\left(\int_{a_{n-1}}^{a_{n+1}} f^p\right)^{q/p}.$$

Далее, применяя в случае $p\leqslant q$ неравенство Йенсена, находим

$$I_1 \lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\int_{a_{n+1}}^{b} v\right]\|\chi_{(0,a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^q\left(\int_{a_{n-1}}^{a_{n+1}} f^p\right)^{q/p} \lesssim B^q\|f\|_p^q.$$

Если $q<p$, то неравенство Гёльдера для сумм влечет оценку

$$I_1 \lesssim \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha^{-n}]^{r/q}\|\chi_{(a_{n-1},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r\right]^{q/r}\|f\|_p^q,$$

причем сумма в правой части оценивается сверху следующим образом

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha^{-n}]^{r/q}\|\chi_{(a_{n-1},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r\\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}} v\right)\left[\int_{a_{n+2}}^{b} v\right]^{r/p}\|\chi_{(\zeta_3(a_{n+2}),a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r\\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}} v(x)\left[\int_{x}^{b} v\right]^{r/p}\|\chi_{(\zeta_3(a_{n+2}),x)}(\,\cdot\,)k(x,\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r\,dx\right)\leqslant B^r.
\end{aligned}$$

Для оценки выражения I_2 запишем (используем равенство $k(a_{i-2},y)=0$ при $y\in(a_{i-2},a_{i-1})$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_{n-1}} k(a_{n+1},y)f(y)u(y)\,dy &= \sum_{i\leqslant n}\int_{a_{i-2}}^{a_{i-1}} k(a_{n+1},y)f(y)u(y)\,dy\\
&= \sum_{i\leqslant n}\int_{a_{i-2}}^{a_{i-1}}\left[\sum_{j=i-2}^{n}\left(D^{(n+1)-(j+1)}k(a_{j+1},y)-D^{(n+1)-j}k(a_j,y)\right)\right]f(y)u(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Так как по условию (1.3.2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=i-2}^{n}(D^{(n+1)-(j+1)}k(a_{j+1},y)-D^{(n+1)-j}k(a_j,y))\\
&\qquad\leqslant D^{(n+1)-(i-1)}k(a_{i-1},y)+D^{(n+1)-(i-1)}k(a_i,a_{i-1})+\sum_{j=i}^{n}D^{(n+1)-j}k(a_{j+1},a_j),
\end{aligned}$$

то

$$\int_0^{a_{n-1}} k(a_{n+1},y)f(y)u(y)\,dy\leqslant S_1+S_2,$$

где

$$S_1 := \sum_{i\leqslant n} D^{(n+1)-(i-1)}\left[\int_{a_{i-2}}^{a_{i-1}} k(a_{i-1},y)f(y)u(y)\,dy + k(a_i,a_{i-1})\int_{a_{i-2}}^{a_{i-1}} fu\right]$$

$$\lesssim \sum_{i\leqslant n} D^{(n+1)-(i-1)}\int_{a_{i-2}}^{a_i} k(a_i,y)f(y)u(y)\,dy =: J_{1,n};$$

$$S_2 := \sum_{i\leqslant n}\int_{a_{i-2}}^{a_{i-1}}\left[\sum_{j=i}^{n} D^{(n+1)-j}k(a_{j+1},a_j)\right]f(y)u(y)\,dy.$$

Переставляя суммы, оценим S_2:

$$S_2 = \sum_{j\leqslant n}\left[D^{(n+1)-j}k(a_{j+1},a_j)\sum_{i\leqslant j}\int_{a_{i-2}}^{a_{i-1}} fu\right] = \sum_{j\leqslant n} D^{(n+1)-j}k(a_{j+1},a_j)\int_0^{a_{j-1}} fu =: J_{2,n}.$$

Используя известное соотношение

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\left(\sum_{i\geqslant n}\mu_i\right)^s \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n\mu_n^s, \tag{1.5.4}$$

верное для произвольных $\lambda\in(0,1), \mu_i\geqslant 0, s>0$, находим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{-n}J_{1,n}^q = D^{2q}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{D^q}{\alpha}\right]^n\left(\sum_{i\leqslant n}D^{-i}\int_{a_{i-2}}^{a_i}k(a_i,y)f(y)u(y)\,dy\right)^q$$

$$\approx \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{D^q}{\alpha}\right]^n\left(D^{-n}\int_{a_{n-2}}^{a_n}k(a_n,y)f(y)u(y)\,dy\right)^q$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{-n}\left(\int_{a_{n-2}}^{a_n}k(a_n,y)f(y)u(y)\,dy\right)^q \lesssim B^q\|f\|_p^q,$$

где последнее неравенство доказывается так же, как получается оценка сверху выражения I_1. Аналогично,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{-n}J_{2,n}^q = D^q\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{D^q}{\alpha}\right]^n\left(\sum_{j\leqslant n}D^{-j}k(a_{j+1},a_j)\int_0^{a_{j-1}}fu\right)^q$$

$$\approx \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{D^q}{\alpha}\right]^n\left[D^{-n}k(a_{n+1},a_n)\int_0^{a_{n-1}}fu\right]^q = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{-n}k(a_{n+1},a_n)^q\left(\int_0^{a_{n-1}}fu\right)^q,$$

откуда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha^{-n}J_{2,n}^q \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}}v\right]k(a_{n+1},a_n)^q\left(\int_0^{a_{n-1}}fu\right)^q$$

$$\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}}v(x)k(x,\zeta_2(x))^q\left(\int_0^{\zeta_2(x)}fu\right)^q dx\right]$$

$$\leqslant \int_0^b v(x)k(x,\zeta_2(x))^q\left(\int_0^{\zeta_2(x)}fu\right)^q dx \leqslant C_\zeta^q\|f\|_p^q.$$

Необходимость. Пусть $p\leqslant q$. Фиксируем произвольные $\theta\in(0,1)$ и $t\in(0,b)$. Существует неотрицательная функция $f\in L^p([0,t])$ такая, что $\|f\|_p=1$ и

$$\int_0^t k(t,y)f(y)u(y)\,dy \geqslant \theta\|\chi_{(0,t)}(\,\cdot\,)k(t,\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}.$$

Подставляя f в неравенство (1.5.1), получим оценку

$$C_K \geqslant \frac{\theta}{D} \sup_{t\in(0,b)} \left(\int_t^b v\right)^{1/q} \|\chi_{(0,t)} k(t,\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}.$$

Следовательно, $C_K \gtrsim B$ при $p \leqslant q$.

Пусть теперь $q < p$. Имеем

$$\begin{aligned} B^r &\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} v\right) \left[\int_{a_n}^b v\right]^{r/p} \|\chi_{(\zeta_3(a_n),a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r \\ &\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\alpha^{-n}]^{r/q} \|\chi_{(a_{n-3},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r =: \mathscr{B}^r. \end{aligned}$$

Фиксируем произвольное $\theta \in (0,1)$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует $f_n \in \{\mathfrak{M}\}^+$ такая, что $\operatorname{supp} f_n \subset [a_{n-3}, a_{n+1}]$, $\|f_n\|_p = 1$ и

$$\int_{a_{n-3}}^{a_{n+1}} k(a_{n+1}, y)u(y)f_n(y)\,dy \geqslant \theta \|\chi_{(a_{n-3},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}.$$

Положим

$$g_n := (\alpha^{-n})^{r/(pq)} \|\chi_{(a_{n-3},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^{r/p} f_n, \qquad g := \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \chi_{(a,b)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{a_m}^{a_{m+1}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x)\right)^p dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{a_m}^{a_{m+1}} \left(\sum_{n=m}^{m+3} g_n(x)\right)^p dx \\ &\lesssim \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{a_{m-3}}^{a_{m+1}} g_m(x)^p\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\alpha^{-m})^{r/q} \|\chi_{(a_{m-3},a_{m+1})}(\,\cdot\,)k(a_{m+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r = \mathscr{B}^r \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^b (Kg)^q v &\gtrsim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_{a_{n+1}}^{a_{n+2}} v\right] \left(\int_{a_{n-3}}^{a_{n+1}} k(a_{n+1}, y)u(y)g_n(y)\,dy\right)^q \\ &\geqslant \theta \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\alpha^{-n}]^{r/q} \|\chi_{(a_{n-3},a_{n+1})}(\,\cdot\,)k(a_{n+1},\,\cdot\,)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r = \mathscr{B}^r. \end{aligned}$$

Из неравенства (1.5.1) вытекает $C_K \mathscr{B}^{r/p} \gtrsim \theta^{1/q} \mathscr{B}^{r/q}$, откуда следует $C_K \gtrsim B$.

Кроме того,

$$\int_0^b v(x)\left(\int_0^x k(x,y)f(y)u(y)\,dy\right)^q dx \gtrsim \int_0^b v(x)k(x,\zeta_2(x))^q \left(\int_0^{\zeta_2(x)} fu\right)^q dx,$$

и неравенство (1.5.2) выполнено.

Используя дискретное неравенство Харди, нетрудно получить критерий выполнения неравенства Харди с переменным верхним пределом (1.5.2) в дискретной форме в терминах последовательности $\{a_n\}$. Если наложить дополнительное условие на вес v, потребовав $v > 0$ почти всюду на $(0, b)$, то можно получить следующий критерий выполнения неравенства (1.5.1) в интегральной форме.

Следствие 1.2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q < p < \infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; $u, v \in \{\mathfrak{M}\}^+$, $v > 0$ *п.в. на* $(0,b)$, $\int_t^b v < \infty$ *для всех* $t \in (0,b)$; *ядро* k *– борелевская функция на* $[0,b]^2$, *удовлетворяющая условию Ойнарова* (1.3.2). *Для выполнения неравенства* (1.5.1) *необходимо и достаточно, чтобы* $B + B_0 < \infty$, *где*

$$B_0 := \left(\int_0^b v(x) k(x, \zeta_2(x))^q \|\chi_{(0,\zeta_2(x))} u\|_{p'}^r \left(\int_x^b v(s) k(s, \zeta_2(s))^q \, ds \right)^{r/p} dx \right)^{1/r},$$

и B *определено равенством* (1.5.3). *Более того,* $C_K \approx B + B_0$.

Доказательство. Пусть $a' := \sup\{t \in [0,b) : \zeta_2(t) = 0\}$. Так как $v > 0$ п.в. на $(0,b)$, то ζ_2 непрерывная строго возрастающая на $[a', b)$ функция. На каждом $[a', c] \subset (a', b)$ функция ζ_2 может быть приближена поточечно снизу последовательностью $\{\varphi_n\}$ строго возрастающих абсолютно непрерывных на $[a', c]$ функций, у которых обратные также абсолютно непрерывны. Например, можно взять (см. [16])

$$x \mapsto \varphi_n(x) := n \int_{x-1/n}^x \zeta_2(t) \chi_{[a',b)}(t) \, dt, \qquad x \in [a', c].$$

Делая замену переменной $x = \varphi_n^{-1}(s)$, применяя критерий (см. [17; 1.3], [18], [19]) выполнения неравенства Харди и делая обратную замену, получим двустороннюю оценку на точную константу C_n неравенства

$$\left(\int_{a'}^c v(x) k(x, \zeta_2(x))^q \left(\int_0^{\varphi_n(x)} fu \right)^q dx \right)^{1/q} \leqslant C_n \left(\int_0^b f^p \right)^{1/p}, \qquad f \in \{\mathfrak{M}\}^+. \tag{1.5.5}$$

А именно, $C_n \approx B_n$, где

$$B_n := \left(\int_{a'}^c v(x) k(x, \zeta_2(x))^q \|\chi_{(0,\varphi_n(x))} u\|_{p'}^r \left(\int_x^c v(s) k(s, \zeta_2(s))^q \, ds \right)^{r/p} dx \right)^{1/r}.$$

Предположим, что выполнено неравенство (1.5.1). Тогда по теореме 1.14 $B \lesssim C_K$, и неравенство (1.5.2) верно с константой $C_\zeta \lesssim C_K$. Так как $\varphi_n(x) \leqslant \zeta_2(x)$, то для произвольного $c \in [a', b)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено (1.5.5), причем имеет место оценка $C_n \leqslant C_\zeta$. Откуда, $B_n \lesssim C_K$, и в пределе при $c \to b$ и $n \to \infty$ получим $B_0 \lesssim C_K$ по теореме о монотонной сходимости.

Обратно, пусть $B_0 < \infty$. Так как $B_n \leqslant B_0$, то (1.5.5) верно для любых $c \in [a', b)$ и $n \in \mathbb{N}$, при этом $C_n \lesssim B_0$. В пределе при $c \to b$ и $n \to \infty$ по теореме о монотонной сходимости получим (1.5.2) с константой $C_\zeta \lesssim B_0$.

Аналогично получаются результаты для оператора

$$(\widetilde{K} f)(x) = \int_y^b k(x,y) f(x) u(x) \, dx, \qquad y \in (0,b).$$

Пусть $\int_0^t v < \infty$ для всех $t \in (0,b)$, $\alpha = D^q + 1$. Положим (здесь $\inf \varnothing = b$)

$$\sigma(x) := \inf\left\{ t \in (0,b) : \int_0^t v \geqslant \alpha \int_0^x v \right\}, \qquad x \in [0,b).$$

Для $m \in \mathbb{N}$, через σ_m обозначим композицию m функций σ.

Теорема 1.15. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q < \infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; $u, v \in \{\mathfrak{M}\}^+$, $\int_0^t v < \infty$ *для всех* $t \in (0,b)$; *ядро* k *– борелевская функция на* $[0,b]^2$, *удовлетворяющая условию Ойнарова* (1.3.2). *Для выполнения неравенства*

$$\left(\int_0^b (\widetilde{K} f)^q v \right)^{1/q} \leqslant C_{\widetilde{K}} \left(\int_0^b f^p \right)^{1/p}, \qquad f \in \{\mathfrak{M}\}^+, \tag{1.5.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\int_0^b v(y)k(\sigma_2(y),y)^q\left(\int_{\sigma_2(y)}^b fu\right)^q dy\right)^{1/q} \leqslant C_\sigma\left(\int_0^b f^p\right)^{1/p}, \qquad f\in\{\mathfrak{M}\}^+, \tag{1.5.7}$$

и $\widetilde{B}<\infty$, *где*

$$\widetilde{B}:=\begin{cases}\sup\limits_{t\in(0,b)}\left(\int_0^t v\right)^{1/q}\|\chi_{(t,b)}(\,\cdot\,)k(\,\cdot\,,t)u(\,\cdot\,)\|_{p'}, & p\leqslant q,\\ \left(\int_0^b v(y)\left[\int_0^y v\right]^{r/p}\|\chi_{(y,\sigma_3(y))}(\,\cdot\,)k(\,\cdot\,,y)u(\,\cdot\,)\|_{p'}^r\,dy\right)^{1/r}, & q<p.\end{cases} \tag{1.5.8}$$

Более того, $C_{\widetilde{K}}\approx\widetilde{B}+C_\sigma$.

Следствие 1.3. *Пусть* $1\leqslant p<\infty$, $0<q<p<\infty$, $1/r=1/q-1/p$; $u,v\in\{\mathfrak{M}\}^+$, $v>0$ *п.в. на* $(0,b)$, $\int_0^t v<\infty$ *для всех* $t\in(0,b)$; *ядро* k *– борелевская функция на* $[0,b]^2$, *удовлетворяющая условию Ойнарова* (1.3.2). *Для выполнения неравенства* (1.5.6) *необходимо и достаточно, чтобы* $\widetilde{B}+\widetilde{B}_0<\infty$, *где*

$$\widetilde{B}_0:=\left(\int_0^b v(y)k(\sigma_2(y),y)^q\|\chi_{(\sigma_2(y),b)}u\|_{p'}^r\left(\int_0^y v(s)k(\sigma_2(s),s)^q\,ds\right)^{r/p}dy\right)^{1/r},$$

и $\widetilde{B}$ *определено равенством* (1.5.8). *Более того,* $C_{\widetilde{K}}\approx\widetilde{B}+\widetilde{B}_0$.

1.5.2. Операторы Харди с одним переменным пределом интегрирования. Пусть $p>1$ и $q>0$. Предположим, что $v,w\in\{\mathfrak{M}\}^+$ – весовые функции на $(0,\infty)$ и $(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})$-измеримая функция $k_{\mathfrak{D}}$ (ядро) неотрицательна на $(0,\infty)^2$. Положим

$$\mathfrak{D}f(x)=w(x)\int_0^\infty k_{\mathfrak{D}}(x,y)f(y)v(y)\,dy, \qquad 0\leqslant c\leqslant x\leqslant d\leqslant\infty. \tag{1.5.9}$$

Мы говорим, что $f\in L^\rho(0,\infty)$ для $0<\rho\leqslant\infty$, если $\|f\|_\rho<\infty$, где

$$\|f\|_\rho:=\begin{cases}\left(\int_0^\infty |f(t)|^\rho\,dt\right)^{1/\rho}, & \rho<\infty,\\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)}|f(t)|, & \rho=\infty.\end{cases}$$

Пусть оператор $\mathfrak{D}$ действует из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$ при заданных выше значениях параметров p и q. Оператор $\mathfrak{D}$ ограничен для $0<p<1$, $0<q\leqslant\infty$ только в тривиальном случае (см. теорему 1.10 или [20; теорема 2]). При крайних значениях параметров суммирования $p=1,\infty$ или $q=1,\infty$ точное значение нормы $\|\mathfrak{D}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ находится по общей теореме [21; гл. XI, § 1.5, теорема 4].

Теорема 1.16. *Предположим, что* $v,w\in\{\mathfrak{M}\}^+$ *– весовые функции на* $(0,\infty)$ *и ядро* $k_{\mathfrak{D}}(x,y)$ *–* $(\mathfrak{M}\times\mathfrak{M})$*–измеримая функция на* $(0,\infty)^2$. *Для нормы* $\|\mathfrak{D}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ *верны следующие равенства:*

$$\|\mathfrak{D}\|_{L^1(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}=\operatorname*{ess\,sup}_{t>0}v(t)\|k_{\mathfrak{D}}(\,\cdot\,,t)w(\,\cdot\,)\|_q, \qquad 1\leqslant q\leqslant\infty,$$
$$\|\mathfrak{D}\|_{L^p(0,\infty)\to L^\infty(0,\infty)}=\operatorname*{ess\,sup}_{t>0}w(t)\|k_{\mathfrak{D}}(t,\,\cdot\,)v(\,\cdot\,)\|_{p'}, \qquad 1<p\leqslant\infty.$$

Кроме того, если $k_{\mathfrak{D}}(x,y) \geqslant 0$ *на* $(0,\infty)^2$, *то*

$$\|\mathfrak{D}\|_{L^\infty(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty w^q(x)\left(\int_0^\infty k_{\mathfrak{D}}(x,y)v(y)\,dy\right)^q dx\right)^{1/q}, \qquad 1 \leqslant q < \infty;$$

$$\|\mathfrak{D}\|_{L^p(0,\infty)\to L^1(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty v^{p'}(y)\left(\int_0^\infty k_{\mathfrak{D}}(x,y)w(x)\,dx\right)^{p'} dy\right)^{1/p'}, \qquad 1 < p < \infty.$$

Начнем с характеристик ограниченности оператора $\mathfrak{D}$ в случаях $k_{\mathfrak{D}}(x,y) = \chi_{[c,x]}(y)$ и $k_{\mathfrak{D}}(x,y) = \chi_{[x,d]}(y)$, напрямую вытекающих из теорем 1.1, 1.2 и 1.3 соответственно.

Следствие 1.4. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < q < \infty$. *Положим*

$$Hf(x) = w(x)\int_c^x f(y)v(y)\,dy, \qquad 0 \leqslant c \leqslant x \leqslant d \leqslant \infty, \tag{1.5.10}$$

$$H^*f(x) = w(x)\int_x^d f(y)v(y)\,dy, \qquad 0 \leqslant c \leqslant x \leqslant d \leqslant \infty. \tag{1.5.11}$$

(a) *Если* $p \leqslant q$, *то* $\|H\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx A_M$ *и* $\|H^*\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx A_M^*$, *где*

$$A_M := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_t^d w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_c^t v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}, \tag{1.5.12}$$

$$A_M^* := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_c^t w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_t^d v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}. \tag{1.5.13}$$

(b) *Для* $q < p$ *верны оценки* $\|H\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx B_{MR}$ *и* $\|H^*\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx B_{MR}^*$, *где*

$$B_{MR} := \left(\int_c^d \left[\int_t^d w^q(x)\,dx\right]^{r/p}\left[\int_c^t v^{p'}(y)\,dy\right]^{r/p'} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}, \tag{1.5.14}$$

$$B_{MR}^* := \left(\int_c^d \left[\int_c^t w^q(x)\,dx\right]^{r/p}\left[\int_t^d v^{p'}(y)\,dy\right]^{r/p'} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}. \tag{1.5.15}$$

Характеристики ограниченности (1.5.12)–(1.5.15) принято называть функционалами Мукенхоупта (A_M, A_M^*) и Мазьи–Розина (B_{MR}, B_{MR}^*). Альтернативные им величины (1.5.16)–(1.5.19), также эквивалентные нормам $\|H\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)}$ и $\|H^*\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)}$, носят соответственно названия функционалов Томаселли (A_T, A_T^*) [5] и Перссона–Степанова (B_{PS}, B_{PS}^*) [22].

Утверждение 1. *Пусть операторы* H *и* H^* *заданы равенствами* (1.5.10) *и* (1.5.11) *соответственно.*

(a) *Если* $1 < p \leqslant q < \infty$, *то* $\|H\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx A_T$ *и* $\|H^*\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx A_T^*$, *где*

$$A_T := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_c^t \left[\int_c^x v^{p'}(y)\,dy\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_c^t v^{p'}(y)\,dy\right)^{-1/p}, \tag{1.5.16}$$

$$A_T^* := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_t^d \left[\int_x^d v^{p'}(y)\,dy\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_t^d v^{p'}(y)\,dy\right)^{-1/p}. \tag{1.5.17}$$

(b) *Если* $0 < q < p < \infty$ *и* $p > 1$, *то* $\|H\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx B_{PS}$ *и* $\|H^*\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx B_{PS}^*$, *где*

$$B_{PS} := \left(\int_c^d \left[\int_c^t \left\{\int_c^x v^{p'}(y)\,dy\right\}^q w^q(x)\,dx\right]^{r/p}\left[\int_c^t v^{p'}(y)\,dy\right]^{q-r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}, \tag{1.5.18}$$

$$B_{MR}^* := \left(\int_c^d \left[\int_t^d \left\{\int_x^d v^{p'}(y)\,dy\right\}^q w^q(x)\,dx\right]^{r/p}\left[\int_t^d v^{p'}(y)\,dy\right]^{q-r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}. \tag{1.5.19}$$

Пусть $k_{\mathfrak{D}}(x,y)=\chi_{[c,x]}(y)k(x,y)$, где измеримая по совокупности переменных функция $k(x,y)$ на $(0,\infty)^2$ удовлетворяет для $c\leqslant y\leqslant z\leqslant x\leqslant d$ условию Ойнарова (1.3.2). Для формулировки результатов об ограниченности операторов (1.5.9) с ядрами Ойнарова вида $k_{\mathfrak{D}}(x,y)=\chi_{[c,x]}(y)k(x,y)$, где $k\in$ (1.3.2), нам потребуются следующие величины и функционалы:

$$V(x):=\int_c^x v^{p'},\qquad V_1(x):=\int_c^x k(x,y)v^{p'}(y)\,dy,\qquad V_p(x):=\int_c^x k^{p'}(x,y)v^{p'}(y)\,dy,$$
$$W(y):=\int_y^d w^q,\qquad W_1(y):=\int_y^d k(x,y)w^q(x)\,dx,\qquad W_q(y):=\int_y^d k^q(x,y)w^q(x)\,dx,$$

и

$$\mathbf{A}:=\max(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1),$$
$$\mathbf{A}_0:=\sup_{t\in(c,d)}\mathbf{A}_0(t)=\sup_{t\in(c,d)}[W_q(t)]^{1/q}[V(t)]^{1/p'},$$
$$\mathbf{A}_1:=\sup_{t\in(c,d)}\mathbf{A}_1(t)=\sup_{t\in(c,d)}[W(t)]^{1/q}[V_p(t)]^{1/p'};$$

$$\mathbb{A}:=\max(\mathbb{A}_0,\mathbb{A}_1),$$
$$\mathbb{A}_0:=\sup_{t\in(c,d)}\mathbb{A}_0(t)=\sup_{t\in(c,d)}[V(t)]^{-1/p}\left(\int_c^t V_1^q(x)w^q(x)\,dx\right)^{1/q},$$
$$\mathbb{A}_1:=\sup_{t\in(c,d)}\mathbb{A}_1(t)=\sup_{t\in(c,d)}[V_p(t)]^{-1/p}\left(\int_c^t V_p^q(x)w^q(x)\,dx\right)^{1/q},$$

$$\mathscr{A}:=\max(\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_1),$$
$$\mathscr{A}_0:=\sup_{t\in(c,d)}\mathscr{A}_0(t)=\sup_{t\in(c,d)}[W_q(t)]^{-1/q'}\left(\int_t^d W_q^{p'}(y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'},$$
$$\mathscr{A}_1:=\sup_{t\in(c,d)}\mathscr{A}_1(t)=\sup_{t\in(c,d)}[W(t)]^{-1/q'}\left(\int_t^d W_1^{p'}(y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'},$$

$$\mathbf{B}:=\max(\mathbf{B}_0,\mathbf{B}_1),$$
$$\mathbf{B}_0:=\left(\int_c^d [W_q(t)]^{r/q}\,d[V(t)]^{r/p'}\right)^{1/r},\qquad \mathbf{B}_1:=\left(\int_c^d [V_p(t)]^{r/p'}\,d(-[W(t)]^{r/q})\right)^{1/r},$$

$$\mathbb{B}:=\max(\mathbb{B}_0,\mathbb{B}_1),$$
$$\mathbb{B}_0:=\left(\int_c^d [V(t)]^{-r/p}\,d\left(\int_c^t V_1^q(x)w^q(x)\,dx\right)^{r/q}\right)^{1/r},$$
$$\mathbb{B}_1:=\left(\int_c^d [V_p(t)]^{-r/p}\,d\left(\int_c^t V_p^q(x)w^q(x)\,dx\right)^{r/q}\right)^{1/r};$$

$$\mathscr{B}:=\max(\mathscr{B}_0,\mathscr{B}_1),$$
$$\mathscr{B}_0:=\left(\int_c^d [W_q(t)]^{-r/q'}\,d\left(-\left(\int_t^d W_q^{p'}(y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/p'}\right)\right)^{1/r},$$
$$\mathscr{B}_1:=\left(\int_c^d [W(t)]^{-r/q'}\,d\left(-\left(\int_t^d W_1^{p'}(y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/p'}\right)\right)^{1/r}.$$

Используя эти функционалы, мы даем по три альтернативных критерия ограниченности для (1.5.9) с ядрами $k_{\mathfrak{D}}(x,y) = \chi_{[c,x]}(y)k(x,y)$, где $k \in$ (1.3.2), в каждом из двух случаев соотношения параметров суммирования: $1 < p \leqslant q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$.

Теорема 1.17. *Для оператора*

$$Kf(x) = w(x) \int_c^x k(x,y) f(y) v(y)\, dy, \qquad 0 \leqslant c \leqslant x \leqslant d \leqslant \infty, \tag{1.5.20}$$

с ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим условию Ойнарова (1.3.2), *имеют место следующие соотношения.*

Если $1 < p \leqslant q < \infty$, то

$$\|K\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx \mathbf{A} \approx \mathbb{A} \approx \mathscr{A}. \tag{1.5.21}$$

Если $1 < q < p < \infty$, то

$$\|K\|_{L^p(c,d)\to L^q(c,d)} \approx \mathbf{B} \approx \mathbb{B} \approx \mathscr{B}. \tag{1.5.22}$$

Коэффициенты эквивалентности в (1.5.21) *и* (1.5.22) *зависят только от p, q и константы D в условии* (1.3.2).

Замечание 1.18. (1) Характеризация (1.5.21) и (1.5.22) условиями $\mathbf{A} < \infty$ и $\mathbf{B} < \infty$ соответственно напрямую вытекает из результатов теорем 1.6 и 1.7.

(2) При $1 < p \leqslant q < \infty$ характеризация (1.5.20) условием $\mathscr{A} < \infty$ была получена в [11], условием $\mathbf{A} < \infty$ – в [10], условиями $\mathbf{A} < \infty$ или $\mathbb{A} < \infty$ – в [12]. При этом на ядро $k(x,y)$ накладывались некоторые дополнительные требования типа монотонности или непрерывности, которые в дальнейшем были устранены [16]. На самом деле, без ограничения общности ядро $k(x,y)$ можно считать невозрастающим по x и неубывающим по y, иначе его можно заменить эквивалентным ядром

$$k_0(x,y) := \sup_{y\leqslant z\leqslant x} \ \sup_{z\leqslant t\leqslant x} k(t,z)$$

с этими свойствами (см. [16]), для которого выполняется соотношение $k(x,y) \leqslant k_0(x,y) \leqslant D^2 k(x,y)$.

(3) В противоположном случае $1 < q < p < \infty$ эквивалентность (1.5.22) с константой $\mathbf{B}$ была получена в [10] и [12]. Остальные критерии, условие (1.5.21) с константой $\mathscr{A}$ и (1.5.22) с константами $\mathbb{B}$ и $\mathscr{B}$ найдены в [23].

(4) Критерии компактности оператора (1.5.20) с ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим условию (1.3.2) найдены в [12].

(5) Компоненты каждой из констант типа A и B в теореме 1.17, вообще говоря, независимы (см., например, [24], [12; 4], [23]) и между ними имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{(i)} & \mathbf{A}_0 < \infty & \Longleftrightarrow & \mathscr{A}_0 < \infty, & \text{(ii)} & \mathbf{A}_1 < \infty & \Longleftrightarrow & \mathbb{A}_1 < \infty,\\
\text{(iii)} & \mathbf{A}_0 < \infty & \Longrightarrow & \mathbb{A}_0 < \infty, & \text{(iv)} & \mathbf{A}_1 < \infty & \Longrightarrow & \mathscr{A}_1 < \infty,\\
\text{(v)} & \mathscr{A}_0 < \infty & \Longrightarrow & \mathbb{A}_0 < \infty, & \text{(vi)} & \mathbb{A}_1 < \infty & \Longrightarrow & \mathscr{A}_1 < \infty
\end{array}$$

и аналогично для остальных констант

$$\begin{array}{llllllll}
\text{(i)} & \mathbf{B}_0 < \infty & \Longleftrightarrow & \mathscr{B}_0 < \infty, & \text{(ii)} & \mathbf{B}_1 < \infty & \Longleftrightarrow & \mathbb{B}_1 < \infty,\\
\text{(iii)} & \mathbf{B}_0 < \infty & \Longrightarrow & \mathbb{B}_0 < \infty, & \text{(iv)} & \mathbf{B}_1 < \infty & \Longrightarrow & \mathscr{B}_1 < \infty,\\
\text{(v)} & \mathscr{B}_0 < \infty & \Longrightarrow & \mathbb{B}_0 < \infty, & \text{(vi)} & \mathbb{B}_1 < \infty & \Longrightarrow & \mathscr{B}_1 < \infty
\end{array}$$

причем обратные зависимости в (iii)–(vi) в каждой группе, вообще говоря, могут нарушаться.

Пусть $\phi\colon [c,d]\to[0,\infty)$ – строго возрастающая дифференцируемая функция. Приведем выборочные характеристики для некоторого обобщения оператора (1.5.20).

Положим $k_{\mathfrak{D}}(x,y)=\chi_{[\phi(c),\phi(x)]}(y)k(x,y)$, при этом измеримая по совокупности переменных функция $k(x,y)$ на $(0,\infty)^2$ удовлетворяет для $c\leqslant\phi^{-1}(y)\leqslant z\leqslant x\leqslant d$ условию

$$D^{-1}k(x,y)\leqslant k(x,\phi(z))+k(z,y)\leqslant Dk(x,y) \tag{1.5.23}$$

с некоторой константой $D\geqslant 1$, не зависящей от переменных x,y и z.

Следствие 1.5. *Пусть* $K_\phi\colon L^p(\phi(c),\phi(d))\to L^q(c,d)$, *где*

$$K_\phi f(x)=w(x)\int_{\phi(c)}^{\phi(x)}k(x,y)f(y)v(y)\,dy,\qquad 0\leqslant c\leqslant x\leqslant d\leqslant\infty, \tag{1.5.24}$$

и ядро $k(x,y)$ *удовлетворяет для* $c\leqslant\phi^{-1}(y)\leqslant z\leqslant x\leqslant d$ *условию типа Ойнарова* (1.5.23).

(a) *Если* $1<p\leqslant q<\infty$, *то*

$$\|K_\phi\|_{L^p(\phi(c),\phi(d))\to L^q(c,d)}\approx \mathbf{A}_{\phi,0}+\mathbf{A}_{\phi,1}, \tag{1.5.25}$$

где

$$\mathbf{A}_{\phi,0}:=\sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_t^d k^q(x,\phi(t))w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\phi(c)}^{\phi(t)}v^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$\mathbf{A}_{\phi,1}:=\sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_t^d w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\phi(c)}^{\phi(t)}k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}.$$

(b) *Для* $1<q<p<\infty$ *верна оценка*

$$\|K_\phi\|_{L^p(\phi(c),\phi(d))\to L^q(c,d)}\approx \mathbf{B}_{\phi,0}+\mathbf{B}_{\phi,1}, \tag{1.5.26}$$

где

$$\mathbf{B}_{\phi,0}:=\left(\int_{\phi(c)}^{\phi(d)}\left[\int_{\phi^{-1}(t)}^d k^q(x,t)w^q(x)\,dx\right]^{r/q}\left[\int_{\phi(c)}^t v^{p'}\right]^{r/q'}v^{p'}(t)\,dt\right)^{1/r},$$

$$\mathbf{B}_{\phi,1}:=\left(\int_c^d\left[\int_t^d w^q\right]^{r/p}\left[\int_{\phi(c)}^{\phi(t)}k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right]^{r/p'}w^q(t)\,dt\right)^{1/r}.$$

Кроме этого,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\phi,0}\approx\mathscr{B}_{\phi,0}:=\Bigg(\int_{\phi(c)}^{\phi(d)}&\left[\int_t^{\phi(d)}\left\{\int_{\phi^{-1}(y)}^d k^q(x,y)w^q(x)\,dx\right\}^{p'}v^{p'}(y)\,dy\right]^{r/q'}\\&\times\left[\int_{\phi^{-1}(t)}^d k^q(x,t)w^q(x)\,dx\right]^{p'-r/q'}v^{p'}(t)\,dt\Bigg)^{1/r},\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\phi,1}\approx\mathbb{B}_{\phi,1}:=\Bigg(\int_c^d&\left[\int_c^t\left\{\int_{\phi(c)}^{\phi(x)}k^{p'}(x,y)v^{p'}(y)\,dy\right\}^q w^q(x)\,dx\right]^{r/p}\\&\times\left[\int_{\phi(c)}^{\phi(t)}k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right]^{q-r/p}w^q(t)\,dt\Bigg)^{1/r}.\end{aligned} \tag{1.5.28}$$

Доказательство. Подстановкой $\tau=\phi^{-1}(y)$ мы переходим от

$$\left(\int_c^d [K_\phi f(x)]^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f^p(y)\,dy\right)^{1/p}$$

к эквивалентному неравенству

$$\left(\int_c^d \left[\int_c^x \widetilde{k}(x,\tau)\widetilde{f}(\tau)\widetilde{v}(\tau)\,d\tau\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_c^d \widetilde{f}^p(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}$$

с

$$\widetilde{f}(\tau)=f(\phi(\tau))[\phi'(\tau)]^{1/p}, \qquad \widetilde{v}(\tau)=v(\phi(\tau))[\phi'(\tau)]^{1/p'}$$

и ядром Ойнарова $\widetilde{k}(x,\tau)=k(x,\phi(\tau))$ (см. (1.3.2)). Утверждения (1.5.25) и (1.5.26) следуют из теоремы 1.17 (см. также теоремы 1.6 и 1.7). Для (1.5.27) и (1.5.28) см. следствие 1.18 (5) или [23; теорема 2.2].

Аналогичные результаты имеют место и для оператора с переменным нижним пределом.

Утверждение 2. *Пусть оператор* $K_\phi^*: L^p(\phi(c),\phi(d))\to L^q(c,d)$ *задан формулой*

$$K_\phi^* f(x)=w(x)\int_{\phi(x)}^{\phi(d)} k(x,y)f(y)v(y)\,dy, \qquad 0\leqslant c\leqslant x\leqslant d\leqslant\infty, \tag{1.5.29}$$

с ядром $k(x,y)\geqslant 0$, *удовлетворяющим для всех* $c\leqslant x\leqslant z\leqslant\phi^{-1}(y)\leqslant d$ *условию* (1.5.23) *с не зависящей от переменных* x,y *и* z *константой* $D\geqslant 1$.

(a) *Если* $1<p\leqslant q<\infty$, *то*

$$\|K_\phi^*\|_{L^p(\phi(c),\phi(d))\to L^q(c,d)} \approx \mathbf{A}_{\phi,0}^*+\mathbf{A}_{\phi,1}^*,$$

где

$$\mathbf{A}_{\phi,0}^* := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_c^t k^q(x,\phi(t))w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\phi(t)}^{\phi(d)} v^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$\mathbf{A}_{\phi,1}^* := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_c^t w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\phi(t)}^{\phi(d)} k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}.$$

(b) *Для* $1<q<p<\infty$ *выполнено*

$$\|K_\phi^*\|_{L^p(\phi(c),\phi(d))\to L^q(c,d)} \approx \mathbf{B}_{\phi,0}^*+\mathbf{B}_{\phi,1}^*$$

с

$$\mathbf{B}_{\phi,0}^* := \left(\int_{\phi(c)}^{\phi(d)}\left[\int_c^{\phi^{-1}(t)} k^q(x,t)w^q(x)\,dx\right]^{r/q}\left[\int_t^{\phi(d)} v^{p'}\right]^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt\right)^{1/r},$$

$$\mathbf{B}_{\phi,1}^* := \left(\int_c^d\left[\int_c^t w^q\right]^{r/p}\left[\int_{\phi(t)}^{\phi(d)} k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right]^{r/p'} w^q(t)\,dt\right)^{1/r},$$

при этом,

$$\mathbf{B}_{\phi,0}^* \approx \mathscr{B}_{\phi,0}^* := \left(\int_{\phi(c)}^{\phi(d)}\left[\int_{\phi(c)}^t\left\{\int_c^{\phi^{-1}(y)} k^q(x,y)w^q(x)\,dx\right\}^{p'} v^{p'}(y)\,dy\right]^{r/q'}\right.$$
$$\left.\times\left[\int_c^{\phi^{-1}(t)} k^q(x,t)w^q(x)\,dx\right]^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt\right)^{1/r}, \tag{1.5.30}$$

$$\mathbf{B}^*_{\phi,1} \approx \mathbb{B}^*_{\phi,1} := \left(\int_c^d \left[\int_t^d \left\{\int_{\phi(x)}^{\phi(d)} k^{p'}(x,y)v^{p'}(y)\,dy\right\}^q w^q(x)\,dx\right]^{r/p} \right.$$
$$\left. \times \left[\int_{\phi(t)}^{\phi(d)} k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right]^{q-r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}. \tag{1.5.31}$$

Доказательство. Результат может быть получен аналогично следствию 1.5.

В леммах 1.10–1.13 установлены оценки на нормы некоторых других операторов типа Харди, обобщающих преобразования (1.5.10) и (1.5.11). Начнем со случая $1 < p \leqslant q < \infty$.

Лемма 1.10. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$ *и* $0 \leqslant c < d \leqslant \infty$, $0 \leqslant a < \infty$. *Предположим, что функция* $b(x)$ *дифференцируема, строго возрастает на* $[c,d]$ *и такая, что* $a \leqslant b(x) < \infty$ *для* $x \in [c,d)$. *Пусть*

$$Sf(x) := w(x)\int_a^{b(x)} f(y)v(y)\,dy. \tag{1.5.32}$$

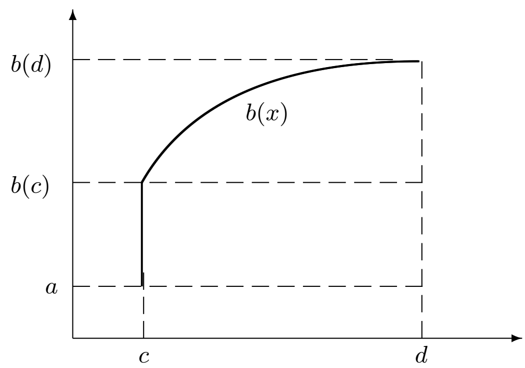

Рис. 1.5.1

Тогда для нормы $\|S\| := \|S\|_{L^p(a,b(d))\to L^q(c,d)}$ *оператора* S *верны следующие двусторонние оценки с константами эквивалентности, зависящими только от* p *и* q:

$$\|S\| \approx A_b := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_t^d w^q\right)^{1/q}\left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{1/p'}, \tag{1.5.33}$$

$$\|S\| \approx \mathbb{A}_b := \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_c^t \left[\int_a^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{-1/p}. \tag{1.5.34}$$

Доказательство. Необходимость (или, что то же самое, нижние оценки на $\|S\|$) в (1.5.33) и (1.5.34) вытекают подстановкой тестовой функции $f_t(y) = [v(y)]^{p'-1}\,\chi_{[a,b(t)]}(y)$ в неравенство

$$\left(\int_c^d \Big[Sf(x)\Big]^q dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_a^{b(d)} f^p(y)\,dy\right)^{1/p}. \tag{1.5.35}$$

Для доказательства достаточности (или верхней оценки на $\|S\|$) в (1.5.33) заметим, что наилучшая константа $C \geqslant 0$ в (1.5.35) совпадает с нормой оператора $\|S\|$ и эквивалентна сумме двух наилучших констант $C \approx C_1 + C_2$ из неравенств

$$\int_a^{b(c)} f(y)v(y)\,dy\left(\int_c^d w^q\right)^{1/q} \leqslant C_1\left(\int_a^{b(d)} f^p(y)\,dy\right)^{1/p},$$

$$\left(\int_c^d\left[\int_{b(c)}^{b(x)} f(y)v(y)\,dy\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \leqslant C_2\left(\int_a^{b(d)} f^p(y)\,dy\right)^{1/p},$$

которые в свою очередь эквивалентны следующим двум неравенствам:

$$\int_a^{b(c)} f(y)v(y)\,dy\left(\int_c^d w^q\right)^{1/q} \leqslant C_3\left(\int_a^{b(c)} f^p(y)\,dy\right)^{1/p}, \tag{1.5.36}$$

$$\left(\int_c^d\left[\int_{b(c)}^{b(x)} f(y)v(y)\,dy\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \leqslant C_4\left(\int_{b(c)}^{b(d)} f^p(y)\,dy\right)^{1/p}. \tag{1.5.37}$$

Таким образом, $C \approx C_3 + C_4$. Из (1.5.36) получаем, применяя обратное неравенство Гёльдера,

$$C_3 = \left(\int_c^d w^q\right)^{1/q}\left(\int_a^{b(c)} v^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant A_b;$$

для (1.5.37) имеем в силу следствия 1.5 (a) с $k(x,y) = 1$ (см. также следствие 1.4 (a)), что

$$C_4 \approx \sup_{c\leqslant t\leqslant d}\left(\int_t^d w^q\right)^{1/q}\left(\int_{b(c)}^{b(t)} v^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant A_b.$$

Таким образом, доказательство достаточности в (1.5.33) завершено.

Для извлечения верхних оценок на $\|S\|$ в (1.5.34) запишем двойственное к (1.5.35) неравенство

$$I^{1/p'} := \left(\int_a^{b(d)}\left[\int_{b_0^{-1}(y)}^d gw\right]^{p'} dV(y)\right)^{1/p'} \leqslant C\left(\int_c^d g^{q'}\right)^{1/q'},$$

где $V(y) := \int_a^y v^{p'}$ и $b_0^{-1}(y) = \max\{c, b^{-1}(y)\}$. Находим, интегрируя по частям и применяя неравенство Гёльдера с показателями p и p',

$$\begin{aligned}
I &\leqslant p'\int_{b(c)}^{b(d)}\left(\int_{b^{-1}(y)}^d gw\right)^{p'-1} V(y)g(b^{-1}(y))w(b^{-1}(y))\,db^{-1}(y)\\
&\leqslant p'\left(\int_{b(c)}^{b(d)}[g(b^{-1}(y))]^{q'}\,db^{-1}(y)\right)^{1/q'}\left(\int_{b(c)}^{b(d)}\left[\int_{b^{-1}(y)}^d gw\right]^{q/(p-1)} V^q(y)w^q(b^{-1}(y))\,db^{-1}(y)\right)^{1/q}\\
&=: p'\left(\int_c^d g^{q'}\right)^{1/q'} I_1^{1/q}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{b(c)}^{b(d)}\left\{\int_y^{b(d)} d\left[-\left(\int_{b^{-1}(t)}^d gw\right)^{q/(p-1)}\right]\right\} V^q(y)w^q(b^{-1}(y))\,db^{-1}(y)\\
&= \int_{b(c)}^{b(d)}\left(\int_{b(c)}^t V^q(y)w^q(b^{-1}(y))\,db^{-1}(y)\right)d\left[-\left(\int_{b^{-1}(t)}^d gw\right)^{q/(p-1)}\right]\\
&= \int_{b(c)}^{b(d)}\left(\int_c^{b^{-1}(t)}[V(b(x))]^q w^q(x)\,dx\right)d\left[-\left(\int_{b^{-1}(t)}^d gw\right)^{q/(p-1)}\right]\\
&= \int_c^d\left(\int_c^s [V(b(x))]^q w^q(x)\,dx\right)d\left[-\left(\int_s^d gw\right)^{q/(p-1)}\right]\\
&\leqslant \mathbb{A}_b^q\int_c^d\left(\int_a^{b(s)} v^{p'}\right)^{q/p} d\left[-\left(\int_s^d gw\right)^{q/(p-1)}\right].
\end{aligned}$$

В силу неравенства Минковского,

$$\int_c^d \left(\int_a^{b(s)} v^{p'}\right)^{q/p} d\left[-\left(\int_s^d gw\right)^{q/(p-1)}\right]$$
$$\lesssim \left(\int_c^d gw\right)^{q/(p-1)} \left(\int_a^{b(c)} v^{p'}\right)^{q/p} + \left(\int_{b(c)}^{b(d)} \left\{\int_{b^{-1}(y)}^d d\left[-\left(\int_s^d gw\right)^{q/(p-1)}\right]\right\}^{p/q} dV(y)\right)^{q/p}$$
$$= \left(\int_c^d gw\right)^{q/(p-1)} \left(\int_a^{b(c)} v^{p'}\right)^{q/p} + \left(\int_{b(c)}^{b(d)} \left[\int_{b^{-1}(y)}^d gw\right]^{p'} dV(y)\right)^{q/p} \approx I^{q/p}.$$

Поэтому

$$I \lesssim \mathbb{A}_b \left(\int_c^d g^{q'}\right)^{1/q'} I^{1/p},$$

что завершает доказательство верхней оценки $C \lesssim \mathbb{A}_b$.

Аналогичные рассуждения приводят к оценкам нормы интегрального оператора с переменным нижним пределом.

Лемма 1.11. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$ *и* $0 \leqslant c < d \leqslant \infty$, $0 < b \leqslant \infty$. *Предположим, что функция* $a(x)$ *дифференцируема, строго возрастает и такова, что* $0 < a(x) \leqslant b$, $x \in (c, d]$. *Пусть*

$$Tf(x) := w(x) \int_{a(x)}^b f(y)v(y)\,dy. \tag{1.5.38}$$

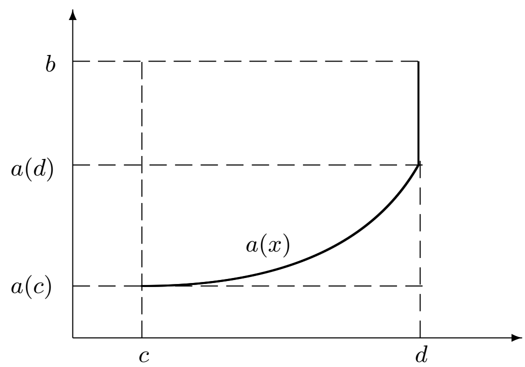

Рис. 1.5.2

Тогда

$$\|T\| := \|T\|_{L^p(a(c),b)\to L^q(c,d)} \approx A_a := \sup_{c\leqslant t\leqslant d} \left(\int_c^t w^q\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^b v^{p'}\right)^{1/p'}, \tag{1.5.39}$$

$$\|T\| \approx \mathbb{A}_a := \sup_{c\leqslant t\leqslant d} \left(\int_t^d \left[\int_{a(x)}^b v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^b v^{p'}\right)^{-1/p}. \tag{1.5.40}$$

Следующие две леммы касаются случая $0 < q < p < \infty$, $p > 1$.

Лемма 1.12. *Пусь* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$, $1/r = 1/q - 1/p$ *и* $0 \leqslant c < d \leqslant \infty$, $0 \leqslant a < \infty$. *Предположим, что* $b(x)$ *– строго возрастающая дифференцируемая функция на* $[c, d]$ *такая,* *что* $a \leqslant b(x) < \infty$, $x \in [c,d)$. *Пусть оператор* S *из* $L^p(a, b(d))$ *в* $L^q(c,d)$ *задан формулой* (1.5.32). *Тогда*

$$\|S\|^r \approx B_b^r := \int_c^d \left(\int_t^d w^q\right)^{r/p} \left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt \tag{1.5.41}$$

$$\approx \left(\int_c^d w^q\right)^{r/q} \left(\int_a^{b(c)} v^{p'}\right)^{r/p'} + \int_c^d \left(\int_t^d w^q\right)^{r/q} d\left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} =: \widehat{B}_b^r \tag{1.5.42}$$

и

$$\|S\| \approx \mathbb{B}_b^r := \int_c^d \left(\int_c^t \left[\int_a^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p} \left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt \tag{1.5.43}$$

$$\approx \left(\int_c^d \left[\int_a^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_a^{b(d)} v^{p'}\right)^{-r/p}$$
$$+ \int_c^d \left(\int_c^t \left[\int_a^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/q} d\left[-\left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{-r/p}\right]. \tag{1.5.44}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством утверждения леммы 1.10 мы сначала применяем обратное неравенство Гёльдера

$$E_0\colon = \left(\int_c^d w^q\right)^{1/q} \left(\int_a^{b(c)} v^{p'}\right)^{1/p'} = C_3,$$

затем следствие 1.4 (b) (с заменой $\phi^{-1}(y) = \tau$),

$$E_1\colon = \left(\int_c^d \left[\int_t^d w^q\right]^{r/p} \left[\int_{b(c)}^{b(t)} v^{p'}\right]^{r/p'} w^q(t)\,dt\right)^{1/r} \approx C_4,$$

получая тем самым, что

$$C^r \approx (E_0 + E_1)^r \approx \int_c^d \left(\int_t^d w^q\right)^{r/p} \left(\left[\int_a^{b(c)} v^{p'}\right]^{r/p'} + \left[\int_{b(c)}^{b(t)} v^{p'}\right]^{r/p'}\right) w^q(t)\,dt \approx B_b^r.$$

Для доказательства эквивалентности функционала (1.5.41) сумме в (1.5.42) мы сначала полагаем, что $B_b^r < \infty$. Тогда

$$\int_t^d w^q < \infty \qquad \text{для любого} \quad t \in (c,d] \tag{1.5.45}$$

и, следовательно,

$$0 = \lim_{s\to d} \int_s^d \left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} d\left[-\left(\int_t^d w^q\right)^{r/q}\right]$$
$$\geqslant \lim_{s\to d} \left(\int_a^{b(s)} v^{p'}\right)^{r/p'} \int_s^d d\left[-\left(\int_t^d w^q\right)^{r/q}\right] = \lim_{s\to d} \left(\int_a^{b(s)} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_s^d w^q\right)^{r/q}. \tag{1.5.46}$$

Отсюда получаем, интегрируя по частям, что $\infty > B_b^r \approx \widehat{B}_b^r$. Для доказательства обратного утверждения предположим, что $\widehat{B}_b^r =: I_1 + I_2 < \infty$. Тогда

$$\infty > I_1 + I_2 = I_1 + \left(\int_t^d w^q\right)^{r/q} \left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} \Bigg|_c^d + \int_c^d \left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} d\left[-\left(\int_t^d w^q\right)^{r/q}\right]$$

$$\geqslant \int_c^d \left(\int_a^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} d\left[-\left(\int_t^d w^q\right)^{r/q}\right] \approx B_b^r.$$

Поэтому $B_b^r < \infty$. Отсюда $B_b^r \approx \widehat{B}_b^r$ в силу (1.5.45)–(1.5.46).

Далее, обозначим $V_a(t)\colon = \int_a^{b(t)} v^{p'}$ и положим

$$\mathbb{B}_{PS}^r\colon = \int_c^d \left(\int_c^t [V_a(x)]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/q} d(-[V_a(t)]^{-r/p}).$$

В работе [22; теорема 3] было установлено, что

$$\mathbb{B}_b \approx \mathbb{B}_{PS}, \qquad \text{если} \quad V_a(d) = \infty, \tag{1.5.47}$$

и

$$\mathbb{B}_b^r \approx \left(\int_c^d V_a^q w^q\right)^{r/q} [V_a(d)]^{-r/p} + \mathbb{B}_{PS}^r, \qquad \text{если} \quad 0 < V_a(d) < \infty. \tag{1.5.48}$$

Пусть $\mathbb{B}_b < \infty$. Чтобы показать верхнюю оценку $C \lesssim \mathbb{B}_b$, предположим сначала, что $V_a(d) = \infty$. В силу неравенства Гёльдера с показателями r/q и p/q

$$\begin{aligned}
J &:= \int_c^d \left(\int_a^{b(x)} fv\right)^q w^q(x)\,dx \\
&= q\int_c^d \left(\int_a^{b(x)} fv\right)^q w^q(x) V_a^q(x) \left(\int_x^d [V_a(s)]^{-q-1} dV_a(s)\right) dx =: J_0 \\
&= q\int_c^d [V_a(s)]^{-q-1} \left[\int_c^s \left(\int_a^{b(x)} fv\right)^q w^q(x) V_a^q(x)\,dx\right] dV_a(s) \\
&\leqslant \int_c^d \left\{\left(\int_a^{b(s)} fv\right)^q V_a^{-q}(s)\right\}\left\{\left(\int_c^s w^q V_a^q\right) V_a^{-1}(s)\right\} dV_a(s) \\
&\lesssim \left(\int_c^d \left[\int_a^{b(s)} fv\right]^p V_a^{-p}(s)\,dV_a(s)\right)^{q/p} \mathbb{B}_{PS}^q.
\end{aligned}$$

Используя оценку (1.5.33) из леммы 1.10, находим

$$J \lesssim \mathbb{B}_{PS}^q \left(\int_a^{b(d)} f^p\right)^{q/p}.$$

Отсюда неравенство $C \lesssim \mathbb{B}_b$ следует на основе (1.5.47). Если $V_a(d) < \infty$, то

$$V_a^{-q}(x) = V_a^{-q}(d) + q\int_x^d [V_a(s)]^{-q-1}\,dV_a(s),$$

и поэтому

$$J = J_0 + V_a^{-q}(d) \int_c^d \left(\int_a^{b(x)} fv\right)^q w^q(x) V_a^q(x)\,dx =: J_0 + J_1.$$

Из (1.5.48) и полученных выше оценок на J_0 следует, что

$$J_0 \lesssim \mathbb{B}_b^q \left(\int_a^{b(d)} f^p\right)^{q/p}.$$

Чтобы оценить J_1, выберем $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ таким образом, чтобы $\int_{b(c)}^{b(x_k)} fv = 2^k$, $k \leqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned}
[V_a(d)]^d J_1 &= \int_c^d \left[\int_a^{b(c)} fv + \int_{b(c)}^{b(x)} fv\right]^q w^q(x)[V_a(x)]^q\,dx \\
&\approx \left(\int_a^{b(c)} fv\right)^q \int_c^d w^q(x)[V_a(x)]^q\,dx + \sum_{k\leqslant N}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(\int_{b(c)}^{b(x)} fv\right)^q w^q(x)[V_a(x)]^q\,dx \\
&=: J_{1,1} + J_{1,2}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера с p и p' и принимая во внимание (1.5.48), находим, что

$$J_{1,1} \leqslant \left(\int_a^{b(c)} f^p\right)^{q/p} [V_a(c)]^{q/p'} \int_c^d w^q V_a^q \leqslant [V_a(d)]^q\, \mathbb{B}_b^q \left(\int_a^{b(c)} f^p\right)^{q/p}.$$

Для $J_{1,2}$ имеем из неравенства Гёльдера с показателями r/q и p/q:

$$\begin{aligned}
J_{1,2} &\leqslant \sum_{k\leqslant N} 2^{q(k+1)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w^q(x)[V_a(x)]^q\,dx \\
&\leqslant 4^q \sum_{k\leqslant N}\left(\int_{b(x_{k-1})}^{b(x_k)} fv\right)^q \int_{x_k}^{x_{k+1}} w^q(x)[V_a(x)]^q\,dx \\
&\leqslant 4^q \sum_{k\leqslant N}\left(\int_{b(x_{k-1})}^{b(x_k)} f^p\right)^{q/p}\left(\int_{b(x_{k-1})}^{b(x_k)} v^{p'}\right)^{q/p'} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w^q V_a^q \\
&\lesssim \left(\int_{b(c)}^{b(d)} f^p\right)^{q/p}\left(\sum_{k\leqslant N}[V_a(x_k)]^{r/p'}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} w^q V_a^q\right)^{r/q}\right)^{q/r} \\
&\lesssim \left(\int_{b(c)}^{b(d)} f^p\right)^{q/p}\left(\int_c^d\left(\int_c^t w^q V_a^q\right)^{r/p} w^q(t)[V_a(t)]^{q+r/p'}\,dt\right)^{q/r} \\
&\lesssim [V_a(d)]^q\, \mathbb{B}_b^q \left(\int_{b(c)}^{b(d)} f^p\right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Объединяя все полученные выше оценки, получаем, что $C \lesssim \mathbb{B}_b$.

Для доказательства обратного неравенства предположим, что $C < \infty$, и заметим, что $C \gtrsim B_b$ в силу (1.5.41). Сначала покажем, что $B_b \gtrsim \mathbb{B}_b$ при условии $V_a(d) = \infty$. Для этого запишем

$$\int_c^t w^q(x)[V_a(x)]^q\,dx = \int_c^t V_a^q(x)\,d\left(-\int_x^t w^q\right) = V_a^q(c)\int_c^t w^q + q\int_c^t\left(\int_x^t w^q\right)[V_a(x)]^{q-1}\,dV_a(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_b^r \approx \mathbb{B}_{PS}^r \approx [V_a(c)]^r &\int_c^d\left(\int_c^t w^q\right)^{r/q} d\left(-[V_a(t)]^{-r/p}\right) \\
&+ \int_c^d\left\{\int_c^t\left(\int_x^t w^q\right)[V_a(x)]^{q-1}\,dV_a(x)\right\}^{r/q} d(-[V_a(t)]^{-r/p}) \\
=:{}& I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$I_1 \leqslant [V_a(c)]^{r/p'}\left(\int_c^d w^q\right)^{r/q} \lesssim B_b^r.$$

Чтобы оценить I_2, запишем

$$
\begin{aligned}
&\int_c^t \Big(\int_x^t w^q\Big)[V_a(x)]^{q-1}\,dV_a(x)\\
&\quad= \int_c^t \Big[\Big(\int_x^t w^q\Big)[V_a(x)]^{q-1+q/(2p)}\Big][V_a(x)]^{-q/(2p)}\,dV_a(x)\\
&\quad\leqslant \Big\{\int_c^t \Big(\int_x^t w^q\Big)^{r/q}[V_a(x)]^{(q-1+q/(2p))(r/q)}\,dV_a(x)\Big\}^{q/r}\Big(\int_c^t [V_a(x)]^{-1/2}\,dV_a(x)\Big)^{q/p}\\
&\quad\lesssim [V_a(t)]^{q/(2p)}\Big(\int_c^t \Big(\int_x^t w^q\Big)^{r/q}[V_a(x)]^{(q-1+q/(2p))(r/q)}\,dV_a(x)\Big)^{q/r}.
\end{aligned}
$$

Отсюда находим, принимая во внимание эквивалентность между (1.5.41) и (1.5.42),

$$
\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \int_c^d \Big\{\int_c^t \Big(\int_x^t w^q\Big)^{r/q}[V_a(x)]^{(q-1+q/(2p))(r/q)}\,dV_a(x)\Big\}[V_a(t)]^{r/(2p)}\,d(-[V_a(t)]^{-r/p})\\
&\lesssim \int_c^d \Big(\int_x^d w^q\Big)^{r/q}[V_a(x)]^{(q-1+q/(2p))(r/q)}\Big(\int_x^d [V_a(t)]^{r/(2p)-r/p-1}dV_a(t)\Big)\,dV_a(x)\\
&\lesssim \int_c^d \Big(\int_x^d w^q\Big)^{r/q}[V_a(x)]^{r/q'}\,dV_a(x)\lesssim B_b^r.
\end{aligned}
$$

Отсюда, так как $V_a(d)=\infty$, получаем $\mathbb{B}_b^r \approx I_1+I_2 \lesssim B_b^r \lesssim C^r$. В случае $0<V_a(d)<\infty$ подстановка $f(x)=v^{p'-1}(x)$ в неравенство (1.5.35) дает

$$
C \geqslant [V_a(d)]^{-1/p}\Big(\int_c^d w^q(x)V_a^q(x)\,dx\Big)^{1/q}.
$$

Комбинируя это с (1.5.48) и с оценкой на $\mathbb{B}_{PS}$, мы приходим к неравенству $\mathbb{B}_b \lesssim C$, завершая доказательство (1.5.43). Эквивалентность выражений (1.5.43) и (1.5.44) следует из (1.5.48).

Лемма 1.13. *Пусть $0<q<p<\infty$, $p>1$, $1/r=1/q-1/p$ и $0\leqslant c<d\leqslant\infty$, $0<b\leqslant\infty$. Предположим, что $a(x)$ дифференцируема, строго возрастает и $0<a(x)\leqslant b$ для $x\in(c,d]$. Пусть оператор T вида (1.5.38) действует из $L^p(a(c),b)$ в $L^q(c,d)$. Тогда*

$$
\|T\|^r \approx B_a := \int_c^d \Big(\int_c^t w^q\Big)^{r/p}\Big(\int_{a(t)}^b v^{p'}\Big)^{r/p'} w^q(t)\,dt \tag{1.5.49}
$$

$$
\approx \Big(\int_c^d w^q\Big)^{r/q}\Big(\int_{a(d)}^b v^{p'}\Big)^{r/p'} + \int_c^d \Big(\int_c^t w^q\Big)^{r/q} d\Big[-\Big(\int_{a(t)}^b v^{p'}\Big)^{r/p'}\Big] \tag{1.5.50}
$$

и

$$
\|T\|^r \approx \mathbb{B}_a := \int_c^d \Big(\int_t^d \Big[\int_{a(x)}^b v^{p'}\Big]^q w^q(x)\,dx\Big)^{r/p}\Big(\int_{a(t)}^b v^{p'}\Big)^{q-r/p} w^q(t)\,dt, \tag{1.5.51}
$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \Big(\int_c^d \Big[\int_{a(x)}^b v^{p'}\Big]^q w^q(x)\,dx\Big)^{r/q}\Big(\int_{a(c)}^b v^{p'}\Big)^{-r/p}\\
&\quad+\int_c^d \Big(\int_t^d \Big[\int_{a(x)}^b v^{p'}\Big]^q w^q(x)\,dx\Big)^{r/q} d\Big(\int_{a(t)}^b v^{p'}\Big)^{-r/p}.
\end{aligned} \tag{1.5.52}
$$

Глава 2. Интегральные операторы с двумя переменными пределами

2.1. Блочно-диагональный метод

Лемма 2.1. *Пусть* $U = \bigsqcup_k U_k$ *и* $V = \bigsqcup_k V_k$ *– два объединения непересекающихся измеримых множеств и* $T = \sum_k T_k$ *– линейный оператор из* $L^p(U)$ *в* $L^q(V)$*, где линейные слагаемые* $T_k\colon L^p(U_k) \to L^q(V_k)$*. Тогда*

$$\|T\|_{L^p(U)\to L^q(V)} = \sup_k \|T_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} \tag{2.1.1}$$

в случае $0 < p \leqslant q < \infty$*. Для* $0 < q < p < \infty$*, полагая* $1/r = 1/q - 1/p$*, имеем*

$$\|T\|_{L^p(U)\to L^q(V)} \approx \left(\sum_k \|T_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^{1/r}. \tag{2.1.2}$$

Доказательство. Пусть $0 < p \leqslant q < \infty$. Нижняя оценка в (2.1.1) следует из того, что $\|Tf\|_{L^q(V)} \geqslant \|T_k f\|_{L^q(V_k)}$ для всех k. Верхняя получается применением неравенства Йенсена:

$$\begin{aligned}\|Tf\|^q_{L^q(V)} = \sum_k \|T_k f\|^q_{L^q(V_k)} &\leqslant \left(\sup_k \|T_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^q \sum_k \|f\chi_k\|^q_{L^p(U_k)}\\ &\leqslant \left(\sup_k \|T_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^q \|f\|^q_{L^p(U)}.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Пусть $0 < q < p < \infty$. Верхняя оценка в (2.1.2) получается аналогично (2.1.3) применением неравенства Гёльдера. Для извлечения нижней оценки воспользуемся тем, что для любого $\lambda \in (0,1)$ найдутся функции $f_k \in L^p(U_k)$ такие, что

$$\lambda \|T_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} \|f_k\|_{L^p(U_k)} \leqslant \|T_k f_k\|_{L^p(U_k)}.$$

В силу однородности мы можем выбрать f_k таким образом, чтобы

$$\|f_k\|_{L^p(U_k)} = \|T_k\|^{r/p}_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}.$$

Если $f = \sum_k \chi_{U_k} f_k$, то в силу $r/q = r/p + 1$

$$\begin{aligned}\lambda^q \sum_k \|T_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} &= \lambda^q \sum_k (\|T_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} \|f_k\|_{L^p(U_k)})^q \leqslant \sum_k \|T_k f_k\|^q_{L^q(V_k)}\\ &= \|Tf\|^q_{L^q(V)} \leqslant \|T\|^q_{L^p(U)\to L^q(V)} \|f\|^q_{L^p(U)}\\ &= \|T\|^q_{L^p(U)\to L^q(V)} \left(\sum_k \|T_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^{q/p}.\end{aligned}$$

Отсюда нижняя оценка в (2.1.2) получается при $\lambda \to 1$.

Эта глава посвящена исследованию интегральных операторов с двумя переменными пределами интегрирования вида

$$\mathscr{K} f(x) := w(x) \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,y) f(y) v(y)\, dy, \qquad x > 0, \tag{2.1.4}$$

с локально интегрируемыми весовыми функциями v, w на $(0,\infty)$ и неотрицательным на $\mathscr{R} := \{(x,y) : x > 0,\ a(x) < y < b(x)\}$ ядром $k(x,y)$ *типа Ойнарова* (см. ниже определения 2.1 и 2.2), а граничные функции $a(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad a(x) \text{ и } b(x) \text{ дифференцируемы и строго возрастают на } (0,\infty); \\ &\text{(ii)} \quad a(0)=b(0)=0,\ a(x)<b(x) \text{ для } 0<x<\infty \text{ и } a(\infty)=b(\infty)=\infty. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Блочно-диагональное представление указанных операторов будет осуществляться с помощью специальных последовательностей.

Положим $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 1$ и определим точки ξ_k, η_k и ζ_k для всех $k \in \mathbb{Z}$ следующим образом (см. рис. 2.1.1):

$$\xi_{k+1} = a^{-1}(b(\xi_k)), \quad \xi_{k-1} = b^{-1}(a(\xi_k)), \qquad \text{т.е.} \quad a(\xi_{k+1}) = b(\xi_k), \tag{2.1.6}$$

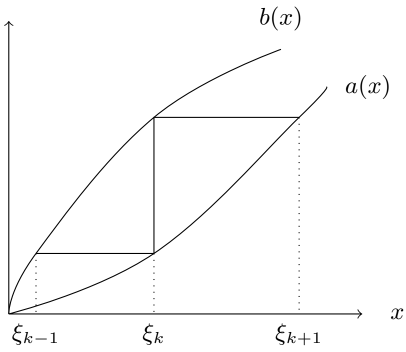

Рис. 2.1.1

в том случае, если $0 < a(x) < x$ при всех $x > 0$ (см. рис. 2.1.2),

$$\eta_{k+1} = a^{-1}(\eta_k), \qquad \eta_{k-1} = a(\eta_k), \tag{2.1.7}$$

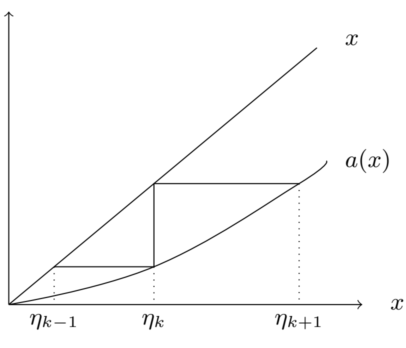

Рис. 2.1.2

аналогично, если $x < b(x)$ при всех $x > 0$ (см. рис. 2.1.3),

$$\zeta_{k+1} = b(\zeta_k), \qquad \zeta_{k-1} = b^{-1}(\zeta_k) \tag{2.1.8}$$

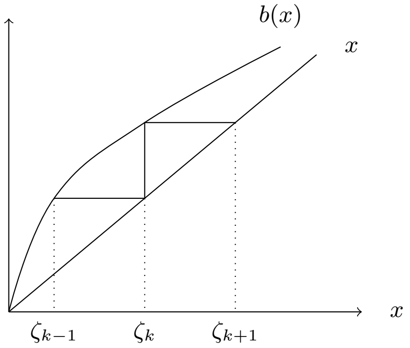

Рис. 2.1.3

Определение 2.1. Мы говорим, что $k(x,y)\geqslant 0$ удовлетворяет *условию типа Ойнарова* $\mathscr{O}_b$, если существует константа $D\geqslant 1$, не зависящая от переменных x, y, z, такая, что

$$D^{-1}k(x,y)\leqslant k(x,b(z))+k(z,y)\leqslant Dk(x,y) \tag{2.1.9}$$

для всех $b^{-1}(y)\leqslant z\leqslant x\leqslant a^{-1}(y)$.

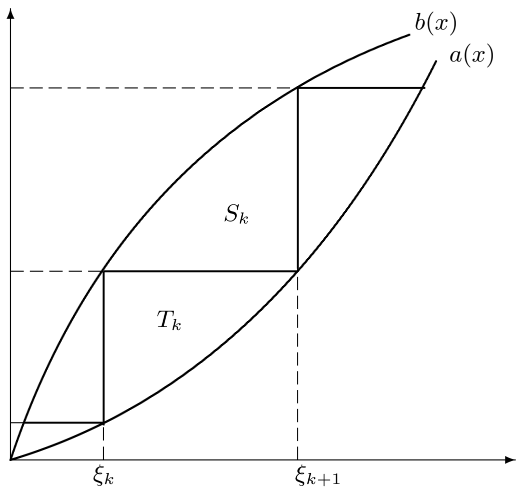

Рис. 2.1.4

Для заданных граничных функций a и b, удовлетворяющих условиям (2.1.5), положим $\xi_0=1$ и определим ξ_k для всех $k\in\mathbb{Z}$ согласно (2.1.6). Разбивая полуось $(0,\infty)$ точками $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ на промежутки $[\xi_k,\xi_{k+1}]$, мы представляем оператор $\mathscr{K}$ в виде суммы

$$\mathscr{K}=\mathscr{T}+\mathscr{S} \tag{2.1.10}$$

двух блочно-диагональных операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ таких, что

$$\mathscr{T}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}T_k,\qquad \mathscr{S}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}S_k, \tag{2.1.11}$$

где

$$T_k f(x) = w(x) \int_{a(x)}^{a(\xi_{k+1})} k(x,y) f(y) v(y)\, dy, \qquad T_k \colon L^p(a(\xi_k), a(\xi_{k+1})) \to L^q(\xi_k, \xi_{k+1}),$$

$$S_k f(x) = w(x) \int_{b(\xi_k)}^{b(x)} k(x,y) f(y) v(y)\, dy, \qquad S_k \colon L^p(b(\xi_k), b(\xi_{k+1})) \to L^q(\xi_k, \xi_{k+1}).$$

Операторы $\mathscr{K}$, $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ – это операторы с неотрицательными ядрами, поэтому

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \|\mathscr{T}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} + \|\mathscr{S}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}.$$

Так как

$$\bigsqcup_k [a(\xi_k), a(\xi_{k+1})) = \bigsqcup_k [b(\xi_k), b(\xi_{k+1})) = \bigsqcup_k [\xi_k, \xi_{k+1}) = (0,\infty),$$

то мы можем оценить $\|\mathscr{T}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ и $\|\mathscr{S}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ через нормы $\|T_k\|$ и $\|S_k\|$ (см. лемму 2.1). При этом ядра $k(x,y)$ операторов T_k и S_k удовлетворяют условию (2.1.9) для $z \leqslant x$, $x \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$, а также $a(x) \leqslant y \leqslant a(\xi_{k+1})$ и $b(\xi_k) \leqslant y \leqslant b(z)$ соответственно. Это также позволяет нам использовать некоторые результаты из пункта 1.5 для получения оценок на нормы операторов T_k и S_k, каждый из которых имеет только один переменный предел интегрирования.

Теорема 2.1. *Пусть ядро $k(x,y)$ оператора $\mathscr{K}$ вида (2.1.4) удовлетворяет условию $\mathscr{O}_b$. Если $1 < p \leqslant q < \infty$, то*

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{A} := \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1, \tag{2.1.12}$$

где $\mathscr{A}_0 := \sup_{t>0} \mathscr{A}_0(t)$, $\mathscr{A}_1 := \sup_{t>0} \mathscr{A}_1(t)$,

$$\mathscr{A}_0(t) := \sup_{b^{-1}(a(t)) \leqslant s \leqslant t} \left(\int_s^t k^q(x, b(s)) w^q(x)\, dx \right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'} \right)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_1(t) := \sup_{b^{-1}(a(t)) \leqslant s \leqslant t} \left(\int_s^t w^q \right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} k^{p'}(s,y) v^{p'}(y)\, dy \right)^{1/p'}$$

и $\mathscr{K}$ компактен, если и только если $\mathscr{A} < \infty$ и

$$\lim_{t\to 0} \mathscr{A}_i(t) = \lim_{t\to\infty} \mathscr{A}_i(t) = 0, \qquad i = 0,1.$$

В случае $1 < q < p < \infty$ выполнено

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p\to L^q} \approx \mathscr{B} := \left(\sum_k [\mathscr{B}_{k,1}^r + \mathscr{B}_{k,2}^r + \mathscr{B}_{k,3}^r + \mathscr{B}_{k,4}^r] \right)^{1/r},$$

где

$$\mathscr{B}_{k,1}^r := \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} \left(\int_{\xi_k}^{a^{-1}(t)} k^q(x, b(\xi_k)) w^q(x)\, dx \right)^{r/q} \left(\int_t^{b(\xi_k)} v^{p'} \right)^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt,$$

$$\mathscr{B}_{k,2}^r := \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_{\xi_k}^t w^q \right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{a(\xi_{k+1})} k^{p'}(\xi_k, y) v^{p'}(y)\, dy \right)^{r/p'} w^q(t)\, dt,$$

$$\mathscr{B}_{k,3}^r := \int_{a(\xi_{k+1})}^{b(\xi_{k+1})} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{\xi_{k+1}} k^q(x,t) w^q(x)\, dx \right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_{k+1})}^t v^{p'} \right)^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt,$$

$$\mathscr{B}^r_{k,4} := \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_t^{\xi_{k+1}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{b(\xi_k)}^{b(t)} k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt,$$

при этом $\xi_0 = 1$, *а остальные* ξ_k, $k \in \mathbb{Z}$, *выбраны согласно правилу* (2.1.6). *Более того, оператор* $\mathscr{K}$ *компактен тогда и только тогда, когда* $\mathscr{B} < \infty$.

Доказательство. Обозначим $\|\mathscr{K}\| := \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$, а также

$$\|T_k\| := \|T_k\|_{L^p(a(\xi_k),a(\xi_{k+1}))\to L^q(\xi_k,\xi_{k+1})}, \quad \|S_k\| := \|S_k\|_{L^p(b(\xi_k),b(\xi_{k+1}))\to L^q(\xi_k,\xi_{k+1})}.$$

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Из (2.1.10)–(2.1.11) и леммы 2.1 получаем

$$\|\mathscr{K}\| \approx \sup_k \|T_k\| + \sup_k \|S_k\|. \tag{2.1.13}$$

Норма оператора S_k характеризована в следствии 1.5 (a):

$$\|S_k\| \approx \sup_{\xi_k\leqslant s\leqslant\xi_{k+1}} \left(\int_s^{\xi_{k+1}} k^q(x,b(s))w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{b(\xi_k)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}$$
$$+ \sup_{\xi_k\leqslant s\leqslant\xi_{k+1}} \left(\int_s^{\xi_{k+1}} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{b(\xi_k)}^{b(s)} k^{p'}(s,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}.$$

Для ядра оператора T_k в силу (2.1.9) с учетом $z = \xi_k$, $x \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ и $a(x) \leqslant y \leqslant a(\xi_{k+1}) = b(\xi_k)$ верно разложение

$$k(x,y) \approx k(x,b(\xi_k)) + k(\xi_k,y).$$

Следовательно, $T_kf(x) \approx T_{k,1}f(x) + T_{k,2}f(x)$, где

$$T_{k,1}f(x) = w(x)k(x,b(\xi_k)) \int_{a(x)}^{a(\xi_{k+1})} f(y)v(y)\,dy, \qquad x \in [\xi_k,\xi_{k+1}],$$
$$T_{k,2}f(x) = w(x) \int_{a(x)}^{a(\xi_{k+1})} k(\xi_k,y)f(y)v(y)\,dy, \qquad x \in [\xi_k,\xi_{k+1}].$$

Оценки на нормы операторов $T_{k,1}$ и $T_{k,2}$ вытекают из леммы 1.11:

$$\|T_k\| \approx \sup_{\xi_k\leqslant t\leqslant\xi_{k+1}} \left(\int_{\xi_k}^t k^q(x,b(\xi_k))w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} v^{p'}\right)^{1/p'}$$
$$+ \sup_{\xi_k\leqslant t\leqslant\xi_{k+1}} \left(\int_{\xi_k}^t w^q\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} k^{p'}(\xi_k,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}.$$

Введем в рассмотрение следующие фукции:

$$\mathscr{A}_0(s,t) = \left(\int_s^t k^q(x,b(s))w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}, \tag{2.1.14}$$

$$\mathscr{A}_1(s,t) = \left(\int_s^t w^q\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} k^{p'}(s,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'}, \tag{2.1.15}$$

где $b^{-1}(a(t)) < s < t$. Верно, что

$$\|S_k\| \approx \sup_{\xi_k\leqslant s\leqslant\xi_{k+1}} \mathscr{A}_0(s,\xi_{k+1}) + \sup_{\xi_k\leqslant s\leqslant\xi_{k+1}} \mathscr{A}_1(s,\xi_{k+1}), \tag{2.1.16}$$

$$\|T_k\| \approx \sup_{\xi_k \leqslant t \leqslant \xi_{k+1}} \mathscr{A}_0(\xi_k, t) + \sup_{\xi_k \leqslant t \leqslant \xi_{k+1}} \mathscr{A}_1(\xi_k, t), \tag{2.1.17}$$

и

$$\mathscr{A}_0 = \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(a(t))<s<t} \mathscr{A}_0(s,t), \qquad \mathscr{A}_1 = \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(a(t))<s<t} \mathscr{A}_1(s,t).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sup_{\xi_k \leqslant s \leqslant \xi_{k+1}} \mathscr{A}_i(s, \xi_{k+1}) &\leqslant \sup_{b^{-1}(a(\xi_{k+1}))<s<\xi_{k+1}} \mathscr{A}_i(s, \xi_{k+1}) \leqslant \mathscr{A}_i, \qquad & i = 0, 1, \\ \sup_{\xi_k \leqslant t \leqslant \xi_{k+1}} \mathscr{A}_i(\xi_k, t) &\leqslant \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant \xi_k \leqslant t} \mathscr{A}_i(\xi_k, t) \leqslant \mathscr{A}_i, \qquad & i = 0, 1. \end{aligned}$$

Из (2.1.13)–(2.1.17) получаем

$$\|\mathscr{K}\| \lesssim \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1.$$

Для доказательства нижней оценки $\|\mathscr{K}\| \gtrsim \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ предположим, что $\|\mathscr{K}\| < \infty$. Если

$$f(y) = \chi_{[a(t),b(s)]}(y) v^{p'-1}(y),$$

где $b^{-1}(a(t) < s < x < t$, то

$$\mathscr{K} f(x) \geqslant w(x) \int_{a(t)}^{b(s)} k(x,y) v^{p'}(y)\, dy.$$

Из условия (2.1.9) при $z = s$ следует $k(x,y) \gtrsim k(x, b(s))$. Поэтому

$$\mathscr{K} f(x) \gtrsim w(x) k(x, b(s)) \int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'}(y)\, dy.$$

Отсюда

$$\|\mathscr{K}\| \gtrsim \frac{\|\mathscr{K} f\|_q}{\|f\|_p} \geqslant \left(\int_s^t k^q(x, b(s)) w^q(x)\, dx \right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'}(y)\, dy \right)^{1/p'}$$

и, следовательно, $\|\mathscr{K}\| \gtrsim \mathscr{A}_0(s,t)$ для всех $s < t < a^{-1}(b(s)$, что влечет требуемую оценку $\|\mathscr{K}\| \gtrsim \mathscr{A}_0$. Справедливость неравенства $\|\mathscr{K}\| \gtrsim \mathscr{A}_1$ доказывается аналогичным способом с помощью подстановки

$$g(x) = \chi_{[s,t]}(x) w^{q-1}(x)$$

в неравенство, двойственное к $\|\mathscr{K} f\|_q \leqslant C \|f\|_p$.

Чтобы установить требуемые оценки на норму $\mathscr{K}$ в случае $1 < q < p < \infty$, заметим, что по лемме 2.1

$$\|\mathscr{K}\| \approx \left(\sum_k \|T_k\|^r \right)^{1/r} + \left(\sum_k \|S_k\|^r \right)^{1/r}. \tag{2.1.18}$$

В силу леммы 1.13, а также согласно утверждению (b) следствия 1.5,

$$\|T_k\| \approx \mathscr{B}_{k,1} + \mathscr{B}_{k,2}, \qquad \|S_k\| \approx \mathscr{B}_{k,3} + \mathscr{B}_{k,4}, \tag{2.1.19}$$

и справедливость требуемых оценок доказана.

Критерий компактности оператора $\mathscr{K}: L^p(0,\infty) \to L^q(0,\infty)$ в случае $1 < p \leqslant q < \infty$ вытекает из представления исходного оператора в виде суммы компактного оператора и операторов с малой нормой. Для $1 < q < p < \infty$ утверждение следует из теоремы Андо (см. [16] и [12]).

Оператор $\mathscr{K}$ вида (2.1.4) можно рассматривать как преобразование, предшественником которого, с одной стороны, является оператор вольтеррова типа (1.5.24) с переменным верхним пределом, с другой – оператор (1.5.29) с переменным нижним пределом. Теорема 2.1 является аналогом следствия 1.5 для оператора Вольтерра вида (1.5.24) с ядром типа Ойнарова $k(x,y) \in$ (1.5.23). В завершение пункта мы приведем теорему для оператора (2.1.4) с ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим формально двойственному к (2.1.9) условию вида (2.1.20). Аналогом оператора с таким ядром и только одним (нижним) пределом интегрирования как раз и является преобразование (1.5.29), характеризация которого была представлена в следствии 2. Доказательство представляемого результата аналогично доказательству теоремы 2.1 и основано на утверждениях следствия 2 и лемм 1.10, 1.12.

Определение 2.2. Будем говорить, что $k(x,y) \geqslant 0$ удвлетворяет *условию типа Ойнарова $\mathscr{O}_a$*, если существует $D \geqslant 1$, не зависящая от x, y, z и такая, что

$$D^{-1}k(x,y) \leqslant k(x,a(z)) + k(z,y) \leqslant Dk(x,y) \tag{2.1.20}$$

для всех $b^{-1}(y) \leqslant x \leqslant z \leqslant a^{-1}(y)$.

Теорема 2.2. *Пусть ядро $k(x,y)$ оператора $\mathscr{K}$ вида (2.1.4) удовлетворяет условию $\mathscr{O}_a$. Если $1 < p \leqslant q < \infty$, то*

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{A}^* := \mathscr{A}_0^* + \mathscr{A}_1^*,$$

где $\mathscr{A}_0^* := \sup_{s>0} \mathscr{A}_0^*(s)$, $\mathscr{A}_1^* := \sup_{s>0} \mathscr{A}_1^*(s)$ с

$$\mathscr{A}_0^*(s) = \sup_{s\leqslant t\leqslant a^{-1}(b(s))} \left(\int_s^t k^q(x,a(t))w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_1^*(s) = \sup_{s\leqslant t\leqslant a^{-1}(b(s))} \left(\int_s^t w^q\right)^{1/q} \left(\int_{a(t)}^{b(s)} k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'},$$

причем $\mathscr{K}$ компактен тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}^* < \infty$ и

$$\lim_{s\to 0} \mathscr{A}_i^*(s) = \lim_{s\to\infty} \mathscr{A}_i^*(s) = 0, \qquad i = 0,1.$$

Если $1 < q < p < \infty$, то

$$\|\mathscr{K}^*\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{B}^* := \left(\sum_k [(\mathscr{B}_{k,1}^*)^r + (\mathscr{B}_{k,2}^*)^r + (\mathscr{B}_{k,3}^*)^r + (\mathscr{B}_{k,4}^*)^r]\right)^{1/r},$$

где

$$(\mathscr{B}_{k,1}^*)^r = \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} \left(\int_{\xi_k}^{a^{-1}(t)} k^q(x,t)w^q(x)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_t^{b(\xi_k)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{B}_{k,2}^*)^r = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_{\xi_k}^t w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} k^{p'}(t,y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{B}_{k,3}^*)^r = \int_{a(\xi_{k+1})}^{b(\xi_{k+1})} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{\xi_{k+1}} k^q(x,b(\xi_k))w^q(x)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_{k+1})}^t v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{B}_{k,4}^*)^r = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_t^{\xi_{k+1}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{b(\xi_k)}^{b(t)} k^{p'}(\xi_{k+1},y)v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt$$

при $\xi_0 = 1$ и ξ_k, определенных для всех $k \in \mathbb{Z}$ по правилу (2.1.6). Кроме того, оператор $\mathscr{K}$ компактен, если и только если $\mathscr{B}^* < \infty$.

Замечание 2.1. Теоремы 2.1 и 2.2 носят двойственный по отношению друг к другу характер. При этом условия (2.1.9) и (2.1.20), вообще говоря, независимы, т.е. одно из них может выполняться, а второе нет. Соответственно, формы критериев для (2.1.4) всецело зависят от того, какое из условий, (2.1.9) или (2.1.20), на ядро $k(x,y)$ выполнено. Как уже отмечалось выше, это обусловлено тем, что (2.1.9) является расширением (1.5.23) для оператора Вольтерра с переменным верхним пределом (1.5.24), а (2.1.20) – того же условия, но для оператора (1.5.29) с переменным нижним пределом. Потеряв вольтеррову форму, оператор (2.1.4) может "забыть" о своем происхождении, но его ядро "помнит".

2.2. Операторы Харди–Стеклова

Рассмотрим интегральное преобразование вида

$$\mathscr{H} f(x) := w(x) \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)v(y)\,dy \qquad (x > 0) \tag{2.2.1}$$

с локально интегрируемыми весовыми функциями v, w на $(0,\infty)$ и $a, b \in$ (2.1.5).

Эта часть монографии посвящена изучению свойств ограниченности и компактности операторов Харди–Стеклова вида (2.2.1), действующих из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$. Соответствующие этим исследованиям критерии включают понятие так называемого *фарватера* – кривой, балансирующей между графиками $a(x)$ и $b(x)$ и удовлетворяющей некоторому уравновешивающему свойству, которое позволяет связывать в одно целое дискретные порции, полученные в результате применения блочно-диагонального деления операторов типа (2.2.1).

2.2.1. Фарватер-функция.

Определение 2.3. Для граничных функций $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющих условиям (2.1.5), числа $p \in (1,\infty)$ и весовой функции $v(x)$ такой, что $0 < v(x) < \infty$ п.в. на $x \in (0,\infty)$ и $v^{p'}(x)$ локально интегрируема на $(0,\infty)$, определим *фарватер-функцию* $\sigma(x)$ такую, что $a(x) < \sigma(x) < b(x)$ и

$$\int_{a(x)}^{\sigma(x)} v^{p'}(y)\,dy = \int_{\sigma(x)}^{b(x)} v^{p'}(y)\,dy \qquad \text{для всех } \ x \in (0,\infty). \tag{2.2.2}$$

Фарватер является строго возрастающей, непрерывной и даже дифференцируемой функцией на $(0,\infty)$. Действительно, предположим, что $\sigma(x_1) \geqslant \sigma(x_2)$ для $x_1 < x_2$. Тогда

$$\int_{a(x_1)}^{\sigma(x_1)} v^{p'} = \int_{\sigma(x_1)}^{b(x_1)} v^{p'} < \int_{\sigma(x_2)}^{b(x_2)} v^{p'} = \int_{a(x_2)}^{\sigma(x_2)} v^{p'}$$

в силу (2.2.2) и так как $b(x_1) < b(x_2)$ и $0 < v(x) < \infty$ п.в. на $(0,\infty)$, что противоречит нашему предположению, ибо $a(x_1) < a(x_2)$. Чтобы показать непрерывность $\sigma(x)$ на $(0,\infty)$, заметим, что для $\sigma(x) \in [a(z), b(z)]$ в силу (2.2.2) (см. более подробно (2.3.3)–(2.3.9))

$$2\int_{\sigma(x)}^{\sigma(z)} v^{p'} = \int_{a(x)}^{a(z)} v^{p'} + \int_{b(x)}^{b(z)} v^{p'}, \qquad x \neq z. \tag{2.2.3}$$

Отсюда получаем выполнение требуемого свойства, принимая во внимание непрерывность a и b, локальную интегрируемость $v^{p'}$ и тот факт, что $0 < v < \infty$ п.в. на $(0,\infty)$. Условие равновесия (2.2.2) также влечет дифференцируемость σ на $(0,\infty)$, причем

$$d\sigma(x) = \frac{v^{p'}(a(x))a'(x) + v^{p'}(b(x))b'(x)}{2v^{p'}(\sigma(x))}\,dx, \qquad x > 0.$$

В дальнейшем нам потребуется ряд технических лемм.

Лемма 2.2. *Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют условиям (2.1.5) и $\sigma(x)$ является соответствующим им фарватером. Для $c \in (0,\infty)$ положим $c^- = \sigma^{-1}(a(c))$ и обозначим через $[\mathscr{N}^-]$ целую часть числа*

$$\mathscr{N}^- := \log_2 \frac{\displaystyle\int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}}{\displaystyle\int_{a(c)}^{b(c^-)} v^{p'}},$$

т.е.

$$2^{[\mathscr{N}^-]} \leqslant \frac{\displaystyle\int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}}{\displaystyle\int_{a(c)}^{b(c^-)} v^{p'}} < 2^{[\mathscr{N}^-]+1}.$$

Пусть последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{j_b}$, где

$$j_b = \begin{cases} [\mathscr{N}^-], & \text{если } \mathscr{N}^- = [\mathscr{N}^-], \\ [\mathscr{N}^-]+1, & \text{если } \mathscr{N}^- > [\mathscr{N}^-], \end{cases}$$

определена по следующему правилу:

1) $x_0 = c^-$, $x_{j_b} = c$;
2) *если* $[\mathscr{N}^-] = 0$ *или* $\mathscr{N}^- = [\mathscr{N}^-] = 1$, *то* $j_b = 1$;
3) *если* $\mathscr{N}^- > 1$, *то точки* x_j *для* $1 \leqslant j \leqslant j_b - 1 = [\mathscr{N}^-]$ *выбираются так, что*

$$\int_{a(c)}^{b(x_j)} v^{p'} = 2\int_{a(c)}^{b(x_{j-1})} v^{p'}. \tag{2.2.4}$$

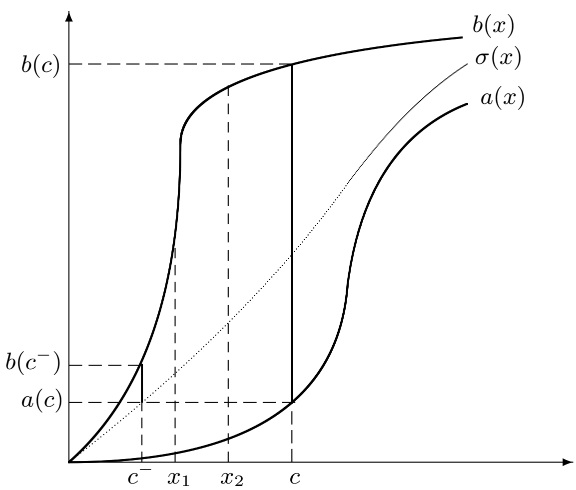

Рис. 2.2.1

Тогда для $t \in [x_j, x_{j+1}]$ и всех $0 \leqslant j \leqslant j_b - 1$ верно, что

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} \approx \int_{a(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'}, \tag{2.2.5}$$

и для всех $t \in [c^-, c]$

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} < \int_{a(c^-)}^{b(c)} v^{p'} \approx \int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}. \tag{2.2.6}$$

Кроме того, если $j_b \geqslant 2$ *и* $0 \leqslant j \leqslant j_b - 2$, *то*

$$\int_{a(c)}^{b(x_{j+l})} v^{p'} = 2^l \int_{a(c)}^{b(x_j)} v^{p'} \qquad \text{для всех} \quad l \in \{1, \dots, j_b - j - 1\}. \tag{2.2.7}$$

Доказательство. Для $t \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant j_b - 1$, выполнено

$$\int_{a(x_{j+1})}^{b(x_j)} v^{p'} < \int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} < \int_{a(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'}. \tag{2.2.8}$$

Сначала докажем (2.2.5) для $t = x_j$. По определению x_{j+1} (см. (2.2.4))

$$\int_{a(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'} \leqslant \int_{a(x_j)}^{a(c)} v^{p'} + 2 \int_{a(c)}^{b(x_j)} v^{p'} \leqslant 3 \int_{a(x_j)}^{b(x_j)} v^{p'}. \tag{2.2.9}$$

Из оценок (2.2.8) и (2.2.9) вытекает (2.2.5) для $t = x_j$. Если $t = x_{j+1}$, то

$$\begin{aligned} \int_{a(x_{j+1})}^{b(x_{j+1})} v^{p'} &\geqslant \int_{a(c)}^{b(x_{j+1})} v^{p'} = \int_{\sigma(c^-)}^{b(x_{j+1})} v^{p'} \geqslant \int_{\sigma(x_j)}^{b(x_j)} v^{p'} + \int_{b(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'} \\ &= \frac{1}{2} \int_{a(x_j)}^{b(x_j)} v^{p'} + \int_{b(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'}(y)\, dy \geqslant \frac{1}{2} \int_{a(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'}. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Отсюда и (2.2.8) получаем (2.2.5) для $t = x_{j+1}$. Для $t \in (x_j, x_{j+1})$ запишем:

$$\begin{aligned} \int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} &\geqslant \int_{a(c)}^{b(x_j)} v^{p'} \geqslant \frac{1}{2} \int_{a(c)}^{b(x_{j+1})} v^{p'} = \frac{1}{2} \int_{\sigma(c^-)}^{b(x_{j+1})} v^{p'} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \int_{\sigma(x_{j+1})}^{b(x_{j+1})} v^{p'} = \frac{1}{4} \int_{a(x_{j+1})}^{b(x_{j+1})} v^{p'} \overset{(2.2.10)}{\geqslant} \frac{1}{8} \int_{a(x_j)}^{b(x_{j+1})} v^{p'}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.2.8) получаем (2.2.5) для всех $t \in [x_j, x_{j+1}]$.

Неравенство слева в (2.2.6) следует элементарно. Так как $\int_{a(c)}^{b(c^-)} v^{p'} = \int_{a(c^-)}^{a(c)} v^{p'}$, то

$$\int_{a(c^-)}^{b(c)} v^{p'} = \int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'} + \int_{a(c)}^{b(c^-)} v^{p'} < 2 \int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}, \tag{2.2.11}$$

и (2.2.6) доказано. Соотношение (2.2.7) является следствием (2.2.4).

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *удовлетворяют условиям* (2.1.5) *и* $\sigma(x)$ – *соответствующий им фарватер. Для* $c \in (0, \infty)$ *положим* $c^+ = \sigma^{-1}(b(c))$ *и обозначим через* $[\mathscr{N}^+]$ *целую часть числа*

$$\mathscr{N}^+ := \log_2 \frac{\displaystyle\int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}}{\displaystyle\int_{a(c^+)}^{b(c)} v^{p'}},$$

т.е.

$$2^{[\mathscr{N}^+]} \leqslant \frac{\displaystyle\int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}}{\displaystyle\int_{a(c^+)}^{b(c)} v^{p'}} < 2^{[\mathscr{N}^+]+1}.$$

Пусть последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{j_a}$, *где*

$$j_a = \begin{cases} [\mathscr{N}^+], & \text{если } \mathscr{N}^+ = [\mathscr{N}^+], \\ [\mathscr{N}^+] + 1, & \text{если } \mathscr{N}^+ > [\mathscr{N}^+], \end{cases}$$

определена по следующему правилу:

1) $x_0 = c$, $x_{j_a} = c^+$;
2) *если* $[\mathscr{N}^+] = 0$ *или* $\mathscr{N}^+ = [\mathscr{N}^+] = 1$, *то* $j_a = 1$;
3) *если* $\mathscr{N}^+ > 1$, *то точки* x_j *для* $1 \leqslant j \leqslant j_a - 1 = [\mathscr{N}^+]$ *выбираются так, что*

$$\int_{a(x_j)}^{b(c)} v^{p'} = \frac{1}{2} \int_{a(x_{j-1})}^{b(c)} v^{p'}. \tag{2.2.12}$$

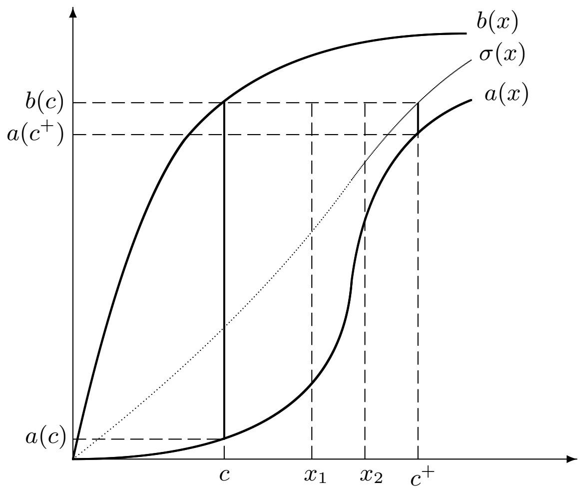

Рис. 2.2.2

Тогда для любого $t \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant j_a - 1$, *выполнено* (2.2.5), *и для всех* $t \in [c, c^+]$

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} \leqslant \int_{a(c)}^{b(c^+)} v^{p'} \approx \int_{a(c)}^{b(c)} v^{p'}. \tag{2.2.13}$$

Кроме того, если $j_a \geqslant 2$ *и* $0 \leqslant j \leqslant j_a - 2$, *то справедливо*

$$2^l \int_{a(x_{j+l})}^{b(c)} v^{p'} = \int_{a(x_j)}^{b(c)} v^{p'} \qquad \text{для всех} \quad l \in \{1, \ldots, j_a - j - 1\}. \tag{2.2.14}$$

Похожие утверждения справедливы и для разбиений несколько иного типа, чем в леммах 2.2 и 2.3.

Лемма 2.4. *Пусть функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *удовлетворяют условиям* (2.1.5) *и* $\sigma(x)$ – *соответствующая им фарватер-функция. Для* $d \in (0,\infty)$ *обозначим* $d^- = \sigma^{-1}(a(d))$, $d^+ = \sigma^{-1}(b(d))$ *и определим последовательность* $\{x_j\}_{j=-j_a}^{0}$ *по следующему правилу*:

1) $x_{-j_a} = d$, $x_0 = d^+$;
2) *если* $(d^+)^- \leqslant d$, *то* $j_a = 1$;
3) *если* $(d^+)^- > d$, *то* $j_a > 1$ *и* $x_{j-1} = (x_j)^-$, *где* $(x_j)^- > d$ *и* $-j_a + 2 \leqslant j \leqslant 0$.

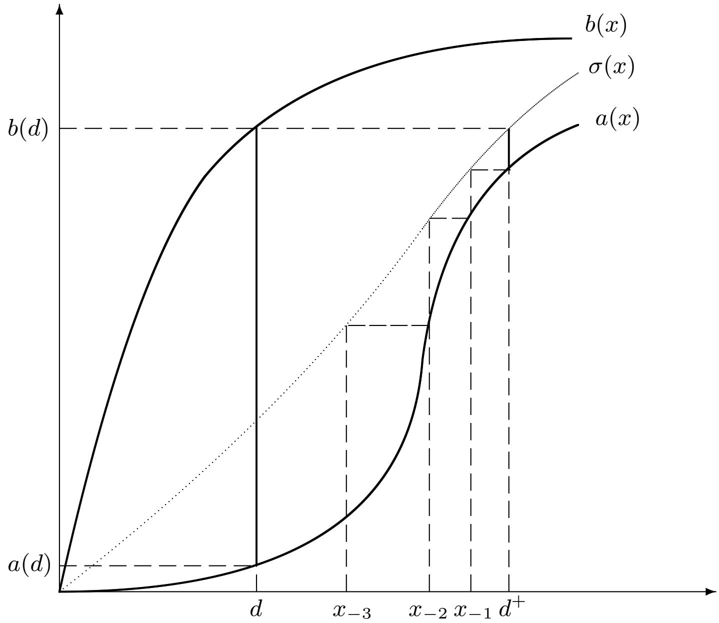

Рис. 2.2.3

Тогда для любого $t \in [x_j, x_{j+1}]$, $-j_a \leqslant j \leqslant -1$, *выполнено* (2.2.5). *Более того, если* $d \leqslant x^- \leqslant t \leqslant x \leqslant d^+$, *то*

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} \approx \int_{a(x^-)}^{b(x)} v^{p'} \approx \int_{a(x)}^{b(x)} v^{p'}. \tag{2.2.15}$$

Доказательство. Сначала докажем (2.2.15). Так как $\int_{a(x^-)}^{a(x)} v^{p'} = \int_{a(x)}^{b(x^-)} v^{p'}$ и $d \leqslant x^- \leqslant t \leqslant x \leqslant d^+$, то

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} \leqslant \int_{a(x^-)}^{b(x)} v^{p'} = \int_{a(x)}^{b(x^-)} v^{p'} + \int_{a(x)}^{b(x)} v^{p'} < 2\int_{a(x)}^{b(x)} v^{p'}, \tag{2.2.16}$$

и вторая эквивалентность в (2.2.15) следует. Далее, в силу предположений леммы и так как $d \leqslant x^- \leqslant t \leqslant x \leqslant d^+$,

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} \geqslant \int_{a(x)}^{b(d)} v^{p'} = \int_{a(x)}^{\sigma(d^+)} v^{p'} \geqslant \int_{a(x)}^{\sigma(x)} v^{p'} = \frac{1}{2}\int_{a(x)}^{b(x)} v^{p'} \overset{(2.2.16)}{<} \frac{1}{4}\int_{a(x^-)}^{b(x)} v^{p'}, \tag{2.2.17}$$

что в комбинации с (2.2.16) дает (2.2.15). Так как $d \leqslant x_j = (x_{j+1})^- \leqslant t \leqslant x_{j+1} \leqslant d^+$, то (2.2.5) вытекает из (2.2.15).

Лемма 2.5. *Пусть функции* $a(x)$ *и* $b(x)$ *удовлетворяют условиям* (2.1.5) *и* $\sigma(x)$ *– соответствующий им фарватер. Для* $d \in (0, \infty)$ *обозначим* $d^- = \sigma^{-1}(a(d))$, $d^+ = \sigma^{-1}(b(d))$ *и определим последовательность точек* $\{x_j\}_{j=0}^{j_b}$ *следующим образом*:

1) $x_0 = d^-$, $x_{j_b} = d$;
2) *если* $(d^-)^+ \geqslant d$, *то* $j_b = 1$;
3) *если* $(d^-)^+ < d$, *то* $j_b > 1$ *и* $x_{j+1} = (x_j)^+$, *где* $(x_j)^+ < d$ *и* $0 \leqslant j \leqslant j_b - 2$.

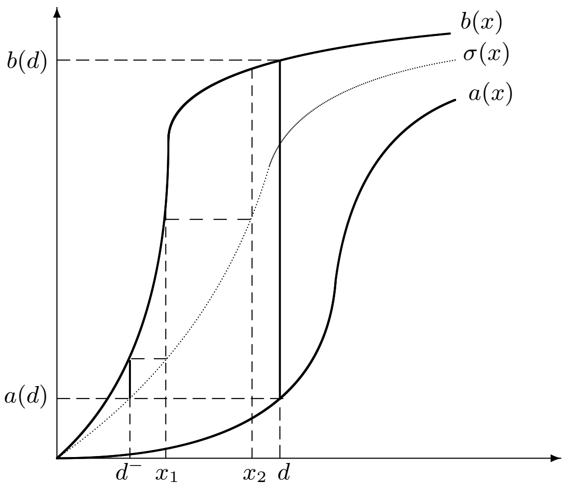

Рис. 2.2.4

Тогда для любого $t \in [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant j_b - 1$, *имеет место* (2.2.5). *Кроме этого, если* $d^- \leqslant x \leqslant t \leqslant x^+ \leqslant d$, *то*

$$\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'} \approx \int_{a(x)}^{b(x^+)} v^{p'} \approx \int_{a(x)}^{b(x)} v^{p'}. \tag{2.2.18}$$

2.2.2. Критерии типа Мукенхоупта и Мазьи–Розина. В этом пункте представлены полные аналоги характеристик (1.5.12)–(1.5.15) для оператора (2.2.1). В основе полученных результатов лежит понятие фарватер-функции σ из определения 2.3.

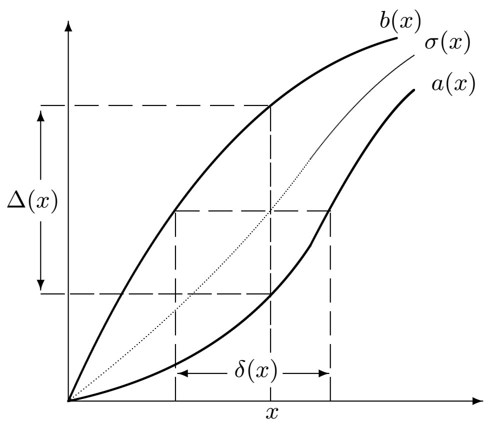

Рис. 2.2.5

Положим
$$\Delta(x) = [a(x), b(x)], \qquad \delta(x) = [b^{-1}(\sigma(x)), a^{-1}(\sigma(x))],$$
где $a^{-1}(y)$ и $b^{-1}(y)$ обозначают функции, обратные к $y = a(x)$ и $y = b(x)$ соответственно.

Теорема 2.3. *Пусть оператор* $\mathscr{H}$ *имеет вид* (2.2.1). *Тогда в случае* $1 < p \leqslant q < \infty$ *верна оценка*
$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{A}_M, \tag{2.2.19}$$
где
$$\mathscr{A}_M := \sup_{t>0} \mathscr{A}_M(t) = \sup_{t>0}\left(\int_{\delta(t)} w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{1/p'}; \tag{2.2.20}$$
более того, $\mathscr{H}\colon L^p(0,\infty) \to L^q(0,\infty)$ *компактен, если и только если* $\mathscr{A}_M < \infty$ *и*
$$\lim_{t\to 0} \mathscr{A}_M(t) = \lim_{t\to\infty} \mathscr{A}_M(t) = 0.$$

Если $0 < q < p < \infty$ *и* $p > 1$, *то*
$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{B}_{MR}, \tag{2.2.21}$$
где
$$\mathscr{B}_{MR} := \left(\int_0^\infty \left[\int_{\delta(t)} w^q\right]^{r/p}\left[\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right]^{r/p'} w^q(t)dt\right)^{1/r} \tag{2.2.22}$$
и $1/r = 1/q - 1/p$; *и* $\mathscr{H}$ *компактен тогда и только тогда, тогда* $\mathscr{B}_{MR} < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим случай $1 < p \leqslant q < \infty$. Из теоремы 2.1 следует для $k(x,y) = 1$, что $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_1$, и в силу (2.1.12)
$$\|\mathscr{H}\| := \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathbb{A} := \sup_{t>0}\ \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t} \mathbb{A}(s,t), \tag{2.2.23}$$
где
$$\mathbb{A}(s,t) = \left(\int_s^t w^q\right)^{1/q}\left(\int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}.$$
Используя (2.2.2), получаем для всех $t > 0$
$$\begin{aligned}\mathscr{A}_M^q(t) &= 2^{q/p'}\left[\int_{b^{-1}(\sigma(t))}^t w^q\left(\int_{a(t)}^{\sigma(t)} v^{p'}\right)^{q/p'} + \int_t^{a^{-1}(\sigma(t))} w^q\left(\int_{\sigma(t)}^{b(t)} v^{p'}\right)^{q/p'}\right]\\ &= 2^{q/p'}[\mathbb{A}^q(b^{-1}(\sigma(t)),t) + \mathbb{A}^q(t, a^{-1}(\sigma(t)))] \leqslant 2^{1+q/p'}\mathbb{A}^q.\end{aligned}$$
Это влечет $\mathscr{A}_M \lesssim \mathbb{A}$. Чтобы доказать обратное неравенство, положим $\tau = \sigma^{-1}(a(t))$ и запишем
$$\mathbb{A} \leqslant \sup_{t>0}\ \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant\tau} \mathbb{A}(s,t) + \sup_{t>0}\ \sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} \mathbb{A}(s,t) \lesssim \mathscr{A}_M.$$
Действительно, если $b^{-1}(a(t)) \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t$, то $(s,t) \subset (b^{-1}(a(t)),t) = (b^{-1}(\sigma(\tau)), a^{-1}(\sigma(\tau)))$, $(a(t), b(s)) \subset (\sigma(\tau), b(\tau))$. Следовательно,
$$\sup_{t>0}\ \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant\tau} \mathbb{A}(s,t) \leqslant \mathscr{A}_M.$$
Если $\tau \leqslant s \leqslant t$, то $(s,t) \subset (b^{-1}(\sigma(s)), a^{-1}(\sigma(s)))$, $(a(t), b(s)) \subset (a(s), b(s))$, и мы получаем
$$\sup_{t>0}\ \sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} \mathbb{A}(s,t) \leqslant \mathscr{A}_M.$$

Отсюда $\mathscr{A}_M \approx \mathbb{A}$, и требуемая оценка (2.2.19) следует из (2.2.23). Критерий компактности для оператора $\mathscr{H}$ вытекает из теоремы 2.1.

Рассмотрим случай $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. Чтобы доказать (2.2.21), сначала покажем, что $\|\mathscr{H}\| \lesssim \mathscr{B}_{MR}$. Положим $\xi_0 = 1$ и выберем точки $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ по правилу (2.1.6). Обозначим

$$\xi_k^- = \sigma^{-1}(a(\xi_k)), \qquad \xi_k^+ = \sigma^{-1}(b(\xi_k)),$$
$$\Delta_k = [\xi_k^-, \xi_k^+] = \Delta_k^- \cup \Delta_k^+, \qquad \Delta_k^- = [\xi_k^-, \xi_k], \quad \Delta_k^+ = [\xi_k, \xi_k^+].$$

Для $x \in \Delta_k$ оператор $\mathscr{H}$ распадается на сумму четырех операторов:

$$\mathscr{H} f(x) = T_{k,1}f(x) + T_{k,2}f(x) + S_{k,1}f(x) + S_{k,2}f(x), \qquad x \in \Delta_k,$$

где

$$T_{k,1}f(x) = w(x)\int_{a(x)}^{a(\xi_k)} fv, \qquad x \in \Delta_k^-;$$
$$T_{k,2}f(x) = w(x)\int_{a(x)}^{b(\xi_k)} fv, \qquad x \in \Delta_k^+;$$
$$S_{k,1}f(x) = w(x)\int_{b(\xi_k)}^{b(x)} fv, \qquad x \in \Delta_k^+;$$
$$S_{k,2}f(x) = w(x)\int_{a(\xi_k)}^{b(x)} fv, \qquad x \in \Delta_k^-.$$

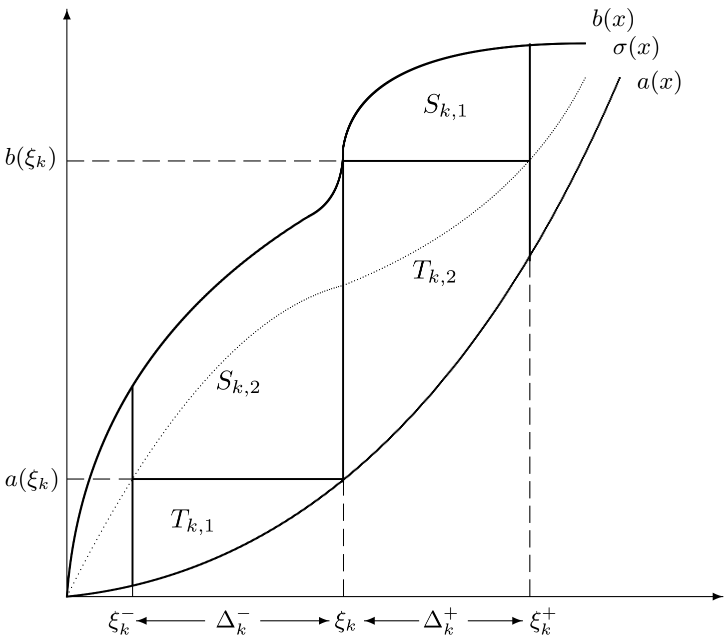

Рис. 2.2.6

Применяя оценку (1.5.49), получаем

$$\|T_{k,1}\|^r \approx \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\xi_k^-}^{t} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{a(\xi_k)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt$$
$$\leqslant \frac{q}{r}\left(\int_{a(\xi_k^-)}^{\sigma(\xi_k^-)} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k} w^q\right)^{r/q} \overset{(2.2.2)}{=} \left(\int_{\sigma(\xi_k^-)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{t}^{\xi_k} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right).$$

Для $t \in [\xi_k^-, \xi_k]$ выполнено $a(t) \leqslant \sigma(\xi_k^-)$, $b(\xi_k^-) \leqslant b(t)$, $\xi_k \leqslant a^{-1}(\sigma(t))$. Это влечет вложение $[\sigma(\xi_k^-), b(\xi_k^-)] \subseteq \Delta(t)$, $[t, \xi_k] \subset [t, a^{-1}(\sigma(t))] \subset \delta(t)$. Следовательно,

$$\|T_{k,1}\|^r \lesssim \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\delta(t)} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt =: J_{k,1}. \tag{2.2.24}$$

Снова используя (1.5.49), находим

$$\|T_{k,2}\|^r \approx \int_{\xi_k}^{\xi_k^+} \left(\int_{\xi_k}^{t} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt.$$

Так как $\xi_k \geqslant b^{-1}(\sigma(t))$, $b(\xi_k) \leqslant b(t)$ для $t \in [\xi_k, \xi_k^+]$, то

$$[\xi_k, t] \subset (b^{-1}(\sigma(t)), t) \subset \delta(t), \qquad [a(t), b(\xi_k)] \subset \Delta(t).$$

Поэтому

$$\|T_{k,2}\|^r \lesssim \int_{\xi_k}^{\xi_k^+} \left(\int_{\delta(t)} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt =: J_{k,2}. \tag{2.2.25}$$

Аналогично, используя (1.5.41), мы приходим к оценкам

$$\|S_{k,1}\|^r \lesssim J_{k,2}, \qquad \|S_{k,2}\|^r \lesssim J_{k,1}. \tag{2.2.26}$$

В силу блочно-диагональной структуры операторов $T_i := \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_{k,i}$, $i = 1, 2$, и $S_i := \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k,i}$, $i = 1, 2$, мы получаем требуемое неравенство $\|\mathscr{H}\| \lesssim \mathscr{B}_{MR}$, применяя лемму 2.1 и оценки (2.2.24)–(2.2.26).

Для доказательства неравенства $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{B}_{MR}$ сначала предположим, что

$$\sigma(x) = x, \tag{2.2.27}$$

т.е. фарватером является биссектриса первого квадранта. В этом случае обозначим

$$x^- = a(x), \qquad x^+ = b(x), \qquad \Delta(x) = [x^-, x^+] = \Delta^-(x) \cup \Delta^+(x),$$
$$\Delta^-(x) = [x^-, x], \qquad \Delta^+(x) = [x, x^+],$$

и будем называть *базовыми* интервалы вида $[x^-, x^+]$. Нам понадобится

Определение 2.4. Пусть $p \in (1, \infty)$ и функции $a(x)$, $b(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условиям определения 2.3, при этом выполнено (2.2.27). К множеству $\mathscr{L}$ отнесем все абсолютно непрерывные функции F на $(0, \infty)$ такие, что $\|F'/v\|_p < \infty$ и, если $F \in \mathscr{L}$, то существуют попарно непересекающиеся интервалы $I_k = (\alpha_k, \beta_k) \subset (0, \infty)$ и базовые интервалы $J_k = [c_k^-, c_k^+]$ такие, что $I_k \subset J_k$, $\operatorname{supp} F \subset \bigcup_k I_k$ и $F(\alpha_k) = F(\beta_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим неравенство

$$\|Fw\|_q \leqslant C\left\|\frac{F'}{v}\right\|_p, \qquad F \in \mathscr{L}, \tag{2.2.28}$$

с константой $C \geqslant 0$, не зависящей от $F \in \mathscr{L}$. Будем считать C наименьшей из возможных и покажем, что

$$C \leqslant \|\mathscr{H}\|. \tag{2.2.29}$$

Для этого возьмем произвольную функцию $F \in \mathscr{L}$ и запишем

$$\int_0^\infty |F(x)|^q w^q(x)\,dx = \sum_k \int_{I_k} |F(x)|^q w^q(x)\,dx.$$

Поскольку $I_k = (\alpha_k, \beta_k) \subset [c_k^-, c_k^+] = J_k$ по определению $\mathscr{L}$, то возможны только три варианта:

$$\text{(i)}\quad \beta_k \leqslant c_k; \qquad \text{(ii)}\quad c_k \leqslant \alpha_k; \qquad \text{(iii)}\quad c_k \in I_k.$$

В случае (i) имеем

$$\int_{I_k} |F(x)|^q w^q(x)\,dx \leqslant \int_{I_k}\left(\int_{\alpha_k}^x |F'|\right)^q w^q(x)\,dx \leqslant \int_{I_k}\left(\int_{\Delta(x)} |F'|\right)^q w^q(x)\,dx,$$

поскольку $(\alpha_k, x) \subset (a(x), x) \subset \Delta(x)$, так как $\alpha_k \geqslant c_k^- = a(c_k) \geqslant a(\beta_k) \geqslant a(x)$.

Аналогично, для случая (ii) запишем

$$\int_{I_k} |F(x)|^q w^q(x)\,dx \leqslant \int_{I_k}\left(\int_x^{\beta_k} |F'|\right)^q w^q(x)\,dx \leqslant \int_{I_k}\left(\int_{\Delta(x)} |F'|\right)^q w^q(x)\,dx,$$

так как $(x, \beta_k) \subset (x, b(x)) \subset \Delta(x)$, что вытекает из цепочки неравенств $\beta_k \leqslant c_k^+ = b(c_k) \leqslant b(\alpha_k) \leqslant b(x)$.

В последнем варианте (iii) получаем, используя оба предыдущих рассуждения,

$$\begin{aligned}\int_{I_k} |F(x)|^q w^q(x)\,dx &\leqslant \int_{\alpha_k}^{c_k}\left(\int_{\alpha_k}^x |F'|\right)^q w^q(x)\,dx + \int_{c_k}^{\beta_k}\left(\int_x^{\beta_k} |F'|\right)^q w^q(x)\,dx \\ &\lesssim \int_{I_k}\left(\int_{\Delta(x)} |F'|\right)^q w^q(x)\,dx.\end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем для $F \in \mathscr{L}$

$$\int_0^\infty |F(x)|^q w^q(x)\,dx \lesssim \sum_k \int_{I_k}\left(\mathscr{H}\left|\frac{F'}{v}\right|\right)^q(x)\,dx \leqslant \left\|\mathscr{H}\left|\frac{F'}{v}\right|\right\|_q^q \leqslant \|\mathscr{H}\|^q\left\|\frac{F'}{v}\right\|_p^q,$$

что доказывает неравенство (2.2.29). Теперь при условии (2.2.27) теорема будет установлена, если мы докажем, что

$$\mathscr{B}_{MR} \lesssim C. \tag{2.2.30}$$

Для этого достаточно показать, что $\mathscr{B}_{MR}^\pm \lesssim C$, где

$$\mathscr{B}_{MR}^\pm = \left(\int_0^\infty \left[\int_{\delta^\pm(t)} w^q\right]^{r/p}\left[\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right]^{r/p'} w^q(t)\,dt\right)^{1/r},$$

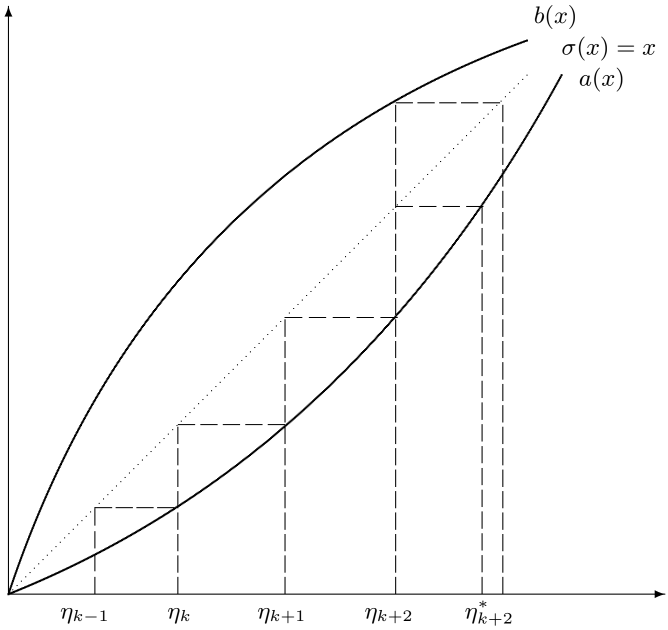

Рис. 2.2.7

и $\delta^-(t) = [b^{-1}(t), t]$, $\delta^+(t) = [t, a^{-1}(t)]$. Мы приводим рассуждения для неравенства $\mathscr{B}^+_{MR} \lesssim C$; для $\mathscr{B}^-_{MR} \lesssim C$ аргументация аналогична.

Пусть $\eta_0 = 1$ и последовательность $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset (0, \infty)$ определена формулой (2.1.7). Кроме того, положим

$$\eta^*_k := \min\{\eta^+_k, \eta_{k+1}\}.$$

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим пять соседних точек η_{k-1}, η_k, η_{k+1}, η_{k+2}, η^*_{k+2} и положим

$$g_k(t) = \chi_{[\eta_{k-1},\eta_{k+2}]}(t) \int_{\eta_{k-1}}^{t} \left(\int_s^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{s} v^{p'}\right)^{r/(pq')} v^{p'}(s)\, ds.$$

На интервале $[\eta_{k-1}, \eta^*_{k+2}]$ определим функцию

$$h_k(t) = \begin{cases} g_k(t), & t \notin [\eta_{k+2}, \eta^*_{k+2}], \\ g_k(\eta_{k+2})\Omega_{k+2}(t), & t \in [\eta_{k+2}, \eta^*_{k+2}], \end{cases}$$

где

$$\Omega_l(t) = \left(\int_{\eta_l}^{\eta^*_l} v^{p'}\right)^{-1} \int_t^{\eta^*_l} v^{p'}(s)\, ds.$$

Обозначим

$$\lambda_k := \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} \left(\int_s^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{s} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(s)\, ds. \tag{2.2.31}$$

Далее, найдем представление

$$h_k(t) = \sum_{i=1}^{3} h_{k,i}(t), \tag{2.2.32}$$

где $h_{k,i} \in \mathscr{L}$, $i = 1, 2, 3$. Для этого зададим $h_{k,1}$ по формуле

$$h_{k,1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\eta_{k-1}, \eta_k^*], \\ h_k(t), & t \in [\eta_{k-1}, \eta_k], \\ g_k(\eta_k)\Omega_k(t), & t \in [\eta_k, \eta_k^*]. \end{cases}$$

Так как $\eta_k^- = \eta_{k-1}$, то $\operatorname{supp} h_{k,1} \subseteq [\eta_k^-, \eta_k^*] \subseteq [\eta_k^-, \eta_k^+]$, поэтому $h_{k,1} \in \mathscr{L}$. Далее, пусть

$$h_k^{(1)}(t) := h_k(t) - h_{k,1}(t).$$

Определим

$$h_{k,2}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\eta_k, \eta_{k+1}^*], \\ h_k^{(1)}(t), & t \in [\eta_k, \eta_{k+1}], \\ h_k^{(1)}(\eta_{k+1})\Omega_{k+1}(t), & t \in [\eta_{k+1}, \eta_{k+1}^*]. \end{cases}$$

Очевидно, что $h_{k,2} \in \mathscr{L}$, а также $h_{k,3} \in \mathscr{L}$, где

$$h_{k,3}(t) = h_k^{(1)}(t) - h_{k,2}(t),$$

при этом (2.2.32) выполняется. Еще нам потребуются оценки

$$\left\| \frac{h'_{k,i}}{v} \right\|_p^p \lesssim \lambda_k, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.2.33}$$

Запишем

$$\kappa_1 := \left\| \frac{h'_{k,1}}{v} \right\|_p^p = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} |h'_k(s)|^p v^{-p}(s)\, ds + g_k^p(\eta_k) \int_{\eta_k}^{\eta_k^*} |\Omega'_k(s)|^p v^{-p}(s)\, ds =: \kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}.$$

Очевидно, что

$$\kappa_{1,1} = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left(\int_s^{\eta_{k+2}} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-1}}^s v^{p'} \right)^{r/q'} v^{p'}(s)\, ds \leqslant \lambda_k.$$

Из неравенства Гёльдера следует

$$g_k^p(\eta_k) \leqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left(\int_s^{\eta_{k+2}} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-1}}^s v^{p'} \right)^{r/q'} v^{p'}(s)\, ds \left(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} v^{p'} \right)^{p-1}.$$

Поскольку

$$\int_{\eta_k}^{\eta_k^*} |\Omega'_k(s)|^p v^{-p}(s)\, ds = \left(\int_{\eta_k}^{\eta_k^*} v^{p'} \right)^{1-p},$$

то

$$\kappa_{1,2} \leqslant \lambda_k \left(\int_{\eta_k^-}^{\eta_k} v^{p'} \right)^{p-1} \left(\int_{\eta_k}^{\eta_k^*} v^{p'} \right)^{1-p}.$$

Если $\eta_k^* = \eta_k^+$, то $\kappa_{1,2} \leqslant \lambda_k$ в силу (2.2.2) и (2.2.27). Заметим, что

$$\int_{\eta_{k-1+j}^-}^{\eta_{k-1+j}} v^{p'} = \int_{\eta_{k-1+j}}^{\eta_{k-1+j}^+} v^{p'} \leqslant \int_{\eta_{k+j}^-}^{\eta_{k+j}^+} v^{p'} = 2 \int_{\eta_{k-1+j}}^{\eta_{k+j}} v^{p'} \tag{2.2.34}$$

для $j \geqslant 0$. При $j=1$ это влечет $\kappa_{1,2} \leqslant 2^{p-1}\lambda_k$ в случае $\eta_k^* = \eta_{k+1}$. Таким образом, (2.2.33) для $i=1$ доказано. Так как $h_k^{(1)}(\eta_{k+1}) = h_k(\eta_{k+1})$, мы можем записать для $i=2$ в (2.2.33)

$$\begin{aligned}\kappa_2 := \left\|\frac{h'_{k,2}}{v}\right\|_p^p &= \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} |h'_k(s) - h'_{k,1}(s)|^p v^{-p}(s)\,ds + g_k^p(\eta_{k+1})\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} |\Omega'_{k+1}(s)|^p v^{-p}(s)\,ds \\ &\leqslant \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} |h'_k(s)|^p v^{-p}(s)\,ds + g_k^p(\eta_k)\int_{\eta_k}^{\eta_k^*} |\Omega'_k(s)|^p v^{-p}(s)\,ds \\ &\quad + g_k^p(\eta_{k+1})\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} |\Omega'_{k+1}(s)|^p v^{-p}(s)\,ds \\ &=: \kappa_{2,1} + \kappa_{2,2} + \kappa_{2,3}.\end{aligned}$$

Имеем $\kappa_{2,2} = \kappa_{1,2} \lesssim \lambda_k$, и по аналогии с $\kappa_{1,i}$, $i=1,2$, можно показать, что $\kappa_{2,i} \lesssim \lambda_k$ для $i = 1,3$. Далее, в силу того, что

$$\begin{aligned}g_k(t) &\geqslant \left(\int_t^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \int_{\eta_{k-1}}^t \left(\int_{\eta_{k-1}}^s v^{p'}\right)^{r/(pq')} v^{p'}(s)\,ds \\ &\approx \left(\int_t^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-1}}^t v^{p'}\right)^{r/(p'q)}, \qquad t \in [\eta_{k-1}, \eta_{k+2}],\end{aligned}$$

выполняется оценка снизу

$$\|h_k w\|_q^q \geqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} |g_k(t)|^q w^q(t)\,dt \gtrsim \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} \left(\int_t^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\eta_{k-1}}^t v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt,$$

откуда интегрированием по частям получаем

$$\|h_k w\|_q^q \gtrsim \lambda_k. \tag{2.2.35}$$

Образуем функции

$$h_i = \sum_{|k|\leqslant N} h_{k,i} = \sum_{|k|\leqslant N} h_{2k,i} + \sum_{|k|\leqslant N} h_{2k+1,i} =: F_{1,i} + F_{2,i},$$

где $N \in \mathbb{N}$. Носители функций $h_{2k,i}$, $k \in \mathbb{Z}$, при фиксированном $i = 1,2,3$ попарно не пересекаются. Поэтому $F_{1,i} \in \mathscr{L}$, и по той же причине $F_{2,i} \in \mathscr{L}$. Поскольку

$$1 \leqslant \sum_{|k|\leqslant N} \chi_{\operatorname{supp} h_k}(x) \leqslant 4, \qquad x \in \bigcup_{|k|\leqslant N} \operatorname{supp} h_k,$$

то, полагая

$$\Lambda_N := \sum_{|k|\leqslant N} \lambda_k,$$

в силу (2.2.32)–(2.2.35) и (2.2.28) находим

$$\Lambda_N^{1/q} \lesssim \left\|\sum_{|k|\leqslant N} h_k w\right\|_q \leqslant \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^2 \|F_{j,i} w\|_q \leqslant C\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^2 \left\|\frac{F'_{j,i}}{v}\right\|_p \lesssim C\left(\sum_{|k|\leqslant N, i}\left\|\frac{h'_{k,i}}{v}\right\|_p^p\right)^{1/p} \lesssim C\Lambda_N^{1/p}.$$

Отсюда $C \gtrsim \Lambda_N^{1/r}$, и полагая $N \to \infty$, мы получаем $C \gtrsim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k$, где

$$\lambda_k \gtrsim \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \left(\int_s^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\eta_{k-1}}^s v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(s)\,ds$$

$$\geqslant \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \left(\int_{\delta^+(s)} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta^-(s)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(s)\,ds.$$

Требуемая оценка $C \gtrsim \mathscr{B}^+_{MR}$ теперь следует из (2.2.2) и (2.2.27).

Неравенство $C \gtrsim \mathscr{B}^-_{MR}$ доказывается с помощью аналогичной конструкции и интервалов, формируемых последовательностью (2.1.8). Таким образом, оценка (2.2.30) справедлива, что с учетом (2.2.29) означает выполнение неравенства $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{B}_{MR}$ в случае $\sigma(x) = x$.

Теперь избавимся от ограничения (2.2.27). Пусть

$$\widetilde{f}(t) = f(\sigma(t))[\sigma'(t)]^{1/p}, \qquad \widetilde{a}(x) = \sigma^{-1}(a(x)), \qquad \widetilde{b}(x) = \sigma^{-1}(b(x)). \tag{2.2.36}$$

Тогда из неравенства

$$\|\mathscr{H} f\|_q \leqslant \|\mathscr{H}\| \|f\|_p \tag{2.2.37}$$

путем замены переменных в обеих частях следует неравенство вида

$$\left(\int_0^\infty w^q(x) \left|\int_{\widetilde{a}(x)}^{\widetilde{b}(x)} \widetilde{f}\widetilde{v}\right|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \|\mathscr{H}\| \left(\int_0^\infty |\widetilde{f}|^p\right)^{1/p} \tag{2.2.38}$$

с $\widetilde{v}(y) = v(\sigma(y))[\sigma'(y)]^{1/p'}$. Нетрудно видеть, что

$$\int_{\widetilde{a}(x)}^{x} \widetilde{v}^{p'} = \int_{a(x)}^{\sigma(x)} v^{p'} = \int_{\sigma(x)}^{b(x)} v^{p'} = \int_x^{\widetilde{b}(x)} \widetilde{v}^{p'}, \tag{2.2.39}$$

поэтому фарватером для $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ и $\widetilde{v}$ является $\widetilde{\sigma}(x) = x$. Отсюда по доказанному выше следует, что $\widetilde{\mathscr{B}}_{MR} \lesssim \|\mathscr{H}\|$, где

$$\widetilde{\mathscr{B}}^r_{MR} = \int_0^\infty \left(\int_{\widetilde{\delta}(t)} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\widetilde{\Delta}(t)} \widetilde{v}^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt.$$

Поскольку

$$\widetilde{\delta}(t) := [\widetilde{b}^{-1}(\widetilde{\sigma}(t)), \widetilde{a}^{-1}(\widetilde{\sigma}(t))] = [b^{-1}(\sigma(t)), a^{-1}(\sigma(t))] = \delta(t),$$

а также $\int_{\widetilde{\Delta}(t)} \widetilde{v}^{p'} = \int_{\Delta(t)} v^{p'}$, то $\widetilde{\mathscr{B}}_{MR} = \mathscr{B}_{MR}$.

Утверждение теоремы о компактности при $q < p$ есть прямое следствие полученного критерия ограниченности и теоремы Андо.

2.2.3. Критерии типа Томаселли и Перссона–Степанова. В этом пункте даны альтернативы характеристик (1.5.16)–(1.5.19) для оператора Харди–Стеклова (2.2.1).

Через $\sigma^{-1}(y)$ будем обозначать функцию, обратную к фарватеру $\sigma(x)$. Положим

$$\Delta(t) = (a(t), b(t)), \qquad \theta(t) = (\sigma^{-1}(a(t)), \sigma^{-1}(b(t))).$$

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Если* $1 < p \leqslant q < \infty$, *то*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{A}_T, \tag{2.2.40}$$

где

$$\mathscr{A}_T := \sup_{t>0} \left(\int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{-1/p}.$$

В случае, когда $0 < q < p < \infty$ *и* $p > 1$, *верна оценка*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{B}_{PS}, \tag{2.2.41}$$

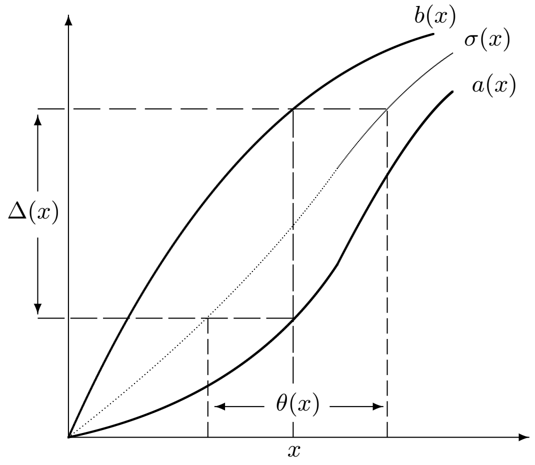

Рис. 2.2.8

где с $1/r = 1/q - 1/p$

$$\mathscr{B}_{PS} := \left(\int_0^\infty \left[\int_{\theta(t)} \left\{ \int_{\Delta(x)} v^{p'} \right\}^q w^q(x)\,dx \right]^{r/p} \left[\int_{\Delta(t)} v^{p'} \right]^{q-r/p} w^q(t)\,dt \right)^{1/r}.$$

Доказательство. *Оценка на* $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ *сверху.* Для заданных граничных функций $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющих условиям (2.1.5), определим последовательность точек $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset (0,\infty)$ согласно формуле (2.1.6), $\xi_0 = 1$. Обозначим

$$\xi_k^- = \sigma^{-1}(a(\xi_k)), \qquad \xi_k^+ = \sigma^{-1}(b(\xi_k)),$$
$$\Delta_k = [\xi_k^-, \xi_k^+] = \Delta_k^- \cup \Delta_k^+, \qquad \Delta_k^- = [\xi_k^-, \xi_k], \quad \Delta_k^+ = [\xi_k, \xi_k^+].$$

В силу (2.2.2) верно, что

$$\frac{1}{2}\int_{\Delta(t)} v^{p'} \leqslant \int_{a(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'} \leqslant \int_{\Delta(t)} v^{p'}, \qquad \text{если} \quad t \in \Delta_k^-, \tag{2.2.42}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Delta(t)} v^{p'} \leqslant \int_{a(t)}^{b(\xi_k)} v^{p'} \leqslant \int_{\Delta(t)} v^{p'}, \qquad \text{если} \quad t \in \Delta_k^+. \tag{2.2.43}$$

По аналогии с доказательством теоремы 2.3 представляем исходный оператор $\mathscr{H}$ в виде суммы четырех последовательностей блочно-диагональных операторов:

$$\mathscr{H}f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_{k,1}f(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_{k,2}f(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k,1}f(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k,2}f(x). \tag{2.2.44}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\mathscr{H}f\|_q^q &= \sum_k \|\mathscr{H}f\|^q_{L^q(\Delta_k)} \\ &\approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^-)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|S_{k,2}f\|^q_{L^q(\Delta_k^-)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{k,2}f\|^q_{L^q(\Delta_k^+)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|S_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^+)}. \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

Сначала рассмотрим операторы $S_{k,2}$ и $T_{k,2}$ трапецевидной формы. В случае $1 < p \leqslant q < \infty$, используя оценку (1.5.34), из леммы 1.10 находим

$$\|S_{k,2}\|^q \approx \sup_{t\in\Delta_k^-} \int_{\xi_k^-}^t \left[\int_{a(\xi_k)}^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx \left(\int_{a(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'}\right)^{-q/p}.$$

Для всех $t \in [\xi_k^-, \xi_k]$ здесь выполнено включение $(\xi_k^-, t) \subset [\sigma^{-1}(a(t)), t] \subset \theta(t)$, и $(a(\xi_k), b(x)) \subset \Delta(x)$ для $x \in (\xi_k^-, t) \subset (\xi_k^-, \xi_k)$. Следовательно, с учетом (2.2.42)

$$\|S_{k,2}\|^q \lesssim \sup_{t\in\Delta_k^-} \int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{-q/p} \leqslant \mathscr{A}_T^q. \tag{2.2.46}$$

Аналогично, используя оценку (1.5.40) из леммы 1.11 и (2.2.43), получаем

$$\|T_{k,2}\|^q \lesssim \sup_{t\in\Delta_k^+} \int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{-q/p} \lesssim \mathscr{A}_T^q. \tag{2.2.47}$$

Если $0 < q < p < \infty$ и $p > 1$, то с учетом (1.5.43) из леммы 1.12

$$\|S_{k,2}\|^r \approx \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\xi_k^-}^t \left[\int_{a(\xi_k)}^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p} \left(\int_{a(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'}\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt.$$

Для $t \in [\xi_k^-, \xi_k]$ выполнены включения $(\xi_k^-, t) \subset \theta(t)$ и $(a(\xi_k), b(t)) \subset \Delta(t)$, а также $(a(\xi_k), b(x)) \subset \Delta(x)$ для любого $x \in (\xi_k^-, t) \subset (\xi_k^-, \xi_k)$. Кроме того, $a(\xi_k) \leqslant \sigma(t)$, если $t \in [\xi_k^-, \xi_k]$. Поэтому, принимая во внимание (2.2.42), получаем

$$\begin{aligned} \|S_{k,2}\|^r &\leqslant \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)dx\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^q \left(\int_{\sigma(t)}^{b(t)} v^{p'}\right)^{-r/p} w^q(t)\,dt \\ &\overset{(2.2.2)}{\simeq} \left(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}\right)^r, \end{aligned} \tag{2.2.48}$$

где

$$\left(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}\right)^r := \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt.$$

Аналогично, применяя (1.5.51) из леммы 1.13, а также оценку (2.2.43), находим

$$\|T_{k,2}\|^r \lesssim \left(\mathscr{B}_{\Delta_k^+}\right)^r := \int_{\xi_k}^{\xi_k^+} \left(\int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt. \tag{2.2.49}$$

Чтобы оценить нормы $\|T_{k,1}\|$ и $\|S_{k,1}\|$ соответствующих операторов $T_{k,1}$ и $S_{k,1}$ треугольного вида, введем последовательности $\{t_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant i_b(k) - 1$, и $\{s_j\}$, $0 \leqslant j \leqslant j_a(k) - 1$, согласно конструкциям в леммах 2.2 и 2.3 при $c = \xi_k$. Тогда операторы $T_{k,1}f(x)$, $x \in \Delta_k^-$, и $S_{k,1}f(x)$, $x \in \Delta_k^+$, распадаются в суммы:

$$T_{k,1}f(x) = \sum_{i=0}^{i_b(k)-1} T_{k,1}^{(i)}f(x) := \sum_{i=0}^{i_b(k)-1} [T_{k,1}f(x)\chi_{(t_i,t_{i+1})}(x)],$$

$$S_{k,1}f(x) = \sum_{j=0}^{j_a(k)-1} S_{k,1}^{(j)}f(x) := \sum_{j=0}^{j_a(k)-1} [S_{k,1}f(x)\chi_{(s_j,s_{j+1})}(x)].$$

В случае $1 < p \leqslant q < \infty$, применяя (1.5.39) из леммы 1.11, извлекаем для $T^{(i)}_{k,1}$, $0 \leqslant i \leqslant i_b - 1$, следующую оценку:

$$\|T^{(i)}_{k,1}\|^q \approx \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} w^q \biggl(\int_{a(t)}^{a(\xi_k)} v^{p'}\biggr)^{q/p'} \leqslant \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} w^q \biggl(\int_{a(\xi_k^-)}^{\sigma(\xi_k^-)} v^{p'}\biggr)^{q/p'}$$
$$\overset{(2.2.2)}{=} \int_{t_i}^{t_{i+1}} w^q \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}\biggr)^{q/p'} \overset{(3.2.16)}{=} 2^{-i\,q/p'} \int_{t_i}^{t_{i+1}} w^q \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_i)} v^{p'}\biggr)^{q/p'}.$$

Так как $q/p' = q - q/p$ и $(t_i, t) \subseteq (\xi_k^-, t) \subset \theta(t)$ для $t \in [\xi_k^-, \xi_k]$, получаем, учитывая (2.2.4),

$$2^{i\,q/p'}\|T^{(i)}_{k,1}\|^q \overset{(2.2.4)}{\lesssim} 2^{q/p} \int_{t_i}^{t_{i+1}} w^q \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_i)} v^{p'}\biggr)^{q} \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_{i+1})} v^{p'}\biggr)^{-q/p}$$
$$\lesssim \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} \int_{t_i}^{t} \biggl[\int_{a(\xi_k)}^{b(x)} v^{p'}\biggr]^q w^q(x)\,dx \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'}\biggr)^{-q/p}$$
$$\overset{(2.2.42)}{\lesssim} \sup_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} \int_{\theta(t)} \biggl[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\biggr]^q w^q(x)\,dx \biggl(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\biggr)^{-q/p} \leqslant \mathscr{A}_T^q. \tag{2.2.50}$$

Поэтому в силу $p \leqslant q$ верна оценка

$$\|T_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^-)} = \sum_{i=0}^{i_b-1} \|T^{(i)}_{k,1}f\|^q_{L^q(t_i,t_{i+1})} \leqslant \sum_{i=0}^{i_b-1} \|T^{(i)}_{k,1}\|^q_{L^p(a(t_i),a(\xi_k))\to L^q(t_i,t_{i+1})} \|f\|^q_{L^p(a(t_i),a(\xi_k))}$$
$$\overset{(2.2.50)}{\lesssim} \mathscr{A}_T^q \|f\|^q_{L^p(a(\xi_k^-),a(\xi_k))} \sum_{i=0}^{i_b-1} 2^{-i\,q/p'} \lesssim \mathscr{A}_T^q \|f\|^q_{L^p(a(\xi_k^-),a(\xi_k))}. \tag{2.2.51}$$

Аналогично, из (1.5.33) (см. лемму 1.10), используя (2.2.14), (2.2.12) и (2.2.43), получаем

$$\|S_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^+)} \lesssim \mathscr{A}_T^q \|f\|^q_{L^p(b(\xi_k),b(\xi_k^+))}. \tag{2.2.52}$$

В случае $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ для $T^{(i)}_{k,1}$, $0 \leqslant i \leqslant i_b - 1$, применяя (1.5.49) из леммы 1.13, получаем

$$\|T^{(i)}_{k,1}\|^r \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \biggl(\int_{t_i}^{t} w^q\biggr)^{r/p} \biggl(\int_{a(t)}^{a(\xi_k)} v^{p'}\biggr)^{r/p'} w^q(t)\,dt$$
$$\leqslant \biggl(\int_{a(\xi_k^-)}^{\sigma(\xi_k^-)} v^{p'}\biggr)^{r/p'} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \biggl(\int_{t_i}^{t} w^q\biggr)^{r/p} w^q(t)\,dt$$
$$\overset{(2.2.2)}{=} \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}\biggr)^{r/p'} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \biggl(\int_{t_i}^{t} w^q\biggr)^{r/p} w^q(t)\,dt$$
$$\overset{(2.2.7)}{=} 2^{-i\,r/p'} \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_i)} v^{p'}\biggr)^{r/p'} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \biggl(\int_{t_i}^{t} w^q\biggr)^{r/p} w^q(t)\,dt.$$

Используя соотношение $r/p' = q \cdot r/p + q - r/p$, запишем

$$2^{i\,r/p'}\|T^{(i)}_{k,1}\|^r \lesssim \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_i)} v^{p'}\biggr)^{q\cdot r/p + q - r/p} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \biggl(\int_{t_i}^{t} w^q\biggr)^{r/p} w^q(t)\,dt$$
$$\overset{(2.2.4)}{=} 2^{r/p} \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_i)} v^{p'}\biggr)^{q\cdot r/p + q} \biggl(\int_{a(\xi_k)}^{b(t_{i+1})} v^{p'}\biggr)^{-r/p} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \biggl(\int_{t_i}^{t} w^q\biggr)^{r/p} w^q(t)\,dt$$

$$\leqslant 2^{r/p} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t} \left[\int_{a(\xi_k)}^{b(x)} v^{p'} \right]^q w^q(x)\,dx \right)^{r/p} \left(\int_{a(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'} \right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt$$
$$\overset{(2.2.42)}{\approx} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'} \right]^q w^q(x)\,dx \right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'} \right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt.$$

Так как $(t_i, t) \subseteq (\xi_k^-, t) \subset \theta(t)$ для $t \in [\xi_k^-, \xi_k]$, то

$$2^{i\,r/p'} \|T_{k,1}^{(i)}\|^r \lesssim \big(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}^{(i)}\big)^r = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{\theta(t)} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'} \right]^q w^q(x)\,dx \right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v^{p'} \right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt. \tag{2.2.53}$$

Поэтому, применяя неравенство Гёльдера с показателями r/q и p/q, получаем, что

$$\|T_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^-)} = \sum_{i=0}^{i_b-1} \|T_{k,1}^{(i)} f\|^q_{L^q(t_i,t_{i+1})} \leqslant \sum_{i=0}^{i_b-1} \|T_{k,1}^{(i)}\|^q_{L^p(a(t_i),a(\xi_k))\to L^q(t_i,t_{i+1})} \|f\|^q_{L^p(a(t_i),a(\xi_k))}$$
$$\overset{(2.2.53)}{\lesssim} \|f\|^q_{L^p(a(\xi_k^-),a(\xi_k))} \sum_{i=0}^{i_b-1} 2^{-i\,q/p'} \big(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}^{(i)}\big)^q$$
$$\leqslant \|f\|^q_{L^p(a(\xi_k^-),a(\xi_k))} \left(\sum_{i=0}^{i_b-1} \big(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}^{(i)}\big)^r \right)^{q/r} \left(\sum_{i=0}^{i_b-1} 2^{-i\,p/p'} \right)^{q/p}$$
$$\lesssim \big(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}\big)^q \|f\|^q_{L^p(a(\xi_k^-),a(\xi_k))}. \tag{2.2.54}$$

Аналогично, из (1.5.41) (см. лемму 1.12), используя (2.2.43), (2.2.14) и (2.2.12), извлекаем

$$\|S_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^+)} \lesssim \big(\mathscr{B}_{\Delta_k^+}\big)^q \|f\|^q_{L^p(b(\xi_k),b(\xi_k^+))}. \tag{2.2.55}$$

Так как каждая из последовательностей $\{T_{k,1}\}$, $\{T_{k,2}\}$, $\{S_{k,1}\}$ и $\{S_{k,2}\}$ состоит из блочно-диагональных операторов, то, пользуясь леммой 2.1, мы получаем оценки следующего вида для каждого из слагаемых в сумме (2.2.45): если $1 < p \leqslant q < \infty$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^-)} \overset{(2.2.51)}{\lesssim} \mathscr{A}_T^q \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|f\|^q_{L^p(a(\xi_k^-),a(\xi_k))} \leqslant \mathscr{A}_T^q \|f\|_p^q;$$

для $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ в силу неравенства Гёльдера выполнено

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{k,1}f\|^q_{L^q(\Delta_k^-)} \overset{(2.2.54)}{\lesssim} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\mathscr{B}_{\Delta_k^-}\Big)^r \right)^{1/r} \|f\|_p \leqslant \mathscr{B}_{PS} \|f\|_p.$$

Аналогичные оценки верны для $\{T_{k,2}\}$, $\{S_{k,1}\}$ и $\{S_{k,2}\}$ в силу (2.2.47), (2.2.52), (2.2.46) при $1 < p \leqslant q < \infty$ и на основе (2.2.49), (2.2.55), (2.2.48) в случае $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ соответственно. С учетом (2.2.45) это дает верхние оценки в (2.2.40) и (2.2.41).

Оценка на $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ *снизу*. Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Сначала покажем, что

$$\mathscr{A}_T \approx \mathscr{A}_{T,1} + \mathscr{A}_{T,2},$$

где

$$\mathscr{A}_{T,1} := \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(\sigma(t))\leqslant s\leqslant t} \mathscr{A}_{T,1}(s,t), \qquad \mathscr{A}_{T,2} := \sup_{t>0} \sup_{t\leqslant s\leqslant a^{-1}(\sigma(t))} \mathscr{A}_{T,2}(t,s)$$

и

$$\mathscr{A}_{T,1}(s,t) := \left(\int_s^t \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{a(s)}^{\sigma(t)} v^{p'}\right)^{-1/p},$$

$$\mathscr{A}_{T,2}(t,s) := \left(\int_t^s \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\sigma(t)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{-1/p}.$$

Действительно, в силу (2.2.2)

$$\frac{1}{2}\int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'} \leqslant \int_{a(s)}^{\sigma(t)} v^{p'} \leqslant \int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'}, \qquad b^{-1}(\sigma(t)) \leqslant s \leqslant t; \tag{2.2.56}$$

$$\frac{1}{2}\int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'} \leqslant \int_{\sigma(t)}^{b(s)} v^{p'} \leqslant \int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'}, \qquad t \leqslant s \leqslant a^{-1}(\sigma(t)). \tag{2.2.57}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{T,1} &\approx \sup_{s>0}\left(\int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{-1/p} \sup_{s\leqslant t\leqslant \sigma^{-1}(b(s))}\left(\int_s^t \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q} \\ &= \sup_{s>0}\left(\int_s^{\sigma^{-1}(b(s))} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\Delta(s)} v^{p'}\right)^{-1/p}\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\mathscr{A}_{T,2} \approx \sup_{s>0}\left(\int_{\sigma^{-1}(a(s))}^{s} \left[\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\Delta(s)} v^{p'}\right)^{-1/p}.$$

Предположим, что $\|\mathscr{H}\| < \infty$, и подставим функцию

$$f_{s,t}(y) = v^{p'-1}(y)\chi_{[a(s),\sigma(t)]}(y), \qquad b^{-1}(\sigma(t)) \leqslant s \leqslant t,$$

в неравенство

$$\left(\int_0^\infty (\mathscr{H}f)^q(x)\,dx\right)^{1/q} \leqslant \|\mathscr{H}\|\left(\int_0^\infty f^p(y)\,dy\right)^{1/p}.$$

Так как $a(s) \leqslant a(x)$ и $\sigma(x) \leqslant \sigma(t)$ для $s \leqslant x \leqslant t$, получаем в силу (2.2.2)

$$\|\mathscr{H}\| \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_s^t \left[\int_{a(x)}^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{a(s)}^{\sigma(t)} v^{p'}\right)^{-1/p} \approx \mathscr{A}_{T,1}(s,t).$$

Следовательно, $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{A}_{T,1}(s,t)$ для всех $s \leqslant t$, и поэтому $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{A}_{T,1}$. Подставляя функцию

$$f_{t,s}(y) = v^{p'-1}(y)\chi_{[\sigma(t),b(s)]}(y), \qquad t \leqslant s \leqslant a^{-1}(\sigma(t)),$$

аналогично получаем $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{A}_{T,2}$.

Теперь пусть $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. По аналогии с доказательством теоремы 2.3 мы сначала докажем оценку $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{B}_{PS}$ при условии (2.2.27). Напомним, что в этом специальном случае мы обозначаем

$$x^- = a(x), \qquad x^+ = b(x), \qquad \Delta(x) = [x^-, x^+]$$

и доказываем справедливость неравенства

$$C \gtrsim \mathscr{B}_{PS}, \tag{2.2.58}$$

где C – наилучшая константа в дифференциальном неравенстве (2.2.28) на классе функций $\mathscr{L}$ из определения 2.4. Для (2.2.58) докажем поочередно оценки $C \gtrsim \mathscr{B}^{\pm}_{PS}$, где

$$\mathscr{B}^{\pm}_{PS} := \left(\int_0^\infty \left[\int_{\Delta^\pm(t)} \left\{\int_{\Delta(x)} v^{p'}\right\}^q w^q(x)\,dx\right]^{r/p} \left[\int_{\Delta(t)} v^{p'}\right]^{q-r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}$$

с $\Delta^-(t) = (t^-, t)$, $\Delta^+(t) = (t, t^+)$.

Мы частично будем использовать обозначения из доказательства теоремы 2.3, иногда сохраняя, а иногда и меняя их прежние значения. Чтобы доказать $C \gtrsim \mathscr{B}^-_{PS}$, определим последовательность (2.1.7) с $\eta_0 = 1$ и положим $\eta^*_k = \min\{\eta^+_k, \eta_{k+1}\}$.

Для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим пять соседних точек η_{k-2}, η_{k-1}, η_k, η_{k+1}, η^*_{k+1}. Пусть

$$f_k(t) = \chi_{[\eta_{k-2}, \eta_{k+1}]}(t)[g_k(t) + h_k(t)],$$

где

$$g_k(t) = \int_{\eta_{k-2}}^t \left(\int_s^{\eta_{k+1}} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right)^{r/(pq')} v^{p'}(s)\,ds,$$
$$h_k(t) = \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} v^{p'}\right)^{-r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^q w^q(s)\,ds\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-2}}^t v^{p'}\right).$$

На каждом промежутке $[\eta_{k-2}, \eta^*_{k+1}]$ определим функцию

$$\phi_k(t) = \begin{cases} f_k(t), & t \in [\eta_{k-2}, \eta_{k+1}], \\ f_k(\eta_{k+1})\Omega_{k+1}(t), & t \in [\eta_{k+1}, \eta^*_{k+1}], \end{cases}$$

где

$$\Omega_l(t) = \left(\int_{\eta_l}^{\eta^*_l} v^{p'}\right)^{-1} \int_t^{\eta^*_l} v^{p'}.$$

Обозначим

$$\nu_k := \lambda_k + \mu_k,$$

где

$$\lambda_k := \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_s^{\eta_{k+1}} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(s)\,ds,$$
$$\mu_k := \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} v^{p'}\right)^{-r/p} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^q w^q(s)\,ds\right)^{r/q}.$$

Чтобы найти представление вида

$$\phi_k(t) = \sum_{i=1}^3 \phi_{k,i}(t), \tag{2.2.59}$$

где $\phi_{k,i} \in \mathscr{L}$, $i = 1, 2, 3$, определим функцию $\phi_{k,1}(t)$ следующим образом:

$$\phi_{k,1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\eta_{k-2}, \eta^*_{k-1}], \\ \phi_k(t), & t \in [\eta_{k-2}, \eta_{k-1}], \\ \phi_k(\eta_{k-1})\Omega_{k-1}(t), & t \in [\eta_{k-1}, \eta^*_{k-1}]. \end{cases}$$

Так как $\eta^-_{k-1} = \eta_{k-2}$, то $\operatorname{supp}\phi_{k,1} \subseteq [\eta^-_{k-1}, \eta^*_{k-1}] \subseteq [\eta^-_{k-1}, \eta^+_{k-1}]$, и поэтому $\phi_{k,1} \in \mathscr{L}$. Положим

$$\phi_k^{(1)}(t) := \phi_k(t) - \phi_{k,1}(t)$$

и определим

$$\phi_{k,2}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\eta_{k-1}, \eta^*_k], \\ \phi_k^{(1)}(t), & t \in [\eta_{k-1}, \eta_k], \\ \phi_k^{(1)}(\eta_k)\Omega_k(t), & t \in [\eta_k, \eta^*_k]. \end{cases}$$

Функция $\phi_{k,2} \in \mathscr{L}$ так же, как и $\phi_{k,3}(t) := \phi_k^{(1)}(t) - \phi_{k,2}(t)$, принадлежит классу $\mathscr{L}$. Следовательно, (2.2.59) выполнено. Следующим шагом мы покажем, что

$$\left\| \frac{\phi'_{k,i}}{v} \right\|_p^p \lesssim \nu_k, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.2.60}$$

Для этого запишем

$$\kappa_1 := \left\| \frac{\phi'_{k,1}}{v} \right\|_p^p = \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} |\phi'_k(s)|^p v^{-p}(s)\,ds + f_k^p(\eta_{k-1}) \int_{\eta_{k-1}}^{\eta^*_{k-1}} |\Omega'_{k-1}(s)|^p v^{-p}(s)\,ds =: \kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \kappa_{1,1} &= \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} \left(\int_s^{\eta_{k+1}} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'} \right)^{r/q'} v^{p'}(s)\,ds \\ &\quad + \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} v^{p'} \right)^{-r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'} \right]^q w^q(s)\,ds \right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_k} v^{p'} \right) \\ &\leqslant \lambda_k + \mu_k = \nu_k. \end{aligned}$$

В силу неравенства Гёльдера с p и p'

$$\begin{aligned} f_k^p(\eta_{k-1}) &\approx \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} \left[\int_s^{\eta_{k+1}} w^q \right]^{r/(pq)} \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'} \right]^{r/(pq')} v^{p'}(s)\,ds \right)^p \\ &\quad + \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} v^{p'} \right)^{-r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'} \right]^q w^q(s)\,ds \right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} \right)^p \\ &\leqslant \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} \left(\int_s^{\eta_{k+1}} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'} \right)^{r/q'} v^{p'}(s)\,ds \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} \right)^{p-1} + \mu_k \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} \right)^{p-1} \\ &\leqslant (\lambda_k + \mu_k) \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} \right)^{p-1} = \nu_k \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\eta_{k-1}}^{\eta^*_{k-1}} |\Omega'_{k-1}(s)|^p v^{-p}(s)\,ds = \left(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta^*_{k-1}} v^{p'} \right)^{1-p},$$

то

$$\kappa_{1,2} \lesssim \nu_k \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} \right)^{p-1} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta^*_{k-1}} v^{p'} \right)^{1-p},$$

и в силу (2.2.2), (2.2.27) и (2.2.34) с $j = 0$ выполнено $\kappa_{1,2} \lesssim \nu_k$. Отсюда получаем, что (2.2.60) доказано в случае $i = 1$. Так как $\phi_k^{(1)}(\eta_k) = \phi_k(\eta_k)$ и $\phi_{k,3}(\eta_{k+1}) = \phi_k(\eta_{k+1})$, остальные случаи в (2.2.60) следуют аналогично $i = 1$.

Из оценки

$$g_k(t) \geqslant \left(\int_t^{\eta_{k+1}} w^q\right)^{r/(pq)} \int_{\eta_{k-2}}^t \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right)^{r/(pq')} v^{p'}(s)\,ds$$
$$\approx \left(\int_t^{\eta_{k+1}} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-2}}^t v^{p'}\right)^{r/(p'q)}, \qquad t \in [\eta_{k-2}, \eta_{k+1}],$$

вытекает неравенство

$$\|\phi_k w\|_q^q \gtrsim \nu_k. \tag{2.2.61}$$

Далее, определим функции

$$F_i = \sum_{|k|\leqslant N} \phi_{k,i} = \sum_{|k|\leqslant N} \phi_{2k,i} + \sum_{|k|\leqslant N} \phi_{2k+1,i} =: F_{1,i} + F_{2,i},$$

где $N \in \mathbb{N}$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ носители $\phi_{2k,i}$, $k \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются. Следовательно, $F_{1,i} \in \mathscr{L}$. По той же причине $F_{2,i} \in \mathscr{L}$. Заметим также, что

$$1 \leqslant \sum_{|k|\leqslant N} \chi_{\mathrm{supp}\phi_k}(x) \leqslant 4, \qquad x \in \bigcup_{|k|\leqslant N} \mathrm{supp}\ \phi_k.$$

На основе (2.2.59), (2.2.60) и (2.2.61) находим

$$\left(\sum_{|k|\leqslant N} \nu_k\right)^{1/q} \lesssim \left\|\sum_{|k|\leqslant N} \phi_k w\right\|_q \leqslant \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \|F_{j,i} w\|_q \leqslant C \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \left\|\frac{F'_{j,i}}{v}\right\|_p$$
$$\lesssim C\left(\sum_{|k|\leqslant N,\, i} \left\|\frac{\phi'_{k,i}}{v}\right\|_p^p\right)^{1/p} \lesssim C\left(\sum_{|k|\leqslant N} \nu_k\right)^{1/p}. \tag{2.2.62}$$

Отсюда, полагая $N \to \infty$, получаем, что $C \gtrsim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu_k\right)^{1/r}$. Пусть

$$\widetilde{\lambda}_k := \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_{\eta_{k-2}}^t \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^q w^q(s)\,ds\right)^{r/q} \left(\int_{\eta_{k-2}}^t v^{p'}\right)^{-r/q} v^{p'}(t)\,dt,$$
$$\lambda_k^* := \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_{\eta_{k-2}}^t \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^q w^q(s)\,ds\right)^{r/p} \left(\int_{\eta_{k-2}}^t v^{p'}\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt.$$

Отметим, что

$$\int_{\eta_{k-2}}^t \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^q w^q(s)\,ds = \int_{\eta_{k-2}}^t \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right)^q d\left(-\int_s^{\eta_{k+1}} w^q\right)$$
$$\leqslant q\int_{\eta_{k-2}}^t \int_s^{\eta_{k+1}} w^q \left(\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right)^{q-1} v^{p'}(s)\,ds$$
$$\simeq \int_{\eta_{k-2}}^t \left\{\int_s^{\eta_{k+1}} w^q \left(\int_{\eta_{k-1}}^s v^{p'}\right)^{q-1+q/2p}\right\} \left(\int_{\eta_{k-1}}^s v^{p'}\right)^{-q/(2p)} v^{p'}(s)\,ds;$$

применяя неравенство Гёльдера с показателями r/q и p/q, получаем

$$\leqslant \left(\int_{\eta_{k-2}}^t \left[\int_s^{\eta_{k+1}} w^q\right]^{r/q} \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^{r/q'+r/(2p)} v^{p'}(s)\,ds\right)^{q/r}$$
$$\times \left(\int_{\eta_{k-2}}^t \left[\int_{\eta_{k-2}}^s v^{p'}\right]^{-1/2} v^{p'}(s)\,ds\right)^{q/p}.$$

Это влечет

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_k &\lesssim \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}}\int_{\eta_{k-2}}^{t}\Big(\int_s^{\eta_{k+1}} w^q\Big)^{r/q}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{s} v^{p'}\Big)^{r/q'+r/(2p)} v^{p'}(s)\,ds\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t} v^{p'}\Big)^{r/(2p)-r/q} v^{p'}(t)\,dt\\ &= \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_s^{\eta_{k+1}} w^q\Big)^{r/q}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{s} v^{p'}\Big)^{r/q'+r/(2p)}\int_s^{\eta_{k+1}}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t} v^{p'}\Big)^{r/(2p)-r/q} v^{p'}(t)\,dt\, v^{p'}(s)\,ds\\ &\lesssim \lambda_k.\end{aligned}$$

Так как

$$\widetilde{\lambda}_k = \frac{p}{r}\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t}\Big[\int_{\eta_{k-2}}^{s} v^{p'}\Big]^q w^q(s)\,ds\Big)^{r/q} d\Big(-\Big[\int_{\eta_{k-2}}^{t} v^{p'}\Big]^{-r/p}\Big),$$

то $\widetilde{\lambda}_k = -\mu_k p/r + \lambda_k^* p/q$. Поэтому

$$\lambda_k^* = \frac{q}{p}\widetilde{\lambda}_k + \frac{q}{r}\mu_k \leqslant \max\Big\{\frac{q}{p},\frac{q}{r}\Big\}(\widetilde{\lambda}_k+\mu_k) \lesssim \lambda_k+\mu_k = \nu_k.$$

Получаем, что

$$C \gtrsim \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\nu_k\Big)^{1/r} \gtrsim \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda_k^*\Big)^{1/r}.$$

Применяя (2.2.34) с $j=0$, с учетом (2.2.2) получаем для $t\in[\eta_k,\eta_{k+1}]$

$$\int_{\eta_{k-2}}^{t} v^{p'} \leqslant \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-1}} v^{p'} + \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} v^{p'} + \int_{\eta_k}^{t^+} v^{p'} \leqslant 4\int_{\eta_k}^{t^+} v^{p'}. \tag{2.2.63}$$

Отсюда в силу (2.2.2) и (2.2.27)

$$\begin{aligned}\lambda_k^* &\geqslant \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t}\Big[\int_{\eta_{k-2}}^{s} v^{p'}\Big]^q w^q(s)\,ds\Big)^{r/p}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t} v^{p'}\Big)^{q-r/p} w^q(t)\,dt\\ &\overset{(2.2.63)}{\gtrsim} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_{\eta_{k-1}}^{t}\Big[\int_{\eta_{k-2}}^{s} v^{p'}\Big]^q w^q(s)\,ds\Big)^{r/p}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t} v^{p'}\Big)^{q}\Big(\int_{\eta_k}^{t^+} v^{p'}\Big)^{-r/p} w^q(t)\,dt\\ &\geqslant \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_{\eta_{k-1}}^{t}\Big[\int_{\Delta^-(s)} v^{p'}\Big]^q w^q(s)\,ds\Big)^{r/p}\Big(\int_{\Delta^-(t)} v^{p'}\Big)^{q}\Big(\int_{t^-}^{t^+} v^{p'}\Big)^{-r/p} w^q(t)\,dt\\ &\gtrsim \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_{\Delta^-(t)}\Big[\int_{\Delta(s)} v^{p'}\Big]^q w^q(s)\,ds\Big)^{r/p}\Big(\int_{\Delta(t)} v^{p'}\Big)^{q-r/p} w^q(t)\,dt,\end{aligned}$$

и требуемая оценка $C \gtrsim \mathscr{B}_{PS}^-$ доказана. Неравенство $C \gtrsim \mathscr{B}_{PS}^+$ может быть показано аналогичным способом с помощью интервалов, формируемых последовательностью (2.1.8). Таким образом, оценка (2.2.58) выполнена и, с учетом (2.2.29), имеем неравенство $\|\mathscr{H}\| \gtrsim \mathscr{B}_{PS}$ при условии $\sigma(x)=x$. Общий случай получается заменой переменных (2.2.36) в обеих частях (2.2.37). Переходом к неравенству (2.2.38) с $\widetilde{\sigma}(x)=x$ для $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ и $\widetilde{v}$ (см. (2.2.39)) неравенство $\widetilde{\mathscr{B}}_{PS} \lesssim \|\mathscr{H}\|$ получаем из предыдущих оценок для (2.2.38), где

$$\widetilde{\mathscr{B}}_{PS}^r = \int_0^\infty\Big(\int_{\widetilde{\Delta}(t)}\Big[\int_{\widetilde{\Delta}(s)}\widetilde{v}^{p'}\Big]^q w^q(s)\,ds\Big)^{r/p}\Big(\int_{\widetilde{\Delta}(t)}\widetilde{v}^{p'}\Big)^{q-r/p} w^q(t)\,dt.$$

Так как $\widetilde{\Delta}(t)=[\widetilde{a}(t),\widetilde{b}(t)]=\theta(t)$, то в силу (2.2.39) выполнено $\widetilde{\mathscr{B}}_{PS}=\mathscr{B}_{PS}$.

2.3. Обобщенные операторы Харди–Стеклова

Здесь представлены новые формы характеристик ограниченности и компактности для операторов (2.1.4) с ядрами $k(x,y) \in \mathscr{O}_b$ и/или $k(x,y) \in \mathscr{O}_a$.

Определение 2.5. Для заданных граничных функций $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющих условиям (2.1.5), чисел $p,q \in (1,\infty)$, функции $0 < k(x,y) < \infty$, п.в. непрерывной по совокупности переменных на $\mathscr{R}$, и весовых функций $0 < v,w < \infty$ п.в. на $(0,\infty)$ таких, что для любого фиксированного $x > 0$ функция $k^{p'}(x,y)v^{p'}(y)$ является локально интегрируемой на $(0,\infty)$ по переменной y, и для любого $y > 0$ произведение $k^q(x,y)w^q(x)$ локально интегрируемо на $(0,\infty)$ по x, определим два *k-фарватера* – функции $\sigma_k(x)$ и $\rho_k(y)$ такие, что $a(x) < \sigma_k(x) < b(x)$, $b^{-1}(y) < \rho_k(y) < a^{-1}(y)$ и

$$\int_{a(x)}^{\sigma_k(x)} k^{p'}(x,y)v^{p'}(y)\,dy = \int_{\sigma_k(x)}^{b(x)} k^{p'}(x,y)v^{p'}(y)\,dy, \qquad x > 0, \tag{2.3.1}$$

$$\int_{b^{-1}(y)}^{\rho_k(y)} k^q(x,y)w^q(x)\,dx = \int_{\rho_k(y)}^{a^{-1}(y)} k^q(x,y)w^q(x)\,dx, \qquad y > 0. \tag{2.3.2}$$

Обозначим $v_k(x,y) := k(x,y)v(y)$ и $w_k(x,y) := k(x,y)w(x)$. В силу (2.3.1) для $\sigma_k(x) \in [a(z),b(z)]$ выполнено

$$\int_{a(x)}^{\sigma_k(x)} v_k^{p'}(x,y)\,dy = \int_{a(x)}^{a(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy + \int_{a(z)}^{\sigma_k(x)} v_k^{p'}(x,y)\,dy, \tag{2.3.3}$$

$$\int_{a(z)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy = \int_{a(z)}^{\sigma_k(x)} v_k^{p'}(z,y)\,dy + \int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy. \tag{2.3.4}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_{a(x)}^{\sigma_k(x)} v_k^{p'}(x,y)\,dy &- \int_{a(z)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy\\ &= \int_{a(x)}^{a(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy - \int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy + \int_{a(z)}^{\sigma_k(x)} [v_k^{p'}(x,y) - v_k^{p'}(z,y)]\,dy. \end{aligned}\tag{2.3.5}$$

Аналогично, получаем

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_k(x)}^{b(x)} v_k^{p'}(x,y)\,dy &- \int_{\sigma_k(z)}^{b(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy\\ &= \int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy - \int_{b(x)}^{b(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy + \int_{\sigma_k(z)}^{b(x)} [v_k^{p'}(x,y) - v_k^{p'}(z,y)]\,dy. \end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Отсюда, в силу (2.3.1)

$$\int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy + \int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy \tag{2.3.7}$$

$$= \int_{a(x)}^{a(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy + \int_{b(x)}^{b(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy + \left\{\int_{a(z)}^{\sigma_k(x)} - \int_{\sigma_k(z)}^{b(x)}\right\}[v_k^{p'}(x,y) - v_k^{p'}(z,y)]\,dy, \tag{2.3.8}$$

т.е. снова в силу (2.3.1)

$$\int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy + \int_{\sigma_k(x)}^{\sigma_k(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy$$
$$= \int_{a(x)}^{a(z)} v_k^{p'}(x,y)\,dy + \int_{b(x)}^{b(z)} v_k^{p'}(z,y)\,dy + \left\{\int_{a(z)}^{\sigma_k(z)} - \int_{\sigma_k(x)}^{b(x)}\right\}[v_k^{p'}(x,y) - v_k^{p'}(z,y)]\,dy. \tag{2.3.9}$$

Заметим, что при $k \equiv \text{const}$ два последних равенства принимают форму (2.2.3). Отсюда в силу предположений определения 2.3.1 можно утверждать, что функция $\sigma_k(x)$ является непрерывной на $(0,\infty)$. Аналогично можно показать непрерывность k-фарватера $\rho_k(y)$ на $(0,\infty)$.

Пусть

$$\Theta(t) := \Theta^-(t) \cup \Theta^+(t), \qquad \vartheta(t) := \vartheta^-(t) \cup \vartheta^+(t),$$
$$\delta(t) := \delta^-(t) \cup \delta^+(t), \qquad \Delta(t) := \Delta^-(t) \cup \Delta^+(t),$$

где

$$\Theta^-(t) := [b^{-1}(t), \rho_k(t)), \qquad \Theta^+(t) := [\rho_k(t), a^{-1}(t)),$$
$$\vartheta^-(t) := [a(\rho_k(t)), t), \qquad \vartheta^+(t) := [t, b(\rho_k(t))),$$
$$\delta^-(t) := [b^{-1}(\sigma_k(t)), t), \qquad \delta^+(t) := [t, a^{-1}(\sigma_k(t))),$$
$$\Delta^-(t) := [a(t), \sigma_k(t)), \qquad \Delta^+(t) := [\sigma_k(t), b(t)).$$

Обозначим $r := p\,q/(p-q)$,

$$\mathscr{A}^{\pm}_{\rho_k} := \sup_{t>0} \mathscr{A}^{\pm}_{\rho_k}(t) := \sup_{t>0} \left(\int_{\Theta(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\vartheta^{\pm}(t)} v^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}^{\pm}_{\sigma_k} := \sup_{t>0} \mathscr{A}^{\pm}_{\sigma_k}(t) := \sup_{t>0} \left(\int_{\delta^{\pm}(t)} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{1/p'},$$

$$(\mathscr{B}^{\pm}_{\rho_k})^r := \int_0^\infty \mathscr{B}^{\pm}_{\rho_k}(t)\,dt := \int_0^\infty \left(\int_{\Theta(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_{\vartheta^{\pm}(t)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$(\mathscr{B}^{\pm}_{\sigma_k})^r := \int_0^\infty \mathscr{B}^{\pm}_{\sigma_k}(t)\,dt := \int_0^\infty \left(\int_{\delta^{\pm}(t)} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt,$$

$$\mathscr{A}_{\rho_k} := \sup_{t>0} \mathscr{A}_{\rho_k}(t) := \sup_{t>0} \left(\int_{\Theta(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_{\vartheta(t)} v^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_{\sigma_k} := \sup_{t>0} \mathscr{A}_{\sigma_k}(t) := \sup_{t>0} \left(\int_{\delta(t)} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{1/p'},$$

$$\mathscr{B}^r_{\rho_k} := \int_0^\infty \mathscr{B}_{\rho_k}(t)\,dt := \int_0^\infty \left(\int_{\Theta(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_{\vartheta(t)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt,$$

$$\mathscr{B}^r_{\sigma_k} := \int_0^\infty \mathscr{B}_{\sigma_k}(t)\,dt := \int_0^\infty \left(\int_{\delta(t)} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\Delta(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt.$$

Теорема 2.5. *Пусть ядро $k(x,y)$ оператора $\mathscr{K}$ вида (2.1.4) неотрицательно на $\mathscr{R}$, удовлетворяет всем условиям определения 2.5 и принадлежит классу типа Ойнарова $\mathscr{O}_b$. Предположим, что функции $\rho_k(y)$, $\sigma_k(x)$ являются строго возрастающими k-фарватерами.*

(a) *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Тогда*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}^- + \mathscr{A}_{\sigma_k}^+ \lesssim \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{A}_{\rho_k} + \mathscr{A}_{\sigma_k}. \tag{2.3.10}$$

Если $\mathscr{K}$ *компактен, то*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}^-, \mathscr{A}_{\sigma_k}^+ < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}^-(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}^+(t) = 0;$$

и обратно, $\mathscr{K}$ *является компактным, если*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}, \mathscr{A}_{\sigma_k} < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}(t) = 0.$$

(b) *Если* $1 < q < p < \infty$, *то*

$$\mathscr{B}_{\rho_k}^- + \mathscr{B}_{\sigma_k}^+ \lesssim \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{B}_{\rho_k} + \mathscr{B}_{\sigma_k}. \tag{2.3.11}$$

Более того, оператор $\mathscr{K}$ *компактен, если* $\mathscr{B}_{\rho_k}, \mathscr{B}_{\sigma_k} < \infty$; *и, если* $\mathscr{K}$ *является компактным из* $L^p(0,\infty)$ *в* $L^q(0,\infty)$, *то* $\mathscr{B}_{\rho_k}^-, \mathscr{B}_{\sigma_k}^+ < \infty$.

Доказательство. (a) *Оценка снизу*. Согласно утверждению (2.1.12) теоремы 2.1

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p\to L^q} \approx \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t} [\mathscr{A}_0(s,t) + \mathscr{A}_1(s,t)], \tag{2.3.12}$$

где $\mathscr{A}_0(s,t)$ и $\mathscr{A}_1(s,t)$ определены в (2.1.14) в (2.1.15) следующими выражениями:

$$\mathscr{A}_0(s,t) := \left(\int_s^t w_k^q(x,b(s))\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{a(t)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_1(s,t) := \left(\int_s^t w^q\right)^{1/q}\left(\int_{a(t)}^{b(s)} v_k^{p'}(s,y)\,dy\right)^{1/p'}.$$

Используя (2.3.2), находим

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\rho_k}^-(t) &= 2^{1/q}\left(\int_{\Theta^-(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\vartheta^-(t)} v^{p'}\right)^{1/p'}\\ &\simeq \left(\int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(s))}^{s} w_k^q(x,\rho_k^{-1}(s))\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{a(s)}^{\rho_k^{-1}(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}\\ &= \mathscr{A}_0(b^{-1}(\rho_k^{-1}(s)),s) \leqslant \sup_{t>0}\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t} \mathscr{A}_0(s,t).\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3.12) получаем $\mathscr{A}_{\rho_k}^- \lesssim \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$. Аналогично, оценка

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\sigma_k}^+(t) &\overset{(2.3.1)}{=} 2^{1/p'}\left(\int_{\delta^+(t)} w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\Delta^+(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{1/p'}\\ &= 2^{1/p'}\mathscr{A}_1(t,a^{-1}(\sigma_k(t))) \lesssim \sup_{t>0}\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t} \mathscr{A}_1(s,t)\end{aligned}$$

влечет $\mathscr{A}_{\sigma_k}^+ \lesssim \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$, и неравенство в левой части (2.3.10) доказано.

Оценка сверху. Обозначим $\tau_0 := \rho_k(a(t))$ и запишем

$$\begin{aligned}\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}_0(s,t) &\leqslant \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant \tau_0<t}\mathscr{A}_0(s,t)+\sup_{\tau_0\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}_0(s,t)\\ &\leqslant \sup_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\tau_0))\leqslant s\leqslant\tau_0}\left(\int_s^{a^{-1}(\rho_k^{-1}(\tau_0))} w_k^q(x,b(s))\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\rho_k^{-1}(\tau_0)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}\\ &\quad+\sup_{\tau_0\leqslant s\leqslant t}\left(\int_s^{a^{-1}(\rho_k^{-1}(s))} w_k^q(x,b(s))\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}\\ &=: H_1(\tau_0)+H_2(t).\end{aligned}$$

Действительно, если $t=a^{-1}(\rho_k^{-1}(\tau_0))$, то $(s,t)=(s,a^{-1}(\rho_k^{-1}(\tau_0)))$ и $(a(t),b(s))=(\rho_k^{-1}(\tau_0),b(s))$. Если же $\tau_0\leqslant s\leqslant t$, то $(s,t)\subset(s,a^{-1}(\rho_k^{-1}(s)))$ и $(a(t),b(s))\subset(a(s),b(s))$.

Для оценки $H_1(\tau_0)$ применим (2.1.9) с $y=\rho_k^{-1}(\tau_0)$ с $z=s$. Так как $b^{-1}(\rho^{-1}(\tau_0))\leqslant s\leqslant x\leqslant a^{-1}(\rho^{-1}(\tau_0))$, т.е. $b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant x\leqslant t$, то $k(x,b(s))\lesssim k(x,\rho_k^{-1}(\tau_0))$. Следовательно,

$$\begin{aligned}H_1(\tau_0)&\lesssim\left(\int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\tau_0))}^{a^{-1}(\rho_k^{-1}(\tau_0))} w_k^q(x,\rho_k^{-1}(\tau_0))\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{\rho_k^{-1}(\tau_0)}^{b(\tau_0)} v^{p'}\right)^{1/p'}\\ &=\left(\int_{b^{-1}(z)}^{a^{-1}(z)} w_k^q(x,z)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_z^{b(\rho_k(z))} v^{p'}\right)^{1/p'}=\mathscr{A}^+_{\rho_k}(z)\leqslant\mathscr{A}^+_{\rho_k}.\end{aligned}$$

Так как $s\leqslant x$ и $a(x)\leqslant\rho_k^{-1}(s)\leqslant b(s)$, т.е. $b^{-1}(\rho_k^{-1}(s))\leqslant s\leqslant x\leqslant a^{-1}(\rho_k^{-1}(s))$, мы получаем в $H_2(t)$, учитывая (2.1.9) с $z=s$ и $y=\rho_k^{-1}(s)$,

$$\begin{aligned}H_2(t)&\lesssim\sup_{\rho_k(a(t))\leqslant s\leqslant t}\left(\int_s^{a^{-1}(\rho_k^{-1}(s))} w_k^q(x,\rho_k^{-1}(s))\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{a(s)}^{b(s)} v^{p'}\right)^{1/p'}\\ &=\sup_{a(t)\leqslant z\leqslant\rho_k^{-1}(t)}\left(\int_{\rho_k(z)}^{a^{-1}(z)} w_k^q(x,z)\,dx\right)^{1/q}\left(\int_{a(\rho_k(z))}^{b(\rho_k(z))} v^{p'}\right)^{1/p'}\leqslant\mathscr{A}_{\rho_k}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\sup_{t>0}\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}_0(s,t)\lesssim\mathscr{A}_{\rho_k}. \tag{2.3.13}$$

Аналогично, полагая $\tau_1:=\sigma_k^{-1}(a(t))$, записываем

$$\begin{aligned}\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}_1(s,t)&\leqslant\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant\tau_1<t}\mathscr{A}_1(s,t)+\sup_{\tau_1\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}_1(s,t)\\ &\leqslant\sup_{b^{-1}(\sigma_k(\tau_1))\leqslant s\leqslant\tau_1}\left(\int_s^{a^{-1}(\sigma_k(\tau_1))} w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\sigma_k(\tau_1)}^{b(s)} v_k^{p'}(s,y)\,dy\right)^{1/p'}\\ &\quad+\sup_{\tau_1\leqslant s\leqslant t}\left(\int_s^{a^{-1}(\sigma_k(s))} w^q\right)^{1/q}\left(\int_{a(s)}^{b(s)} v_k^{p'}(s,y)\,dy\right)^{1/p'}\\ &=: H_3(\tau_1)+H_4(t).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $H_4(t)\leqslant\sup_{\sigma_k^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}^+_{\sigma_k}(s)\leqslant\mathscr{A}^+_{\sigma_k}$. Для оценки $H_3(\tau_1)$ применяем (2.1.9) с $z=s\leqslant\tau_1=x$ и $a(\tau_1)<\sigma_k(\tau_1)\leqslant y\leqslant b(s)$. Тогда

$$H_3(\tau_1)\lesssim\sup_{b^{-1}(\sigma_k(\tau_1))\leqslant s\leqslant\tau_1}\left(\int_s^{a^{-1}(\sigma_k(\tau_1))} w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\sigma_k(\tau_1)}^{b(s)} v_k^{p'}(\tau_1,y)\,dy\right)^{1/p'}\leqslant\mathscr{A}_{\sigma_k}(\tau_1)\leqslant\mathscr{A}_{\sigma_k}.$$

Поэтому

$$\sup_{t>0}\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t}\mathscr{A}_1(s,t)\lesssim\mathscr{A}_{\sigma_k}. \tag{2.3.14}$$

Объединяя (2.3.12) и (2.3.13) с (2.3.14), извлекаем требуемую верхнюю оценку на $\|\mathscr{K}\|$ в (2.3.10). Условия компактности в случае $1<p\leqslant q<\infty$ следуют из теоремы 2.1.

(b) Для доказательства *оценки* $\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ *сверху* в (2.3.11) положим $\xi_0=1$ и выберем точки ξ_i для всех $i\in\mathbb{Z}$ по формуле (2.1.6). Мы будем обозначать

$$\Delta_i=[\xi_i,\xi_{i+1}),\qquad \delta_i=[a(\xi_i),b(\xi_i)],\qquad i\in\mathbb{Z}.$$

Разбивая полуось $(0,\infty)$ точками $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, разложим оператор $\mathscr{K}$ в сумму

$$\mathscr{K}=\mathscr{T}+\mathscr{S} \tag{2.3.15}$$

двух блочно-диагональных операторов

$$\mathscr{T}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}T_i,\qquad \mathscr{S}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}S_i, \tag{2.3.16}$$

где

$$T_if(x)=w(x)\int_{a(x)}^{a(\xi_{i+1})}k(x,y)f(y)v(y)\,dy,\qquad T_i\colon L^p(\delta_i)\to L^q(\Delta_i),$$

$$S_if(x)=w(x)\int_{b(\xi_i)}^{b(x)}k(x,y)f(y)v(y)\,dy,\qquad S_i\colon L^p(\delta_{i+1})\to L^q(\Delta_i).$$

Ядра $k(x,y)$ операторов T_i и S_i удовлетворяют условию (2.1.9) при $z\leqslant x$, $x\in[\xi_i,\xi_{i+1}]$, и

$$a(x)\leqslant y\leqslant b(\xi_i),\qquad b(\xi_i)\leqslant y\leqslant b(z), \tag{2.3.17}$$

соответственно. Так как $\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}}[\xi_i,\xi_{i+1})=(0,\infty)$, то из (2.3.15), (2.3.16) получаем, что

$$\|\mathscr{K}f\|_q^q=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\|\mathscr{K}f\|^q_{L^q(\Delta_i)}\approx\sum_{i\in\mathbb{Z}}\|T_if\|^q_{L^q(\Delta_i)}+\sum_{i\in\mathbb{Z}}\|S_if\|^q_{L^q(\Delta_i)}. \tag{2.3.18}$$

Чтобы оценить норму оператора S_i, зафиксируем две точки

$$s_\rho:=b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})),\qquad s_\sigma:=\sigma_k^{-1}(b(\xi_i))=\sigma_k^{-1}(a(\xi_{i+1}))$$

и рассмотрим три возможных варианта их расположения:

$$\text{(i)}\quad s_\rho<s_\sigma,\qquad \text{(ii)}\quad s_\rho=s_\sigma,\qquad \text{(iii)}\quad s_\rho>s_\sigma.$$

В случае (i) имеем

$$S_if(x)=\sum_{j=1}^3 S_{i,j}f(x)+H_{i,0}f(x), \tag{2.3.19}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{i,1}f(x)&=\chi_{[\xi_i,s_\sigma]}(x)S_i(f\chi_{[b(\xi_i),b(s_\rho)]})(x),\\
S_{i,2}f(x)&=\chi_{[s_\rho,s_\sigma]}(x)S_i(f\chi_{[b(s_\rho),b(s_\sigma)]})(x),\\
S_{i,3}f(x)&=\chi_{[s_\sigma,\xi_{i+1}]}(x)S_i(f\chi_{[b(s_\rho),b(\xi_{i+1})]})(x),\\
H_{i,0}f(x)&=\chi_{[s_\sigma,\xi_{i+1}]}(x)S_i(f\chi_{[b(\xi_i),b(s_\rho)]})(x).
\end{aligned}$$

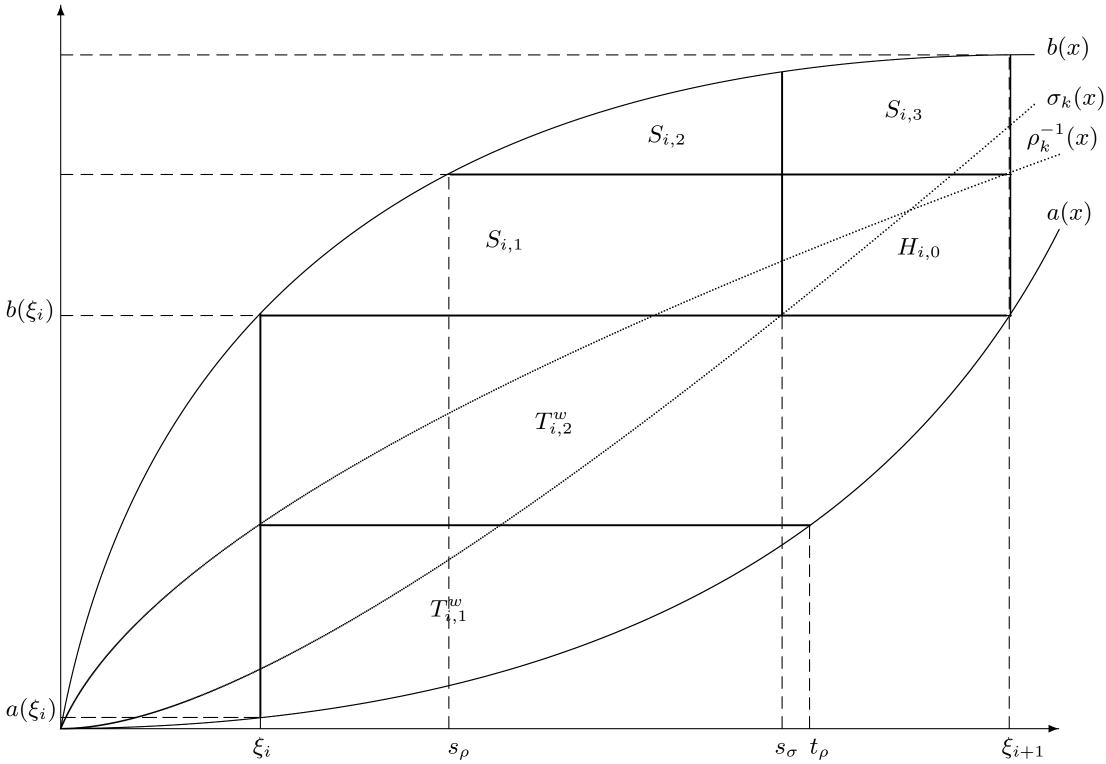

Рис. 2.3.1

Применяя следствие 1.5 к $K^\phi = S_{i,1}$ с $\phi = b$ и учитывая (1.5.28), получаем, что

$$\begin{aligned}\|S_{i,1}\|^r &:= \|S_{i,1}\|^r_{L^p(b(\xi_i),b(s_\rho))\to L^q(\xi_i,s_\sigma)} \lesssim (B^{b,0})^r_{i,1} + (\mathbb{B}^{b,1})^r_{i,1}\\ &= \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{s_\sigma} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_{b(\xi_i)}^{t} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt\\ &\quad + \int_{\xi_i}^{s_\sigma} \left(\int_{\xi_i}^{t}\left[\int_{b(\xi_i)}^{\min\{b(x),b(s_\rho)\}} v_k^{p'}(x,y)\,dy\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p}\\ &\qquad \times \left(\int_{b(\xi_i)}^{\min\{b(t),b(s_\rho)\}} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Так как $a(s_\sigma) < b(\xi_i) = a(\xi_{i+1}) \leqslant t \leqslant b(s_\rho) = \rho_k^{-1}(\xi_{i+1})$ в $(B^{b,0})_{i,1}$, то $[b^{-1}(t), s_\sigma] \subset [b^{-1}(t), a^{-1}(t)]$ и $[b(\xi_i), t] \subseteq [a(\rho_k(t)), t]$. Поэтому

$$(B^{b,0})^r_{i,1} \leqslant \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} \mathscr{B}^-_{\rho_k}(t)\,dt. \tag{2.3.21}$$

Для того чтобы оценить $(\mathbb{B}^{b,1})_{i,1}$, заметим, что в силу (2.1.9) верно $k(x,y) \lesssim k(t,y)$ (см. также (2.3.17)) с $b^{-1}(y) \leqslant x \leqslant t \leqslant s_\sigma < \xi_{i+1}$ и, следовательно,

$$(\mathbb{B}^{b,1})^r_{i,1} \lesssim \int_{\xi_i}^{s_\sigma} \left(\int_{\xi_i}^{t} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{b(\xi_i)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt.$$

Здесь $[b(\xi_i), b(t)] = [a(\xi_{i+1}), b(t)] \subset [a(t), b(t)]$ в силу того, что $t \leqslant s_\sigma < \xi_{i+1}$. Кроме того, $[\xi_i, t] \subset [b^{-1}(\sigma_k(t)), t]$ в силу $t \leqslant s_\sigma = \sigma_k^{-1}(b(\xi_i)) < \xi_{i+1}$, т.е. $b^{-1}(\sigma_k(t)) < \xi_i$. Отсюда

$$(\mathbb{B}^{b,1})^r_{i,1} \lesssim \int_{\xi_i}^{s_\sigma} \mathscr{B}^-_{\sigma_k}(t)\, dt. \tag{2.3.22}$$

Для оценки нормы $S_{i,2}$ будем использовать следствие 1.5 с $\phi = b$, принимая во внимание (1.5.27) и (1.5.28):

$$\|S_{i,2}\|^r := \|S_{i,2}\|^r_{L^p(b(s_\rho),b(s_\sigma))\to L^q(s_\rho,s_\sigma)} \lesssim (\mathscr{B}^{b,0})^r_{i,2} + (\mathbb{B}^{b,1})^r_{i,2}$$

$$= \int_{b(s_\rho)}^{b(s_\sigma)} \left(\int_t^{b(s_\sigma)} \left[\int_{b^{-1}(y)}^{s_\sigma} w_k^q(x,y)\, dx\right]^{p'} v^{p'}(y)\, dy\right)^{r/q'} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{s_\sigma} w_k^q(x,t)\, dx\right)^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\, dt \tag{2.3.23}$$

$$+ \int_{s_\rho}^{s_\sigma} \left(\int_{s_\rho}^{t} \left[\int_{b(s_\rho)}^{b(x)} v_k^{p'}(x,y)\, dy\right]^q w^q(x)\, dx\right)^{r/p} \left[\int_{b(s_\rho)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\, dy\right]^{q-r/p} w^q(t)\, dt. \tag{2.3.24}$$

Так как $b^{-1}(t) \leqslant b^{-1}(y) =: z \leqslant x \leqslant s_\sigma < \xi_{i+1}$ в (2.3.23), то $k(x,y) = k(x, b(z)) \lesssim k(x,t)$ согласно (2.1.9) или (2.3.17). Следовательно,

$$(\mathscr{B}^{b,0})^r_{i,2} \lesssim \int_{b(s_\rho)}^{b(s_\sigma)} \left(\int_t^{b(s_\sigma)} v^{p'}\right)^{r/q'} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{s_\sigma} w_k^q(x,t)dx\right)^{r/q} v^{p'}(t)\, dt.$$

Так как $a(s_\sigma) < \rho_k^{-1}(s_\sigma) < \rho_k^{-1}(\xi_{i+1}) = b(s_\rho) \leqslant t$, то $s_\sigma < a^{-1}(t)$ и $s_\sigma < \rho_k(t)$, откуда $b(s_\sigma) < b(\rho_k(t))$. Поэтому

$$(\mathscr{B}^{b,0})^r_{i,2} \lesssim \int_{b(s_\rho)}^{b(s_\sigma)} \mathscr{B}^+_{\rho_k}(t)\, dt. \tag{2.3.25}$$

В силу того, что $b^{-1}(y) \leqslant x \leqslant t \leqslant s_\sigma < \xi_{i+1}$ в (2.3.24) и в силу (2.1.9) имеем $k(x,y) \lesssim k(t,y)$ (см. также (2.3.17)). Отсюда

$$(\mathbb{B}^{b,1})^r_{i,2} \lesssim \int_{s_\rho}^{s_\sigma} \left(\int_{s_\rho}^t w^q\right)^{r/p} \left(\int_{b(s_\rho)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\, dy\right)^{r/p'} w^q(t)\, dt \leqslant \int_{s_\rho}^{s_\sigma} \mathscr{B}^-_{\sigma_k}(t)\, dt, \tag{2.3.26}$$

так как $\xi_i < s_\rho \leqslant t \leqslant s_\sigma = \sigma_k^{-1}(b(\xi_i)) < \xi_{i+1}$, т.е. $b^{-1}(\sigma_k(t)) \leqslant \xi_i < s_\rho$, и $a(t) < a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i) < b(s_\rho)$.

Обозначим $\|H_{i,0}\| := \|H_{i,0}\|_{L^p(b(\xi_i),b(s_\rho))\to L^q(s_\sigma,\xi_{i+1})}$. В силу следствия 1.5

$$\|H_{i,0}\| \approx (B^{b,0})^r_{i,0} + (B^{b,1})^r_{i,0}, \tag{2.3.27}$$

где

$$(B^{b,0})^r_{i,0} = \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} \left(\int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} w_k^q(x,t)\, dx\right)^{r/q} \left(\int_{b(\xi_i)}^t v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt$$

$$(B^{b,1})^r_{i,0} = \int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} \left(\int_t^{\xi_{i+1}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} v_k^{p'}(t,y)\, dy\right)^{r/p'} w^q(t)\, dt.$$

Так как $a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i) \leqslant t \leqslant b(s_\rho) = \rho_k^{-1}(\xi_{i+1}) \leqslant b(s_\sigma)$ в $(B^{b,0})_{i,0}$, то $[s_\sigma, \xi_{i+1}] \subset [b^{-1}(t), a^{-1}(t)]$ и $[b(\xi_i), t] \subset [a(\rho_k(t)), t]$, т.е.

$$(B^{b,0})^r_{i,0} \leqslant \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} \mathscr{B}^-_{\rho_k}(t)\, dt. \tag{2.3.28}$$

Также верно, что

$$(B^{b,1})^r_{i,0} \leqslant \int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} \mathscr{B}^+_{\sigma_k}(t)\,dt \tag{2.3.29}$$

в силу того, что $s_\rho < \sigma_k^{-1}(a(\xi_{i+1})) = s_\sigma \leqslant t \leqslant \xi_{i+1}$ в $(B^{b,1})_{i,0}$.

Для $\|S_{i,3}\| := \|S_{i,3}\|_{L^p(b(s_\rho),b(\xi_{i+1}))\to L^q(s_\sigma,\xi_{i+1})}$ из следствия 1.5 с учетом (1.5.27) получаем

$$\begin{aligned}
\|S_{i,3}\|^r &\lesssim (\mathscr{B}_{b,0})^r_{i,3} + (B_{b,1})^r_{i,3} \\
&= \int_{b(s_\rho)}^{b(\xi_{i+1})} \left(\int_t^{b(\xi_{i+1})} \left[\int_{b^{-1}(y)}^{\xi_{i+1}} w_k^q(x,y)\chi_{[s_\sigma,\xi_{i+1}]}(x)\,dx\right]^{p'} v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/q'} \\
&\qquad\times \left(\int_{b^{-1}(t)}^{\xi_{i+1}} w_k^q(x,t)\chi_{[s_\sigma,\xi_{i+1}]}(x)\,dx\right)^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt \\
&\quad+ \int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} \left(\int_t^{\xi_{i+1}} w^q\right)^{r/p'} \left(\int_{b(s_\rho)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p} w^q(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Как уже делалось выше, $k(x,y) \lesssim k(x,t)$ для $b^{-1}(t) \leqslant b^{-1}(y) = z \leqslant x \leqslant \xi_{i+1}$ в $(\mathscr{B}^{b,0})_{i,3}$. Кроме того, $b(\xi_{i+1}) < b(\rho_k(t))$ в силу $\rho_k^{-1}(\xi_{i+1}) = b(s_\rho) \leqslant t$, и $\xi_{i+1} \leqslant a^{-1}(t)$ в силу того, что $a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i) \leqslant b(s_\rho) \leqslant t$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
(\mathscr{B}_{b,0})^r_{i,3} &\lesssim \int_{b(s_\rho)}^{b(\xi_{i+1})} \left(\int_t^{b(\xi_{i+1})} v^{p'}\right)^{r/q'} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{\xi_{i+1}} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{r/q} v^{p'}(t)\,dt \\
&\leqslant \int_{b(s_\rho)}^{b(\xi_{i+1})} \mathscr{B}^+_{\rho_k}(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Оценка

$$(B_{b,1})^r_{i,3} \leqslant \int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} \mathscr{B}^+_{\sigma_k}(t)\,dt \tag{2.3.32}$$

вытекает из неравенств $a(t) \leqslant a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i) < b(s_\sigma)$ и $\sigma_k^{-1}(a(\xi_{i+1})) = s_\sigma \leqslant t$. Таким образом, на основе оценок (2.3.19)–(2.3.32) получаем для случая (i), что

$$\|S_i\|^r_{L^p(\delta_{i+1})\to L^q(\Delta_i)} \lesssim \int_{\delta_{i+1}} \mathscr{B}_{\rho_k}(t)\,dt + \int_{\Delta_i} \mathscr{B}_{\sigma_k}(t)\,dt. \tag{2.3.33}$$

В случае (iii) имеем

$$S_i f(x) = \sum_{j=1}^{3} S_{i,j} f(x), \tag{2.3.34}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{i,1} f(x) &= \chi_{[\xi_i,s_\sigma]}(x) S_i f(x), \\
S_{i,2} f(x) &= \chi_{[s_\sigma,\xi_{i+1}]}(x) S_i(f\chi_{[b(\xi_i),b(s_\rho)]})(x), \\
S_{i,3} f(x) &= \chi_{[s_\rho,\xi_{i+1}]}(x) S_i(f\chi_{[b(s_\rho),b(\xi_{i+1})]})(x).
\end{aligned}$$

Оценка

$$\|S_{i,1}\|^r := \|S_{i,1}\|^r_{L^p(b(\xi_i),b(s_\sigma))\to L^q(\xi_i,s_\sigma)} \lesssim \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\sigma)} \mathscr{B}^-_{\rho_k}(t)\,dt + \int_{\xi_i}^{s_\sigma} \mathscr{B}^-_{\sigma_k}(t)\,dt \tag{2.3.35}$$

может быть получена так же, как и в случае (i).

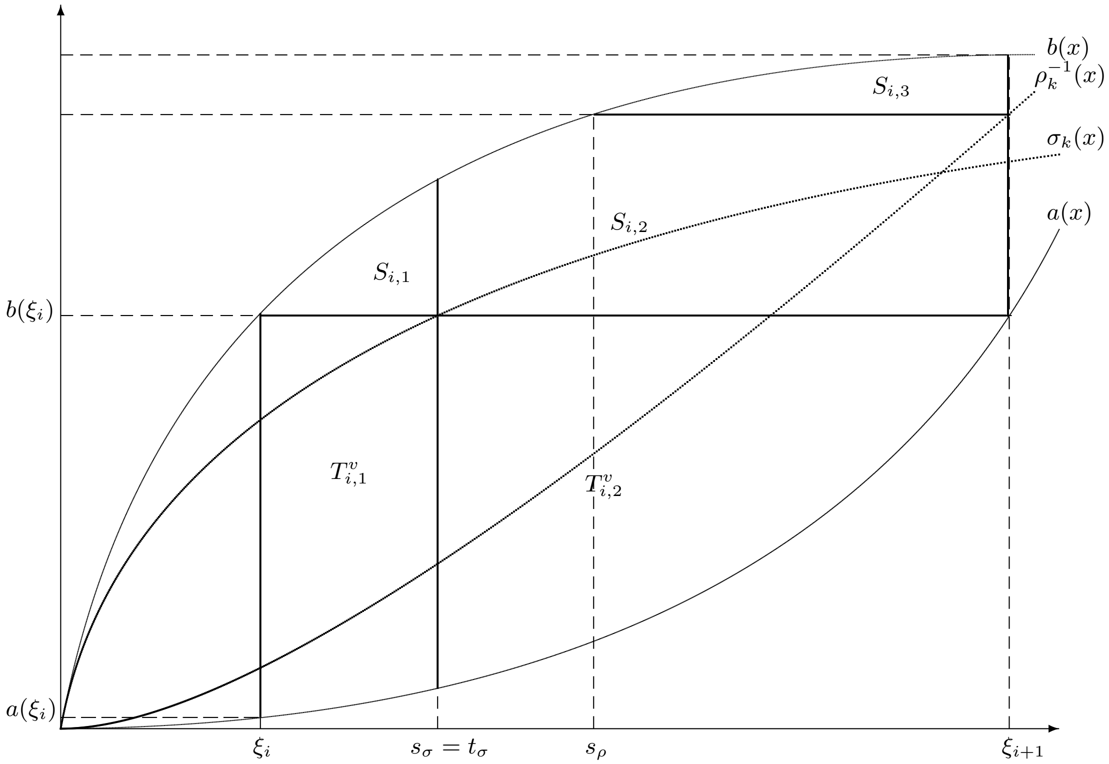

Рис. 2.3.2

Для $\|S_{i,2}\| := \|S_{i,2}\|_{L^p(b(\xi_i),b(s_\rho))\to L^q(s_\sigma,\xi_{i+1})}$ применяем следствие 1.5:

$$\begin{aligned}\|S_{i,2}\|^r &\approx (B^{b,0})^r_{i,2} + (B^{b,1})^r_{i,2}\\ &= \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{\xi_{i+1}} w_k^q(x,t)\chi_{[s_\sigma,\xi_{i+1}]}\,dx\right)^{r/q} \left(\int_{b(\xi_i)}^{t} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt\\ &\quad + \int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} \left(\int_t^{\xi_{i+1}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{b(\xi_i)}^{\min\{b(t),b(s_\rho)\}} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Так как $a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i) \leqslant t \leqslant b(s_\rho) = \rho_k^{-1}(\xi_{i+1})$ в $(B^{b,0})_{i,2}$, то $\xi_{i+1} \leqslant a^{-1}(t)$ и $\rho_k(t) \leqslant \xi_{i+1}$, т.е. $a(\rho_k(t)) \leqslant a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i)$. Поэтому

$$(B^{b,0})^r_{i,2} \leqslant \int_{b(\xi_i)}^{b(s_\rho)} \mathscr{B}^-_{\rho_k}(t)\,dt. \tag{2.3.37}$$

В выражении для $(B^{b,1})_{i,2}$ при $s_\sigma = \sigma_k^{-1}(a(\xi_{i+1}) \leqslant t \leqslant \xi_{i+1}$ выполнено $a(t) \leqslant a(\xi_{i+1}) = b(\xi_i)$ и $\xi_{i+1} \leqslant a^{-1}(\sigma_k(t))$. Следовательно,

$$(B^{b,1})^r_{i,2} \leqslant \int_{s_\sigma}^{\xi_{i+1}} \mathscr{B}^+_{\sigma_k}(t)\,dt. \tag{2.3.38}$$

По аналогии с (i) мы также получаем, что

$$\|S_{i,3}\|^r := \|S_{i,3}\|^r_{L^p(b(s_\rho),b(\xi_{i+1}))\to L^q(s_\rho,\xi_{i+1})} \lesssim \int_{b(s_\rho)}^{b(\xi_{i+1})} \mathscr{B}^+_{\rho_k}(t)\,dt + \int_{s_\rho}^{\xi_{i+1}} \mathscr{B}^+_{\sigma_k}(t)\,dt. \tag{2.3.39}$$

Суммируя (2.3.34)–(2.3.39), извлекаем оценку (2.3.33) и для случая (iii). Вариант (ii) вытекает из (i) или (iii). Окончательно из (2.3.16) в силу утверждения леммы 1.10 получаем

$$\|\mathscr{S}\| \approx \left(\sum_i \|S_i\|^r_{L^p(\delta_{i+1})\to L^q(\Delta_i)}\right)^{1/r} \lesssim \mathscr{B}_{\rho_k} + \mathscr{B}_{\sigma_k}. \tag{2.3.40}$$

Чтобы оценить норму оператора T_i, разложим его в сумму, используя (2.1.9) (или (2.3.17)):

$$\begin{aligned} T_i f(x) &\approx w(x)k(x,b(\xi_i))\int_{a(x)}^{b(\xi_i)} f(y)v(y)\,dy + w(x)\int_{a(x)}^{b(\xi_i)} k(\xi_i,y)f(y)v(y)\,dy \\ &=: T_i^w f(x) + T_i^v f(x). \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Фиксируя точки $t_\rho := a^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))$ и $t_\sigma := \sigma_k^{-1}(b(\xi_i))$, записываем следующие представления:

$$T_i^w f(x) = T_i^w(f\chi_{[a(\xi_i),\rho_k^{-1}(\xi_i)]})(x) + T_i^w(f\chi_{[\rho_k^{-1}(\xi_i),b(\xi_i)]})(x) =: T_{i,1}^w f(x) + T_{i,2}^w f(x), \tag{2.3.42}$$

$$T_i^v f(x) = T_i^v f(x)\chi_{[\xi_i,t_\sigma]}(x) + T_i^v f(x)\chi_{[t_\sigma,\xi_{i+1}]}(x) =: T_{i,1}^v f(x) + T_{i,2}^v f(x) \tag{2.3.43}$$

(см. рисунки выше). В силу двойственности, учитывая (1.5.43) и применяя лемму 1.12 с $c = a(\xi_i)$, $d = \rho_k^{-1}(\xi_i)$, $a = \xi_i$, $b(x) \to a^{-1}(y)$, $v(y) \to w(x)k(x,b(\xi_i))$, $w(x) \to v(y)$ и $q = p'$, $p = q'$ получаем

$$\begin{aligned} \|T_{i,1}^w\|^r &:= \|T_{i,1}^w\|^r_{L^p(a(\xi_i),\rho_k^{-1}(\xi_i))\to L^q(\xi_i,t_\rho)} \approx (\mathbb{B}_{a^{-1}})^r_{i,1} \\ &= \int_{a(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_i)} \left(\int_{a(\xi_i)}^t \left[\int_{\xi_i}^{a^{-1}(y)} w_k^q(x,b(\xi_i))\,dx\right]^{p'} v^{p'}(y)\,dy\right)^{r/q'} \\ &\qquad\times \left(\int_{\xi_i}^{a^{-1}(t)} w_k^q(x,b(\xi_i))\,dx\right)^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Так как $\xi_i \leqslant x$ и $a(x) \leqslant y \leqslant t \leqslant \rho_k^{-1}(\xi_i) < b(\xi_i)$ в $(\mathbb{B}_{a^{-1}})_{i,1}$, то $k(x,b(\xi_i)) \lesssim k(x,t)$ в силу (2.1.9). Более того, из $t \leqslant \rho_k^{-1}(\xi_i) < b(\xi_i)$ следует, что $b^{-1}(t) < \xi_i$ и $a(\rho_k(t)) \leqslant a(\xi_i)$, т.е.

$$\|T_{i,1}^w\|^r \lesssim \int_{a(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_i)} \left(\int_{a(\xi_i)}^t v^{p'}\right)^{r/q'} \left(\int_{\xi_i}^{a^{-1}(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{r/q} v^{p'}(t)\,dt \leqslant \int_{a(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_i)} \mathscr{B}^-_{\rho_k}(t)\,dt. \tag{2.3.44}$$

Аналогично, из двойственности в силу $a^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i)) = t_\rho$, учитывая (1.5.41) и применяя лемму 1.12 с $c = \rho_k^{-1}(\xi_i)$, $d = b(\xi_i)$, $a = \xi_i$, $b(x) \to a^{-1}(y)$, $v(y) \to w(x)k(x,b(\xi_i))$, $w(x) \to v(y)$ и $q = p'$, $p = q'$, получаем:

$$\begin{aligned} \|T_{i,2}^w\|^r &:= \|T_{i,2}^w\|^r_{L^p(\rho_k^{-1}(\xi_i),b(\xi_i))\to L^q(\xi_i,\xi_{i+1})} \approx (B_{a^{-1}})^r_{i,2} \\ &= \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{b(\xi_i)} \left(\int_{\xi_i}^{a^{-1}(t)} w_k^q(x,b(\xi_i))\,dx\right)^{r/q} \left(\int_t^{b(\xi_i)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Поскольку $b^{-1}(t) \leqslant \xi_i \leqslant x \leqslant a^{-1}(t)$, то из (2.1.9) имеем $k(x,b(\xi_i)) \lesssim k(x,t)$, и

$$\|T_{i,2}^w\|^r \lesssim \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{b(\xi_i)} \left(\int_{\xi_i}^{a^{-1}(t)} w_k^q(x,t)\,dx\right)^{r/q} \left(\int_t^{b(\xi_i)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt \leqslant \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{b(\xi_i)} \mathscr{B}^+_{\rho_k}(t)\,dt \tag{2.3.45}$$

в силу того, что $\rho_k^{-1}(\xi_i) \leqslant t \leqslant b(\xi_i)$ в $(B_{a^{-1}})_{i,2}$, т.е. $b^{-1}(t) \leqslant \xi_i$ и $b(\xi_i) \leqslant b(\rho_k(t))$.

Далее, применяя (1.5.49) из леммы 1.13 и (2.1.9) с $\xi_i \leqslant t$, $a(t) \leqslant y \leqslant b(\xi_k)$, получаем

$$\begin{aligned}\|T^v_{i,1}\|^r &:= \|T^v_{i,1}\|^r_{L^p(a(\xi_i),b(\xi_i))\to L^q(\xi_i,t_\sigma)} \approx (B_a)^r_{i,1}\\ &= \int_{\xi_i}^{t_\sigma}\left(\int_{\xi_i}^{t} w^q\right)^{r/p}\left(\int_{a(t)}^{b(\xi_i)} v_k^{p'}(\xi_i,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt\\ &\lesssim \int_{\xi_i}^{t_\sigma}\left(\int_{\xi_i}^{t} w^q\right)^{r/p}\left(\int_{a(t)}^{b(\xi_i)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt \leqslant \int_{\xi_i}^{t_\sigma}\mathscr{B}^-_{\sigma_k}(t)\,dt,\end{aligned}\tag{2.3.46}$$

поскольку $\xi_i \leqslant t \leqslant t_\sigma$ в $(B_a)_{i,1}$, т.е. $b^{-1}(\sigma_k(t)) \leqslant \xi_i$ и $b(\xi_i) \leqslant b(t)$. Наконец, используя (1.5.51) из леммы 1.13 и (2.1.9) с $\xi_i < t_\sigma \leqslant t$, $a(t) \leqslant a(x) \leqslant y \leqslant b(\xi_i)$, находим

$$\begin{aligned}\|T^v_{i,2}\|^r &: = \|T^v_{i,2}\|^r_{L^p(a(t_\sigma),b(\xi_i))\to L^q(t_\sigma,\xi_{i+1})} \approx (\mathbb{B}_a)^r_{i,2}\\ &= \int_{t_\sigma}^{\xi_{i+1}}\left(\int_{t}^{\xi_{i+1}}\left[\int_{a(x)}^{b(\xi_i)} v_k^{p'}(\xi_i,y)\,dy\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p}\left(\int_{a(t)}^{b(\xi_i)} v_k^{p'}(\xi_i,y)\,dy\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt\\ &\lesssim \int_{t_\sigma}^{\xi_{i+1}}\left(\int_{t}^{\xi_{i+1}} w^q\right)^{r/p}\left(\int_{a(t)}^{b(\xi_i)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt \leqslant \int_{t_\sigma}^{\xi_{i+1}}\mathscr{B}^+_{\sigma_k}(t)\,dt\end{aligned}\tag{2.3.47}$$

так как $\xi_i < t_\sigma = \sigma_k^{-1}(a(\xi_{i+1})) \leqslant t \leqslant \xi_{i+1}$ в $(\mathbb{B}_a)_{i,2}$, т.е. $\xi_{i+1} \leqslant a^{-1}(\sigma_k(t))$ и $b(\xi_i) < b(t)$. Из (2.3.41)–(2.3.47) получается следующая оценка:

$$\|T_i\|^r_{L^p(\delta_i)\to L^q(\Delta_i)} \lesssim \int_{\delta_i}\mathscr{B}_{\rho_k}(t)\,dt + \int_{\Delta_i}\mathscr{B}_{\sigma_k}(t)\,dt.\tag{2.3.48}$$

В сочетании с (2.3.16) на основе леммы 1.10 это дает

$$\|\mathscr{T}\| \approx \left(\sum_i \|T_i\|^r_{L^p(\delta_i)\to L^q(\Delta_i)}\right)^{1/r} \lesssim \mathscr{B}_{\rho_k} + \mathscr{B}_{\sigma_k}.$$

Отсюда и из (2.3.40) в силу (2.3.15) вытекает верхняя оценка в (2.3.11).

Оценка на $\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ *снизу*. Пусть неравенство

$$\|\mathscr{K} f\|_q \leqslant \|\mathscr{K}\|\cdot\|f\|_p\tag{2.3.49}$$

выполнено. Чтобы показать

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}^-_\rho,\tag{2.3.50}$$

полагаем $\xi_0 = 1$ и фиксируем ξ_i для остальных $i \in \mathbb{Z}$ согласно (2.1.6). Обозначим

$$W_\rho(t) = \int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w_k^q(x,t)\,dx, \qquad V^-_\rho(t) = \int_{a(\rho_k(t))}^{t} v^{p'}(y)\,dy$$

и заметим, что $[W_\rho(t)]^{r/(pq)}[V^-_\rho(t)]^{r/(pq')}[v(t)]^{p'-1} = \mathscr{B}^-_{\rho_k}(t)^{1/p}$. Кроме этого, $\|f_\rho\|_p = (\mathscr{B}^-_{\rho_k})^{r/p}$ для

$$f_\rho(t) := [W_\rho(t)]^{r/(pq)}[V^-_\rho(t)]^{r/(pq')}[v(t)]^{p'-1}.$$

Поскольку $\bigsqcup_i[\xi_i,\xi_{i+1}) = (0,\infty)$, то получаем из (2.3.49), что

$$\begin{aligned}\|\mathscr{K}\|(\mathscr{B}^-_{\rho_k})^{r/p} \geqslant \|\mathscr{K} f_\rho\|_q &= \left(\sum_i\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}(\mathscr{K} f_\rho)^q(x)\,dx\right)^{1/q}\\ &\geqslant 2^{-1/q}\left(\sum_i\int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))}^{\xi_{i+1}}(\mathscr{K} f_\rho)^q(x)\,dx\right)^{1/q}.\end{aligned}\tag{2.3.51}$$

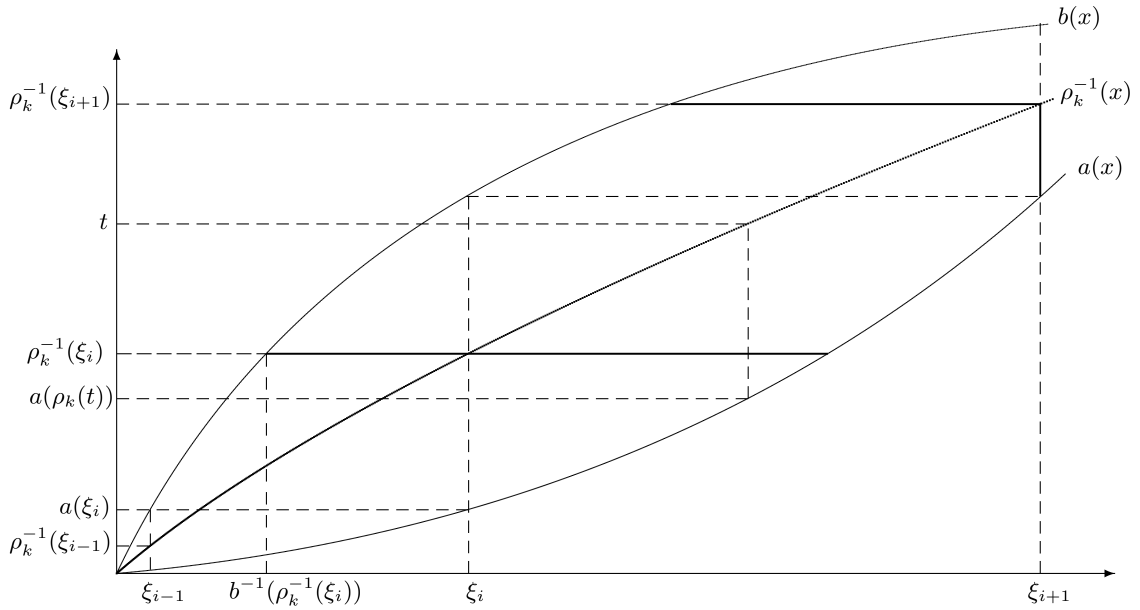

Рис. 2.3.3

Подставляя точное выражение для оператора $\mathscr{K}$, находим

$$
\begin{aligned}
&\int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))}^{\xi_{i+1}} (\mathscr{K} f_\rho)^q \\
&\quad = \int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))}^{\xi_{i+1}} w^q(x) \left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_k(x,y) f_\rho(y)\, dy \right)^q dx \\
&\quad = \int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))}^{\xi_{i+1}} w^q(x) \int_{a(x)}^{b(x)} v_k(x,t) f_\rho(t)\, dt \left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_k(x,y) f_\rho(y)\, dy \right)^{q-1} dx \\
&\quad \geqslant \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} f_\rho(t) v(t) \int_{b^{-1}(t)}^{\min\{a^{-1}(t),\xi_{i+1}\}} k(x,t) w^q(x) \left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_k(x,y) f_\rho(y)\, dy \right)^{q-1} dx\, dt \\
&\quad \geqslant \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} f_\rho(t) v(t) \int_{b^{-1}(t)}^{\rho_k(t)} k(x,t) w^q(x) \left(\int_{a(x)}^{t} v_k(x,y) f_\rho(y)\, dy \right)^{q-1} dx\, dt
\end{aligned}
$$

(применяя (2.1.9) с $z = b^{-1}(t)$)

$$
\begin{aligned}
&\gtrsim \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} f_\rho(t) v(t) \int_{b^{-1}(t)}^{\rho_k(t)} w_k^q(x,t) \left(\int_{a(x)}^{t} f_\rho(y) v(y)\, dy \right)^{q-1} dx\, dt \\
&\geqslant \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} f_\rho(t) v(t) \int_{b^{-1}(t)}^{\rho_k(t)} w_k^q(x,t)\, dx \left(\int_{a(\rho_k(t))}^{t} f_\rho(y) v(y)\, dy \right)^{q-1} dt \\
&= \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} [W_\rho(t)]^{r/(pq)} [V_\rho^-(t)]^{r/(pq')} \int_{b^{-1}(t)}^{\rho_k(t)} w_k^q(x,t)\, dx \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{a(\rho_k(t))}^{t} [W_\rho(y)]^{r/(pq)} [V_\rho^-(y)]^{r/(pq')} v^{p'}(y)\, dy \right)^{q-1} v^{p'}(t)\, dt
\end{aligned}
$$

(используя свойство (2.3.1))

$$\gtrsim \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} [V_\rho^-(t)]^{r/(pq')}[W_\rho(t)]^{r/(pq)+1}$$
$$\times \left(\int_{a(\rho_k(t))}^{t} \left[\int_{b^{-1}(t)}^{\rho_k(t)} w_k^q(z,y)\,dz\right]^{r/(pq)} [V_\rho^-(y)]^{r/(pq')} v^{p'}(y)\,dy\right)^{q-1} v^{p'}(t)\,dt.$$

Из (2.1.9) получаем, что $k(z,y) \gtrsim k(z,t) = k(z,b(\tau))$ с $\tau = b^{-1}(t)$, так как $b^{-1}(y) \leqslant b^{-1}(t) = \tau \leqslant z \leqslant \rho_k(t) \leqslant a^{-1}(y)$. Поэтому, учитывая (2.3.1), имеем

$$\int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))}^{\xi_{i+1}} (\mathscr{K} f_\rho)^q(x)\,dx$$
$$\gtrsim \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} [V_\rho^-(t)]^{r/(pq')}[W_\rho(t)]^{r/q} \left(\int_{a(\rho_k(t))}^{t} \left[\int_{a(\rho_k(t))}^{y} v^{p'}\right]^{r/(pq')} v^{p'}(y)\,dy\right)^{q-1} v^{p'}(t)\,dt$$
$$\approx \int_{\rho_k^{-1}(\xi_i)}^{\rho_k^{-1}(\xi_{i+1})} \mathscr{B}_{\rho_k}^-(t)\,dt.$$

В силу того, что $\bigsqcup_i [\rho_k^{-1}(\xi_i), \rho_k^{-1}(\xi_{i+1})) = (0,\infty)$, имеем

$$\left(\sum_i \int_{b^{-1}(\rho_k^{-1}(\xi_i))}^{\xi_{i+1}} (\mathscr{K} f_\rho)^q(x)\,dx\right)^{1/q} \gtrsim (\mathscr{B}_{\rho_k}^-)^{r/q}.$$

Отсюда в силу $r/q - r/p = 1$ и с учетом (2.3.51) получаем (2.3.50).

Чтобы доказать

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p\to L^q} \gtrsim \mathscr{B}_{\sigma_k}^+, \tag{2.3.52}$$

мы перейдем к двойственному относительно (2.3.49) неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left[\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w_k(x,y) g(x)\,dx\right]^{p'} v^{p'}(y)\,dy\right)^{1/p'} \leqslant \|\overline{\mathscr{K}}\| \cdot \|g\|_{q'} \tag{2.3.53}$$

с $k(x,y)$, удовлетворяющими для всех $a(x) \leqslant y \leqslant \overline{z} \leqslant b(x)$ условию

$$D^{-1}k(x,y) \leqslant k(x,\overline{z}) + k(b^{-1}(\overline{z}),y) \leqslant Dk(x,y), \tag{2.3.54}$$

вытекающему из (2.1.9). Как и в предыдущий раз, мы разбиваем $(0,\infty)$ точками последовательности ξ_i (см. (2.1.6)) с $\xi_0 = 1$. Обозначая

$$W_\sigma^+(t) = \int_t^{a^{-1}(\sigma_k(t))} w^q(x)\,dx, \qquad V_\sigma(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy,$$

приходим к тому, что $[W_\sigma^+(t)]^{r/(pq')}[V_\sigma(t)]^{r/(p'q')}[w(t)]^{q-1} = \mathscr{B}_{\sigma_k}^+(t)^{1/q'}$. Полагая

$$g_\sigma(t) = [W_\sigma^+(t)]^{r/(pq')}[V_\sigma(t)]^{r/(p'q')}[w(t)]^{q-1},$$

получаем

$$\|g_\sigma\|_{q'} = (\mathscr{B}_{\sigma_k}^+)^{r/q'}.$$

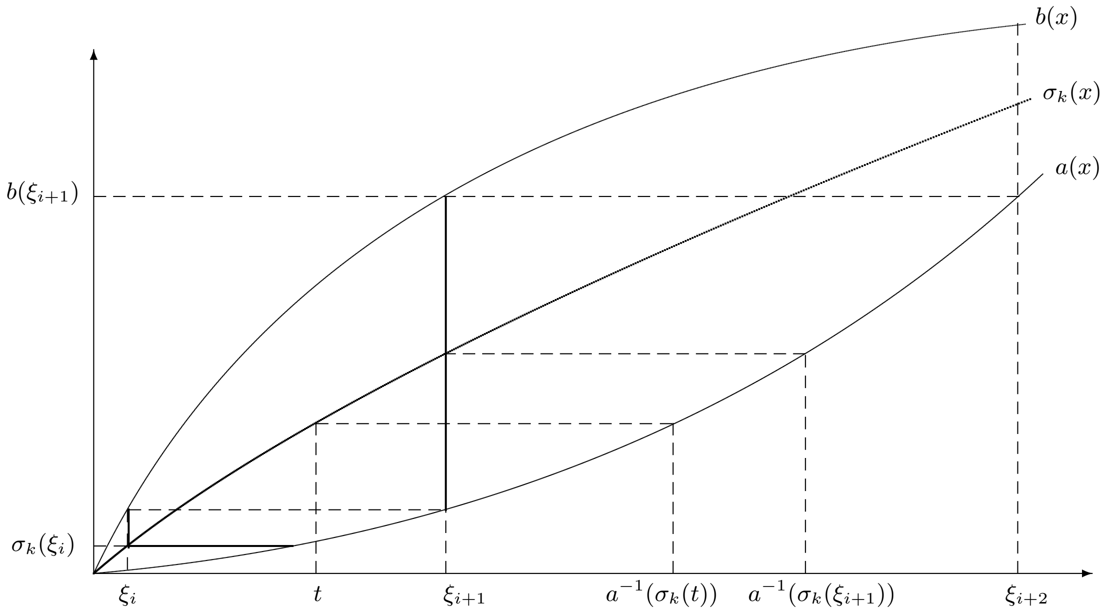

Рис. 2.3.4

Отсюда, так как $\bigsqcup_i [\sigma_k(\xi_i), \sigma_k(\xi_{i+1})) = (0, \infty)$, из (2.3.53) вытекает

$$\begin{aligned}\|\overline{\mathscr{K}}\|(\mathscr{B}^+_{\sigma_k})^{r/q'} \geqslant \|\overline{\mathscr{K}} g_\sigma\|_{p'} &= \left(\sum_i \int_{\sigma_k(\xi_i)}^{\sigma_k(\xi_{i+1})} (\overline{\mathscr{K}} g_\sigma)^{p'}(y)\, dy\right)^{1/p'} \\ &\geqslant 2^{-1/p'} \left(\sum_i \int_{\sigma_k(\xi_i)}^{b(\xi_{i+1})} (\overline{\mathscr{K}} g_\sigma)^{p'}(y)\, dy\right)^{1/p'}, \qquad (2.3.55)\end{aligned}$$

где $\overline{\mathscr{K}} g(y) := v(y) \int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w_k(x,y) g(x)\, dx$. Находим

$$\begin{aligned}&\int_{\sigma_k(\xi_i)}^{b(\xi_{i+1})} (\overline{\mathscr{K}} g_\sigma)^{p'} \\ &\quad= \int_{\sigma_k(\xi_i)}^{b(\xi_{i+1})} v^{p'}(y) \biggl(\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w_k(x,y) g_\sigma(x)\, dx\biggr)^{p'} dy \\ &\quad= \int_{\sigma_k(\xi_i)}^{b(\xi_{i+1})} v^{p'}(y) \int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w_k(t,y) g_\sigma(t)\, dt \biggl(\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w_k(x,y) g_\sigma(x)\, dx\biggr)^{p'-1} dy \\ &\quad\geqslant \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} g_\sigma(t) w(t) \int_{\max\{a(t), \sigma_k(\xi_i)\}}^{b(t)} k(t,y) v^{p'}(y) \biggl(\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w_k(x,y) g_\sigma(x)\, dx\biggr)^{p'-1} dy\, dt \\ &\quad\geqslant \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} g_\sigma(t) w(t) \int_{\sigma_k(t)}^{b(t)} k(t,y) v^{p'}(y) \biggl(\int_t^{a^{-1}(y)} w_k(x,y) g_\sigma(x)\, dx\biggr)^{p'-1} dy\, dt\end{aligned}$$

(применяя (2.3.54) с $\overline{z} = b(t)$)

$$\gg \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} g_\sigma(t) w(t) \int_{\sigma_k(t)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y) \biggl(\int_t^{a^{-1}(y)} g_\sigma(x) w(x)\, dx\biggr)^{p'-1} dy\, dt$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} g_\sigma(t)w(t)\int_{\sigma_k(t)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\left(\int_t^{a^{-1}(\sigma_k(t))} g_\sigma(x)w(x)\,dx\right)^{p'-1} dt\\
&= \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} [W_\sigma^+(t)]^{r/(pq')}[V_\sigma(t)]^{r/(p'q')}\int_{\sigma_k(t)}^{b(t)} v_k^{p'}(t,y)\,dy\\
&\qquad\times\left(\int_t^{a^{-1}(\sigma_k(t))}[W_\sigma^+(x)]^{r/(pq')}[V_\sigma(x)]^{r/(p'q')}w^q(x)\,dx\right)^{p'-1} w^q(t)\,dt
\end{aligned}$$

(используя свойство (2.3.2))

$$\begin{aligned}
&\gtrsim \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} [W_\sigma^+(t)]^{r/(pq')}[V_\sigma(t)]^{r/(p'q')+1}\\
&\qquad\times\left(\int_t^{a^{-1}(\sigma_k(t))}\left[\int_{\sigma_k(t)}^{b(t)} v_k^{p'}(x,z)\,dz\right]^{r/(p'q')}[W_\sigma^+(x)]^{r/(pq')}w^q(x)\,dx\right)^{p'-1} w^q(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Из (2.3.54) в силу $a(x)\leqslant\sigma(t)\leqslant z\leqslant\overline{z}=b(t)\leqslant b(x)$ получаем, что $k(x,z)\gtrsim k(t,z)$. Следовательно, учитывая (2.3.2),

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma(\xi_i)}^{b(\xi_{i+1})}(\overline{\mathscr{K}}g_k)^{p'}\\
&\gtrsim \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} [W_\sigma^+(t)]^{r/(pq')}[V_\sigma(t)]^{r/p'}\left(\int_t^{a^{-1}(\sigma_k(t))}\left[\int_x^{a^{-1}(\sigma_k(t))} w^q\right]^{r/(pq')} w^q(x)\,dx\right)^{p'-1} w^q(t)\,dt\\
&\approx \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \mathscr{B}_{\sigma_k}^+(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Отсюда и (2.3.55)

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} = \|\overline{\mathscr{K}}\|_{L^{q'}(0,\infty)\to L^{p'}(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_{\sigma_k}^+. \tag{2.3.56}$$

Объединяя (2.3.50) и (2.3.56), приходим к требуемому неравенству в левой части (2.3.11). Утверждения, касающиеся компактности в случае $q<p$, является прямым следствием только что доказанных необходимых и достаточных условий ограниченности и теоремы Андо.

Следующая теорема 2.6 доказывается аналогично с использованием теоремы 2.2, утверждения 2 и лемм 1.12, 1.13.

Теорема 2.6. *Пусть ядро $k(x,y)>0$ оператора $\mathscr{K}$ вида (2.1.4) удовлетворяет условиям определения 2.5 и принадлежит классу типа Ойнарова $\mathscr{O}_a$. Предположим, что функции $\rho_k(y)$, $\sigma_k(x)$ являются строго возрастающими k-фарватерами из определения 2.5.*

(a) *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Тогда*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}^+ + \mathscr{A}_{\sigma_k}^- \lesssim \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{A}_{\rho_k} + \mathscr{A}_{\sigma_k}.$$

Если $\mathscr{K}$ компактен, то

$$\mathscr{A}_{\rho_k}^+, \mathscr{A}_{\sigma_k}^- < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to0\\t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}^+(t) = \lim_{\substack{t\to0\\t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}^-(t) = 0;$$

и наоборот, оператор $\mathscr{K}$ является компактным, если

$$\mathscr{A}_{\rho_k}, \mathscr{A}_{\sigma_k} < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to0\\t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}(t) = \lim_{\substack{t\to0\\t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}(t) = 0.$$

(b) *Если* $1 < q < p < \infty$, *то*

$$\mathscr{B}^+_{\rho_k} + \mathscr{B}^-_{\sigma_k} \lesssim \|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{B}_{\rho_k} + \mathscr{B}_{\sigma_k}.$$

Кроме того, $\mathscr{K}$ *компактен из* $L^p(0,\infty)$ *в* $L^q(0,\infty)$, *если* $\mathscr{B}_{\rho_k}, \mathscr{B}_{\sigma_k} < \infty$; *и наоборот, если* $\mathscr{K} : L^p(0,\infty) \to L^q(0,\infty)$ *компактен, то* $\mathscr{B}^+_{\rho_k}, \mathscr{B}^-_{\sigma_k} < \infty$.

Сочетание утверждений двух теорем 2.5 и 2.6 обеспечивают несколько критериев ограниченности оператора (2.1.4) из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$.

Теорема 2.7. *Пусть* $\mathscr{K}$ *определен выражением* (2.1.4) *с ядром* $k(x,y) > 0$, *удовлетворяющим на* $\mathscr{R}$ *условиям определения* 2.5. *Предположим, что функции* $\rho_k(x)$, $\sigma_k(x)$ *являются строго возрастающими* k*-фарватерами* (*см. определение* 2.5).

(a) *Если* $k(x,y) \in \mathscr{O}_b$ *и*

$$\int_{\vartheta^-(t)} v^{p'} \approx \int_{\vartheta(t)} v^{p'}, \qquad t > 0, \tag{2.3.57}$$

$$\int_{\delta^+(t)} w^q \approx \int_{\delta(t)} w^q, \qquad t > 0, \tag{2.3.58}$$

то

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p\to L^q} \approx \begin{cases} \mathscr{A}_{\rho_k} + \mathscr{A}_{\sigma_k}, & 1 < p \leqslant q < \infty, \\ \mathscr{B}_{\rho_k} + \mathscr{B}_{\sigma_k}, & 1 < q < p < \infty. \end{cases} \tag{2.3.59}$$

Более того, $\mathscr{K} : L^p(0,\infty) \to L^q(0,\infty)$ *компактен для* $1 < p \leqslant q < \infty$, *если и только если*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}, \mathscr{A}_{\sigma_k} < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}(t) = 0,$$

а в случае $1 < q < p < \infty$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{B}_{\rho_k}, \mathscr{B}_{\sigma_k} < \infty$.

(b) *Если* $k(x,y) \in \mathscr{O}_a$ *и*

$$\int_{\vartheta^+(t)} v^{p'} \approx \int_{\vartheta(t)} v^{p'}, \qquad t > 0, \tag{2.3.60}$$

$$\int_{\delta^-(t)} w^q \approx \int_{\delta(t)} w^q, \qquad t > 0, \tag{2.3.61}$$

то выполнена оценка (2.3.59). *Кроме этого,* $\mathscr{K}$ *компактен из* $L^p(0,\infty)$ *в* $L^q(0,\infty)$ *для* $1 < p \leqslant q < \infty$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}, \mathscr{A}_{\sigma_k} < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}(t) = 0,$$

а в случае $1 < q < p < \infty$, *если и только если* $\mathscr{B}_{\rho_k}, \mathscr{B}_{\sigma_k} < \infty$.

Теорема 2.8. *Пусть ядро* $0 < k(x,y) \in \mathscr{O}_a \cap \mathscr{O}_b$ *оператора* $\mathscr{K}$ *вида* (2.1.4) *удовлетворяет условиям определения* 2.5. *Предположим, что* $\rho_k(x)$, $\sigma_k(x)$ *являются строго возрастающими* k*-фарватерами, удовлетворяющими определению* 2.5.

(a) *Если* $1 < p \leqslant q < \infty$, , *то*

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{A}_{\rho_k} + \mathscr{A}_{\sigma_k} \tag{2.3.62}$$

и $\mathscr{K} : L^p(0,\infty) \to L^q(0,\infty)$ *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\mathscr{A}_{\rho_k}, \mathscr{A}_{\sigma_k} < \infty, \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\rho_k}(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\to\infty}} \mathscr{A}_{\sigma_k}(t) = 0.$$

(b) *В случае* $1 < q < p < \infty$ *выполнена оценка*

$$\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{B}_{\rho_k} + \mathscr{B}_{\sigma_k} \tag{2.3.63}$$

и $\mathscr{K}$ *компактен из* $L^p(0,\infty)$ *в* $L^q(0,\infty)$, *если и только если* $\mathscr{B}_{\rho_k}, \mathscr{B}_{\sigma_k} < \infty$.

В заключение пункта приведем несколько примеров. Первый имеет отношение к теореме 2.7.

Пример 2.1. Пусть $p = q = 2$, $v(y) = y^{-3/2}$, $w(x) = 1$, $k(x,y) = (y - a(x))^{1/2}$, $a(x) = x/2$, $b(x) = 2x$, т.е.

$$K_1 f(x) = \int_{x/2}^{2x} \left(y - \frac{x}{2}\right)^{1/2} f(y) y^{-3/2}\, dy.$$

В силу (2.3.1)

$$L_v(x) := \int_{x/2}^{\sigma(x)} \left(y - \frac{x}{2}\right) y^{-3}\, dy = \int_{\sigma(x)}^{2x} \left(y - \frac{x}{2}\right) y^{-3}\, dy = R_v(x).$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} L_v(x) &= -\frac{1}{2} \int_{x/2}^{\sigma(x)} \left(y - \frac{x}{2}\right) dy^{-2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sigma(x) - \frac{x}{2}\right)\sigma^{-2}(x) - \frac{1}{2}\int_{x/2}^{\sigma(x)} dy^{-1} = \frac{1}{x} - \sigma^{-1}(x) + \frac{x}{4}\sigma^{-2}(x), \\ R_v(x) &= -\frac{1}{2}\int_{\sigma(x)}^{2x} \left(y - \frac{x}{2}\right) dy^{-2} = -\frac{5}{8x} + \sigma^{-1}(x) - \frac{x}{4}\sigma^{-2}(x). \end{aligned}$$

Отсюда, так как $x/2 \leqslant \sigma(x) \leqslant 2x$, получаем

$$\sigma(x) = \frac{2(4+\sqrt{3}\,)}{13}\, x.$$

Аналогично, в силу (2.3.2),

$$L_w(y) := \int_{y/2}^{\rho(y)} \left(y - \frac{x}{2}\right) dx = \int_{\rho(y)}^{2y} \left(y - \frac{x}{2}\right) dx =: R_w(y).$$

Верно, что

$$\begin{aligned} L_w(y) &= \int_{y-\rho(y)/2}^{y-y/4} dz^2 = \left(\frac{3}{4}y\right)^2 - \left(y - \frac{\rho(y)}{2}\right)^2, \\ R_w(y) &= \int_0^{y-\rho(y)/2} dz^2 = \left(y - \frac{\rho(y)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho(y) = \frac{4\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}\, y.$$

Оператор K_1 с ядром $k(x,y) = (y - a(x))^{1/2} \in \mathscr{O}_a$ ограничен из $L^2(0,\infty)$ в $L^2(0,\infty)$. Действительно, в силу (2.3.10)

$$\begin{aligned} A_{\rho_k} &:= \sup_{t>0} \left(\int_{t/2}^{2t} \left(t - \frac{x}{2}\right) dx\right)^{1/2} \left(\int_{\frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}}t}^{\frac{4\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}t} y^{-3}\, dy\right)^{1/2} \\ &= \sup_{t>0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\frac{3}{4}t} dz^2\right)^{1/2} \left(\int_{\frac{4\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}t}^{\frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}}t} dy^{-2}\right)^{1/2} = \frac{3\sqrt{15}}{4(4\sqrt{2}-3)} < \infty, \end{aligned}$$

$$A_{\sigma_k} := \sup_{t>0}\left(\int_{\frac{4+\sqrt{3}}{13}t}^{\frac{4(4+\sqrt{3}\,)}{13}t} dx\right)^{1/2}\left(\int_{t/2}^{2t}\left(y-\frac{t}{2}\right)y^{-3}\,dy\right)^{1/2}$$
$$= \sup_{t>0}\left(\frac{3(4+\sqrt{3}\,)}{13}t\right)^{1/2}\left(\frac{15}{16t}\right)^{1/2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5(4+\sqrt{3}\,)}{13}} < \infty,$$

поэтому $\|K_1\|_{L^2(0,\infty)\to L^2(0,\infty)} < \infty$. Более того, так как

$$\int_{\vartheta^+(t)} v^{p'} = \int_t^{\frac{4\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}t} y^{-3}\,dy = \frac{39-24\sqrt{2}}{2(41-24\sqrt{2}\,)}\,t^{-2},$$
$$\int_{\vartheta(t)} v^{p'} = \int_{\frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}}t}^{\frac{4\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}t} y^{-3}\,dy = \frac{15}{41-24\sqrt{2}}\,t^{-2},$$
$$\int_{\delta^-(t)} w^q = \int_{\frac{4+\sqrt{3}}{13}t}^{t} dx = \frac{9-\sqrt{3}}{13}\,t,$$
$$\int_{\delta(t)} w^q = \int_{\frac{4+\sqrt{3}}{13}t}^{\frac{4(4+\sqrt{3}\,)}{13}t} dx = \frac{3(4+\sqrt{3}\,)}{13}\,t,$$

требования (2.3.60), (2.3.61) выполнены. Поэтому по теореме 2.7 (b) условия $A_{\rho_k} < \infty$, $A_{\sigma_k} < \infty$ являются необходимыми и достаточными для ограниченности оператора $K_1\colon L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$.

Заметим, что для доказательства верхних оценок на $\|\mathscr{K}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ в теоремах 2.5 и 2.6 не использовались интегральные свойства (2.3.1) и (2.3.2) k-фарватеров. Это означает, что для проверки только достаточных условий ограниченности оператора $\mathscr{K}$ в качестве $\sigma_k(x)$ и/или $\rho_k^{-1}(x)$ можно взять любую строго возрастающую функцию $\phi(x)$ со свойством $a(x) < \phi(x) < b(x)$, $x > 0$, не обязательно удовлетворяющую (2.3.1) или (2.3.2). Покажем это на следующем примере.

Пример 2.2. Пусть $p = 3$, $q = 2$, $k(x,y) = \left(\int_y^x h\right)^\gamma$ с $\gamma > 0$, $v(y) = [h(y)]^{2/3}$, $w(x) = [h(x)]^{1/2}$, где $0 \leqslant h \in L_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$, $a(x) = \ln\sqrt{x+1}$ и $b(x) = \exp 2x - 1$, т.е.

$$K_2 f(x) = h(x)^{1/2}\int_{\ln\sqrt{x+1}}^{\exp 2x-1}\left(\int_y^x h\right)^\gamma f(y)[h(y)]^{2/3}\,dy$$
$$= h(x)^{1/2}\int_{\ln\sqrt{x+1}}^{x}\left(\int_y^x h\right)^\gamma f(y)[h(y)]^{2/3}\,dy + h(x)^{1/2}\int_x^{\exp 2x-1}\left(\int_x^y h\right)^\gamma f(y)h(y)^{2/3}\,dy$$
$$=: K_{2,1}f(x) + K_{2,2}f(x),$$

$p' = 3/2$, $q' = 2$ и $r = 6$. Отметим, что ядро $k_{2,1}(x,y) := \left(\int_y^x h\right)^\gamma$ в определении оператора $K_{2,1}$ принадлежит классу $\mathscr{O}_b$, в то время как $k_{2,2}(x,y) := \left(\int_x^y h\right)^\gamma$ в $K_{2,2}$ – типа $\mathscr{O}_a$.

Чтобы установить ограниченность оператора $K_{2,1}$ в случае $h(z) = \exp(-z)$, будем использовать функцию $\phi_1(x) = x/2$, где $a(x) = \ln\sqrt{x+1} < \phi_1(x) < x =: b_1(x)$, вместо фарватеров $\rho_k^{-1}(x)$ и $\sigma_k(x)$. Так как $b_1^{-1}(t) = t$, $a^{-1}(t) = \exp 2t - 1$, $\phi^{-1}(t) = 2t$, то

$$B^6_{\rho_k=\phi^{-1}} := \int_0^\infty\left(\int_t^{\exp 2t-1}\left(\int_t^x h\right)^{2\gamma} h(x)\,dx\right)^3\left(\int_{\ln\sqrt{2t+1}}^{2t} h\right)^3 h(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_t^{\exp 2t-1}\left(\int_t^x h\right)^{2\gamma} d\int_t^x h\right)^3\left(\int_{\ln\sqrt{2t+1}}^{2t} h\right)^3 h(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\gamma+1)^3}\int_0^\infty\left(\int_t^{\exp 2t-1} h\right)^{3(2\gamma+1)}\left(\int_{\ln\sqrt{2t+1}}^{2t} h\right)^3 h(t)\,dt,\\
B^6_{\sigma_k=\phi} &:= \int_0^\infty\left(\int_{t/2}^{\exp t-1} h\right)^2\left(\int_{\ln\sqrt{t+1}}^{t}\left(\int_y^t h\right)^{3\gamma/2} h(y)\,dy\right)^4 h(t)\,dt\\
&= \int_0^\infty\left(\int_{t/2}^{\exp t-1} h\right)^2\left(\int_{\ln\sqrt{t+1}}^{t}\left(\int_y^t h\right)^{3\gamma/2} d\Big[-\int_y^t h\Big]\right)^4 h(t)\,dt\\
&= \left(\frac{2}{3\gamma+2}\right)^4\int_0^\infty\left(\int_{t/2}^{\exp t-1} h\right)^2\left(\int_{\ln\sqrt{t+1}}^{t} h\right)^{6\gamma+4} h(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Пусть $h(z)=\exp(-z)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
B^6_{\rho_k=\phi^{-1}} &\leqslant \frac{1}{(2\gamma+1)^3}\int_0^\infty \frac{\exp(-2(3\gamma+2)t)}{(2t+1)^{3/2}}\,dt\\
&\leqslant \frac{1}{(2\gamma+1)^3}\int_0^\infty \exp(-2(3\gamma+2)t)\,dt = \frac{1}{2(3\gamma+2)(2\gamma+1)^3}<\infty,\\
B^6_{\sigma_k=\phi} &\leqslant \left(\frac{2}{3\gamma+2}\right)^4\int_0^\infty \frac{\exp(-2t)}{(t+1)^{3\gamma+2}}\,dt \leqslant \frac{8}{(3\gamma+2)^4}<\infty.
\end{aligned}
$$

Отсюда по теореме 2.5 получаем, что оператор $K_{2,1}$ является ограниченным и компактным из L_3 в L_2. Аналогично, используя теорему 2.6 с $\phi_2(x)=2x$ вместо σ_k и ρ_k^{-1}, можно установить ограниченность и компактность преобразования $K_{2,2}$. Следовательно, если $h(z)=\exp(-z)$, то оператор K_2 является ограниченым и компактным из L_3 в L_2.

2.4. Дальнейшие результаты

Функция σ_k, введенная в определении 2.5, расширяет понятие фарватера σ из определения 2.3. Вместе с ρ_k расширенный k-фарватер σ_k является инструментом получения новых форм критериев ограниченности для обобщенного оператора Харди–Стеклова (2.1.4). Но, к сожалению, условия, предъявляемые к построению σ_k в 2.3, более сильные и при этом менее эффективные по сравнению с оригинальным фарватером σ. Основным преимуществом результатов 2.3 является получение гораздо более компактных условий ограниченности для оператора $\mathscr{K}$, чем в теоремах 2.1 и 2.2. Однако чтобы стать одновременно и необходимыми и достаточными, эти условия должны сопровождаться некоторыми дополнительными требованиями (см. теоремы 2.7 и 2.8). Очевидно, что это не лучшим образом сказывается на возможности применения результатов исследований, полученных для $\mathscr{K}$ с использованием σ_k и ρ_k. Вместе с тем метод фарватера принес немало интересного и полезного в плане исследований не только свойств самого оператора Харди–Стеклова $\mathscr{H}\colon L^p\to L^q$ вида (2.2.1), но и его многочисленных приложений (см., например, [25]–[31]). В частности, в терминах σ были установлены два различных типа критериев ограниченности для (2.2.1) из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$ для всех $p>1$ и $q>0$ (см. теоремы 2.3 и 2.4 или [30; теоремы 4.1, 4.2] и [25; теорема 2.1]). В дальнейшем эти результаты нашли свое применение в решении некоторых смежных задач (см. главу 3) таких, как характеризация оператора геометрического среднего с двумя переменными пределами интегрирования (пункт 3.1), неравенства вложения типа Соболева (пункты 3.3, 3.4.2) и т.д.

Отметим, что двойственный к преобразованию $\mathscr{H}\colon L^p\to L^q$ оператор

$$\mathscr{H}^* g(y)=v(y)\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} g(x)w(x)\,dx \qquad (2.4.1)$$

из $L^{q'}$ в $L^{p'}$ также относится к операторам Харди–Стеклова. Переформулировка теоремы 2.3 для преобразования $\mathscr{H}^*$ приводит нас к следующему определению и результатам.

Определение 2.6. Для заданных граничных функций $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющих условиям (2.1.5), числа $q>0$ и локально интегрируемой со степенью q на $(0,\infty)$ весовой функции $w(x)$ такой, что $0<w(x)<\infty$ для п.в. $x\in(0,\infty)$, определим *двойственную фарватер-функцию* $\rho(y)$ таким образом, что $b^{-1}(y)<\rho(y)<a^{-1}(y)$ на $(0,\infty)$ и

$$\int_{b^{-1}(y)}^{\rho(y)} w^q(x)\,dx=\int_{\rho(y)}^{a^{-1}(y)} w^q(x)\,dx \qquad \text{для всех } \ y>0. \tag{2.4.2}$$

Можем считать, что функции a^{-1} и b^{-1}, обратные к граничным $a,b\in(2.1.5)$, также удовлетворяют условиям (2.1.5). Поэтому по аналогии с σ (см. также комментарии к определению 2.5 относительно k-фарватеров σ_k и ρ_k) двойственный фарватер ρ тоже является дифференцируемой и строго возрастающей функцией на $(0,\infty)$.

Утверждения следующей теоремы вытекают в силу двойственности из теорем 2.3 и 2.4. Однако, на данном этапе можно говорить об их справедливости только для $p>1$ и $q>1$.

Теорема 2.9. *Пусть оператор $\mathscr{H}$ вида (2.2.1) действует из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$. Тогда $\mathscr{H}$ является ограниченным в случае $1<p\leqslant q<\infty$, если и только если $\mathscr{A}^*_M<\infty$ или если и только если $\mathscr{A}^*_T<\infty$, где*

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^*_M &:= \sup_{t>0}\biggl(\int_{a(\rho(t))}^{b(\rho(t))} v^{p'}\biggr)^{1/p'}\biggl(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\biggr)^{1/q}, \\ \mathscr{A}^*_T &:= \sup_{t>0}\biggl(\int_{\rho^{-1}(b^{-1}(t))}^{\rho^{-1}(a^{-1}(t))}\biggl[\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w^q\biggr]^{p'} v^{p'}(y)\,dy\biggr)^{1/p'}\biggl(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\biggr)^{-\frac{1}{q'}},\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

и $\mathscr{A}^*_M\approx\mathscr{A}^*_T\approx\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$.

При $1<q<p<\infty$ ограниченность оператора $\mathscr{H}\colon L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)$ имеет место если и только если $\mathscr{B}^*_{MR}<\infty$ или если и только если $\mathscr{B}^*_{PS}<\infty$, где $\mathscr{B}^*_{MR}\approx\mathscr{B}_{PS}*\approx\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ и

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^*_{MR} &:= \biggl(\int_0^\infty\biggl[\int_{a(\rho(t))}^{b(\rho(t))} v^{p'}\biggr]^{r/q'}\biggl[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\biggr]^{r/q} v^{p'}(t)\,dt\biggr)^{1/r}, \\ \mathscr{B}^*_{PS} &:= \biggl(\int_0^\infty\biggl[\int_{\rho^{-1}(b^{-1}(t))}^{\rho^{-1}(a^{-1}(t))}\biggl\{\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} w^q\biggr\}^{p'} v^{p'}(y)\,dy\biggr]^{r/q'}\biggl[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\biggr]^{p'-r/q'} v^{p'}(t)\,dt\biggr)^{1/r}.\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

В данном пункте установлено, что двойственная форма критериев ограниченности типа Мукенхоупта (2.4.3) и Мазьи–Розина (2.4.4) для (2.2.1) из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$ также верна и в случае $p>1$, $0<q<1$ (см. теорему 2.10 (c), (e)) и может быть получена также и в терминах фарватера σ для всех $p>1$, $q>0$. В дополнение к этому результату найдены критерии ограниченности (2.2.1) в их первоначальной (недвойственной) форме (см. (2.2.20) и (2.2.22)), но уже с использованием понятия двойственной фарватер-функции ρ вместо σ. Отметим, что по сравнению с утверждением теоремы 2.3 доказательства представленных здесь достаточных условий ограниченности для $\mathscr{H}\colon L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)$ не требуют выполнения (2.2.2) для σ или (3.2.28) для ρ (см. теорему 2.10 (a), (b)) в случаях, когда $p,q>1$.

Наличие нескольких форм характеристик ограниченности оператора может способствовать успешному решению связанных с ним задач. Этот аргумент, в частности, имеет непосредственное отношение к неравенству вложения (3.3.1), изучению которого посвящен пункт 3.3. Неравенство (3.3.1) связано с оператором Харди–Стеклова (см. пункт 3.3) и, в зависимости от форм весовых функций v и w извлечение фарватера ρ в явном виде из условия (2.4.2) может быть более простым по сравнению с аналогичной процедурой для фарватер-функции σ, определяемой уравнением (2.2.2), и наоборот.

Для заданных граничных функций $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющих (2.1.5), будем считать функцию $y=\varsigma(x)$ непрерывной, строго возрастающей на $(0,\infty)$ и такой, что $a(x)<\varsigma(x)<b(x)$ для $x>0$. Тогда обратная к ней функция $x=\varsigma^{-1}(y)=:\varsigma^*(y)$ также является непрерывной и строго возрастающей на $(0,\infty)$, причем $b^{-1}(y)<\varsigma^*(y)<a^{-1}(y)$ для $y>0$. Для ς мы полагаем

$$\begin{aligned}
&\Delta(t):=\Delta^-(t)\cup\Delta^+(t), && \Delta^-(t):=[a(t),\varsigma(t)), && \Delta^+(t):=[\varsigma(t),b(t)),\\
&\delta(t):=\delta^-(t)\cup\delta^+(t), && \delta^-(t):=[b^{-1}(\varsigma(t)),t), && \delta^+(t):=[t,a^{-1}(\varsigma(t))),\\
&\Theta(t):=\Theta^-(t)\cup\Theta^+(t), && \Theta^-(t):=[b^{-1}(t),\varsigma^*(t)), && \Theta^+(t):=[\varsigma^*(t),a^{-1}(t)),\\
&\vartheta(t):=\vartheta^-(t)\cup\vartheta^+(t), && \vartheta^-(t):=[a(\varsigma^*(t)),t), && \vartheta^+(t):=[t,b(\varsigma^*(t))).
\end{aligned}$$

Пусть $W_I(t):=\int_{I(t)}w^q$ и $V_I(t):=\int_{I(t)}v^{p'}$ для некоторого $I(t)\subset(0,\infty)$. Обозначим

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_\varsigma&:=\sup_{t>0}[W_\delta(t)]^{1/q}[V_\Delta(t)]^{1/p'}, & (\mathscr{A}_{\varsigma^*})^*&:=\sup_{t>0}[W_\Theta(t)]^{1/q}[V_\vartheta(t)]^{1/p'},\\
\mathscr{A}_\varsigma^\pm&:=\sup_{t>0}[W_{\delta^\pm}(t)]^{1/q}[V_\Delta(t)]^{1/p'}, & (\mathscr{A}_{\varsigma^*}^\pm)^*&:=\sup_{t>0}[W_\Theta(t)]^{1/q}[V_{\vartheta^\pm}(t)]^{1/p'},\\
\mathscr{B}_\varsigma&:=\left(\int_0^\infty[W_\delta]^{r/p}[V_\Delta]^{r/p'}w^q\right)^{1/r}, & (\mathscr{B}_{\varsigma^*})^*&:=\left(\int_0^\infty[W_\Theta]^{r/q}[V_\vartheta]^{r/q'}v^{p'}\right)^{1/r},\\
\mathscr{B}_\varsigma^\pm&:=\left(\int_0^\infty[W_{\delta^\pm}]^{r/p}[V_\Delta]^{r/p'}w^q\right)^{1/r}, & (\mathscr{B}_{\varsigma^*}^\pm)^*&:=\left(\int_0^\infty[W_\Theta]^{r/q}[V_{\vartheta^\pm}]^{r/q'}v^{p'}\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Здесь $(\,\cdot\,)^*$ подчеркивает двойственный характер функционалов $(\mathscr{A}_{\varsigma^*})^*$, $(\mathscr{B}_{\varsigma^*})^*$, $(\mathscr{A}_{\varsigma^*}^\pm)^*$, $(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^\pm)^*$. Если $\varsigma=\sigma$, то $\mathscr{A}_\sigma=\mathscr{A}_M$, $\mathscr{B}_\sigma=\mathscr{B}_{MR}$ (см. (2.2.20), (2.2.22)) и

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}_{\sigma^{-1}})^*&=\sup_{t>0}\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)}w^q\right)^{1/q}\left(\int_{a(\sigma^{-1}(t))}^{b(\sigma^{-1}(t))}v^{p'}\right)^{1/p'},\\
(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*&=\left(\int_0^\infty\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)}w^q\right]^{r/q}\left[\int_{a(\sigma^{-1}(t))}^{b(\sigma^{-1}(t))}v^{p'}\right]^{r/q'}v^{p'}(t)\,dt\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

При $\varsigma^*=\rho$ имеем $(\mathscr{A}_\rho)^*=\mathscr{A}_M^*$, $(\mathscr{B}_\rho)^*=\mathscr{B}_{MR}^*$ (см. теорему 2.9),

$$\mathscr{A}_{\rho^{-1}}=\sup_{t>0}\left(\int_{b^{-1}(\rho^{-1}(t))}^{a^{-1}(\rho^{-1}(t))}w^q\right)^{1/q}\left(\int_{a(t)}^{b(t)}v^{p'}\right)^{1/p'},\tag{2.4.5}$$

$$\mathscr{B}_{\rho^{-1}}=\left(\int_0^\infty\left[\int_{b^{-1}(\rho^{-1}(t))}^{a^{-1}(\rho^{-1}(t))}w^q\right]^{r/p}\left[\int_{a(t)}^{b(t)}v^{p'}\right]^{r/p'}w^q(t)\,dt\right)^{1/r}.\tag{2.4.6}$$

Аналогичным образом формируюся функционалы $\mathscr{A}_\sigma^\pm$, $\mathscr{B}_\sigma^\pm$, $(\mathscr{A}_{\sigma^{-1}}^\pm)^*$, $(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}}^\pm)^*$, $\mathscr{A}_{\rho^{-1}}^\pm$, $\mathscr{B}_{\rho^{-1}}^\pm$, $(\mathscr{A}_\rho^\pm)^*$ и $(\mathscr{B}_\rho^\pm)^*$. Отметим, что

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_\varsigma^-+\mathscr{A}_\varsigma^+&\approx\mathscr{A}_\varsigma, & (\mathscr{A}_{\varsigma^*}^-)^*+(\mathscr{A}_{\varsigma^*}^+)^*&\approx(\mathscr{A}_{\varsigma^*})^*,\\
\mathscr{B}_\varsigma^-+\mathscr{B}_\varsigma^+&\approx\mathscr{B}_\varsigma, & (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}}^-)^*+(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}}^+)^*&\approx(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*
\end{aligned}$$

для всех $p>1$ и $q>0$, в то время как $(\mathscr{B}_\rho^-)^*+(\mathscr{B}_\rho^+)^*\approx(\mathscr{B}_\rho)^*$ только в случае $p>1$, $q>1$.

Теорема 2.10. *Пусть $p>1$, $q>0$, $q\neq1$ и оператор $\mathscr{H}$ имеет вид (2.2.1). Предположим, что $\sigma(x)$ – непрерывная строго возрастающая функция на $(0,\infty)$ такая, что $a(x)<\sigma(x)<$*

$b(x)$ для $x>0$, и $\rho(y)$ – непрерывная строго возрастающая на $(0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условию $b^{-1}(y)<\rho(y)<a^{-1}(y)$ для всех $y>0$. Пусть $\varsigma(x)$ обозначает либо $\sigma(x)$, либо $\rho^{-1}(x)$ на $(0,\infty)$.

(a) *Если $1<p\leqslant q<\infty$, то*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim\mathscr{A}_\varsigma,\qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim(\mathscr{A}_{\varsigma^*})^*.$$

(b) *Пусть $p>1$ и $0<q<p<\infty$. Тогда*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim\mathscr{B}_\varsigma.$$

Кроме того, если $1<q<p<\infty$, то

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim(\mathscr{B}_{\varsigma^*})^*.$$

(c) *Пусть $0<q<1<p<\infty$. Если ρ является двойственной фарватер-функцией, удовлетворяющей условию (2.4.2), то*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim[(\mathscr{B}^-_\rho)^*+(\mathscr{B}^+_\rho)^*].$$

Если σ – фарватер, удовлетворяющий (2.2.2), то

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*.$$

(d) *Пусть $1<p\leqslant q<\infty$. Если σ – фарватер-функция, удовлетворяющая (2.2.2), то*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim\mathscr{A}_\sigma,\qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim(\mathscr{A}_{\sigma^{-1}})^*.$$

Если ρ является двойственным фарватером, удовлетворяющим (2.4.2), то

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim\mathscr{A}_{\rho^{-1}},\qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim(\mathscr{A}_\rho)^*.$$

(e) *Пусть $0<q<p<\infty$ и $p>1$. Если σ – фарватер-функция с условием (2.2.2), то*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim\mathscr{B}_\sigma,\qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim[(\mathscr{B}^-_{\sigma^{-1}})^*+(\mathscr{B}^+_{\sigma^{-1}})^*]\approx(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*.$$

Если ρ является двойственной фарватер-функцией, удовлетворяющей (2.4.2), то

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim\mathscr{B}_{\rho^{-1}},\qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\gtrsim[(\mathscr{B}^-_\rho)^*+(\mathscr{B}^+_\rho)^*]\geqslant(\mathscr{B}_\rho)^*.$$

Доказательство. (a) Чтобы показать неравенства

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim\mathscr{A}_\varsigma,\qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}\lesssim\mathscr{A}^*_\varsigma,$$

обратимся к оценке (2.2.23). Положим $\tau:=\varsigma^{-1}(a(t))$. Можем записать

$$\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t}\mathbb{A}(s,t)\leqslant\sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant\tau<t}\mathbb{A}(s,t)+\sup_{\tau\leqslant s\leqslant t}\mathbb{A}(s,t)=:H_1(t)+H_2(t),$$

где

$$H_1(t)=\sup_{b^{-1}(\varsigma(\tau))\leqslant s\leqslant\tau}\left(\int_s^{a^{-1}(\varsigma(\tau))}w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\varsigma(\tau)}^{b(s)}v^{p'}\right)^{1/p'},\qquad H_2(t)\leqslant\sup_{\tau\leqslant s\leqslant t}[W_{\delta^+}(s)]^{1/q}[V_\Delta(s)]^{1/p'},$$

так как $t\leqslant a^{-1}(\varsigma(s)))$ и $a(s)\leqslant a(t)$, если $\tau\leqslant s\leqslant t$. Следовательно,

$$H_1(t)+H_2(t)\leqslant[W_\delta(\tau)]^{1/q}[V_{\Delta^+}(\tau)]^{1/p'}+\sup_{s>0}[W_{\delta^+}(s)]^{1/q}[V_\Delta(s)]^{1/p'}\lesssim\mathscr{A}_\varsigma,$$

и неравенство $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{A}_\varsigma$ доказано. Отсюда в силу двойственности, получаем

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} = \|\mathscr{H}^*\|_{L^{q'}(0,\infty)\to L^{p'}(0,\infty)} \lesssim (\mathscr{A}_{\varsigma^*})^*.$$

(b) Чтобы доказать оценку $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{B}_\varsigma$ в случае $0<q<p<\infty$ и $p>1$, введем в рассмотрение последовательность (2.1.6) с $\xi_0 = 1$ и обозначим

$$\Delta_k := [\xi_k, \xi_{k+1}), \qquad \delta_k := [a(\xi_k), b(\xi_k)).$$

Разбивая полуось $(0,\infty)$ точками $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, представим оператор $\mathscr{H}$ в виде суммы

$$\mathscr{H} = T + S \tag{2.4.7}$$

двух блочно-диагональных операторов $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} T_k$ и $S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_k$, где

$$T_k f(x) = w(x)\int_{a(x)}^{a(\xi_{k+1})} f(y)v(y)\,dy, \qquad T_k\colon L^p(\delta_k) \to L^q(\Delta_k),$$
$$S_k f(x) = w(x)\int_{b(\xi_k)}^{b(x)} f(y)v(y)\,dy, \qquad S_k\colon L^p(\delta_{k+1}) \to L^q(\Delta_k)$$

и $\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}\Delta_k = (0,\infty)$, $\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = (0,\infty)$. Определим точки $\tau_k := \varsigma^{-1}(b(\xi_k)) = \varsigma^{-1}(a(\xi_{k+1}))$ и запишем

$$S_k f(x) = S_k^- f(x) + S_k^+ f(x), \tag{2.4.8}$$

где

$$S_k^- f(x) = \chi_{(\xi_k,\tau_k)}(x) S_k f(x), \qquad S_k^-\colon L^p(b(\xi_k), b(\tau_k)) \to L^q(\xi_k,\tau_k),$$
$$S_k^+ f(x) = \chi_{(\tau_k,\xi_{k+1})}(x) S_k f(x), \qquad S_k^+\colon L^p(\delta_{k+1}) \to L^q(\tau_k,\xi_{k+1}).$$

Применяя оценку (1.5.43) из леммы 1.12 к норме оператора S_k^- и используя соотношение $q - r/p + qr/p = r/p'$, получаем

$$\begin{aligned}\|S_k^-\|^r &\approx \int_{\xi_k}^{\tau_k}\left(\int_{\xi_k}^{t}\left[\int_{b(\xi_k)}^{b(x)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p}\left[\int_{b(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'}\right]^{q-r/p} w^q(t)\,dt\\ &\leqslant \int_{\xi_k}^{\tau_k}\left(\int_{\xi_k}^{t} w^q\right)^{r/p}\left[\int_{b(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'}\right]^{r/p'} w^q(t)\,dt.\end{aligned}$$

Так как $\xi_k \leqslant t \leqslant \varsigma^{-1}(b(\xi_k))$, то $b^{-1}(\varsigma(t)) \leqslant \xi_k$ и $\varsigma(t) \leqslant b(\xi_k)$. Поэтому

$$\|S_k^-\|^r \lesssim \int_{\xi_k}^{\tau_k} [W_{\delta^-}(t)]^{r/p}[V_{\Delta^+}(t)]^{r/p'} w^q(t)\,dt. \tag{2.4.9}$$

Аналогично, в силу (1.5.41) из леммы 1.12, получаем, что

$$\begin{aligned}\|S_k^+\|^r &\approx \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}}\left(\int_t^{\xi_{k+1}} w^q\right)^{r/p}\left(\int_{b(\xi_k)}^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt\\ &\leqslant \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} [W_{\delta^+}(t)]^{r/p}[V_\Delta(t)]^{r/p'} w^q(t)\,dt,\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

так как $\varsigma^{-1}(a(\xi_{k+1})) \leqslant t \leqslant \xi_{k+1}$, и, следовательно, $\xi_{k+1} \leqslant a^{-1}(\varsigma(t))$ и $a(t) \leqslant a(\xi_{k+1}) = b(\xi_k)$. Отсюда, опираясь на (2.4.8)—(2.4.10), получаем

$$\|S_k\|^r \lesssim \int_{\xi_k}^{\tau_k} [W_{\delta^-}]^{r/p}[V_{\Delta^+}]^{r/p'} w^q + \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} [W_{\delta^+}]^{r/p}[V_\Delta]^{r/p'} w^q. \tag{2.4.11}$$

Чтобы оценить $\|T_k\|$, выполним разложение

$$T_k f(x) = \chi_{(\xi_k,\tau_k)}(x) T_k f(x) + \chi_{(\tau_k,\xi_{k+1})}(x) T_k f(x) =: T_k^- f(x) + T_k^+ f(x). \tag{2.4.12}$$

С помощью оценки (1.5.49) из леммы 1.13 получаем

$$\|T_k^-\|^r \approx \int_{\xi_k}^{\tau_k} \left(\int_{\xi_k}^{t} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt.$$

Так как $\xi_k \leqslant t \leqslant \varsigma^{-1}(b(\xi_k))$, то $b^{-1}(\varsigma(t)) \leqslant \xi_k$, $b(\xi_k) \leqslant b(t)$, откуда вытекает, что

$$\|T_k^-\|^r \lesssim \int_{\xi_k}^{\tau_k} [W_{\delta^-}(t)]^{r/p} [V_\Delta(t)]^{r/p'} w^q(t)\,dt. \tag{2.4.13}$$

Далее, используя (1.5.51) из леммы 1.13 и учитывая $q - r/p + qr/p = r/p'$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\|T_k^+\|^r &\approx \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_t^{\xi_{k+1}} \left[\int_{a(x)}^{b(\xi_k)} v^{p'}\right]^q w^q(x)\,dx\right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} v^{p'}\right)^{q-r/p} w^q(t)\,dt \\
&\leqslant \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_t^{\xi_{k+1}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(t)}^{b(\xi_k)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt \\
&\leqslant \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} [W_{\delta^+}(t)]^{r/p} [V_{\Delta^-}(t)]^{r/p'} w^q(t)\,dt, \qquad (2.4.14)
\end{aligned}$$

так как $\varsigma^{-1}(a(\xi_{k+1})) \leqslant t \leqslant \xi_{k+1}$, и, как следствие, $\xi_{k+1} \leqslant a^{-1}(\varsigma(t))$, $b(\xi_k) = a(\xi_{k+1}) \leqslant \varsigma(t)$. Из (2.4.12)—(2.4.14) получаем

$$\|T_k\|^r \lesssim \int_{\xi_k}^{\tau_k} [W_{\delta^-}]^{r/p} [V_\Delta]^{r/p'} w^q + \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} [W_{\delta^+}]^{r/p} \big[V_{\Delta^-}\big]^{r/p'} w^q.$$

Отсюда, а также из (2.4.11) и (2.4.7), применяя лемму 2.1, получаем

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}\|^r \approx \|T\|^r + \|S\|^r &\approx \sum_k [\|S_k\|^r + \|T_k\|^r] \\
&\lesssim \sum_k \left[\int_{\xi_k}^{\tau_k} [W_{\delta^-}]^{r/p} [V_\Delta]^{r/p'} w^q + \int_{\tau_k}^{\xi_{k+1}} [W_{\delta^+}]^{r/p} [V_\Delta]^{r/p'} w^q\right] \\
&\leqslant \sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} [W_\delta]^{r/p} [V_\Delta]^{r/p'} w^q = \mathscr{B}_\varsigma^r,
\end{aligned}$$

и требуемая оценка $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim \mathscr{B}_\varsigma$ доказана. Соответственно, неравенство

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} = \|\mathscr{H}^*\|_{L^{q'}(0,\infty)\to L^{p'}(0,\infty)} \lesssim (\mathscr{B}_{\varsigma^*})^*$$

верно для $q > 1$ в силу двойственности.

(c) Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$. Предположим, что $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с $\xi_k = 1$ – последовательность вида (2.1.6). Пусть ς обозначает либо двойственную фарватер-функцию ρ^{-1}, удовлетворяющую условию (2.4.2), либо фарватер σ, удовлетворяющий (2.2.2). Положим

$$\xi_k^- := \varsigma^{-1}(a(\xi_k)), \qquad \xi_k^+ := \varsigma^{-1}(b(\xi_k)), \qquad \Delta_k^- := [\xi_k^-, \xi_k), \qquad \Delta_k^+ := [\xi_k, \xi_k^+)$$

и представим наш оператор в виде суммы

$$\mathscr{H} = H^- + H^+ \tag{2.4.15}$$

операторов $H^{\pm} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} H_k^{\pm}$, где

$$H_k^{\pm} f(x) = \chi_{\Delta_k^{\pm}}(x) w(x) \int_{a(x)}^{b(x)} f(y) v(y)\, dy$$

и $H_k^- : L^p[a(\xi_k^-), b(\xi_k)) \to L^q(\Delta_k^-)$, $H_k^+ : L^p[a(\xi_k), b(\xi_k^+)) \to L^q(\Delta_k^+)$.

Отметим, что, если $\varsigma = \sigma$, то $(\mathscr{B}_{\sigma^{-1}}^-)^* + (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}}^+)^* \approx (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*$ в силу (2.2.2). Поэтому требуемые в этой части теоремы оценки на $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ будут доказаны, если мы покажем, что

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim [(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^-)^* + (\mathscr{B}_{\varsigma^*}^+)^*].$$

Пусть $(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^{\pm})^* < \infty$. Так как $q' < 0$, то для простоты мы будем считать, что

$$W_\Theta(t) < \infty, \quad 0 < V_{\vartheta^{\pm}}(t) < \infty \qquad \text{для любого} \quad t > 0.$$

Отметим, что

$$(H_k^-|f|)(x) \leqslant w(x) \int_{a(\xi_k^-)}^{b(x)} |f| v, \qquad (H_k^+|f|)(x) \leqslant w(x) \int_{a(x)}^{b(\xi_k^+)} |f| v,$$

и в силу лемм 1.12 и 1.13

$$\|H_k^-\|^r \lesssim \int_{\Delta_k^-} \left(\int_z^{\xi_k} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{b(z)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(z)\, dz,$$

$$\|H_k^+\|^r \lesssim \int_{\Delta_k^+} \left(\int_{\xi_k}^{z} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{a(z)}^{b(\xi_k^+)} v^{p'}\right)^{r/p'} w^q(z)\, dz.$$

Так как $r/p' = r/q' + 1$ и $q' < 0$, то

$$\begin{aligned}
\|H_k^-\|^r &\lesssim \int_{a(\xi_k^-)}^{b(\xi_k)} \left(\int_{\max\{\xi_k^-, b^{-1}(t)\}}^{\xi_k} \left[\int_z^{\xi_k} w^q\right]^{r/p} \left[\int_{a(\xi_k^-)}^{b(z)} v^{p'}\right]^{r/q'} w^q(z)\, dz\right) v^{p'}(t)\, dt \\
&\leqslant \int_{a(\xi_k^-)}^{b(\xi_k)} \left(\int_{\max\{\xi_k^-, b^{-1}(t)\}}^{\xi_k} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{\max\{b(\xi_k^-), t\}} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt \\
&= \left[\int_{a(\xi_k^-)}^{a(\xi_k)} + \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)}\right] \left(\int_{\max\{\xi_k^-, b^{-1}(t)\}}^{\xi_k} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{\max\{b(\xi_k^-), t\}} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt \\
&=: \mathrm{I}_k^- + \mathrm{II}_k^-.
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Заметим, что

$$\mathrm{I}_k^- = \int_{a(\xi_k^-)}^{a(\xi_k)} v^{p'}(t)\, dt \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}\right)^{r/q'},$$

и в силу $q' < 0$

$$\mathrm{II}_k^- \leqslant \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{\xi_k} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{t} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt.$$

Так как $a(\xi_k^-) \leqslant a(\varsigma^{-1}(t))$ и $\xi_k \leqslant a^{-1}(t)$, если $a(\xi_k) \leqslant t \leqslant b(\xi_k)$, то

$$\mathrm{II}_k^- \leqslant \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} [W_\Theta(t)]^{r/q} [V_{\vartheta^-}(t)]^{r/q'} v^{p'}(t)\, dt. \tag{2.4.17}$$

Если $\varsigma = \sigma$, то согласно (2.2.2) и с учетом того, что $a(\xi_k) = \sigma(\xi_k^-)$,

$$\mathrm{I}_k^- = \int_{\sigma(\xi_k^-)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}(t)\,dt \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}\right)^{r/q'}.$$

Поскольку $a(\xi_k^-) \leqslant a(\sigma^{-1}(t))$ для $\sigma(\xi_k^-) \leqslant t \leqslant b(\xi_k^-)$ и $[\xi_k^-, \xi_k) \subseteq \Theta(t)$, то

$$\mathrm{I}_k^- \leqslant \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k^-)} \big[W_\Theta(t)\big]^{r/q} \big[V_{\vartheta^-}(t)\big]^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt. \tag{2.4.18}$$

Если $\varsigma = \rho^{-1}$, то в силу (2.4.2)

$$\mathrm{I}_k^- = \int_{a(\xi_k^-)}^{a(\xi_k)} v^{p'}(t)\,dt \left(\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k^-} w^q\right)^{r/q} \left(\int_{a(\xi_k^-)}^{b(\xi_k^-)} v^{p'}\right)^{r/q'}.$$

И так как $b(\rho(t)) \leqslant b(\xi_k^-)$ для $a(\xi_k^-) \leqslant t \leqslant a(\xi_k)$ и $[\xi_{k-1}, \xi_k^-) \subseteq \Theta(t)$, то

$$\mathrm{I}_k^- \leqslant \int_{a(\xi_k^-)}^{a(\xi_k)} [W_\Theta(t)]^{r/q} [V_{\vartheta^+}(t)]^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt. \tag{2.4.19}$$

Из (2.4.16)–(2.4.19) на основе леммы 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \|H^-\|^r &\approx \sum_k [\|H_{2k-1}^-\|^r + \|H_{2k}^-\|^r] \\ &\lesssim \sum_k \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} [W_\Theta]^{r/q} [V_{\vartheta^-}]^{r/q'} v^{p'} + \sum_k \int_{a(\xi_k^-)}^{a(\xi_k)} [W_\Theta]^{r/q} [V_{\vartheta^+}]^{r/q'} v^{p'} \\ &\leqslant [(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^-)^*]^r + [(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^+)^*]^r. \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

По аналогии с оценками (2.4.16)—(2.4.19) можно установить, что

$$\|H_k^+\|^r \lesssim \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} [W_\Theta]^{r/q} [V_{\vartheta^+}]^{r/q'} v^{p'} + \int_{b(\xi_k)}^{b(\xi_k^+)} [W_\Theta]^{r/q} [V_{\vartheta^-}]^{r/q'} v^{p'}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|H^+\|^r &\lesssim \sum_k \int_{a(\xi_k)}^{b(\xi_k)} [W_\Theta]^{r/q} [V_{\vartheta^+}]^{r/q'} v^{p'} + \sum_k \int_{b(\xi_k)}^{b(\xi_k^+)} [W_\Theta]^{r/q} [V_{\vartheta^-}]^{r/q'} v^{p'} \\ &\leqslant [(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^-)^*]^r + [(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^+)^*]^r. \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Тогда $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \lesssim [(\mathscr{B}_{\varsigma^*}^-)^* + (\mathscr{B}_{\varsigma^*}^+)^*]$ согласно (2.4.15), (2.4.20) и (2.4.21).

(d) Пусть ς обозначает либо фарватер σ со свойством (2.2.2), либо двойственную фарватер–функцию ρ^{-1}, удовлетворяющую (2.4.2).

Для доказательства требуемых в этой части теоремы оценок снизу в случае $1 < p \leqslant q < \infty$ снова обратимся к (2.2.23). Для всех $t > 0$

$$\begin{aligned} &[W_{\delta^-}(t)]^{1/q} [V_{\Delta^-}(t)]^{1/p'} + [W_{\delta^+}(t)]^{1/q} [V_{\Delta^+}(t)]^{1/p'} \\ &\quad = \mathbb{A}(b^{-1}(\varsigma(t)), t) + \mathbb{A}(t, a^{-1}(\varsigma(t))) \ll \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(a(t))\leqslant s\leqslant t} \mathbb{A}(s,t). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.2.23), если $\varsigma = \sigma \in$ (2.2.2), получаем $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{A}_\sigma$. Из двойственности для $\varsigma^* = \rho \in$ (2.4.2) вытекает, что

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} = \|\mathscr{H}^*\|_{L^{q'}(0,\infty)\to L^{p'}(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{A}_\rho)^*.$$

С помощью подстановок $\sigma(t) = \tau$ и $\rho(t) = \tau$ получаем соответственно, что

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{A}_{\sigma^{-1}})^*$$

из $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{A}_\sigma$ для $\varsigma^* = \sigma^{-1}$, и что

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{A}_{\rho^{-1}}$$

из $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{A}_\rho)^*$ в случае $\varsigma = \rho^{-1}$.

(e) Из теоремы 2.3 известно, что $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_\sigma$ в случае $0 < q < p < \infty$ и $p > 1$, если фарватер-функция σ удовлетворяет условию (2.2.2). Метод доказательства этой оценки для $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$ в теореме 2.3 также влечет и справедливость неравенства $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*$. Действительно, предположим сначала, что $\sigma(x) = x$. Тогда

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p\to L^q} \gtrsim \lim_{N\to\infty}\biggl(\sum_{|k|\leqslant N}\lambda_k\biggr)^{1/r} \tag{2.4.22}$$

(см. с. 77–81), где

$$\lambda_k = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}}\biggl(\int_t^{\eta_{k+2}} w^q\biggr)^{r/q}\biggl(\int_{\eta_{k-1}}^t v^{p'}\biggr)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt$$

и $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ определена по правилу (2.1.7) с $\eta_0 = 1$.

При $q' > 0$ в силу (2.2.2) $\ni \sigma(x) = x$ и аналогично тому, как это было сделано в доказательстве оценки $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_\sigma$ в теореме 2.3,

$$\lambda_k \geqslant \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\biggl(\int_{\Theta^+(t)} w^q\biggr)^{r/q}\biggl(\int_{\vartheta(t)} v^{p'}\biggr)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt, \tag{2.4.23}$$

так как $\Theta^+(t) = [t, a^{-1}(t)) \subseteq [t, \eta_{k+2})$ и $\vartheta^-(t) = [a(t), t) \subseteq [\eta_{k-1}, t)$, если $t \in [\eta_k, \eta_{k+1})$. Такая же оценка на λ_k в случае $q' < 0$ имеет место вследствие того, что

$$\int_{\eta_{k-1}}^t v^{p'} = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} v^{p'} + \int_{\eta_k}^t v^{p'} = \int_{\eta_k}^{b(\eta_k)} v^{p'} + \int_{\eta_k}^t v^{p'} \leqslant 2\int_{\eta_k}^{b(t)} v^{p'} \leqslant 2\int_{a(t)}^{b(t)} v^{p'}, \qquad t \in [\eta_k, \eta_{k+1}).$$

Объединяя оценки (2.4.22) и (2.4.23), получаем, что $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}^+_{\sigma^{-1}})^*$ в силу $\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}[\eta_k, \eta_{k+1}) = (0, \infty)$. Справедливость неравенства $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}^-_{\sigma^{-1}})^*$ может быть установлена аналогичным образом, но с использованием интервалов $[\zeta_k, \zeta_{k+1})$, построенных по последовательности (2.1.8) с $\zeta_0 = 1$. Таким образом,

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}^-_{\sigma^{-1}})^* + (\mathscr{B}^+_{\sigma^{-1}})^* \approx (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^* \qquad \text{для} \quad \sigma(x) = x.$$

Это же утверждение для произвольной $\sigma \in$ (2.2.2) вытекает из только что рассмотренного случая $\sigma(x) = x$ с помощью подстановок $\widetilde{a}(x) = \sigma^{-1}(a(x))$, $\widetilde{b}(x) = \sigma^{-1}b((x))$, $\widetilde{f}(y) = f(\sigma(t))[\sigma'(t)]^{1/p}$ и $\widetilde{v}(x) = v(\sigma(x))[\sigma'(x)]^{1/p'}$.

Теперь пусть ρ – двойственный фарватер, удовлетворяющий условию (2.4.2). Если $1 < q < p < \infty$, то оценки $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}_\rho)^*$ и $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_{\rho^{-1}}$ следуют в силу двойственности из $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_\sigma$ и $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^*$ соответственно (см. теорему 2.9). А так как $r/q' > 0$, то $(\mathscr{B}_\rho)^* \approx (\mathscr{B}_\rho^-)^* + (\mathscr{B}_\rho^+)^*$.

Остается показать оценки

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim [(\mathscr{B}_\rho^-)^* + (\mathscr{B}_\rho^+)^*], \qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_{\rho^{-1}}$$

в случае, когда $0 < q < 1 < p < \infty$ и $\rho \in$ (2.4.2). Предположим, что $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} < \infty$. Требуемые неравенства

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim [(\mathscr{B}_\rho^-)^* + (\mathscr{B}_\rho^+)^*], \qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_{\rho^{-1}}$$

будут установлены, если мы покажем, что

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}_\rho^\pm)^*, \qquad \|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_{\rho^{-1}}^\pm,$$

где $\mathscr{B}_{\rho^{-1}} \approx \mathscr{B}_{\rho^{-1}}^- + \mathscr{B}_{\rho^{-1}}^+$.

Пусть сначала $\rho(y) = y$. Чтобы установить справедливость $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}_\rho^+)^*$ и $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}_{\rho^{-1}}^-$, возьмем последовательность (2.1.7) с $\eta_0 = 1$ и на каждом $[\eta_k, \eta_{k+1})$ сформируем интервалы $\varkappa_j^k$, $j = 1, \ldots, j_b$, $j_b = j_b(k)$, как показано ниже:

1) если $\eta_{k+1} \leqslant b(\eta_k)$, то $j_b = 1$ и $[\eta_k, \eta_{k+1}) = \varkappa_1^k$;
2) если $b(\eta_k) < \eta_{k+1} \leqslant b(b(\eta_k))$, то $j_b = 2$ и $[\eta_k, \eta_{k+1}) = \bigcup_{j=1}^2 \varkappa_j^k$, где $\varkappa_1^k = [\eta_k, b(\eta_k))$ и $\varkappa_2^k = [b^{-1}(\eta_{k+1}), \eta_{k+1})$;
3) если $b(b(\eta_k)) < \eta_{k+1} \leqslant b(b(b(\eta_k)))$, то $j_b = 3$ и $[\eta_k, \eta_{k+1}) = \bigcup_{j=1}^3 \varkappa_j^k$, где $\varkappa_1^k = [\eta_k, b(\eta_k))$, $\varkappa_2^k = [b(\eta_k), b(b(\eta_k)))$ и $\varkappa_3^k = [b^{-1}(\eta_{k+1}), \eta_{k+1})$;

. . . .

Окончательно, получаем, что $[\eta_k, \eta_{k+1}) = \bigcup_{j=1}^{j_b} \varkappa_j^k$, где $\varkappa_j^k = [b^{(j-1)}(\eta_k), b^{(j)}(\eta_k))$ для $j = 1, \ldots, j_b - 1$ и $\varkappa_{j_b}^k = [b^{-1}(\eta_{k+1}), \eta_{k+1})$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и $j \in \{1, \ldots, j_b\}$ верно, что

$$W_\Theta(y) \approx \int_{\varkappa_j^k} w^q, \qquad y \in \varkappa_j^k \tag{2.4.24}$$

(более подробно см. лемму 2.4 с b^{-1}, a^{-1} и ρ вместо σ). Пусть

$$l_{k,j} := \left(\int_{\varkappa_j^k} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{a(m_j^k)}^{m_j^k} v^{p'}\right)^{r/(pq')},$$

где m_j^k – крайняя правая точка интервала $\varkappa_j^k$. Введем функцию

$$f_a(t) := \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \chi_{[a(m_j^k), m_j^k]}(t) l_{k,j} v^{p'-1}(t), \qquad N \in \mathbb{N}.$$

По построению $[a(x), b(x)] \supset [a(m_j^k), m_j^k]$, если $x \in \varkappa_j^k$ и любая $x \in (0, \infty)$ попадает не более, чем в два промежутка $\varkappa_j^k$. Так как $r/(pq') + 1 = r/(p'q)$ и $r/p + 1 = r/q$, мы получаем для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2\|\mathscr{H} f_a\|_q^q &\geqslant \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \int_{\varkappa_j^k} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f_a(y) v(y)\,dy\right)^q w^q(x)\,dx \\ &\geqslant \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \int_{\varkappa_j^k} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} l_{k,j}\, v^{p'}(y) \chi_{[a(m_j^k), m_j^k]}(y)\,dy\right)^q w^q(x)\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} l_{k,j}^q \left(\int_{a(m_j^k)}^{m_j^k} v^{p'} \right)^q \int_{\varkappa_j^k} w^q(x)\,dx \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \left(\int_{\varkappa_j^k} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{a(m_j^k)}^{m_j^k} v^{p'} \right)^{r/p'} =: \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=0}^{j_b(k)-1} \lambda_{k,j}.
\end{aligned} \tag{2.4.25}
$$

Так как промежутки $[m_{j-1}^k, m_j^k)$, формируемые крайними правыми точками m_j^k интервалов $\varkappa_j^k$ с $m_0^k = \eta_k$, не пересекаются, то

$$
\begin{aligned}
\|f_a\|_p^p &= \sum_{k=-N-1}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \int_{m_{j-1}^k}^{m_j^k} |f_a(y)|^p\,dy \\
&= \sum_{k=-N-1}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \int_{m_{j-1}^k}^{m_j^k} \left[\sum_{i=j}^{j_b(k)} l_{k,i}^p \chi_{[a(m_i^k), m_i^k]}(y) + \sum_{i=1}^{j_b(k+1)} l_{k+1,i}^p \chi_{[a(m_i^{k+1}), m_i^{k+1}]}(y) \right] v^{p'}(y)\,dy \\
&=: \sum_{k=-N-1}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \mathrm{I}_{k,j} + \mathrm{II}_{k,j}.
\end{aligned} \tag{2.4.26}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
\Xi(k) &:= \{i = j, \ldots, j_b(k) \colon (m_{j-1}^k, m_j^k) \cap (a(m_i^k), m_i^k) \neq \varnothing\}, \\
\Xi(k+1) &:= \{i = 1, \ldots, j_b(k+1) \colon (m_{j-1}^k, m_j^k) \cap (a(m_i^{k+1}), m_i^{k+1}) \neq \varnothing\}
\end{aligned}
$$

и рассмотрим сначала k с $|k| \leqslant N$. Заметим, что $\Xi(k) = \{j, \ldots, j_b\}$ для всех таких k, так как по построению $a(m_{j_b(k)}^k) = a(m_0^{k+1}) = a(\eta_{k+1}) = \eta_k = m_0^k$. При этом $\Xi(k+1)$ пусто, если $j_b(k+1) = 1$, и $\Xi(k+1) = \{1, \ldots, j_b(k+1) - 1\}$ в случае $j_b(k+1) > 1$. Следовательно, для любого фиксированного k с $|k| \leqslant N$ и $j \in \{j, \ldots, j_b(k)\}$

$$
\mathrm{I}_{k,j} + \mathrm{II}_{k,j} = \sum_{i=j}^{j_b(k)} l_{k,i}^p \int_{m_{j-1}^k}^{m_j^k} v^{p'} + \sum_{i \in \Xi(k+1)} l_{k+1,i}^p \int_{\max\{m_{j-1}^k, a(m_i^{k+1})\}}^{m_j^k} v^{p'}.
$$

Поскольку $q' < 0$, то

$$
l_{k+1,i} \leqslant \left(\int_{\varkappa_i^{k+1}} w^q \right)^{r/(pq)} \left(\int_{\max\{m_{j-1}^k, a(m_i^{k+1})\}}^{m_j^k} v^{p'} \right)^{r/(pq')}, \qquad i \in \Xi(k+1).
$$

Более того, в силу (2.4.2) (см. также (2.4.24))

$$
\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+2}} w^q = \int_{b^{-1}(\eta_{k+1})}^{\eta_{k+1}} w^q \approx \int_{\varkappa_{j_b}^k} w^q.
$$

Поэтому и на основании того, что $r/q' + 1 = r/p' > 0$ и $r/q > 1$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_{k,j} &\leqslant \sum_{i \in \Xi(k+1)} \left(\int_{\varkappa_i^{k+1}} w^q \right)^{r/q} \left(\int_{\max\{m_{j-1}^k, a(m_i^{k+1})\}}^{m_j^k} v^{p'} \right)^{r/p'} \\
&\leqslant \left(\int_{a(m_{j_b}^k)}^{m_{j_b}^k} v^{p'} \right)^{r/p'} \sum_{i \in \Xi(k+1)} \left(\int_{\varkappa_i^{k+1}} w^q \right)^{r/q} \leqslant \left(\int_{a(m_{j_b}^k)}^{m_{j_b}^k} v^{p'} \right)^{r/p'} \left(\sum_{i \in \Xi(k+1)} \int_{\varkappa_i^{k+1}} w^q \right)^{r/q} \\
&\leqslant 2 \left(\int_{a(m_{j_b}^k)}^{m_{j_b}^k} v^{p'} \right)^{r/p'} \left(\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+2}} w^q \right)^{r/q} \approx \lambda_{k,j_b}.
\end{aligned} \tag{2.4.27}
$$

Так как $q' < 0$ и $a(m^k_{j_b(k)}) = m^k_0$, то

$$l_{k,i} \leqslant \left(\int_{\varkappa^k_i} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{m^k_{j-1}}^{m^k_j} v^{p'}\right)^{r/(pq')}, \qquad i \in \Xi(k).$$

Следовательно, в силу (2.4.2) и по аналогии с (2.4.27),

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{k,j} &\leqslant \left(\int_{m^k_{j-1}}^{m^k_j} v^{p'}\right)^{r/p'} \sum_{i=j}^{j_b(k)} \left(\int_{\varkappa^k_i} w^q\right)^{r/q} \leqslant 2\left(\int_{a(m^k_j)}^{m^k_j} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_{m^k_{j-1}}^{m^k_{j_b}} w^q\right)^{r/q} \\ &\leqslant \left(\int_{a(m^k_j)}^{m^k_j} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_{m^k_{j-1}}^{a^{-1}(m^k_j)} w^q\right)^{r/q} = 2^{r/q}\left(\int_{a(m^k_j)}^{m^k_j} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_{m^k_{j-1}}^{m^k_j} w^q\right)^{r/q} \lesssim \lambda_{k,j}.\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Если $k = -N-1$, то $\Xi(k) = \varnothing$ по определению f_a. Если $\Xi(k+1) = \Xi(-N) \neq \varnothing$, то по той же причине

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_{-N-1,j} &\leqslant \sum_{i\in\Xi(-N)} l^p_{-N,i} \int_{\max\{m^{-N-1}_{j-1}, a(m^{-N}_i)\}}^{m^{-N}_1} v^{p'} \leqslant \sum_{i\in\Xi(-N)} \left(\int_{a(m^{-N}_i)}^{m^{-N}_1} v^{p'}\right)^{r/p'} \left(\int_{m^{-N}_{i-1}}^{m^{-N}_i} w^q\right)^{r/q} \\ &\leqslant \left(\int_{a(m^{-N}_1)}^{m^{-N}_1} v^{p'}\right)^{r/p'} \sum_{i\in\Xi(-N)} \left(\int_{m^{-N}_{i-1}}^{m^{-N}_i} w^q\right)^{r/q} \ll \lambda_{-N,1}.\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Объединяя (2.4.26)—(2.4.28) и (2.4.29), получаем

$$\|f_a\|^p_p \lesssim \sum_{k=-N}^{N} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \lambda_{k,j}.$$

Отсюда и из (2.4.25) при $N \to \infty$ следует

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{j_b(k)} \lambda_{k,j}\right)^{1/r}. \tag{2.4.30}$$

Для извлечения из (2.4.30) оценки $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}^+_\rho)^*$ заметим, что

$$\left(\int_{\varkappa^k_j} v^{p'}\right)^{r/p'} \approx \int_{\varkappa^k_j} \left(\int_t^{m^k_j} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt \geqslant \int_{\varkappa^k_j} \left(\int_t^{b(t)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt$$

в силу конструкции $\varkappa^k_j$ и так как $q' < 0$. Отсюда с учетом (2.4.24) получаем

$$\begin{aligned}\lambda_{k,j} &\gtrsim \left(\int_{\varkappa^k_j} w^q\right)^{r/q} \int_{\varkappa^k_j} \left(\int_{\vartheta^+(t)} v^{p'}\right)^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt \\ &\approx \int_{\varkappa^k_j} [W_\Theta(t)]^{r/q} [V_{\vartheta^+}(t)]^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt \geqslant \int_{m^k_{j-1}}^{m^k_j} [W_\Theta(t)]^{r/q} [V_{\vartheta^+}(t)]^{r/q'} v^{p'}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Требуемая оценка $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}^+_\rho)^*$ в случае $\rho(y) = y$ теперь вытекает из (2.4.30) в силу $\bigcup_{k,j}[m^k_j, m^k_{j+1}) = (0,\infty)$.

Чтобы показать $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}^-_{\rho^{-1}}$ при $\rho(y)=y$, рассмотрим произвольный $\varkappa^k_j$ и следующий за ним $\widetilde{\varkappa}^k_j$. Для них в силу (2.4.24) интегралы $\int_{\varkappa^k_j} w^q$ и $\int_{\widetilde{\varkappa}^k_j} w^q$ эквивалентны. Поэтому сумма $\gamma_{k,j}$ соответствующих величин $\lambda_{k,j}$ и $\widetilde{\lambda}_{k,j}$ может быть оценена снизу следующим образом:

$$\gamma_{k,j} \gtrsim \left(\int_{\varkappa^k_{j+1}} w^q\right)^{r/q}\left(\int_{a(m^k_j)}^{m^k_{j+1}} v^{p'}\right)^{r/p'} =: \mu_{k,j}$$

(здесь $m^k_{j_b+1}=m^{k+1}_1$ и $\varkappa^k_{j+1}=\varkappa^{k+1}_1$, если $j=j_b$). Следовательно, с учетом (2.4.24)

$$\begin{aligned}\mu_{k,j} &\approx \left(\int_{a(m^k_j)}^{m^k_{j+1}} v^{p'}\right)^{r/p'}\int_{\varkappa^k_{j+1}}[W_\delta(t)]^{r/p}w^q(t)\,dt\\ &\geqslant \int_{\varkappa^k_{j+1}}[W_\delta(t)]^{r/p}[V_{\Delta^-}(t)]^{r/p'}w^q(t)\,dt \geqslant \int_{m^k_j}^{m^k_{j+1}}[W_\delta(t)]^{r/p}[V_{\Delta^-}(t)]^{r/p'}w^q(t)\,dt.\end{aligned}$$

Окончательно получаем из (2.4.30)

$$\begin{aligned}\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} &\gtrsim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{j_b(k)} 2\,\lambda_{k,j}\right)^{1/r} \gtrsim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{j_b(k)}\mu_{k,j}\right)^{1/r}\\ &\gtrsim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{j_b(k)}\int_{m^k_j}^{m^k_{j+1}}[W_\delta]^{r/p}[V_{\Delta^-}]^{r/p'}w^q\right)^{1/r} = \mathscr{B}^-_{\rho^{-1}},\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

что означает справедливость неравенства $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}^-_{\rho^{-1}}$ в случае $\rho(y)=y$.

Аналогично, используя последовательность (2.1.8) с $\zeta_0=1$ вместо (2.1.7), можно показать, что $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim (\mathscr{B}^-_\rho)^*$ и $\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \gtrsim \mathscr{B}^+_{\rho^{-1}}$ для $\rho(y)=y$. Общий случай ρ следует из $\rho(y)=y$ с помощью подстановок $\widetilde{a}(x)=a(\rho(x))$, $\widetilde{b}(x)=b(\rho(x))$ и $\widetilde{w}(x)=w(\rho(x))[\rho'(x)]^{1/q}$.

Следствие 2.1. *Пусть $p>1$, $q>0$, $q\neq 1$ и оператор $\mathscr{H}$ имеет вид* (2.2.1). *Предположим, что $\sigma(x)$ является фарватер-функцией, удовлетворяющей на $(0,\infty)$ условию* (2.2.2), *а $\rho(y)$ – двойственный фарватер, удовлетворяющи на $(0,\infty)$ условию* (2.4.2). *Тогда*

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{A}_\sigma \approx (\mathscr{A}_{\sigma^{-1}})^* \approx \mathscr{A}_{\rho^{-1}} \approx (\mathscr{A}_\rho)^* \tag{2.4.32}$$

в случае $1<p\leqslant q<\infty$. Если же $0<q<p<\infty$ и $p>1$ то

$$\|\mathscr{H}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)} \approx \mathscr{B}_\sigma \approx (\mathscr{B}_{\sigma^{-1}})^* \approx \mathscr{B}_{\rho^{-1}} \approx (\mathscr{B}^-_\rho)^* + (\mathscr{B}^+_\rho)^*, \tag{2.4.33}$$

где $(\mathscr{B}^-_\rho)^* + (\mathscr{B}^+_\rho)^* \approx (\mathscr{B}_\rho)^*$ в случае $1<q<p<\infty$.

Критерии ограниченности для оператора Харди–Стеклова $\mathscr{H}$ из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$ в форме Томаселли и Перссона–Степанова, альтернативные установленным в следствии 2.1, также могут быть получены в терминах фарватера σ и двойственного к нему ρ как в прямой, так и в двойственной форме.

Глава 3. Приложения

3.1. Оператор геометрического среднего с переменными пределами

В этом пункте мы изучим проблему ограниченности геометрического оператора Стеклова

$$\mathscr{G} f(x) := \exp\biggl(\frac{1}{b(x)-a(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} \log f(y)\, dy\biggr), \qquad f(y) \geqslant 0, \tag{3.1.1}$$

действующего в весовых пространствах Лебега с граничными функциями $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющими условиям (2.1.5). Речь идет о точной двусторонней оценке величины

$$\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} := \sup_{f \geqslant 0} \frac{\|(\mathscr{G} f)w\|_q}{\|fv\|_p}.$$

Оператор $\mathscr{G}$ тесно связан с оператором $\mathscr{H}$ Харди–Стеклова (2.2.1). В силу неравенства Йенсена

$$\Bigl[\mathscr{G}(fv)\Bigr](x) w(x) \leqslant \frac{\mathscr{H} f(x)}{b(x)-a(x)}, \tag{3.1.2}$$

поэтому верхняя оценка $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w}$ следует из верхней оценки L^p–L^q ограниченности оператора $\mathscr{H}$. Для доказательства оценки снизу мы привлекаем технический аппарат предыдущей главы.

Теорема 3.1. *Пусть оператор $\mathscr{G}$ задан в виде (3.2.3) с граничными функциями $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющими условиям (2.1.5).*

Если $0 < p \leqslant q < \infty$, то

$$\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_u} \approx \sup_{t>0} \biggl(\int_{\sigma_0^{-1}(a(t))}^{\sigma_0^{-1}(b(t))} u^q \biggr)^{1/q} [b(t)-a(t)]^{-1/p} =: \mathscr{A}_{\mathscr{G}}, \tag{3.1.3}$$

и если $0 < q < p < \infty$, то

$$\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} \approx \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{\sigma_0^{-1}(a(t))}^{\sigma_0^{-1}(b(t))} u^q \biggr]^{r/p} \frac{u^q(t)\, dt}{[b(t)-a(t)]^{r/p}}\biggr)^{1/r} =: \mathscr{B}_{\mathscr{G}}, \tag{3.1.4}$$

где $1/r = 1/q - 1/p$,

$$\sigma_0(t) := \frac{a(t)+b(t)}{2}, \qquad u(t) := (\mathscr{G} v^{-1})(t) w(t). \tag{3.1.5}$$

Доказательство. *Верхние оценки.* Из (3.1.2) следует, что оценки $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} \lesssim \mathscr{A}_{\mathscr{G}}$ и $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} \lesssim \mathscr{B}_{\mathscr{G}}$ в (3.1.3) и (3.1.4) следуют применением теоремы 2.4 при подходящем выборе параметров суммирования и весовых функций.

Пусть $\mathscr{A}_{\mathscr{G}} < \infty$ при $0 < p \leqslant q < \infty$ и $\mathscr{B}_{\mathscr{G}} < \infty$ при $0 < q < p < \infty$. Пусть $s \in (0, \min\{p,q\})$ и положим $\overline{p} = p/s$ и $\overline{q} = q/s$.

Так как $\mathscr{G}(f^s) = (\mathscr{G} f)^s$ и $\mathscr{G}(f \cdot g) = (\mathscr{G} f) \cdot (\mathscr{G} g)$, то

$$\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} = \|\mathscr{G}\|_{L^p \to L^q_u} = \|\mathscr{G}\|^{1/s}_{L^{\overline{p}} \to L^{\overline{q}}_{u^s}} \tag{3.1.6}$$

с весом u, заданным в (3.1.5). Заметим, что для оператора $\mathscr{H}\colon L^{\overline{p}} \to L^{\overline{q}}$ вида (2.2.1) с $v = 1$ и $w = u^s$ условие $\overline{p} > 1$ теоремы 2.4 выполняется. Более того, если $1 < \overline{q} < \overline{p} < \infty$, то $\overline{r} := \overline{p}\overline{q}/(\overline{p} - \overline{q}) = r/s$ и $\overline{r}/\overline{p} = r/p$. Применяя (3.1.2) и теорему 2.4 с $v = 1$ и $w = u^s$, получаем

$$\|\mathscr{G}\|^{1/s}_{L^{\overline{p}} \to L^{\overline{q}}_{u^s}} \leqslant \|\mathscr{H}\|^{1/s}_{L^{\overline{p}} \to L^{\overline{q}}} \lesssim \begin{cases} \mathscr{A}_{\mathscr{G}}, & 1 < \overline{p} \leqslant \overline{q} < \infty. \\ \mathscr{B}_{\mathscr{G}}, & 1 < \overline{q} \leqslant \overline{p} < \infty. \end{cases}$$

Отсюда в силу (3.1.6) следуют верхние оценки $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} \lesssim \mathscr{A}_{\mathscr{G}}$ и $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} \lesssim \mathscr{B}_{\mathscr{G}}$.

Нижние оценки. Пусть $0 < p \leqslant q < \infty$. Сначала покажем, что $\mathscr{A}_{\mathscr{G}} \approx \max(\mathscr{A}_{\mathscr{G},1}, \mathscr{A}_{\mathscr{G},2})$, где

$$\mathscr{A}_{\mathscr{G},1} := \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(\sigma(t)) \leqslant s < t} \left(\int_s^t u^q\right)^{1/q} (\sigma(t) - a(s))^{-1/p},$$

$$\mathscr{A}_{\mathscr{G},2} := \sup_{t>0} \sup_{t < s \leqslant a^{-1}(\sigma(t))} \left(\int_t^s u^q\right)^{1/q} (b(s) - \sigma(t))^{-1/p}.$$

Так как

$$[b(s) - a(s)] \approx \begin{cases} \sigma(t) - a(s), & \text{если } b^{-1}(\sigma(t)) \leqslant s \leqslant t, \\ b(s) - \sigma(t), & \text{если } t \leqslant s \leqslant a^{-1}(\sigma(t)), \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{\mathscr{G},1} &\approx \sup_{t>0} \sup_{b^{-1}(\sigma(t)) \leqslant s < t} \left(\int_s^t u^q\right)^{1/q} [b(s) - a(s)]^{-1/p} \\ &= \sup_{s>0} [b(s) - a(s)]^{-1/p} \sup_{s < t \leqslant \sigma^{-1}(b(s))} \left(\int_s^t u^q\right)^{1/q} = \sup_{s>0} [b(s) - a(s)]^{-1/p} \left(\int_s^{\sigma^{-1}(b(s))} u^q\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathscr{A}_{\mathscr{G},2} \approx \sup_{s>0} [b(s) - a(s)]^{-1/p} \left(\int_{\sigma^{-1}(a(s))}^s u^q\right)^{1/q}.$$

Таким образом, $\mathscr{A}_{\mathscr{G}} \approx \max(\mathscr{A}_{\mathscr{G},1},\ \mathscr{A}_{\mathscr{G},2})$.

Далее, предположим, что $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} < \infty$. Для $t > 0$ и $s \in [b^{-1}(\sigma(t)), t)$ выберем число $\tau \in (t, a^{-1}(\sigma(t)))$ такое, что $b(\tau) \leqslant b(t) + (a(t) - a(s))$. Тогда $b(\tau) - \sigma(t) \leqslant \sigma(t) - a(s)$. Рассмотрим функцию

$$f_1 := [\sigma(t) - a(s)]^{-1/p} \chi_{(a(s), \sigma(t))} + [b(\tau) - \sigma(t)]^{-1/p} \chi_{(\sigma(t), b(\tau))}.$$

Имеем $\|f_1\|_p = 2^{1/p}$, и в силу (3.1.6)

$$\begin{aligned} 2^{1/p} \|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} &= 2^{1/p} \|\mathscr{G}\|_{L^p \to L^q_u} \geqslant \|u(\mathscr{G} f_1)\|_q = \|u(\mathscr{G} f_1)\|_q \\ &\geqslant \left(\int_s^t \left[u(x) \exp\left(\frac{1}{b(x) - a(x)} \left(\int_{a(x)}^{\sigma(t)} \log f_1 + \int_{\sigma(t)}^{b(x)} \log f_1\right)\right)\right]^q dx\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_s^t \left[u(x) \exp\left(-\frac{(\sigma(t) - a(x)) \log(\sigma(t) - a(s)) + (b(x) - \sigma(t)) \log(b(\tau) - \sigma(t))}{p(b(x) - a(x))}\right)\right]^q dx\right)^{1/q} \\ &\geqslant \left(\int_s^t u^q\right)^{1/q} [\sigma(t) - a(s)]^{-1/p}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v \to L^q_w} \geqslant 2^{-1/p} \mathscr{A}_{\mathscr{G},1}$. Аналогично, для фиксированных $t > 0$ и $s \in (t, a^{-1}(\sigma(t))]$ существует $\tau \in (b^{-1}(\sigma(t)), t)$ такое, что $\sigma(t) - a(\tau) \leqslant b(s) - \sigma(t)$. Используя функцию

$$f_2 := [\sigma(t) - a(\tau)]^{-1/p} \chi_{(a(\tau),\, \sigma(t))} + [b(s) - \sigma(t)]^{-1/p} \chi_{(\sigma(t),\, b(s))},$$

получим оценку $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v\to L^q_w} \geqslant 2^{-1/p}\mathscr{A}_{\mathscr{G},2}$. Следовательно, в силу эквивалентности $\mathscr{A}_{\mathscr{G}} \approx \max(\mathscr{A}_{\mathscr{G},1},\, \mathscr{A}_{\mathscr{G},2})$ мы имеем $\mathscr{A}_{\mathscr{G}} \lesssim \|\mathscr{G}\|_{L^p_v\to L^q_w} < \infty$ при $0<p\leqslant q<\infty$.

Далее, пусть $0<q<p<\infty$ и $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v\to L^q_w}<\infty$, где аналогично доказательству верхней оценки

$$\|\mathscr{G}\|_{L^p_v\to L^q_w} = \|\mathscr{G}\|_{L^p\to L^q_u} = \|\mathscr{G}\|^{1/s}_{L^{\widetilde{p}}\to L^{\widetilde{q}}_{\widetilde{u}}} < \infty$$

при $\widetilde{u}=u^s$ и $\widetilde{p}=p/s$, $\widetilde{q}=q/s$ для $s\in(p,\infty)$. Другими словами, неравенство

$$\|(\mathscr{G}f)\widetilde{u}\|_{\widetilde{q}} \leqslant C\|f\|_{\widetilde{p}} \tag{3.1.7}$$

выполняется для всех $0\leqslant f\in L^{\widetilde{p}}$ и $0<\widetilde{q}<\widetilde{p}<1$ с константой $C<\infty$, не зависящей от f. Пусть функция $\sigma(x)$ такова, что $b(x)-\sigma(x)=\sigma(x)-a(x)$. Обозначим

$$x^- = \sigma^{-1}(a(x)), \quad x^+ = \sigma^{-1}(b(x)), \qquad \theta(x)=[x^-,x^+],$$

и аналогично доказательству теорем 2.3 и 2.4 устанавливаются оценки

$$\left(\int_0^\infty \left[\int_{\theta^\pm(x)} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(x)\,dx}{[b(x)-a(x)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}\right)^{1/\widetilde{r}} =: (\widetilde{\mathscr{B}}_{\mathscr{G}})^\pm \lesssim \|\mathscr{G}\|_{L^{\widetilde{p}}\to L^{\widetilde{q}}_{\widetilde{u}}}, \tag{3.1.8}$$

где $\theta^-(x)=(x^-,x)$, $\theta^+(x)=(x,x^+)$ и $1/\widetilde{r}=1/\widetilde{q}-1/\widetilde{p}$. Для доказательства неравенства (3.1.8) с константой $(\widetilde{\mathscr{B}}_{\mathscr{G}})^-$ положим $\xi_0=1$ и определим последовательность $\{\xi_k\}\subset(0,\infty)$ в соответствии с (2.1.6). Тогда $\xi_k<\xi_k^+=\xi_{k+1}^-<\xi_{k+1}$. Более того,

$$\bigcup_k[\xi_k,\xi_{k+1})=(0,\infty), \qquad \bigcup_k[\sigma(\xi_k),\sigma(\xi_{k+1}))=(0,\infty).$$

Далее, положим $\xi_k^+=\xi_{k+1}^-=m_k^0$ и построим на каждом отрезке $[\xi_k,\xi_{k+1}]$ последовательность $\{m_k^j\}$ при $-j_a(k)\leqslant j\leqslant j_b(k)$ следующим образом: для $-j_a(k)\leqslant j\leqslant 0$ мы используем конструкцию из леммы 2.4 при $v=1$ и $d=\xi_k$, в то время как для $0\leqslant j\leqslant j_b(k)$ используем лемму 2.2 при $v=1$ и $c=\xi_{k+1}$. Тогда мы получим последовательность $\{m_k^j\}$, $-j_a(k)\leqslant j\leqslant j_b(k)$, следующего вида:

1) $m_k^{-j_a(k)}=\xi_k$, $m_k^{j_b(k)}=\xi_{k+1}$;
2) если $(\xi_k^+)^-\leqslant\xi_k$, то $j_a(k)=1$; $j_b(k)=1$, если $[\mathscr{N}^-(k)]=0$ или $\mathscr{N}^-(k)=[\mathscr{N}^-(k)]=1$;
3) если $(\xi_k^+)^->\xi_k$, то $j_a(k)>1$ и $m_k^{j-1}=(m_k^j)^-$, где $(m_k^j)^->\xi_k$ и $-j_a(k)+2\leqslant j\leqslant 0$;
4) если $[\mathscr{N}^-(k)]>0$, то точки m_k^j при $1\leqslant j\leqslant[\mathscr{N}^-(k)]$ берутся так, чтобы

$$b(m_k^j)-a(\xi_{k+1}) = 2\,[b(m_k^{j-1})-a(\xi_{k+1})]. \tag{3.1.9}$$

В результате получим, что

$$\bigcup_k \bigcup_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1}[m_k^j,m_k^{j+1})=(0,\infty).$$

Более того, из лемм 2.2 и 2.4 вытекают следующие свойства функции $b(t)-a(t)$:

1°) если $t\in(m_k^j,m_k^{j+1})$, то

$$b(t)-a(t)\approx b(m_k^{j+1})-a(m_k^j), \tag{3.1.10}$$

$$b(m_k^{j+1})-a(m_k^j)\approx b(m_k^j)-a(m_k^j)\approx b(m_k^{j+1})-a(m_k^{j+1}); \tag{3.1.11}$$

2°) если $t\in[x^-,x]$, то

$$b(t)-a(t)<b(x)-a(x^-)\approx b(x)-a(x), \tag{3.1.12}$$

и для $\xi_k\leqslant x^-<t<x\leqslant\xi_k^+$

$$b(t)-a(t)\approx b(x)-a(x^-)\approx b(x)-a(x); \tag{3.1.13}$$

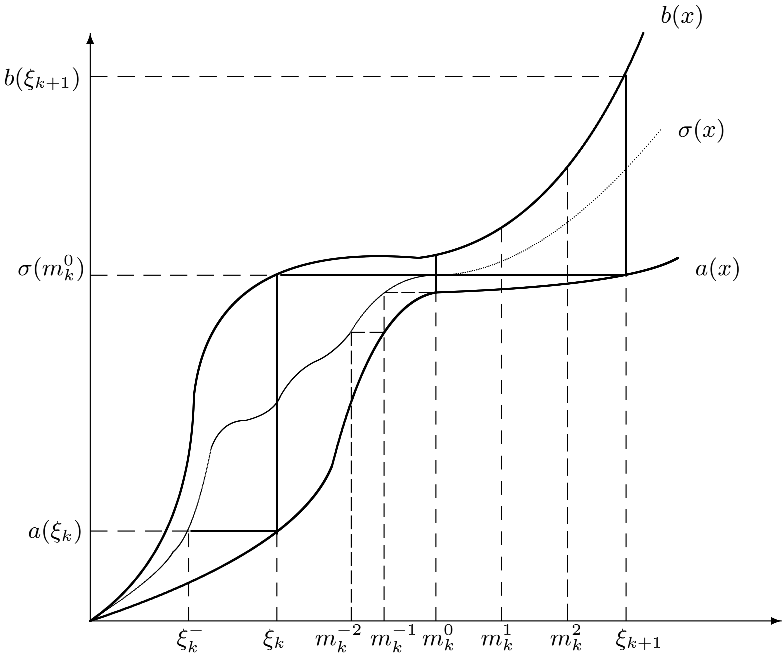

Рис. 3.1.1

3°) если $0 \leqslant j \leqslant j_b(k) - 2$, то для любого $i \in \{1, \dots, j_b(k) - j - 1\}$

$$b(m_k^{j+i}) - a(\xi_{k+1}) = 2^i [b(m_k^j) - a(\xi_{k+1})]. \tag{3.1.14}$$

Подставляя функцию

$$f(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} f_{k,j}(y),$$

где

$$f_{k,j}(y) = \chi_{(a(m_k^j), b(m_k^{j+1}))}(y) l_{k,j}$$

и

$$l_{k,j} := \left(\int_{(m_k^j)^-}^{m_k^{j+1}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(s)\, ds \right)^{\widetilde{r}/(\widetilde{p}\widetilde{q})} [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/(\widetilde{p}\widetilde{q})},$$

в неравенство (3.1.7), получим

$$\|(\mathscr{G} f)\widetilde{u}\|_{\widetilde{q}}^{\widetilde{q}} = \int_0^\infty \left(\exp\left(\frac{1}{b(x) - a(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} \log f \right) \right)^{\widetilde{q}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(x)\, dx$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \int_{m_k^j}^{m_k^{j+1}} \exp\left(\frac{\widetilde{q}}{b(x) - a(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} \log\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=-j_a(n)}^{j_b(n)-1} f_{n,i} \right] \right) \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(x)\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} l_{k,j}^{\widetilde{q}} \int_{m_k^j}^{m_k^{j+1}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(x)\,dx \\
&\overset{(3.1.10)}{\gtrsim} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \int_{m_k^j}^{m_k^{j+1}} \left(\int_{(m_k^j)^-}^{x} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(x)\,dx}{(b(x)-a(x))^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} =: \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j}. \qquad (3.1.15)
\end{aligned}
$$

С другой стороны, поскольку $\widetilde{p}<1$, имеем

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\widetilde{p}}^{\widetilde{p}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\sigma(\xi_k)}^{\sigma(\xi_{k+1})} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=-j_a(n)}^{j_b(n)-1} f_{n,i}(y)\right)^{\widetilde{p}} dy \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\sigma(\xi_k)}^{\sigma(\xi_{k+1})} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=-j_a(n)}^{j_b(n)-1} f_{n,i}^{\widetilde{p}}(y)\right) dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\sigma(\xi_k)}^{\sigma(\xi_{k+1})} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=-j_a(n)}^{j_b(n)-1} \chi_{(a(m_n^i),b(m_n^{i+1}))}(y)\; l_{n,i}^{\widetilde{p}}\right) dy.
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
M_{n,i}(k):\; = (\sigma(\xi_k),\sigma(\xi_{k+1})) \cap (a(m_n^i), b(m_n^{i+1}))
$$

и заметим, что $M_{n,i}(k)=\varnothing$, если $n\leqslant k-2$ и $n\geqslant k+2$, в то время как $M_{n,i}(k)\subseteq(a(m_n^i),b(m_n^{i+1}))$ для всех $k-1\leqslant n\leqslant k+1$ и $-i_a(n)\leqslant i\leqslant i_b(n)-1$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\widetilde{p}}^{\widetilde{p}} &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\sigma(\xi_k)}^{\sigma(\xi_{k+1})} \left(\sum_{n=k-1}^{k+1} \sum_{i=-j_a(n)}^{j_b(n)-1} \chi_{M_{n,i}(k)}(y)\; l_{n,i}^{\widetilde{p}}\right) dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\sigma(\xi_k)}^{\sigma(\xi_{k+1})} \Bigg(\sum_{j=-j_a(k-1)}^{j_b(k-1)-1} \chi_{M_{k-1,j}(k)}(y) l_{k-1,j}^{\widetilde{p}} \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \chi_{M_{k,j}(k)}(y) l_{k,j}^{\widetilde{p}} + \sum_{j=-j_a(k+1)}^{j_b(k+1)-1} \chi_{M_{k+1,j}(k)}(y) l_{k+1,j}^{\widetilde{p}} \Bigg) dy \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k-1)}^{j_b(k-1)-1} l_{k-1,j}^{\widetilde{p}} [b(m_{k-1}^{j+1}) - a(m_{k-1}^j)] \\
&\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} l_{k,j}^{\widetilde{p}} [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)] + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k+1)}^{j_b(k+1)-1} l_{k+1,j}^{\widetilde{p}} [b(m_{k+1}^{j+1}) - a(m_{k+1}^j)] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Bigg(\sum_{j=-j_a(k-1)}^{j_b(k-1)-1} \tau_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \tau_{k,j} + \sum_{j=-j_a(k+1)}^{j_b(k+1)-1} \tau_{k+1,j} \Bigg) \leqslant 3 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \tau_{k,j}, \qquad (3.1.16)
\end{aligned}
$$

где

$$
\tau_{k,j}:\; = \left(\int_{(m_k^j)^-}^{m_k^{j+1}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{q}} [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{q}\tau_{k,j} &= [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{(m_k^j)^-}^{m_k^{j+1}} \left(\int_{(m_k^j)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\,dt \\
&= [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{(m_k^j)^-}^{m_k^j} \left(\int_{(m_k^j)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{m_k^j}^{m_k^{j+1}} \left(\int_{(m_k^j)^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\
&=: I_{k,j} + \mathrm{II}_{k,j}.
\end{aligned} \tag{3.1.17}
$$

В силу (3.1.10) мы имеем $\mathrm{II}_{k,j} \approx \gamma_{k,j}$ и можем записать

$$
\|f\|_{\widetilde{p}}^{\widetilde{p}} \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \Big[I_{k,j} + \gamma_{k,j} \Big]. \tag{3.1.18}
$$

Покажем, что

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} I_{k,j} \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j}.
$$

Если $j = -j_a(k)$, то $(m_k^{-j_a(k)})^- = m_{k-1}^0$ и

$$
\begin{aligned}
I_{k,-j_a(k)} &= [b(m_k^{-j_a(k)+1}) - a(m_k^{-j_a(k)})]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\xi_k^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\
&\overset{(3.1.11)}{\approx} \Big[b(\xi_k) - a(\xi_k) \Big]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\xi_k^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\
&\overset{(3.1.12)}{\lesssim} \int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left(\int_{\xi_k^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} [b(t) - a(t)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \int_{m_{k-1}^j}^{m_{k-1}^{j+1}} \left(\int_{(m_{k-1}^j)^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} [b(t) - a(t)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt = \sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j}.
\end{aligned} \tag{3.1.19}
$$

Пусть $j = 0$; тогда в случае $j_a(k) = 1$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
I_{k,0} &= [b(m_k^1) - a(m_k^0)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{(m_k^0)^-}^{m_k^0} \left(\int_{(m_k^0)^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\
&\overset{(3.1.11),\,(3.1.12)}{\lesssim} \int_{(m_k^0)^-}^{m_k^0} \left(\int_{(m_k^0)^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \int_{m_{k-1}^j}^{m_{k-1}^{j+1}} \left(\int_{(m_{k-1}^j)^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} + \int_{m_k^{-1}}^{m_k^0} \left(\int_{(m_k^{-1})^-}^t \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \gamma_{k,-1}.
\end{aligned} \tag{3.1.20}
$$

Если $j_a(k) > 1$ и $-j_a(k) + 1 \leqslant j \leqslant 0$, то

$$
\sum_{j=-j_a(k)+1}^{0} I_{k,j} = I_{k,-j_a(k)+1} + \sum_{j=-j_a(k)+2}^{0} I_{k,j}. \tag{3.1.21}
$$

Аналогично (3.1.20) находим

$$
I_{k,-j_a(k)+1} \lesssim \sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \gamma_{k,-j_a(k)} \tag{3.1.22}
$$

и

$$\sum_{j=-j_a(k)+2}^{0} I_{k,j} \leqslant \sum_{j=-j_a(k)+2}^{0} \gamma_{k,j-1} = \sum_{j=-j_a(k)+1}^{-1} \gamma_{k,j}. \tag{3.1.23}$$

Наконец, из (3.1.19)–(3.1.23) получаем

$$\sum_{j=-j_a(k)}^{0} I_{k,j} \lesssim 2 \sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{-1} \gamma_{k,j} \leqslant 2\Bigg(\sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j}\Bigg). \tag{3.1.24}$$

Далее, если $j_b(k) = 1$, то требуемая оценка следует из (3.1.24). Пусть $j_b(k) > 1$ и $1 \leqslant j \leqslant j_b(k) - 1$. Так как $(m_k^0)^- < (m_k^j)^- < m_k^0 < m_k^j$, то для $1 \leqslant j \leqslant j_b(k) - 1$ запишем

$$\begin{aligned} I_{k,j} &\leqslant [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{(m_k^0)^-}^{m_k^0} \left(\int_{(m_k^0)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\ &\quad + [b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \sum_{i=1}^{j} \int_{m_k^{i-1}}^{m_k^i} \left(\int_{(m_k^j)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\ &=: I'_{k,j} + I''_{k,j}. \end{aligned}$$

Для оценки $I'_{k,j}$ заметим, что $b(m_k^j) - a(m_k^j) \approx b(m_k^j) - a(\xi_{k+1})$, и с учетом (3.1.11) и (3.1.14) находим

$$b(m_k^{j+1}) - a(m_k^j) \approx b(m_k^j) - a(m_k^j) \approx b(m_k^j) - a(\xi_{k+1}) = 2^j\ [b(m_k^0) - \sigma(m_k^0)].$$

Тогда аналогично (3.1.20) для каждого $1 \leqslant j \leqslant j_b(k) - 1$ находим

$$\begin{aligned} I'_{k,j} &\lesssim 2^{-j\widetilde{r}/\widetilde{p}} [(b(m_k^0) - \sigma(m_k^0)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{(m_k^0)^-}^{m_k^0} \left(\int_{(m_k^0)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt \\ &\overset{(3.1.12)}{\lesssim} 2^{-j\widetilde{r}/\widetilde{p}} \int_{(m_k^0)^-}^{m_k^0} \left(\int_{(m_k^0)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \\ &\leqslant 2^{-j\widetilde{r}/\widetilde{p}} \Bigg[\sum_{i=0}^{j_b(k-1)-1} \int_{m_{k-1}^i}^{m_{k-1}^{i+1}} \left(\int_{(m_{k-1}^i)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \\ &\qquad + \sum_{n=-j_a(k)}^{-1} \int_{m_k^n}^{m_k^{n+1}} \left(\int_{(m_k^n)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \Bigg] \\ &= 2^{-j\widetilde{r}/\widetilde{p}} \Bigg[\sum_{i=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,i} + \sum_{n=-j_a(k)}^{-1} \gamma_{k,n} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j_b(k)-1} I'_{k,j} &\lesssim \Bigg[\sum_{j=1}^{j_b(k)-1} 2^{-j\widetilde{r}/\widetilde{p}} \Bigg] \Bigg[\sum_{i=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,i} + \sum_{n=-j_a(k)}^{-1} \gamma_{k,n} \Bigg] \\ &\leqslant \frac{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} - 1} \Bigg[\sum_{i=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,i} + \sum_{n=-j_a(k)}^{-1} \gamma_{k,n} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Далее, учитывая (3.1.11), получаем

$$I''_{k,j} \lesssim [b(m_k^j) - a(m_k^j)]^{-\widetilde{r}/\widetilde{p}} \sum_{i=1}^{j} \int_{m_k^{i-1}}^{m_k^i} \left(\int_{(m_k^j)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt. \tag{3.1.27}$$

Таким образом, в силу (3.1.14) и с учетом эквивалентности $b(m_k^j) - a(m_k^j)$ to $b(m_k^j) - a(\xi_{k+1})$ получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{j_b(k)-1} I''_{k,j} &\lesssim \sum_{j=1}^{j_b(k)-1} \frac{\sum_{i=1}^{j} \int_{m_k^{i-1}}^{m_k^i} \left(\int_{(m_k^j)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^j) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \\
&= \frac{\int_{m_k^0}^{m_k^1} \left(\int_{(m_k^1)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^1) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} + \frac{\left[\int_{m_k^0}^{m_k^1} + \int_{m_k^1}^{m_k^2}\right] \left(\int_{(m_k^2)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^2) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} + \cdots \\
&\quad + \frac{\left[\int_{m_k^0}^{m_k^1} + \cdots + \int_{m_k^{j_b(k)-2}}^{m_k^{j_b(k)-1}}\right] \left(\int_{(m_k^{j_b(k)-1})^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^{j_b(k)-1}) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \\
&\overset{(3.1.14)}{\leqslant} \sum_{j=0}^{j_b(k)-1} 2^{-j\widetilde{r}/\widetilde{p}} \left[\frac{\int_{m_k^0}^{m_k^1} \left(\int_{(m_k^1)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^1) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} + \frac{\int_{m_k^1}^{m_k^2} \left(\int_{(m_k^2)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^2) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\int_{m_k^{j_b(k)-2}}^{m_k^{j_b(k)-1}} \left(\int_{(m_k^{j_b(k)-1})^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(m_k^{j_b(k)-1}) - a(\xi_{k+1})]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \right] \\
&\overset{(3.1.10),\,(3.1.11),\,(3.1.12)}{\lesssim} \frac{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} - 1} \left[\int_{m_k^0}^{m_k^1} \left(\int_{(m_k^1)^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \int_{m_k^{j_b(k)-2}}^{m_k^{j_b(k)-1}} \left(\int_{(m_k^{j_b(k)-1})^-}^{t} \widetilde{u}^{\widetilde{q}} \right)^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} \frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(t)\, dt}{[b(t) - a(t)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}} \right] \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j}.
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Теперь из (3.1.26)–(3.1.28) следует, что

$$\sum_{j=1}^{j_b(k)-1} I_{k,j} \lesssim \frac{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} - 1} \left[\sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j} \right]. \tag{3.1.29}$$

Из (3.1.24) и (3.1.29) мы имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} I_{k,j} &\lesssim \max\left\{2, \frac{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} - 1}\right\} \left[\sum_{j=0}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j} \right] \\
&\leqslant \max\left\{2, \frac{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}{2^{\widetilde{r}/\widetilde{p}} - 1}\right\} \left[\sum_{j=-j_a(k-1)}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j} \right].
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Из (3.1.18) и (3.1.30) находим

$$\|f\|_{\widetilde{p}}^{\widetilde{p}} \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{j=-j_a(k-1)}^{j_b(k-1)-1} \gamma_{k-1,j} + \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j} \right] \leqslant 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1} \gamma_{k,j} \tag{3.1.31}$$

и, наконец, из (3.1.15) и (3.1.31) вытекает, что

$$\|\mathscr{G}\|_{L^{\widetilde{p}}\to L^{\widetilde{q}}_{\widetilde{u}}} \gtrsim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1}\gamma_{k,j}\right)^{1/\widetilde{r}}$$

$$\geqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=-j_a(k)}^{j_b(k)-1}\int_{m_k^j}^{m_k^{j+1}}\left[\int_{\theta^-(x)}\widetilde{u}^{\widetilde{q}}\right]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}\frac{\widetilde{u}^{\widetilde{q}}(x)\,dx}{[b(x)-a(x)]^{\widetilde{r}/\widetilde{p}}}\right)^{1/\widetilde{r}} = (\widetilde{\mathscr{B}}_{\mathscr{G}})^-.$$

Неравенство

$$\|\mathscr{G}\|_{L^{\widetilde{p}}\to L^{\widetilde{q}}_{\widetilde{u}}} \gtrsim (\widetilde{\mathscr{B}}_{\mathscr{G}})^+.$$

доказывается аналогично. Отсюда в силу эквивалентности $\mathscr{B}_{\mathscr{G}} \approx (\mathscr{B}_{\mathscr{G}})^- + (\mathscr{B}_{\mathscr{G}})^+$ и того, что $\widetilde{r}/\widetilde{p} = r/p$ и $\widetilde{u}^{\widetilde{q}} = u^q$, следует, что оценка снизу для нормы $\|\mathscr{G}\|_{L^p_v\to L^q_w}$ доказана.

3.2. Ассоциированные к весовым пространствам Соболева на действительной оси

Пусть $I := (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ обозначим $L^p(I)$ пространство Лебега с нормой $\|f\|_{L^p(I)} := \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$, со стандартной модификацией для $p=\infty$. Пусть

$$\mathscr{V}_p(I) := \{v \in L^p_{\rm loc}(I) : v \geqslant 0, \|v\|_{L^1(I)} \neq 0\}$$

– множество весовых функций (весов) и $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$. Обозначим $W^1_{1,\rm loc}(I)$ пространство всех функций $u \in L^1_{\rm loc}(I)$, слабая производная которых Du принадлежит $L^1_{\rm loc}(I)$. Мы изучаем весовые пространства Соболева вида

$$W^1_p(I) := \{u \in W^1_{1,\rm loc}(I) : \|u\|_{W^1_p(I)} < \infty\},$$

где

$$\|u\|_{W^1_p(I)} := \|v_0 u\|_{L^p(I)} + \|v_1 Du\|_{L^p(I)},$$

и подпространства $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_p(I) \subset W^1_p(I)$, где второе является замыканием в $W^1_p(I)$ подпространства $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)$ пространства $AC(I)$ всех абсолютно непрерывных функций вида

$$\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I) := \{f \in AC(I) : \operatorname{supp} f \text{ компактно в } I, \|v_0 f\|_{L^p(I)} + \|v_1 f'\|_{L^p(I)} < \infty\}.$$

Если X обозначает пространство $W^1_p(I)$, $\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)$ или $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)$, то обозначим

$$\mathfrak{D}_X := \left\{g \in L^1_{\rm loc}(I) : \int_I |f(x)g(x)|dx < \infty \text{ для всех } f \in X\right\}. \tag{3.2.1}$$

Для фиксированной измеримой по Лебегу функции $g \in \mathfrak{D}_X$ рассмотрим функционалы

$$J_X(g) := \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_{W^1_p(I)}\neq 0}} \frac{\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right|}{\|f\|_{W^1_p(I)}}$$

и

$$\mathbf{J}_X(g) := \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_{W^1_p(I)}\neq 0}} \frac{\int_I |f(x)g(x)|\,dx}{\|f\|_{W^1_p(I)}},$$

которые определяют нормы на $\mathfrak{D}_X$, и по аналогии с теорией функциональных пространств Банаха (БФП) [6] определим *ассоциированные пространства* X' и $\mathbf{X}'$ вида

$$X' := \{g \in \mathfrak{D}_X : \|g\|_{X'} := J_X(g) < \infty\}$$

и

$$\mathbf{X}' := \{g \in \mathfrak{D}_X : \|g\|_{\mathbf{X}'} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\}$$

соответственно.

Мы покажем, что в отличие от [6], пространства X' и $\mathbf{X}'$ могут быть различными и, вообще говоря, не иметь таких свойств, как полнота и ряда других, имеющихся у БФП (см. 3.2.4).

В этом пункте мы дадим точное описание ассоциированных пространств X' и $\mathbf{X}'$. Для этого необходимо найти точные оценки функционалов $J_X(g)$ и $\mathbf{J}_X(g)$. Для последнего функционала $\mathbf{J}_X(g)$ задача сводится к нахождению двусторонней оценки наименьшей константы C в неравенстве

$$\int_I |f(x)g(x)|\,dx \leqslant C\|f\|_{W_p^1(I)},$$

которая была получена в различных эквивалентных формах в рамках задачи о характеризации трехвесового неравенства [25], [32]–[36] с наиболее простой формой в работе [37; теорема 3.1] (см. теорему 3.4 ниже).

В п. 3.2.1 мы устанавливаем, что при фиксированном $g \in \mathfrak{D}_X$ конечность функционалов $J_X(g)$, $J_X(|g|)$ и $\mathbf{J}_X(g)$ взаимно эквивалентна для $X = W_p^1(I)$ или $X = \overset{\circ}{W}{}_p^1(I)$.

В п. 3.2.2 воспроизводится конструкция Ойнарова–Отелбаева, необходимая в следующем п. 3.2.3, где характеризуются функционал $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g)$ (теорема 3.5).

Пункт 3.2.4 посвящен специальному примеру, когда $I = (0,\infty)$, $p = 2$, $v_0(x) = 1/x$ и $v_1(x) \equiv 1$, на котором мы иллюстрируем предыдущие результаты. В частности, покажем, что, в отличие от п. 3.2.1, $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \neq J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(|g|)$ в общем случае.

3.2.1. Соотношения между $J_X(g)$, $J_X(|g|)$ и $\mathbf{J}_X(g)$. Начнем с некоторых свойств $W_p^1(I)$.

Лемма 3.1. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$. Тогда $u \in W_{1,\mathrm{loc}}^1(I)$, если и только если допускается представление $\overline{u}\colon I \to \mathbb{R}$ такое, что $\overline{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ и $\overline{u}'(x) = (Du)(x)$ для п.в. $x \in I$.*

Доказательство леммы 3.1 аналогично доказательству теоремы 7.13 из [38].

Из леммы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$. Тогда $u \in W_p^1(I)$, если и только если допускается представление $\overline{u}\colon I \to \mathbb{R}$ такое, что $\overline{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, $\overline{u}'(x) = (Du)(x)$ для п.в. $x \in I$ и $\|v_0\overline{u}\|_{L^p(I)} + \|v_1\overline{u}'\|_{L^p(I)} < \infty$.*

В частности, из следствия 3.1 вытекает, что $\overset{\circ}{W}{}_p^1(I)$ является замыканием множества

$$\{u \in W_p^1(I) : \operatorname{supp} u \text{ компактно}\}$$

в $W_p^1(I)$.

Также нам потребуется следующий известный факт.

Лемма 3.2. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$, $u \in W_p^1(I)$. Тогда $|u| \in W_p^1(I)$, $\|u\|_{W_p^1(I)} = \||u|\|_{W_p^1(I)}$. Более того, если $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(I)$, то $|u| \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(I)$.*

Для дальнейшего нам потребуется следующее общее утверждение, аналогичное лемме 2.6 из [6].

Лемма 3.3. *Пусть X – действительное векторное пространство функций на пространстве с мерой $f\colon \Omega_X \to [-\infty, \infty]$ и, аналогично, Y действительное векторное пространство функций $f\colon \Omega_Y \to [-\infty, \infty]$; $\|\cdot\|_X\colon X \to [0, \infty)$ и $\|\cdot\|_Y\colon Y \to [0, \infty)$ – полунормы; оператор $T\colon X \to Y$. Предположим, что X, Y, T, $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $f \in X \quad \Rightarrow \quad |f| \in X \ \&\ \|f\|_X = \||f|\|_X$,
2) $f \in X \ \&\ \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad T(\alpha f) = \alpha T f$,
3) $f_1, f_2 \in X \ \&\ (0 \leqslant f_1(t) \leqslant f_2(t),\ t \in \Omega_X) \quad \Rightarrow \quad \|Tf_1\|_Y \leqslant \|Tf_2\|_Y$,
4) $f \in X \quad \Rightarrow \quad \|Tf\|_Y \leqslant \|T(|f|)\|_Y$,
5) $f \in X \ \&\ \|f\|_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \|Tf\|_Y = 0$,
6) $(0 \leqslant f_n \in X,\ \|f_n\|_X = 1,\ n \in \mathbb{N}) \ \&\ \left(f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n(t),\ t \in \Omega_X\right) \quad \Rightarrow \quad f \in X.$

Тогда существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|Tf\|_Y \leqslant C\|f\|_X, \qquad f \in X.$$

Доказательство. Предположим противное: для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $h_n \in X$ такая, что

$$\|Th_n\|_Y > n^3 \|h_n\|_X.$$

Заметим, что $\|h_n\|_X \neq 0$ в силу свойства 5). Положим $f_n := |h_n|/\|h_n\|_X$, $f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n(t)$, $t \in \Omega_X$. Из 1) и 6) следует, что $f \in X$. С другой стороны, по условиям 3), 2) и 4)

$$\|Tf\|_Y \geqslant \|T(n^{-2} f_n)\|_Y = \frac{1}{n^2 \|h_n\|_X} \|T(|h_n|)\|_Y > n$$

для любых $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\|Tf\|_Y = \infty$, и мы приходим к противоречию.

Теорема 3.2. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, g – измеримая функция, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$. Тогда*

$$J_{W^1_p(I)}(g) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g) < \infty.$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g) < \infty$ влечет $J_{W^1_p(I)}(g) < \infty$. Обратно, пусть $J_{W^1_p(I)}(g) < \infty$. Положим

$$X := W^1_p(I), \quad Y := L^1(I), \qquad \|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{W^1_p(I)}, \quad \|\cdot\|_Y := \|\cdot\|_{L^1(I)}, \qquad Tf = fg.$$

Так как $J_{W^1_p(I)}(g) < \infty$, то для любой $f \in W^1_p(I)$ существует интеграл $\int_I fg$ в смысле Лебега, поэтому $\int_I |fg| < \infty$. Следовательно, $T\colon X \to Y$. Кроме этого, условия 2)–4) леммы 3.3 выполняются. Условие 1) леммы 3.3 следует из леммы 3.2.

Так как $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$, то $v_1 > 0$ п.в. на I. Пусть $\|f\|_{W^1_p(I)} = 0$. Тогда $Df = 0$, т.е. $f = \mathrm{const}$ п.в. на I. Более того, $\|fv_0\|_{L^p(I)} = 0$. Следовательно, $f = 0$ п.в. на I и $\|Tf\|_Y = 0$. Таким образом, условие 5) леммы 3.3 выполнено.

Далее, проверим условие 6) леммы 3.3. Фиксируем последовательность $\{f_n\} \subset X$ неотрицательных функций с условием $\|f_n\|_X = 1$. Пусть

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n(t), \qquad t \in I.$$

Обозначим через $\overline{f}_n$ представление f_n, существующее по лемме 3.1. Положим

$$\overline{f}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\overline{f}_n(t), \qquad t \in I.$$

Заметим, что $f = \overline{f}$ п.в. на I. Кроме того, существует точка $t_0 \in I$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\overline{f}_n(t_0)| < \infty.$$

В противном случае

$$\infty = \left\| v_0 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\overline{f}_n| \right\|_{L^p(I)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\|v_0\overline{f}_n\|_{L^p(I)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Так как для произвольного отрезка $[c,d] \subset I$, содержащего t_0, мы имеем

$$\begin{aligned}
\int_c^d \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\overline{f}_n(t)| \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_c^d |\overline{f}_n(t)|\, dt \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_c^d \left(\left| \int_{t_0}^t |Df_n| \right| + |\overline{f}_n(t_0)| \right) dt \\
&\leqslant (d-c) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \left(\|v_1 Df_n\|_{L^p([c,d])} \left\| \frac{1}{v_1} \right\|_{L^{p'}([c,d])} + |\overline{f}_n(t_0)| \right) < \infty,
\end{aligned}$$

то $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Далее, для произвольного $[c,d] \subset I$ выполнена оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\|Df_n\|_{L^1([c,d])} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\|v_1 Df_n\|_{L^p([c,d])} \left\| \frac{1}{v_1} \right\|_{L^{p'}([c,d])} \leqslant \left\| \frac{1}{v_1} \right\|_{L^{p'}([c,d])} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}Df_n(t)$ сходится для п.в. $t \in I$. Положим

$$E := \left\{ t \in I : \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}Df_n(t) \text{ сходится} \right\}, \qquad h(t) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}Df_n(t), & t \in E, \\ 0, & t \in I \setminus E. \end{cases}$$

Заметим, что $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Пусть отрезок $[c,d] \subset I$ такой, что $t_0 \in (c,d)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset (c,d)$. Для $k \in \mathbb{N}$, $t \in I$ имеем

$$\left| \sum_{n=1}^{k} n^{-2}\varphi(t)Df_n(t) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\varphi(t)Df_n(t)|,$$
$$\left| \sum_{n=1}^{k} n^{-2}\varphi'(t)\overline{f}_n(t) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\varphi'(t)\overline{f}_n(t)|.$$

Тогда

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|\varphi(t)Df_n(t)| \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_I |\varphi(t)Df_n(t)|\, dt \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(I)} \left\| \frac{1}{v_1} \right\|_{L^{p'}([c,d])} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty,$$

и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости следует

$$\int_I \varphi h = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_I \varphi D f_n.$$

Так как

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} |\varphi'(t) \overline{f}_n(t)| \right) dt \leqslant \|\varphi'\|_{L^\infty(I)} (d-c) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} (\|Df_n\|_{L^1([c,d])} + |\overline{f}_n(t_0)|) < \infty,$$

то снова по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\int_I \varphi' f = \int_I \varphi' \overline{f} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_I \varphi' \overline{f}_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_I \varphi' f_n = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_I \varphi D f_n = -\int_I \varphi h.$$

Таким образом, f имеет слабую производную, $Df = h$ и

$$\|v_1 Df\|_{L^p(I)} + \|v_0 f\|_{L^p(I)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} (\|v_1 D f_n\|_{L^p(I)} + \|v_0 f_n\|_{L^p(I)}) < \infty,$$

т.е. $f \in X$.

Утверждение теоремы следует из леммы 3.3.

Теорема 3.3. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и g – измеримая функция, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$. Тогда*

$$J_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(g) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(g) < \infty.$$

Доказательство. Пусть

$$J_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(g) < \infty, \qquad X := \overset{\circ}{W}{}^1_p(I), \quad Y := L^1(I), \qquad Tf = fg.$$

Тогда $T\colon X \to Y$ и условия 2)–4) леммы 3.3 выполняются. Условие 1) леммы 3.3 следует из леммы 3.2, а условие 5) доказано в теореме 3.2.

Покажем условие 6) леммы 3.3. Фиксируем последовательность $\{f_n\} \subset X$ неотрицательных функций таких, что $\|f_n\|_X = 1$. Пусть

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n(t), \qquad t \in I.$$

Как было доказано в теореме 3.2, $f \in W^1_p(I)$ и

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{k} n^{-2} f_n \right\|_{W^1_p(I)} \to 0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как $\{f_n\} \subset \overset{\circ}{W}{}^1_p(I)$, то $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(I)$, и теорема завершается применением леммы 3.3.

Следствие 3.2. *Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$ и $X = W^1_p(I)$ или $X = \overset{\circ}{W}{}^1_p(I)$. Тогда $X' = \mathbf{X}'$ и для каждой $g \in X'$ существует константа $C_g > 0$ такая, что*

$$C_g \|g\|_{\mathbf{X}'} \leqslant \|g\|_{X'} \leqslant \|g\|_{\mathbf{X}'}.$$

Замечание 3.1. Если $W^1_p(I)$ или $\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)$ полно (например, если $1/v_0 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(I)$), то условие 6) леммы 3.3 выполнено и не требует доказательства.

Замечание 3.2. Выполнено

$$J_{W^1_p(I)}(|g|) = \mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g), \qquad J_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(|g|) = \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(g), \qquad J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}(|g|) = \mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}(g).$$

Доказательство. Действительно, неравенство $J_{W^1_p(I)}(|g|) \leqslant \mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g)$ очевидно. Обратно, по лемме 3.2

$$\mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g) = \sup_{f \in W^1_p(I)} \frac{\int_I |fg|}{\|\,|f|\,\|_{W^1_p(I)}} = \sup_{0 \leqslant f \in W^1_p(I)} \frac{\int_I f|g|}{\|f\|_{W^1_p(I)}} \leqslant J_{W^1_p(I)}(|g|).$$

Замечание 3.3. Критерии ограниченности функционалов $\mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g)$ и $\mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(g)$ получены в статье [32; теоремы 3.1, 3.3] с точными оценками $\mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(I)}(g)$ и $\mathbf{J}_{W^1_p(I)}(g)$ (см. также [36; теорема 2.1], [37; теорема 3.1]). Однако, эти критерии не применимы к функционалу $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}(g)$. В остальной части пункта будут найдены точные оценки для функционала $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}(g)$ и показано, что $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}(g) \neq J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(I)}(|g|)$ в общем случае (см. замечание 3.9).

3.2.2. Функции Ойнарова–Отелбаева. Основные результаты этого пункта формулируются с использованием вспомогательных функций, придуманных М. О. Отелбаевым и Р. Ойнаровым (см., например, [32], [39], [40]). Здесь мы воспроизводим нужную конструкцию. Для простоты и не теряя общности мы полагаем $I = (0, \infty) =: \mathbb{R}_+$, а также обозначаем $\|\cdot\|_{L^p((a,b))} =: \|\cdot\|_{p,(a,b)}$ и пишем $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{p,(0,\infty)}$.

Для $p > 1$ определим

$$\delta(x, y) := \sup\left\{d \in [0, x) : \int_{x-d}^{x} v_1^{-p'} \leqslant \int_x^{x+y} v_1^{-p'}\right\}, \qquad x > 0, \quad y \geqslant 0.$$

При $x \in (0, \infty)$ введем множество

$$D_x := \left\{y \geqslant 0 : \int_{x-\delta(x,y)}^{x} v_1^{-p'} = \int_x^{x+y} v_1^{-p'}\right\},$$

всегда содержащее 0 и достаточно малые $y > 0$, и зададим следующие величины:

$$d^+(x) := \sup\{d \in D_x : \|v_1^{-1}\|_{p',(x-\delta(x,d),x+d)} \|v_0\|_{s,(x-\delta(x,d),x+d)} \leqslant 1\},$$
$$d^-(x) := \delta(x, d^+(x)), \qquad x^- := x - d^-(x), \quad x^+ := x + d^+(x),$$
$$\Delta^+(x) := [x, x^+], \quad \Delta^-(x) := [x^-, x], \qquad \Delta(x) := [x^-, x^+].$$

Далее, для простоты мы предположим, что существует число $c > 0$ такое, что

$$\|v_1^{-1}\|_{p',(0,c)} \|v_0\|_{p,(0,c)} = \|v_1^{-1}\|_{p',(c,\infty)} \|v_0\|_{p,(c,\infty)} = \infty. \tag{3.2.2}$$

Тогда, как показано в [32], $0 < x - d^-(x) < x + d^+(x) < \infty$ для всех $x \in (0, \infty)$. Из сделанных построений и предположений следует, что

$$\int_{\Delta^-(x)} v_1^{-p'} = \int_{\Delta^+(x)} v_1^{-p'}, \qquad x > 0, \tag{3.2.3}$$

и
$$\left(\int_{\Delta(x)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{\Delta(x)} v_0^p\right)^{1/p} = 1, \qquad x > 0. \tag{3.2.4}$$
Известно [32; леммы 1.1–1.3], что *функции Ойнарова–Отелбаева* $a(x) := x - d^-(x)$ и $b(x) := x + d^+(x)$ непрерывны, строго возрастают на $(0,\infty)$ и
$$\lim_{x\to 0}(x \pm d^{\pm}(x)) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}(x \pm d^{\pm}(x)) = \infty, \tag{3.2.5}$$
$$\int_{\Delta^{\pm}(t)} v_1^{-p'} \leqslant 2\int_{\Delta^{\pm}(x)} v_1^{-p'} \qquad \text{для всех} \quad x>0, \quad t \in \Delta^{\pm}(x), \tag{3.2.6}$$
$$\sup_{y\in\Delta(x)} |f(y)| \leqslant 2^{1/p'} \|v_1^{-1}\|_{p',\Delta^{\pm}(x)} \|f\|_{W_p^1(\Delta(x))}, \qquad f \in AC_{\mathrm{loc}}((0,\infty)). \tag{3.2.7}$$

Кроме того, известно [36; лемма 2.1], что $a(x)$ и $b(x)$ локально абсолютно непрерывны на $(0,\infty)$, и по лемме 1.6 из [32] условие (3.2.2) эквивалентно равенству $W_p^1(\mathbb{R}_+) \equiv \overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)$. В этом случае из теоремы 3.1 из [37] и замечания 3.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть* $1<p<\infty$ *и* $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_p(\mathbb{R}_+)$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. *Тогда*
$$\mathbf{J}_{W_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) = \mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \left[\int_0^\infty \left[\int_{\delta(x)} |g(t)|\,dt\right]^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx\right]^{1/p'} =: \mathsf{G}_0(g), \tag{3.2.8}$$
где $\delta(x) := (b^{-1}(x), a^{-1}(x))$ *и* a^{-1}, b^{-1} *обозначают функции, обратные к функциям* a *и* b, *соответственно. Если* $X = W_p^1(\mathbb{R}_+)$ *или* $X = \overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)$, *то*
$$\mathbf{X}' = \{g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \mathsf{G}_0(g) < \infty, \|g\|_{\mathbf{X}'} \approx \mathsf{G}_0(g)\}.$$

Доказательство. Эквивалентность в (3.2.8) была установлена в [37]. Поясним равенство в (3.2.8). Ясно, что $\mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \geqslant \mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g)$. Для доказательства обратного неравенства фиксируем $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1$. Из плотности, существует последовательность $\{f_n\} \subset \overset{\circ\circ}{W}{}_p^1$ такая, что $\|f - f_n\|_{W_p^1} \to 0$ при $n\to\infty$. Пусть $\overline{f}$ функция, о которой говорится в следствии 3.1. Запишем $(0,\infty) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta(x_k)$. В силу (3.2.7), $f_n(x) \to \overline{f}(x)$ на каждом $\Delta(x_k)$. Тогда $f_n(x) \to \overline{f}(x)$ на $(0,\infty)$, и по лемме Фату
$$\int_0^\infty |fg| = \int_0^\infty |\overline{f}g| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty |f_n g| \leqslant \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{W_p^1} = \mathbf{J}_{\overset{\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g)\|f\|_{W_p^1}.$$

3.2.3. Характеризация $\boldsymbol{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g)$. Пусть a^{-1} и b^{-1} обозначают обратные к функциям a и b, являющиеся непрерывными, строго возрастающими на $(0,\infty)$ и обладающие свойствами:
$$\lim_{x\to 0} a^{-1}(x) = \lim_{x\to 0} b^{-1}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} a^{-1}(x) = \lim_{x\to\infty} b^{-1}(x) = \infty.$$
Обозначим
$$V_1(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} v_1^{-p'}(y)\,dy, \qquad V_1^{\pm}(t) := \int_{\Delta^{\pm}(t)} v_1^{-p'}(y)\,dy$$
и положим
$$\mathbb{G}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t) \left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)} \int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx\right|^{p'} dt\right)^{1/p'},$$
$$\mathscr{G}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\, V_1^{p'}(t) \left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\,dx\right|^{p'} dt\right)^{1/p'}.$$

Теорема 3.5. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $g \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$. *Предположим, что* $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_p(\mathbb{R}_+)$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$ *и условие* (3.2.2) *выполняется. Тогда*

$$J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g),$$

и если $X = \overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$X' = \{g \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+) : \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g) < \infty,\ \|g\|_{X'} \approx \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g)\}.$$

Доказательство. *Оценка сверху для* $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)$. Пусть $f \in \overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)$. Фиксируем g и запишем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx &= \int_0^\infty f(x)\,\frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,V_1^-(x)\,dx\\ &= \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} f(x)\,\frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dy\\ &= \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\left[\int_y^x f'(t)\,dt + f(y)\right]dx\,dy =: \mathrm{I} + \mathrm{II}.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} f'(t)\int_t^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dt\,dy\\ &= \int_0^\infty f'(t)\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\int_t^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dy\,dt\\ &= \int_0^\infty f'(t)\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx\,dt\end{aligned}$$

и

$$\mathrm{II} = \int_0^\infty f(y)v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dy.$$

По неравенству Гёльдера с показателями p и p', из равенства $V_1 = 2V_1^\pm$ (см. (3.2.3)) находим

$$|\mathrm{I}| \leqslant 2\int_0^\infty |f'(t)|\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx\right|dt \lesssim \mathbb{G}(g)\|f'v_1\|_p.$$

Для оценки $|\mathrm{II}|$ возьмем $\xi_0 = 1$ и определим ξ_k для всех $k \in \mathbb{Z}$ так, что

$$\xi_{k+1} = a^{-1}(b(\xi_k)), \qquad \xi_{k-1} = b^{-1}(a(\xi_k)),$$

т.е.

$$a(\xi_{k+1}) = b(\xi_k),$$

покрывая таким образом $(0,\infty)$ интервалами $\Delta(\xi_k)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Delta^-(\xi_k)} f(y)v_1^{-p'}(y)G_0(y)\,dy\right|\\ &\qquad\leqslant \int_{\Delta^-(\xi_k)} |f(y) - f(\xi_k^-)|v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy + |f(\xi_k^-)|\int_{\Delta^-(\xi_k)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\\ &\qquad=: \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2,\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

где

$$G_0(y) := \int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx = 2\int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\,dx.$$

Снова, применяя неравенство Гёльдера и учитывая включение $[x, a^{-1}(x)] \supseteq [x, \xi_k]$ для $x \in \Delta^-(\xi_k)$, получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_1 &= \int_{\Delta^-(\xi_k)} \left|\int_{\xi_k^-}^{y} f'(t)\,dt\right| v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy \\
&\leqslant \int_{\Delta^-(\xi_k)} |f'(t)| \int_t^{\xi_k} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\,dt \\
&\leqslant \left(\int_{\Delta^-(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_t^{\xi_k} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f'v_1\|_{p,\Delta^-(\xi_k)} \\
&\leqslant \left[\int_{\Delta^-(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_t^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f'v_1\|_{p,\Delta^-(\xi_k)}. \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

Для оценки II_2 с учетом (3.2.7) запишем

$$|f(\xi_k^-)| \leqslant 2^{1/p'}\left(\int_{\Delta^-(\xi_k^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Delta(\xi_k^-))}.$$

Отсюда и (3.2.3) следует, что

$$\mathrm{II}_2 \leqslant 2^{1/p'}\left[\int_{\Delta^+(\xi_k^-)} v_1^{-p'}(t)\,dt\right]^{1/p'}\left[\int_{\Delta^-(\xi_k)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]\|f\|_{W_p^1(\Delta(\xi_k^-))}.$$

Так как $\xi_k^- \leqslant t \leqslant b(\xi_k^-)$, мы имеем включения

$$[b^{-1}(t), a^{-1}(t)] \supseteq [b^{-1}(t), \xi_k] \supseteq [\xi_k^-, \xi_k] = \Delta^-(\xi_k),$$

приводящие к оценке

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_2 &\leqslant 2^{1/p'}\left[\int_{\Delta^+(\xi_k^-)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Delta(\xi_k^-))} \\
&\leqslant 2^{1/p'}\left[\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Delta(\xi_k^-))}. \qquad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Таким образом, из (3.2.9), (3.2.10) и (3.2.11) получаем

$$\left|\int_{\Delta^-(\xi_k)} f v_1^{-p'} G_0\right| \leqslant 2^{1/p'}\left[\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}|G_0|\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Delta^-(\xi_k^-)\cup\Delta(\xi_k))}.$$

Аналогичные вычисления с заменой Δ^- на Δ^+ в (3.2.9) приводят к верхней оценке для интеграла по Δ^+:

$$\left|\int_{\Delta^+(\xi_k)} f v_1^{-p'} G_0\right| \leqslant 2^{1/p'}\left[\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}|G_0|\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Delta(\xi_k)\cup\Delta^+(\xi_k^+))}.$$

Так как $\Delta^-(\xi_k^-)\cup\Delta(\xi_k)$ и $\Delta(\xi_k)\cup\Delta^+(\xi_k^+)$ лежат внутри $\Gamma_k := \Delta(\xi_{k-1})\cup\Delta(\xi_k)\cup\Delta(\xi_{k+1})$, мы видим, что

$$\left|\int_{\Delta(\xi_k)} f v_1^{-p'} G_0\right| \lesssim \left[\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Gamma_k)}.$$

По неравенству Гёльдера и в силу того, что всякая точка $(0,\infty)$ лежит не более чем в трех интервалах Γ_k и интервалы (ξ_k^-,ξ_k^+) не пересекаются, мы находим

$$\begin{aligned}
|\mathrm{II}| &= \left|\sum_k \int_{\Delta(\xi_k)} f(y) v_1^{-p'}(y) G_0(y)\,dy\right| \\
&\lesssim \sum_k \left[\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\Gamma_k)} \\
&\leqslant \left[\sum_k \int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \left[\sum_k \|f\|^p_{W_p^1(\Gamma_k)}\right]^{1/p} \\
&\lesssim \left[\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|\,dy\right]^{p'} dt\right]^{1/p'} \|f\|_{W_p^1(\mathbb{R}_+)} \\
&=: \mathbf{G}(g)\,\|f\|_{W_p^1(\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}$$

Для сравнения $\mathbf{G}(g)$ и $\mathscr{G}(g)$ рассмотрим неравенство

$$\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} h(y)\,dy\right)^{p'} dt \leqslant C^{p'} \int_0^\infty h^{p'}(y)u(y)\,dy, \tag{3.2.12}$$

где $u(y) := [v_1(y)]^{p'(p'-1)} V_1^{p'}(y)$. В силу [41; следствие 2.1] или [30; теорема 4.1] (см. также формулы (2.3) или (2.5) в [41]) имеем

$$C \approx A := \sup_{t>0}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} u^{1-p}\right)^{1/p} =: \sup_{t>0} V_1(t)^{1/p'} U(t)^{1/p}. \tag{3.2.13}$$

Запишем

$$U(t) = U_b(t) + U_a(t) := \int_{b^{-1}(t)}^t u^{1-p} + \int_t^{a^{-1}(t)} u^{1-p}. \tag{3.2.14}$$

Для оценки $U_a(t)$ сверху зафиксируем t и введем последовательность μ_j, $0\leqslant j\leqslant j_b$, где

$$j_b = \begin{cases} [\mathscr{N}^-], & \text{если } \mathscr{N}^- = [\mathscr{N}^-], \\ [\mathscr{N}^-]+1, & \text{если } \mathscr{N}^- > [\mathscr{N}^-], \end{cases}$$

и $[\mathscr{N}^-]$ есть целая часть числа

$$\mathscr{N}^- := \log_2 \frac{\int_t^{b(a^{-1}(t))} v_1^{-p'}}{\int_t^{b(t)} v_1^{-p'}}$$

(аналогично лемме 2.2, см. также [30; лемма 2.5]). Тогда

1) $\mu_0 = t$, $\mu_{j_b} = a^{-1}(t)$;
2) если $[\mathscr{N}^-] = 0$ или $\mathscr{N}^- = [\mathscr{N}^-] = 1$, то $j_b = 1$;

3) если $\mathscr{N}^- > 1$, то точки μ_j для $1 \leqslant j \leqslant [\mathscr{N}^-]$ выбираются так, что

$$\int_t^{b(\mu_j)} v_1^{-p'} = 2\int_t^{b(\mu_{j-1})} v_1^{-p'}. \tag{3.2.15}$$

Из (3.2.15) следует, что, если $j_b \geqslant 2$ и $0 \leqslant j \leqslant j_b - 2$, то

$$\int_t^{b(\mu_{j+l})} v_1^{-p'} = 2^l \int_t^{b(\mu_j)} v_1^{-p'} \qquad \text{для всех} \quad l \in \{1, \dots, j_b - j - 1\}. \tag{3.2.16}$$

Кроме этого, мы имеем

$$\frac{1}{2}\int_t^{b(\mu_{j_b})} v_1^{-p'} \leqslant \int_t^{b(\mu_{j_b-1})} v_1^{-p'} < \int_t^{b(\mu_{j_b})} v_1^{-p'}. \tag{3.2.17}$$

Так как $\mu_0 \geqslant a(t)$ для всех $z \in [t, a^{-1}(t)]$, то из (3.2.17) и (3.2.16) вытекает, что

$$\begin{aligned}
U_a(t) &= \int_t^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'} V_1^{-p} = \sum_{j=0}^{j_b-1} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} v_1^{-p'} V_1^{-p} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{j_b-1} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} v_1^{-p'}(z) \biggl(\int_{\mu_0}^{b(z)} v_1^{-p'}\biggr)^{-p} dz \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{j_b-1} \biggl(\int_{\mu_0}^{b(\mu_j)} v_1^{-p'}\biggr)^{-p} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} v_1^{-p'}(z)\,dz \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{j_b-1} \biggl(\int_{\mu_0}^{b(\mu_j)} v_1^{-p'}\biggr)^{-p} \int_{\mu_0}^{b(\mu_{j+1})} v_1^{-p'} \leqslant 2\sum_{j=0}^{j_b-1} \biggl(\int_{\mu_0}^{b(\mu_j)} v_1^{-p'}\biggr)^{1-p} \\
&= 2\sum_{j=0}^{j_b-1} \biggl(2^j \int_{\mu_0}^{b(\mu_0)} v_1^{-p'}\biggr)^{1-p} = 2\biggl(\int_t^{b(t)} v_1^{-p'}\biggr)^{1-p} \sum_{j=0}^{j_b-1} 2^{j(1-p)} \\
&\leqslant \frac{2}{1-2^{1-p}} \biggl(\int_t^{b(t)} v_1^{-p'}\biggr)^{1-p} = \frac{2V_1^+(t)^{1-p}}{1-2^{1-p}}.
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Аналогично, используя конструкцию из леммы 2.3 (см. также [30; лемма 2.6]), мы получаем, что

$$U_b(t) \leqslant \frac{2V_1^-(t)^{1-p}}{1-2^{1-p}}.$$

Таким образом, (3.2.18), (3.2.13) и (3.2.14) влекут

$$A \leqslant \sup_{t>0} V_1(t)^{1/p'} U_b(t)^{1/p} + \sup_{t>0} V_1(t)^{1/p'} U_a(t)^{1/p} \lesssim \sup_{t>0} V_1(t)^{1/p'} V_1^{\pm}(t)^{-1/p'} = 2^{1/p'}.$$

Следовательно, неравенство (3.2.12) выполняется с константой $C \approx A \lesssim 1$, и, записав его для $h(y) := v_1^{-p'}(y)|G_0(y)|$, мы получаем

$$\mathbf{G}(g) = \biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t) \biggl(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v_1^{-p'} |G_0|\biggr)^{p'} dt\biggr)^{1/p'} \lesssim \biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'} V_1^{p'} |G_0|^{p'}\biggr)^{1/p'} = \mathscr{G}(g). \tag{3.2.19}$$

Таким образом, $|\mathrm{II}| \lesssim \mathscr{G}(g)\,\|f\|_{W_p^1(\mathbb{R}_+)}$ и $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \lesssim \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g)$.

Заметим, что если $v_0^p = v_1^{-p'}$, то, применяя неравенство Гёльдера к II, мы немедленно получим требуемую оценку $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) \leqslant \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g)$ с $V_1 = 1$ (см. (3.2.4)).

Доказательство нижней оценки для $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)$. Так как функции Ойнарова–Отелбаева a и b локально абсолютно непрерывны на $(0,\infty)$, то, дифференцируя (3.2.3), мы получим, что

$$2v_1^{-p'}(x) = v_1^{-p'}(a(x))\,a'(x) + v_1^{-p'}(b(x))\,b'(x) \tag{3.2.20}$$

для п.в. $x \in (0,\infty)$. Для доказательства $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) \gtrsim \mathbb{G}(g)$ обозначим

$$G_1(t) := \int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)} \int_{a(x)}^t v_1^{-p'}\,dx$$

и

$$\mathbb{F}_N(x) := \frac{1}{V_1^-(x)} \int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t)[\operatorname{sgn} G_1(t)] \int_{a(x)}^t v_1^{-p'} |G_1(t)|^{p'-1}\,dt,$$

где $N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_0^\infty g(x)\mathbb{F}_N(x)\,dx = \int_{2^{-N}}^{2^N} v_1^{-p'}(t)\,|G_1(t)|^{p'}\,dt =: [\mathbb{G}_N(g)]^{p'}. \tag{3.2.21}$$

Для оценки $\|\mathbb{F}_N v_0\|_p^p$ применим теорему 2.1 или теорему 2.2 (см. также теоремы 3.1 или 3.2 из [30]). Имеем

$$\int_0^\infty v_0^p(x)\biggl(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t)\,|G_1(t)|^{p'-1}\,dt\biggr)^p dx \leqslant A_0^p\Bigl[\mathbb{G}_N(g)\Bigr]^{p'},$$

где

$$A_0 := \sup_{t>0} \sup_{a(t)\leqslant s\leqslant t} \biggl(\int_s^t v_0^p\biggr)^{1/p} \biggl(\int_{a(t)}^s v_1^{-p'}\biggr)^{1/p'}.$$

Так как $a(t) \leqslant s \leqslant x \leqslant t$, то в силу (3.2.4)

$$A_0 \leqslant \biggl(\int_{a(t)}^t v_0^p\biggr)^{1/p} \biggl(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}\biggr)^{1/p'} \leqslant 2^{-1/p'}. \tag{3.2.22}$$

Поэтому

$$\|\mathbb{F}_N v_0\|_p^p \leqslant \int_0^\infty v_0^p(x)\biggl(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t)|G_1(t)|^{p'-1}\,dt\biggr)^p dx \leqslant \frac{1}{2^{p-1}}[\mathbb{G}_N(g)]^{p'}. \tag{3.2.23}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_N'(x) = &-\frac{[V_1^-(x)]'}{[V_1^-(x)]^2} \int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t)[\operatorname{sgn} G_1(t)] \int_{a(x)}^t v_1^{-p'} |G_1(t)|^{p'-1}\,dt \\
&+ \chi_{[2^{-N},2^N]}(x)\,\frac{1}{V_1^-(x)} v_1^{-p'}(x)[\operatorname{sgn} G_1(x)] \int_{a(x)}^x v_1^{-p'} |G_1(x)|^{p'-1} \\
&- \frac{1}{V_1^-(x)} v_1^{-p'}(a(x))\,a'(x) \int_{a(x)}^x (\chi_{[2^{-N},2^N]} v_1^{-p'} [\operatorname{sgn} G_1]|G_1|^{p'-1}),
\end{aligned}$$

то
$$\|\mathbb{F}'_N v_1\|_p \leqslant \mathbb{III} + [\mathbb{G}_N(g)]^{p'-1} + \mathbb{IV}, \tag{3.2.24}$$
где
$$\mathbb{III} := \left(\int_0^\infty v_1^p(x)\frac{|[V_1^-(x)]'|^p}{[V_1^-(x)]^{2p}}\left(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t)v_1^{-p'}(t)\int_{a(x)}^t v_1^{-p'}|G_1(t)|^{p'-1}\,dt\right)^p dx\right)^{1/p},$$
$$\mathbb{IV} := \left(\int_0^\infty v_1^p(x)\,[V_1^-(x)]^{-p}\,[v_1^{-p'}(a(x))\,a'(x)]^p\left(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t)v_1^{-p'}(t)\,|G_1(t)|^{p'-1}\,dt\right)^p dx\right)^{1/p}.$$
Так как $a(x)$ и $b(x)$ строго возрастают и $v_1(x) \geqslant 0$, $x \in (0,\infty)$, то в силу (3.2.20),
$$v_1^{-p'}(a(x))a'(x) \leqslant 2v_1^{-p'}(x). \tag{3.2.25}$$
Таким образом,
$$\begin{aligned}\mathbb{III}^p &\leqslant \int_0^\infty v_1^p(x)\frac{|v_1^{-p'}(x) - v_1^{-p'}(a(x))a'(x)|^p}{[V_1^-(x)]^p}\left(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t)v_1^{-p'}(t)\,|G_1(t)|^{p'-1}\,dt\right)^p dx\\
&\leqslant \int_0^\infty v_1^p(x)\frac{[v_1^{-p'}(x) + v_1^{-p'}(a(x))a'(x)]^p}{[V_1^-(x)]^p}\left(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t)v_1^{-p'}(t)|G_1(t)|^{p'-1}\,dt\right)^p dx\\
&\leqslant 3^p\int_0^\infty v_1^{-p'}(x)\,[V_1^-(x)]^{-p}\left[\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}v_1^{-p'}|G_1|^{p'-1}\right]^p dx.\end{aligned}$$
Аналогично, применяя (3.2.25), получим
$$\mathbb{IV} \leqslant 2\left[\int_0^\infty v_1^{-p'}(x)\,[V_1^-(x)]^{-p}\left[\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}v_1^{-p'}|G_1|^{p'-1}\right]^p dx\right]^{1/p}.$$
В силу [30; теорема 3.1 или 3.2] (см. также теорему 2.1 или теорему 2.2)
$$\int_0^\infty v_1^{-p'}(x)\,[V_1^-(x)]^{-p}\left[\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}v_1^{-p'}|G_1|^{p'-1}\right]^p dx \leqslant A_1^p[\mathbb{G}_N(g)]^{p'},$$
где
$$A_1 := \sup_{t>0}\sup_{a(t)\leqslant s\leqslant t}\left(\int_s^t v_1^{-p'}(x)\,[V_1^-(x)]^{-p}\,dx\right)^{1/p}\left(\int_{a(t)}^s v_1^{-p'}\right)^{1/p'}.$$
Так как $a(t) \leqslant s \leqslant x \leqslant t$, то
$$\begin{aligned}A_1^p &\leqslant \sup_{t>0}\sup_{a(t)\leqslant s\leqslant t}\int_s^t v_1^{-p'}(x)\left[\int_{a(t)}^x v_1^{-p'}\right]^{-p} dx\left[\int_{a(t)}^s v_1^{-p'}\right]^{p-1}\\
&\leqslant \frac{1}{p-1}\sup_{t>0}\sup_{a(t)\leqslant s\leqslant t}\left[\left[\int_{a(t)}^s v_1^{-p'}\right]^{1-p} - \left[\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}\right]^{1-p}\right]\left[\int_{a(t)}^s v_1^{-p'}\right]^{p-1} \leqslant \frac{1}{p-1}.\end{aligned} \tag{3.2.26}$$
Поэтому
$$\mathbb{III} + \mathbb{IV} \leqslant \frac{5}{(p-1)^{1/p}}[\mathbb{G}_N(g)]^{p'-1}.$$
Отсюда и из (3.2.24) получаем
$$\|\mathbb{F}'_N v_1\|_p \leqslant \left(1 + \frac{5}{(p-1)^{1/p}}\right)[\mathbb{G}_N(g)]^{p'-1}.$$

Отсюда и оценкок (3.2.23) и (3.2.21) вытекает, что

$$(1+5\cdot(p-1)^{-1/p}+2^{-1/p'})J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\geqslant \mathbb{G}_N(g),$$

откуда при $N\to\infty$ следует

$$J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\gtrsim \mathbb{G}(g).$$

Для доказательства оценки $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\gtrsim \mathscr{G}(g)$ мы используем функцию

$$\mathscr{F}_N(x):=\frac{1}{V_1^-(x)}\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t)v_1^{-p'}(t)V_1^{p'}(t)\,[\operatorname{sgn}G_0(t)]|G_0(t)|^{p'-1}\,dt,$$

где $N\in\mathbb{N}$. Имеем

$$\int_0^\infty g(x)\mathscr{F}_N(x)\,dx=\int_{2^{-N}}^{2^N} v_1^{-p'}(t)V_1^{p'}(t)\,|G_0(t)|^{p'}\,dt=:[\mathscr{G}_N(g)]^{p'}. \tag{3.2.27}$$

Снова в силу теоремы 2.1 или теоремы 2.2 (см. также [30; теоремы 3.1 и 3.2]) и с учетом того, что

$$V_1(t)\leqslant 2V_1(x)=4V_1^-(x) \tag{3.2.28}$$

для $t\in[a(x),x]$ (см. (3.2.3) и (3.2.6)), в силу (3.2.22) находим

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}_Nv_0\|_p&=\left[\int_0^\infty v_0^p(x)\left|\frac{1}{V_1^-(x)}\int_{a(x)}^x\Big(\chi_{[2^{-N},2^N]}v_1^{-p'}V_1^{p'}\,[\operatorname{sgn}G_0]|G_0|^{p'-1}\Big)\right|^p dx\right]^{1/p}\\&\leqslant 4\bigg(\int_0^\infty v_0^p(x)\bigg[\int_{a(x)}^x\Big(\chi_{[2^{-N},2^N]}v_1^{-p'}V_1^{p'-1}|G_0|^{p'-1}\Big)\bigg]^p dx\bigg)^{1/p}\\&\leqslant 4A_0\bigg(\int_{2^{-N}}^{2^N}v_1^{-p'}(t)V_1^{p'}(t)\,|G_0(t)|^{p'}\,dt\bigg)^{1/p}\leqslant\frac{4}{2^{1/p'}}[\mathscr{G}_N(g)]^{p'-1}.\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Для оценки $\|\mathscr{F}_N'v_1\|_p$ заметим, что (3.2.20) влечет равенство

$$v_1^p(x)=2^{p-1}[v_1^{-p'}(b(x))\,b'(x)+v_1^{-p'}(a(x))\,a'(x)]^{1-p}.$$

Таким образом, так как $a(x)$ и $b(x)$ строго возрастают и $v_1(x)\geqslant 0$, $x\in(0,\infty)$, то

$$v_1^p(x)\leqslant 2^{p-1}v_1^p(a(x))[a'(x)]^{1-p}. \tag{3.2.30}$$

Кроме этого,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_N'(x)=&-\frac{[V_1^-(x)]'}{[V_1^-(x)]^2}\int_{a(x)}^x\Big(\chi_{[2^{-N},2^N]}v_1^{-p'}V_1^{p'}\,[\operatorname{sgn}G_0]\,|G_0|^{p'-1}\Big)\\&+\chi_{[2^{-N},2^N]}(x)\,\frac{1}{V_1^-(x)}\,v_1^{-p'}(x)V_1^{p'}(x)[\operatorname{sgn}G_0(x)]|G_0(x)|^{p'-1}\\&-\chi_{[2^{-N},2^N]}(a(x))\frac{1}{V_1^-(x)}v_1^{-p'}(a(x))a'(x)V_1^{p'}(a(x))[\operatorname{sgn}G_0(a(x))]|G_0(a(x))|^{p'-1},\end{aligned}$$

и из (3.2.6) при $t=a(x)$ следует

$$V_1^-(x)\geqslant\frac12\,V_1^-(a(x))=\frac14\,V_1(a(x)).$$

Тогда (3.2.30) влечет

$$\|\mathscr{F}_N' v_1\|_p \leqslant \mathscr{V} + 2[\mathscr{G}_N(g)]^{p'-1} + 2^{2+\frac{1}{p'}}[\mathscr{G}_N(g)]^{p'-1}, \tag{3.2.31}$$

где

$$\mathscr{V} := \left[\int_0^\infty v_1^p(x)\frac{|[V_1^-(x)]'|^p}{[V_1^-(x)]^{2p}}\left[\int_{a(x)}^x \left(\chi_{[2^{-N},2^N]} v_1^{-p'} V_1^{p'} |G_0|^{p'-1}\right)\right]^p dx\right]^{1/p}.$$

Из (3.2.28), (3.2.25) и (3.2.26) вытекает

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}^p &\leqslant \int_0^\infty v_1^p(x)\frac{|v_1^{-p'}(x) - v_1^{-p'}(a(x))a'(x)|^p}{[V_1^-(x)]^p}\left[\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t) V_1^{p'-1}(t)|G_0(t)|^{p'-1}\,dt\right]^p dx \\
&\leqslant \int_0^\infty v_1^p(x)\frac{[v_1^{-p'}(x) + v_1^{-p'}(a(x))a'(x)]^p}{[V_1^-(x)]^p}\left[\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t) V_1^{p'-1}(t)|G_0(t)|^{p'-1}\,dt\right]^p dx \\
&\leqslant 3^p \int_0^\infty v_1^{-p'}(x)[V_1^-(x)]^{-p}\left(\int_{a(x)}^x \chi_{[2^{-N},2^N]}(t) v_1^{-p'}(t) V_1^{p'-1}(t)\Big|G_0(t)\Big|^{p'-1} dt\right)^p dx \\
&\leqslant 3^p A_1^p \int_{2^{-N}}^{2^N} v_1^{-p'}(x) V_1^{p'}(x)|G_0(x)|^{p'}\,dx \leqslant \frac{3^p}{p-1}[\mathscr{G}_N(g)]^{p'}.
\end{aligned}$$

Комбинируя эту оценку с (3.2.27), (3.2.29) и (3.2.31), мы получим

$$(2 + 3\cdot(p-1)^{-1/p} + 2^{2+1/p'}) J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \geqslant \mathscr{G}_N(g),$$

и, устремляя $N \to \infty$, находим, что

$$J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \gtrsim \mathscr{G}(g).$$

Аналогично теореме 3.5 доказывается следующий “симметричный” результат.

Теорема 3.6. *Пусть $1 < p < \infty$ и $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Предположим, что $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_p(\mathbb{R}_+)$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и выполняется условие (3.2.2). Тогда*

$$J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \overline{\mathbb{G}}(g) + \overline{\mathscr{G}}(g),$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{G}}(g) &:= \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left|\int_{b^{-1}(t)}^t \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_t^{b(x)} v_1^{-p'}\,dx\right|^{p'} dt\right)^{1/p'}, \\
\overline{\mathscr{G}}(g) &:= \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t) V_1^{p'}(t)\left|\int_{b^{-1}(t)}^t \frac{g(x)}{V_1(x)}\,dx\right|^{p'} dt\right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Замечание 3.4. Пусть $1 < p < \infty$. Кроме теорем 3.5 и 3.6, основных в данном пункте, можно получить еще две эквивалентные характеризации $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g)$. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \mathbb{G}(g) + \overline{\mathbb{G}}(g) + \mathscr{G}_{a,b}(g), \\
&\text{(ii)} \quad J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_p^1(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \mathbb{G}_{a,b}(g) + \mathscr{G}_{a,b}(g),
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

где

$$\mathscr{G}_{a,b}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)V_1^{p'}(t)\left|\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\,dx\right|^{p'}dt\right)^{1/p'},$$

$$\mathbb{G}_{a,b}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_{a(x)}^t v_1^{-p'}\,dx - \int_{b^{-1}(t)}^t \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_t^{b(x)} v_1^{-p'}\,dx\right|^{p'}dt\right)^{1/p'}.$$

Так как $\mathscr{G}(g)+\overline{\mathscr{G}}(g) \gtrsim \mathscr{G}_{a,b}(g)$ и $\mathbb{G}(g)+\overline{\mathbb{G}}(g) \gtrsim \mathbb{G}_{a,b}(g)$, то оценка снизу для $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)$ в (3.2.32) следует из теорем 3.5 и 3.6. Оценка сверху для $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)$ в (3.2.32) может быть доказана следующим образом. Аналогично рассуждению в доказательстве теоремы 3.5 запишем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty fg &= \int_0^\infty f\,\frac{g}{V_1}\,V_1 = \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} f(x)\frac{g(x)}{V_1(x)}\,dx\,dy\\
&= \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\left[\int_y^x f'(t)\,dt + f(y)\right]dx\,dy\\
&\qquad - \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_{b^{-1}(y)}^y \frac{g(x)}{V_1(x)}\left[\int_x^y f'(t)\,dt - f(y)\right]dx\,dy\\
&=: \mathrm{I}_a - \mathrm{I}_b + \mathrm{II}_{a,b},
\end{aligned}$$

где $\mathrm{I}_a = \mathrm{I}$,

$$\mathrm{I}_b := \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_{b^{-1}(y)}^y \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\left[\int_x^y f'(t)\,dt\right]dx\,dy$$

и

$$\mathrm{II}_{a,b} = \int_0^\infty f(y)v_1^{-p'}(y)\int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\,dx\,dy.$$

Аналогично оценке I в доказательстве теоремы 3.5, мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a - \mathrm{I}_b &= \int_0^\infty f'(t)\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx\,dt\\
&\quad - \int_0^\infty f'(t)\int_{b^{-1}(t)}^t \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_t^{b(x)} v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx\,dt\\
&\leqslant \int_0^\infty |f'(t)|\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx - \int_{b^{-1}(t)}^t \frac{g(x)}{V_1(x)}\int_t^{b(x)} v_1^{-p'}(y)\,dy\,dx\right|dt,
\end{aligned}$$

откуда по неравенству Гёльдера следует

$$|\mathrm{I}_a - \mathrm{I}_b| \leqslant \mathbb{G}_{a,b}(g)\|f'v_1\|_p \leqslant [\mathbb{G}(g)+\overline{\mathbb{G}}(g)]\|f'v_1\|_p. \tag{3.2.33}$$

Оценка $\mathrm{II}_{a,b}$ повторяет доказательство оценки сверху для II в теореме 3.5, для чего в (3.2.19) необходимо взять $G_{a,b}(y) := \int_{b^{-1}(y)}^{a^{-1}(y)}(g/V_1)$ вместо $G_0(y)$, и мы получим неравенство

$$|\mathrm{II}_{a,b}| \lesssim \mathscr{G}_{a,b}(g)\|f\|_{W_p^1(\mathbb{R}_+)},$$

комбинация которого с (3.2.33) влечет требуемую оценку сверху $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)$ в (3.2.32).

Следствие 3.3. *Пусть* $1<p<\infty$, $0\leqslant g\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$, $v_0,v_1\in\mathscr{V}_p(\mathbb{R}_+)$, $1/v_1\in L^{p'}_{\rm loc}(\mathbb{R}_+)$ *и условие* (3.2.2) *выполнено. Тогда*

$$\mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\approx\mathbf{G}_a(g)\approx\mathbf{G}_b(g),$$

где

$$\mathbf{G}_a(g):=\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_t^{a^{-1}(t)}g\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'},\qquad \mathbf{G}_b(g):=\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_{b^{-1}(t)}^t g\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'}.$$

Доказательство. Верхняя оценка $\mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\lesssim\mathbf{G}_a(g)$ следует по теореме 3.5, так как

$$\mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\approx\mathbb{G}(g)+\mathscr{G}(g)$$

и $\mathbb{G}(g)+\mathscr{G}(g)\lesssim\mathbf{G}_a(g)$ в силу (3.2.7) для $g\geqslant 0$. Для доказательства обратной оценки запишем

$$\begin{aligned}\frac12\,\mathbf{G}_a(g)&=\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_t^{a^{-1}(t)}\frac{g(x)}{V_1(x)}\int_{a(x)}^x v_1^{-p'}\,dx\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'}\\&=\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_{a(t)}^{a^{-1}(t)}v_1^{-p'}(z)\int_{\max\{t,z\}}^{\min\{a^{-1}(t),a^{-1}(z)\}}\frac{g}{V_1}\,dz\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'}\\&\leqslant\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_t^{a^{-1}(t)}v_1^{-p'}(z)\int_z^{a^{-1}(z)}\frac{g}{V_1}\,dz\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'}\\&+\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(z)\int_t^{a^{-1}(z)}\frac{g}{V_1}\,dz\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'}=\Upsilon_a(g)+\mathbb{G}(g),\end{aligned}\tag{3.2.34}$$

где

$$\Upsilon_a(g)=\biggl(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_t^{a^{-1}(t)}v_1^{-p'}(z)\int_z^{a^{-1}(z)}\frac{g}{V_1}\,dz\biggr)^{p'}dt\biggr)^{1/p'}.$$

Покажем, что $\Upsilon_a(g)\lesssim\mathscr{G}(g)$. Для этого рассмотрим неравенство

$$\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_t^{a^{-1}(t)}h(z)\,dz\biggr)^{p'}dt\leqslant C^{p'}\int_0^\infty h^{p'}(y)u(y)\,dy$$

где $u(y):=[v_1(y)]^{p'(p'-1)}V_1^{p'}(y)$. По теореме 4.1 из [30] (см. также теорему 2.3) наименьшая константа C в этом неравенстве имеет двустороннюю оценку вида

$$C\approx\sup_{t>0}\biggl(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}\biggr)^{1/p'}\biggl(\int_t^{a^{-1}(t)}u^{1-p}\biggr)^{1/p}.$$

В силу (3.2.18)

$$\int_t^{a^{-1}(t)}u^{1-p}\lesssim V_1(t)^{1-p},$$

поэтому $C\lesssim 1$ и, если это неравенство применить к функции $h(z):=v_1^{-p'}(z)\int_z^{a^{-1}(z)}(g/V_1)$, мы получим $\Upsilon_a(g)\lesssim\mathscr{G}(g)$; вместе с (3.2.34) это дает требуемую оценку $\mathbf{G}_a(g)\lesssim\mathscr{G}(g)+\mathbb{G}(g)$.

Эквивалентность $\mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g)\approx\mathbf{G}_b(g)$ доказывается аналогично.

Теорема 3.7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_p(\mathbb{R}_+)$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *и* (3.2.2) *выполнено. Тогда* $J_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) < \infty$, *если и только если* $\mathsf{G}_0(g) < \infty$. *В этом случае*

$$J_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g).$$

Доказательство. Первая часть утверждения следует из теоремы 3.3 и теоремы 3.4. Далее, пусть величина $\mathsf{G}_0(g)$ конечна. Тогда $\Lambda_g \in (\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+))^*$, где $\Lambda_g(u) = \int_0^\infty ug$. Так как мы имеем оценку

$$|\Lambda_g(f)| \lesssim (\mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g))\|f\|_{W^1_p(\mathbb{R}_+)}, \qquad f \in \overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+),$$

и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)$ является замыканием $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)$ в $W^1_p(\mathbb{R}_+)$, то

$$|\Lambda_g(u)| \lesssim (\mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g))\|u\|_{W^1_p(\mathbb{R}_+)}, \qquad u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+).$$

Таким образом,

$$J_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) \lesssim \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g).$$

Нижняя оценка следует из того, что

$$J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_p(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \mathbb{G}(g) + \mathscr{G}(g).$$

3.2.4. Пример. Пусть $p = 2$, $v_0(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $v_1 \equiv 1$. Рассмотрим весовое пространство Соболева $W^1_2(\mathbb{R}_+)$ с весами v_0, v_1. Тогда

$$\overset{\circ\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}_+) = \{f \in AC(\mathbb{R}_+) : \mathrm{supp} f \subset (0,\infty), \|f\|_{W^1_2(\mathbb{R}_+)} < \infty\},$$

и по лемме 1.6 из [32] $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}_+) = W^1_2(\mathbb{R}_+)$.

Пространства Соболева $\overset{\circ\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}_+)$ и $W^1_2(\mathbb{R}_+)$ играют важную роль при изучении одномерного оператора Шрёдингера (см., например, [35] и литературу там же). По теоремам 3.4 и 3.5 имеем

$$\mathbf{J}_{W^1_2(\mathbb{R}_+)}(g) = \mathbf{J}_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_{\delta(x)} |g(t)|dt\right)^2 dx\right)^{1/2} =: \mathsf{G}_0(g), \tag{3.2.35}$$

где

$$\delta(x) := \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\,x, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\,x\right)$$

и

$$J_{\overset{\circ\circ}{W}{}^1_2(\mathbb{R}_+)}(g) \approx \left(\int_0^\infty \left|\int_t^{a^{-1}(t)} g(x)\frac{a^{-1}(t)-x}{x}\,dx\right|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^\infty t^2\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{x}\,dx\right|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$=: \mathsf{G}_1(g) \tag{3.2.36}$$

с

$$a^{-1}(t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\,t.$$

Теорема 3.8. *Если* $X = W_2^1(\mathbb{R}_+)$ *или* $X = \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$\mathbf{X}' = \{g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \mathsf{G}_0(g) < \infty,\ \|g\|_{\mathbf{X}'} \approx \mathsf{G}_0(g)\}.$$

Если $X = \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$X' = \{g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \mathsf{G}_1(g) < \infty,\ \|g\|_{X'} \approx \mathsf{G}_1(g)\}.$$

В остальной части пункта мы изучаем этот пример более элементарными средствами и иллюстрируем некоторые особенности предыдущих результатов. По следствию 3.1 для $u \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ существует $\overline{u} \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, равная u п.в. на $\mathbb{R}_+$. Так как $\overline{u}' \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то в силу [38; 3.27, 3.11, 3.24] имеем $\overline{u} \in AC(\mathbb{R}_+)$. В силу [38; 3.7] существует $\overline{u}(+0)$ и, так как

$$\int_0^\infty \frac{|\overline{u}(x)|^2}{x^2}\,dx < \infty,$$

то $\overline{u}(+0) = 0$. Таким образом, $u \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$, если и только если существует

$$\overline{u} \in \{f \in AC(\mathbb{R}_+) : f(+0) = 0, \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} < \infty\} =: W,$$

равная u п.в. на $\mathbb{R}_+$.

По неравенству Харди для $f \in W$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{f^2(x)}{x^2}\,dx \lesssim \int_0^\infty [f'(x)]^2\,dx =: \|f'\|_2^2$$

и, таким образом,

$$\|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} \approx \|f'\|_2.$$

В частности,

$$f \in W \quad \iff \quad \text{существует} \quad h \in L^2(\mathbb{R}_+) \quad \text{такое, что} \quad f(x) = Hh(x) := \int_0^x h. \tag{3.2.37}$$

Заметим, что $\mathfrak{D}_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} \subset \mathfrak{D}_{\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)}$ (см. (3.2.1)) и $\mathfrak{D}_{\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)} = L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. Чтобы найти $\mathfrak{D}_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} = \mathfrak{D}_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)}$, положим $Ig(x) := \int_x^\infty g$ и заметим, что согласно (3.2.37)

$$\begin{aligned} f \in W_2^1(\mathbb{R}_+) \quad &\iff \quad f = Hf' \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{R}_+, \\ f' \in L^2(\mathbb{R}_+) \quad &\implies \quad H|f'| \in W_2^1(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Если $g \in \mathfrak{D}_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}$, то

$$\infty > \int_0^\infty |g|H|f'| = \int_0^\infty |f'|I|g|, \tag{3.2.38}$$

т.е.

$$\infty > \int_0^\infty |h|I|g|$$

для всех $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Тогда по теореме Ландау $I|g| \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Положим

$$\mathfrak{L}_2 := \{g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \|g\|_{\mathfrak{L}_2} < \infty\},$$

где

$$\|g\|_{\mathfrak{L}_2} := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty |g|\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{D}_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} = \mathfrak{D}_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)} = \mathfrak{L}_2.$$

Предложение 3.1. *Если* $X = W_2^1(\mathbb{R}_+) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ *или* $X = \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, *то* $\mathbf{J}_X(g) \approx \|g\|_{\mathfrak{L}_2}$ *и* $\mathbf{X}' = \mathfrak{L}_2$. *Более того*, $\|g\|_{\mathbf{X}'} \approx \|g\|_{\mathfrak{L}_2}$.

Доказательство. По замечанию 3.2 $\mathbf{J}_X(g) = J_X(|g|)$. Используя (3.2.37), (3.2.38) и теорему Фубини, имеем

$$\mathbf{J}_X(g) = \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}\neq 0}} \frac{\left|\int_0^\infty f|g|\right|}{\|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}} \approx \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}\neq 0}} \frac{\left|\int_0^\infty f'I|g|\right|}{\|f'\|_2} = \sup_{0\neq h\in L^2(\mathbb{R}_+)} \frac{\left|\int_0^\infty hI|g|\right|}{\|h\|_2} = \|g\|_{\mathfrak{L}_2}. \tag{3.2.39}$$

Замечание 3.5. Формулу (3.2.39) следует сравнить с (3.2.35).

Чтобы получить аналогичный результат для функционала $J_X(g)$, положим

$$\mathscr{L} := \left\{ g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \int_t^\infty |g| < \infty \text{ для всех } t > 0 \right\}$$

и пусть

$$\mathscr{L}_2 := \{ g \in \mathscr{L} : \|g\|_{\mathscr{L}_2} < \infty \},$$

где

$$\|g\|_{\mathscr{L}_2} := \left(\int_0^\infty \left| \int_x^\infty g \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Замечание 3.6. Нормированные пространства $\mathfrak{L}_2$ и $\mathscr{L}_2$ не полны.

Замечание 3.7. Если $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и

$$g_\varepsilon(x) := \frac{\sin x}{x^{1+\varepsilon}}, \qquad x > 0,$$

то ([35; пример 1]) $\|g_\varepsilon\|_{\mathscr{L}_2} < \infty$. Однако $\|g_\varepsilon\|_{\mathfrak{L}_2} = \infty$ и существует $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ такая, что $\int_0^\infty |fg_\varepsilon| = \infty$.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть* $g \in \mathscr{L}_2$. *Тогда существует последовательность* $\{g_k\} \subset \mathfrak{L}_2$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \|g - g_k\|_{\mathscr{L}_2} = 0.$$

Доказательство. Пусть $g \in \mathscr{L}_2$, $G(x) := Ig(x)$. Тогда $G \in L^2(\mathbb{R}_+)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} |G|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_n^\infty |G|^2 = 0. \tag{3.2.40}$$

Поскольку $G \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\xi_n \in (0, 1/n)$ такая, что

$$0 \leftarrow \alpha_n := \int_0^{1/n} |G|^2 = \frac{1}{n} |G(\xi_n)|^2. \tag{3.2.41}$$

Аналогично (3.2.40) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n := \lim_{n\to\infty} \int_0^{\xi_n} |G|^2 = 0, \tag{3.2.42}$$

и в силу (3.2.41)

$$\beta_n := \xi_n |G(\xi_n)|^2 \leqslant \frac{1}{n} |G(\xi_n)|^2 = \alpha_n \to 0. \tag{3.2.43}$$

Тогда

$$\gamma_n = \int_0^{\xi_n} \left| \int_x^{\xi_n} g + G(\xi_n) \right|^2 dx = \int_0^{\xi_n} \left| \int_x^{\xi_n} g \right|^2 dx + 2G(\xi_n) \int_0^{\xi_n} \left(\int_x^{\xi_n} g \right) dx + \xi_n |G(\xi_n)|^2. \tag{3.2.44}$$

Из (3.2.44) по неравенству Коши находим

$$\lambda_n^2 := \int_0^{\xi_n} \left| \int_x^{\xi_n} g \right|^2 dx \leqslant \gamma_n + \beta_n + 2\sqrt{\beta_n}\,\lambda_n.$$

Тогда

$$(\lambda_n - \sqrt{\beta_n})^2 \leqslant \gamma_n + 2\beta_n,$$

и в силу (3.2.42) и (3.2.43)

$$\lambda_n \leqslant \sqrt{\beta_n} + \sqrt{\gamma_n + 2\beta_n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Положим $g_n := \chi_{[\xi_n, n]} g$. Тогда $\{g_n\} \subset \mathfrak{L}_2$ и

$$\begin{aligned} \|Ig_n - Ig\|_2^2 &= \int_0^{\xi_n} \left| \int_x^{\xi_n} g + G(n) \right|^2 dx + (n - \xi_n)|Ig(n)|^2 + \int_n^\infty |Ig|^2 \\ &\leqslant 2 \int_0^{\xi_n} \left| \int_x^{\xi_n} g \right|^2 dx + (n + \xi_n)|Ig(n)|^2 + \int_n^\infty |Ig|^2 \\ &\leqslant 2 \int_0^{\xi_n} \left| \int_x^{\xi_n} g \right|^2 dx + 2n|Ig(n)|^2 + \int_n^\infty |Ig|^2. \end{aligned} \tag{3.2.45}$$

Первое и третье слагаемые исчезают при $n \to \infty$. Покажем, что найдется последовательность $\{\alpha + n_k\}$, $\alpha \in (0,1)$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha + n_k)|Ig(\alpha + n_k)|^2 = 0. \tag{3.2.46}$$

Имеем

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} |Ig|^2 = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} |Ig(x+n)|^2 \right] dx.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Ig(x+n)|^2 < \infty$$

для п.в. $x \in [0,1)$. Пусть $\alpha \in (0,1)$ таково, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Ig(\alpha+n)|^2 < \infty.$$

Тогда

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} |Ig(\alpha+n)|^2 =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha + n}.$$

Поэтому

$$0 \leftarrow \sum_{n=k}^{2k} \frac{b_n}{\alpha+n} \gtrsim b_{n_k},$$

где $b_{n_k} := \min_{k\leqslant n\leqslant 2k} b_n$. Таким образом, (3.2.46) выполняется, и, взяв последовательность $g_k := \chi_{[\xi_k,\alpha+n_k]}g$, аналогично (3.2.45) находим

$$\begin{aligned} \|Ig_k - Ig\|_2^2 &= \int_0^{\xi_k} \left| \int_x^{\xi_k} g + G(\alpha+n_k) \right|^2 dx + +(\alpha+n_k-\xi_k)|Ig(\alpha+n_k)|^2 + \int_{\alpha+n_k}^{\infty} |Ig|^2 \\ &\leqslant 2\int_0^{\xi_k} \left| \int_x^{\xi_k} g \right|^2 dx + 2(\alpha+n_k)|Ig(\alpha+n_k)|^2 + \int_{\alpha+n_k}^{\infty} |Ig|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Подобно предложению 3.1 можно доказать следующее.

Предложение 3.2. *Если* $X = W_2^1(\mathbb{R}_+) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+), g \in \mathfrak{D}_X$, *то* $J_X(g) \approx \|g\|_{\mathscr{L}_2}$. *Более того,* $X' \subset \mathscr{L}_2$ *и* $\|g\|_{X'} \approx \|g\|_{\mathscr{L}_2}$.

Определение 3.1. Пусть $X = W_2^1(\mathbb{R}_+) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Положим

$$X'_{\text{ext}} = \{g \in \mathscr{L}_2 : \text{существует } \{g_k\} \subset X',\ \lim_{k\to\infty} \|g-g_k\|_{\mathscr{L}_2} = 0,\ \|g\|_{X'_{\text{ext}}} := \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{X'}\}.$$

Обычным способом показывается, что здесь предел существует и не зависит от выбора $\{g_k\} \subset X'$.

По лемме 3.4 получаем

Предложение 3.3. *Если* $X = W_2^1(\mathbb{R}_+) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, *то* $X'_{\text{ext}} = \mathscr{L}_2$. *Более того,* $\|g\|_{X'_{\text{ext}}} \approx \|g\|_{\mathscr{L}_2}$.

Замечание 3.8. Пусть $g \in X'_{\text{ext}} = \mathscr{L}_2$ и последовательность $\{g_k\} \subset X'$ удовлетворяет условиям леммы 3.4 и определения 3.1. Тогда

$$L_g(f) := \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty g_k f$$

определяет непрерывный линейный функционал на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{g_k\}$. Если $f \in \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, то $\int_0^\infty |gf| < \infty$ (см. (3.2.50) ниже), и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$L_g(f) = \int_0^\infty gf. \tag{3.2.47}$$

Пусть функция $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\int_0^\infty |fg| < \infty. \tag{3.2.48}$$

Тогда (3.2.47) выполнено. Действительно, определим линейный функционал на $L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\mathsf{G}(h) := \int_0^\infty hIg.$$

Тогда $\|\mathsf{G}\| = \|g\|_{\mathscr{L}_2} < \infty$ и для каждой $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ существует последовательность $\{f_n\} \subset \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} = \lim_{n\to\infty} \|f' - f_n'\|_2.$$

Отсюда получаем

$$L_g(f) = \lim_{n\to\infty} L_g(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n g \overset{(3.2.38)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n' I g = \lim_{n\to\infty} \mathsf{G}(f_n') = \mathsf{G}(f') = \int_0^\infty f' I g.$$

Пусть $g_n := \chi_{[\xi_n, n]} g$. Тогда в силу (3.2.48)

$$|g_n f| \leqslant |gf| \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\int_0^\infty gf = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n f = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n H f'. \tag{3.2.49}$$

По лемме 3.4 существует $\{g_{n_k}\} \subset \{g_n\} \subset \mathfrak{L}_2$ такая, что $\lim_{k\to\infty} \|g - g_{n_k}\|_{\mathscr{L}_2} = 0$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \|f'(I g_{n_k} - I g)\|_1 = 0.$$

Не ограничивая общности, предположим, что

$$|f'(I g_{n_k} - I g)| \leqslant h \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Тогда снова по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$L_g(f) = \int_0^\infty f' I g = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f' I g_{n_k} \overset{(3.2.51)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty g_{n_k} H f' = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty g_{n_k} f \overset{(3.2.49)}{=} \int_0^\infty gf,$$

и получаем (3.2.47).

Лемма 3.5. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ *и*

$$B := \sup_{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{|\int_0^\infty f\phi|}{\|\phi\|_p} < \infty.$$

Тогда $f \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ *и* $\|f\|_{p'} = B$.

Доказательство. Пусть

$$\Lambda(\phi) := \int_I f\phi, \qquad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Тогда Λ – линейный функционал на подпространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$. По теореме Хана–Банаха Λ имеет расширение $\widetilde{\Lambda}$ на $L^p(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющее условию

$$|\widetilde{\Lambda}(h)| \leqslant B\|h\|_p, \qquad h \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

По теореме Рисса о представлении существует $F \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\widetilde{\Lambda}(h) = \int_0^\infty Fh, \qquad h \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

Тогда

$$\int_0^\infty (F - f)\phi = 0 \qquad \text{для всех} \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Следовательно, $f = F$ п.в. на $(0, \infty)$.

Лемма 3.6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $g \in \mathscr{L}$, $Ig(x) := \int_x^\infty g$, $x \in (0,\infty)$ *и*

$$B := \sup_{\phi \in C_0^1(\mathbb{R}_+)} \frac{|\int_0^\infty \phi' \cdot Ig|}{\|\phi'\|_p} < \infty.$$

Тогда $Ig \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ *и* $\|Ig\|_{p'} = B$.

Доказательство. Положим

$$\Lambda(\phi') := \int_0^\infty \phi' Ig, \qquad \phi \in C_0^1(\mathbb{R}_+).$$

Тогда Λ – линейный функционал на подпространстве

$$\{h \in L^p(\mathbb{R}_+) : h = \phi', \phi \in C_0^1(\mathbb{R}_+)\}$$

пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$. По теореме Хана–Банаха Λ имеет расширение до линейного функционала $\widetilde{\Lambda}$ на $L^p(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющего условию

$$|\widetilde{\Lambda}(h)| \leqslant B\|h\|_p, \qquad h \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

По теореме представления Рисса существует $F \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\widetilde{\Lambda}(h) = \int_0^\infty Fh, \qquad h \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

Тогда

$$\int_0^\infty (F - Ig)\phi' = 0 \qquad \text{для всех} \quad \phi \in C_0^1(\mathbb{R}_+).$$

Следовательно (см. [38; лемма 7.3]), существует константа $c \in \mathbb{R}$ такая, что $F = Ig + c$ п.в. на $(0,\infty)$. Так как $\int_x^\infty |g| < \infty$ для всех $x \in (0,\infty)$, то существует $x_0 \in (0,\infty)$ такая, что

$$|Ig(x) + c| \geqslant \frac{|c|}{2} \qquad \text{для} \quad x \in (x_0,\infty),$$

но поскольку $(Ig + c) \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, то $c = 0$. Таким образом, $F = Ig$ п.в. на $(0,\infty)$.

Предложение 3.4. *Если* $X = \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, *то* $X' \cap \mathscr{L} \subset \mathscr{L}_2 \subset X'$. *Более того,* $\|g\|_{X'} \approx \|g\|_{\mathscr{L}_2}$ *для каждого* $g \in \mathscr{L}$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathscr{L}$ и $f \in \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\int_0^\infty |g(t)f(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty |f'(x)| \int_x^\infty |g|\,dx < \infty. \tag{3.2.50}$$

По теореме Фубини из (3.2.50) следует, что

$$\int_0^\infty g(t)f(t)\,dt = \int_0^\infty g(t) \int_0^t f'\,dt = \int_0^\infty f'(x) \int_x^\infty g\,dx. \tag{3.2.51}$$

Пусть $g \in X'$, и тогда по лемме 3.6 мы имеем

$$\infty > J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)}(g) = \sup_{\substack{f \in \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) \\ \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} \neq 0}} \frac{|\int_0^\infty fg|}{\|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}} \approx \sup_{\substack{f \in \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) \\ \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)} \neq 0}} \frac{|\int_0^\infty f' Ig|}{\|f'\|_2} = \|g\|_{\mathscr{L}_2}.$$

Следовательно, $X' \cap \mathscr{L} \subset \mathscr{L}_2$. Обратно, пусть $g \in \mathscr{L}_2$. Тогда $g \in \mathscr{L}$ и $\|g\|_{X'} \lesssim \|g\|_{\mathscr{L}_2}$. Следовательно, $\mathscr{L}_2 \subset X'$.

Замечание 3.9. Из замечаний 3.2, 3.7, предложений 3.1 и 3.4 следует, что $J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)}(g) \neq J_{\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)}(|g|)$ в общем случае.

Замечание 3.10. Пусть $\varepsilon \in (1/2, 1)$ и

$$g_\varepsilon(x) := \frac{\sin x}{x^\varepsilon}, \qquad x > 0.$$

Тогда $g_\varepsilon \notin \mathscr{L}$ и, следовательно, $g_\varepsilon \notin \mathscr{L}_2$. Однако $\mathsf{G}_1(g_\varepsilon) < \infty$ (см. (3.2.36)). Поэтому, $g_\varepsilon \in [\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)]'$ и включение $\mathscr{L}_2 \subset [\overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)]'$ строгое.

Далее, определим

$$\mathscr{W} := \{f \in AC(\mathbb{R}_+) : \operatorname{supp} f \subset (0, \infty)\}.$$

Если $f \in \mathscr{W}, g \in \mathscr{L}_2$, то

$$\int_0^\infty |f'|I|g| < \infty. \tag{3.2.52}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |fg| = \int_0^\infty |Hf'||g| \leqslant \int_0^\infty (H|f'|)|g| = \int_0^\infty |f'|I|g| < \infty.$$

Поэтому функционал

$$\|f\|_{\mathscr{L}_2'} := \sup_{g \in \mathscr{L}_2} \frac{|\int_0^\infty fg|}{\|g\|_{\mathscr{L}_2}}$$

корректно задан и определяет ассоциированную норму в ассоциированном пространстве

$$\mathscr{L}_2' := \{f \in \mathscr{W} : \|f\|_{\mathscr{L}_2'} < \infty\}.$$

Предложение 3.5. $\mathscr{L}_2' = \overset{\circ\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$, *более того*, $\|f\|_{\mathscr{L}_2'} \approx \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}$.

Доказательство. Имеем

$$C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \subset \mathscr{G} := \{G = Ig, g \in \mathscr{L}_2\} \subset L^2(\mathbb{R}_+).$$

Используя (3.2.52) и лемму 3.5, получим

$$\|f\|_{\mathscr{L}_2'} = \sup_{g \in \mathscr{L}_2} \frac{|\int_0^\infty f' Ig|}{\|g\|_{\mathscr{L}_2}} = \sup_{G \in \mathscr{G}} \frac{|\int_0^\infty f' G|}{\|G\|_2} = \|f'\|_2 \approx \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}.$$

Для любых $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+), g \in \mathfrak{L}_2$ имеем

$$\left|\int_0^\infty fg\right| \leqslant \int_0^\infty |fg| = \int_0^\infty |Hf'||g| \leqslant \int_0^\infty |f'|I|g| \leqslant \|f'\|_2 \|g\|_{\mathfrak{L}_2} < \infty.$$

Поэтому функционал

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_2'} := \sup_{g \in \mathfrak{L}_2} \frac{|\int_0^\infty fg|}{\|g\|_{\mathfrak{L}_2}}$$

корректно задан на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ и определяет ассоциированную норму в ассоциированном пространстве

$$\mathfrak{L}_2' := \{f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) : \|f\|_{\mathfrak{L}_2'} < \infty\}. \tag{3.2.53}$$

Предложение 3.6. $\mathfrak{L}_2' = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ *и* $\|g\|_{\mathfrak{L}_2'} \lesssim \|g\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)}$.

Доказательство. Из определения (3.2.53) следует, что $\mathfrak{L}_2' \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Чтобы показать обратное, запишем

$$\|f\|_{\mathfrak{L}_2'} = \sup_{g\in\mathfrak{L}_2} \frac{|\int_0^\infty f'Ig|}{\|g\|_{\mathfrak{L}_2}} \leqslant \sup_{g\in\mathfrak{L}_2} \frac{\int_0^\infty |f'|I|g|}{\|g\|_{\mathfrak{L}_2}} \leqslant \sup_{h\geqslant 0} \frac{\int_0^\infty |f'|h}{\|h\|_2} = \|f'\|_2 \approx \|f\|_{W_2^1(\mathbb{R}_+)},$$

т.е. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) \subset \mathfrak{L}_2'$.

3.3. Дробное неравенство вложения типа Соболева

Пусть $p \geqslant 1$, $q > 0$ и $\lambda \in (0,1)$. Предположим, что весовая функция u неотрицательна на $(0,\infty)^2$ и вес v неотрицателен на $(0,\infty)$. Рассмотрим дробное неравенство вида

$$\left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)-f(y)|^q}{|x-y|^{1+\lambda q}}\, u^q(x,y)\,dx\,dy\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |f'|^p v^p\right)^{1/p}, \tag{3.3.1}$$

соответствующее вложению подкласса

$$\mathscr{W}^1_{p,v} := \{f \in AC(0,\infty) : \|f'v\|_p < \infty\}$$

абсолютно непрерывных на $(0,\infty)$ функций (AC-функций) f в весовое пространство Соболева дробного порядка

$$W^\lambda_{q,u} := W^\lambda_{q,u}(0,\infty) := \{f : [f]_{W^\lambda_{q,u}} < \infty\}.$$

Для $f \in W^\lambda_{q,u}$ функционал

$$[f]_{W^\lambda_{q,u}} := \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)-f(y)|^q}{|x-y|^{1+\lambda q}}\, u^q(x,y)\,dx\,dy\right)^{1/q}$$

является весовой полунормой типа Слободецкого. При $q \geqslant 1$ пространство $W^\lambda_q := W^\lambda_{q,1}$, снабженное нормой $\|f\|_{W^\lambda_{q,1}} = \|f\|_q + [f]_{W^\lambda_{q,1}} < \infty$, также называют пространством Гальярдо [42] или пространством Слободецкого [43]. Являясь частным случаем пространств Бесова [44], W^λ_q играют важную роль в изучении следов функций из пространств Соболева и применяются при решении уравнений в частных производных (подробнее см. [45]).

Рассмотрим неравенство (3.3.1) в следующей форме:

$$\left(\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x)-f(y)|^q \widetilde{u}^q(x,y)\,dx\,dy\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |f'|^p v^p\right)^{1/p}, \tag{3.3.2}$$

где $\widetilde{u}^q(x,y) := u^q(x,y)|x-y|^{-1-\lambda q}$ и константа $0 < C < \infty$ наилучшая и не зависит от f. Выполняя преобразования аналогично действиям в доказательстве [46; следствие 3.5], переходим к эквивалентному (3.3.2) неравенству

$$\left(\int_0^1 \left[\int_0^\infty \left|\int_{\xi x}^x f'(z)\,dz\right|^q \widetilde{U}^q_\xi(x)\,dx\right] d\xi\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |f'|^p v^p\right)^{1/p}$$

с $\widetilde{U}^q_\xi(x) = x(\widetilde{u}^q(x,\xi x) + \widetilde{u}^q(\xi x, x))$. Таким образом, исходное неравенство (3.3.1) равносильно

$$\left(\int_0^1 \left[\int_0^\infty \left|\int_{\xi x}^x f'(z)\,dz\right|^q U^q_\xi(x)\,dx\right] d\xi\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |f'|^p v^p\right)^{1/p} \tag{3.3.3}$$

с
$$U_\xi^q(x) = \frac{u^q(x,\xi x) + u^q(\xi x, x)}{x^{\lambda q}(1-\xi)^{1+\lambda q}}. \tag{3.3.4}$$

Положим $u \equiv 1$. Тогда $U_\xi^q(x) = 2x^{-\lambda q}(1-\xi)^{-1-\lambda q}$ и преобразования, приведенные выше, приводят (3.3.1) к эквивалентному неравенству
$$\left(\int_0^1 \left[\int_0^\infty \left|\int_{\xi x}^x f'\right|^q \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right] \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |f'|^p v^p\right)^{1/p}, \tag{3.3.5}$$
или
$$\left(\int_0^1 \left[\int_0^\infty \left|\int_{\xi x}^x g v^{-1}\right|^q \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right] \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_0^\infty |g|^p\right)^{1/p} \tag{3.3.6}$$
с $g = f'v$, содержащему интегральный оператор Харди–Стеклова
$$\mathscr{H}_{\xi,w} g(x) := w(x)\int_{\xi x}^x g(z) v^{-1}(z)\,dz \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{3.3.7}$$
из $L^p(0,\infty)$ в $L^q(0,\infty)$ с $w(x) = x^{-\lambda}$. Обозначая $\|\mathscr{H}_{\xi,w}\| := \|\mathscr{H}_{\xi,w}\|_{L^p(0,\infty)\to L^q(0,\infty)}$, запишем для наилучшей константы C последнего неравенства
$$\begin{aligned} C^q &= \sup_{\|g\|_p \neq 0}\left(\int_0^1 \left[\int_0^\infty \left|\int_{\xi x}^x g v^{-1}\right|^q \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right] \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right) \Big/ \|g\|_p^q \\ &\leqslant \int_0^1 \sup_{\|g\|_p \neq 0}\left(\left(\int_0^\infty \left|\int_{\xi x}^x g v^{-1}\right|^q \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right) \Big/ \|g\|_p^q\right) \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}} = \int_0^1 \frac{\|\mathscr{H}_{\xi,w}\|^q d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$
Перейдем к оценке на C снизу. Можно считать, что $\|\mathscr{H}_{\xi,w}\| \approx F(\xi)$, где функционал
$$F(\xi) = \begin{cases} \mathscr{A}_\varsigma \text{ или } (\mathscr{A}_{\varsigma^{-1}})^*, & 1 < p \leqslant q < \infty, \\ \mathscr{B}_\varsigma \text{ или } (\mathscr{B}^-_{\varsigma^{-1}})^* + (\mathscr{B}^+_{\varsigma^{-1}})^*, & 0 < q < p < \infty, \quad p > 1, \end{cases}$$
с характеристиками ограниченности $\mathscr{A}_\varsigma$, $(\mathscr{A}_{\varsigma^{-1}})^*$, $\mathscr{B}_\varsigma$, $(\mathscr{B}^-_{\varsigma^{-1}})^*$, $(\mathscr{B}^+_{\varsigma^{-1}})^*$ (см. с. 112 в п. 2.4) определяется для $a(x) = \xi x$, $b(x) = x$ и $w(x) = x^{-\lambda}$. Тогда для некоторого $0 < \xi_0 < 1$
$$\begin{aligned} C^q &\geqslant \sup_{\substack{\|g\|_p \neq 0\\ g \geqslant 0}}\left(\int_0^\infty \left[\int_0^1 \left(\int_{\xi x}^x g v^{-1}\right)^q \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right] \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right) \Big/ \|g\|_p^q \\ &\geqslant \sup_{\substack{\|g\|_p \neq 0\\ g \geqslant 0}}\left(\int_0^\infty \left[\int_0^{\xi_0} \left(\int_{\xi x}^x g v^{-1}\right)^q \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right] \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right) \Big/ \|g\|_p^q \\ &\geqslant \sup_{\substack{\|g\|_p \neq 0\\ g \geqslant 0}}\left(\left(\int_0^\infty \left(\int_{\xi_0 x}^x g v^{-1}\right)^q \frac{dx}{x^{\lambda q}}\right) \Big/ \|g\|_p^q\right) \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}} \\ &\gtrsim F^q(\xi_0)\left(\frac{1}{(1-\xi_0)^{\lambda q}} - 1\right). \end{aligned} \tag{3.3.9}$$
Отсюда и из (3.3.8) в силу эквивалентностей $F(\xi) \approx \|\mathscr{H}_{\xi,w}\|$ и $1 - (1-\xi)^{\lambda q} \approx \xi$ получаем
$$\sup_{0<\xi<1} \|\mathscr{H}_{\xi,w}\| \frac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^\lambda} \lesssim C \lesssim \left(\int_0^1 \frac{\|\mathscr{H}_{\xi,w}\|^q\,d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q}. \tag{3.3.10}$$

Отметим, что граничные функции $a(x) = \xi x$ и $b(x) = x$ оператора Харди–Стеклова (3.3.7) удовлетворяют условиям (2.2.1). Кроме того, явная форма весовой функции $w(x) = x^{-\lambda}$ хорошо подходит для вычисления двойственного фарватера $b^{-1}(y) \leqslant \rho(y) \leqslant a^{-1}(y)$ на $(0, \infty)$ со свойством (2.4.2). Из условия (2.4.2) находим, что $\rho(y) = \zeta y$, где

$$\zeta := \zeta(\xi) := \begin{cases} 2^{-1/(1-\lambda q)}(1 + \xi^{\lambda q - 1})^{1/(1-\lambda q)}, & \lambda q \neq 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}, & \lambda q = 1. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

Для характеризации неравенства (3.3.6) обозначим

$$\Delta_\xi(t) = [a(t), b(t)] = [\xi t, t], \qquad \delta_\xi(t) = [b^{-1}(\rho^{-1}(t)), a^{-1}(\rho^{-1}(t))] = \left[\frac{t}{\zeta}, \frac{t}{\xi\zeta}\right],$$

$$\Theta_\xi(t) = [b^{-1}(t), a^{-1}(t)] = \left[t, \frac{t}{\xi}\right], \qquad \vartheta_\xi(t) = [a(\rho(t)), b(\rho(t))] = [\xi\zeta t, \zeta t].$$

Используя результаты следствия 2.1, получаем

$$\|\mathscr{H}_{\xi,w}\| \approx \begin{cases} \mathscr{A}(\xi) \approx \mathscr{A}^*(\xi), & 1 < p \leqslant q < \infty, \\ \mathscr{B}(\xi) \approx \mathscr{B}^*_-(\xi) + \mathscr{B}^*_+(\xi), & 0 < q < p < \infty, \quad p > 1, \end{cases}$$

где

$$\mathscr{A}(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi^{\lambda q - 1} - 1}{(1-\lambda q)(1 + \xi^{\lambda q - 1})}\right)^{1/q} \sup\limits_{t>0} t^{1/q - \lambda} \left(\displaystyle\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\right)^{1/p'}, & \lambda q \neq 1, \\ \left[\ln \dfrac{1}{\xi}\right]^{1/q} \sup\limits_{t>0} \left(\displaystyle\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\right)^{1/p'}, & \lambda q = 1, \end{cases} \tag{3.3.12}$$

$$\mathscr{A}^*(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi^{\lambda q - 1} - 1}{1-\lambda q}\right)^{1/q} \sup\limits_{t>0} t^{1/q - \lambda} \left(\displaystyle\int_{\xi\zeta t}^{\zeta t} v^{-p'}\right)^{1/p'}, & \lambda q \neq 1, \\ \left[\ln \dfrac{1}{\xi}\right]^{1/q} \sup\limits_{t>0} \left(\displaystyle\int_{\xi\zeta t}^{\zeta t} v^{-p'}\right)^{1/p'}, & \lambda q = 1, \end{cases}$$

$$\mathscr{B}(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi^{\lambda q - 1} - 1}{(1-\lambda q)(1 + \xi^{\lambda q - 1})}\right)^{1/p} \left(\displaystyle\int_0^\infty t^{r/p - \lambda r} \left[\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\right]^{r/p'} dt\right)^{1/r}, & \lambda q \neq 1, \\ \left[\ln \dfrac{1}{\xi}\right]^{1/p} \left(\displaystyle\int_0^\infty t^{-1} \left[\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\right]^{r/p'} dt\right)^{1/r}, & \lambda q = 1, \end{cases} \tag{3.3.13}$$

$$\mathscr{B}^*_-(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi^{\lambda q - 1} - 1}{1-\lambda q}\right)^{1/q} \left(\displaystyle\int_0^\infty t^{r/q} \left[\int_{\xi\zeta t}^{t} v^{-p'}\right]^{r/q'} v^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/r}, & \lambda q \neq 1, \\ \left[\ln \dfrac{1}{\xi}\right]^{1/q} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[\int_{\xi\zeta t}^{t} v^{-p'}\right]^{r/q'} v^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/r}, & \lambda q = 1, \end{cases}$$

$$\mathscr{B}^*_+(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi^{\lambda q - 1} - 1}{1-\lambda q}\right)^{1/q} \left(\displaystyle\int_0^\infty t^{r/q} \left[\int_{t}^{\zeta t} v^{-p'}\right]^{r/q'} v^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/r}, & \lambda q \neq 1, \\ \left[\ln \dfrac{1}{\xi}\right]^{1/q} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[\int_{t}^{\zeta t} v^{-p'}\right]^{r/q'} v^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/r}, & \lambda q = 1 \end{cases}$$

(см. функционалы (2.4.3), (2.4.4), (2.4.5), и (2.4.6) с $w(x) = x^{-\lambda}$ и $v \to v^{-1}$). Отсюда и из (3.3.10) можем получить оценки наилучшей константы C в (3.3.1) с $u = 1$: если $1 < p \leqslant q < \infty$, то

$$\underline{\mathbb{A}}^* \approx \underline{\mathbb{A}} \lesssim C \lesssim \overline{\mathbb{A}} \approx \overline{\mathbb{A}}^*, \tag{3.3.14}$$

где

$$\underline{\mathbb{A}} := \sup_{0<\xi<1} \mathscr{A}(\xi)\frac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, \qquad \overline{\mathbb{A}} := \left(\int_0^1 \frac{[\mathscr{A}(\xi)]^q\,d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q},$$

$$\underline{\mathbb{A}}^* := \sup_{0<\xi<1} \mathscr{A}^*(\xi)\frac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, \qquad \overline{\mathbb{A}}^* := \left(\int_0^1 \frac{[\mathscr{A}^*(\xi)]^q\,d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q},$$

для $0 < q < p < \infty$ получаем, что

$$\underline{\mathbb{B}}^* \approx \underline{\mathbb{B}} \lesssim C \lesssim \overline{\mathbb{B}} \approx \overline{\mathbb{B}}^*, \tag{3.3.15}$$

где

$$\underline{\mathbb{B}} := \sup_{0<\xi<1} \mathscr{B}(\xi)\frac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, \qquad \overline{\mathbb{B}} := \left(\int_0^1 \frac{[\mathscr{B}(\xi)]^q\,d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q},$$

$$\underline{\mathbb{B}}^* := \sup_{0<\xi<1} [(\mathscr{B}^*_-(\xi) + \mathscr{B}^*_+(\xi)]\frac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, \qquad \overline{\mathbb{B}}^* := \left(\int_0^1 \frac{[\mathscr{B}^*_-(\xi) + \mathscr{B}^*_+(\xi)]^q\,d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q}.$$

Характеризация исходного неравенства (3.3.1) в эквивалентной форме (3.3.3) с произвольным весом u может быть получена тем же методом, что и в случае одновесового неравенства (3.3.6). Действительно, действуя по той же схеме, что и при получении оценок (3.3.8)—(3.3.9), и обозначая $W_\xi^q(x) := \int_0^\xi U_t^q(x)\,dt$, где $U_\xi(x)^q$ – весовая функция вида (3.3.4) мы получим

$$\sup_{0<\xi<1} \|\mathscr{H}_{\xi,W_\xi}\|_{L^p\to L^q} \lesssim C \lesssim \left(\int_0^1 \|\mathscr{H}_{\xi,U_\xi}\|^q_{L^p\to L^q}\,d\xi\right)^{1/q}. \tag{3.3.16}$$

Оценка (3.3.16) верна для двухвесового неравенства (3.3.3) и, следовательно, для (3.3.1) с произвольной весовой функцией u для всех значений параметров $p > 1$ и $q > 0$.

Чтобы сформулировать основной результат этого пункта, мы введем в рассмотрение три фарватера. Первый – это функция $\sigma_\xi(x)$ такая, что $\xi x < \sigma_\xi(x) < x$, $0 < \xi < 1$, $x > 0$, и

$$\int_{\xi x}^{\sigma_\xi(x)} v^{-p'} = \int_{\sigma_\xi(x)}^{x} v^{-p'}, \qquad x > 0. \tag{3.3.17}$$

Для заданного $0 < \xi < 1$ определим еще две фарватер-функции (двойственного типа) $\rho_{W_\xi}(y)$ и $\rho_{U_\xi}(y)$ такие, что $y < \rho_{W_\xi}(y) < y/\xi$, $y < \rho_{U_\xi}(y) < y/\xi$ для всех $y > 0$ и

$$\int_y^{\rho_{W_\xi}(y)} W_\xi^q = \int_{\rho_{W_\xi}(y)}^{y/\xi} W_\xi^q, \qquad \int_y^{\rho_{U_\xi}(y)} U_\xi^q = \int_{\rho_{U_\xi}(y)}^{y/\xi} U_\xi^q. \tag{3.3.18}$$

Теорема 3.9. *Пусть $p > 1$, $q > 0$ и $q \neq 1$. Предположим, что $C > 0$ является наилучшей константой неравенства (3.3.1) и не зависит от f. Пусть ρ_w обозначает либо фарватер-функцию ρ_{W_ξ}, либо ρ_{U_ξ}, определенные соотношением (3.3.18). Тогда в случае $1 < p \leqslant q < \infty$*

$$\sup_{0<\xi<1} \mathscr{A}_i(W_\xi) =: \underline{\mathbb{A}}(i) \lesssim C \lesssim \overline{\mathbb{A}}(i) := \left(\int_0^1 [\mathscr{A}_i(U_\xi)]^q\,d\xi\right)^{1/q}, \qquad i = 1,2,3,4,$$

где

$$\mathscr{A}_1(w) := \sup_{t>0}\biggl(\int_{\sigma_\xi(t)}^{\sigma_\xi(t)/\xi} w^q\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\biggr)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_2(w) := \sup_{t>0}\biggl(\int_{t}^{t/\xi} w^q\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{\xi\sigma_\xi^{-1}(t)}^{\sigma_\xi^{-1}(t)} v^{-p'}\biggr)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_3(w) := \sup_{t>0}\biggl(\int_{\rho_w^{-1}(t)}^{\rho_w^{-1}(t)/\xi} w^q\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\biggr)^{1/p'},$$

$$\mathscr{A}_4(w) := \sup_{t>0}\biggl(\int_{t}^{t/\xi} w^q\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{\xi\rho_w(t)}^{\rho_w(t)} v^{-p'}\biggr)^{1/p'}.$$

Более того, $\underline{\mathbb{A}}(1) \approx \underline{\mathbb{A}}(2) \approx \underline{\mathbb{A}}(3) \approx \underline{\mathbb{A}}(4)$ *и* $\overline{\mathbb{A}}(1) \approx \overline{\mathbb{A}}(2) \approx \overline{\mathbb{A}}(3) \approx \overline{\mathbb{A}}(4)$.

Если $0 < q < p < \infty$ *и* $p > 1$, *то*

$$\sup_{0<\xi<1}\mathscr{B}_i(W_\xi) =: \underline{\mathbb{B}}(i) \lesssim C \lesssim \overline{\mathbb{B}}(i) := \biggl(\int_0^1 [\mathscr{B}_i(U_\xi)]^q\,d\xi\biggr)^{1/q}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$\mathscr{B}_1(w) := \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{\sigma_\xi(t)}^{\sigma_\xi(t)/\xi} w^q\biggr]^{r/p}\biggl[\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\biggr]^{r/p'} w^q(t)\,dt\biggr)^{1/r},$$

$$\mathscr{B}_2(w) := \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{t}^{t/\xi} w^q\biggr]^{r/q}\biggl[\int_{\xi\sigma_\xi^{-1}(t)}^{\sigma_\xi^{-1}(t)} v^{-p'}\biggr]^{r/q'} v^{-p'}(t)\,dt\biggr)^{1/r},$$

$$\mathscr{B}_3(w) := \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{\rho_w^{-1}(t)}^{\rho_w^{-1}(t)/\xi} w^q\biggr]^{r/p}\biggl[\int_{\xi t}^{t} v^{-p'}\biggr]^{r/p'} w^q(t)\,dt\biggr)^{1/r},$$

и

$$\underline{\mathbb{B}}(4) := \sup_{0<\xi<1}\Bigl[\mathscr{B}_4^-(W_\xi) + \mathscr{B}_4^+(W_\xi)^+\Bigr] \lesssim C \lesssim \overline{\mathbb{B}}(4) := \biggl(\int_0^\infty \Bigl[\mathscr{B}_4^-(U_\xi) + \mathscr{B}_4^+(U_\xi)^+\Bigr]^q d\xi\biggr)^{1/q},$$

где

$$\mathscr{B}_4^-(w) := \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{t}^{t/\xi} w^q\biggr]^{r/q}\biggl[\int_{\xi\rho_w(t)}^{t} v^{-p'}\biggr]^{r/q'} v^{-p'}(t)\,dt\biggr)^{1/r},$$

$$\mathscr{B}_4^+(w) := \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{t}^{t/\xi} w^q\biggr]^{r/q}\biggl[\int_{t}^{\rho_w(t)} v^{-p'}\biggr]^{r/q'} v^{-p'}(t)\,dt\biggr)^{1/r}.$$

Более того, $\underline{\mathbb{B}}(1) \approx \underline{\mathbb{B}}(2) \approx \underline{\mathbb{B}}(3) \approx \underline{\mathbb{B}}(4)$ *и* $\overline{\mathbb{B}}(1) \approx \overline{\mathbb{B}}(2) \approx \overline{\mathbb{B}}(3) \approx \overline{\mathbb{B}}(4)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из (3.3.16) и следствия 2.1.

Для исследования неравенства (3.3.1) в случаях $p = 1$ и $q = 1$ можно использовать теорему 4 из [21; гл. 7, § 1.5] или теорему 2.10 с $p \to 1$ или $q \to 1$. В частности, в силу следствия 2.1

$$\lim_{p\to 1}\mathscr{A}_{\rho_w^{-1}} = \sup_{t>0}\biggl(\int_{\rho_w^{-1}(t)}^{\rho_w^{-1}(t)/\xi} w^q\biggr)^{1/q} \operatorname*{ess\,sup}_{\xi t<y<t} v^{-1}(y) =: A(w),$$

$$\lim_{p\to 1}(\mathscr{A}_{\rho_w})^* = \sup_{t>0}\biggl(\int_t^{t/\xi} w^q\biggr)^{1/q} \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\rho_w(t)<y<\rho_w(t)} v^{-1}(y) =: A^*(w),$$

$$\lim_{p\to 1}\mathscr{B}_{\rho_w^{-1}} = \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{\rho_w^{-1}(t)}^{\rho_w^{-1}(t)/\xi} w^q\biggr]^{1/(1-q)} \Bigl[\operatorname*{ess\,sup}_{\xi t<y<t} v^{-1}(y)\Bigr]^{q/(1-q)} w^q(t)\,dt\biggr)^{1/q-1} =: B(w).$$

Поэтому

$$\sup_{0<\xi<1} A(W_\xi) \approx \sup_{0<\xi<1} A^*(W_\xi) \lesssim C \lesssim \biggl(\int_0^1 [A(U_\xi)]^q\,d\xi\biggr)^{1/q} \approx \biggl(\int_0^1 [A^*(U_\xi)]^q\,d\xi\biggr)^{1/q}$$

при $p = 1 \leqslant q < \infty$ и

$$\sup_{0<\xi<1} B^*(W_\xi) \lesssim C \lesssim \biggl(\int_0^1 [B(U_\xi)]^q\,d\xi\biggr)^{1/q}, \qquad 0<q<p=1.$$

Аналогично можно характеризовать (3.3.1) при $q = 1$, используя оба типа функционалов $\mathscr{A}_\varsigma$, $(\mathscr{A}_{\varsigma^*})^*$, $\mathscr{B}_\varsigma$, $(\mathscr{B}_{\varsigma^*})^*$ с $\varsigma = \sigma$ или $\varsigma = \rho^{-1}$ (см. п. 2.4). Отметим, что если $q = 1$, то $r/q' = 0$ и, следовательно, для $1 < p < \infty$

$$\lim_{q\to 1}(\mathscr{B}_{\sigma_\xi^{-1}})^* = \lim_{q\to 1}(\mathscr{B}_{\rho_w})^* = \biggl(\int_0^\infty \biggl[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w\biggr]^{p'} v^{-p'}(t)\,dt\biggr)^{1/p'}.$$

Далее приведем два примера, в которых получены критерии выполнения неравенства (3.3.1) со специальными весами u и v.

Пример 3.1. Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $u = 1$ и $v(z) = z^{\alpha/p}$. Для того чтобы установить необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (3.3.1) для заданных выше весовых функций, мы выпишем функционал $\mathscr{A}(\xi)$ в форме (3.3.12):

$$\mathscr{A}(\xi) = \begin{cases} \biggl(\dfrac{\xi^{\lambda q-1}-1}{(1-\lambda q)(1+\xi^{\lambda q-1})}\biggr)^{1/q} \sup\limits_{t>0} t^{1/q-\lambda}\biggl(\displaystyle\int_{\xi t}^t z^{\alpha(1-p')}\,dz\biggr)^{1/p'}, & \lambda q \neq 1,\\ \biggl[\ln\dfrac{1}{\xi}\biggr]^{1/q} \sup\limits_{t>0}\biggl(\displaystyle\int_{\xi t}^t z^{\alpha(1-p')}\,dz\biggr)^{1/p'}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

Супремум, входящий в $\mathscr{A}(\xi)$, конечен тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{q} - \lambda + (\alpha(1-p')+1)\frac{1}{p'} = 0. \tag{3.3.19}$$

В этом случае $\alpha(1-p') + 1 = p'(\lambda - 1/q)$ и, следовательно,

$$\mathscr{A}(\xi) = \begin{cases} \biggl(\dfrac{\xi^{\lambda q-1}-1}{(1-\lambda q)(1+\xi^{\lambda q-1})}\biggr)^{1/q} \biggl(\dfrac{1-\xi^{p'(\lambda-1/q)}}{p'(\lambda-1/q)}\biggr)^{1/p'}, & \lambda q \neq 1,\\ \biggl[\ln\dfrac{1}{\xi}\biggr]^{1/q+1/p'}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

Из (3.3.14) вытекает, что неравенство (3.3.1) выполнено, если $\overline{\mathbb{A}} < \infty$, где

$$\overline{\mathbb{A}} = \begin{cases} \biggl(\displaystyle\int_0^1 \frac{\xi^{\lambda q-1}-1}{(1-\lambda q)(1+\xi^{\lambda q-1})}\biggl(\frac{1-\xi^{p'(\lambda-1/q)}}{p'(\lambda-1/q)}\biggr)^{q/p'} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\biggr)^{1/q}, & \lambda q \neq 1,\\ \biggl(\displaystyle\int_0^1 \biggl[\ln\frac{1}{\xi}\biggr]^{1+q/p'} \frac{d\xi}{(1-\xi)^2}\biggr)^{1/q}, & \lambda q = 1; \end{cases}$$

и если (3.3.1) выполнено с константой $C < \infty$, то $\underline{\mathbb{A}} < \infty$, где

$$\underline{\mathbb{A}} = \begin{cases} \sup\limits_{0<\xi<1} \left(\dfrac{\xi^{\lambda q-1} - 1}{(1-\lambda q)(1+\xi^{\lambda q-1})} \right)^{1/q} \left(\dfrac{1-\xi^{p'(\lambda-1/q)}}{p'(\lambda-1/q)} \right)^{1/p'} \dfrac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, & \lambda q \neq 1, \\ \sup\limits_{0<\xi<1} \left[\ln \dfrac{1}{\xi} \right]^{1/q+1/p'} (1-\xi)^{-\lambda} \xi^{1/q}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

Преобразуем выражения

$$\overline{\mathbb{A}} \simeq \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-\xi^{\lambda q-1}}{1+\xi^{\lambda q-1}} [1-\xi^{p'(\lambda-1/q)}]^{q/p'} \dfrac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}} \right)^{1/q}, & \lambda q > 1, \\ \left(\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-\xi^{1-\lambda q}}{\xi^{1-\lambda q}+1} [1-\xi^{p'(1/q-\lambda)}]^{q/p'} \dfrac{\xi^{\lambda q-1}\, d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}} \right)^{1/q}, & \lambda q < 1, \\ \left(\displaystyle\int_0^1 \left[\ln \dfrac{1}{\xi} \right]^{1+q/p'} \dfrac{d\xi}{(1-\xi)^2} \right)^{1/q}, & \lambda q = 1, \end{cases}$$

и

$$\underline{\mathbb{A}} \simeq \begin{cases} \sup\limits_{0<\xi<1} \left(\dfrac{1-\xi^{\lambda q-1}}{1+\xi^{\lambda q-1}} \right)^{1/q} [1-\xi^{p'(\lambda-1/q)}]^{1/p'} (1-\xi)^{-\lambda} \xi^{1/q} & \lambda q > 1, \\ \sup\limits_{0<\xi<1} \left(\dfrac{1-\xi^{1-\lambda q}}{\xi^{1-\lambda q}+1} \right)^{1/q} [1-\xi^{p'(1/q-\lambda)}]^{1/p'} (1-\xi)^{-\lambda} \xi^{\lambda}, & \lambda q < 1, \\ \sup\limits_{0<\xi<1} \left[\ln \dfrac{1}{\xi} \right]^{1/q+1/p'} (1-\xi)^{-\lambda} \xi^{1/q}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

Заметим, что для $\beta > 0$ и $b > a > 0$

$$b^{\beta} - a^{\beta} \approx b^{\beta-1}(b-a). \tag{3.3.20}$$

Если $\lambda > 1/q$, то интеграл в $\overline{\mathbb{A}}$ сходится в точке 0, и согласно (3.3.20) сходится в точке 1, если $q/p' - \lambda q > -1$. Таким образом, $\overline{\mathbb{A}} < \infty$ в случае $\lambda > 1/q$, если

$$\lambda < \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}. \tag{3.3.21}$$

Это условие также выполнено и является достаточным для сходимости интеграла в $\overline{\mathbb{A}}$ при $\lambda < 1/q$. При $\lambda = 1/q$ с помощью подстановки $\xi = e^{-t}$ приведем функционал $\overline{\mathbb{A}}$ к виду

$$\overline{\mathbb{A}} = \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{1+q/p'} e^{-t}\, dt}{(1-e^{-t})^2} \right)^{1/q}.$$

Этот интеграл сходится на ∞. Поскольку

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{1-e^{-t}} = 1, \tag{3.3.22}$$

то интегрируемое выражение ведет себя как $t^{q/p'-1}$ в окрестности 0, поэтому $\overline{\mathbb{A}}$ конечно. Таким образом, условие (3.3.21) является достаточным для выполнения неравенства (3.3.1) при $u = 1$, $v(z) = z^{\alpha/p}$ и

$$\alpha := \left(\frac{1}{q} - \lambda + 1 \right) p - 1 > 0.$$

Если $\lambda > 1/q$, то супремум в $\underline{\mathbb{A}}$ конечен в окрестности 0, и в силу (3.3.20) конечен в окрестности 1, если $1/q + 1/p' - \lambda \geqslant 0$. Отсюда получаем, что если (3.3.1) выполнено при $\lambda > 1/q$ с константой $C < \infty$, то

$$\lambda \leqslant \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}. \tag{3.3.23}$$

В силу (3.3.20) супремум в $\underline{\mathbb{A}}$ конечен в окрестности 0 в случае $\lambda < 1/q$. Согласно (3.3.20) условие (3.3.23) необходимо следует из конечности супремума в $\underline{\mathbb{A}}$ в окрестности 1, и условие выполнено, если $\lambda < 1/q$. При $\lambda = 1/q$ выполним подстановку $\xi = e^{-t}$ и получим

$$\underline{\mathbb{A}} = \sup_{t>0} \frac{t^{1/q+1/p'} e^{-t/q}}{(1-e^{-t})^{\lambda}}.$$

Этот супремум конечен на ∞. Поскольку имеет место (3.3.22) и $\lambda = 1/q$, то заключаем, что $\underline{\mathbb{A}}$ конечно в окрестности 0.

Таким образом, условие (3.3.23) является необходимым для (3.3.1) с весом $u = 1$ и $v(z) = z^{\alpha/p}$, $\alpha \geqslant 0$. Объединяя это с (3.3.21), получаем следующий критерий.

Предложение 3.7. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \lambda < 1$ и $\alpha = (1/q - \lambda + 1)p - 1$. Положим $u = 1$ и $v(z) = z^{\alpha/p}$ в неравенстве (3.3.1). Тогда (3.3.1) выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda < 1/p' + 1/q$.*

Следствие 3.4. *Если $p = q$, то неравенство*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+\lambda p}}\, dx\, dy \leqslant C \int_0^\infty |f'(z)|^p z^{(1-\lambda)p}\, dz$$

выполнено тогда и только тогда, когда $0 < \lambda < 1$.

Замечание 3.11. Достаточность в следствии 3.4 была доказана в [46; с. 175–176].

Пример 3.2. Пусть $0 < q < p < \infty$, $u = 1$ и $v(z) = z^{(1-\gamma)/p'}(1+z^\gamma)^{2/p'}$, $\gamma \neq 0$. Найдем ограничения на $\lambda(\gamma)$, следующие из характеризации неравенства (3.3.1) при указанных параметрах. Для этого мы будем использовать функционал $\mathscr{B}(\xi)$ вида (3.3.13). Поскольку

$$\int_{\xi t}^t v^{-p'}(z)\, dz = -\frac{1}{\gamma(1+z^\gamma)}\bigg|_{\xi t}^t = \frac{t^{|\gamma|}(1-\xi^{|\gamma|})}{|\gamma|[1+(\xi t)^{|\gamma|}](1+t^{|\gamma|})}$$

для любого $\gamma \neq 0$, то мы можем считать, что $\gamma > 0$. Имеем

$$\mathscr{B}(\xi) \simeq \begin{cases} \left(\dfrac{(\xi^{\lambda q-1}-1)(1-\xi^\gamma)^{p-1}}{(1-\lambda q)(1+\xi^{\lambda q-1})}\right)^{1/p} \left(\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{r/p-\lambda r+\gamma r/p'}\, dt}{[1+(\xi t)^\gamma]^{r/p'}[1+t^\gamma]^{r/p'}}\right)^{1/r}, & \lambda q \neq 1, \\ \left[\ln\dfrac{1}{\xi}\right]^{1/p} (1-\xi^\gamma)^{1/p'} \left(\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{\gamma r/p'-1}\, dt}{[1+(\xi t)^\gamma]^{r/p'}[1+t^\gamma]^{r/p'}}\right)^{1/r}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

Обозначим $s := r(1/q - \lambda) + \gamma r/p'$ и допустим, что $\mathscr{B}(\xi) < \infty$. Тогда интеграл

$$I(\xi) := \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\, dt}{[1+(\xi t)^\gamma]^{r/p'}[1+t^\gamma]^{r/p'}}$$

в $\mathscr{B}(\xi)$ сходится в 0. Следовательно, $s > 0$ и λ должно удовлетворять неравенству

$$\lambda < \frac{1}{q} + \frac{\gamma}{p'}. \tag{3.3.24}$$

Условие (3.3.24) также гарантирует сходимость $I(\xi)$ на ∞ в случае $\lambda q > 1$. Действительно, поскольку

$$\frac{1}{(1+cz)(1+z)} = \frac{1}{1-c}\left[\frac{1}{1+z} - \frac{c}{1+cz}\right],$$

то

$$\begin{aligned} I(\xi) &\approx \int_0^\infty \frac{t^{s-1}\,dt}{[1+\xi^{\gamma r/p'}t^{\gamma r/p'}][1+t^{\gamma r/p'}]} \\ &= \frac{1/s}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\int_0^\infty \left[\frac{dt^s}{1+t^{\gamma r/p'}} - \frac{\xi^{\gamma r/p'}\,dt^s}{1+\xi^{\gamma r/p'}t^{\gamma r/p'}}\right] \\ &\approx \frac{1/s}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\left[\int_0^\infty \frac{d[t^s+1]}{[1+t^s]^{\gamma r/(p's)}} - \xi^{\gamma r/p'-s}\int_0^\infty \frac{d[\xi^s t^s+1]}{[1+\xi^s t^s]^{\gamma r/(p's)}}\right] = \frac{1-\xi^{r(\lambda-1/q)}}{s(1-\xi^{\gamma r/p'})} \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

при $s > 0$ и $\lambda q > 1$. Если $\lambda q = 1$, то $s = \gamma r/p'$, и аналогично (3.3.25)

$$I(\xi) \approx \frac{1}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\ln\left[\frac{1}{\xi}\right].$$

Если $\lambda q < 1$, то, учитывая

$$\frac{z}{(1+cz)(1+z)} = \frac{1}{1-c}\left[\frac{1}{1+cz} - \frac{1}{1+z}\right]$$

и соотношение $r/p + 1 = r/q$, получаем

$$\begin{aligned} I(\xi) &\approx \int_0^\infty \frac{t^{\gamma r/p'}\cdot t^{r/p-\lambda r}\,dt}{[1+\xi^{\gamma r/p'}t^{\gamma r/p'}][1+t^{\gamma r/p'}]} \\ &= \frac{1/(r/q-\lambda r)}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\int_0^\infty \left[\frac{dt^{r/q-\lambda r}}{1+\xi^{\gamma r/p'}t^{\gamma r/p'}} - \frac{dt^{r/q-\lambda r}}{1+t^{\gamma r/p'}}\right] \\ &\approx \frac{1/(r/q-\lambda r)}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\left[\frac{1}{\xi^{r/q-\lambda r}}\int_0^\infty \frac{d[\xi^{r/q-\lambda r}t^{r/q-\lambda r}+1]}{[1+\xi^{r/q-\lambda r}t^{r/q-\lambda r}]^{\frac{\gamma}{p'(1/q-\lambda)}}} - \int_0^\infty \frac{d[t^{r/q-\lambda r}+1]}{[1+t^{r/q-\lambda r}]^{\frac{\gamma}{p'(1/q-\lambda)}}}\right]. \end{aligned}$$

Если мы допустим, что

$$\frac{\gamma}{p'(1/q-\lambda)} > 1,$$

т.е.

$$\lambda > \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p'}, \quad (3.3.26)$$

то $I(\xi)$ сходится в случае $\lambda q < 1$ и

$$I(\xi) \approx \frac{1/(r/q-\lambda r)}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\left[\frac{1}{\xi^{r/q-\lambda r}} - 1\right].$$

Теперь с учетом (3.3.24) и (3.3.26) получаем

$$\mathscr{B}(\xi) \approx \begin{cases} \left(\dfrac{(1-\xi^{\lambda q-1})(1-\xi^\gamma)^{p-1}}{1+\xi^{\lambda q-1}}\right)^{1/p}\left(\dfrac{1-\xi^{r(\lambda-1/q)}}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\right)^{1/r}, & \lambda q > 1, \\ \left(\dfrac{(1-\xi^{1-\lambda q})(1-\xi^\gamma)^{p-1}}{1+\xi^{1-\lambda q}}\right)^{1/p}\xi^{-(1/q-\lambda)}\left(\dfrac{1-\xi^{r(1/q-\lambda)}}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\right)^{1/r}, & \lambda q < 1, \\ \left[\ln\dfrac{1}{\xi}\right]^{1/q}(1-\xi^\gamma)^{1/p'}(1-\xi^{\gamma r/p'})^{-1/r}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

Согласно (3.3.15) из $\overline{\mathbb{B}} < \infty$ следует выполнение неравенства (3.3.1), где

$$\overline{\mathbb{B}} \approx \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{(1-\xi^{\lambda q-1})(1-\xi^{\gamma})^{p-1}}{1+\xi^{\lambda q-1}}\right]^{q/p} \left[\frac{1-\xi^{r(\lambda-1/q)}}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\right]^{q/r} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q}, & \lambda q > 1, \\ \left(\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{(1-\xi^{1-\lambda q})(1-\xi^{\gamma})^{p-1}}{1+\xi^{1-\lambda q}}\right]^{q/p} \xi^{\lambda q-1} \left[\frac{1-\xi^{r(1/q-\lambda)}}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\right]^{q/r} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1+\lambda q}}\right)^{1/q}, & \lambda q < 1, \\ \left(\displaystyle\int_0^1 \left[\ln\frac{1}{\xi}\right] [1-\xi^{\gamma}]^{q/p'} [1-\xi^{\gamma r/p'}]^{-q/r} \frac{d\xi}{(1-\xi)^2}\right)^{1/q}, & \lambda q = 1, \end{cases}$$

и если (3.3.1) имеет место с константой $C < \infty$, то $\underline{\mathbb{B}} < \infty$, где

$$\underline{\mathbb{B}} \approx \begin{cases} \sup\limits_{0<\xi<1} \left(\dfrac{(1-\xi^{\lambda q-1})(1-\xi^{\gamma})^{p-1}}{1+\xi^{\lambda q-1}}\right)^{1/p} \left(\dfrac{1-\xi^{r(\lambda-1/q)}}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\right)^{1/r} \dfrac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, & \lambda q > 1, \\ \sup\limits_{0<\xi<1} \left(\dfrac{(1-\xi^{1-\lambda q})(1-\xi^{\gamma})^{p-1}}{1+\xi^{1-\lambda q}}\right)^{1/p} \xi^{-(1/q-\lambda)} \left(\dfrac{1-\xi^{r(1/q-\lambda)}}{1-\xi^{\gamma r/p'}}\right)^{1/r} \dfrac{\xi^{1/q}}{(1-\xi)^{\lambda}}, & \lambda q < 1, \\ \sup\limits_{0<\xi<1} \left[\ln\dfrac{1}{\xi}\right]^{1/q} (1-\xi^{\gamma})^{1/p'} (1-\xi^{\gamma r/p'})^{-1/r} (1-\xi)^{-\lambda} \xi^{1/q}, & \lambda q = 1. \end{cases}$$

При $\lambda q \neq 1$ интегралы в $\overline{\mathbb{B}}$ сходятся в 0, и с учетом (3.3.20) и условия $\lambda < 1$ сходятся в 1. Если же $\lambda q = 1$, то подстановкой $\xi = e^{-t}$ преобразуем интеграл в $\overline{\mathbb{B}}$ в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{t(1-e^{-\gamma t})^{q/p'} e^{-t}\, dt}{(1-e^{-(\gamma r/p')t})^{q/r}(1-e^{-t})^2}.$$

В силу (3.3.22) подынтегральное выражение ведет себя, как t^{q-2} в окрестности 0, и, следовательно, интеграл сходится при $q \geqslant 1$, что соответствует нашему случаю, так как $q = 1/\lambda > 1$.

Далее, если $\lambda q \neq 1$, то супремумы в $\underline{\mathbb{B}}$ конечны в окрестностях 0 и 1 в силу (3.3.20). Для случая $\lambda q = 1$ подстановка $\xi = e^{-t}$ и соотношение (3.3.22) показывают конечность супремума в выражении для $\underline{\mathbb{B}}$.

Объединяя все проделанные оценки, сформулируем следующее утверждение.

Предложение 3.8. *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $0 < \lambda < 1$ *и* $\gamma > 0$. *Положим* $u = 1$ *и* $v(z) = z^{(1-\gamma)/p'}(1+z^{\gamma})^{2/p'}$. *Для выполнения неравенства* (3.3.1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left|\lambda - \frac{1}{q}\right| < \frac{\gamma}{p'}.$$

3.4. Дальнейшие результаты

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ открытый интервал и $p > 1$, $s > 0$. По аналогии с п. 3.2 обозначим через

$$\mathscr{V}_1(I) := \{v \in L^1_{\mathrm{loc}}(I) : v \geqslant 0, \|v\|_{L^1(I)} \neq 0\}$$

множество весовых функций и предположим, что $v_0, v_1 \in \mathscr{V}_1(I)$. Под $W^1_{1,\mathrm{loc}}(I)$ мы будем понимать пространство таких функций $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, что их обобщенные производные Du принадлежат $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Обозначим

$$W^1_{p,s}(I) := \big\{f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(I) : \|f\|_{W^1_{p,s}(I)} := \|fv_0\|_{L^s(I)} + \|f'v_1\|_{L^p(I)} < \infty\big\}.$$

Рассмотрим весовое пространство Соболева $\mathring{W}^1_{p,s}(I)$, которое определим, как замыкание в $W^1_{p,s}(I)$ по норме $\|f\|_{W^1_{p,s}(I)}$ подмножества $\mathring{AC}(I)$ всех абсолютно непрерывных функций f с компактными носителями в I.

Пусть $q > 0$. Предположим, что w – измеримая на I весовая функция такая, что $0 < w(x) < \infty$ для п.в. $x \in I$. Кроме этого, положим, что $w \in L^q_{\mathrm{loc}}$, и если $q > 1$, то $1/w \in L^{q'}_{\mathrm{loc}}$, где $q' := q/(q-1)$. В этом пункте мы сначала находим двусторонние оценки на функционал вида

$$\mathbf{J}_{\mathring{W}^1_{p,s}(I)}(g) := \mathbf{J}_{p,s}(g) := \sup_{\substack{f \in \mathring{W}^1_{p,s}(I) \\ \|f\|_{W^1_{p,s}(I)} \neq 0}} \frac{\int_I f(t)g(t)\,dt}{\|f\|_{W^1_{p,s}(I)}},$$

где $0 \leqslant g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ (см. теорему 3.10), обеспечивая тем самым так называемый принцип двойственности в пространствах Соболева $\mathring{W}^1_{p,s}(I)$. Во-вторых, опираясь на этот принцип, мы характеризуем неравенство

$$\|fw\|_{L^q(I)} \leqslant C\|f\|_{\mathring{W}^1_{p,s}(I)} \tag{3.4.1}$$

с наилучшей и независимой от $f \in \mathring{W}^1_{p,s}$ константой $C > 0$ для широкого спектра параметров суммирования, а именно для $1 < p \leqslant q$, $0 < s \leqslant q$ или $0 < q < p$, $p = s > 1$.

Без потери общности мы полагаем $I = (0, \infty)$ и используем обозначения

$$L^p((0,\infty)) =: L^p, \qquad \mathring{W}^1_{p,s}((0,\infty)) =: \mathring{W}^1_{p,s}, \qquad \|f\|_{L^p} =: \|f\|_p, \quad \|f\|_{L^p(I)} =: \|f\|_{p,I}.$$

Так же, как и в гл. 2, в доказательствах результатов этой части работы применяются последовательности (2.1.6), (2.1.7) и (2.1.8) с $\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 1$. Иногда мы используем оценки следующего типа: если $(\Gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ – интервалы на $(0,\infty)$ и существует константа N такая, что каждая точка $(0,\infty)$ попадает не более чем в N промежутков (Γ_k), то

$$\|f\|_{\mathring{W}^1_{p,s}} \gtrsim \begin{cases} \Big(\sum_k \|f\|^p_{\mathring{W}^1_{p,s}(\Gamma_k)}\Big)^{1/p}, & p \geqslant s, \\ \Big(\sum_k \|f\|^s_{\mathring{W}^1_{p,s}(\Gamma_k)}\Big)^{1/s}, & p \leqslant s. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Оценка аргументируется неравенствами Йенсена и Минковского.

3.4.1. Принцип двойственности. Начнем со схемы построения специальных функций Р. Ойнарова и М. О. Отелбаева [32], [36], [39], [40] в форме, более подходящей к нашей ситуации, когда параметры p в s в норме $\|f\|_{W^1_{p,s}}$, вообще говоря, отличаются друг от друга.

Для $1 < p < \infty$ положим

$$\delta(x,y) := \sup\Big\{d \in [0,x) : \int_{x-d}^{x} v_1^{-p'} \leqslant \int_x^{x+y} v_1^{-p'}\Big\},$$

где $x > 0$ и $y \geqslant 0$. Для $x \in (0,\infty)$ определим множество

$$D_x := \Big\{y \geqslant 0 : \int_{x-\delta(x,y)}^{x} v_1^{-p'} = \int_x^{x+y} v_1^{-p'}\Big\},$$

которое содержит 0 и все достаточно малые $y > 0$. Положим

$$\begin{gathered} d^+(x) := \sup\big\{d \geqslant 0 : \|v_1^{-1}\|_{p',(x-\delta(x,d),x+d)}\|v_0\|_{s,(x-\delta(x,d),x+d)} \leqslant 1,\ d \in D_x\big\}, \\ d^-(x) := \delta(x, d^+(x)), \qquad x^- := x - d^-(x), \qquad x^+ := x + d^+(x), \\ \Delta^+(x) := [x, x^+], \qquad \Delta^-(x) := [x^-, x], \qquad \Delta(x) := [x^-, x^+]. \end{gathered}$$

Теперь выберем и зафиксируем некоторое $c > 0$, предполагая, что

$$\|v_1^{-1}\|_{p',(0,c)}\|v_0\|_{s,(0,c)} = \|v_1^{-1}\|_{p',(c,\infty)}\|v_0\|_{s,(c,\infty)} = \infty, \tag{3.4.3}$$

откуда следует, что $0 < x - d^-(x) < x + d^+(x) < \infty$ для всех $x \in (0,\infty)$ (см. [32]). Из всего вышесказанного следует, что

$$\int_{\Delta^-(x)} v_1^{-p'} = \int_{\Delta^+(x)} v_1^{-p'}, \qquad x > 0, \tag{3.4.4}$$

$$\left(\int_{\Delta(x)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{\Delta(x)} v_0^s\right)^{1/s} = 1, \qquad x > 0. \tag{3.4.5}$$

По аналогии с [32; леммы 1.1–1.3] можно показать, что функции $a(x) := x - d^-(x)$ и $b(x) := x + d^+(x)$ являются непрерывными и строго возрастающими на $(0,\infty)$, кроме того,

$$\lim_{x\to 0}(x \pm d^\pm(x)) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}(x \pm d^\pm(x)) = \infty, \tag{3.4.6}$$

$$\int_{\Delta^\pm(t)} v_1^{-p'} \leqslant 2\int_{\Delta^\pm(x)} v_1^{-p'} \qquad \text{для всех} \quad x > 0, \quad t \in \Delta^\pm(x), \tag{3.4.7}$$

$$\sup_{y\in\Delta(x)} |f(y)| \leqslant 2^{1/p'}\|v_1^{-1}\|_{p',\Delta^\pm(x)}\|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta(x))}, \qquad f \in AC_{\mathrm{loc}}((0,\infty)). \tag{3.4.8}$$

В силу [32; лемма 1.6] условие (3.4.3) эквивалентно тождеству $W^1_{p,s} \equiv \mathring{W}^1_{p,s}$.

Обозначим через a^{-1}, b^{-1} функции, обратные к a и b соответственно. Напомним, что эти функции также являются непрерывными и строго возрастающими на $(0,\infty)$, причем в силу (3.4.6)

$$\lim_{x\to 0} a^{-1}(x) = \lim_{x\to 0} b^{-1}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} a^{-1}(x) = \lim_{x\to\infty} b^{-1}(x) = \infty.$$

Для $s > 1$ и локально интегрируемой на $(0,\infty)$ неотрицательной функции g обозначим

$$V_1(t) := \int_{\Delta(t)} v_1^{-p'} = \int_{\Delta^-(t)} v_1^{-p'} + \int_{\Delta^+(t)} v_1^{-p'} =: V_1^-(t) + V_1^+(t)$$

и определим

$$\mathbf{G}_s^-(g) := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^{a^{-1}(x)} g(t)\,dt\right)^{s'} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\right)^{1/s'},$$

$$\mathbf{G}_s^+(g) := \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^x g(t)\,dt\right)^{s'} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\right)^{1/s'},$$

где, очевидно,

$$\mathbf{G}_p^-(g) = \left(\int_0^\infty \left(\int_x^{a^{-1}(x)} g(t)\,dt\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'},$$

$$\mathbf{G}_p^+(g) = \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^x g(t)\,dt\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'}.$$

Рассмотрим величину

$$\mathbf{J}_{p,s}(g) := \sup_{\substack{f\in\mathring{W}^1_{p,s}\\ \|f\|_{W^1_{p,s}}\neq 0}} \frac{\int_0^\infty f(t)g(t)\,dt}{\|f\|_{W^1_{p,s}}}.$$

Так как в $\mathring{W}^1_{p,s}$ норма f совпадает с нормой $|f|$ и

$$\sup_{\substack{f\in\mathring{W}^1_{p,s}\\ \|f\|_{W^1_{p,s}}\neq 0}} \frac{\int_0^\infty f(t)g(t)\,dt}{\|f\|_{W^1_{p,s}}} \geqslant \sup_{\substack{0\leqslant f\in\mathring{W}^1_{p,s}\\ \|f\|_{W^1_{p,s}}\neq 0}} \frac{\int_0^\infty f(t)g(t)\,dt}{\|f\|_{W^1_{p,s}}},$$

то

$$\mathbf{J}_{p,s}(g) = \sup_{\substack{0\leqslant f\in\mathring{W}^1_{p,s}\\ \|f\|_{W^1_{p,s}}\neq 0}} \frac{\int_0^\infty f(t)g(t)\,dt}{\|f\|_{W^1_{p,s}}}.$$

Теорема 3.10. *Предположим, что* $1 < p, s < \infty$ *и* $0 \leqslant g \in L_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$.
(i) *Если* $p \geqslant s$, *то*

$$\mathbf{G}^{\pm}_s(g) \lesssim \mathbf{J}_{p,s}(g) \lesssim \mathbf{G}^{\pm}_p(g).$$

(ii) *В случае* $p \leqslant s$ *верно, что*

$$\mathbf{G}^{\pm}_p(g) \lesssim \mathbf{J}_{p,s}(g) \lesssim \mathbf{G}^{\pm}_s(g).$$

Доказательство. Так как $f \in \mathring{W}^1_{p,s}$, то для *верхних оценок* в (i) и (ii) можем записать

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx &= \int_0^\infty f(x)\,\frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,V_1^-(x)\,dx\\ &= \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} f(x)\frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dy\\ &= \int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\left[\int_y^x f'(t)\,dt + f(y)\right]dx\,dy =: \mathrm{I}+\mathrm{II},\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

где g фиксирована. Так как

$$V_1(t) \leqslant 2V_1(x) = 4V_1^-(x) \tag{3.4.10}$$

для $x \in [t, a^{-1}(t)]$ (см. (3.4.4) и (3.4.7)), то можно утверждать, что

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}| &= \left|\int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} f'(t)\int_t^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dt\,dy\right|\\ &= \left|\int_0^\infty f'(t)\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\int_t^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dy\,dt\right|\\ &\lesssim \int_0^\infty \frac{|f'(t)|}{V_1(t)}\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\int_t^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\,dt\end{aligned}$$

и

$$\mathrm{II} = \int_0^\infty f(y)v_1^{-p'}(y)\int_y^{a^{-1}(y)} \frac{g(x)}{V_1^-(x)}\,dx\,dy \lesssim \int_0^\infty f(y)\frac{v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)}\int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy.$$

Запишем для случая $s \leqslant p$

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}| &\lesssim \int_0^\infty \frac{|f'(t)|}{V_1(t)}\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\int_t^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\,dt\\ &\lesssim \int_0^\infty \frac{|f'(t)|}{V_1(t)}\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\int_t^{a^{-1}(t)} g(x)\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty |f'(t)|\int_t^{a^{-1}(t)} g(x)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Гёльдера с показателями p и p'

$$|I| \lesssim \int_0^\infty |f'(t)| \left(\int_t^{a^{-1}(t)} g(x)\,dx\right) dt \leqslant \mathbf{G}_p^-(g)\|f'v_1\|_p.$$

Для $p < s$ верна следующая оценка:

$$\begin{aligned}|I| &\lesssim \int_0^\infty \frac{|f'(t)|}{V_1(t)} \int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y) \int_t^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\,dt\\ &\lesssim \int_0^\infty \frac{|f'(t)|}{V_1(t)} \int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y) \int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\,dt\\ &\leqslant \left(\int_0^\infty \frac{v^{-p'}(t)}{V_1^{p'}(t)} \left(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y) \int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f'v_1\|_p.\end{aligned}$$

Согласно неравенству Гёльдера с s и s'

$$\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y) \int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy \leqslant \left(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}\right)^{1/s} \left(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\left(\int_y^{a^{-1}(y)} g\right)^{s'} dy\right)^{1/s'}.$$

Так как $V_1 = 2V_1^\pm$, то последние две оценки с учетом $p'/s - p' = -p'/s'$ дают

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^\infty \frac{v^{-p'}(t)}{V_1^{p'}(t)} \left(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y) \int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\right)^{p'} dt\right)^{1/p'}\\ &\qquad\leqslant \left(\int_0^\infty v^{-p'}(t) V_1^{-p'/s'}(t) \left(\int_{a(t)}^t v_1^{-p'}(y)\left(\int_y^{a^{-1}(y)} g\right)^{s'} dy\right)^{p'/s'} dt\right)^{1/p'}\end{aligned}$$

(применением неравенства Минковского со степенью $p'/s' > 1$)

$$\leqslant \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\left(\int_y^{a^{-1}(y)} g\right)^{s'} \left(\int_y^{a^{-1}(y)} v^{-p'}(t) V_1^{-p'/s'}(t)\,dt\right)^{s'/p'} dy\right)^{1/s'}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 3.2, можно показать, что

$$\int_y^{a^{-1}(y)} v^{-p'}(t) V_1^{-p'/s'}(t)\,dt \lesssim V_1^{1-p'/s'},$$

откуда вытекает, что

$$|\mathrm{I}| \lesssim \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(y)\left(\int_y^{a^{-1}(y)} g\right)^{s'} V_1^{s'/p'-1}(y)\,dy\right)^{1/s'} \|f'v_1\|_p = \mathbf{G}_s^-(g)\|f'v_1\|_p. \tag{3.4.11}$$

Чтобы оценить II, выберем $\xi_0 = 1$ и определим ξ_k для всех $k \in \mathbb{Z}$ согласно (2.1.6). Покроем полуось $(0,\infty)$ интервалами $\Delta(\xi_k)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta^-(\xi_k)} \frac{f(y)v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)} \int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx\,dy\\ &\qquad\leqslant \int_{\Delta^-(\xi_k)} |f(y) - f(\xi_k^-)| \frac{v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)} G_0(y)\,dy + |f(\xi_k^-)| \int_{\Delta^-(\xi_k)} \frac{v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)}\, G_0(y)\,dy =: \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2,\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

где
$$G_0(y) := \int_y^{a^{-1}(y)} g(x)\,dx.$$
Из неравенства Гёльдера и вложения $[x, a^{-1}(x)] \supseteq [x, \xi_k]$ получаем для $x \in \Delta^-(\xi_k)$
$$\begin{aligned}\mathrm{II}_1 &= \int_{\Delta^-(\xi_k)} \left|\int_{\xi_k^-}^{y} f'(t)\,dt\right| \frac{v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)}\,G_0(y)\,dy \leqslant \int_{\Delta^-(\xi_k)} |f'(t)| \int_t^{\xi_k} \frac{v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)}\,G_0(y)\,dy\,dt \\ &\leqslant \left(\int_{\Delta^-(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_t^{\xi_k} \frac{v_1^{-p'}(y)}{V_1^-(y)}\,G_0(y)\,dy\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f'v_1\|_{p,\Delta^-(\xi_k)} \\ &\lesssim \left(\int_{\Delta^-(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{v_1^{-p'}G_0}{V_1}\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f'v_1\|_{p,\Delta^-(\xi_k)}.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$
Чтобы оценить II_2, запишем, учитывая (3.4.8),
$$|f(\xi_k^-)| \leqslant 2^{1/p'}\left(\int_{\Delta^-(\xi_k^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \|f\|_{W_p^1,\Delta(\xi_k^-)}.$$
На основе (3.4.4) это влечет
$$\mathrm{II}_2 \leqslant 2^{1/p'}\left(\int_{\Delta^+(\xi_k^-)} v_1^{-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'} \left(\int_{\Delta^-(\xi_k)} \frac{v_1^{-p'}G_0}{V_1}\right) \|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta(\xi_k^-))}.$$
Поскольку $\xi_k^- \leqslant t \leqslant b(\xi_k^-)$, то выполнены вложения
$$[b^{-1}(t), a^{-1}(t)] \supseteq [b^{-1}(t), \xi_k] \supseteq [\xi_k^-, \xi_k] = \Delta^-(\xi_k),$$
которые приводят к следующей оценке:
$$\begin{aligned}\mathrm{II}_2 &\leqslant 2^{1/p'}\left(\int_{\Delta^+(\xi_k^-)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} \frac{v_1^{-p'}G_0}{V_1}\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta(\xi_k^-))} \\ &\leqslant 2^{1/p'}\left(\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} \frac{v_1^{-p'}G_0}{V_1}\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta(\xi_k^-))}.\end{aligned}$$
В сочетании с (3.4.12) и (3.4.13) это дает
$$\int_{\Delta^-(\xi_k)} \frac{fv_1^{-p'}}{V_1}\,G_0 \leqslant 2^{1/p'}\left(\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} \frac{v_1^{-p'}G_0}{V_1}\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta^-(\xi_k^-)\cup\Delta(\xi_k))}.$$
Аналогичные оценки с заменой интервала Δ^- на Δ^+ в (3.4.12) приводят к следующей верхней оценке для того же интеграла по Δ^+:
$$\int_{\Delta^+(\xi_k)} \frac{fv_1^{-p'}}{V_1}\,G_0 \lesssim \left(\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} \frac{v_1^{-p'}G_0}{V_1}\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta(\xi_k)\cup\Delta^+(\xi_k^+))}.$$
Так как $\Delta^-(\xi_k^-)\cup\Delta(\xi_k)$ и $\Delta(\xi_k)\cup\Delta^+(\xi_k^+)$ лежат внутри промежутка
$$\Gamma_k := \Delta(\xi_{k-1}) \cup \Delta(\xi_k) \cup \Delta(\xi_{k+1}),$$

то мы можем записать, что

$$\int_{\Delta(\xi_k)} \frac{fv_1^{-p'}}{V_1} G_0 \lesssim \left(\int_{\Delta(\xi_k)} v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} \frac{v_1^{-p'} G_0}{V_1}\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Gamma_k)}. \tag{3.4.14}$$

Обозначим $\gamma' := \min\{p', s'\}$ и рассмотрим неравенство

$$\left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} hu\right)^{p'} dt\right)^{1/p'} \leqslant C\left(\int_0^\infty h^{\gamma'}\right)^{1/\gamma'} \tag{3.4.15}$$

с $h := G_0 v_1^{-p'/\gamma'} V_1^{1/p'-1/\gamma'}$ и $u := v_1^{-p'/\gamma} V_1^{-1/\gamma-1/p'}$. В силу следствия 2.1 (см. константу (2.4.5))

$$C \approx A := \sup_{t>0}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} u^\gamma\right)^{1/\gamma}.$$

Можно показать, что

$$\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} u^\gamma = \int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} v^{-p'} V_1^{-1-\gamma/p'} \lesssim V_1^{-\gamma/p'}(t),$$

откуда вытекает $A \lesssim 1$. Объединяя это с (3.4.14), получаем

$$\int_{\Delta(\xi_k)} \frac{fv_1^{-p'}}{V_1} G_0 \lesssim \left(\int_{\Delta(\xi_k)} G_0^{\gamma'}(t) V_1^{\gamma'/p'-1} v_1^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/\gamma'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Gamma_k)}.$$

Принимая во внимание, что $\gamma = \gamma'/(\gamma'-1) = \max\{p, s\}$, произведем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \sum_k \int_{\Delta(\xi_k)} f(y) v_1^{-p'}(y) V_1^{-1}(y) G_0(y)\, dy \\
&\lesssim \sum_k \left(\int_{\Delta(\xi_k)} G_0^{\gamma'}(t) V_1^{\gamma'/p'-1} v_1^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/\gamma'} \|f\|_{W^1_{p,s}(\Gamma_k)} \\
&\leqslant \left(\sum_k \int_{\Delta(\xi_k)} G_0^{\gamma'}(t) V_1^{\gamma'/p'-1} v_1^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/\gamma'} \left(\sum_k \|f\|^\gamma_{W^1_p(\Gamma_k)}\right)^{1/\gamma} \\
&\lesssim \left(\int_0^\infty G_0^{\gamma'}(t) V_1^{\gamma'/p'-1} v_1^{-p'}(t)\, dt\right)^{1/\gamma'} \|f\|_{W^1_{p,s}} = \left(\begin{cases} \mathbf{G}_p^-(g), & s \leqslant p, \\ \mathbf{G}_s^-(g), & p \leqslant s \end{cases}\right) \|f\|_{W^1_{p,s}},
\end{aligned}$$

используя неравенство Гёльдера с показателями p' и p, неравенство Йенсена со степенью $\gamma/\min\{p, s\}$, а также тот факт, что никакая из точек $(0, \infty)$ не принадлежит более чем трем Γ_k, и интервалы (ξ_k^-, ξ_k^+) не пересекаются.

Похожая аргументация, но с использованием V_1^+ вместо V_1^- в (3.4.9), приводит к оценкам сверху в (i) и (ii) с включениями функционалов $\mathbf{G}_p^+(g)$ и $\mathbf{G}_s^+(g)$. Таким образом, требуемые оценки на $\mathbf{J}_{p,s}(g)$ в (i) в (ii) доказаны.

Чтобы продемонстрировать справедливость нижних оценок в (i) и (ii), возьмем η_k (см. (2.1.7)) и обозначим $\eta_k^* = \min(\eta_k^+,\ \eta_{k+1})$. Рассмотрим пять соседник точек: η_{k-2}, η_{k-1}, η_k, η_{k+1}, η_{k+1}^*, и положим

$$H_{k,\gamma}(z) := \int_z^{\eta_{k+1}} g(\tau)\left(\int_{\eta_{k-2}}^\tau v_1^{-p'}\right)^{(p-\gamma)/p} d\tau,$$

$$f_{k,\gamma}(t) := \chi_{[\eta_{k-2},\eta_{k+1}]}(t)\int_{\eta_{k-2}}^{t} H_{k,\gamma}^{\gamma'-1}(z)v_1^{-p'}(z)\,dz,$$

где $\gamma = \min\{p, s\}$. На интервале $[\eta_{k-2}, \eta_{k+1}^*]$ определим функцию

$$h_{k,\gamma}(t) := \begin{cases} f_{k,\gamma}(t), & t \notin [\eta_{k+1}, \eta_{k+1}^*], \\ f_{k,\gamma}(\eta_{k+1})\Big(\displaystyle\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} v_1^{-p'}\Big)^{-1}\displaystyle\int_{t}^{\eta_{k+1}^*} v_1^{-p'}, & t \in [\eta_{k+1}, \eta_{k+1}^*], \end{cases}$$

и обозначим

$$\mu_k := \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} g(t) f_{k,s}(t)\,dt.$$

Запишем

$$\|h_{k,\gamma}v_0\|_s^s = \sum_{i=1}^{4} \varrho_{i,\gamma}, \qquad \|h_{k,\gamma}'v_1\|_p^\gamma \approx \sum_{i=5}^{6} \varrho_{i,\gamma}^{\gamma/p},$$

где

$$\begin{aligned} \varrho_{i,\gamma} &:= \int_{\eta_{k-3+i}}^{\eta_{k-2+i}} v_0^s(t)\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{t} H_{k,\gamma}^{\gamma'-1}(z)v_1^{-p'}(z)\,dz\Big)^s dt \qquad i = 1, 2, 3, \\ \varrho_{4,\gamma} &:= f_{k,\gamma}^s(\eta_{k+1})\Big(\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} v_1^{-p'}\Big)^{-s}\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} v_0^s(t)\Big(\int_{t}^{\eta_{k+1}^*} v_1^{-p'}\Big)^s dt, \\ \varrho_{5,\gamma} &:= \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} H_{k,\gamma}^{\gamma'p/\gamma}(t)v_1^{-p'}(t)\,dt, \\ \varrho_{6,\gamma} &:= f_{k,\gamma}^p(\eta_{k+1})\Big(\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} v_1^{-p'}\Big)^{1-p}. \end{aligned}$$

Покажем, что все $\varrho_{i,\gamma}$ можно оценить сверху величиной $I_{k,\gamma} := \varrho_{5,\gamma}$, зависящей от k. С помощью неравенства Гёльдера с p и p', применяя оценку

$$\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} v_1^{-p'} = \int_{\eta_j}^{\eta_j^+} v_1^{-p'} \leqslant \int_{\eta_{j+1}^-}^{\eta_{j+1}^+} v_1^{-p'} = 2\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} v_1^{-p'} \tag{3.4.16}$$

(которая следует из (3.4.4) с $j = k$) и учитывая (3.4.5), находим, что

$$\begin{aligned} \varrho_{i,\gamma} &\leqslant I_{k,\gamma}^{s/p}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k-2+i}} v_1^{-p'}\Big)^{s/p'}\int_{\eta_{k-3+i}}^{\eta_{k-2+i}} v_0^s \lesssim I_{k,\gamma}^{s/p}, \qquad i = 1, 2, 3, \\ \varrho_{4,\gamma} &\leqslant I_{k,\gamma}^{s/p}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} v_1^{-p'}\Big)^{s/p'}\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} v_0^s \lesssim I_{k,\gamma}^{s/p}, \\ \varrho_{6,\gamma}^{\gamma/p} &\leqslant I_{k,\gamma}^{\gamma/p}\Big(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} v_1^{-p'}\Big)^{\gamma/p'}\Big(\int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+1}^*} v_1^{-p'}\Big)^{-\gamma/p'} \lesssim I_{k,\gamma}^{\gamma/p}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$\|h_{k,\gamma}v_0\|_s^s \lesssim I_{k,\gamma}^{s/p}, \qquad \|h_{k,\gamma}'v_1\|_p^\gamma \lesssim I_{k,\gamma}^{\gamma/p}.$$

Если $p \leqslant s$, то $H_{k,\gamma}(z) = H_{k,p}(z) = \int_z^{\eta_{k+1}} g(\tau)\,d\tau$ и, следовательно,

$$I_{k,\gamma} = I_{k,p} = \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}}\Big(\int_t^{\eta_{k+1}} g\Big)^{p'} v_1^{-p'}(t)\,dt =: \lambda_k. \tag{3.4.17}$$

Так как $H_{k,\gamma}(\eta_{k+1}) = 0$, то
$$H_{k,\gamma}^{\gamma'}(z) = \int_z^{\eta_{k+1}} d[-H_{k,\gamma}^{\gamma'}(t)]$$
и в силу неравенства Минковского для $s \leqslant p$
$$\begin{aligned} I_{k,\gamma}^{\gamma/p} = I_{k,s}^{s/p} &= \left(\int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_z^{\eta_{k+1}} d[-(H_{k,s}^{s'}(t)]\right)^{p/s} v_1^{-p'}(z)\,dz\right)^{s/p} \\ &\leqslant \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{t} v_1^{-p'}\right)^{s/p} d[-H_{k,s}^{s'}(t)] \\ &= s' \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} g(t) \int_{\eta_{k-2}}^{t} v_1^{-p'}\, H_{k,s}^{s'-1}(t)\,dt \lesssim \mu_k. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Определим функцию $F_{n,\gamma}^{-}(t) := \sum_{k=-n}^{n} h_{k,\gamma}(t)$. Так как все $h_{k,\gamma}$ являются абсолютно непрерывными и имеют компактные носители, то $F_{n,\gamma}^{-} \in \mathring{W}_{p,s}^{1}$. Учитывая то, что возможно пересечение не более чем трех носителей $h_{k,\gamma}$, мы получаем, принимая во внимание (3.4.17) и (3.4.18),
$$\|F_{n,\gamma}^{-}v_0\|_s^s \lesssim \sum_{k=-n}^{n} \|h_{k,\gamma}v_0\|_s^s \lesssim \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k\right)^{s/p}, & p \leqslant s, \\ \sum\limits_{k=-n}^{n} \mu_k, & s \leqslant p, \end{cases}$$
$$\|(F_{n,\gamma}^{-})'v_1\|_p^{\gamma} \lesssim \sum_{k=-n}^{n} \|h'_{k,\gamma}v_1\|_p^{\gamma} \lesssim \begin{cases} \sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k, & p \leqslant s, \\ \sum\limits_{k=-n}^{n} \mu_k, & s \leqslant p, \end{cases}$$
откуда
$$\|F_{n,\gamma}^{-}\|_{W_{p,s}^{1}} \lesssim \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k\right)^{1/p}, & p \leqslant s, \\ \left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \mu_k\right)^{1/s}, & s \leqslant p. \end{cases} \tag{3.4.19}$$

Интеграл $\int_0^\infty f(t)g(t)\,dt$ оценивается следующим образом: если $p \leqslant s$, то
$$\begin{aligned} \int_0^\infty F_{n,p}^{-}(t)g(t)\,dt &\geqslant \sum_{k=-n}^{n} \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} f_{k,p}(t)g(t)\,dt \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} g(t)\left(\int_{\eta_{k-2}}^{t} \left(\int_z^{\eta_{k+1}} g\right)^{p'-1} v_1^{-p'}(z)\,dz\right) dt \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_z^{\eta_{k+1}} g\right)^{p'} v_1^{-p'}(z)\,dz = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k; \end{aligned}$$
для $s \leqslant p$ имеем
$$\int_0^\infty F_{n,s}^{-}(t)g(t)\,dt \gtrsim \sum_{k=-n}^{n} \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} f_{k,s}(t)g(t)\,dt = \sum_{k=-n}^{n} \mu_k.$$

В сочетании с (3.4.19) это дает

$$\mathbf{J}_{p,s}(g) \gtrsim \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k\right)^{1/p'}, & p \leqslant s, \\ \left(\sum\limits_{k=-n}^{n} \mu_k\right)^{1/s'}, & s \leqslant p. \end{cases}$$

Поскольку

$$\lambda_k \geqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left(\int_x^{\eta_{k+1}} g\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx \geqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left(\int_x^{a^{-1}(x)} g\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx,$$

для $p \leqslant s$ при $n \to \infty$ получаем

$$\mathbf{J}_{p,s}(g) \gtrsim \left(\int_0^\infty \left(\int_x^{a^{-1}(x)} g\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'} = \mathbf{G}_p^-(g), \qquad p \leqslant s.$$

По определению μ_k и $f_{k,\gamma}$, меняя порядок интегрирования, находим

$$\mu_k = \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_z^{\eta_{k+1}} g\right) H_{k,s}^{s'-1}(z) v_1^{-p'}(z)\,dz.$$

Для $s \leqslant p$ справедливо

$$\begin{aligned} H_{k,s}(z) &= \int_z^{\eta_{k+1}} g(\tau)\left(\int_{\eta_{k-2}}^{\tau} v_1^{-p'}\right)^{(p-s)/p} d\tau \\ &\geqslant \int_z^{\eta_{k+1}} g(\tau)\left(\int_{\eta_{k-2}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{(p-s)/p} d\tau = \left(\int_z^{\eta_{k+1}} g\right)\left(\int_{\eta_{k-2}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{(p-s)/p}. \end{aligned}$$

Отсюда в сочетании с

$$\frac{(p-s)(s'-1)}{p} = \frac{(p-s)}{p'(s-1)(p-1)} = \frac{s'-p'}{p'}$$

получаем

$$\mu_k \geqslant \int_{\eta_{k-2}}^{\eta_{k+1}} \left(\int_z^{\eta_{k+1}} g\right)^{s'} \left(\int_{\eta_{k-2}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{s'/p'-1} v_1^{-p'}(z)\,dz.$$

Так как $\eta_{k-1} \leqslant z \leqslant \eta_k$, то $\int_{\eta_{k-2}}^{z} v_1^{-p'} \geqslant \int_{z^-}^{z} v_1^{-p'}$ и $a^{-1}(z) \leqslant \eta_{k+1}$, поэтому

$$\begin{aligned} \mu_k &\geqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left(\int_z^{\eta_{k+1}} g\right)^{s'} \left(\int_{\Delta^-(z)} v_1^{-p'}\right)^{s'/p'-1} v_1^{-p'}(z)\,dz \\ &\gtrsim \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left(\int_z^{a^{-1}(z)} g\right)^{s'} V^{s'/p'-1}(z) v_1^{-p'}(z)\,dz. \end{aligned}$$

Для $s \leqslant p$ это приводит к оценке

$$\mathbf{J}_{p,s}(g) \gtrsim \left(\int_0^\infty \left(\int_z^{a^{-1}(z)} g\right)^{s'} V^{s'/p'-1}(z) v_1^{-p'}(z)\,dz\right)^{1/s'} = \mathbf{G}_s^-(g).$$

Похожим способом с помощью точек ζ_k (см. (2.1.8)) получается оценка

$$\mathbf{J}_{p,s}(g) \gtrsim \begin{cases} \mathbf{G}_p^+(g), & p \leqslant s, \\ \mathbf{G}_s^+(g), & s \leqslant p. \end{cases}$$

Таким образом, требуемые оценки снизу на $\mathbf{J}_{p,s}(g)$ в (i) и (ii) доказаны.

Замечание 3.12. (i) Доказательство верхней оценки $\mathbf{J}_{p,s}(g) \lesssim \mathbf{G}_p^\pm(g)$ в случае $s \leqslant p$ верно для всех $s > 0$.

(ii) Случай $p = s$, представленый в п. 3.2, улучшает результат теоремы 2.1 из [36], где используются более сложные предельные функции, чем a, b.

(iii) Так как $\alpha^\gamma + \beta^\gamma \approx (\alpha+\beta)^\gamma$ для $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$, то

$$\mathbf{G}_a^+(g) + \mathbf{G}_a^-(g) \approx \mathbf{G}_a(g), \qquad \mathbf{G}_p^+(g) + \mathbf{G}_p^-(g) \approx \mathbf{G}_p(g), \tag{3.4.20}$$

где

$$\mathbf{G}_s(g) := \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} g(t)\,dt\right)^{s'} v_1^{-p'}(x) V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\right)^{1/s'},$$

и

$$\mathbf{G}_p(g) = \left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} g(t)\,dt\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'}.$$

Следствие 3.5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $0 < s < \infty$ *и* C *– наилучшая константа в неравенстве* (3.4.1). *Тогда для* $p \leqslant s$ *выполнено* $C \gtrsim \mathscr{C}$, *где* $\mathscr{C}$ *– наилучшая константа в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} g(t)\,dt\right)^{p'} v_1^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'} \leqslant \mathscr{C} \left\|\frac{g}{w}\right\|_{q'}. \tag{3.4.21}$$

Последнее неравенство в силу двойственности эквивалентно

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{\Delta(y)} f(z) v_1^{-1}(z)\,dz\right)^q w^q(y)\,dy\right)^{1/q} \leqslant \mathscr{C}\|f\|_p. \tag{3.4.22}$$

В случае $s \leqslant p$ *верно, что* $C \lesssim \mathscr{C}$.

Последнее утверждение вытекает из теоремы 3.10 и замечания 3.12 (i) в силу того, что

$$\sup_{\substack{f \in \mathring{W}^1_{p,s} \\ \|f\|_{W^1_{p,s}} \neq 0}} \frac{\|fw\|_q}{\|f\|_{W^1_{p,s}}} = \sup_{\substack{f \in \mathring{W}^1_{p,s} \\ \|f\|_{W^1_{p,s}} \neq 0}} \sup_{\substack{0 \leqslant g \in L^{q'}_{1/w} \\ \|g/w\|_{q'} \neq 0}} \frac{\int_0^\infty f(t) g(t)\,dt}{\|f\|_{W^1_{p,s}} \|g/w\|_{q'}} = \sup_{\substack{0 \leqslant g \in L^{q'}_{1/w} \\ \|g/w\|_{q'} \neq 0}} \frac{\mathbf{J}_{p,s}(g)}{\|g/w\|_{q'}}.$$

Утверждение, аналогичное следствию 3.5, связывает (3.4.1) и наилучшую константу $\mathbb{C}$ неравенства

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{b^{-1}(x)}^{a^{-1}(x)} g\right)^{s'} v_1^{-p'}(x) V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\right)^{1/s'} \leqslant \mathbb{C}\|g/w\|_{q'},$$

которое эквивалентно

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{\Delta(y)} f v_1^{-p'/s'} V_1^{1/p'-1/s'}\right)^q w^q(y)\,dy\right)^{1/q} \leqslant \mathbb{C}\|f\|_s. \tag{3.4.23}$$

Следствие 3.6. *Пусть* $q > 1$. *Если* $1 < p \leqslant s$, *то* $C \lesssim \mathbb{C}$; *и если* $1 < s \leqslant p$, *то* $\mathbb{C} \lesssim C$.

3.4.2. Теоремы вложения типа Соболева. Здесь приведены точные условия выполнения неравенства (3.4.1) для различных случаев соотношений параметров p, q и s.

Теорема 3.11. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$ *и* $0 < s \leqslant q$. *Тогда неравенство* (3.4.1) *выполнено для всех* $f \in \mathring{W}^1_{p,s}$, *если и только если* $\mathscr{A} < \infty$, *где*

$$\mathscr{A} := \sup_{t>0} \biggl(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\biggr)^{1/q} \biggl(\int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}\biggr)^{1/p'}.$$

Кроме того, $C \approx \mathscr{A}^{\pm}$, *где константа* C *наилучшая в* (3.4.1).

Доказательство. *Необходимость.* Для $t > 0$ зафиксируем t^+, t^-, $(t^-)^-$ и определим функцию f_t следующим образом:

$$f_t(y) := \begin{cases} 0, & y \notin [(t^-)^-, t^+], \\ \displaystyle\int_{(t^-)^-}^{y} v_1^{-p'}, & y \in [(t^-)^-, t^-], \\ \displaystyle\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}, & y \in [t^-, t], \\ \displaystyle\int_{y}^{t^+} v_1^{-p'} \biggl(\int_t^{t^+} v_1^{-p'}\biggr)^{-1} \int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}, & y \in [t, t^+]. \end{cases}$$

Так как $f_t \in \mathring{W}^1_{p,s}$, то

$$\|f_t w\|_q \leqslant C\|f_t\|_{W^1_{p,s}}, \tag{3.4.24}$$

и, сужая область интегрирования в левой части (3.4.24) до $[t^-, t]$, получаем

$$\biggl(\int_{t^-}^{t} w^q\biggr)^{1/q} \int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'} \leqslant C[\|f_t v_0\|_s + \|f_t' v_1\|_p].$$

Запишем

$$\begin{aligned} \|f_t v_0\|_s^s = {} & \int_{(t^-)^-}^{t^-} \biggl(\int_{(t^-)^-}^{y} v_1^{-p'}\biggr)^s v_0^s(y)\,dy + \biggl(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\biggr)^s \int_{t^-}^{t} v_0^s \\ & + \biggl(\frac{\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}}{\int_t^{t^+} v_1^{-p'}}\biggr)^s \int_t^{t^+} \biggl(\int_y^{t^+} v_1^{-p'}\biggr)^s v_0^s(y)\,dy \\ =: {} & I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

и

$$\|f_t' v_1\|_p^p = \int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'} + \biggl(\frac{\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}}{\int_t^{t^+} v_1^{-p'}}\biggr)^p \int_t^{t^+} v_1^{-p'} =: I_4 + I_5.$$

Учитывая (3.4.4), (3.4.5) и (3.4.7), находим

$$\begin{aligned} I_1 & \leqslant \int_{(t^-)^-}^{t^-} v_0^s \biggl(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\biggr)^s \\ & \leqslant \int_{\Delta(t^-)} v_0^s \biggl(\int_{\Delta(t^-)} v_1^{-p'}\biggr)^{s/p'} \biggl(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\biggr)^{s/p} = \biggl(\int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'}\biggr)^{s/p}, \end{aligned}$$

$$I_2 \leqslant \left(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\right)^{s/p} \left[\left(\int_{(t^-)^-}^{(t^-)^+} v_1^{-p'}\right)^{s/p'} \int_{t^-}^{t^+} v_0^s\right] \lesssim \left(\int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'}\right)^{s/p},$$

$$I_3 \leqslant \left(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\right)^{s} \int_{t}^{t^+} v_0^s = \left(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\right)^{s/p} \left(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\right)^{s/p'} \int_{t}^{t^+} v_0^s$$

$$\lesssim \left(\int_{(t^-)^-}^{t^-} v_1^{-p'}\right)^{s/p} \left(\int_{t^-}^{t^+} v_1^{-p'}\right)^{s/p'} \int_{t^-}^{t^+} v_0^s \leqslant \left(\int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'}\right)^{s/p}.$$

Поэтому

$$\|f_t v_0\|_s \lesssim \left(\int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p}.$$

Более того, в силу (3.4.7)

$$I_5 \leqslant 2^{p-1} \int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'}.$$

Объединяя оценки выше, получаем

$$\left(\int_{t^-}^{t} w^q\right)^{1/q} \int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'} \lesssim C \left(\int_{\Delta^-(t^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p}.$$

Поскольку $t = a^{-1}(t^-)$, то

$$\left(\int_{t^-}^{a^{-1}(t^-)} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta(t^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \lesssim C.$$

Так как $t > 0$ произвольное и a – биекция, имеем

$$\left(\int_{t}^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \lesssim C. \tag{3.4.25}$$

Применяя тестовую функцию g_t вида

$$g_t(y) := \begin{cases} 0, & y \notin [t^-, (t^+)^+], \\ \int_{t^-}^{y} v_1^{-p'} \left(\int_{t^-}^{t} v_1^{-p'}\right)^{-1} \int_{t^+}^{(t^+)^+} v_1^{-p'}, & y \in [t^-, t], \\ \int_{t^+}^{(t^+)^+} v_1^{-p'}, & y \in [t, t^+], \\ \int_{y}^{(t^+)^+} v_1^{-p'}, & y \in [t^+, (t^+)^+], \end{cases}$$

аналогично получаем, что

$$\left(\int_{t}^{t^+} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta^+(t^+)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \lesssim C,$$

откуда

$$\left(\int_{b^{-1}(t)}^{t} w^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'} \lesssim C.$$

Отсюда и из (3.4.25) извлекаем требуемую оценку снизу на C.

Достаточность. Если $0<s\leqslant p\leqslant q<\infty$ и $p>1$, то требуемая оценка $C\lesssim\mathscr{A}$ сверху вытекает из следствия 3.5 и теоремы 2.3.

Если $1<p\leqslant s\leqslant q<\infty$, то по определению 2.3 соответствующая фарватер-функция $\sigma(t)$ удовлетворяет условиям $a(t)<\sigma(t)<b(t)$ и

$$\int_{a(t)}^{\sigma(t)} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx=\int_{\sigma(t)}^{b(t)} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx \tag{3.4.26}$$

для всех $t>0$ (см. неравенство (3.4.23)). Используя этот факт, а также теорему 2.3 и следствие 3.6, приходим к

$$C\lesssim\sup_{t>0}\biggl(\int_{b^{-1}(\sigma(t))}^{a^{-1}(\sigma(t))} w^q\biggr)^{1/q}\biggl(\int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\biggr)^{1/s'}. \tag{3.4.27}$$

Покажем, что для всех $\gamma>0$

$$L:=\int_{\Delta(x)} v_1^{-p'}(t)V_1^{\gamma-1}(t)\,dt\approx V_1^{\gamma}(x)=:R. \tag{3.4.28}$$

Оценка тривиальна для $\gamma=1$. Условие (3.4.7) приводит к нижней оценке на $L\gtrsim R$ в случае $0<\gamma<1$ и к верхней оценке $L\lesssim R$ для $\gamma>1$. Для доказательства обратных оценок для всех $\gamma>0$ заметим, что

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}\geqslant\int_{x^-}^{t^+} v_1^{-p'}\geqslant\int_{x^-}^{t} v_1^{-p'}, && t\in[x^-,x],\\ &\int_{\Delta(t)} v_1^{-p'}\geqslant\int_{t^-}^{x^+} v_1^{-p'}\geqslant\int_{t}^{x^+} v_1^{-p'}, && t\in[x,x^+].\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

Интегрированием по частям получаем, что

$$\begin{aligned}\int_{\Delta^-(x)} v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_{x^-}^{t} v_1^{-p'}\biggr)^{\gamma-1}dt&=\frac{1}{\gamma}\int_{x^-}^{x} d\biggl(\int_{x^-}^{t} v_1^{-p'}\biggr)^{\gamma}=\frac{1}{\gamma}\biggl(\int_{x^-}^{x} v_1^{-p'}\biggr)^{\gamma}=\frac{1}{\gamma2^\gamma}V_1^\gamma(x),\\ \int_{\Delta^+(x)} v_1^{-p'}(t)\biggl(\int_{t}^{x^+} v_1^{-p'}\biggr)^{\gamma-1}dt&=\frac{1}{\gamma}\int_{x}^{x^+} d\biggl[-\biggl(\int_{t}^{x^+} v_1^{-p'}\biggr)^{\gamma}\biggr]=\frac{1}{\gamma}\biggl(\int_{x}^{x^+} v_1^{-p'}\biggr)^{\gamma}=\frac{1}{\gamma2^\gamma}V_1^\gamma(x).\end{aligned}$$

А это влечет оценку $L\lesssim R$ в случае $0<\gamma<1$ и неравенство $L\gtrsim R$ для $\gamma>1$. Только что доказанная эквивалентность (3.4.28) означает, что мы можем считать $\sigma(x)=x$ и использовать свойство (3.4.4) для $\sigma(x)=x$ вместо (3.4.26), потому что в силу (3.4.26), (3.4.28) и (3.4.4)

$$\int_{a(t)}^{\sigma(t)} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{a(t)}^{b(t)} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\approx V_1^{s'/p'}(t)=2^{s'/p'}\biggl(\int_{\Delta^-(t)} v_1^{-p'}\biggr)^{s'/p'}$$

и, аналогично,

$$\int_{\sigma(t)}^{b(t)} v_1^{-p'}(x)V_1^{s'/p'-1}(x)\,dx\approx\biggl(\int_{\Delta^+(t)} v_1^{-p'}\biggr)^{s'/p'}.$$

Другими словами, биссектриса $\sigma(x)=x$ ведет себя, как и фарватер $\sigma(x)$, подчиненный (3.4.26). В комбинации с (3.4.27) это дает $C\lesssim\mathscr{A}$.

Замечание 3.13. (i) Оценка $C\gtrsim\mathscr{A}$ верна для всех $1<p<\infty$ и $0<s,q<\infty$.

(ii) Если $s>1$, то необходимость следует из теоремы 3.10 (см. также следствия 3.5 и 3.6) и теоремы 2.3 с $\sigma(x)=x$.

Теорема 3.12. *Пусть* $1 < p \leqslant q < s < \infty$. *Определим* γ *таким образом, чтобы* $1/\gamma = 1/q - 1/s$. *Тогда неравенство* (3.4.1) *выполнено для всех* $f \in \mathring{W}^1_{p,s}$, *если* $\mathscr{B}_\gamma(s) < \infty$, *где*

$$\mathscr{B}_\gamma(s) := \left(\int_0^\infty V_1^{\gamma/p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{\gamma/s} w^q(t)\,dt\right)^{1/\gamma}$$

и $C \lesssim \mathscr{B}_\gamma(s)$.

Доказательство. Результат следует из следствия 3.6, оценки (3.4.28) и теоремы 2.3 в терминах эквивалентного фарватера $\sigma(x) = x$ (см. выше). Руководствуясь способом доказательства результатов п. 2.3 для обобщенного оператора Харди–Стеклова (2.1.4), вместо фарватера можно выбрать любую функцию $\sigma(x)$, удовлетворяющую условию $a(x) < \sigma(x) < b(x)$ и не обязательно подчиняющуюся (3.4.26). Этого оказывается достаточно для формулировки верхних оценок. Следовательно, так как $a(x) < x < b(x)$, $x > 0$, можно положить $\sigma(x) = x$ и воспользоваться теоремой 2.3 для получения верхней оценки $C \lesssim \mathscr{B}_\gamma(s)$.

Замечание 3.14. Нижняя оценка на C в случае $1 < p \leqslant q < s < \infty$ следует из замечания 3.13 (i).

Теорема 3.13. *Предположим, что* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$, $s > 0$ *и определим* r *и* γ *таким образом, что* $1/r = 1/q - 1/p$ *и* $1/\gamma = 1/q - 1/s$ *соответственно. Положим*

$$\mathscr{B}_r := \left(\int_0^\infty V_1^{r/p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}.$$

(i) *Пусть* $0 < s \leqslant p$. *Тогда неравенство* (3.4.1) *выполнено для всех* $f \in \mathring{W}^1_{p,s}$, *если* $\mathscr{B}_r < \infty$ *и* $C \lesssim \mathscr{B}_r$. *Обратно, если выполнено* (3.4.1) *и* $s > 1$, *то* $\mathscr{B}_\gamma(s) \lesssim C$.

(ii) *Если* $1 < p \leqslant s$, *то* $\mathscr{B}_r \lesssim C$, *что означает необходимость условия* $\mathscr{B}_r < \infty$ *для выполнения* (3.4.1). *Если, кроме того,* $q > 1$, *то условия* $\mathscr{B}_\gamma(s) < \infty$ *достаточно для* (3.4.1) *и* $C \lesssim \mathscr{B}_\gamma(s)$.

Доказательство. (i) *Достаточность*. Запишем следующее разложение $(0, \infty)$:

$$(0,\infty) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Delta(\xi_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\xi_k^-, \xi_k^+].$$

Тогда $\operatorname{mes}\{\Delta(\xi_i) \cap \Delta(\xi_j)\} = 0$, если $i \neq j$. Обозначим $\Delta_k := \Delta(\xi_k) \equiv \Delta_k^- \cup \Delta_k^+$, где $\Delta_k^- := [\xi_k^-, \xi_k]$ и $\Delta_k^+ := [\xi_k, \xi_k^+]$. Верно, что

$$\|fw\|_q^q = \sum_k \|fw\|_{q,\Delta_k}^q = \sum_k (\|fw\|_{q,\Delta_k^-}^q + \|fw\|_{q,\Delta_k^+}^q).$$

Положим $f_k^- := f(\xi_k^-)$ и $f_k^+ := f(\xi_k^+)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|fw\|_{q,\Delta_k^-} &\leqslant \|(f - f_k^-)w\|_{q,\Delta_k^-} + |f_k^-|\|w\|_{q,\Delta_k^-},\\
\|fw\|_{q,\Delta_k^+} &\leqslant \|(f - f_k^+)w\|_{q,\Delta_k^+} + |f_k^+|\|w\|_{q,\Delta_k^+}.
\end{aligned}$$

В силу критерия Мазьи–Розина для неравенства Харди и согласно (3.4.7)

$$\|(f - f_k^-)w\|_{q,\Delta_k^-} = \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k} \left|\int_{\xi_k^-}^x f'\right|^q w^q(x)\,dx\right)^{1/q}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k}\left(\int_{\xi_k^-}^{t} v_1^{-p'}\right)^{r/p'}\left(\int_t^{\xi_k} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f'v_1\|_{p,\Delta_k^-}\\
&\leqslant \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k}\left(\int_{a(t)}^{t} v_1^{-p'}\right)^{r/p'}\left(\int_t^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f'v_1\|_{p,\Delta_k^-}. \qquad (3.4.30)
\end{aligned}
$$

Аналогично,

$$
\|(f_k^+ - f)w\|_{q,\Delta_k^+} \lesssim \left(\int_{\xi_k}^{\xi_k^+}\left(\int_t^{b(t)} v_1^{-p'}\right)^{r/p'}\left(\int_{b^{-1}(t)}^{t} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f'v_1\|_{p,\Delta_k^+}. \qquad (3.4.31)
$$

Из (3.4.8) следует, что

$$
\begin{aligned}
|f_k^-|\|w\|_{q,\Delta_k^-} &\lesssim \left(\int_{\Delta^-(\xi_k^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k} w^q\right)^{1/q}\|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta^-(\xi_k^-))}\\
&\lesssim \left(\int_{\Delta^-(\xi_k^-)} v_1^{-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k}\left(\int_t^{\xi_k} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta^-(\xi_k^-))}.
\end{aligned}
$$

Так как $\xi_k^- \in \Delta(t)$, если $t \in \Delta^-(\xi_k)$, то с учетом (3.4.7)

$$
|f_k^-|\|w\|_{q,\Delta_k^-} \lesssim \left(\int_{\xi_k^-}^{\xi_k}\left(\int_{\Delta^-(t)} v_1^{-p'}\right)^{r/p'}\left(\int_t^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta^-(\xi_k^-))}. \qquad (3.4.32)
$$

Аналогично,

$$
|f_k^+|\|w\|_{q,\Delta_k^+} \lesssim \left(\int_{\xi_k}^{\xi_k^+}\left(\int_{\Delta^+(t)} v_1^{-p'}\right)^{r/p'}\left(\int_{b^{-1}(t)}^{t} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f\|_{W^1_{p,s}(\Delta^+(\xi_k^+))}. \qquad (3.4.33)
$$

Верхние границы в оценках (3.4.30)–(3.4.33) можно оценить сверху через

$$
\left(\int_{\Delta(\xi_k)} V_1^{r/p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}\|f\|_{W^1_{p,s}(\Gamma_k)},
$$

где $\Gamma_k := \Delta(\xi_{k-1}) \cup \Delta(\xi_k) \cup \Delta(\xi_{k+1})$, т.е. любая точка $(0,\infty)$ может попасть не более чем в три Γ_k. Теперь, используя неравенство Гёльдера с показателями r/q и p/q, а также (3.4.2), получаем, что

$$
\begin{aligned}
\|fw\|_q^q &\lesssim \sum_k \Big[\|(f-f_k^-)w\|^q_{q,\Delta_k^-} + \|(f_k^+ - f)w\|^q_{q,\Delta_k^+} + |f_k^-|^q\|w\|^q_{q,\Delta_k^-} + |f_k^+|^q\|w\|^q_{q,\Delta_k^+}\Big]\\
&\lesssim \sum_k \left(\int_{\Delta(\xi_k)} V_1^{r/p'}(t)\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{q/r}\|f\|^q_{W^1_{p,s}(\Gamma_k)} \lesssim \mathscr{B}_r^q\|f\|^q_{W^1_{p,s}}.
\end{aligned}
$$

Поэтому $\|fw\|_q \lesssim \mathscr{B}_r\|f\|_{W^1_{p,s}}$.

Необходимость в (i) и *достаточность* в (ii) вытекает из следствий 3.5 и 3.6 на основе теоремы 2.3 с $\sigma(x) = x$ и с учетом (3.4.28).

Для доказательства *необходимости* в (ii) представим оценки

$$
C \gtrsim B^{\pm} := \left(\int_0^\infty V_1^{r/p'}(t)\left(\int_{\delta^{\pm}(t)} w^q\right)^{r/p} w^q(t)\,dt\right)^{1/r}, \qquad (3.4.34)
$$

где $\delta^-(t) := (t, a^{-1}(t))$ и $\delta^+ := (b^{-1}(t), t)$. Для этого построим две тестовые функции. Чтобы показать, что $C \gtrsim B^-$, определим функцию $\psi_k(t)$ для $k \in \mathbb{Z}$ на четырех соседних интервалах:

$$\psi_k(t) := \begin{cases} 0, & t \notin [\eta_{k-1}, \eta_{k+3}], \\ \Psi_k(t), & t \in [\eta_{k-1}, \eta_{k+2}], \\ \Psi_k(\eta_{k+2}) \Big(\int_{\eta_{k+2}}^{\eta_{k+3}} v_1^{-p'} \Big)^{-1} \int_t^{\eta_{k+3}} v_1^{-p'}, & t \in [\eta_{k+2}, \eta_{k+3}], \end{cases}$$

где

$$\Psi_k(t) := \int_{\eta_{k-1}}^t \Big(\int_z^{\eta_{k+2}} w^q \Big)^{r/(pq)} \Big(\int_{\eta_{k-1}}^z v_1^{-p'} \Big)^{r/(pq')} v_1^{-p'}(z)\,dz.$$

Применяя неравенство Гёльдера к $\Psi_k(t)$, получаем

$$\Psi_k(t) \leqslant \Bigg[\underbrace{\int_{\eta_{k-1}}^t \Big(\int_z^{\eta_{k+2}} w^q \Big)^{r/q} \Big(\int_{\eta_{k-1}}^z v_1^{-p'} \Big)^{r/q'} v_1^{-p'}(z)\,dz}_{=:\Omega_k(t)} \Bigg]^{1/p} \Bigg[\int_{\eta_{k-1}}^t v_1^{-p'} \Bigg]^{1/p'}. \tag{3.4.35}$$

Положим

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \psi_k(t).$$

Очевидно, что $f_n \in \mathring{W}^1_{p,s}$. Далее, оценим $\|f_n\|_{W^1_{p,s}}$ сверху и $\|f_n w\|_q$ снизу. Для этого запишем

$$\begin{aligned} \|\psi_k' v_1\|_p^p &= \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} \Big(\int_z^{\eta_{k+2}} w^q \Big)^{r/q} \Big(\int_{\eta_{k-1}}^z v_1^{-p'} \Big)^{r/q'} v_1^{-p'}(z)\,dz + \Psi_k^p(\eta_{k+2}) \Big(\int_{\eta_{k+2}}^{\eta_{k+3}} v_1^{-p'} \Big)^{-(p-1)} \\ &= \Omega_k(\eta_{k+2}) + \Psi_k^p(\eta_{k+2}) \Big(\int_{\eta_{k+2}}^{\eta_{k+3}} v_1^{-p'} \Big)^{-(p-1)}. \end{aligned}$$

Из (3.4.7) находим

$$\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} v_1^{-p'} = \sum_{j=0}^{2} \int_{\Delta^-(\eta_{k+j})} v_1^{-p'} \lesssim \int_{\Delta^-(\eta_{k+3})} v_1^{-p'}, \tag{3.4.36}$$

и в силу (3.4.35) получаем

$$|\Psi_k(\eta_{k+2})|^p \lesssim \Omega_k(\eta_{k+2}) \Big(\int_{\eta_{k+2}}^{\eta_{k+3}} v_1^{-p'} \Big)^{p-1}.$$

Отсюда

$$\|\psi_k' v_1\|_p^p \lesssim \Omega_k(\eta_{k+2}). \tag{3.4.37}$$

Кроме того,

$$\|\psi_k v_0\|_s^s \leqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} |\Psi_k v_0|^s + |\Psi_k(\eta_{k+2})|^s \int_{\eta_{k+2}}^{\eta_{k+3}} v_0^s,$$

и согласно (3.4.35)

$$\|\psi_k v_0\|_s^s \leqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} v_0^s(y) \Omega_k(y)^{s/p} \Big(\int_{\eta_{k-1}}^y v_1^{-p'} \Big)^{s/p'} dy + \Omega_k(\eta_{k+2})^{s/p} \Big(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} v_1^{-p'} \Big)^{s/p'} \int_{\eta_{k+2}}^{\eta_{k+3}} v_0^s. \tag{3.4.38}$$

Для любого $j \geqslant 0$ в силу (3.4.5) находим

$$\int_{\eta_{k+j-1}}^{\eta_{k+j}} \left(\int_{\eta_k}^{t} v_1^{-p'}\right)^{s/p'} v_0^s(t)\,dt \leqslant \int_{\eta_{k+j-1}}^{\eta_{k+j}} \left(\int_{\eta_k}^{\eta_{k+j}} v_1^{-p'}\right)^{s/p'} v_0^s(t)\,dt$$
$$\lesssim \int_{\eta_{k+j-1}}^{\eta_{k+j}} \left(\int_{\eta_{k+j-1}}^{\eta_{k+j}} v_1^{-p'}\right)^{s/p'} v_0^s(t)\,dt$$

(используя (3.4.7) $j-1$ раз)

$$\lesssim 1.$$

Представляя первый интеграл в правой части (3.4.38) в виде $\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} + \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} + \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_{k+2}}$, применяя предыдущую оценку и используя (3.4.36) во втором интеграле в правой части (3.4.38), получаем

$$\|\psi_k v_0\|_s^s \lesssim \Omega_k(\eta_{k+2})^{s/p}.$$

Заметим, что носители ψ_k и ψ_{k+4} не пересекаются. Отсюда, с учетом (3.4.37) и согласно неравенству Йенсена, принимая во внимание $s \geqslant p$, получаем

$$\|f_n\|_{W^1_{p,s}}^p \lesssim \sum_{k=-n}^{n} \Omega_k(\eta_{k+2}) =: \Phi_n. \tag{3.4.39}$$

Теперь получим нижнюю оценку на $\|f_n w\|_q$. Поскольку $r/(pq') + 1 = r/(p'q)$, то

$$\Psi_k(t) = \int_{\eta_{k-1}}^{t} \left(\int_{z}^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{r/(pq')} v_1^{-p'}(z)\,dz$$
$$\geqslant \left(\int_{t}^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \int_{\eta_{k-1}}^{t} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{r/(pq')} v_1^{-p'}(z)\,dz$$
$$= \left(\int_{t}^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \int_{\eta_{k-1}}^{t} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{r/(pq')} d\int_{\eta_{k-1}}^{z} v_1^{-p'}$$
$$\approx \left(\int_{t}^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/(pq)} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{t} v_1^{-p'}\right)^{r/(p'q)},$$

откуда и следует требуемая оценка снизу

$$\|\psi_k w\|_q^q \geqslant \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} |w\Psi_k|^q \gtrsim \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}} \left(\int_{t}^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/p} \left(\int_{\eta_{k-1}}^{t} v_1^{-p'}\right)^{r/p'} w^q(t)\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем $\|\psi_k w\|_q^q \gtrsim \Omega_k$. Следовательно,

$$\|f_n w\|_q^q \gtrsim \sum_{k=-n}^{n} \Omega_k = \Phi_n. \tag{3.4.40}$$

Поскольку $\|f_n w\|_q \leqslant C\|f_n\|_{W^1_{p,s}}$, $f_n \neq 0$, а также имеет место (3.4.39) и (3.4.40), то

$$\Phi_n^{1/q} \lesssim C\Phi_n^{1/p}.$$

Поэтому для всех n

$$\Phi_n^{1/r} \lesssim C. \tag{3.4.41}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\Omega_k(\eta_{k+2}) = \frac{p'}{q}\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_{k+2}}\left(\int_z^{\eta_{k+2}} w^q\right)^{r/p}\left(\int_{\eta_{k-1}}^{z} v_1^{-p'}\right)^{r/p'} w^q(z)\,dz$$
$$\gtrsim \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}}\left(\int_{\Delta^-(z)} v_1^{-p'}\right)^{r/p'}\left(\int_z^{a^{-1}(z)} w^q\right)^{r/p} w^q(z)\,dz.$$

Это означает, что $\lim_{n\to\infty}\Phi_n^{1/r} \gtrsim B^-$, и теперь (3.4.41) влечет верхнюю оценку на B^-.

Чтобы показать неравенство $C \gtrsim B^+$, положим для каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_k(t) := \int_t^{\zeta_{k+1}}\left(\int_{\zeta_{k-2}}^{z} w^q\right)^{r/(pq)}\left(\int_z^{\zeta_{k+1}} v_1^{-p'}\right)^{r/(pq')} v_1^{-p'}(z)\,dz$$

и определим функцию вида

$$g_n(t) := \sum_{k=-n}^{n}\nu_k(t),$$

где

$$\nu_k(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\zeta_{k-3}, \zeta_{k+1}],\\ \varphi_k(\zeta_{k-2})\left(\int_{\zeta_{k-3}}^{\zeta_{k-2}} v_1^{-p'}\right)^{-1}\int_{\zeta_{k-3}}^{t} v_1^{-p'}, & t \in [\zeta_{k-3}, \zeta_{k-2}],\\ \varphi_k(t), & t \in [\zeta_{k-2}, \zeta_{k+1}]. \end{cases}$$

Доказательство следует так же, как и для $C \gtrsim B^-$.

Замечание 3.15. (i) Если $p = s$, то $r = \gamma$ и $\mathscr{B}_r = \mathscr{B}_\gamma(p)$. Следовательно, результат теоремы 3.13 принимает форму критерия для неравенства (3.4.1), причем $C \approx \mathscr{B}_r$. Для $1 \leqslant q < p = s \leqslant \infty$ аналогичный результат был получен Р. Ойнаровым [32; теорема 3.1].

(ii) В случае $q > 1$ достаточность в доказательстве теоремы 3.13 (i) вытекает из следствия 3.5 и теоремы 2.3. Аналогично, для $q > 1$ необходимость в (ii) может быть доказана на основе следствия 3.5 и теоремы 2.3.

(iii) Если $1 < q < p = s < \infty$, то из двойственности (см. также теорему 2.9 и следствие 2.1)

$$\mathscr{B}_r \approx \left(\int_0^\infty\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)} w^q\right)^{r/q}\left(\int_{a(\rho(t))}^{b(\rho(t))} v_1^{-p'}\right)^{r/q'} v_1^{-p'}(t)\,dt\right)^{1/r} =: \mathscr{B}_r^*,$$

где ρ – двойственный фарватер, построенный по весу w^q и удовлетворяющий условиям $b^{-1}(y) < \rho(y) < a^{-1}(y)$ и (2.4.2). Устремляя $q \to 1$, приходим к соотношению

$$\mathbf{J}_{p,s}(w) \approx \mathscr{B}_{p'}^* = \mathbf{G}_p(w).$$

Список литературы

[1] D. E. Edmunds, W. D. Evans, *Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[2] A. Kufner, L.-E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.

[3] A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson, *The Hardy Inequality. About Its History and Some Related Results*, Vydavatelský Servis, Pilsen, 2007.

[4] M. A. Lifshits, W. Linde, *Approximation and Entropy Numbers of Volterra Operators with Application to Brownian Motion*, Mem. Amer. Math. Soc., **157**, no. 745, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[5] B. Opic, A. Kufner, *Hardy-Type Inequalities*, Pitman Res. Notes in Math. Ser., **219**, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1990.

[6] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure Applied Math., **129**, Boston, MA, Academic Press, 1988.

[7] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

[8] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 1. *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[10] Р. Ойнаров, "Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов", *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть* 16, Тр. МИАН, **204**, Наука, М., 1993, 240–250.

[11] S. Bloom, R. Kerman, "Weighted norm inequalities for operators of Hardy type", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113** (1991), 135–141.

[12] V. D. Stepanov, "Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators", *J. London Math. Soc.* (2), **50**:1 (1994), 105–120.

[13] G. Bennett, "Some elementary inequalities. III", *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **42**:166 (1991), 149–174.

[14] K.-G. Grosse-Erdmann, *The Blocking Technique*, *Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality*, Lecture Notes in Math., **1679**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[15] М. Л. Гольдман, "Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квазимонотонных функций", *Функциональные пространства*, *гармонический анализ*, *дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 115–143.

[16] E. Lomakina, V. Stepanov, "On the Hardy-type integral operators in Banach function spaces", *Publ. Mat.*, **42**:1 (1998), 165–194.

[17] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1985.

[18] G. J. Sinnamon, "Weighted Hardy and Opial-type inequalities", *J. Math. Anal. Appl.*, **160**:2 (1991), 434–445.

[19] G. Sinnamon, V. D. Stepanov, "The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$", *J. London Math. Soc.* (2), **54**:1 (1996), 89–101.

[20] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, "Весовые оценки операторов Римана–Лиувилля и приложения", *Функциональные пространства*, *приближения*, *дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 289–312.

[21] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984.

[22] L.-E. Persson, V. D. Stepanov, "Weighted integral inequalities with the geometric mean operator", *J. Inequal. Appl.*, **7**:5 (2002), 727–746.

[23] V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, "Alternative criteria for the boundedness of Volterra integral in Lebesgue spaces", *Math. Inequal. Appl.*, **12**:4 (2009), 873–889.

[24] P. J. Martin-Reyes, E. T. Sawyer, "Weighted inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order one and greater", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**:3 (1989), 727–733.

[25] В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, "Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования", *Функциональные пространства*, *гармонический анализ*, *дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 298–317.

[26] Е. Н. Ломакина, "Оценки аппроксимативных чисел одного класса интегральных операторов. I", *Сиб. матем. журн.*, **44**:1 (2003), 178–192.

[27] Е. Н. Ломакина, "Оценки аппроксимативных чисел одного класса интегральных операторов. II", *Сиб. матем. журн.*, **44**:2 (2003), 372–388.

[28] V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, "Hardy operator with variable limits on monotone functions", *J. Funct. Spaces Appl.*, **1**:1 (2003), 1–15.

[29] В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, "Об операторе геометрического среднего с переменными пределами интегрирования", *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 264–288.

[30] V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, "Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications", *Math. Inequal. Appl.*, **13**:3 (2010), 449–510.

[31] E. P. Ushakova, "Estimates for Schatten–von Neumann norms of Hardy–Steklov operators", *J. Approx. Theory*, **173** (2013), 158–175.

[32] R. Oinarov, "On weighted norm inequalities with three weights", *J. London Math. Soc.* (2), **48**:1 (1993), 103–116.

[33] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, "О неравенствах с мерами типа теорем вложения Соболева на открытых множествах действительной оси", *Сиб. матем. журн.*, **43**:4 (2002), 864–878.

[34] B. Ćurgus, T. T. Read, "Discreteness of the spectrum of second-order differential operators and associated embedding theorems", *J. Differential Equations*, **184**:2 (2002), 526–548.

[35] V. G. Maz'ya, "Conductor inequalities and criteria for Sobolev type two-weight imbeddings", *J. Comput. Appl. Math.*, **194**:1 (2006), 94–114.

[36] R. Oinarov, "Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space", *Complex Var. Elliptic Eq.*, **56**:10-11 (2011), 1021–1038.

[37] S. P. Eveson, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, "A duality principle in weighted Sobolev spaces on the real line", *Math. Nachr.*, **288**:8 (2015), 877–897.

[38] G. Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces*, Grad. Stud. in Math., **105**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[39] К. Т. Мынбаев, М. Отелбаев, *Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов*, Наука, М., 1988.

[40] Р. Ойнаров, М. Отелбаев, "Критерий дискретности спектра общего оператора Штурма–Лиувилля и теоремы вложения, связанные с ним", *Дифференц. уравнения*, **24**:4 (1988), 584–591.

[41] М. Г. Насырова, Е. П. Ушакова, "Операторы Харди–Стеклова и неравенства вложения типа Соболева", *Функциональные пространства, теория приближений, смежные разделы математического анализа*, Тр. МИАН, **293**, МАИК, М., 2016, 236–262.

[42] E. Gagliardo, "Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili", *Ricerche Mat.*, **7** (1958), 102–137.

[43] Л. Н. Слободецкий, "Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных", *Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та им. А. И. Герцена*, **197** (1958), 54–112.

[44] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996.

[45] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.

[46] H. P. Heinig, G. Sinnamon, "Mapping properties of integral averaging operators", *Studia Math.*, **129**:2 (1998), 157–177.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 22

Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова

Интегральные операторы Харди–Стеклова

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 25.07.2016. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mathnet.ru/spm/ e-mail: pupyrev@mi.ras.ru