Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 26

Издание выходит с 2006 года

Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 2

М. О. Катанаев

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Москва
2015

УДК 271.21
ББК 22.15
Л43

Катанаев М. О.

Л43 Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 2 – М.: МИАН, 2015. – 184 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 26).

ISBN 978-5-98419-066-4

Серия "Лекционные курсы НОЦ" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук (МИАН). В серии "Лекционные курсы НОЦ" публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в МИАН в рамках программы "Научно-образовательный центр МИАН".

Вашему вниманию предлагается сокращенный вариант лекций "Геометрические методы в математической физике", которые автор читал в течении 2008–2014 годов в Научно-образовательном центре МИАН.

Монография подготовлена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00687).

DOI: 10.4213/lkn26
DOI: 10.4213/book1604

ISBN 978-5-98419-066-4

Оглавление

8. Группы Ли **5**
8.1. Группы Ли и локальные группы Ли . . . 5
8.2. Действие группы слева . . . 10
8.3. Действие группы справа . . . 15
8.4. Присоединенное представление . . . 16
8.5. Группы Ли как (псевдо)римановы пространства . . . 18
8.6. Группы Ли как пространства Римана–Картана . . . 21
8.7. Группа аффинных преобразований прямой . . . 23
8.8. Гомоморфизмы групп Ли . . . 26
8.9. Экспоненциальное отображение для групп Ли . . . 29
8.10. Интегрирование на группах Ли . . . 31
8.11. Некоторые общие свойства групп Ли . . . 34
8.12. Полупрямое произведение групп . . . 36
8.13. Алгебры Ли . . . 38
8.13.1. Операции над алгебрами Ли . . . 40
8.13.2. Простые и полупростые алгебры Ли . . . 44
8.13.3. Квадратичные формы . . . 47
8.14. Группа Ли $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ . . . 48
8.14.1. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . . . 48
8.14.2. Группа Ли $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ . . . 54
8.15. Универсальная накрывающая $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R})$ . . . 58
8.16. Классификация простых алгебр и групп Ли . . . 60

9. Группы преобразований **64**
9.1. Действие групп преобразований . . . 64
9.2. Инфинитезимальные преобразования . . . 68
9.3. Инвариантные структуры . . . 70
9.4. Отображения групп преобразований . . . 72

10. Гомотопии и фундаментальная группа **74**
10.1. Пути . . . 74
10.2. Гомотопия непрерывных отображений . . . 77
10.3. Фундаментальная группа . . . 80
10.4. Фундаментальная группа и ориентируемость . . . 85

11. Накрытия **90**
11.1. Определения и примеры . . . 90
11.2. Фундаментальная группа пространства орбит . . . 93
11.3. Группа скольжений и существование накрытий . . . 96

12. Главные и ассоциированные расслоения **98**
12.1. Главные расслоения . . . 98
12.2. Ассоциированные расслоения . . . 105
12.3. Отображение расслоений . . . 111

13. Связности на главных и ассоциированных расслоениях **115**
13.1. Связность на главном расслоении . . . 115
13.2. Форма кривизны и структурное уравнение . . . 123
13.2.1. Связность на $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2, \pi, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ . . . 131
13.3. Параллельный перенос . . . 132
13.4. Группы голономии . . . 134
13.5. Петля Вильсона . . . 135
13.6. Отображение связностей . . . 138

13.7. Связность на ассоциированном расслоении 140
13.8. Свойства групп голономий 143
13.9. Плоские связности 144
13.10. Локальные и инфинитезимальные группы голономии 146
13.11. Инвариантные связности 150

14. Приложения в квантовой механике 155
14.1. Адиабатическая теорема 155
14.1.1. Двухуровневая система 162
14.2. Фаза Берри 164
14.2.1. Абелев случай: невырожденное состояние 165
14.2.2. Частица со спином 1/2 в магнитном поле 166
14.2.3. Неабелев случай: вырожденное состояние 169
14.3. Эффект Ааронова–Бома 171
14.3.1. Электрический потенциал 172
14.3.2. Магнитный потенциал 174

Список литературы 176
Предметный указатель 179

8. Группы Ли

Группы Ли образуют один из наиболее важных классов многообразий и имеют широкие приложения в математической физике. В настоящем разделе мы дадим формальные определения, опишем основные свойства, а также рассмотрим группы Ли с дифференциально геометрической точки зрения. В частности, многообразия полупростых групп Ли будут рассмотрены, как римановы пространства и пространства абсолютного параллелизма, когда групповая операция отождествляется с параллельным переносом. В конце главы без доказательств приведена классификация простых групп Ли.

8.1. Группы Ли и локальные группы Ли

Определение. Множество элементов $a, b, c, \dots \in \mathbb{G}$ называется *группой Ли*, если оно является одновременно и группой, и гладким многообразием, при этом требуется, чтобы была определена гладкая групповая операция

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni \qquad (a, b) \mapsto ab \qquad \in \mathbb{G}, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{G}, \tag{8.1}$$

со следующими свойствами:

1) Ассоциативность: $(ab)c = a(bc)$, $\quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{G}$.
2) Существование единицы $e \in \mathbb{G}$: $ea = ae = a$, $\quad \forall\, a \in \mathbb{G}$.
3) Для каждого элемента $a \in \mathbb{G}$ существует обратный элемент $a^{-1} \in \mathbb{G}$ такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, причем отображение $\mathbb{G} \ni a \mapsto a^{-1} \in \mathbb{G}$ гладкое.

Замечание. В определении оба условия гладкости отображений:

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni \quad (a, b) \mapsto ab \qquad \in \mathbb{G}, \tag{8.2}$$

$$\mathbb{G} \ni \qquad a \mapsto a^{-1} \quad \in \mathbb{G}, \tag{8.3}$$

можно объединить в эквивалентное условие гладкости одного отображения:

$$\mathbb{G} \times \mathbb{G} \ni \quad (a, b) \mapsto ab^{-1} \quad \in \mathbb{G}. \tag{8.4}$$

То, что (8.4) следует из (8.2) и (8.3), очевидно. Обратно. Из (8.4) при $a = e$ следует гладкость отображения (8.3). Гладкость отображения (8.2) следует из (8.4) после гладкого отображения $b^{-1} \mapsto b$.

Каждому элементу группы $b \in \mathbb{G}$ поставим в соответствие отображение

$$\mathbb{G} \ni \quad a \mapsto ab \quad \in \mathbb{G}, \qquad \forall\, b \in \mathbb{G}. \tag{8.5}$$

Тогда из определения группы Ли следует, что это отображение взаимно однозначно и гладко, т.е. является диффеоморфизмом $\mathbb{G} \xrightarrow{b} \mathbb{G}$. Следовательно, отображение (8.1) можно рассматривать как группу преобразований многообразия $\mathbb{G}$.

Перефразируем определение: группой Ли является группа, снабженная гладкой структурой многообразия. При этом не всякая группа допускает существование такой структуры.

Замечание. Если на произвольной группе задать дискретную топологию, то она будет группой Ли, рассматриваемой, как 0-мерное многообразие (если отбросить требование счетности базы топологии). В дальнейшем, чтобы исключить подобные ситуации, при рассмотрении групп Ли мы не будем рассматривать 0-мерные многообразия. Поэтому множество элементов группы Ли не может быть счетным, так как множество точек области в $\mathbb{R}^n$ несчетно.

Пример 8.1.1. Группа перестановок конечного числа элементов не является группой Ли, так как содержит конечное число элементов.

Можно сказать также, что группой Ли является многообразие, на котором задана групповая операция. При этом не на всяком многообразии можно определить гладкую бинарную операцию, удовлетворяющую групповым аксиомам.

Пример 8.1.2. Двумерная сфера $\mathbb{S}^2$ не может быть наделена групповой структурой. Действительно, зафиксируем произвольный отличный от нуля вектор в касательном пространстве к единице группы $\mathbb{T}_e(\mathbb{G})$. С помощью дифференциала отображения (8.5) этот вектор можно разнести по всему групповому многообразию. В результате получим гладкое векторное поле на $\mathbb{G}$, которое всюду отлично от нуля, так как отображение (8.5) является диффеоморфизмом. Это противоречит теореме 10.2.1, утверждающей, что на двумерной сфере не существует непрерывного отличного от нуля векторного поля.

Поскольку группы Ли являются многообразиями, то на них без изменения переносится большинство характеристик многообразий.

Определение. *Размерностью* группы Ли называется ее размерность как многообразия. Группа Ли называется *компактной*, если групповое многообразие компактно.

Из непрерывности групповой операции следует, что, если подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$ – открыто или замкнуто в $\mathbb{G}$, то таковым же будет подмножество $\mathbb{U}^{-1}$, состоящее из обратных элементов, а также подмножества $a\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}a$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Отсюда вытекает, что для открытого подмножества $\mathbb{U}$ подмножества $\mathbb{V}\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}\mathbb{V}$ также открыты в $\mathbb{G}$ каково бы ни было подмножество $\mathbb{V} \in \mathbb{G}$.

Замечание. В определении группы Ли мы потребовали гладкость т.е. бесконечную дифференцируемость групповой операции и, соответственно, гладкость группы Ли, как многообразия. На самом деле ситуация следующая. Согласно теореме Глисона–Монтгомери–Циппина [40], [41] на всякой непрерывной группе (класса $\mathcal{C}^0$) можно ввести структуру аналитического многообразия (класса $\mathcal{C}^\omega$), совместимую с групповой структурой. Эта теорема дает положительное решение пятой проблемы Гильберта: следует ли из существования в группе $\mathbb{G}$ каких-нибудь координат существование в ней дифференцируемых координат. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что группы Ли являются вещественно аналитическими многообразиями, а групповая операция – вещественно аналитическое отображение.

Таким образом, группы Ли представляют собой специальный класс групп, для которых групповая операция может быть записана в координатной форме. Это важное свойство позволяет применить методы математического анализа для исследования свойств групп Ли.

Приведем несколько примеров групп Ли.

Пример 8.1.3. Прямая $\mathbb{R}$, на которой определены сдвиги (сложение) $a+b=c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, является одномерной связной односвязной некомпактной абелевой группой Ли.

Пример 8.1.4. Проколотая прямая $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является группой Ли по отношению к умножению, $xy = z$, где $x, y, z \in \mathbb{R}^\times$. Эта группа одномерна абелева несвязна и состоит из двух компонент. Каждая компонента связности некомпактна. Связная компонента единицы $\mathbb{R}_+$ (положительные числа) изоморфна группе вещественных чисел по сложению, $\mathbb{R}_+ \simeq \mathbb{R}$. Изоморфизм задается показательной функцией с произвольным положительным основанием, отличным от единицы. Например, $x = \mathsf{e}^a$.

Пример 8.1.5. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (как и произвольное векторное пространство) является n-мерной связной односвязной некомпактной абелевой группой Ли относительно сложения векторов.

Пример 8.1.6. Комплексная плоскость с выколотым началом координат $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является комплексной группой Ли по отношению к обычному умножению комплексных чисел. Ее комплексная размерность равна единице. Эта группа некомпактна связна, но неодносвязна. Ее фундаментальная группа равна $\mathbb{Z}$ (число обходов вокруг начала координат).

Пример 8.1.7. Единичная окружность $\mathbb{S}^1$, точками которой являются комплексные числа $z = \mathsf{e}^{i\varphi}$ является абелевой компактной группой Ли по отношению к умножению. Она обозначается через $\mathbb{U}(1)$ (унитарные матрицы размера 1×1) и изоморфна группе собственных двумерных вращений $\mathbb{SO}(2)$. Эта группа связна, но неодносвязна. Ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$.

Пример 8.1.8. Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ в пространстве кватернионов, точками которой являются кватернионы q, для которых $|q| = 1$, может быть снабжена групповой структурой. Это – трехмерная связная односвязная неабелева компактная группа Ли, которая изоморфна группе унитарных матриц размерности 2×2 с единичным определителем $\mathbb{SU}(2)$.

Можно показать, что сферы только двух размерностей $\mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^3$ исчерпывают все сферы на которых можно задать структуру группы Ли.

В рассмотренных примерах есть две одномерные абелевы группы Ли: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^1$. Любая связная одномерная группа Ли является абелевой, и изоморфна либо вещественной прямой $\mathbb{R}$, либо окружности $\mathbb{S}^1$. Этот результат имеет широкие применения, так как каждая группа Ли имеет одномерные подгруппы. Если одномерная группа Ли не является связной, то она может быть неабелевой. Примеры дают группа вращений $\mathbb{O}(2)$ и группа Лоренца $\mathbb{O}(1,1)$.

В случае связных одномерных групп Ли можно описать все возможные гомоморфизмы между ними:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni &\quad x \mapsto ax &&\in \mathbb{R}, && a \in \mathbb{R};\\
\mathbb{R} \ni &\quad x \mapsto \mathsf{e}^{iax} &&\in \mathbb{S}^1, && a \in \mathbb{R};\\
\mathbb{S}^1 \ni &\quad z \mapsto 0 &&\in \mathbb{R};\\
\mathbb{S}^1 \ni &\quad z \mapsto z^n &&\in \mathbb{S}^1, && n \in \mathbb{Z};
\end{aligned}$$

где x – точка вещественной прямой, z – комплексное число, равное по модулю единице, а числа a и n параметризуют гомоморфизмы.

Прямое произведение групп Ли $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$ является группой Ли с дифференцируемой структурой прямого произведения многообразий и групповой структурой прямого произведения групп.

Пример 8.1.9. Тор $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n} \approx \underbrace{\mathbb{U}(1) \times \dots \times \mathbb{U}(1)}_{n}$ для всех n является n-мерной абелевой компактной группой Ли как прямое произведение окружностей. Эта группа связна, но неодносвязна.

Предложение 8.1.1. *Всякая компактная связная абелева группа Ли $\mathbb{G}$ размерности n изоморфна n-мерному тору $\mathbb{T}^n$.*

Доказательство. См., например, [26], глава 3, упражнение 18.

С топологической точки зрения группы Ли $\mathbb{G}$ могут состоять из нескольких компонент связности[1]. При этом каждая компонента имеет одинаковую размерность, равную размерности группы. Связная компонента единицы $\mathbb{G}_0$ является открытой подгруппой в $\mathbb{G}$ и представляет собой нормальный делитель. Остальные компоненты представляют собой смежные классы по этой подгруппе, и фактор группа $\mathbb{G}/\mathbb{G}_0$ состоит не более, чем из счетного числа элементов. Если группу Ли рассматривать, как группу преобразований, то каждая связная компонента представляет собой орбиту произвольного элемента из этой компоненты относительно действия элементов группы из связной компоненты единицы $\mathbb{G}_0$. Ясно, что все компоненты связности группы Ли диффеоморфны между собой.

Теперь перейдем к координатному описанию. Поскольку группа Ли является многообразием, то групповое умножение можно записать в координатах. Рассмотрим связную компоненту единицы $\mathbb{G}_0$ группы Ли размерности N. Пусть в окрестности единицы задана некоторая система координат $\{a^{\mathrm{A}}\}$, $\mathrm{A} = 1, \dots, \mathrm{N}$. Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат $a^{\mathrm{A}} = 0$ совпадает с единицей группы. Тогда групповое умножение

$$c = ab = f(a,b), \qquad a,b,c \in \mathbb{G}_0, \tag{8.6}$$

и групповые аксиомы можно записать в координатном виде (в достаточно малой окрестности единицы):

$$\begin{aligned}
&1) \quad c^{\mathrm{A}} = f^{\mathrm{A}}(a,b) && \text{– закон композиции,}\\
&2) \quad f^{\mathrm{A}}(a, f(b,c)) = f^{\mathrm{A}}(f(a,b),c) && \text{– ассоциативность,}\\
&3) \quad a^{\mathrm{A}} = f^{\mathrm{A}}(a,0) = f^{\mathrm{A}}(0,a) && \text{– существование единицы,}\\
&4) \quad f^{\mathrm{A}}(a,a^{-1}) = f^{\mathrm{A}}(a^{-1},a) = 0 && \text{– существование обратного элемента.}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Набор N функций f^{A} от $2\mathrm{N}$ переменных, удовлетворяющих условиям (8.7), называется *функцией композиции* для группы Ли $\mathbb{G}$. Она определена в некоторой окрестности единицы группы.

Связная компонента группы Ли $\mathbb{G}_0$ может оказаться нетривиальным многообразием и не покрываться одной картой. Поэтому введем новое понятие.

[1] Поскольку мы предполагаем, что многообразие обладает счетной базой, то число компонент связности у групп Ли может быть не более, чем счетно.

Определение. *Локальной группой Ли* называется пара $(\mathbb{U}, f)$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{\text{N}}$ – область евклидова пространства, содержащая начало координат, и f – гладкое отображение $\mathbb{U} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^{\text{N}}$ такое, что выполнены условия (8.7). При этом мы предполагаем, что все равенства выполнены в той области, где определены все выражения, входящие в данное равенство.

Замечание. В определении локальной группы Ли мы не предполагаем замкнутости области $\mathbb{U}$ относительно группового умножения, т.е. возможно существование таких точек в $\mathbb{U}$, что их произведение не лежит в $\mathbb{U}$. Конечно, для таких точек про ассоциативность в определении ничего не говорится.

Каждая группа Ли $\mathbb{G}$ порождает бесконечное множество локальных групп Ли следующим образом. Пусть $(\mathbb{V}, \varphi)$ – карта на $\mathbb{G}$, содержащая единицу, которая отображается в начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^{\text{N}}$. Возьмем такую окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$, что выполнены включения $\mathbb{U} \cdot \mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ и $\mathbb{U}^{-1} \subset \mathbb{V}$, где под произведением $\mathbb{U} \cdot \mathbb{U}$ мы понимаем множество всех произведений ab, где $a, b \in \mathbb{U}$. Существование такой окрестности следует из непрерывности отображений $(a, b) \mapsto ab$ и $a \mapsto a^{-1}$. Тогда каждая пара $(\mathbb{U}, f)$, где мы отождествили область $\mathbb{U} \subset \mathbb{G}$ с ее образом $\varphi(\mathbb{U}) \in \mathbb{R}^{\text{N}}$, а f – функция композиции на $\mathbb{G}$, записанная в координатах, является локальной группой Ли.

Определение. Две локальные группы Ли $(\mathbb{U}_1, f_1)$ и $(\mathbb{U}_2, f_2)$ называются *изоморфными*, если существуют такие окрестности нуля $\mathbb{U}_1' \subset \mathbb{U}_1$ и $\mathbb{U}_2' \subset \mathbb{U}_2$ и такой диффеоморфизм $h : \mathbb{U}_1' \to \mathbb{U}_2'$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{U}_1' \times \mathbb{U}_1' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h \times h"'] & \mathbb{R}^{\text{N}} \supset \mathbb{U}_1' \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{U}_2' \times \mathbb{U}_2' \arrow[r, "f_2"] & \mathbb{R}^{\text{N}} \supset \mathbb{U}_2'
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $h(f_1(a, b)) = f_2(h(a), h(b))$ при $a, b \in \mathbb{U}_1'$, там, где обе части равенства определены.

Ясно, что все локальные группы Ли, полученные описанным выше способом из одной группы Ли, изоморфны между собой. Поэтому введем

Определение. Две группы Ли $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ называются *локально изоморфными*, если порождаемые ими локальные группы Ли изоморфны.

Конечно, две изоморфные группы Ли являются также локально изоморфными. Нетривиальность данного выше определения заключается в том, что существуют локально изоморфные группы Ли, которые в то же время не изоморфны между собой.

Пример 8.1.10. Пусть $\mathbb{G}_1 = \mathbb{R}$ и $\mathbb{G}_2 = \mathbb{S}^1$. В качестве $\mathbb{U}_1' \subset \mathbb{R}$ возьмем интервал $(-\pi, \pi)$, а в качестве $\mathbb{U}_2' \subset \mathbb{S}^1$ – дополнение к точке $-1 \in \mathbb{S}^1$. Отображение

$$h: \quad \mathbb{R} \supset \mathbb{U}_1' \ni \quad x \;\mapsto\; \mathsf{e}^{ix} \quad \in \mathbb{U}_2' \subset \mathbb{S}^1$$

устанавливает диффеоморфизм между $\mathbb{U}_1'$ и $\mathbb{U}_2'$, перестановочный с умножением. Таким образом, группы Ли $\mathbb{R}$ и $\mathbb{S}^1$ локально изоморфны. В то же время они не изоморфны между собой.

Предложение 8.1.2. *Всякая* N*-мерная абелева группа Ли локально изоморфна группе трансляций* N*-мерного векторного пространства, т.е. евклидову пространству* $\mathbb{R}^{\text{N}}$*, рассматриваемому как группа сдвигов.*

Доказательство. См., например, [42], глава 10, §56 D.

Структура группы Ли накладывает жесткие условия на функцию композиции f^{A}. Как уже было отмечено, функция композиции $f^{\text{A}}(a, b)$ вещественно аналитична (т.е. разлагается в сходящиеся степенные ряды) во всех точках группового многообразия по всем 2N переменным.

Пример 8.1.11. Рассмотрим группу невырожденных вещественных $n \times n$ матриц $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ с обычным правилом умножения. Произвольную матрицу $M \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ можно представить в виде

$$M = \mathbb{1} + (X_a{}^b), \qquad a, b = 1, \dots, n,$$

где $\mathbb{1}$ – единичная матрица и $X_a{}^b$ – набор n^2 чисел (элементы $n \times n$ матрицы), которые мы примем за координаты матрицы M. Полученное таким образом отображение всей группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ на область евклидова пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ переводит единицу группы в начало координат. Групповое многообразие при этом представляет собой открытую область в $\mathbb{R}^{n^2}$, которая является дополнением замкнутого множества точек, определяемого уравнением $\det M = 0$. Функция композиции для группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ принимает вид

$$f_a{}^b(M, N) = X_a{}^b + Y_a{}^b + X_a{}^c Y_c{}^b,$$

где $N = \mathbb{1} + Y$. Таким образом, функция композиции является аналитической функцией. Аналогично, множество невырожденных $n \times n$ комплексных матриц $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ образует аналитическую группу Ли вещественной размерности $2n^2$.

Проанализируем функцию композиции. Из условия существования единицы (8.7) следуют равенства:

$$\left.\frac{\partial f^{\text{A}}(a,b)}{\partial a^{\text{B}}}\right|_{b=0} = \delta^{\text{A}}_{\text{B}}, \qquad \left.\frac{\partial f^{\text{A}}(a,b)}{\partial b^{\text{B}}}\right|_{a=0} = \delta^{\text{A}}_{\text{B}}.$$

Из этих уравнений и дифференцируемости функции композиции вытекает, что вблизи единицы группы функция композиции разрешима относительно координат a^{A} и b^{A} соответствующих элементов группы cb^{-1} и $a^{-1}c$, где $c = f(a, b)$. При этом класс дифференцируемости функций $a^{\text{A}}(c, b)$ и $b^{\text{A}}(a, c)$ такой же, как и у функции композиции (бесконечный).

Разложим функцию композиции в ряд Тейлора в окрестности единицы группы с точностью до членов третьего порядка

$$f^{\text{A}}(a,b) = a^{\text{A}} + b^{\text{A}} + a^{\text{C}} b^{\text{B}} \hat{f}_{\text{BC}}{}^{\text{A}} + a^{\text{D}} a^{\text{C}} b^{\text{B}} g_{\text{BCD}}{}^{\text{A}} + a^{\text{D}} b^{\text{C}} b^{\text{B}} h_{\text{BCD}}{}^{\text{A}} + \dots \tag{8.8}$$

В этом разложении $\hat{f}_{\text{BC}}{}^{\text{A}}$, $g_{\text{BCD}}{}^{\text{A}} = g_{\text{BDC}}{}^{\text{A}}$, $h_{\text{BCD}}{}^{\text{A}} = h_{\text{CBD}}{}^{\text{A}}$ – некоторые постоянные. Из существования единичного элемента следует отсутствие нулевого члена разложения и вид линейных слагаемых. Слагаемые более высоких порядков обязательно должны содержать смешанное произведение $a^{\text{A}} b^{\text{B}}$, так как в противном случае условие 3) в определении функции композиции не может быть выполнено. Подстановка разложения (8.8) в условие ассоциативности накладывает условие на коэффициенты разложения:

$$\hat{f}_{\text{BC}}{}^{\text{E}} \hat{f}_{\text{ED}}{}^{\text{A}} + 2h_{\text{BCD}}{}^{\text{A}} = \hat{f}_{\text{CD}}{}^{\text{E}} \hat{f}_{\text{BE}}{}^{\text{A}} + 2g_{\text{BCD}}{}^{\text{A}}. \tag{8.9}$$

При антисимметризации этого выражения по индексам $\text{B}, \text{C}, \text{D}$ слагаемые $h_{\text{BCD}}{}^{\text{A}}$ и $g_{\text{BCD}}{}^{\text{A}}$ выпадают из-за симметрии по паре индексов. В результате получаем ограничение на *структурные константы* группы Ли,

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} := -\hat{f}_{\text{AB}}{}^{\text{C}} + \hat{f}_{\text{BA}}{}^{\text{C}}, \qquad f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = -f_{\text{BA}}{}^{\text{C}}, \tag{8.10}$$

известные как *тождества Якоби*

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} f_{\text{CD}}{}^{\text{E}} + f_{\text{BC}}{}^{\text{D}} f_{\text{AD}}{}^{\text{E}} + f_{\text{CA}}{}^{\text{D}} f_{\text{BD}}{}^{\text{E}} = 0, \tag{8.11}$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов $\text{A}, \text{B}, \text{C}$. При свертке тождеств Якоби по индексам C, E последние два слагаемых сокращаются, и мы получаем тождество

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} f_{\text{DC}}{}^{\text{C}} = 0.$$

Для абелевых групп функция композиции симметрична $(f^{\text{A}}(a,b) = f^{\text{A}}(b,a))$ и структурные константы тождественно обращаются в нуль.

Координаты обратного элемента $a^{-1\text{A}}(a)$ зависят от элемента a. Разложив это выражение по a^{A} и подставив в определение обратного элемента, получим следующее разложение для координат обратного элемента с точностью до членов третьего порядка:

$$a^{-1\text{A}} = -a^{\text{A}} + a^{\text{C}} a^{\text{B}} \hat{f}_{\text{BC}}{}^{\text{A}} - \frac{1}{2} a^{\text{D}} a^{\text{C}} a^{\text{B}} \hat{f}_{\text{BC}}{}^{\text{E}} (\hat{f}_{\text{DE}}{}^{\text{A}} + \hat{f}_{\text{ED}}{}^{\text{A}}) + \dots . \tag{8.12}$$

При получении этого выражения было использовано соотношение (8.9).

8.2. Действие группы слева

Рассмотрим группу Ли как группу преобразований группового многообразия, действующую слева. При этом каждому элементу $a \in \mathbb{G}$ ставится в соответствие отображение

$$a: \quad \mathbb{G} \ni \quad b \ \mapsto \ l_a(b) := ab \quad \in \mathbb{G}.$$

Это отображение не является автоморфизмом группы Ли $\mathbb{G}$, так как нетривиально действует на единичный элемент. Из единственности единичного элемента в группе следует, что группа левых преобразований действует свободно и транзитивно (см. раздел 9).

Функция $F(a) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$, заданная на групповом многообразии, будет инвариантна относительно действия группы, если выполнено условие $F(ab) = F(b)$, $\forall\, a \in \mathbb{G}$, и, следовательно, также для всех $b \in \mathbb{G}$. Очевидно, что инвариантные функции на группе тождественно равны константе. Другими словами, значение инвариантной функции, например, в единице $F(e)$ разносится по всему групповому многообразию с помощью действия группы слева. При этом группа Ли $\mathbb{G}$ может состоять из нескольких компонент.

Перейдем к рассмотрению левоинвариантных векторных полей на групповом многообразии. Поскольку на группе задано отображение l_a, которое является диффеоморфизмом, то в касательном пространстве определен соответствующий дифференциал отображения l_{a*}:

$$X(l_a(b)) = l_{a*}X(b), \tag{8.13}$$

который переводит вектор $X(b)$ в точке b в некоторый вектор $X(l_a(b))$ в точке ab.

Определение. Векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{G})$ на группе Ли $\mathbb{G}$ называется *левоинвариантным*, если выполнено условие (8.13) для всех $a \in \mathbb{G}$ и, следовательно, для всех $b \in \mathbb{G}$.

Левоинвариантные векторные поля определены глобально, т.е. на всем групповом многообразии.

Предложение 8.2.1. *Любое левоинвариантное векторное поле является гладким.*

Доказательство. Следствие гладкости групповой операции. См., например, [26], предложение 3.7.

Проиллюстрируем действие дифференциала отображения для соответствующей локальной группы Ли, на которой задана функция композиции в явном виде. В компонентах дифференциал отображения записывается в виде

$$X^{\mathrm{A}}(b) \ \mapsto \ X^{\mathrm{A}}(c) = X^{\mathrm{B}}(b)U_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a,b), \qquad c = ab,$$

где $X^{\mathrm{A}}(b)$ – компоненты касательного вектора в точке b относительно координатного базиса ∂_{A}, и дифференциал отображения задается матрицей

$$U_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a,b) := \frac{\partial f^{\mathrm{A}}(a,b)}{\partial b^{\mathrm{B}}},$$

зависящей от координат двух точек $a, b \in \mathbb{G}$. Поскольку групповая операция, $(a,b) \mapsto f(a,b)$, является диффеоморфизмом группового многообразия на себя при фиксированном a или b, то матрица $U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}$ невырождена для всех $a, b \in \mathbb{G}$, $\det U_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} \neq 0$ (там, где определена функция композиции).

Пусть $X_0 = \{X_0^{\mathrm{A}}\}$ – произвольный вектор из касательного пространства к единице группы. Тогда этот вектор можно разнести по всему групповому многообразию с помощью дифференциала левого действия элементов группы. По построению, это будет левоинвариантное векторное поле $X(a) := l_{a*}X_0$. Оно определено глобально.

Компоненты левоинвариантного векторного поля вблизи единицы группы имеют вид

$$X^{\mathrm{A}}(a) = X_0^{\mathrm{B}} L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a),$$

где

$$L_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) := U_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a,0) = \left.\frac{\partial f^{\mathrm{A}}(a,b)}{\partial b^{\mathrm{B}}}\right|_{b=0}.$$

Тем самым, каждому вектору из касательного пространства к единице однозначно ставится в соответствие левоинвариантное векторное поле, и, наоборот, каждое левоинвариантное векторное поле однозначно определяет некоторый вектор в касательном пространстве к единице группы.

Матрица ${U_{\text{B}}}^{\text{A}}(a,b)$ удовлетворяет простому тождеству. Дифференцируя равенство $f^{\text{A}}(0,b)=b^{\text{A}}$ по b^{B}, получаем тождество

$$ {U_{\text{B}}}^{\text{A}}(0,b)=\delta^{\text{A}}_{\text{B}}, \tag{8.14} $$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Множество векторных полей на группе Ли $\mathbb{G}$, как и на любом другом многообразии, образует бесконечномерную алгебру Ли $\mathcal{X}(\mathbb{G})$ (см. раздел 2.6.7) и $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$-модуль. Поскольку дифференциал отображения сохраняет скобку Ли (коммутатор) (2.74), то коммутатор двух левоинвариантных векторных полей будет левоинвариантным векторным полем. Следовательно, множество всех левоинвариантных векторных полей образует подалгебру Ли в $\mathcal{X}(\mathbb{G})$. Поскольку, как векторное пространство, множество левоинвариантных векторных полей изоморфно касательному пространству в единице группы $\mathbb{T}_e(\mathbb{G})$, то множество левоинвариантных векторных полей представляет собой конечномерную алгебру Ли такой же размерности N, что и сама группа.

Замечание. Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей не выдерживает умножения на гладкие функции $f(a)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$, и поэтому представляет собой линейное пространство, а не $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{G})$-модуль.

Структура алгебры Ли (коммутатор) левоинвариантных векторных полей естественным образом переносится на касательное пространство к единице группы:

$$ [X_0,Y_0]:=[l_{a*}X_0,l_{a*}Y_0]_e. $$

Словами. Берем два произвольных вектора X_0 и Y_0 из касательного пространства к единице группы, разносим их с помощью действия группы слева по всему многообразию, вычисляем коммутатор получившихся левоинвариантных векторных полей и выбираем в касательном пространстве к единице группы тот вектор, который соответствует коммутатору.

Множество левоинвариантных векторных полей образует N-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел, которое изоморфно касательному пространству в начале координат (или в любой другой точке группового многообразия). В качестве базиса левоинвариантных векторных полей удобно выбрать N левоинвариантных векторных полей (*образующих алгебры Ли*)

$$ L_{\text{A}}(a):=l_{a*}(\partial_{\text{A}}|_e)={L_{\text{A}}}^{\text{B}}\partial_{\text{B}}|_a, \tag{8.15} $$

где мы разложили левоинвариантный базис по координатному базису $\partial_{\text{B}}|_a$ в точке $a\in\mathbb{G}$. В построенном базисе произвольное левоинвариантное векторное поле X имеет постоянные компоненты, равные его компонентам в начале координат относительно координатного базиса:

$$ X=X^{\text{A}}_0L_{\text{A}}. $$

Поскольку левоинвариантные векторные поля образуют алгебру Ли, то коммутатор двух базисных левоинвариантных векторных полей L_{A} будет левоинвариантным векторным полем и, следовательно, его можно разложить по базису L_{A} с некоторыми постоянными коэффициентами:

$$ [L_{\text{A}},L_{\text{B}}]={f_{\text{AB}}}^{\text{C}}L_{\text{C}}. \tag{8.16} $$

То, что в правой части этого равенства стоят структурные константы ${f_{\text{AB}}}^{\text{C}}$, которые были определены ранее через функцию композиции (8.10) не случайно.

Докажем это, рассмотрев окрестность единицы группы и соответствующую локальную группу Ли. Вблизи единицы группы левоинвариантный базис в компонентах имеет вид

$$ L_{\text{A}}(a)={L_{\text{A}}}^{\text{B}}(a)\partial_{\text{B}}, $$

где ∂_{B} – координатный базис касательных пространств, что оправдывает выбранные обозначения в определении (8.15). Из разложения (8.8) следует разложение для компонент левоинвариантного базиса:

$$ {L_{\text{A}}}^{\text{B}}=\delta^{\text{B}}_{\text{A}}+a^{\text{C}}{\hat f_{\text{AC}}}{}^{\text{B}}+a^{\text{D}}a^{\text{C}}{g_{\text{ACD}}}^{\text{B}}+\dots. \tag{8.17} $$

Подстановка этого разложения в формулу (8.16) доказывает, что в правой части стоят структурные константы (8.10), потому что коэффициенты разложения ${f_{\text{AB}}}^{\text{C}}$ постоянны. При этом возникают также ограничения на коэффициенты разложения при высших степенях a^{A}, на которых мы останавливаться не будем.

Замечание. Для всех $a \in \mathbb{G}$ выполнено равенство $\det L_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) \neq 0$, потому что групповая операция задает диффеоморфизм группы $\mathbb{G}$ на себя. При малых a^{A} это следует также из (8.17).

Продолжим рассмотрение локальной группы Ли и дадим независимый вывод формулы (8.16), исходя только из свойств функции композиции.

Предложение 8.2.2. *Базис алгебры Ли* (8.15) *удовлетворяет коммутационным соотношениям* (8.16) *с некоторым набором структурных констант, удовлетворяющих тождеству Якоби.*

Доказательство. Рассмотрев тождество $b = a^{-1}ab$ в касательном пространстве, получим равенство

$$L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) = U_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}, a).$$

Далее, распишем условие ассоциативности $(ab)c = a(bc)$ в касательном пространстве:

$$U_{\text{A}}{}^{\text{B}}(f(a,b),c) = U_{\text{A}}{}^{\text{C}}(b,c)U_{\text{C}}{}^{\text{B}}(a, f(b,c)).$$

Полагая $c = 0$, получим равенства

$$\frac{\partial f^{\text{C}}(a,b)}{\partial b^{\text{A}}} = U_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a,b) = L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{D}}(b)L_{\text{D}}{}^{\text{C}}(f), \tag{8.18}$$

где $f = f(a,b)$. Рассмотрим эту систему уравнений, как уравнения на функцию композиции. Система уравнений (8.18) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия совместности. Чтобы получить эти условия, продифференцируем уравнение (8.18) по b^{B} и антисимметризуем по индексам A и B. После несложных алгебраических преобразований получим уравнение

$$[L_{\text{A}}(b), L_{\text{B}}(b)]^{\text{D}} L^{-1}{}_{\text{D}}{}^{\text{C}}(b) = [L_{\text{A}}(f), L_{\text{B}}(f)]^{\text{D}} L^{-1}{}_{\text{D}}{}^{\text{C}}(f),$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор векторных полей. Поскольку левая и правая часть этого равенства рассматриваются в различных точках группового многообразия, и точки могут выбираться произвольно, то они должны быть равны константам. Эти константы проще всего определить, рассмотрев линейное приближение для левоинвариантных векторных полей (8.17). В результате получим уравнение для образующих алгебры Ли (8.16).

Тождества Якоби для структурных констант следуют из тождеств Якоби для векторных полей.

Таким образом, мы доказали, что множество левоинвариантных векторных полей образует N-мерную алгебру Ли над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй бесконечномерной алгебры Ли всех векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{G})$.

Определение. Алгебра левоинвариантных векторных полей называется *алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$. Базисные векторы (образующие) L_{A} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются *генераторами группы Ли.*

Пример 8.2.1. Вещественная прямая $x \in \mathbb{R}$ является абелевой группой по сложению. Ее алгебра Ли состоит из постоянных векторных полей $X = a\partial_x \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$.

Алгебра Ли определяется с точностью до изоморфизма (выбора базиса левоинвариантных векторных полей) только окрестностью единицы группы. Поэтому, если две группы Ли локально изоморфны, то их алгебры Ли также изоморфны. В то же время сами группы Ли могут не быть изоморфными.

Пример 8.2.2. Группы $\mathbb{SU}(2)$, $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{O}(3)$ имеют изоморфные алгебры Ли, однако сами не изоморфны. При этом группа $\mathbb{SU}(2)$ связна и односвязна и является универсальной накрывающей группы $\mathbb{SO}(3)$. Группа вращений $\mathbb{SO}(3)$ связна, но неодносвязна. Группа $\mathbb{O}(3)$ состоит из двух компонент связности.

Левоинвариантные векторные поля L_{A} (генераторы) образуют базис алгебры Ли. Этот базис определен с точностью до выбора базиса в касательном пространстве к единице группы, т.е. с точностью до действия группы $\mathbb{GL}(\text{N}, \mathbb{R})$. При этом вид структурных констант зависит от выбора базиса. Легко проверить, что при преобразовании базиса структурные константы преобразуются как компоненты тензора третьего ранга с двумя ковариантными индексами и одним контравариантным.

Выше мы показали, как групповая операция определяет алгебру Ли левоинвариантных векторных полей. Проведем обратное построение и покажем, что структурные константы (8.10) со свойством (8.11) позволяют восстановить функцию композиции $f^{\text{A}}(a,b)$ в окрестности единицы. Это построение дает

Доказательство теоремы 8.11.3. Перепишем соотношение (8.16) в компонентах:

$$L_{\text{A}}{}^{\text{D}}\partial_{\text{D}}L_{\text{B}}{}^{\text{C}} - L_{\text{B}}{}^{\text{D}}\partial_{\text{D}}L_{\text{A}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{D}}L_{\text{D}}{}^{\text{C}}. \tag{8.19}$$

Свертка этого выражения с тремя обратными матрицами L^{-1} по индексам $\text{A}, \text{B}, \text{C}$ приводит к соотношению

$$\partial_{\text{A}}L^{-1}_{\text{B}}{}^{\text{C}} - \partial_{\text{B}}L^{-1}_{\text{A}}{}^{\text{C}} = -L^{-1}_{\text{A}}{}^{\text{E}}L^{-1}_{\text{B}}{}^{\text{D}}f_{\text{DE}}{}^{\text{C}}. \tag{8.20}$$

Это равенство является дифференциальным уравнением на матрицу $L^{-1}(a)$. Левая часть уравнения антисимметрична по индексам A и B и, следовательно, представляет собой 2-форму на $\mathbb{G}_0$. Для того, чтобы найти необходимые и достаточные условия интегрируемости этой системы уравнений, ее необходимо продифференцировать, скажем, по a^{D}, и антисимметризировать по индексам A, B и D. После несложных вычислений, получим, что необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнений (8.20) являются тождества Якоби для структурных констант. Таким образом, матрицы $L^{-1}(a)$ и, следовательно, $L(a)$ определяются структурными константами с точностью до некоторой константы, которая фиксируется условием $L_{\text{A}}{}^{\text{B}}(0) = \delta^{\text{B}}_{\text{A}}$. После этого функция композиции однозначно находится из уравнения (8.18) с фиксированными условиями в нуле. Условия интегрируемости этих уравнений, как было показано выше, опять-таки сводятся к тождествам Якоби. Таким образом, если задан произвольный набор структурных констант $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = -f_{\text{BA}}{}^{\text{C}}$, удовлетворяющих тождествам Якоби (8.11), то функция композиции однозначно определяется в окрестности единицы группы и, следовательно, групповая структура задается в некоторой окрестности единицы группы $\mathbb{G}$. Таким образом, доказано, что произвольная алгебра Ли определяет локальную группу Ли с точностью до изоморфизма.

В обратную сторону: каждая локальная группа Ли определяет алгебру Ли с точностью до изоморфизма. Это сразу следует из определения алгебры Ли, как множества левоинвариантных векторных полей.

Замечание. Явный вид функции композиции известен только в самых простейших случаях, например, для абелевой группы сложения векторов евклидова пространства $f^{\text{A}} = a^{\text{A}} + b^{\text{A}}$. В примере 8.1.11 функция композиции была построена для группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. В разделе 8.7 будет явно построена функция композиции в простейшем случае двумерной неабелевой группы Ли (группа аффинных преобразований прямой). В более сложных случаях решить явно уравнения (8.20) и (8.18) не удается. Но это обычно и не нужно. В приложениях, как правило, работают с матричным представлением алгебры Ли и структурными константами.

Определение. Пусть $X = X_0^{\text{A}}L_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)\partial_{\text{B}}$ – произвольное левоинвариантное векторное поле. Форма $\omega = dx^{\text{A}}\omega_{\text{A}}(a)$ называется *левоинвариантной*, если ее значение на левоинвариантном векторном поле равно константе,

$$\omega(X) = X_0^{\text{A}}L_{\text{A}}{}^{\text{B}}\omega_{\text{B}} = \mathsf{const}.$$

Предложение 8.2.3. *Любая левоинвариантная* 1*-форма является гладкой.*

Доказательство. Следствие гладкости групповой операции. См., например, [26], предложение 3.12.

Из определения следует, что компоненты левоинвариантной 1-формы в координатном базисе имеют вид

$$\omega_{\text{A}}(a) = L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)\omega_{0\text{B}}, \tag{8.21}$$

где $\omega_{0\text{B}}$ – компоненты левоинвариантной 1-формы в начале координат. При работе с левоинвариантными 1-формами удобно ввести левоинвариантный базис, который дуален к левоинвариантным векторным полям: $\omega^{\text{A}}(L_{\text{B}}) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}}$. Он имеет следующий вид в координатном базисе:

$$\omega^{\text{A}}(a) = dx^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a),$$

Тогда произвольная левоинвариантная 1-форма будет иметь в левоинвариантном базисе постоянные компоненты $\omega := \omega^{\text{A}}\omega_{0\text{A}}$.

Предложение 8.2.4 (Формула Маурера–Картана). *Пусть ω – произвольная левоинвариантная 1-форма и X, Y – два произвольных левоинвариантных векторных поля. Тогда значение внешней производной $d\omega$ на векторных полях X, Y пропорционально значению 1-формы ω на коммутаторе этих полей*:

$$d\omega(X,Y)=-\frac{1}{2}\omega([X,Y]). \tag{8.22}$$

Это тождество известно, как формула Маурера–Картана. *Ее можно переписать для левоинвариантного базиса 1-форм*:

$$d\omega^{\text{A}}=-\frac{1}{2}\omega^{\text{B}}\wedge\omega^{\text{C}}f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}. \tag{8.23}$$

Доказательство. Прямая проверка с использованием тождества (8.20).

При рассмотрении главных расслоений нам понадобится рассматривать формы, заданные на некотором многообразии $\mathbb{M}$, со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Введем для таких форм понятие коммутатора. Пусть L_{A}, $\text{A}=1,\dots,\text{N}$, – базис алгебры Ли. Пусть A и B – соответственно r и s формы на $\mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда они имеют вид

$$A=A^{\text{A}}L_{\text{A}},\qquad B=B^{\text{A}}L_{\text{A}},$$

где $A^{\text{A}}\in\Lambda_r(\mathbb{M})$ и $B^{\text{A}}\in\Lambda_s(\mathbb{M})$ для всех значений индекса $\text{A}=1,\dots,\text{N}$. Определим коммутатор заданных форм следующим равенством

$$[A,B]:=A^{\text{A}}\wedge B^{\text{B}}[L_{\text{A}},L_{\text{B}}]=A^{\text{A}}\wedge B^{\text{B}}f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}L_{\text{C}}. \tag{8.24}$$

Выражение в правой части равенства представляет собой $r+s$ форму на $\mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Если на многообразии $\mathbb{M}$ заданы три формы A, B и C степеней r, s и t, соответственно, со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то из тождеств Якоби вытекает равенство

$$(-1)^{rt}[[A,B],C]+(-1)^{rs}[[B,C],A]+(-1)^{st}[[C,A],B]=0. \tag{8.25}$$

Пример 8.2.3. Пусть A и B – 1-формы на $\mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $X,Y\in\mathcal{X}(\mathbb{M})$ – два векторных поля на $\mathbb{M}$. Тогда значение коммутатора форм на векторных полях равно

$$\begin{aligned}[A,B](X,Y)&=A^{\text{A}}\wedge B^{\text{A}}(X,Y)[L_{\text{A}},L_{\text{B}}]\\&=\frac{1}{2}(A^{\text{A}}(X)B^{\text{B}}(Y)-A^{\text{A}}(Y)B^{\text{B}}(X))=\frac{1}{2}[A(X),B(Y)]-\frac{1}{2}[A(Y),B(X)].\end{aligned}$$

В частности,

$$[A,A](X,Y)=[A(X),A(Y)].$$

Предложение 8.2.5. *Если A и B – соответственно r и s формы со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то справедливы следующие формулы*:

$$\begin{aligned}[A,B]&=(-1)^{rs+1}[B,A],\\d[A,B]&=[dA,B]+(-1)^r[A,dB].\end{aligned}$$

Доказательство. Прямая проверка.

В дальнейшем особую роль будут играть формы, заданные на группе Ли $\hat{\mathbb{G}}$, со значениями в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. То есть в качестве многообразия $\mathbb{M}$ мы рассматриваем саму группу $\hat{\mathbb{G}}$, которую, для отличия, мы отметили шляпкой. Другими словами, рассмотрим два экземпляра одной и той же группы Ли: $\hat{\mathbb{G}}=\mathbb{G}$. Пусть $\hat{\omega}^{\text{A}}$ – левоинвариантный базис кокасательного расслоения к $\hat{\mathbb{G}}$. Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{g}$, как алгебру левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$ с базисом L_{A}.

Определение. Левоинвариантная 1-форма на группе Ли $\hat{\mathbb{G}}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$,

$$\theta := \hat{\omega}^{\text{A}} L_{\text{A}}, \tag{8.26}$$

называется *канонической*.

Если $X(\hat{a}) \in \mathcal{X}(\hat{\mathbb{G}})$ – векторное поле на $\hat{\mathbb{G}}$, то его можно разложить по левоинвариантному базису: $X = X^{\text{A}}(\hat{a})\hat{L}_{\text{A}}$. Тогда значение канонической формы на этом поле равно

$$\theta(X)(\hat{a}) = X^{\text{A}}(\hat{a})L_{\text{A}}.$$

То есть каждой точке $\hat{a} \in \hat{\mathbb{G}}$ ставится в соответствие левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{G}$. Эта форма будет использована при изучении связностей на главных расслоениях в разделе 13.1. Формулу Маурера–Картана (8.23) можно переписать для канонической формы

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta], \tag{8.27}$$

где справа стоит коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и внешние произведения 1-форм $\hat{\omega}^{\text{A}}$.

Наличие левоинвариантных форм на группе Ли позволяет доказать следующее

Предложение 8.2.6. *Любая группа Ли $\mathbb{G}$ является ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Левоинвариантные 1-формы ω^{A} определены на всем групповом многообразии и линейно независимы. Поэтому N-форма $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{\text{N}}$ нигде не обращается в нуль. Следовательно, согласно теореме 10.4.3, любая группа Ли ориентируема.

8.3. Действие группы справа

Все, сказанное относительно действия группы на себя слева, естественным образом переносится на действие группы справа. Ниже мы рассмотрим отличия, которые при этом возникают. Для простоты, рассмотрим локальную группу Ли, т.е. окрестность единицы группы.

Рассмотрим группу Ли $\mathbb{G}$, как группу преобразований, действующую справа:

$$\mathbb{G} \ni a: \quad \mathbb{G} \ni \quad b \ \mapsto \ r_a(b) := ba \quad \in \mathbb{G}.$$

Пусть

$$V_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a,b) := \frac{\partial f^{\text{A}}(a,b)}{\partial a^{\text{B}}}.$$

Дифференцируя тождество $f^{\text{A}}(a,0) = a^{\text{A}}$ по a^{B}, получаем равенство

$$V_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a,0) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}},$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Аналогично случаю левого действия группы, построим правоинвариантный базис векторных полей

$$R_{\text{A}}(a) = R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)\partial_{\text{B}}, \tag{8.28}$$

где

$$R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) := V_{\text{A}}{}^{\text{B}}(0,a) = \left.\frac{\partial f^{\text{B}}(b,a)}{\partial b^{\text{A}}}\right|_{b=0}. \tag{8.29}$$

В этом базисе произвольное правоинвариантное векторное поле имеет постоянные компоненты. Как и для левоинвариантных векторных полей, $\det R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) \neq 0$ для всех $a \in \mathbb{G}$.

Как и в случае левого действия группы, можно доказать, что правоинвариантные векторные поля образуют N-мерную алгебру Ли над полем вещественных чисел. При этом коммутатор векторов правоинвариантного базиса,

$$[R_{\text{A}}, R_{\text{B}}] = -f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} R_{\text{C}}, \tag{8.30}$$

отличается знаком структурных констант от коммутатора левоинвариантного базиса. Алгебры Ли лево- и правоинвариантных векторных полей изоморфны, поскольку переходят друг в друга после отображения $R_{\text{A}} \mapsto -R_{\text{A}}$.

Формула для коммутатора правоинвариантных векторных полей (8.30) справедлива, как легко видеть, глобально на всей группе Ли.

Из разложения функции композиции (8.8) следует разложение для компонент правоинвариантных векторных полей относительно координатного базиса

$$R_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) = \delta_{\text{B}}^{\text{A}} + a^{\text{C}}\hat{f}_{\text{CB}}{}^{\text{A}} + a^{\text{D}}a^{\text{C}}h_{\text{CDB}}{}^{\text{A}} + \cdots . \tag{8.31}$$

Из тождества $b = baa^{-1}$, записанного в касательном пространстве, следует равенство

$$R_{\text{B}}^{-1\,\text{A}}(a) = V_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a, a^{-1}). \tag{8.32}$$

Рассмотрим функцию $F(a) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{G})$ на группе Ли $\mathbb{G}$. Подействуем на точки многообразия бесконечно малым элементом $\epsilon \in \mathbb{G}$ справа. Тогда точка a перейдет в точку $a' = a + da$, где

$$da^{\text{A}} := f^{\text{A}}(a, \epsilon) - a^{\text{A}} = \epsilon^{\text{B}}L_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a).$$

Поскольку для функции $F'(a') = F(a)$, то изменение формы функции равно:

$$\delta F(a) := F'(a) - F(a) = -\epsilon^{\text{A}}L_{\text{A}}{}^{\text{B}}\partial_{\text{B}}F(a) = -\epsilon^{\text{A}}L_{\text{A}}F(a).$$

Таким образом, левоинвариантные векторные поля, с точностью до знака, являются генераторами действия группы Ли справа. Аналогично доказывается, что генераторами групповых преобразований слева являются правоинвариантные векторные поля.

Поскольку преобразования, вызванные действием группы слева и справа коммутируют, то отсюда следует, что лево- и правоинвариантные векторные поля коммутируют между собой,

$$[L_{\text{A}}, R_{\text{B}}] = 0. \tag{8.33}$$

Это равенство справедливо, конечно, глобально.

Из формулы для производной Ли от векторного поля (2.123) и равенства (8.33) следует, что производная Ли от правоинвариантного векторного поля вдоль левоинвариантного векторного поля равна нулю и наоборот.

В дальнейшем под алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$ всегда понимается множество левоинвариантных векторных полей, которые генерируют действие группы справа.

8.4. Присоединенное представление

Рассмотрим автоморфизм группы Ли,

$$\mathsf{ad}\,(a): \quad \mathbb{G} \ni \quad b \mapsto \mathsf{ad}\,(a)b := aba^{-1} \quad \in \mathbb{G}, \tag{8.34}$$

который сопоставляется каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$. Каждый автоморфизм группы Ли порождает автоморфизм ее алгебры Ли, потому что левоинвариантные векторные поля получены с помощью группового действия. Поэтому автоморфизм $\mathsf{ad}\,a$ порождает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который также обозначается $\mathsf{ad}\,a \in \mathbb{GL}(\text{N}, \mathbb{R})$.

Определение. Представление $a \mapsto \mathsf{ad}\,a$, где

$$\mathsf{ad}\,a: \quad \mathfrak{g} \ni \quad X = X_0^{\text{A}}L_{\text{A}} \mapsto X' = X_0^{\text{A}}S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)L_{\text{B}} \quad \in \mathfrak{g}, \tag{8.35}$$

индуцированное групповым действием (8.34), называется *присоединенным представлением* группы Ли $\mathbb{G}$ в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Присоединенное представление каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ ставит в соответствие $\text{N} \times \text{N}$ матрицу $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)$. Для краткости мы будем писать

$$\mathsf{ad}\,(a) = S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a).$$

Ясно, что единичному элементу группы соответствует единичная матрица

$$\mathsf{ad}\,(e) = S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(e) = \delta^{\text{B}}_{\text{A}},$$

а обратному элементу группы – обратная матрица

$$\mathsf{ad}\,(a^{-1}) = S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) = S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a).$$

Для абелевых групп присоединенное представление всегда тривиально.

Ядром отображения (8.34) является центр группы, т.е. множество всех тех элементов группы, которые коммутируют со всеми элементами группы $\mathbb{G}$. Каждому элементу центра группы соответствует единичная матрица присоединенного представления.

Для локальных неабелевых групп Ли можно построить явный вид матриц присоединенного представления в терминах функции композиции. С этой целью рассмотрим действие преобразования (8.34) в касательном пространстве в последовательности $b \mapsto (ab)a^{-1}$:

$$X^{\text{A}}(b) \mapsto X^{\text{C}}(b)U_{\text{C}}{}^{\text{B}}(a,b)V_{\text{B}}{}^{\text{A}}(f(a,b),a^{-1}).$$

Полагая $b=0$ и учитывая равенство (8.32), получаем отображение

$$X^{\text{A}}_0 \mapsto X^{\text{B}}_0 L_{\text{B}}{}^{\text{C}}(a)R^{-1}_{\text{C}}{}^{\text{A}}(a) := X^{\text{B}}_0 S_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a),$$

где введена матрица присоединенного представления $S_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$, сопоставляемая каждому элементу $a \in \mathbb{G}$. Таким образом получаем явные выражение для матрицы присоединенного представления через производные от функции композиции:

$$S_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) = L_{\text{B}}{}^{\text{C}}(a)R^{-1}{}_{\text{C}}{}^{\text{A}}(a) = R_{\text{B}}{}^{\text{C}}(a^{-1})L^{-1}{}_{\text{C}}{}^{\text{A}}(a^{-1}), \tag{8.36}$$

где последнее выражение получено в результате рассмотрения действия $\mathsf{ad}\,a$ в последовательности $a(ba^{-1})$. Из этого представления следует, что

$$S_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a^{-1}) = S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a).$$

Разложения (8.17) и (8.31) приводят к следующему разложению матрицы присоединенного представления вблизи начала координат

$$S_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}} + a^{\text{C}} f_{\text{CB}}{}^{\text{A}} + \cdots\,. \tag{8.37}$$

Отсюда следует, что структурные константы, взятые с обратным знаком, можно рассматривать, как генераторы присоединенного представления: $L_{(\text{A})\text{B}}{}^{\text{C}} = -f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$. При этом первый индекс A нумерует генераторы и, для отличия, взят в скобки. Второй и третий индексы структурных констант B,C рассматриваются, как матричные. Тождества Якоби (8.11) переписываются в виде

$$[L_{(\text{A})}, L_{(\text{B})}]_{\text{C}}{}^{\text{D}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} L_{(\text{E})\text{C}}{}^{\text{D}}, \tag{8.38}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор матриц.

Рассмотрим два последовательных автоморфизма группы Ли $\mathbb{G}$, соответствующих элементам b и a:

$$c \;\mapsto\; bcb^{-1} \;\mapsto\; abcb^{-1}a^{-1} = (ab)c(ab)^{-1}.$$

Соответствующее преобразование в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задается матрицей присоединенного представления для произведения $f(a,b)$

$$S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(f(a,b)) = S_{\text{A}}{}^{\text{C}}(b)S_{\text{C}}{}^{\text{B}}(a), \tag{8.39}$$

которая равна произведению матриц для каждого из элементов, но взятых в обратном порядке.

Пусть $b \ll 1$. Разложив равенство (8.39) в ряд по b с использованием формулы (8.37) и разложения для функции композиции,

$$f^{\text{A}}(a,b) = a^{\text{A}} + b^{\text{B}} L_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) + \cdots\,,$$

в первом порядке по b получим правило дифференцирования матрицы присоединенного представления

$$L_{\text{C}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}} = L_{\text{C}}{}^{\text{D}} \partial_{\text{D}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}} = f_{\text{CA}}{}^{\text{D}} S_{\text{D}}{}^{\text{B}}. \tag{8.40}$$

Из этого равенства с учетом тождества $L_{\text{C}}(S_{\text{A}}{}^{\text{D}}S^{-1}{}_{\text{D}}{}^{\text{B}})=0$ получаем правило действия левоинвариантных векторных полей на обратные матрицы присоединенного представления:

$$L_{\text{C}}S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}=-S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{D}}f_{\text{CD}}{}^{\text{B}}. \tag{8.41}$$

Аналогично, раскладывая соотношение (8.39) в ряд по $a\ll 1$, получим равенства

$$R_{\text{C}}S_{\text{A}}{}^{\text{B}}=R_{\text{C}}{}^{\text{D}}\partial_{\text{D}}S_{\text{A}}{}^{\text{B}}=S_{\text{A}}{}^{\text{D}}f_{\text{CD}}{}^{\text{B}}. \tag{8.42}$$

С учетом формулы $R_{\text{C}}(S_{\text{A}}{}^{\text{D}}S^{-1}{}_{\text{D}}{}^{\text{B}})=0$ это дает правило дифференцирования обратной матрицы

$$R_{\text{C}}S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}=-f_{\text{CA}}{}^{\text{D}}S^{-1}{}_{\text{D}}{}^{\text{B}}.$$

Замечание. Полученные формулы дифференцирования матриц присоединенного представления (8.40) и (8.42) нековариантны, поскольку частная производная от тензора не является тензором. Однако при рассмотрении алгебр Ли левоинвариантные векторные поля имеют постоянные компоненты относительно левоинвариантного базиса и поэтому достаточно ограничиться аффинными преобразованиями координат с постоянными коэффициентами. В этом случае частные производные преобразуются по тензорным правилам.

Предложение 8.4.1. *Структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$ инвариантны относительно присоединенного действия группы*:

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}=S_{\text{A}}{}^{\text{D}}S_{\text{B}}{}^{\text{E}}f_{\text{DE}}{}^{\text{F}}S^{-1}{}_{\text{F}}{}^{\text{C}}. \tag{8.43}$$

Доказательство. Подействуем присоединенным представлением (8.34) на групповое многообразие $\mathbb{G}$. Тогда базис левоинвариантных векторных полей преобразуется в соответствии с присоединенным представлением

$$L_{\text{A}}\mapsto S_{\text{A}}{}^{\text{B}}L_{\text{B}}.$$

При этом коммутационные соотношения (8.16) сохранят свой вид, поскольку действие дифференциала отображения сохраняет коммутатор векторных полей. Следовательно, для структурных констант справедливо соотношение

$$S_{\text{A}}{}^{\text{D}}S_{\text{B}}{}^{\text{E}}f_{\text{DE}}{}^{\text{C}}=f_{\text{AB}}{}^{\text{D}}S_{\text{D}}{}^{\text{C}}.$$

Умножив это равенство справа на S^{-1} получим (8.43).

8.5. Группы Ли как (псевдо)римановы пространства

На групповом многообразии $\mathbb{G}$ можно определить метрику, превратив тем самым группу Ли в (псевдо)риманово пространство. Среди всех возможных метрик важную роль играют метрики, инвариантные относительно групповых преобразований. Эти метрики описываются следующим образом. Зададим в начале координат произвольную симметричную невырожденную матрицу θ_{AB} и разнесем ее по групповому многообразию с помощью действия группы слева или справа. В результате получим соответственно лево- и правоинвариантные метрики. Компоненты этих метрик в лево- и правоинвариантном базисе имеют тот же вид θ_{AB}, что и начале координат. В координатном базисе $g=dx^{\text{A}}\otimes dx^{\text{B}}g_{\text{AB}}$ и компоненты метрик нетривиально зависят от точки $a\in\mathbb{G}$:

$$\begin{aligned} g^L_{\text{AB}}(a)&=L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a)L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a)\theta_{\text{CD}},\\ g^R_{\text{AB}}(a)&=R^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a)R^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a)\theta_{\text{CD}}, \end{aligned} \tag{8.44}$$

где индексами L и R отмечены соответственно лево- и правоинвариантная метрики. В общем случае лево- и правоинвариантные метрики различны и их компоненты в координатном базисе нетривиально зависят от точки группового многообразия.

Для абелевых групп лево- и правоинвариантные метрики равны, так как совпадают действия группы слева с справа.

Скалярное произведение левоинвариантных векторных полей: $X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}}$ и $Y = Y_0^{\text{A}} L_{\text{A}}$, определенное левоинвариантной метрикой, равно

$$g^L(X, Y) = X_0^{\text{A}} Y_0^{\text{B}} g^L(L_{\text{A}}, L_{\text{B}}) = X_0^{\text{A}} Y_0^{\text{B}} \theta_{\text{AB}}$$

и не зависит от точки группы Ли $\mathbb{G}$. Аналогично, скалярное произведение правоинвариантных векторных полей, определенное правоинвариантной метрикой равно константе.

Условия левой и правой инвариантности метрик в инвариантном виде имеют следующий вид. Пусть $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{G})$ – два произвольных векторных поля на группе Ли $\mathbb{G}$. Тогда лево- и правоинвариантные метрики определены соотношениями

$$\begin{aligned} l_a^* g^L(X, Y) &= g^L(l_{a*}X, l_{a*}Y), \\ r_a^* g^R(X, Y) &= g^R(r_{a*}X, r_{a*}Y), \end{aligned}$$

где l_a^* и r_a^* – отображения дифференциальных форм для левого и правого действия группы.

Особую роль играют двусторонне инвариантные метрики $g^L = g^R$ на неабелевых группах Ли. Для таких метрик скалярное произведение левоинвариантных векторных полей инвариантно относительно действия группы справа. Двусторонне инвариантные метрики существуют далеко не на всех группах Ли. Условие двусторонней инвариантности немедленно следует, например, из (8.44),

$$\theta_{\text{AB}} = S_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) S_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a) \theta_{\text{CD}}, \qquad \forall\, a \in \mathbb{G},$$

где $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ – матрица присоединенного представления. Для малых a, т.е. вблизи единицы группы это уравнение сводится к условию

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} \theta_{\text{DC}} + f_{\text{AC}}{}^{\text{D}} \theta_{\text{DB}} = 0. \tag{8.45}$$

То есть, если двусторонне инвариантная метрика на группе Ли существует, то структурные константы со всеми опущенными индексами должны быть антисимметричны по всем трем индексам.

Замечание. Двусторонне инвариантные метрики на группе Ли играют ту же роль, что и метрика Лоренца в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ или евклидова метрика в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Построим двусторонне инвариантную метрику на неабелевой группе Ли в том случае, когда это возможно.

Определение. Свертка структурных констант алгебры Ли

$$\eta_{\text{AB}} := -f_{\text{AC}}{}^{\text{D}} f_{\text{BD}}{}^{\text{C}} = -\,\mathsf{tr}\,(f_{\text{A}} f_{\text{B}}) \tag{8.46}$$

называется *формой Киллинга–Картана.*

Здесь мы рассматриваем структурные константы $f_{\text{AC}}{}^{\text{D}}$ в виде набора матриц. При этом второй и третий индексы рассматриваются, как матричные, а первый – нумерует матрицы. Форма (8.46) двусторонне инвариантна, что следует из инвариантности структурных констант (8.43).

Предложение 8.5.1. *Для произвольной группы Ли $\mathbb{G}$ структурные константы со всеми опущенными индексами,*

$$f_{\text{ABC}} := f_{\text{AB}}{}^{\text{D}} \eta_{\text{DC}}$$

антисимметричны по всем трем индексам,

$$f_{[abc]} = 0.$$

Доказательство. Прямое следствие тождеств Якоби (8.11), которое сводится к простой проверке.

Таким образом, если форма Киллинга–Картана является невырожденной, то она задает двусторонне инвариантную метрику на группе Ли. Форма Киллинга–Картана является невырожденной не для всякой группы Ли. Напомним, что связная группа Ли называется полупростой, если она не имеет нетривиальных инвариантных связных абелевых подгрупп.

Теорема 8.5.1 (Э. Картан). *Форма Киллинга–Картана для связной группы Ли является невырожденной тогда и только тогда, когда группа Ли является полупростой.*

Доказательство. Группа Ли полупроста если и только если она имеет полупростую алгебру Ли. Доказательство для полупростых алгебр Ли приведено, например, в [43], глава 1, §2, теорема 7.

Положительная определенность формы Киллинга–Картана связана с компактностью группового многообразия. А именно, справедлива

Теорема 8.5.2. *Связная полупростая группа Ли компактна тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана положительно определена.*

Доказательство. Доказательство для полупростых алгебр Ли приведено, например, в [44], теорема 4.3.2.

Отсюда следует, что форма Киллинга–Картана превращает компактную полупростую группу Ли в риманово многообразие с инвариантной метрикой. Для некомпактных полупростых групп Ли форма Киллинга–Картана не является знакоопределенной. Следовательно, в этом случае групповое пространство становится псевдоримановым многообразием.

Полупростые группы не исчерпывают весь класс групп Ли, на которых можно задать двусторонне инвариантную метрику. Например, на абелевых группах любая невырожденная матрица в единице, разнесенная по групповому многообразию, задает двусторонне инвариантную метрику.

Пример 8.5.1. Двумерная связная абелева группа Ли изоморфна либо евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ со сложением в качестве групповой операции, либо цилиндру, либо тору. Пусть x, y – декартовы координаты на плоскости. Тогда лево- и правоинвариантные векторные поля совпадают и равны

$$L_1 = R_1 = \partial_x, \qquad L_2 = R_2 = \partial_y.$$

Двусторонне инвариантная метрика на $\mathbb{R}^2$ получается путем разнесения произвольной симметричной невырожденной 2×2 матрицы θ_{AB}, $\text{A}, \text{B} = 1, 2$, заданной в начале координат, с помощью действия группы. В результате получаем двусторонне инвариантную метрику, которая в декартовых координатах имеет вид θ_{AB} для всех точек $\mathbb{R}^2$. Евклидова плоскость с такой метрикой является в общем случае однородным, но не изотропным пространством. При $\theta_{\text{AB}} = \delta_{\text{AB}}$ евклидова плоскость становится также изотропной, т.е. инвариантной также относительно действия группы вращений $\mathbb{O}(2)$. Цилиндр и тор в этом случае не инвариантны относительно вращений.

Форма Киллинга–Картана (8.46) задает метрику на групповом многообразии полупростой группы Ли $\mathbb{G}$ либо в лево-, либо в правоинвариантном базисе. Для определенности будем считать, что метрика задана в левоинвариантном базисе. Тогда в координатном базисе она будет нетривиально зависеть от точки группового многообразия:

$$g_{\text{AB}}(a) = L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a)\eta_{\text{CD}}.$$

Двусторонняя инвариантность формы Киллинга–Картана приводит к существованию, по крайней мере, 2N векторов Киллинга L_{A} и R_{A}. Уравнения Киллинга в неголономном базисе (6.109) выполнены ввиду антисимметрии символов Кристоффеля (8.47) по первым двум индексам.

Вычислим геометрические характеристики группового многообразия неабелевой полупростой группы Ли, рассматривая его, как (псевдо)риманово пространство с нулевым кручением и неметричностью. Вычисления можно проводить в любом базисе, но в данном случае удобнее рассматривать все характеристики многообразия в неголономном базисе, определяемом левоинвариантными векторными полями L_{A}, поскольку компоненты метрики в этом базисе постоянны. Соответствующие формулы для вычислений приведены в разделе 6.9.

Компоненты неголономности базиса определяются коммутатором левоинвариантных векторных полей (8.16) и совпадают со структурными константами:

$$c_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}.$$

Символы Кристоффеля в неголономном базисе, вычисленные по формуле (6.108), равны

$$\widetilde{\omega}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} f_{\text{ABC}}, \tag{8.47}$$

где знак тильды означает, что кручение и неметричность положены равными нулю. В рассматриваемом случае символы Кристоффеля антисимметричны по первым двум индексам ввиду неголономности используемого базиса. Соответствующий тензор кривизны также задается структурными константами:

$$\widetilde{R}_{\text{ABC}}{}^{\text{D}} = \frac{1}{4} f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} f_{\text{CE}}{}^{\text{D}}.$$

Отсюда вытекают выражения для тензора Риччи и скалярной кривизны:

$$\widetilde{R}_{\text{AB}} = \frac{1}{4}\eta_{\text{AB}}, \qquad \widetilde{R} = \frac{\text{N}}{4},$$

где N – размерность полупростой группы Ли.

Покажем, что полупростая группа Ли с формой Киллинга–Картана в качестве метрики, представляет собой пространство постоянной кривизны. В этом случае структурные константы f_{ABC} задают полностью антисимметричный ковариантный тензор третьего ранга в левоинвариантном базисе. Тогда ковариантная производная этого тензора со связностью (8.47),

$$\widetilde{\nabla}_{\text{A}} f_{\text{BCD}} = L_{\text{A}} f_{\text{BCD}} - \frac{1}{2} f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} f_{\text{ECD}} - \frac{1}{2} f_{\text{AC}}{}^{\text{E}} f_{\text{BED}} - \frac{1}{2} f_{\text{AD}}{}^{\text{E}} f_{\text{BCE}} = 0,$$

равна нулю в силу тождеств Бианки. Поскольку связность является метрической, а подъем и опускание индексов можно переставлять с оператором ковариантного дифференцирования, то ковариантная производная от тензора кривизны равна нулю,

$$\widetilde{\nabla}_{\text{A}} \widetilde{R}_{\text{BCD}}{}^{\text{E}} = 0.$$

Это и означает, что группа Ли как (псевдо)риманово пространство является пространством постоянной кривизны.

Тензор кривизны со всеми опущенными индексами в неголономном базисе имеет вид

$$\widetilde{R}_{\text{ABCD}} = -\frac{1}{4} f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} f_{\text{CDE}}, \tag{8.48}$$

в котором явно прослеживаются все свойства симметрии относительно перестановок индексов.

Замечание. Широкий класс (псевдо)римановых пространств $(\mathbb{M}, g)$ постоянной кривизны описывается метрикой, удовлетворяющей следующему соотношению

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \tag{8.49}$$

где C – некоторая постоянная. Группы Ли с формой Киллинга–Картана в качестве метрики дают пример пространств постоянной кривизны другого типа, для которых равенство (8.49) не выполнено. Действительно, равенство

$$f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} f_{\text{CDE}} = C(\eta_{\text{AC}}\eta_{\text{BD}} - \eta_{\text{AD}}\eta_{\text{BC}}), \qquad C = \mathsf{const},$$

не может быть выполнено ни при каких значениях константы C. Для доказательства достаточно свернуть это равенство сначала с η^{BD}, а затем с $f^{\text{CD}}{}_{\text{F}}$, что приведет к противоречию.

8.6. Группы Ли как пространства Римана–Картана

В предыдущем разделе связность на групповом многообразии определялась по метрике при нулевом кручении и неметричности. Ниже мы рассмотрим другой способ определения связности, который во многих отношениях является более естественным для групп Ли. А именно, отождествим групповое действие справа с параллельным переносом. Это означает, что результат параллельного переноса вектора из точки a в точку c совпадает с дифференциалом группового преобразования $c = f(a, b)$ под действием элемента $b := a^{-1}c$.

Формализуем данное определение связности. В рассматриваемом случае правоинвариантные векторные поля можно рассматривать, как результат параллельного переноса векторов из начала координат по всему групповому многообразию. Это означает, что в правоинвариантном базисе компоненты векторов постоянны, и, следовательно, компоненты связности равны нулю. Отсюда сразу вытекает равенство нулю тензора кривизны. То есть группа Ли с аффинной связностью, заданной групповой операцией, является пространством абсолютного параллелизма. Так и должно быть, потому что результат параллельного переноса вектора из точки a в точку $c = ab$ однозначно определяется начальной и конечной точкой и не зависит от пути, вдоль которого осуществляется параллельный перенос.

Кручение для рассматриваемой связности отлично от нуля. В правоинвариантном базисе, который удовлетворяет коммутационным соотношениям (8.30), компоненты тензора кручения, согласно формулам (6.106) имеют вид

$$T_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}.$$

Замечание. В данном определении связности наличие или отсутствие метрики на групповом многообразии не играет никакой роли.

Посмотрим, как выглядят основные геометрические объекты в левоинвариантном базисе. В левоинвариантном базисе правоинвариантное векторное поле имеет непостоянные компоненты:

$$X = X_0^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)\partial_{\text{B}} = X_0^{\text{A}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) L_{\text{B}},$$

где мы воспользовались представлением (8.36) для матрицы присоединенного представления. Несложные вычисления показывают, что разница компонент векторов в соседних точках равна

$$\delta X^{\text{A}}(a) := X^{\text{A}}(a + da) - X^{\text{A}}(a) = -X^{\text{C}} da^{\text{B}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}.$$

С другой стороны, при параллельном переносе компоненты вектора получают приращение, определяемое аффинной связностью:

$$\delta X^{\text{A}} = -X^{\text{C}} da^{\text{B}} \omega_{\text{BC}}{}^{\text{A}}.$$

Отсюда следует явное выражение для компонент аффинной связности в левоинвариантном базисе

$$\omega_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}. \tag{8.50}$$

Связность (8.50) отличается от связности Леви-Чивиты (8.47) множителем 1/2. Соответствующие тензоры кривизны и кручения, вычисленные по формулам для неголономного базиса (6.105) и (6.106), равны

$$R_{\text{ABC}}{}^{\text{D}} = 0, \tag{8.51}$$

$$T_{\text{AB}}{}^{\text{C}} = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}. \tag{8.52}$$

Равенство компонент тензора кривизны нулю соответствует тому, что групповое пространство является пространством абсолютного параллелизма. Компоненты тензора кручения в левоинвариантном базисе имеют тот же вид, что и в правоинвариантном. Это соответствует тому обстоятельству, что структурные константы инвариантны относительно действия присоединенного представления (8.43).

Компоненты связности (8.50) в левоинвариантном базисе определены независимо от метрики и для произвольных, не обязательно полупростых, групп. На полупростых группах Ли эта связность является метрической:

$$\nabla_{\text{A}} \eta_{\text{BC}} = -\omega_{\text{AB}}{}^{\text{D}} \eta_{\text{DC}} - \omega_{\text{AC}}{}^{\text{D}} \eta_{\text{BD}},$$

где η_{BC} – двусторонне инвариантная форма Киллинга–Картана. Это значит, что групповое многообразие полупростых групп Ли со связностью, определенной компонентами (8.50), представляет собой пространство Римана–Картана.

Группа Ли, рассматриваемая как пространство Римана–Картана является пространством постоянной (нулевой) кривизны и постоянного кручения. Действительно, ковариантная производная от тензора кривизны, очевидно, равна нулю. Ковариантная производная от тензора кручения со связностью (8.50),

$$\nabla_{\text{A}} T_{\text{BC}}{}^{\text{D}} = L_{\text{A}} T_{\text{BC}}{}^{\text{D}} - f_{\text{AB}}{}^{\text{E}} T_{\text{EC}}{}^{\text{D}} - f_{\text{AC}}{}^{\text{E}} T_{\text{BE}}{}^{\text{D}} + f_{\text{AE}}{}^{\text{D}} T_{\text{BC}}{}^{\text{E}} = 0,$$

также равна нулю в силу тождеств Якоби.

Данное определение связности не зависит от задания метрики на групповом многообразии, так как связность была определена исключительно групповой операцией. По построению, интегральные кривые правоинвариантных векторных полей на группе Ли являются геодезическими линиями для этой связности. Действительно, правоинвариантное векторное поле является касательным к интегральной кривой и в то же время является результатом параллельного переноса со связностью (8.50).

Замечание. Для задания на группе Ли инвариантной аффинной связности общего вида можно задать в некоторой точке метрику, кручение и тензор неметричности, а затем все эти объекты разнести по групповому многообразию.

8.7. Группа аффинных преобразований прямой

Проиллюстрируем общие свойства групп Ли на примере простейшей связной неабелевой группы Ли $\mathbb{G}$. Размерность этой группы минимальна и равна двум. Этот пример интересен, поскольку нетривиален и в то же время достаточно прост для явного построения всех геометрических конструкций. Это – один из немногих случаев, когда функцию композиции можно записать в явном виде на всем групповом многообразии.

Простейшая двумерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с образующими $\{L_{\text{A}}\} = (L_x, L_y)$, $\text{A} = x, y$, задается коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} &[L_x, L_x] = [L_y, L_y] = 0, \\ &[L_x, L_y] = \alpha L_y, \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.53}$$

При $\alpha = 0$ эта группа является абелевой. При $\alpha \neq 0$ растяжкой координат, которая соответствует преобразованию $L_x \to \alpha L_x$, можно обратить структурную константу в единицу, $\alpha = 1$. Мы этого делать не будем, чтобы следить за пределом $\alpha \to 0$. Группа, соответствующая этой алгебре является подгруппой группы Лоренца $\mathbb{SO}(1, 2)$.

Алгебра Ли (8.53) содержит инвариантную абелеву подгруппу, которая порождается образующей L_y. Поэтому она не является полупростой.

Предложение 8.7.1. *Алгебра Ли (8.53) является единственной двумерной неабелевой алгеброй Ли с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. В общем случае нетривиальное коммутационное соотношение для неабелевой алгебры Ли определяется двумя отличными от нуля постоянными α и β:

$$[L_x, L_y] = \beta L_x + \alpha L_y,$$

где хотя бы одна из постоянных отлична от нуля. Пусть $\beta \neq 0$. Тогда сдвигом

$$L_y \mapsto L_x + \frac{\alpha}{\beta} L_y$$

это коммутационное соотношение приводится к виду (8.53).

Покажем, что алгебра Ли (8.53) является алгеброй Ли группы аффинных преобразований прямой. Аффинные преобразования прямой $x \in \mathbb{R}$ параметризуются двумя числами $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \ni \quad x \mapsto ax + b \quad \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0.$$

Параметр a параметризует дилатации, а b – сдвиги. Генераторы дилатаций и сдвигов имеют, соответственно, следующий вид

$$L_1 := x\partial_x, \qquad L_2 := \partial_x.$$

Нетрудно вычислить соответсвующую алгебру Ли:

$$[L_1, L_2] = -L_2, \qquad [L_1, L_1] = [L_2, L_2] = 0,$$

которая совпадает с алгеброй Ли (8.53) при $\alpha = -1$. Таким образом, алгебра Ли (8.53) изоморфна алгебре Ли аффинных преобразований прямой.

Группа аффинных преобразований прямой двумерна и неабелева. Она состоит из двух компонент связности: $a > 0$ и $a < 0$. Каждая компонента связности диффеоморфна $\mathbb{R}^2$.

Опишем явно связную компоненту единицы аффинных преобразований прямой. Зададим алгебру Ли (8.53) двумя левоинвариантными векторными полями (генераторами действия группы справа) на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ в декартовых координатах x, y:

$$L_x := \partial_x, \qquad L_y := \mathsf{e}^{\alpha x}\partial_y. \tag{8.54}$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля действительно удовлетворяют алгебре (8.53). При $\alpha = 0$ группа Ли является абелевой и совпадает с группой трансляций плоскости. Поэтому ограничимся неабелевым случаем $\alpha > 0$. Структурные константы группы Ли равны

$$\begin{aligned} f_{xy}{}^x &= -f_{yx}{}^x = 0, \\ f_{xy}{}^y &= -f_{yx}{}^y = \alpha. \end{aligned}$$

Простые вычисления дают форму Киллинга–Картана (8.46)

$$\eta_{\text{AB}} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта форма вырождена, поскольку группа Ли $\mathbb{G}$ не является полупростой.

Постоим функцию композиции $f^{\text{A}}(a,b)$ в явном виде. Обозначим координаты элементов группы $a, b \in \mathbb{G}$ через $a = (x_a, y_a)$ и $b = (x_b, y_b)$. Тогда система дифференциальных уравнений на функцию композиции (8.18) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^x(a,b)}{\partial x_b} &= 1, \qquad & \frac{\partial f^y(a,b)}{\partial x_b} &= 0, \\ \frac{\partial f^x(a,b)}{\partial y_b} &= 0, \qquad & \frac{\partial f^y(a,b)}{\partial y_b} &= \mathsf{e}^{\alpha(f^x - x_b)}. \end{aligned}$$

Два уравнения на f^x с учетом начального условия $f^x(a,0) = x_a$ имеют единственное решение $f^x(a,b) = x_a + x_b$. Аналогично, оставшиеся уравнения определяют вторую компоненту функции композиции $f^y(a,b) = y_a + \mathsf{e}^{\alpha x_a} y_b$. Таким образом, дифференциальные уравнения (8.18) с начальными условиями $a^{\text{A}} = f^{\text{A}}(a,0)$ однозначно определили функцию композиции по левоинвариантным векторным полям L_{A}:

$$\{f^{\text{A}}(a,b)\} = (x_a + x_b, y_a + \mathsf{e}^{\alpha x_a} y_b). \tag{8.55}$$

Поскольку функция композиции определена для всех $a, b \in \mathbb{R}^2$ и отображает $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ на всю плоскость $\mathbb{R}^2$, то группа Ли $\mathbb{G}$, как многообразие, диффеоморфна евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, некомпактна.

Несложные вычисления показывают, что построенная функция композиции (8.55) действительно удовлетворяет всем групповым аксиомам (8.7) с обратным элементом:

$$a^{-1} = (-x_a, -\mathsf{e}^{-\alpha x_a} y_a).$$

Таким образом, мы построили неабелеву групповую структуру на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Вспомним также, что плоскость $\mathbb{R}^2$ можно рассматривать, как абелеву группу Ли двумерных трансляций. Тем самым мы показали, что на одном и том же многообразии возможно задание различных групповых структур.

Знание функции композиции позволяет вычислить все объекты на групповом многообразии, которые задаются групповым действием. В частности, правоинвариантные векторные поля (8.28) имеют вид:

$$R_x = \partial_x + \alpha y \partial_y, \qquad R_y = \partial_y, \tag{8.56}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [R_x, R_x] &= [R_y, R_y] = 0 \\ [R_x, R_y] &= -\alpha R_y, \end{aligned}$$

которые отличаются знаком от коммутационных соотношений алгебры Ли левоинвариантных векторных полей (8.53). Нетрудно также проверить, что лево- и правоинвариантные векторные поля коммутируют, $[L_{\text{A}}, R_{\text{B}}] = 0$.

Построим интегральные кривые левоинвариантных векторных полей. Произвольное левоинвариантное векторное поле задается двумя постоянными $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}$

$$L = X_0 \partial_x + Y_0 \,\mathsf{e}^{\alpha x} \partial_y.$$

Соответствующие интегральные кривые $(x(t), y(t))$ определяются системой уравнений

$$\dot{x} = X_0, \qquad \dot{y} = Y_0 \,\mathsf{e}^{\alpha x}.$$

При $X_0 \neq 0$, эти уравнения имеют общее решение, задающее интегральную кривую в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= X_0 t + x_0, \\ y &= \frac{Y_0}{\alpha X_0} \,\mathsf{e}^{\alpha x_0} (\,\mathsf{e}^{\alpha X_0 t} - 1) + y_0, \end{aligned}$$

где постоянные интегрирования x_0, y_0 являются координатами точки, через которую проходит интегральная кривая при $t = 0$. Отсюда следует соотношение, определяющее форму интегральной кривой

$$y = \frac{Y_0}{\alpha X_0} (\,\mathsf{e}^{\alpha x} - \,\mathsf{e}^{\alpha x_0}) + y_0.$$

При $X_0 = 0$ интегральные кривые параллельны оси y. Вид интегральных кривых, проходящих через начало координат под разными углами, которые определяются постоянными X_0, Y_0, показан на рис. 8.1 Интегральные кривые определены для всех значений параметра $t \in \mathbb{R}$ и поэтому левоинвариантные

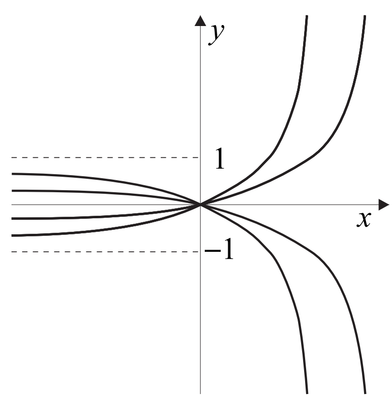

Рис. 8.1. Интегральные кривые для левоинвариантных векторных полей, проходящие через начало координат, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, под углом $\operatorname{arctg}(Y_0/X_0)$.

векторные поля полны.

Зададим теперь геометрию, т.е. метрику и аффинную связность, на группе Ли аффинных преобразований прямой $\mathbb{G} \approx \mathbb{R}^2$. Конечно, интерес представляют те геометрические объекты, которые согласованы с групповой операцией. Начнем с метрики. Поскольку группа Ли $\mathbb{G}$ неабелева и не является полупростой, то на ней не существует двусторонне инвариантной метрики. Лучшее, что можно сделать, это построить право- или левоинвариантную метрику. С этой целью зададим матрицу θ_{AB} в начале координат и разнесем ее, например, с помощью действия группы справа. Правоинвариантная метрика в координатном базисе (8.44) имеет вид

$$g_{\text{AB}} := g^R_{\text{AB}}(a) = R^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{C}}(a) R^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{D}}(a) \theta_{\text{CD}}, \tag{8.57}$$

где матрица θ_{AB} симметрична и невырождена, а в остальном совершенно произвольна. В частности, она может иметь лоренцеву сигнатуру, т.е. на группе Ли $\mathbb{G}$ можно построить как риманову, так и псевдориманову геометрию.

Рассмотрим случай, когда в начале координат задана единичная матрица, $\theta_{\text{AB}} = \delta_{\text{AB}}$. Тогда формула (8.57), в которой матрицы $R_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ определены равенствами (8.56), задает следующую правоинвариантную метрику в декартовых координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$

$$g_{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 y^2 & -\alpha y \\ -\alpha y & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.58}$$

Эта метрика имеет единичный определитель, $\det g_{\text{AB}} = 1$, и ее обратная имеет вид

$$g^{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha y \\ \alpha y & 1+\alpha^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления дают следующие выражения для символов Кристоффеля:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Gamma}_{xx}{}^x = -\alpha^3 y^2, && \widetilde{\Gamma}_{xx}{}^y = -\alpha^2 y(1+\alpha^2 y^2), \\ &\widetilde{\Gamma}_{xy}{}^x = \widetilde{\Gamma}_{yx}{}^x = \alpha^2 y, && \widetilde{\Gamma}_{xy}{}^y = \widetilde{\Gamma}_{yx}{}^y = \alpha^3 y^2, \\ &\widetilde{\Gamma}_{yy}{}^x = -\alpha, && \widetilde{\Gamma}_{yy}{}^y = -\alpha^2 y. \end{aligned}$$

У соответствующего тензора кривизны со всеми опущенными индексами только одна компонента отлична от нуля:

$$\widetilde{R}_{xyxy} = \alpha^2,$$

что можно переписать в ковариантном виде

$$\widetilde{R}_{\text{ABCD}} = \alpha^2 (g_{\text{AC}} g_{\text{BD}} - g_{\text{AD}} g_{\text{BC}}).$$

Тем самым групповое многообразие $\mathbb{G} \approx \mathbb{R}^2$ с метрикой (8.58) становится пространством постоянной кривизны. Соответствующий тензор Риччи и скалярная кривизна нетривиальны:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{xx} &= \alpha^2(1+\alpha^2 y^2), \\ \widetilde{R}_{xy} &= \widetilde{R}_{yx} = -\alpha^3 y, \\ \widetilde{R}_{yy} &= \alpha^2, \\ \widetilde{R} &= -2K = 2\alpha^2, \end{aligned}$$

где $K = -\alpha^2$ – гауссова кривизна двумерной группы Ли $\mathbb{G}$. Как многообразие, это – поверхность постоянной отрицательной кривизны (одна компонента двуполостного гиперболоида).

8.8. Гомоморфизмы групп Ли

Определение. Отображение $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ называется *гомоморфизмом групп Ли*, если f гладко и в то же время является гомоморфизмом групп. Если, кроме того, f является диффеоморфизмом, то отображение f называется *изоморфизмом групп Ли*. Изоморфизм группы Ли на себя называется ее *автоморфизмом*. *Ядром* гомоморфного отображения называется то множество элементов группы $\mathbb{G}$, которые отображаются в единичный элемент группы $\mathbb{H}$.

Из определения следует, что при гомоморфизме групп единичный элемент группы $\mathbb{G}$ всегда отображается в единичный элемент группы $\mathbb{H}$.

Можно доказать, что из непрерывности гомоморфизма $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ следует его гладкость [26], теорема 3.39. Поэтому в определении гомоморфизма достаточно потребовать его непрерывность.

Теорема 8.8.1. *Ядром гомоморфного отображения $\mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ всегда является инвариантная подгруппа $\mathbb{H}_1$ группы $\mathbb{G}_1$. При этом имеет место изоморфизм*

$$\frac{\mathbb{G}_1}{\mathbb{H}_1} \simeq \mathbb{G}_2.$$

Доказательство. См., например, [42], глава 1, § 3, теорема 1.

Определение. Гомоморфизм $\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ называется *представлением* группы Ли $\mathbb{G}$, если $\mathbb{H} = \mathsf{aut}\,(\mathbb{V})$ для некоторого векторного пространства $\mathbb{V}$, или $\mathbb{H} = \mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$, или $\mathbb{H} = \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Если гомоморфизм $\rho : \mathbb{G} \to \rho(\mathbb{G}) \subset \mathbb{H}$ является изоморфизмом, то представление называется *точным*. Представление ρ группы Ли $\mathbb{G}$ в векторном пространстве $\mathbb{V}$ мы обозначаем парой $(\rho, \mathbb{V})$.

В определении представления во всех трех случаях каждому элементу группы $\mathbb{G}$ ставится в соответствие матрица. Если элементами матриц являются вещественные или комплексные числа, то говорят, соответственно, о *вещественном* или *комплексном* представлении. При этом все матрицы имеют отличный от нуля определитель, так как у каждого элемента группы должен быть обратный элемент. Следовательно, каждой матрице представления соответствует некоторый автоморфизм векторного пространства. Для точного представления группы образ $\rho(\mathbb{G}) \subset \mathbb{H}$ совсем не обязательно совпадает со всем $\mathbb{H}$.

Пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм групп Ли. Так как под действием отображения f единица группы $\mathbb{G}$ переходит в единицу группы $\mathbb{H}$, то дифференциал отображения отображает касательные пространства к единицам групп:

$$f_* : \quad \mathbb{T}_e(\mathbb{G}) \ \to \ \mathbb{T}_e(\mathbb{H}).$$

Замечание. Единицы разных групп мы обозначаем одним и тем же символом e, так как это не приводит к путанице.

Поскольку касательные пространства к единицам изоморфны алгебрам Ли, то дифференциал отображения индуцирует отображение алгебр, которое мы также будем обозначать f_*. Таким образом,

$$f_* : \quad \mathfrak{g} \ \to \ \mathfrak{h}, \tag{8.59}$$

где образом $f_*(X)$ для $X \in \mathfrak{g}$ является единственное левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{H}$, такое, что в единице группы $e \in \mathbb{H}$ оно определено соотношением

$$f_*(X)(e) := f_*(X(e)).$$

Предложение 8.8.1. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ – группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, и пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда отображение* (8.59) *является гомоморфизмом алгебр Ли.*

Доказательство. Дифференциал отображения линеен и сохраняет скобку Ли (2.74).

Пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда отображение дифференциальных форм f^* отображает левоинвариантные 1-формы на $\mathbb{H}$ в левоинвариантные 1-формы на $\mathbb{G}$, как отображение сопряженного пространства к $\mathfrak{h}$ в сопряженное пространство к $\mathfrak{g}$.

Пример 8.8.1 (Обозначения). Запишем вектор из векторного пространства $\mathbb{V}$ в виде $X = X^i \boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \dots, \dim \mathbb{V}$, – некоторый фиксированный базис. Если задано представление $(\rho, \mathbb{V})$ группы Ли $\mathbb{G}$, то мы пишем

$$\mathbb{G} \ni a : \quad \mathbb{V} \ni \quad X = X^i \boldsymbol{e}_i \mapsto X' = X^i S_i{}^j \boldsymbol{e}_j \quad \in \mathbb{V}.$$

То есть каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ соответствует некоторая матрица $S_i{}^j(a)$. По определению, все элементы матрицы гладко зависят от a. Мы пишем

$$\rho : \quad \mathbb{G} \ni \quad a \mapsto S_i{}^j(a) \quad \in \mathsf{aut}\,\mathbb{V}.$$

Ясно, что единичному элементу группы соответствует единичная матрица,

$$S_i{}^j(e) = \delta_i^j,$$

а обратному элементу группы – обратная матрица,

$$S_i{}^j(a^{-1}) = S^{-1}{}_j{}^j(a).$$

Произведению двух элементов группы ab соответствует матрица

$$S_i{}^j(ab) = S_i{}^k(b) S_k{}^j(a),$$

которая равна произведению матриц для каждого элемента, взятых в обратном порядке. Порядок матриц является следствием принятого нами соглашения в теории групп преобразований, где элемент группы, по определению, действует на точку многообразия справа (см. раздел 9).

Дифференциал отображения ρ_* отображает алгебры Ли. В частности, генераторы алгебры Ли отображаются в матрицы,

$$\rho_*: \quad \mathfrak{g} \ni \quad L_{\text{A}} \mapsto L_{\text{A}i}{}^j \quad \in \mathsf{end}\,\mathbb{V}.$$

Матрицы представления $L_{\text{A}i}{}^j$ генераторов L_{A} удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и левоинвариантный базис векторных полей на группе Ли:

$$[L_{\text{A}}, L_{\text{B}}]_i{}^j = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} L_{\text{C}i}{}^j, \tag{8.60}$$

где $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$, определенные в (8.16).

Можно доказать, что матрицы представления группы Ли $\mathbb{G}$ вблизи единицы группы в линейном приближении имеют вид

$$S_i{}^j(da) = \delta_i^j - da^{\text{A}} L_{\text{A}i}{}^j + \dots, \tag{8.61}$$

где $da \in \mathbb{G}$ – элемент группы, близкий к единице.

Найдем правила дифференцирования матриц представления. С одной стороны, используя разложение (8.61), имеем равенство

$$S_i{}^j(f(a,da)) = S_i{}^k(da) S_k{}^j(a) = \left(\delta_i^k - da^{\text{A}} L_{\text{A}i}{}^k\right) S_k{}^j(a). \tag{8.62}$$

С другой стороны, матрицы представления можно разложить в ряд Тейлора:

$$S_i{}^j(f(a,da)) = S_i{}^j(a) + da^{\text{A}} L_{\text{A}} S_i{}^j, \tag{8.63}$$

где левоинвариантные векторные поля L_{A} действуют на матрицы представления, как дифференцирования, и мы воспользовались равенством

$$f^{\text{A}}(a,da) = a^{\text{A}} + da^{\text{B}} L_{\text{B}}{}^{\text{A}} + \cdots.$$

Сравнивая формулы (8.62) и (8.63), получаем правило дифференцирования матриц представления

$$L_{\text{A}} S_i{}^j = -L_{\text{A}i}{}^k S_k{}^j. \tag{8.64}$$

Дифференцируя равенство $S^{-1}S = \mathbb{1}$, получаем правило дифференцирования обратных матриц представления

$$L_{\text{A}} S^{-1}{}_i{}^j = S^{-1}{}_i{}^k L_{\text{A}k}{}^j. \tag{8.65}$$

Каждому автоморфизму $\rho(a)$ векторного пространства $\mathbb{V}$ соответствует гомоморфизм алгебр $\rho_*(a)$. Поскольку гомоморфизм алгебр сохраняет скобку Ли, то матрицы представления генераторов группы инвариантны:

$$L_{\text{A}i}{}^j = S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}} S^{-1}{}_i{}^k L_{\text{B}k}{}^l S_l{}^j, \tag{8.66}$$

где $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ – матрица присоединенного представления.

Продолжим общее рассмотрение.

Определение. Пара $(f, \mathbb{H})$ называется *подгруппой Ли* группы Ли $\mathbb{G}$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathbb{H}$ – группа Ли;
2) $(f, \mathbb{H})$ – подмногообразие в $\mathbb{G}$;
3) $f: \mathbb{H} \to \mathbb{G}$ – групповой гомоморфизм.

Пара $(f, \mathbb{H})$ называется *замкнутой подгруппой Ли* в $\mathbb{G}$, если к тому же $f(\mathbb{H})$ – замкнутое подмногообразие в $\mathbb{G}$.

Определение замкнутого подмногообразия было дано в разделе 2.10. Если группа Ли $\mathbb{G}$ связна и $\mathbb{H}$ не изоморфна $\mathbb{G}$, то размерность замкнутой подгруппы Ли всегда меньше размерности самой группы.

Пусть $(f, \mathbb{H})$ – подгруппа Ли в $\mathbb{G}$, и $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ – соответствующие алгебры Ли. Тогда дифференциал отображения f_* задает изоморфизм $\mathfrak{h}$ с подалгеброй $f_*(\mathfrak{h})$ в алгебре $\mathfrak{g}$.

Гомоморфизмы групп можно описать следующим образом. Пусть $f:\mathbb{G}\to\mathbb{H}$ – сюрьективное отображение. Если это отображение является взаимно однозначным, то мы имеем изоморфизм групп, $\mathbb{G}\simeq\mathbb{H}$. Если отображение f не является взаимно однозначным, то ядро этого отображения $\operatorname{ker} f$ представляет собой нормальную подгруппу в $\mathbb{G}$. Тогда фактор группа $\mathbb{G}/\operatorname{ker} f$ изоморфна $\mathbb{H}$. Если отображение f не является сюрьективным, то группа $\mathbb{G}$ сюрьективно отображается на какую то подгруппу $\mathbb{H}_1\subset\mathbb{H}$. Если отображение $\mathbb{G}$ на $\mathbb{H}_1$ взаимно однозначно, то отображение f является мономорфизмом. В противном случае, $\mathbb{G}/\operatorname{ker} f\simeq\mathbb{H}_1$.

Напомним, что подалгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{h}}$ в $\mathfrak{g}$ называется линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, для которого выполнено включение $[\tilde{\mathfrak{h}},\tilde{\mathfrak{h}}]\subset\tilde{\mathfrak{h}}$.

Теорема 8.8.2. *Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\tilde{\mathfrak{h}}$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. Тогда существует единственная связная подгруппа Ли $(f,\mathbb{H})$ группы $\mathbb{G}$ с алгеброй $\mathfrak{h}$, такая, что $f_*(\mathfrak{h})=\tilde{\mathfrak{h}}$.*

Доказательство. Основано на теореме Фробениуса [26], теорема 3.19. Левоинвариантные векторные поля из подалгебры $\mathfrak{h}$, согласно определению, находятся в инволюции. Из теоремы Фробениуса следует, что в каждой точке группы Ли они задают интегральные подмногообразия. Максимальное интегральное подмногообразие, проходящее через единицу группы, и есть подгруппа Ли $(f,\mathbb{H})$. Если $\dim\tilde{\mathfrak{h}}<\dim\mathfrak{g}$, то подалгебра Ли $\tilde{\mathfrak{h}}$ обязательно является замкнутым подмножеством в $\mathbb{G}$.

Следствие. *Существует взаимно однозначное соответствие между связными подгруппами Ли группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли.*

Теорема 8.8.3. *Пусть $(f,\mathbb{H})$ – подгруппа Ли группы Ли $\mathbb{G}$. Тогда отображение f является регулярным вложением тогда и только тогда, когда $(f,\mathbb{H})$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{G}$.*

Доказательство. См., например, [26], теорема 3.21.

8.9. Экспоненциальное отображение для групп Ли

Определение. Гомоморфизм $f:\mathbb{R}\to\mathbb{G}$ вещественной прямой, рассматриваемой как группа Ли по сложению, в группу Ли называется *однопараметрической подгруппой* группы Ли $\mathbb{G}$.

Подчеркнем, что однопараметрическая подгруппа Ли является не подмножеством в $\mathbb{G}$, а отображением.

Рассмотрим отображение соответствующих алгебр Ли. Элемент алгебры Ли $\mathfrak{r}$ вещественной прямой $t\in\mathbb{R}$ имеет вид $s\partial_t\in\mathfrak{r}$, где $s\in\mathbb{R}$ и ∂_t – базисный вектор касательного пространства к прямой $\mathbb{R}$ в нуле. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли $\mathbb{G}$, которую в данном случае удобнее отождествить с касательным пространством к единице группы. Рассмотрим произвольный элемент алгебры Ли $X\in\mathfrak{g}$. Тогда отображение

$$\mathfrak{r}\ni\quad s\partial_t\mapsto sX\quad\in\mathfrak{g}$$

является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{r}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Так как вещественная прямая односвязна, то по утверждению теоремы 8.11.8 существует единственная однопараметрическая подгруппа, для которой мы введем специальное обозначение

$$\exp{}_X:\quad\mathbb{R}\to\mathbb{G},\tag{8.67}$$

такая, что дифференциал соответствующего отображения отображает элементы алгебры Ли по следующему правилу

$$(\exp{}_X)_*(s\partial_t)=sX.\tag{8.68}$$

Определение. *Экспоненциальным отображением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в группу Ли $\mathbb{G}$ называется отображение

$$\exp:\quad\mathfrak{g}\ni\quad X\mapsto\exp(X):=\exp{}_X(1)\quad\in\mathbb{G}.\tag{8.69}$$

Происхождение такой терминологии будет ясно из дальнейшего, когда будет показано, что для линейной группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ экспоненциальное отображение задается показательной функцией от матрицы.

Рассмотрим экспоненциальное отображение (8.69) с точки зрения интегральных кривых для векторных полей, введенных в разделе 2.6.5. Обозначим координаты в окрестности единицы группы через a^{A},

$\text{A} = 1, \dots, \text{N}$, такие, что единице группы $e \in \mathbb{G}$ соответствует начало координат. Тогда отображение (8.67) в координатах задается набором функций $a^{\text{A}}(t)$, которые определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{a}^{\text{A}} = X^{\text{A}},$$

где X^{A} – компоненты левоинвариантного векторного поля X, с начальными условиями $a^{\text{A}}(0) = 0$. Другими словами, отображение $t \mapsto \mathsf{exp}_X(t)$ является единственной однопараметрической подгруппой в $\mathbb{G}$ с касательным вектором $X(0)$ в нуле.

Между интегральными кривыми левоинвариантных векторных полей и операцией коммутирования в алгебре Ли существует связь.

Предложение 8.9.1. *Пусть задано два левоинвариантных векторных поля $X, Y \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $a(t)$ и $b(t)$ интегральные кривые этих векторных полей, которые проходят через единицу группы. Тогда кривая*

$$c(t) := a(\sqrt{t})b(\sqrt{t})a^{-1}(\sqrt{t})b^{-t}(\sqrt{t})$$

касается векторного поля $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ в единице группы.

Доказательство. Прямая проверка.

Свойства экспоненциального отображения дает следующая

Теорема 8.9.1. *Рассмотрим произвольный элемент алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ на группе Ли $\mathbb{G}$. Тогда*
1) $\mathsf{exp}\,(tX) = \mathsf{exp}_X(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$;
2) $\mathsf{exp}\,[(t_1 + t_2)X] = \mathsf{exp}\,(t_1 X)\,\mathsf{exp}\,(t_2 X), \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
3) $\mathsf{exp}\,(-tX) = [\,\mathsf{exp}\,(tX)]^{-1}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$;
4) *отображение $\mathsf{exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ гладкое, и дифференциал отображения $\mathsf{exp}_* : \mathbb{T}_0(\mathfrak{g}) \to \mathbb{T}_e(\mathbb{G})$ – тождественное отображение (при обычных отождествлениях), так что exp задает диффеоморфизм окрестности нуля в алгебре $\mathfrak{g}$ на окрестность единицы в группе $\mathbb{G}$;*
5) *одномерное подмногообразие, полученное с помощью действия левых сдвигов $l_a \circ \mathsf{exp}_X \in \mathbb{G}$, – это единственная интегральная кривая левоинвариантного векторного поля X, проходящая при $t = 0$ через точку $a \in \mathbb{G}$;*
6) *однопараметрическая группа диффеоморфизмов X_t, порожденная левоинвариантным векторным полем X, задается правыми сдвигами*

$$X_t = r_{\mathsf{exp}_X(t)}.$$

Доказательство. См., например, [26], теорема 3.31.

Из свойства 5), в частности, следует, что все левоинвариантные векторные поля полны.

Замечание. Согласно теореме 2.6.6, векторное поле на компактном многообразии, не обращающееся в нуль, является полным. В то же время существует много примеров неполных векторных полей на некомпактных многообразиях. В случае групп Ли каждое право- или левоинвариантное векторное поле полно, даже если группа Ли некомпактна.

Для двух коммутирующих элементов алгебры Ли,

$$[X, Y] = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{g},$$

справедлива формула

$$\mathsf{exp}\,(X + Y) = \mathsf{exp}\,X\,\mathsf{exp}\,Y.$$

Экспоненциальное отображение согласовано с гомоморфизмом групп.

Теорема 8.9.2. *Пусть задан гомоморфизм групп Ли $f : \mathbb{H} \to \mathbb{G}$, тогда следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, "f"] & \mathbb{G} \\
\mathfrak{h} \arrow[u, "\mathsf{exp}"] \arrow[r, "f_*"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\mathsf{exp}"']
\end{tikzcd}$$

Доказательство. См., например, [26], теорема 3.32.

Следствие. *Любая однопараметрическая подгруппа в* $\mathbb{G}$ *имеет вид экспоненциального отображения* $t \mapsto \mathsf{exp}_X(t)$ *для некоторого* $X \in \mathfrak{g}$.

Если группа Ли $\mathbb{G}_0$ компактна и связна, то экспоненциальное отображение является сюрьективным, т.е. отображает алгебру Ли на все многообразие группы. Как показывают явные формулы для групп $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ экспоненциальное отображение не является взаимно однозначным: одному элементу группы Ли $\mathbb{G}_0$ в общем случае соответствует много различных элементов соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку n-мерная алгебра Ли как векторное пространство представляет собой вещественное n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, то при экспоненциальном отображении возникает параметризация связной компоненты единицы компактной группы Ли $\mathbb{G}_0$ точками евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с некоторым отношением эквивалентности. А именно, мы отождествляем те точки евклидова пространства, которые отображаются в один и тот же элемент группы. Экспоненциальное отображение является взаимно однозначным только в некоторой окрестности единицы группы $e \in \mathbb{G}_0$.

Предложение 8.9.2. *Пусть* $\mathbb{G}$ *– связная группа Ли с компактной алгеброй Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда экспоненциальное отображение* $\mathsf{exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$ *сюрьективно.*

Доказательство. См., например, [45], глава II, предложение 6.10.

Если алгебра Ли некомпактна, то экспоненциальное отображение в общем случае не является сюрьективным. Например, можно доказать, что матрицу

$$\begin{pmatrix} -\dfrac14 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$$

нельзя представить в виде экспоненты от матрицы из алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, состоящей из вещественных 2×2 матриц с нулевым следом.

8.10. Интегрирование на группах Ли

Рассмотрим группу Ли $\mathbb{G}$ размерности N. В разделе 8.2 было показано, что любая группа Ли является ориентируемым многообразием. Зафиксируем некоторую ориентацию на $\mathbb{G}$ и выберем левоинвариантную дифференциальную N-форму ω на $\mathbb{G}$, согласованную с ориентацией, которая нигде не обращается в нуль. Для этого достаточно выбрать ненулевую N-форму правильной ориентации, например, в единице группы, и разнести ее по групповому многообразию с помощью действия группы слева. Напомним, что действие группы и слева, и справа сохраняет ориентацию выбранного базиса.

Запишем условие левой инвариантности формы объема ω с помощью отображения дифференциальных форм. Пусть задано левое действие группы

$$l_a : \quad \mathbb{G} \ni \quad b \mapsto l_a b := ab \quad \in \mathbb{G}.$$

Тогда условие левой инвариантности принимает вид

$$\omega(b) = l_a^* \omega(ab),$$

где l_a^* – отображение дифференциальных форм.

Пусть на группе Ли $\mathbb{G}$ задана функция f с компактным носителем. Тогда определен интеграл

$$\int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(b), \tag{8.70}$$

где аргумент b соответствует переменной интегрирования. Этот интеграл зависит от формы ω, которую можно умножить на постоянный положительный множитель. В случае компактных групп Ли форму ω можно однозначно фиксировать с помощью дополнительного условия

$$\int_{\mathbb{G}} \omega(b) = 1.$$

Заметим, что если ω является формой объема, то ωf – это n-форма, и на нее также действует отображение дифференциальных форм.

Поскольку левое действие группы является диффеоморфизмом, то справедлива формула замены переменных интегрирования (3.73). В рассматриваемом случае она принимает вид

$$\int_{a\mathbb{G}} \omega(ab) f(ab) = \int_{\mathbb{G}} l_a^*(\omega(ab) f(ab)),$$

где в первом интеграле интегрирование ведется по ab, а во втором – по b. Поскольку $l_a^*(\omega(ab)f(ab)) = (l_a^*\omega(ab))f(ab)$, то из равенства $a\mathbb{G} = \mathbb{G}$ и левой инвариантности формы объема вытекает равенство интегралов

$$\int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(b) = \int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(ab).$$

Это означает что интеграл (8.70) от функции f является левоинвариантным.

Поставим вопрос о том, когда интеграл (8.70) является одновременно и правоинвариантным, т.е. выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(b) = \int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(ba).$$

Форма $r_a^*\omega$ по-прежнему левоинвариантна, потому что левые и правые сдвиги коммутируют между собой. Следовательно, форма $r_a^*\omega$ отличается от ω только постоянным положительным множителем, который может зависеть от a. Это значит, что на $\mathbb{G}$ существует положительная вещественная функция $\lambda(a) > 0$ такая, что

$$r_a^*\omega(ba) = \lambda(a)\omega(b).$$

Предложение 8.10.1. *Функция $\lambda(a)$ задает гомоморфизм группы Ли $\mathbb{G}$ в мультипликативную группу положительных чисел*:

$$\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b). \tag{8.71}$$

Доказательство. Вычислим действие двух отображений дифференциальных форм

$$r_a^* r_b^* \omega(cab) = r_a^* \lambda(b)\omega(ca) = \lambda(a)\lambda(b)\omega(c).$$

С другой стороны, для отображений дифференциальных форм выполнено равенство

$$r_a^* r_b^* = (r_b r_a)^* = r_{ab}^*,$$

где мы воспользовались формулой (2.80). Поэтому

$$r_a^* r_b^* \omega(cab) = r_{ab}^* \omega(cab) = \lambda(ab)\omega(c).$$

Следовательно, равенство (8.71) выполнено.

Определение. Функция $\lambda(a)$ называется *модулярной функцией.*

Предложение 8.10.2. *Модулярная функция связана с присоединенным представлением следующим соотношением*

$$\lambda(a) = |\operatorname{\mathsf{det}} \operatorname{\mathsf{ad}}(a)|, \qquad a \in \mathbb{G},$$

где $\mathsf{ad}\,(a)$ *– матрица присоединенного представления элемента группы a.*

Поскольку групповое действие является диффеоморфизмом, то справедливы равенства:

$$\int_{\mathbb{G}a} \omega(ba) f(ba) = \int_{\mathbb{G}} r_a^*(\omega(ba) f(ba)) = \int_{\mathbb{G}} \omega(b)\lambda(a) f(ba).$$

Отсюда следует, что левоинвариантный интеграл (8.70) является также правоинвариантным тогда и только тогда, когда $\lambda(a) = 1$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Группа Ли $\mathbb{G}$, для которой $\lambda(a) = 1$ называется *унимодулярной.*

Предложение 8.10.3. *Каждая компактная группа Ли является унимодулярной.*

Доказательство. Поскольку левоинвариантная форма объема на компактной группе Ли нормирована, то справедливы равенства:

$$1 = \int_{\mathbb{G}a} \omega(ba) = \int_{\mathbb{G}} r_a^* \omega(ba) = \lambda(a) \int_{\mathbb{G}} \omega(b) = \lambda(a).$$

Отсюда следует утверждение предложения.

Следовательно, интеграл от функции (8.70) по компактной группе Ли является одновременно и право-, и левоинвариантным.

Компактные группы Ли не исчерпывают весь класс унимодулярных групп.

Предложение 8.10.4. *Любая полупростая группа Ли является унимодулярной.*

Доказательство. См., например, [46], глава X, предложение 1.4.

Существуют также другие унимодулярные группы.

Определение. Мера интегрирования ω на группе Ли называется *левоинвариантной мерой Хаара*. В случае унимодулярной группы Ли мера ω называется *двусторонне инвариантной мерой Хаара*

Существование лево- или правоинвариантной меры на группе Ли, *меры Хаара*, возможно только для локально компактных групп Ли.

Поскольку левые и правые сдвиги на группе Ли коммутируют, то всякая абелева локально компактная группа Ли унимодулярна.

Пример 8.10.1. Рассмотрим вещественную прямую $x \in \mathbb{R}$ как группу сдвигов. Эта группа абелева, и ее двусторонне инвариантная мера Хаара имеет стандартный вид $\omega = dx$. Условие левой и правой инвариантности интеграла от непрерывной функции с компактным носителем хорошо известно:

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x+h),$$

где $h \in \mathbb{R}$.

Пример 8.10.2 (Группа Вейля). Группа Вейля состоит из верхне треугольных матриц вида

$$g(a,b,c) := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, с обычным правилом умножения. Эта группа трехмерна и диффеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^3$. Функция композиции для группы Вейля записывается в явном виде:

$$(a,b,c)(a',b',c') = (a+a', b+b', c+c'+ab').$$

Отсюда видно, что группа Вейля является неабелевой.

Нетрудно проверить, что якобиан отображений $g \mapsto g'g$ и $g \mapsto gg'$ равен единице. Поэтому евклидова мера в $\mathbb{R}^3$, заданная формулой

$$dg(a,b,c) := da\, db\, dc,$$

является двусторонне инвариантной мерой Хаара. Следовательно, группа Вейля унимодулярна.

Предложение 8.10.5. *Для унимодулярной группы справедливо равенство*

$$\int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(b) = \int_{\mathbb{G}} \omega(b) f(b^{-1}).$$

Доказательство. См., например, [43], глава 2, §3.

Типичное применение интеграла по компактной группе Ли состоит в следующем.

Определение. Рассмотрим представление $\rho : \mathbb{G} \to \mathsf{aut}(\mathbb{V})$ группы Ли $\mathbb{G}$ в группе автоморфизмов вещественного или комплексного векторного пространства $\mathbb{V}$, наделенного скалярным произведением. Представление ρ называется *унитарным* (когда $\mathbb{V}$ комплексное) или *ортогональным* (когда $\mathbb{V}$ вещественное), если для всех $u, v \in \mathbb{V}$ и всех $a \in \mathbb{G}$ выполнено равенство

$$(\rho(a)u, \rho(a)v) = (u, v). \tag{8.72}$$

Теорема 8.10.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – компактная группа Ли, и $\mathbb{V}$ – комплексное (вещественное) векторное пространство, в котором задано представление ρ группы $\mathbb{G}$. Тогда на $\mathbb{V}$ существует скалярное произведение, относительно которого представление ρ унитарно (ортогонально).*

Доказательство. Рассмотрим произвольное скалярной произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathbb{V}$. С его помощью определим новое скалярное произведение следующей формулой

$$(u, v) := \int_{\mathbb{G}} \omega(a) \, \langle \rho(a)u, \rho(a)v \rangle,$$

где интегрирование ведется по $a \in \mathbb{G}$ с двусторонне инвариантной мерой Хаара ω. Используя правую инвариантность интеграла, нетрудно убедиться в справедливости равенства (8.72).

8.11. Некоторые общие свойства групп Ли

Существует определенная связь между группами Ли, локальными группами Ли и алгебрами Ли. Сейчас мы приведем несколько утверждений об общем устройстве групп Ли и о связи между группами Ли и их алгебрами Ли.

Теорема 8.11.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – связная группа Ли, и $\mathbb{U}$ – некоторая окрестность единицы. Тогда*

$$\mathbb{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{U}^k, \tag{8.73}$$

где множество элементов $\mathbb{U}^k$ состоит из всех возможных произведений k элементов из $\mathbb{U}$.

Доказательство. См., например, [26], предложение 3.18.

Основываясь на этой теореме, иногда говорят, что произвольная окрестность единицы группы Ли (соответствующая локальная группа Ли) порождает всю связную компоненту единицы. Это не так. Знание локальной группы Ли недостаточно для построения всей связной компоненты единицы группы. Например, группы Ли $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ имеют одинаковые локальные группы Ли, однако не изоморфны. Дело в том, что в формуле (8.73) есть произведения большого числа элементов локальной группы Ли, которые лежат вне $\mathbb{U}$. То есть для построения связной компоненты единицы по формуле (8.73) необходимо знание правила умножения не только элементов локальной группы Ли, но и всех других элементов группы.

В то же время локальная группа Ли, как мы увидим ниже, однозначно с точностью до изоморфизма определяет связную и односвязную группу Ли (универсальную накрывающую).

Теорема 8.11.2 (Э. Картан). *Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли некоторой группы Ли $\mathbb{G}$.*

Доказательство. См., например, [42], глава 10, теорема 96.

Важность понятия локальной группы Ли заключается в следующем утверждении, которое является следствием теоремы Картана.

Теорема 8.11.3. *Каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой локальной группы Ли. Локальные группы Ли изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли.*

Доказательство. Приведено в разделе 8.2.

Другими словами, каждая алгебра Ли определяет локальную группу Ли с точностью до изоморфизма, но ни в коем случае группу Ли в целом.

В общем случае справедлива следующая

Теорема 8.11.4. *Каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует единственная, с точностью до изоморфизма, связная односвязная группа Ли $\widetilde{\mathbb{G}}$ (универсальная накрывающая), для которой $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Все связные группы Ли, для которых $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли имеют вид $\widetilde{\mathbb{G}}/\mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ – дискретный нормальный делитель, лежащий в центре группы Ли $\mathbb{G}$.*

Доказательство. См., например, [13], §6, раздел 6.3, теорема 2.

Напомним, что центром группы $\mathbb{G}$ называется множество всех элементов группы, которые перестановочны со всеми элементами из $\mathbb{G}$. Слово дискретный в сформулированной теореме означает, что подмножество $\mathbb{D} \subset \mathbb{G}$ состоит из отдельных точек.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных алгебр Ли и классами изоморфных связных и односвязных групп Ли.

При описании связи между группами Ли, локальными группами Ли и алгебрами Ли используется

Теорема 8.11.5 (О монодромии). *Пусть $\mathbb{G}$ – связная односвязная группа Ли, и $\mathbb{H}$ – произвольная группа Ли. Тогда всякий локальный гомоморфизм $\mathbb{G}$ в $\mathbb{H}$ (т.е. гомоморфизм соответствующих локальных групп), однозначно продолжается до глобального гомоморфизма $\mathbb{G}$ в $\mathbb{H}$.*

Доказательство. См., например, [13], §6, раздел 6.3.

В теореме 8.11.4 мы упомянули универсальную накрывающую группы Ли. Общая теория накрытий для многообразий рассмотрена далее в главе 11. Ниже мы сформулируем несколько утверждений, касающихся накрытий групп Ли.

Определение. Непрерывное отображение топологических пространств $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ называется *накрытием*, если выполнены следующие условия:

1) p сюрьективно;
2) для любого $x \in \mathbb{M}$ найдется открытая окрестность $\mathbb{U}_x$ точки x такая, что $p^{-1}(\mathbb{U}_x) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{U}_j$ для некоторого семейства открытых подмножеств $\mathbb{U}_j \subset \widetilde{\mathbb{M}}$, удовлетворяющих условиям $\mathbb{U}_j \bigcap \mathbb{U}_k = \varnothing$ при $j \neq k$ и сужение отображения $p|_{\mathbb{U}_j} : \mathbb{U}_j \to \mathbb{U}_x$ – гомеоморфизм для всех $j \in \mathcal{J}$.

Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *базой* накрытия, а $\widetilde{\mathbb{M}}$ – *накрывающим пространством*. Если топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ является односвязным, то накрытие называется *универсальным*.

В рассматриваемом случае базой накрытия является группа Ли $\mathbb{M} = \mathbb{G}$. Если накрывающее пространство односвязно, то на нем можно индуцировать групповую структуру, которая превращает накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}} = \widetilde{\mathbb{G}}$ в группу Ли, а накрывающее отображение p в гомоморфизм групп. Доказательство следующих трех теорем приведено в [26] (теорема 3.25, предложение 3.26 и теорема 3.27).

Теорема 8.11.6. *Каждая связная группа Ли $\mathbb{G}$ обладает универсальным накрывающим пространством $\widetilde{\mathbb{G}}$, которое само является группой Ли, причем накрывающее отображение – гомоморфизм групп Ли.*

Теорема 8.11.7. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ – связные группы Ли, и $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ – гомоморфизм. Отображение f является накрытием тогда и только тогда, когда дифференциал отображения $f_* : \mathbb{T}_e(\mathbb{G}) \to \mathbb{T}_e(\mathbb{H})$ является изоморфизмом касательных пространств к единицам групп.*

Теорема 8.11.8. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ – связные группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, и пусть группа Ли $\mathbb{G}$ является односвязной. Пусть $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ – гомоморфизм алгебр Ли. Тогда существует единственный гомоморфизм групп Ли $f : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$, такой, что $f_* = \varphi$.*

Следствие. *Если алгебры Ли связных и односвязных групп Ли $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ изоморфны, то сами группы $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ изоморфны.*

В сформулированных утверждениях важно, чтобы группы Ли были связны, так как в противном случае теоремы не верны.

Пусть $e \in \mathbb{G}$ – единица группы Ли. Согласно определению накрытия, множество прообразов $p^{-1}(e) \in \widetilde{\mathbb{G}}$ является конечным или счетным. В случае гомоморфизма групп $\widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ справедливо равенство

$$p(\tilde{a}\tilde{b}) = p(\tilde{a})p(\tilde{b}), \qquad \forall\, \tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{\mathbb{G}}.$$

Из этого равенства немедленно следует, что элементы прообраза $p^{-1}(e)$ образуют абелеву подгруппу в $\widetilde{\mathbb{G}}$. Более того, эта абелева подгруппа лежит в центре группы Ли $\widetilde{\mathbb{G}}$. Введем для нее обозначение $\mathbb{D} := p^{-1}(e)$. Поскольку $\mathbb{D}$ – нормальная подгруппа, то универсальное накрытие групп Ли всегда можно представить в виде фактор группы

$$\mathbb{G} = \frac{\widetilde{\mathbb{G}}}{\mathbb{D}},$$

где $\widetilde{\mathbb{G}}$ – универсальная накрывающая группы Ли $\mathbb{G}$, а $\mathbb{D}$ – дискретный нормальный делитель, лежащий в центре группы Ли $\mathbb{G}$.

Забегая вперед, отметим, что из теоремы 11.1.5 немедленно вытекает

Теорема 8.11.9. *Для любой связной группы Ли $\mathbb{G}$ ее фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{G})$ изоморфна группе $\mathbb{D}$ и, следовательно, абелева и лежит в центре универсальной накрывающей группы $\widetilde{\mathbb{G}}$.*

Следующая теорема говорит о том как устроены некоторые некомпактные группы Ли с топологической точки зрения.

Теорема 8.11.10. *Пусть $\mathbb{G}$ – связная некомпактная полупростая группа Ли $\mathbb{G}$ и $\mathbb{K} \subset \mathbb{G}$ – ее некоторая максимальная компактная подгруппа. Тогда существует такое подмногообразие $\mathbb{U}$ в $\mathbb{G}$, диффеоморфное евклидову пространству, что отображение*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{U} \ni \quad (k, u) \mapsto ku \quad \in \mathbb{G}$$

является диффеоморфизмом прямого произведения $\mathbb{K} \times \mathbb{U}$ на $\mathbb{G}$.

Доказательство. См., например, [45], глава VI, теорема 2.2.

Данная теорема означает, что, как многообразие, любая связная некомпактная полупростая группа Ли представляет собой прямое произведение

$$\mathbb{G} \approx \mathbb{K} \times \mathbb{R}^{\mathsf{dim}\,\mathbb{G} - \mathsf{dim}\,\mathbb{K}} \tag{8.74}$$

некоторого компактного многообразия и евклидова пространства.

Пример 8.11.1. Рассмотрим произвольную $n \times n$ матрицу $M \in \mathbb{SL}(n, \mathbb{R})$ с единичным определителем. Согласно теореме о полярном разложении матриц, она единственным образом представляется в виде произведения $M = SA$, где $S \in \mathbb{SO}(n)$ – некоторая специальная ортогональная матрица и A – симметричная положительно определенная матрица с единичным определителем, $\mathsf{det}\,A = 1$. Группа $\mathbb{SL}(n, \mathbb{R})$ связна, некомпактна и проста. Группа $\mathbb{SO}(n)$ связна, компактна и является подгруппой в $\mathbb{SL}(n, \mathbb{R})$. Ее размерность равна $n(n-1)/2$. Множество симметричных положительно определенных матриц с единичным определителем диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$. Таким образом, как многообразие группа $\mathbb{SL}(n, \mathbb{R})$ диффеоморфна прямому произведению

$$\mathbb{SL}(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}.$$

8.12. Полупрямое произведение групп

Введем важное понятие полупрямого произведения двух групп, которое обобщает прямое произведение групп. Для этого нам понадобится несколько предварительных определений и утверждений. Напомним, что сюрьективное гомоморфное отображение группы (в том числе группы Ли) на себя называется автоморфизмом. При этом единица группы отображается в себя.

Пример 8.12.1. Рассмотрим группу $\mathbb{G}$ и произвольный элемент $b \in \mathbb{G}$. Тогда преобразование подобия

$$a \mapsto bab^{-1},$$

как легко проверить, задает автоморфизм. Такие автоморфизмы называются *внутренними*. Все другие виды автоморфизмов называются *внешними*.

Теорема 8.12.1. *Множество автоморфизмов группы* $\mathbb{G}$ *само образуют группу, которая называется группой автоморфизмов группы* $\mathbb{G}$ *и обозначается* $\mathsf{aut}\,\mathbb{G}$.

Доказательство. Проводится простой проверкой групповых аксиом, причем единицей группы $\mathsf{aut}\,\mathbb{G}$ служит тождественное отображение $\mathsf{id}:\mathbb{G}\to\mathbb{G}$.

Поскольку внутренние автоморфизмы сами образуют группу, то они образуют подгруппу группы $\mathsf{aut}\,\mathbb{G}$. Если группа $\mathbb{G}$ допускает гомоморфное отображение на свою подгруппу $\mathbb{H}\subset\mathbb{G}$, то говорят, что она допускает *эндоморфизм*.

Прямое произведение групп определено для произвольных групп. Полупрямое произведение двух групп $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ определено только в том случае, когда $\mathbb{G}$ является группой автоморфизмов $\mathbb{H}$.

Определение. Рассмотрим две группы $\mathbb{H}$ и $\mathbb{G}\subset\mathsf{aut}\,\mathbb{H}$. Обозначим их элементы через $a,b,\dots$ и $\alpha,\beta,\dots$ соответственно. Тогда *полупрямым произведением* $\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}$ групп $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ называются все возможные упорядоченные пары (α,a) со следующим законом композиции

$$(\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H})\times(\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H})\ni\quad(\alpha,a)\ltimes(\beta,b):=(\alpha\beta,\alpha(b)a)\quad\in\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H},$$

где $\alpha(b)$ – образ элемента b при автоморфизме, соответствующем элементу α.

Нетрудно проверить групповые аксиомы. Прямые вычисления показывают, что полупрямое произведение трех элементов ассоциативно:

$$(\alpha,a)\ltimes(\beta,b)\ltimes(\gamma,c)=(\alpha\beta\gamma,\alpha(c)\beta(c)\alpha(b)a).$$

Единица полупрямого произведения определяется единицами в группах $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}\ni e=(e_{\mathbb{G}},e_{\mathbb{H}}),\qquad e_{\mathbb{G}}\in\mathbb{G},\ e_{\mathbb{H}}\in\mathbb{H}.$$

Обратный элемент имеет вид

$$(\alpha,a)^{-1}=(\alpha^{-1},\alpha^{-1}(a^{-1})).$$

Перечислим некоторые свойства полупрямого произведения.

1) Группы $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ естественно вложены в $\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}$. Это вложение задается отображениями $\alpha\mapsto(\alpha,e_{\mathbb{H}})$ и $a\mapsto(e_{\mathbb{G}},a)$. При этом группа $\mathbb{H}$ является нормальной подгруппой в $\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}$, и существует изоморфизм

$$\mathbb{G}\simeq\frac{\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}}{\mathbb{H}}.$$

2) Каждый элемент полупрямого произведения групп $g\in\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}$ взаимно однозначно представим в виде $g=(\alpha,a)$, где $\alpha\in\mathbb{G}$ и $a\in\mathbb{H}$. Это свойство оправдывает название “полупрямое произведение”.

3) Заданное действие группы $\mathbb{G}$ в группе $\mathbb{H}$ с помощью автоморфизмов $\mathsf{aut}\,\mathbb{H}$ совпадает с действием $\mathbb{G}$ в $\mathbb{H}$, которое определяется сужением внутренних автоморфизмов в полупрямом произведении $\mathbb{G}\ltimes\mathbb{H}$ на группу $\mathbb{H}$.

Можно доказать, что любая группа, обладающая свойствами 1)–3), изоморфна полупрямому произведению некоторых подгрупп (свойство универсальности полупрямого произведения).

Введенное выше полупрямое произведение относится к произвольным группам, в том числе и к группам Ли.

Заметим, что прямое произведение является частным случаем полупрямого произведения групп. Оно возникает, если гомоморфизм $\mathbb{G}\to\mathsf{aut}\,\mathbb{H}$ тривиален, т.е. каждому элементу группы $\mathbb{G}$ соответствует тождественное преобразование группы $\mathbb{H}$.

Пример 8.12.2. Группа Ли аффинных преобразований прямой, рассмотренная в разделе 8.7, является полупрямым произведением группы дилатаций (группа $\mathbb{G}$) на группу сдвигов (группа $\mathbb{H}$). Действительно, совершим два преобразования с параметрами (β,b) и (α,a):

$$x\ \mapsto\ \beta x+b\ \mapsto\ \alpha(\beta x+b)+a=\alpha\beta x+\alpha b+a,$$

где греческими буквами обозначены параметры дилатаций. Тогда закон умножения в группе запишется в виде

$$(\alpha,a)\ltimes(\beta,b)=(\alpha\beta,\alpha b+a),$$

что соответствует полупрямому произведению.

Пример 8.12.3. В физике важную роль играет группа Пуанкаре $\mathbb{IO}(1, n-1)$, $n \geqslant 2$, которая равна полупрямому произведению группы Лоренца на группу сдвигов. При этом каждому элементу группы Лоренца соответствует вращение (автоморфизм) пространства Минковского, которое рассматривается как группа сдвигов.

Ограничимся собственной ортохронной группой Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, n-1)$ (связной компонентой единицы). Тогда группа Пуанкаре является связной как полупрямое произведение связных подгрупп. Она не является односвязной, поскольку собственная ортохронная группа Лоренца не является односвязной.

Алгебра Ли группы Пуанкаре $\mathfrak{l} + \mathfrak{t}$ состоит из преобразований Лоренца $\mathfrak{l}$ и сдвигов $\mathfrak{t}$ со следующими коммутационными соотношениями:

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}, \qquad [\mathfrak{l}, \mathfrak{t}] = \mathfrak{t}, \qquad [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0.$$

Мы видим, что алгебра Ли группы Пуанкаре имеет две подалгебры $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{t}$. При этом подгруппа сдвигов является инвариантной, и ей соответствует идеал $\mathfrak{t}$. Факторалгебра Ли $(\mathfrak{l} + \mathfrak{t})/\mathfrak{t}$ изоморфна алгебре Лоренца $\mathfrak{so}(1, n-1)$. Линейное факторпространство $(\mathfrak{l} + \mathfrak{t})/\mathfrak{l}$ изоморфно пространству Минковского, но не является факторалгеброй Ли.

8.13. Алгебры Ли

Алгебры Ли уже давно стали важным самостоятельным разделом математики. В настоящем разделе мы приведем определения и кратко рассмотрим основные свойства алгебр Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерное векторное (линейное) пространство над полем вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел. Если в $\mathfrak{g}$ задана билинейная операция (коммутатор), которую мы обозначим квадратными скобками,

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni \quad X, Y \mapsto Z := [X, Y] \quad \in \mathfrak{g}, \tag{8.75}$$

такая, что выполнены два условия:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ – антисимметрия,

2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ – тождества Якоби,

то множество векторов $\mathfrak{g}$ называется вещественной или комплексной *алгеброй Ли*. *Размерностью* алгебры Ли называется ее размерность как векторного пространства. Алгебра Ли называется *абелевой* или *коммутативной*, если $[X, Y] = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Мы уже достаточно подробно рассмотрели алгебру Ли векторных полей. Ниже мы рассматриваем алгебры Ли с абстрактной точки зрения.

В приложениях, как правило, используются вещественные алгебры и группы Ли. Поскольку алгебры Ли являются векторными пространствами, то они допускают естественную комплексификацию, которая будет описана ниже. Оказывается, что простые комплексные алгебры Ли допускают классификацию, что приводит к классификации простых вещественных алгебр Ли. Поэтому в настоящем разделе мы рассматриваем алгебры Ли над полем как вещественных, так и комплексных чисел. При этом комплексные алгебры Ли следует рассматривать, в первую очередь, как средство для изучения вещественных алгебр Ли.

Как многообразие алгебра Ли диффеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ и поэтому некомпактна. С другой стороны, каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли. Поэтому введем

Определение. Алгебра Ли, изоморфная алгебре Ли некоторой компактной группы Ли, называется *компактной.*

Пример 8.13.1. Рассмотрим абелеву группу Ли $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ по сложению. Эта группа некомпактна. С другой стороны, N-мерный тор $\mathbb{T}^{\mathrm{N}} = \mathbb{U}(1) \times \cdots \times \mathbb{U}(1)$ также является абелевой группой, но уже компактной. Их алгебры Ли изоморфны и, согласно определению, компактны.

Таким образом, компактная алгебра Ли может быть также алгеброй Ли некомпактной группы. Это связано с наличием абелевых инвариантных подгрупп.

Теорема 8.13.1. *Всякая связная группа Ли с компактной полупростой алгеброй Ли компактна.*

Доказательство. См., например, [42], глава 11, §61.

Пусть e_{A}, $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$, – базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g} = \text{N}$ или $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g} = \text{N}$, рассматриваемой как векторное пространство. Число N является (комплексной) размерностью алгебры Ли. Любой элемент алгебры Ли представим виде $X = X^{\text{A}}e_{\text{A}} \in \mathfrak{g}$, где X^{A} вещественные или комплексные компоненты вектора X. Коммутатор двух базисных векторов всегда можно разложить по базису:

$$[e_{\text{A}}, e_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}e_{\text{C}}, \tag{8.76}$$

где $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ – структурные константы алгебры Ли. Из антисимметрии коммутатора и тождеств Якоби следует, что структурные константы удовлетворяют следующим тождествам:

$$\begin{aligned} f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} &= -f_{\text{BA}}{}^{\text{A}}, \\ f_{\text{AB}}{}^{\text{D}}f_{\text{CD}}{}^{\text{E}} + f_{\text{BC}}{}^{\text{D}}f_{\text{AD}}{}^{\text{E}} + f_{\text{CA}}{}^{\text{D}}f_{\text{BD}}{}^{\text{E}} &= 0. \end{aligned} \tag{8.77}$$

Равенство $Z = [X, Y]$ в компонентах принимает вид

$$Z^{\text{A}} = [X, Y]^{\text{A}} = X^{\text{B}}Y^{\text{C}}f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}.$$

Несмотря на свое название структурные константы не являются постоянными. При изменении базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ они преобразуются как компоненты тензора третьего ранга с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является кольцом (со сложением и умножением) и одновременно векторным пространством над полем вещественных или комплексных чисел. Нулевой элемент алгебры Ли $0 \in \mathfrak{g}$ является единичным элементом по отношению к сложению векторов в $\mathfrak{g}$. Однако он не является единичным элементом по отношению к умножению (коммутатору), поскольку $[X, 0] = 0 \neq X$ для всех отличных от нуля элементов $X \in \mathfrak{g}$. Следовательно, единица в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, которую мы рассматриваем в данном случае как кольцо, отсутствует.

В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ умножение задается коммутатором, и поэтому в общем случае она является некоммутативной алгеброй. Ясно также, что умножение в алгебре Ли, которое задается коммутатором, неассоциативно. Условие ассоциативности при этом заменяется на тождества Якоби.

Если A – произвольная конечномерная ассоциативная алгебра с законом умножения

$$A \times A \ni \quad X, Y \mapsto X \cdot Y \quad \in A,$$

то ее можно снабдить также структурой алгебры Ли, если положить

$$[X, Y] := X \cdot Y - Y \cdot X.$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Не каждую алгебру Ли можно снабдить структурой ассоциативной алгебры. Примером является алгебра Ли векторных полей.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ – два линейных подпространства в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{h} + \mathfrak{f}$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{f}]$ множество всех векторов вида $X + Y$ и $[X, Y]$, где $X \in \mathfrak{h}$ и $Y \in \mathfrak{f}$.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абелева, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Каждая алгебра Ли содержит нетривиальную абелеву подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Например, все элементы вида $X = aX_0$, где $a \in \mathbb{R}$ или $a \in \mathbb{C}$, которые пропорциональны некоторому фиксированному элементу $X_0 \in \mathfrak{g}$, образуют абелеву подалгебру $X \in \mathfrak{h}$, поскольку $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Пусть $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{f}$ – линейные подпространства в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, тогда нетрудно проверить следующие соотношения:

$$[\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \mathfrak{f}] \subset [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{f}] + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{f}], \tag{8.78}$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{f}] \subset [\mathfrak{f}, \mathfrak{h}], \tag{8.79}$$

$$[[\mathfrak{h}, \mathfrak{f}], \mathfrak{g}] \subset [[\mathfrak{f}, \mathfrak{g}], \mathfrak{h}] + [[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}], \mathfrak{f}]. \tag{8.80}$$

Второе включение является следствием того обстоятельства, что если $X \in \mathfrak{h}$, то также $-X \in \mathfrak{h}$. Последнее включение является следствием тождеств Якоби.

Определение. Линейное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли*, если выполнено включение $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. То есть оно само является алгеброй Ли. Линейное подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ называется *идеалом*, если выполнено включение $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{a} \ni X$ является левым идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Тогда все элементы вида $-X$ также лежат в $\mathfrak{a}$, так как элементы идеала должны быть подгруппой по отношению к сложению. Поскольку для левого идеала $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$, то каждый левый идеал совпадает с правым и наоборот. Поэтому в алгебре Ли все идеалы являются двусторонними.

Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит по крайней мере два идеала, которыми являются нулевой элемент 0 и вся алгебра Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ – два идеала в $\mathfrak{g}$. Тогда из включения (8.78) следует, что их сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ также является идеалом в $\mathfrak{g}$. Аналогично, из формулы (8.80) вытекает, что коммутатор двух идеалов $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ также является идеалом.

Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра в некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Введем в пространстве $\mathfrak{g}$ отношение эквивалентности

$$X \sim Y \pmod{\mathfrak{h}},$$

если $X - Y \in \mathfrak{h}$. Тогда вся алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в непересекающиеся классы эквивалентности $[X] := X + \mathfrak{h}$. В общем случае множество классов эквивалентности $[X]$ не образует алгебры Ли. Действительно, если

$$\begin{aligned} X_1 &\sim Y_1 \pmod{\mathfrak{h}}, \quad \text{т.е.} \quad X_1 = Y_1 + H_1, \\ X_2 &\sim Y_2 \pmod{\mathfrak{h}}, \quad \text{т.е.} \quad X_2 = Y_2 + H_2, \end{aligned}$$

где $H_{1,2} \in \mathfrak{h}$, то

$$[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] + [Y_1, H_2] + [H_1, Y_2] + [H_1, H_2]. \tag{8.81}$$

Отсюда следует, что отношение эквивалентности для коммутаторов

$$[X_1, X_2] \sim [Y_1, Y_2] \pmod{\mathfrak{h}} \tag{8.82}$$

в общем случае не выполняется. Однако, если подалгебра является идеалом, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$, то последние три слагаемых содержатся в $\mathfrak{a}$ и условие (8.82) выполнено. Тогда множество классов эквивалентности представляет собой алгебру Ли. В этом случае множество классов эквивалентности $[X]$ называется *факторалгеброй Ли* и обозначается $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

8.13.1. Операции над алгебрами Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли. Тогда отображение $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется *гомоморфизмом алгебр Ли*, если оно линейно и сохраняет скобку Ли, т.е. $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \in \mathfrak{h}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$. Если, кроме того, φ является взаимно однозначным отображением “на” (биекцией), то φ называется *изоморфизмом алгебр Ли*. Изоморфизм алгебры Ли на себя называется ее *автоморфизмом*. Автоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *инволютивным*, если $\varphi^2 = \mathsf{id}$.

Множество векторов

$$\mathfrak{n} := \{X \in \mathfrak{g} : \quad \varphi(X) = 0\}$$

называется *ядром* гомоморфизма φ.

В определении гомоморфизма алгебр Ли мы не требуем гладкости отображения φ, так как алгебры Ли рассматриваются, как векторные пространства, а не многообразия. С другой стороны, на любом векторном пространстве можно ввести гладкую структуру многообразия, тогда из линейности отображения φ будет следовать его гладкость.

Предложение 8.13.1. *Ядро $\mathfrak{n}$ всякого гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$. При этом факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ изоморфна $\varphi(\mathfrak{g})$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}$ и $Y \in \mathfrak{h}$. Тогда справедливы равенства

$$\varphi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(X), 0]_{\mathfrak{h}} = 0.$$

Следовательно, $[X, Y] \in \mathfrak{n}$. Изоморфизм алгебр просто проверяется.

Определение. Гомоморфизм $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ называется *представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{h} = \mathsf{end}\,(\mathbb{V})$ для некоторого векторного пространства $\mathbb{V}$, или $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, или $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Если гомоморфизм $\phi : \mathfrak{g} \to \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ является изоморфизмом, то представление называется *точным*.

Как и в случае представления группы каждый элемент представления алгебры является матрицей. Однако эти матрицы могут быть вырождены и, соответственно, задавать только эндоморфизм векторного пространства.

Определение. Отображение $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на себя, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} \sigma(aX + bY) &:= \bar{a}\sigma(X) + \bar{b}\sigma(Y), \\ \sigma([X, Y]) &:= [\sigma(X), \sigma(Y)], \end{aligned}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и черта обозначает комплексное сопряжение, такое, что $\sigma^2 = \mathsf{id}$, называется *сопряжением* в алгебре Ли.

Заметим, что отображение σ не является автоморфизмом, так как оно антилинейно.

Пример 8.13.2. Пусть ${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ – комплексификация вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда отображение

$${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g} \ni \quad X + iY \mapsto \sigma(X + iY) := X - iY \quad \in {}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g},$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, является сопряжением в алгебре Ли ${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$.

Определение. *Дифференцированием* D в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение алгебры Ли в себя, удовлетворяющее условию (правило Лейбница)

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY],$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Пусть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задано два дифференцирования D_1 и D_2. Тогда их линейная комбинация $aD_1 + bD_2$, как легко проверить, также будет дифференцированием в $\mathfrak{g}$. Кроме этого справедливо равенство

$$\begin{aligned} D_1D_2[X, Y] &= D_1([D_2X, Y] + [X, D_2Y]) \\ &= [D_1D_2X, Y] + [D_2X, D_1Y] + [D_1X, D_2Y] + [X, D_1D_2Y]. \end{aligned} \tag{8.83}$$

Если из этого равенства вычесть такое же равенство с заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$, то получим соотношение

$$[D_1, D_2][X, Y] = [[D_1, D_2]X, Y] + [X, [D_1, D_2]Y].$$

То есть коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, множество всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$ само образует алгебру Ли, которую мы обозначим $\mathfrak{g}_A$.

Предложение 8.13.2. *Алгебра дифференцирований $\mathfrak{g}_A$ является алгеброй Ли группы Ли $\mathbb{G}_A$ всех автоморфизмов исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_t := \mathsf{exp}\,(At)$, – однопараметрическая группа автоморфизмов $\mathfrak{g}$. Тогда выполнено равенство

$$\varphi_t([X, Y]) = [\varphi_t(X), \varphi_t(Y)]. \tag{8.84}$$

Дифференцирование этого соотношения по t при $t = 0$ приводит к равенству

$$A[X, Y] = [AX, Y] + [X, AY].$$

Это означает, что генератор A однопараметрической группы диффеоморфизмов является дифференцированием в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $A \in \mathfrak{g}_A$.

Обратно. Пусть $A \in \mathfrak{g}_A$ – дифференцирование. Тогда можно доказать, что соответствующая однопараметрическая группа преобразований удовлетворяет равенству (8.84).

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Каждому элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ поставим в соответствие отображение по следующему правилу

$$\mathfrak{g} \ni \quad Y \mapsto \mathsf{ad}\, X(Y) := [X, Y] \quad \in \mathfrak{g}. \tag{8.85}$$

Следовательно, определено отображение

$$\mathsf{ad}: \quad \mathfrak{g} \ni X \mapsto \mathsf{ad}_X \quad \in \mathsf{end}\,\mathfrak{g} \tag{8.86}$$

Это отображение называется *присоединенным* представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Проверим, что данное отображение действительно является представлением. Из тождеств Якоби следует равенство

$$\mathsf{ad}\,[X, Y](Z) = \mathsf{ad}\, X(\mathsf{ad}\, Y(Z)) - \mathsf{ad}\, Y(\mathsf{ad}\, X(Z)).$$

Это означает, что

$$\mathsf{ad}\,[X, Y] = \mathsf{ad}\, X(\mathsf{ad}\, Y) - \mathsf{ad}\, Y(\mathsf{ad}\, X),$$

и отображение $X \mapsto \mathsf{ad}\, X$ – действительно представление.

Если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ выбран некоторый базис e_{A}, $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$, то каждое отображение $\mathsf{ad}\, X$ будет задаваться некоторой $\text{N} \times \text{N}$ матрицей.

С другой стороны, тождества Якоби можно переписать в виде равенства

$$\mathsf{ad}\, X([Y, Z]) = [\mathsf{ad}\, X(Y), Z] + [Y, \mathsf{ad}\, X(Z)].$$

Это означает, что присоединенное представление алгебры Ли является дифференцированием в $\mathfrak{g}$. Таким образом, множество элементов присоединенного представления образует некоторую подалгебру в алгебре всех дифференцирований $\mathfrak{g}_A$.

Определение. Множество элементов присоединенного представления

$$\mathfrak{g}_{\mathsf{ad}} := \{\mathsf{ad}\, X, \quad X \in \mathfrak{g}\}$$

называется *присоединенной* алгеброй Ли.

Отображение

$$\psi: \quad \mathfrak{g} \ni \quad X \mapsto \mathsf{ad}\, X \quad \in \mathfrak{g}_{\mathsf{ad}}$$

представляет собой гомоморфизм алгебр Ли. Ядро этого гомоморфизма является центром алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – произвольный автоморфизм алгебры Ли, то справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{ad}\, \varphi(X)(Y) = [\varphi(X), Y] = \varphi[X, \varphi^{-1}(Y)] = \varphi(\mathsf{ad}\, X(\varphi^{-1}(Y))).$$

Это означает, что

$$\mathsf{ad}\, \varphi(X) = \varphi\, \mathsf{ad}\, X \varphi^{-1}, \tag{8.87}$$

как и положено присоединенному представлению.

Если у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нулевой центр (т.е. единственный элемент, коммутирующий со всеми элементами алгебры – это нуль), то гомоморфизм (8.86) инъективен, и присоединенное представление является точным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathsf{end}\,\mathfrak{g}$.

Пример 8.13.3. Рассмотрим трехмерную алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$. Выберем в ней базис

$$e_i := \frac{i}{2}\sigma_i \in \mathfrak{su}(2),$$

где σ_i, $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули. Этот базис удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[e_i, e_j] = -\varepsilon_{ijk} e^k,$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга и подъем индексов осуществляется с помощью евклидовой метрики, $e^k := \delta^{ki} e_i$. Согласно определению, $\mathsf{ad}\, e_1(e_1) = 0$, $\mathsf{ad}\, e_1(e_2) = -e_3$ и

$\mathsf{ad}\, e_1(e_3) = e_2$. Аналогичные соотношения можно выписать для $\mathsf{ad}\, e_2$ и $\mathsf{ad}\, e_3$. Следовательно, присоединенная алгебра $\mathfrak{su}_{\mathsf{ad}}(2)$ трехмерна, и присоединенное представление базисных векторов имеет вид

$$\mathsf{ad}\, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{ad}\, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{ad}\, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что эти матрицы удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям

$$[\,\mathsf{ad}\, e_i, \mathsf{ad}\, e_j] = -\varepsilon_{ijk}\, \mathsf{ad}\, e^k.$$

Заметим, что присоединенное представление алгебры $\mathfrak{su}(2)$ совпадает с фундаментальным представлением алгебры Ли группы вращений $\mathfrak{so}(3)$, состоящим из всех антисимметричных 3×3 матриц.

Пример 8.13.4. Рассмотрим вещественную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с базисом e_{A}, $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$. Базис алгебры Ли удовлетворяет коммутационным соотношениям (8.76) с некоторыми вещественными структурными константами $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$. Рассмотрим отображение

$$\mathfrak{g} \ni \quad e_{\text{A}} \mapsto E_{\text{A}} \quad \in \mathfrak{gl}(\text{N}, \mathbb{R}),$$

где матрицы E_{A} определяются структурными константами: $E_{\text{A}\,\text{B}}{}^{\text{C}} := -f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$. При этом индексы B, C рассматриваются как матричные. Тогда из тождеств Якоби для структурных констант (8.77) следует следующее правило коммутации

$$[E_{\text{A}}, E_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} E_{\text{C}}.$$

Это означает, что построенное отображение является представлением алгебры Ли:

$$\mathsf{ad}\,: \quad \mathfrak{g} \ni \quad X = X^{\text{A}} e_{\text{A}} \mapsto \mathsf{ad}\, X = X^{\text{A}} E_{\text{A}} \quad \in \mathfrak{gl}(\text{N}, \mathbb{R}).$$

Нетрудно проверить, что это действительно присоединенное представление.

Теперь введем новое понятие для двух алгебр Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – две алгебры Ли. Рассмотрим их прямую сумму как векторных пространств $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Введем в этом пространстве операцию коммутирования с помощью коммутирований, определенных в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$:

$$[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] := [X_1, X_2] \oplus [Y_1, Y_2],$$

для всех $X_{1,2} \in \mathfrak{g}$ и $Y_{1,2} \in \mathfrak{h}$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ называется прямой суммой алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$.

Корректность определения коммутатора в прямой сумме, т.е. билинейность, антисимметрия и тождества Якоби, легко проверяется.

Определение. Если алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как векторное пространство можно представить в виде прямой суммы векторных подпространств

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i$$

и, кроме того, справедливы включения

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i, \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0, \quad i \neq j,$$

то мы говорим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму подалгебр $\mathfrak{g}_i$.

Ясно, что все подалгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ являются идеалами в $\mathfrak{g}$, потому что

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] = [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i.$$

Кроме того, если $\mathfrak{a}$ – идеал в одной из подалгебр $\mathfrak{g}_i$, то он также является идеалом во всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим более сложную конструкцию.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t}$ – две алгебры Ли, и пусть $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}_A$ – гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру дифференцирований $\mathfrak{t}_A$, т.е. $D(X) \in \mathfrak{t}_A$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Возьмем прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}$ и снабдим ее структурой алгебры Ли с помощью следующего коммутатора

$$[X_1 \dotplus T_1, X_2 \dotplus T_2] := [X_1, X_2] \dotplus ([T_1, T_2] + D(X_1)T_2 - D(X_2)T_1), \tag{8.88}$$

для всех $X_{1,2} \in \mathfrak{g}$ и $T_{1,2} \in \mathfrak{t}$. Тогда $\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}$ называется *полупрямой суммой* алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t}$.

Если дифференцирование тривиально, т.е. $D(X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, то полупрямая сумма алгебр Ли сводится к прямой сумме.

Проверим корректность данного определения. Билинейность и антисимметрия коммутатора очевидны. Необходимо проверить только тождества Якоби. Если все три вектора имеют вид $X \dotplus 0$ или $0 \dotplus T$, где $X \in \mathfrak{g}$ и $T \in \mathfrak{t}$, то тождества Якоби выполняются, так как они выполнены в каждом слагаемом $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t}$. Следовательно, ввиду линейности коммутатора, достаточно проверить тождества Якоби для двух троек векторов: $\{X \dotplus 0, Y \dotplus 0, 0 \dotplus T\}$ и $\{X \dotplus 0, 0 \dotplus T, 0 \dotplus P\}$. Двойной коммутатор для каждой тройки будет иметь вид $0 \dotplus *$, где $*$ – некоторый элемент из $\mathfrak{t}$. Поэтому для упрощения записи в следующих формулах мы опустим два первых символа 0 и $\dotplus$. Для первой тройки векторов $\{X, Y, T\}$ тождества Якоби принимают вид

$$[[X, Y], T] + [[Y, T], X] + [[T, X], Y] = D([X, Y])T - D(X)D(Y)T + D(Y)D(X)T = 0.$$

Равенство нулю следует из того, что $D(X)$ – это дифференцирование в $\mathfrak{t}$. Аналогично, для второй тройки векторов $\{X, T, P\}$ тождества Якоби принимают вид

$$[[X, T], P] + [[T, P], X] + [[P, X], T] = [D(X)T, P] - D(X)[T, P] + [T, D(X)P] = 0.$$

Равенство нулю здесь также является следствием свойств дифференцирования.

Полупрямая сумма двух алгебр $\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}$ содержит по крайней мере две подалгебры: $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t}$. Более того, подалгебра $\mathfrak{t}$ является идеалом в $\mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{t}$, что является следствием определения коммутатора (8.88).

8.13.2. Простые и полупростые алгебры Ли. Простые алгебры Ли наиболее часто встречаются в математической физике и поэтому представляют особенный интерес. В настоящее время все они классифицированы. Ниже мы дадим необходимые определения и приведем некоторые свойства простых и полупростых алгебр Ли.

Начнем с необходимой конструкции. Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является идеалом в себе самой и коммутатор двух идеалов также является идеалом. Поэтому формулы

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(2)} := [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \quad \ldots, \quad \mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}], \quad \ldots \tag{8.89}$$

определяют в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ невозрастающую последовательность идеалов:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{(k)} \supset \cdots .$$

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если существует такое число $k \geqslant 1$, что $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$.

Пример 8.13.5. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{io}(2)$ неоднородной группы вращений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Она состоит из вращений $L = x\partial_y - y\partial_x$ и сдвигов $P_x = \partial_x$, $P_y = \partial_y$. Нетривиальные коммутационные соотношения имеют вид

$$[L, P_x] = -P_y, \qquad [L, P_y] = P_x.$$

Все остальные коммутаторы равны нулю. Поэтому последовательность идеалов (8.89) обрывается после второго шага:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{io}(2), \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{p}, \qquad \mathfrak{g}^{(3)} = 0,$$

где $\mathfrak{p}$ – двумерная абелева алгебра Ли с образующими P_x и P_y (подалгебра сдвигов). Следовательно, алгебра неоднородных вращений плоскости $\mathfrak{io}(2)$ разрешима.

Пример 8.13.6. Рассмотрим алгебру Ли трехмерных вращений $\mathfrak{so}(3)$ с образующими e_i, $i = 1, 2, 3$. Поскольку коммутационные соотношения имеют вид

$$[e_i, e_j] = -\varepsilon_{ijk} e^k,$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга, то последовательность идеалов (8.89) никогда не оборвется:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(3)} = \cdots = \mathfrak{so}(3).$$

Следовательно, алгебра трехмерных вращений $\mathfrak{so}(3)$ неразрешима.

Теперь введем другую последовательность идеалов, которую пронумеруем нижними индексами:

$$\mathfrak{g}_{(1)} := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_{(2)} := [\mathfrak{g}_{(1)}, \mathfrak{g}], \quad \ldots, \quad \mathfrak{g}_{(k)} := [\mathfrak{g}_{(k-1)}, \mathfrak{g}], \quad \ldots. \tag{8.90}$$

Она также является невозрастающей:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(1)} \supset \mathfrak{g}_{(2)} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{(k)} \supset \cdots .$$

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если существует такое число $k \geqslant 1$, что $\mathfrak{g}_{(k)} = 0$.

Ясно, что любая абелева алгебра Ли является и разрешимой, и нильпотентной.

Предложение 8.13.3. $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}_{(n)}$.

Доказательство. Проверяем по индукции. В самом деле $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_{(1)}$. Если $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}_{(n)}$, то

$$\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}] \subset [\mathfrak{g}_{(n)}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{(n+1)}.$$

Следствие. *Всякая нильпотентная алгебра разрешима.*

Обратное утверждение неверно.

Пример 8.13.7. Рассмотрим двумерную неабелеву алгебру Ли $\mathfrak{g}$ из раздела 8.7, соответствующую аффинным преобразованиям прямой. Ее алгебра Ли имеет две образующие L_x, L_y с коммутационными соотношениями

$$[L_x, L_y] = L_y, \qquad [L_x, L_x] = [L_y, L_y] = 0.$$

Легко вычислить последовательности идеалов

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = \{L_y\}, \qquad \mathfrak{g}^{(3)} = 0, \\ &\mathfrak{g}_{(1)} = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}_{(2)} = \mathfrak{g}_{(3)} = \cdots = \{L_y\}, \end{aligned}$$

где $\{L_y\}$ – одномерная абелева алгебра Ли с образующей L_y. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима, но не нильпотентна.

Пример 8.13.8. Вычислим последовательность идеалов (8.90) для алгебры Ли $\mathfrak{io}(2)$ из примера 8.13.5:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{io}(2), \qquad \mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^{(3)} = \cdots = \mathfrak{p}.$$

Поэтому алгебра Ли $\mathfrak{io}(2)$ разрешима, но не нильпотентна.

Теорема 8.13.2. *Алгебра Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана тождественно равна нулю.*

Доказательство. См., например, [13], §6, задача 13.

Напомним, что для любых двух идеалов $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ их сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ также является идеалом в $\mathfrak{g}$.

Предложение 8.13.4. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – два идеала в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда факторалгебра $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ изоморфна фактор алгебре $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ и поэтому разрешима, если идеал $\mathfrak{a}$ разрешим.*

Доказательство. Пусть φ – естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ на факторалгебру $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$. Тогда $\varphi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$. Ядром гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{a}$ является пересечение $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. Поэтому из предложения 8.13.1 следует изоморфизм

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}).$$

Следствие. *Если идеал $\mathfrak{b}$ также разрешим, то разрешим и идеал $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.*

Таким образом, сумма $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ двух разрешимых идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ является разрешимым идеалом. Поэтому в любой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует наибольший разрешимый идеал $\mathfrak{r}$, который называется *радикалом*, содержащий все разрешимые идеалы: им является сумма всех разрешимых идеалов.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется полупростой, если ее радикал тривиален $\mathfrak{r}=0$.

Другими словами, полупростая алгебра Ли не содержит разрешимых идеалов, кроме тривиального $\mathfrak{r}=0$.

Теорема 8.13.3. *Пусть $\mathfrak{r}$ – радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, тогда фактор алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста.*

Доказательство. См., например, [42], глава 10, теорема 93.

Теорема 8.13.4 (Картан). *Для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала абелевых идеалов, отличных от 0.*

Доказательство. См., например, [47], лекция 17.

Конечно, каждая полупростая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой полупростой группы Ли, и любая полупростая группа Ли имеет полупростую алгебру Ли.

Определение. *Центром* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее аннулятор, т.е. наибольшее подпространство $\mathfrak{z}\subset\mathfrak{g}$, для которого $[\mathfrak{z},\mathfrak{g}]=0$.

У каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть нулевой элемент $0\in\mathfrak{g}$, для которого $[0,\mathfrak{g}]=0$. Поэтому $0\in\mathfrak{z}$. Очевидно, что центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является абелевым идеалом, и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абелева тогда и только тогда, когда ее центр совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{z}=\mathfrak{g}$. Из теоремы 8.13.4 следует, что алгебра Ли является полупростой тогда и только тогда, когда ее центр равен нулю.

Введем понятие простой алгебры и группы Ли.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если выполнены следующие два условия: алгебра $\mathfrak{g}$ неабелева, и единственные ее идеалы есть 0 и $\mathfrak{g}$.

Группа Ли $\mathbb{G}$ называется *простой*, если она неабелева и не имеет инвариантных подгрупп, отличных от единицы и всей группы.

Условие неабелевости алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентно условию $\mathfrak{g}^{(2)}\neq 0$. Это условие исключает алгебры Ли размерности 1. Алгебры Ли размерности 1 без условия неабелевости являлись бы в этом случае простыми, но не полупростыми.

Всякие простые алгебры и группы Ли являются также полупростыми. Обратное утверждение неверно, но справедливы следующие теоремы.

Теорема 8.13.5. *Полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представима одним и только одним способом в виде прямой суммы конечного числа простых идеалов*

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^{k}\mathfrak{s}_i$$

для некоторого k. При этом каждый идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является прямой суммой некоторых идеалов $\mathfrak{s}_i$.

Доказательство. См., например, [48], теорема VII.

Теорема 8.13.6. *Связная полупростая группа Ли $\mathbb{G}$ представима одним и только одним способом (с точностью до перестановки сомножителей) в виде прямого произведения конечного числа простых групп Ли*

$$\mathbb{G} = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{G}_i.$$

При этом каждая инвариантная подгруппа группы Ли $\mathbb{G}$ является прямым произведением некоторых подгрупп $\mathbb{G}_i$.

Доказательство. См., например, [49], глава 4, §1, теорема 4.

8.13.3. Квадратичные формы. Поскольку алгебра Ли является векторным пространством, то на ней можно задать билинейную симметричную квадратичную форму

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni \quad X, Y \mapsto (X, Y) \quad \in \mathbb{R}, \mathbb{C}.$$

Если e_{A}, $\text{A} = 1, \dots \text{N}$ – базис алгебры Ли, то в компонентах эта форма имеет вид

$$(X, Y) = X^{\text{A}} Y^{\text{B}} \eta_{\text{AB}},$$

где η_{AB} – некоторая матрица.

В разделе 8.13.1 было введено присоединенное представление $Z \mapsto \mathsf{ad}\, Z$ для любого элемента алгебры Ли $Z \in \mathfrak{g}$. Это позволяет дать следующее

Определение. Квадратичная форма (X, Y) называется *инвариантной*, если выполнено равенство

$$(\mathsf{ad}\, Z(X), Y) + (X, \mathsf{ad}\, Z(Y)) = 0$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Поскольку алгебра Ли изоморфна касательному пространству в произвольной точке группового многообразия, то задание невырожденной симметричной квадратичной формы в алгебре Ли однозначно определяет метрику на соответствующей группе Ли. Эта метрика в левоинвариантном базисе (см. раздел 8.2) имеет постоянные компоненты η_{AB} и, по построению, является левоинвариантной. В общем случае метрика на групповом многообразии в левоинвариантном базисе имеет компоненты $g_{\text{AB}}(a)$ и зависит от точки $a \in \mathbb{G}$. То есть каждой точке $a \in \mathbb{G}$ соответствует своя метрика в алгебре Ли. Задание инвариантной квадратичной формы в алгебре Ли соответствует заданию двусторонне инвариантной метрики на групповом многообразии.

Присоединенное представление алгебры Ли позволяет определить следующую симметричную квадратичную форму.

Определение. Симметричная билинейная квадратичная форма в алгебре Ли

$$(X, Y) := -\,\mathsf{tr}\,(\mathsf{ad}\, X\, \mathsf{ad}\, Y) \tag{8.91}$$

называется *формой Киллинга–Картана* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В компонентах форма Киллинга–Картана имеет вид

$$\eta_{\text{AB}} = -f_{\text{AC}}{}^{\text{D}} f_{\text{BD}}{}^{\text{C}}.$$

Форма Киллинга–Картана играет фундаментальную роль в теории алгебр Ли и их представлений.

Замечание. Знак минус в определении формы Киллинга–Картана необходим для того, чтобы метрика на соответствующих полупростых вещественных компактных группах Ли была положительно, а не отрицательно определена. Например, для группы $\mathbb{SO}(3)$, структурными константами которой является полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} \mapsto \varepsilon_{ij}{}^{k}$, форма Киллинга–Картана имеет вид

$$\eta_{ij} = -\varepsilon_{ik}{}^{l} \varepsilon_{jl}{}^{k} = 2\delta_{ij}.$$

В общем случае форма Киллинга–Картана может быть вырождена или невырождена. Это зависит от алгебры Ли. Для абелевых алгебр Ли форма Киллинга–Картана равна нулю.

Предложение 8.13.5. *Форма Киллинга–Картана* (8.91) *инвариантна.*

Доказательство. Следствие симметрии следа матриц:

$$\mathsf{tr}\,(\,\mathsf{ad}\,X\,\mathsf{ad}\,Y\,\mathsf{ad}\,Z)=\,\mathsf{tr}\,(\,\mathsf{ad}\,Z\,\mathsf{ad}\,X\,\mathsf{ad}\,Y).$$

Форма Киллинга–Картана инвариантна относительно произвольных автоморфизмов алгебры Ли $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. Действительно, поскольку при автоморфизме матрица присоединенного представления преобразуется по правилу (8.87), то форма Киллинга–Картана инвариантна:

$$(\varphi(X),\varphi(Y))=(X,Y).$$

Форма Киллинга–Картана позволяет сформулировать важный критерий.

Теорема 8.13.7 (Картан). *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана невырождена.*

Доказательство. См., например, [48], теорема VI.

В заключение приведем критерий компактности алгебр Ли.

Теорема 8.13.8. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{g}$ существует положительно определенная инвариантная квадратичная форма.*

Доказательство. См., например, [42], глава 11, теорема 103.

Теорема 8.13.9. *Полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана положительно определена.*

Доказательство. См., например, [45], глава II, предложение 6.6.

8.14. Группа Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$

В настоящем разделе мы приведем некоторые сведения из теории линейных групп Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ преобразований (автоморфизмов) комплексного n-мерного пространства $\mathbb{C}^n$ и их алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, которые важны с точки зрения дифференциальной геометрии и физических приложений. Напомним, что при общих преобразованиях координат в касательных пространствах к точкам многообразия на компоненты тензоров действует матрица Якоби, которая является элементом группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})\subset\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Кроме того, удобным выбором независимых переменных в аффинной геометрии являются переменные Картана: репер и линейная или $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ связность (см. раздел 5.4).

Сначала мы рассмотрим алгебры Ли, как более простые объекты, а затем перейдем к изучению соответствующих групп Ли.

8.14.1. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Обозначим множество всех квадратных $n\times n$ матриц с комплексными элементами через $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Это обозначение обосновано в дальнейшем тем, что множество комплексных квадратных матриц можно рассматривать, как алгебру Ли группы Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Множество матриц $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ с обычным умножением матриц на числа и сложением можно рассматривать как векторное пространство размерности n^2 над полем комплексных чисел (комплексная размерность) или как вещественное векторное пространство размерности $2n^2$ (вещественная размерность). Чтобы превратить это множество в алгебру необходимо ввести дополнительную бинарную операцию – умножение. Если в качестве умножения рассматривать обычное умножение матриц, то мы получим ассоциативную алгебру матриц над полем комплексных чисел. Однако это не единственная возможность. В качестве алгебраической операции мы будем рассматривать коммутатор матриц, т.е. любым двум матрицам $X,Y\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ мы ставим в соответствие их коммутатор:

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\times\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\ni\quad X,Y\mapsto[X,Y]:=XY-YX\quad\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Эта операция антисимметрична, $[X,Y]=-[Y,X]$, и для нее выполняется тождество Якоби

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0.$$

Тем самым множество всех матриц, включая вырожденные, становится алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Эта алгебра неассоциативна, что следует из тождеств Якоби.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать множество комплексных $n\times n$ матриц, как алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Множество матриц можно рассматривать, как множество операторов, действующих в комплексном векторном пространстве $\mathbb{V}$. Обозначим элементы векторного пространства через $x=x^a e_a\in\mathbb{V}$, где e_a, $a=1,\dots,n$ – некоторый фиксированный базис, и $x^a\in\mathbb{C}$ – комплексные компоненты вектора. Комплексная размерность этого векторного пространства равна n, а вещественная – $2n$. При фиксированном базисе векторное пространство $\mathbb{V}$ естественным образом отождествляется с комплексным евклидовым пространством $\mathbb{C}^n$ и вещественным евклидовым пространством удвоенной размерности $\mathbb{R}^{2n}$. Мы предполагаем, что топология $\mathbb{V}$ индуцируется взаимно однозначным отображением $\mathbb{V}\leftrightarrow\mathbb{R}^{2n}$.

Преобразование элементов векторного пространства $x=x^a e_a\in\mathbb{C}^n$ мы записываем в виде

$$x^a\mapsto x^b X_b{}^a,\qquad X=(X_b{}^a)\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),$$

т.е. вектор-строка (x^a) умножается справа на матрицу преобразований $X=(X_b{}^a)$. Такая запись вызвана принятыми ранее правилами: компоненты вектора мы нумеруем верхним индексом и придерживаемся правила записи индексов суммирования “с десяти до четырех”.

Базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ можно выбрать из квадратных матриц $\boldsymbol{e}_a{}^b$, имеющих один ненулевой элемент, который равен единице и находится на a-той строке и в b-том столбце. Очевидно, что любую матрицу можно записать в виде

$$X=X_a{}^b\boldsymbol{e}_b{}^a\quad\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\qquad X_a{}^b\in\mathbb{C}.$$

Выбранный базис удовлетворяет соотношениям коммутации

$$[\boldsymbol{e}_a{}^b,\boldsymbol{e}_c{}^d]=\delta_c^b\boldsymbol{e}_a{}^d-\delta_a^d\boldsymbol{e}_c{}^b,\tag{8.92}$$

что проверяется прямой проверкой.

Рассмотренная параметризация естественным образом отождествляет алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ с комплексным евклидовым пространством $\mathbb{C}^{n^2}$ и вещественным евклидовым пространством $\mathbb{R}^{2n^2}$. Мы предполагаем, что топология алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ индуцирована вложением $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\hookrightarrow\mathbb{R}^{2n^2}$.

Базис $\boldsymbol{e}_a{}^b$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ можно также представить в виде дифференциальных операторов

$$\boldsymbol{e}_a{}^b=-x^b\partial_a,$$

действующих на компоненты векторов из $\mathbb{V}$. Это представление определяет действие генераторов алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ на любую дифференцируемую функцию $f(x)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n)$ от декартовых координат точки $\mathbb{C}^n$.

Определение. Матрица X называется *невырожденной* или *регулярной*, если для нее существует обратная матрица X^{-1}, т.е. выполнено равенство $XX^{-1}=X^{-1}X=\mathbb{1}$.

Для того, чтобы матрица X была регулярной необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля, $\det X\ne 0$. Если эндоморфизм X векторного пространства $\mathbb{C}^n$ отображает $\mathbb{C}^n$ *на* себя (сюрьективен), а не на какое-нибудь подпространство низшей размерности, то соответствующая матрица X регулярна, и существует обратный эндоморфизм X^{-1}. В этом случае эндоморфизм X является автоморфизмом.

Пусть $X=(X_a{}^b)$ – квадратная $n\times n$ матрица, тогда для определителя справедливо разложение, в частности, по первой строке

$$\det X=\sum_\sigma X_1{}^{\sigma(1}\dots X_n{}^{n)}\,\mathrm{sgn}\,\sigma,$$

где сумма берется по всем перестановкам $\sigma(1,\dots,n)$, и множитель $\mathrm{sgn}\,\sigma$ обозначает знак перестановки.

Перепишем соотношения коммутации (8.92) в виде

$$[\boldsymbol{e}_{\mathrm{A}},\boldsymbol{e}_{\mathrm{B}}]=f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{C}},$$

где пару индексов мы для краткости обозначили одной буквой $\boldsymbol{e}_{\mathrm{A}} := \boldsymbol{e}_a{}^b$, $\mathrm{A} = 1, \dots, n^2$. Тогда

$$f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} = f_a{}^b{}_c{}^d{}_e{}^f = \delta^{fbd}_{ace} - \delta^{dfb}_{ace}.$$

Простые вычисления приводят к следующей форме Киллинга–Картана

$$\eta_{\mathrm{AB}} := -f_{\mathrm{AC}}{}^{\mathrm{D}} f_{\mathrm{BD}}{}^{\mathrm{C}} = \eta_a{}^b{}_c{}^d = -2\left(n\delta^{db}_{ac} + \delta^{bd}_{ac}\right).$$

Форма Киллинга–Картана задает инвариантное скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:

$$(X,Y) = -2n\,\mathsf{tr}\,(XY) + 2\,\mathsf{tr}\,X\,\mathsf{tr}\,Y. \tag{8.93}$$

Инвариантность в данном случае означает независимость результата скалярного произведения от преобразования подобия:

$$(X', Y') = (X, Y),$$

где

$$X' := SXS^{-1}, \quad Y' := SYS^{-1}, \qquad \forall\, S \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Скалярное произведение (8.93) вырождено. Действительно, поскольку $\mathsf{tr}\,\mathbb{1} = n$, то скалярное произведение всех матриц, кратных единичной матрице $E = a\mathbb{1}$, $a \in \mathbb{C}$, равно нулю со всеми матрицами из алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$,

$$(E, X) = a(\mathbb{1}, X) = -2an\,\mathsf{tr}\,X + 2an\,\mathsf{tr}\,X = 0, \qquad \forall\, X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}).$$

Отсюда следует, что форма Киллинга–Картана вырождена, $\mathsf{det}\,\eta_{\mathrm{AB}} = 0$, и поэтому алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ не является полупростой. Это значит, что на групповом многообразии группы Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ не существует двусторонне инвариантной метрики и, следовательно, возникают серьезные проблемы с построением инвариантов.

Поскольку единичная матрица коммутирует со всеми матрицами, то множество матриц, кратных единице, $\mathfrak{a} = \{E\}$ является центром и образует идеал в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Его вещественная размерность равна двум, $\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{a} = 2$.

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ содержит много подалгебр. Рассмотрим некоторые подалгебры, которые наиболее часто встречаются в приложениях. Нетрудно видеть, что множество всех квадратных вещественных $n \times n$ матриц также является алгеброй Ли, которую мы обозначим через $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Эта алгебра является подалгеброй в алгебре комплексных матриц: $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Базис $\boldsymbol{e}_a{}^b$ в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ можно выбрать таким же, как и в случае $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, только коэффициенты разложения теперь будут не комплексные, а вещественные числа. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ естественным образом отождествляется с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n^2}$. Формы Киллинга–Картана для $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ совпадают и, следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ также не является полупростой.

В разделе 8.16 будет показано, что вещественная алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = {}^r\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ является вещественной формой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и, наоборот, комплексная алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = {}^{\mathbb{C}}\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ является комплексификацией вещественной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Максимальные полупростые подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ – это алгебры комплексных и вещественных матриц с нулевым следом:

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) :\ \mathsf{tr}\,X = 0\}, \tag{8.94}$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) :\ \mathsf{tr}\,X = 0\}. \tag{8.95}$$

Они имеют следующие вещественные размерности:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = 2n^2 - 2, \qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1.$$

Каждую матрицу можно однозначно представить в виде

$$X = \widetilde{X} + \frac{1}{n}\,\mathsf{tr}\,X\mathbb{1}, \quad \mathsf{tr}\,\widetilde{X} = 0,$$

выделив из нее след. Будем считать две матрицы X и Y эквивалентными, если равны их бесследовые части, $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$. Такие матрицы связаны соотношением

$$X = Y + \frac{1}{n}(\operatorname{tr} X - \operatorname{tr} Y)\mathbb{1}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})}{\mathfrak{a}},$$

где $\mathfrak{a}$ – идеал в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, состоящий из матриц, кратных единичной.

Чтобы доказать полупростоту этих подалгебр, вычислим форму Киллинга–Картана. Выберем базис в алгебрах Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^b := \boldsymbol{e}_a{}^b - \delta^b_a \boldsymbol{e}_n{}^n, \quad a,b = 1,\dots,n, \qquad (\text{суммирования по } n \text{ нет}),$$

который удовлетворяет условию $\operatorname{tr}\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^b = 0$. Это соотношение определяет только n^2-1 базисных векторов, поскольку $\boldsymbol{e}_n{}^n = 0$. Коммутационные соотношения принимают вид

$$[\tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^b, \tilde{\boldsymbol{e}}_c{}^d] = \delta^b_c \tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^d - \delta^d_a \tilde{\boldsymbol{e}}_c{}^b - \delta^{bn}_{ac} \tilde{\boldsymbol{e}}_n{}^d + \delta^{bd}_{an} \tilde{\boldsymbol{e}}_c{}^n - \delta^{db}_{cn} \tilde{\boldsymbol{e}}_a{}^n + \delta^{dn}_{ca} \tilde{\boldsymbol{e}}_n{}^b.$$

Теперь нетрудно вычислить форму Киллинга–Картана

$$\eta_{\text{AB}} = \eta_a{}^b{}_c{}^d = -2n\left(\delta^{db}_{ac} + \delta^{bd}_{ac} - \delta^{bnd}_{acn} - \delta^{dnb}_{can}\right).$$

Отсюда следует, что, если хотя бы одна из пар индексов имеет вид $(a,b) = (n,n)$ или $(c,d) = (n,n)$, то

$$\eta_a{}^b{}_n{}^n = \eta_n{}^n{}_c{}^d = 0.$$

Форма Киллинга–Картана задает инвариантное скалярное произведение в алгебрах Ли:

$$(X,Y) = -2n \operatorname{tr}(XY), \qquad X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \quad \text{или} \quad X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}).$$

Эта форма Киллинга–Картана невырождена, и, значит, алгебры матриц с нулевым следом полупросты.

Более того, алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ проста.

В настоящее время все простые комплексные алгебры Ли классифицированы. Согласно теореме Адо классификация алгебр Ли сводится к классификации матричных алгебр Ли. И эта задача решена. Существуют четыре классические бесконечные серии:

$$\mathfrak{a}_n \ (n \geqslant 1), \qquad \mathfrak{b}_n \ (n \geqslant 2), \qquad \mathfrak{c}_n \ (n \geqslant 3), \qquad \mathfrak{d}_n \ (n \geqslant 4) \tag{8.96}$$

и пять исключительных алгебр

$$\mathfrak{g}_2, \qquad \mathfrak{f}_4, \qquad \mathfrak{e}_6, \qquad \mathfrak{e}_7, \qquad \mathfrak{e}_8. \tag{8.97}$$

Теорема 8.14.1. *Любая простая комплексная алгебра Ли изоморфна одной из алгебр* (8.96), (8.97). *Алгебры* (8.96) *и* (8.97) *между собой попарно не изоморфны.*

Доказательство. См., например, [42], глава 11.

Нижний индекс в используемых обозначениях для простых алгебр Ли имеет особый смысл: он равен комплексной размерности максимальной коммутативной подалгебры.

Алгебры Ли комплексных матриц с нулевым следом представляют собой первую из классических серий (8.96),

$$\mathfrak{a}_n := \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}),$$

и, следовательно, просты.

Три оставшиеся серии классических комплексных простых алгебр Ли строятся с помощью квадратичных форм.

Пусть в комплексном векторном пространстве $\mathbb{V}$ задана симметричная билинейная форма

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \ni \quad x,y \mapsto (x,y) \quad \in \mathbb{V}. \tag{8.98}$$

Рассмотрим линейные преобразования X пространства $\mathbb{V}$, которые сохраняют заданную квадратичную форму в следующем смысле:

$$(Xx, y) + (x, Xy) = 0, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{V}. \tag{8.99}$$

Множество таких преобразований образуют алгебру Ли с коммутатором $[X, Y] := XY - YX$. Действительно, если для двух преобразований X и Y выполнено равенство (8.99), то оно будет выполнено и для их коммутатора:

$$([X, Y]x, y) = (XYx, y) - (YXx, y) = -(x, [X, Y]y).$$

Алгебры Ли преобразований векторного пространства $\mathbb{V}$, сохраняющих билинейную форму, определяются выбором этой формы.

Пусть комплексная размерность векторного пространства равна $\operatorname{dim}_{\mathbb{C}}\mathbb{V} = m$. Зададим в $\mathbb{V}$ невырожденную билинейную симметричную положительно определенную (в вещественном подпространстве) квадратичную форму

$$(x, y) := (y, x).$$

Тогда в пространстве $\mathbb{V}$ существует базис e_a, $a = 1, \dots, m$, такой, что квадратичная форма имеет вид

$$(x, y) = x^a y^b \delta_{ab},$$

где $x = x^a e_a$, $y = y^a e_a$ и $\delta_{ab} := \operatorname{diag}(+\cdots+)$ – обычная евклидова метрика. Алгебры Ли, сохраняющие эту форму называются *ортогональными* и обозначаются $\mathfrak{o}(m, \mathbb{C})$.

Вторая и четвертая из классических серий (8.96) определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_n &:= \mathfrak{o}(2n + 1, \mathbb{C}), \\ \mathfrak{d}_n &:= \mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Пусть в векторном пространстве $\mathbb{V}$ задана невырожденная антисимметричная билинейная квадратичная форма, $(x, y) = -(y, x)$. В этом случае размерность векторного пространства должна быть четной $\operatorname{dim}_{\mathbb{C}}\mathbb{V} = 2n$ для невырожденности. Тогда в пространстве $\mathbb{V}$ существует такой базис e_a, где $a = 1, \dots, 2n$, что квадратичная форма имеет вид

$$(x, y) = x^a y^b \varpi_{ab},$$

где

$$\varpi = (\varpi_{ab}) := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

– каноническая симплектическая форма. Комплексные алгебры Ли, сохраняющие эту квадратичную форму, называются *симплектическими* и обозначаются $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. Они дают третью классическую серию

$$\mathfrak{c}_n := \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}).$$

Описание комплексных исключительных алгебр Ли (8.97) довольно сложно. Интересующийся читатель может найти его, например, в [50].

Теперь обсудим более элементарные свойства матриц.

Определение. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Алгебраическое уравнение

$$\operatorname{det}(A - \lambda\mathbb{1}) = 0 \tag{8.100}$$

n-того порядка относительно λ называется *характеристическим* или *вековым* уравнением. Решения этого уравнения называются *собственными числами* матрицы A.

Согласно основной теореме алгебры каждая матрица A имеет в точности n собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ с учетом их кратности. В общем случае собственные числа комплексны даже для вещественной матрицы $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Матрицы A и A' называются *подобными* или *сопряженными*, если существует невырожденная матрица B такая, что $A' = BAB^{-1}$. Из уравнения (8.100) следует, что собственные числа подобных матриц совпадают.

Опишем экспоненциальное отображение матриц.

Определение. Пусть $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ – произвольная матрица с ограниченными элементами. Тогда ряд

$$\mathsf{e}^A = \exp A := \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

равномерно сходится, если A остается в ограниченной области пространства $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \approx \mathbb{R}^{2n^2}$, т.е. каждый элемент матрицы ограничен. Этот ряд называется *экспоненциалом* матрицы A.

Функция $\exp A$ определена и непрерывна на $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ и отображает $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ в себя.

Сформулируем некоторые свойства экспоненциала матрицы [31], глава 1, §2.

Предложение 8.14.1. *Пусть B – невырожденная $n \times n$ матрица. Тогда*

$$\mathsf{e}^{BAB^{-1}} = B\,\mathsf{e}^A B^{-1}.$$

Предложение 8.14.2. *Для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ существует такая невырожденная матрица B, что матрица BAB^{-1} является верхнетреугольной. Тогда матрица $\mathsf{e}^{BAB^{-1}}$ также является верхнетреугольной. При этом на диагонали матрицы BAB^{-1} стоят собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A, а на диагонали матрицы $\mathsf{e}^{BAB^{-1}}$ стоят собственные числа $\mathsf{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathsf{e}^{\lambda_n}$ матрицы e^A.*

Следствие. *Для любой матрицы $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ справедливо равенство*

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A) \quad \Leftrightarrow \quad \det B = \exp(\operatorname{tr} \ln B), \tag{8.101}$$

где $B := \mathsf{e}^A$.

Отсюда следует, в частности, что $\det(\exp A) \neq 0$. То есть экспоненциал произвольной матрицы является невырожденной (регулярной) матрицей и, следовательно, принадлежит группе общих преобразований $\exp A \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ (см. следующий раздел).

Предложение 8.14.3. *Если матрицы A, B коммутируют, то*

$$\mathsf{e}^{A+B} = \mathsf{e}^A\,\mathsf{e}^B.$$

Следствие. *Экспоненциальное отображение $t \mapsto \mathsf{e}^{tA}$, где $t \in \mathbb{R}$ и $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ – фиксированная матрица, есть гладкое гомоморфное отображение аддитивной группы вещественных чисел в группу $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$.*

Касательным вектором к отображению $t \mapsto \mathsf{e}^{tA}$ в точке $t = 0$ является матрица A (достаточно почленно продифференцировать степенной ряд). Экспоненциальное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ является единственной однопараметрической подгруппой в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ с касательным вектором A в нуле.

Приведем несколько очевидных формул для экспоненциального отображения матриц

$$\exp A^{\mathrm{T}} = (\exp A)^{\mathrm{T}},$$
$$\exp A^{\dagger} = (\exp A)^{\dagger},$$
$$\exp(-A) = (\exp A)^{-1},$$

где индексы т и $\dagger$ обозначают транспонирование и эрмитово сопряжение матриц.

Экспоненциальное отображение матриц аналогично экспоненциальному отображению, которое генерируется векторными полями (см. раздел 8.9). Оно задает отображение алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ в группу Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$.

Предложение 8.14.4. *В алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ существует окрестность $\mathbb{U}$ нулевой матрицы $0 \in \mathbb{U} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) *при экспоненциальном отображении $A \mapsto \exp A$, где $A \in \mathbb{U}$, окрестность $\mathbb{U}$ непрерывно отображается на некоторую окрестность единичной матрицы $\mathbb{1} \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$;*

2) $|\operatorname{tr} A| < 2\pi$;

3) *при $A \in \mathbb{U}$ справедливы включения $-A, A^{\mathrm{T}}, A^{\dagger} \in \mathbb{U}$.*

При построении экспоненциального отображение поле комплексных чисел можно заменить на поле вещественных чисел. При этом конструкция не изменится, если собственные числа матрицы с вещественными элементами также вещественны. (В общем случае это, конечно, не так.)

Экспоненциальное отображение задает отображение множества эндоморфизмов векторного пространства в множество его автоморфизмов

$$\mathsf{exp}: \quad \mathsf{end}\,(\mathbb{V}) \to \mathsf{aut}\,(\mathbb{V}),$$

где $\mathbb{V}$ – произвольное векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел.

Можно доказать, что экспоненциальное отображение для комплексной группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ является сюрьективным. В то же время для группы общих линейных преобразований над полем вещественных чисел $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ это не так.

Пример 8.14.1. Матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

нельзя представить в виде e^A ни для какой вещественной матрицы $A \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$.

В алгебре Ли операцией умножения является коммутатор. Посмотрим, что ему соответствует в группе Ли.

Предложение 8.14.5. *В окрестности единицы группы справедливо равенство*

$$\mathsf{e}^{tA}\,\mathsf{e}^{tB}\,\mathsf{e}^{-tA}\,\mathsf{e}^{-tB} = [A,B]t^2 + \mathsf{O}(t^3), \qquad t \to 0.$$

Доказательство. Прямая проверка.

Аналогичное утверждение справедливо не только для матричных, но и произвольных групп Ли, которое можно также проверить прямыми вычислениями.

8.14.2. Группа Ли $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$.

Определение. Группой *общих линейных преобразований* $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ n-мерного векторного пространства над полем комплексных чисел называется множество всех невырожденных квадратных $n\times n$ матриц с комплексными элементами и обычным правилом умножения. Множество всех невырожденных $n \times n$ матриц с вещественными элементами образует группу общих линейных преобразований n-мерного векторного вещественного пространства $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$.

Единственное условие, которое накладывается на матрицы – это отличие от нуля их определителей, которое необходимо и достаточно для существования обратных матриц.

Умножение компонент векторов, которые мы записываем в виде строки, на матрицы сохраняет линейную структуру векторного пространства $\mathbb{V}$ и поэтому является автоморфизмом $\mathbb{V}$, так как нулевой вектор остается неподвижным.

Множество всех, в том числе вырожденных, комплексных $n \times n$ матриц, как многообразие, представляет собой евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n^2}$, так как параметризуется n^2 комплексными числами, на которые не наложено никаких ограничений. Поскольку определитель матрицы является непрерывной функцией от матрицы, то множество матриц с нулевым определителем представляет собой замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^{2n^2}$, поскольку 0 является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}$. Поэтому множество невырожденных матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ как дополнение замкнутого подмножества образует в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n^2}$ открытое подмногообразие и, следовательно, имеет ту же размерность $2n^2$, что и евклидово пространство.

Нетрудно проверить, что групповая операция является гладкой, и, следовательно, группа $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ является группой Ли. Эта группа связна некомпактна, но локально компактна.

Аналогично, группа всех невырожденных вещественных $n \times n$ матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$, как многообразие, представляет собой открытое подмногообразие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ с гладкой групповой операцией. В отличие от группы комплексных матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$, группа вещественных матриц не является связной. Она состоит из двух связных компонент: матриц с положительным и отрицательным определителем. Множество матриц с положительным определителем $\mathbb{GL}_+(n,\mathbb{R})$ само является группой Ли и представляет собой связную компоненту единицы в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$. Вторая компонента представляет собой ее смежный класс и состоит из матриц с отрицательным определителем.

Это различие легко понять. В комплексном случае матрицу A с вещественным положительным определителем, $\det A > 0$, можно непрерывно трансформировать в матрицу B с вещественным отрицательным определителем, $\det B < 0$, вдоль пути, целиком лежащим в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ и состоящим из матриц с комплексным определителем. Здесь прослеживается связь с вещественной прямой и комплексной плоскостью. Если из вещественной прямой удалить точку 0, то она распадается на два несвязных многообразия. В то же время, удаление начала координат из комплексной плоскости оставляет ее связной.

Очевидно что группа вещественных матриц $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ является подгруппой в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Поскольку размерность $\dim\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}) < \dim\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$, то согласно теоремам 2.10.1 и 2.10.2 эта подгруппа замкнута.

Теперь опишем несколько других подгрупп в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$.

Произвольную невырожденную матрицу $A = (A_a{}^b)$, $a, b, \dots = 1, 2, \dots, n$, можно представить в виде

$$A = a^{1/n}B, \qquad \text{где } a := \det A.$$

Тогда

$$\det B = 1.$$

Определение. Совокупность всех квадратных $n\times n$ матриц с комплексными элементами, определитель которых равен единице, является группой, которая называется группой *специальных линейных преобразований* n-мерного векторного пространства над полем комплексных чисел и обозначается $\mathbb{SL}(n,\mathbb{C})$. Если элементы матриц вещественны, то соответствующая группа Ли обозначается $\mathbb{SL}(n,\mathbb{R})$. Она является подгруппой в $\mathbb{SL}(n,\mathbb{C})$.

Очевидно, что $\mathbb{SL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$. Это максимальная полупростая подгруппа группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$, и ее размерность равна $2n^2 - 1$. Можно доказать, что она является простой. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ изоморфна алгебре комплексных матриц с нулевым следом и была рассмотрена в предыдущем разделе.

Группа $\mathbb{SL}(n,\mathbb{R})$ является подгруппой группы общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ и является связной некомпактной, но локально компактной группой Ли размерности $n^2 - 1$. Эта группа является максимальной полупростой подгруппой группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ (и простой). Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ изоморфна алгебре вещественных матриц с нулевым следом.

В некоторой окрестности единичной матрицы $\mathbb{1} \in \mathbb{SL}(n,\mathbb{K})$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, элемент группы $S \in \mathbb{SL}(n,\mathbb{K})$ взаимно однозначно представляется экспоненциальным отображением элемента алгебры $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$:

$$S = \mathsf{e}^A, \qquad \operatorname{tr} A = 0.$$

У группы общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ есть много других подгрупп.

Пример 8.14.2. Группа вещественных ортогональных $n \times n$ матриц $\mathbb{O}(n)$ состоит из матриц $S \in \mathbb{O}(n) \subset \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$SS^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}}S = 1,$$

где S^{T} обозначает транспонированную матрицу. След от этого равенства приводит к ограничению на матричные элементы $S_i{}^j S^i{}_j = n$. Это значит, что групповое многообразие является замкнутым подмножеством сферы $\mathbb{S}^{n^2-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$. Отсюда, по теореме Гейне–Бореля–Лебега, следует компактность группы вращений. Группа $\mathbb{O}(n)$ является компактной группой Ли размерности $n(n-1)/2$ и состоит из двух компонент связности. Матрицы с единичным определителем образуют связную компоненту единицы $\mathbb{SO}(n)$ (собственные вращения). Вторую компоненту связности образует ее смежный класс, состоящий из несобственных ортогональных матриц с определителем, равным -1.

Группы вращений $\mathbb{SO}(n)$ при $n \geqslant 2$ являются группами симметрий сфер $\mathbb{S}^{n-1}$, вложенных в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Можно доказать, что фундаментальные группы групп вращений $\mathbb{SO}(n)$ при всех $n \geqslant 3$ равны $\mathbb{Z}_2$. Следовательно, они не являются односвязными.

Алгебры Ли групп $\mathbb{O}(n)$ и $\mathbb{SO}(n)$ совпадают и изоморфны алгебре антисимметричных $n \times n$ матриц $\mathfrak{so}(n)$. Вблизи единицы $\mathbb{1} \in \mathbb{SO}(n)$ матрица вращений $S \in \mathbb{SO}(n)$ взаимно однозначно представляется в виде экспоненциала отображения некоторого элемента алгебры $A \in \mathfrak{so}(n)$:

$$S = \mathsf{e}^A, \qquad \text{где } A = -A^{\mathrm{T}}.$$

Пример 8.14.3. Группа двумерных вращений $\mathbb{SO}(2)$ как многообразие представляет собой окружность $\mathbb{S}^1$. Ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Полная группа вращений $\mathbb{O}(2)$ состоит из двух компонент связности. Как многообразие она представляет собой два экземпляра окружности $\mathbb{O}(2) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$. Фундаментальная группа окружности совпадает с группой целых чисел по сложению $\mathbb{Z}$.

Пример 8.14.4. Группа трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$ является группой симметрии сферы $\mathbb{S}^2$, вложенной в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Каждое вращение можно параметризовать вектором $\vec{n}$, направленным вдоль оси вращения, длина которого равна углу поворота против часовой стрелки $|\vec{n}| \leqslant \pi$. Множество векторов поворота заполняет шар $\mathbb{B}^3_\pi \subset \mathbb{R}^3$. При этом противоположные точки граничной сферы $\mathbb{S}^2_\pi$ радиуса π необходимо отождествить, так как поворот на угол π совпадает с поворотом на угол $-\pi$. Таким образом, как многообразие группа $\mathbb{SO}(3)$ представляет собой трехмерный шар с отождествленными противоположными точками граничной сферы $\mathbb{S}^2_\pi$. Фундаментальная группа группы $\mathbb{SO}(3)$ является группа $\mathbb{Z}_2$. Полная группа трехмерных вращений $\mathbb{O}(3)$ как многообразие состоит из двух диффеоморфных компонент связности. Фундаментальная группа каждой компоненты связности равна $\mathbb{Z}_2$.

Пример 8.14.5. Пусть в декартовых координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ задана метрика, представляющая собой диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят p положительных и q отрицательных единиц

$$\eta_{ab} = \mathsf{diag}\,(\underbrace{+\cdots+}_{p}\underbrace{-\cdots-}_{q}), \qquad p+q=n. \tag{8.102}$$

Для определенности мы считаем, что все положительные единицы идут вначале. Сигнатура этой метрики равна p,q. Матрицы преобразований евклидова пространства $S_a{}^b$, сохраняющие метрику (8.102),

$$\eta_{ab} = S_a{}^c S_b{}^d \eta_{cd}, \tag{8.103}$$

образуют группу, которая называется группой вращений $\mathbb{O}(p,q)$. В частности, при $q = 0$ группа $\mathbb{O}(n,0) = \mathbb{O}(n)$, а при $p = 1$ она становится группой Лоренца $\mathbb{O}(1, n-1)$. Из определения (8.103) следует, что $\mathsf{det}\, S = \pm 1$. То есть группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$ состоит по крайней мере из двух компонент связности: матриц с положительным и отрицательным определителем. Можно показать, что группа Лоренца, состоит из четырех компонент связности. При $q \neq 0, n$ группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$ является некомпактной.

Группа вращений $\mathbb{O}(p,q)$ является группой симметрии пространств постоянной кривизны: гиперболоидов $\mathbb{H}$ размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{H} = n-1$, вложенных в псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ уравнением

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \cdots - (x^n)^2 = \pm r^2, \qquad r = \mathsf{const}.$$

Это утверждение является следствием определения (8.103). В зависимости от знака правой части мы получаем различные гиперболоиды, которые в общем случае состоят из нескольких компонент связности.

Пример 8.14.6. Рассмотрим комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ с базисом e_a, $a = 1, \ldots, n$. Пусть $X = X^a e_a$ и $Y = Y^a e_a$ – два произвольных вектора из $\mathbb{C}^n$. Определим *эрмитово* скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ следующим соотношением

$$(X, Y) := X^{a\dagger} Y^b \delta_{ab}, \tag{8.104}$$

где символ $\dagger$ обозначает комплексное сопряжение. Отсюда следует, что $(X,X) \geqslant 0$ и $(X,X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$. Вещественное число

$$\|X\| = \sqrt{(X,X)}$$

называется *длиной* вектора $X \in \mathbb{C}^n$.

Группа унитарных матриц $\mathbb{U}(n)$ состоит из комплексных $n \times n$ матриц $U \in \mathbb{U}(n)$, которые сохраняют эрмитово скалярное произведение (8.104). В матричных обозначениях это условие записывается в виде *условия унитарности*

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1,$$

где символ $\dagger$ обозначает эрмитово сопряжение (транспонирование и комплексное сопряжение всех элементов). Из условия унитарности следует, что определитель унитарной матрицы равен по модулю единице. Группа $\mathbb{U}(n)$ является связной группой Ли размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{U}(n) = n^2$. Так же как и группа вещественных ортогональных матриц эта группа компактна. Группа $\mathbb{U}(n)$ не является односвязной, и ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$ [47]. Как многообразие группа $\mathbb{U}(n)$ диффеоморфна прямому произведению окружности на группу специальных унитарных матриц с единичным определителем $\mathbb{U}(n) \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{SU}(n)$, $n \geqslant 2$.

При $n = 1$ имеем абелеву группу $\mathbb{U}(1)$, которая состоит из комплексных чисел, равных по модулю единице, с обычным правилом умножения комплексных чисел. Как многообразие эта группа представляет собой окружность, $\mathbb{U}(1) \approx \mathbb{S}^1$. Легко построить изоморфизм групп, $\mathbb{U}(1) \simeq \mathbb{SO}(2)$:

$$\mathbb{U}(1) \ni \quad \mathsf{e}^{i\alpha} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{SO}(2), \qquad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ изоморфна алгебре антиэрмитовых $n \times n$ матриц. Вблизи единицы $\mathbb{1} \in \mathbb{U}(n)$ произвольная унитарная матрица $U \in \mathbb{U}(n)$ взаимно однозначно представляется в виде экспоненциала от некоторой антиэрмитовой матрицы $A \in \mathfrak{u}(n)$

$$U = \mathsf{e}^A, \qquad A = -A^\dagger.$$

Пример 8.14.7. Группа специальных унитарных матриц $\mathbb{SU}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, состоит из унитарных $n \times n$ матриц $U \in \mathbb{SU}(n)$ с единичным определителем:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \qquad \det U = 1.$$

Эта группа является связной компактной группой Ли размерности $\dim \mathbb{SU}(n) = n^2 - 1$. Она образует замкнутое подмножество в $\mathbb{U}(n)$. Группа $\mathbb{SU}(n)$ является также односвязной. Доказательство этого утверждения сложно, и интересующийся читатель может найти его в [47].

Группа $\mathbb{SU}(1)$ тривиальна и состоит из единственного элемента – единицы.

Алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ изоморфна алгебре антиэрмитовых $n\times n$ матриц с нулевым следом. Вблизи единицы $\mathbb{1} \in \mathbb{SU}(n)$ каждая унитарная матрица с единичным определителем $U \in \mathbb{SU}(n)$ взаимно однозначно представляется экспоненциальным отображением элемента алгебры $A \in \mathfrak{su}(n)$:

$$U = \mathsf{e}^A, \qquad A = -A^\dagger, \quad \operatorname{tr} A = 0.$$

Множество эрмитовых матриц играет важную роль и в математике, и в физике. Опишем их свойства подробнее. Напомним

Определение. Матрица $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ называется *эрмитовой*, если выполнено условие

$$A = A^\dagger. \tag{8.105}$$

В вещественном случае множество эрмитовых матриц соответствует симметричным матрицам, а множество антиэрмитовых – антисимметричным.

Множество эрмитовых матриц $A, B, \ldots$ в отличие от множества антиэрмитовых матриц не образует подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, так как

$$[A,B]^\dagger = [B,A] = -[A,B].$$

Заметим также, что отображение $A \mapsto A^\dagger$ не является автоморфизмом группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$, так как при эрмитовом сопряжении меняется порядок матриц, и что эрмитовы матрицы не образуют в $\mathbb{GL}(n,\mathbb{C})$ подгруппы.

Сформулируем некоторые свойства эрмитовых матриц [31], глава 1, §IV, предложения 2, 3 и 4.

Предложение 8.14.6. *Если A – эрмитова матрица, то UAU^{-1} – также эрмитова для любой унитарной матрицы $U \in \mathbb{U}(n)$. Далее, существует такая унитарная матрица U_0 (не единственная), что $U_0AU_0^{-1}$ является диагональной матрицей. Если матрица A вещественна, то матрицу U_0 можно выбрать ортогональной.*

Предложение 8.14.7. *Все собственные числа эрмитовой матрицы вещественны.*

Предложение 8.14.8. *Если A – эрмитова матрица, то в пространстве $\mathbb{C}^n$ существует ортонормальный базис, составленный из ее собственных векторов.*

Эрмитова матрица называется *положительно определенной*, если все ее собственные числа положительны.

Предложение 8.14.9 (Полярное разложение матриц). *Любая невырожденная матрица $A \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$ может быть записана, и притом лишь единственным способом, в виде произведения $A = UP$ или $A = PU$ унитарной матрицы $U \in \mathbb{U}(n)$ и положительно определенной матрицы P. Сомножители U и P являются непрерывными функциями A.*

Доказательство. См., например, [31], глава 1, §V, предложение 1.

Поскольку множество всех положительно определенных матриц гомеоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$, то группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$, как многообразие, гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C}) \approx \mathbb{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

8.15. Универсальная накрывающая $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R})$

Построим универсальную накрывающую группу $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R})$ для группы $\mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$. Это построение будет конструктивным, т.е. мы определим групповую операцию на связном и односвязном многообразии $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R})$, а затем построим гомоморфизм групп $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{SL}(2, \mathbb{R})$ (см., например, [47], лекция 20).

Рассмотрим трехмерное многообразие $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{D}$, которое представляет собой прямое произведение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на единичный диск $\mathbb{D}$ плоскости комплексного переменного, состоящего из таких комплексных чисел z, что $|z| < 1$. Поскольку каждый из сомножителей является связным и односвязным многообразием, то и их произведение также связно и односвязно.

Функция

$$w := \frac{1 + z}{1 + \bar{z}}$$

осуществляет непрерывное отображение диска $\mathbb{D}$ на окружность $|w| = 1$ с выколотой точкой $w = -1$. Поэтому для любого числа $z \in \mathbb{D}$ существует единственное число t, $-\pi < t < \pi$, для которого

$$\mathsf{e}^{it} = \frac{1 + z}{1 + \bar{z}}.$$

Обозначим это число символом

$$t = \frac{1}{i} \ln \frac{1 + z}{1 + \bar{z}}.$$

Определим на многообразии $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R})$ умножение следующей формулой

$$(x, u)(y, v) = \left(x + y + t, \frac{u + \mathsf{e}^{2iy} v}{\mathsf{e}^{2iy} + u\bar{v}} \right), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \quad u, v \in \mathbb{D}, \tag{8.106}$$

где

$$t = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + \mathsf{e}^{-2iy} u\bar{v}}{1 + \mathsf{e}^{2iy} \bar{u} v}.$$

Так как

$$|\mathsf{e}^{2iy} + u\bar{v}|^2 - |u + \mathsf{e}^{2iy} v|^2 = \left(1 - |u|^2\right)\left(1 - |v|^2\right) > 0,$$

то

$$\left| \frac{u + \mathsf{e}^{2iy} v}{\mathsf{e}^{2iy} + u\bar{v}} \right| < 1.$$

Поэтому формула (8.106) корректно определяет в $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{D}$ умножение.

Это умножение обладает единицей $(0, 0)$, и для любого элемента (x, u) существует обратный элемент

$$(x, u)^{-1} = (-x, -\mathsf{e}^{2ix} u).$$

Кроме того, прямые вычисления показывают, что умножение (8.106) ассоциативно. Это умножение гладко, и тем самым доказано, что многообразие $\widetilde{\mathbb{SL}}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{D}$ является группой Ли относительно умножения (8.106).

Центр этой группы состоит из таких элементов (x,u), для которых, в частности, равенство

$$\frac{u+\mathrm{e}^{2iy}v}{\mathrm{e}^{2iy}+u\bar v}=\frac{v+\mathrm{e}^{2ix}u}{\mathrm{e}^{2ix}+v\bar u} \tag{8.107}$$

выполнено для всех $y\in\mathbb{R}$ и $v\in\mathbb{D}$. В частном случае при $v=0$ должно выполняться равенство $u=\mathrm{e}^{2iy}u$ для всех y. Это возможно только при $u=0$. Тогда из (8.107) следует равенство $v=\mathrm{e}^{2ix}v$, которое должно выполняться для всех v, что возможно только при $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что все элементы вида $(\pi n,0)$ принадлежат центру группы $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})$. Следовательно, центр группы $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})$ бесконечен.

Теперь построим гомоморфизм $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})\to\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$. Легко проверить, что матрица

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-|u|^2}}\begin{pmatrix}\cos x+|u|\cos(x+\varphi) & |u|\sin(x+\varphi)-\sin x\\ |u|\sin(x+\varphi)+\sin x & \cos x-|u|\cos(x+\varphi)\end{pmatrix}, \tag{8.108}$$

где $\varphi=\arg u$, имеет единичный определитель. Прямые вычисления позволяют проверить, что отображение $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})\to\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ определено корректно и является гомоморфизмом групп. Его ядро состоит из элементов вида $(2\pi n,0)$ и, значит, дискретно. Поскольку размерности групп совпадают, то гомоморфизм $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})\to\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ является групповым накрытием. Таким образом мы построили универсальную накрывающую для группы $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$:

$$\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})=\frac{\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})}{\mathbb{Z}},$$

где группа преобразований

$$\mathbb{Z}:\quad x\to x+2\pi n$$

действует на прямой $\mathbb{R}$. С топологической точки зрения группа $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ является произведением окружности на диск

$$\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})\approx\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}.$$

Группа специальных матриц $\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ дважды накрывает собственную ортохронную группу Лоренца $\mathbb{SO}_0(1,2)$. При этом одному лоренцеву вращению соответствует пара матриц (8.108), отличающихся знаком. Изменению знака матрицы A соответствует сдвиг координаты x на π. Поэтому

$$\mathbb{SO}_0(1,2)=\frac{\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})}{\mathbb{Z}_2}=\frac{\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})}{\mathbb{Z}},$$

где группа преобразований действует по следующему правилу:

$$\mathbb{Z}:\quad x\to x+\pi n.$$

Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на окружности $\mathbb{S}^1$ путем отождествления противоположных точек и превращает окружность в проективное пространство $\mathbb{RP}^1$. Поскольку одномерное проективное пространство с топологической точки зрения является окружностью, то

$$\mathbb{SO}_0(1,2)\approx\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}.$$

Поскольку диск диффеоморфен всей плоскости $\mathbb{D}\approx\mathbb{R}^2$, то

$$\mathbb{SO}_0(1,2)\approx\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2.$$

Предложенная конструкция универсальной накрывающей имеет следующее объяснение. Согласно теореме о полярном разложении матриц любая унимодулярная матрица $A\in\mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ единственным образом раскладывается в произведение $A=UP$ некоторой матрицы вращения U и некоторой положительно определенной симметричной унимодулярной матрицы P. Матрица U задается углом поворота x, а матрица P, имеющая вид

$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix},$$

где $a>0$ и $ac-b^2=1$, задается двумя числами $a>0$ и $b\in\mathbb{R}$, т.е. комплексным числом $z=a+ib$, принадлежащим правой полуплоскости $a>0$. Переходя с помощью дробно-линейного преобразования от правой полуплоскости к единичному кругу, мы получаем, следовательно, что каждая матрица $A \in \mathbb{SL}(2,\mathbb{R})$ однозначно характеризуется парой (x,u), где $x \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{D}$. При этом умножению матриц соответствует умножение пар, которое задается формулой (8.106). Чтобы получить теперь универсальную накрывающую $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})$ достаточно считать координату x не углом, а точкой вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Теорема Адо, которая будет сформулирована в следующем разделе, утверждает, что любая алгебра Ли имеет точное матричное представление. То есть классификация матричных алгебр Ли влечет за собой классификацию всех алгебр Ли. С группами дело обстоит иначе.

Теорема 8.15.1. *Группа* $\widetilde{\mathbb{SL}}(2,\mathbb{R})$ *не вкладывается ни в какую группу* $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ *и поэтому не является матричной группой Ли.*

Доказательство. См., например, [2], теорема 6.1.

8.16. Классификация простых алгебр и групп Ли

Классификация простых алгебр Ли сводится к классификации матричных алгебр Ли, благодаря следующему утверждению.

Теорема 8.16.1 (Адо). *Каждая алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *над полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *имеет точное (инъективное) представление в алгебре Ли* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *для некоторого* n.

Доказательство. См. [51].

Следствие. *Для каждой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *существует группа Ли* $\mathbb{G}$ *(и, в частности, односвязная группа Ли) с данной алгеброй Ли.*

Теорема Адо важна, поскольку позволяет свести изучение абстрактных алгебр Ли к матричным.

Напомним, что комплексификацией вещественного векторного пространства $\mathbb{V}$ называется комплексное векторное пространство ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$, состоящее из векторов вида $Z = X + iY$, где $X, Y \in \mathbb{V}$. При этом сложение векторов $Z_1 = X_1 + iY_1$ и $Z_2 = X_2 + iY_2$ задается формулой

$$Z_1 + Z_2 := X_1 + X_2 + i(Y_1 + Y_2).$$

Умножение вектора Z на комплексное число $c = a + ib$ определяется равенством

$$cZ := aX - bY + i(aY + bX).$$

Определение. Комплексификацией ${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется комплексная алгебра Ли, удовлетворяющая двум условиям:

1) ${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ является комплексификацией вещественного векторного пространства $\mathfrak{g}$;

2) умножение в ${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$ задается формулой

$$[Z_1, Z_2] = [X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] := [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i[X_1, Y_2] + i[Y_1, X_2]. \tag{8.109}$$

Если $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \mathrm{N}$, то вещественная размерность ее комплексификации вдвое больше: $\dim_{\mathbb{R}}({}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}) = 2\mathrm{N}$. При этом комплексная размерность комплексифицированной алгебры Ли остается прежней $\dim_{\mathbb{C}}({}^{\mathbb{C}}\mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \mathrm{N}$.

С другой стороны, комплексную алгебру Ли $\mathfrak{h}$ комплексной размерности N с базисом e_{A}, $\mathrm{A} = 1, \dots \mathrm{N}$, можно рассматривать как вещественную алгебру Ли вещественной размерности $2\mathrm{N}$ с базисом e_1, ie_1, $\dots$, e_{N}, ie_{N}. Эту овеществление комплексной алгебры Ли обозначим ${}^{\mathbb{R}}\mathfrak{h}$. Можно поступить по-другому. Назовем вещественной формой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ такую вещественную алгебру Ли ${}^{r}\mathfrak{h}$, которая после комплексификации дает $\mathfrak{h}$. В этом случае размерность вещественной формы комплексной алгебры Ли в два раза меньше вещественной размерности исходной алгебры Ли.

Пример 8.16.1. Рассмотрим вещественную алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, состоящую из вещественных $n \times n$ матриц с обычным правилом коммутирования. Тогда ее комплексификацией будет алгебра Ли ${}^{\mathbb{C}}\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, состоящая из комплексных $n \times n$ матриц. Теперь рассмотрим комплексную алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Ее овеществление будет изоморфно прямой сумме алгебр Ли: ${}^{\mathbb{R}}\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ той же вещественной размерности. В то же время вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ будет вещественная алгебра Ли ${}^{r}\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ вдвое меньшей размерности.

В предыдущем разделе была приведена классификация всех простых комплексных алгебр Ли. Поэтому возникает вопрос следует ли отсюда классификация вещественных алгебр Ли. Ответ на этот вопрос положителен в силу следующего утверждения.

Теорема 8.16.2. *Все вещественные простые алгебры Ли получаются из простых комплексных алгебр Ли либо овеществлением, либо они являются вещественными формами простых комплексных алгебр Ли.*

Доказательство. См., например, [43], глава 1, §5, теорема 1.

Таким образом, для классификации простых вещественных алгебр Ли необходимо найти все вещественные неизоморфные между собой формы комплексных алгебр Ли. Этот вопрос сложен, но решен. Доказывается, что каждая комплексная простая алгебра имеет только конечное число вещественных форм, и все они найдены [52]. Среди этих вещественных форм только одна является компактной. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между простыми комплексными алгебрами Ли и простыми вещественными компактными алгебрами Ли. Поэтому классификация простых вещественных компактных алгебр Ли сводится к классификации простых комплексных алгебр Ли.

Приведем классификацию всех простых вещественных алгебр Ли (доказательство можно найти, например, в [43], §5).

Вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{a}_n \simeq \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$.

1. $\mathfrak{su}(n+1)$ – компактная алгебра Ли всех антиэрмитовых $(n+1)\times(n+1)$ матриц Z с нулевым следом, $\operatorname{tr} Z = 0$.
2. $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ – некомпактная алгебра Ли всех вещественных $(n+1)\times(n+1)$ матриц X с нулевым следом, $\operatorname{tr} X = 0$.
3. $\mathfrak{su}(p,q)$, $p+q=n+1$, $p \geqslant q$, – некомпактная алгебра Ли всех матриц вида
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2^\dagger & Z_3 \end{pmatrix},$$
где Z_1, Z_3 – антиэрмитовы матрицы порядков p и q соответственно, $\operatorname{tr} Z_1 + \operatorname{tr} Z_3 = 0$, матрица Z_2 произвольна.
4. $\mathfrak{su}^*(2(n+1))$ – некомпактная алгебра Ли всех $2(n+1)\times 2(n+1)$ матриц вида
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 \end{pmatrix},$$
где Z_1, Z_2 – комплексные $(n+1)\times(n+1)$ матрицы, $\operatorname{tr} Z_1 + \operatorname{tr} \overline{Z}_1 = 0$.

Вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{b}_n \simeq \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$.

1. $\mathfrak{so}(2n+1)$ – компактная алгебра Ли всех вещественных антисимметричных $(2n+1)\times(2n+1)$ матриц.
2. $\mathfrak{so}(p,q)$, $p+q=2n+1$, $p \geqslant q$, – некомпактная алгебра Ли всех вещественных $(2n+1)\times(2n+1)$ матриц вида
$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{T}} & X_3 \end{pmatrix},$$
где X_1, X_3 – антисимметричные матрицы порядков p и q соответственно, матрица X_2 произвольна.

Вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{c}_n \simeq \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$.

1. $\mathfrak{sp}(n)$ – компактная алгебра Ли всех антиэрмитовых бесследовых комплексных $2n\times 2n$ матриц вида
$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$
где все матрицы $Z_{1,2,3}$ имеют порядок n, и матрицы Z_2 и Z_3 симметричные (т.е. $\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2n)$).
2. $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ – некомпактная алгебра Ли всех вещественных $2n\times 2n$ матриц вида
$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$
где $X_{1,2,3}$ – вещественные $n\times n$ матрицы и $X_{2,3}$ – симметричные матрицы.

3. $\mathfrak{sp}(p,q)$, $p+q=n$, $p\geqslant q$, – некомпактная алгебра Ли всех комплексных $2n\times 2n$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{12}^{\dagger} & Z_{22} & Z_{14}^{\mathrm{T}} & Z_{24} \\ -\overline{Z}_{13} & \overline{Z}_{14} & \overline{Z}_{11} & -\overline{Z}_{12} \\ Z_{14}^{\dagger} & -\overline{Z}_{24} & -Z_{12}^{\mathrm{T}} & \overline{Z}_{22} \end{pmatrix},$$

где Z_{11}, Z_{13} – матрицы порядка p, Z_{12} и Z_{14} – $p\times q$ матрицы, Z_{11} и Z_{22} – антиэрмитовы, Z_{13} и Z_{24} – симметричные.

Вещественные формы алгебры Ли $\mathfrak{d}_n\simeq\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$, $n\geqslant 4$.

1. $\mathfrak{so}(2n)$ – компактная алгебра Ли всех вещественных антисимметричных $2n\times 2n$ матриц.
2. $\mathfrak{so}(p,q)$, $p+q=2n$, $p\geqslant q$, – некомпактная алгебра Ли всех вещественных $2n\times 2n$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{T}} & X_3 \end{pmatrix},$$

где X_1, X_3 – антисимметричные матрицы порядков p и q соответственно, матрица X_2 произвольна.

3. $\mathfrak{so}^*(2n)$ – некомпактная алгебра Ли всех комплексных $2n\times 2n$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\overline{Z}_2 & \overline{Z}_1 \end{pmatrix},$$

где Z_1, Z_2 – комплексные $n\times n$ матрицы, Z_1 – антисимметричная, Z_2 – эрмитова.

Вещественные формы алгебр Ли, приведенные выше, определены при всех $n\geqslant 1$. Ограничения на номера алгебр n возникают из-за наличия изоморфизмов между комплексными алгебрами Ли, которые индуцируют изоморфизмы их вещественных форм. Запишем эти изоморфизмы в виде таблицы. Случай $\mathfrak{d}_2\simeq\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_1$ включен для удобства. Отметим также, что алгебра $\mathfrak{d}_1$ не является полупростой.

Изоморфизмы комплексных алгебр Ли	Изоморфизмы вещественных форм алгебр Ли
$\mathfrak{a}_1\simeq\mathfrak{b}_1\simeq\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{su}(2)\simeq\mathfrak{so}(3)\simeq\mathfrak{sp}(1)$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\simeq\mathfrak{su}(1,1)\simeq\mathfrak{so}(2,1)\simeq\mathfrak{sp}(1,\mathbb{R})$
$\mathfrak{b}_2\simeq\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{so}(5)\simeq\mathfrak{sp}(2)$ $\mathfrak{so}(3,2)\simeq\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(4,1)\simeq\mathfrak{sp}(1,1)$
$\mathfrak{d}_2\simeq\mathfrak{a}_1\oplus\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{so}(4)\simeq\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(3)$ $\mathfrak{so}(2,2)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\simeq\mathfrak{so}(3,1)$ $\mathfrak{so}^*(4)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(2)$
$\mathfrak{a}_3\simeq\mathfrak{d}_3$	$\mathfrak{su}(4)\simeq\mathfrak{so}(6)$ $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})\simeq\mathfrak{so}(3,3)$ $\mathfrak{su}(2,2)\simeq\mathfrak{so}(4,2)$ $\mathfrak{su}(3,1)\simeq\mathfrak{so}^*(6)$ $\mathfrak{su}^*(4)\simeq\mathfrak{so}(5,1)$ $\mathfrak{so}^*(8)\simeq\mathfrak{so}(6,2)$

Таблица 8.1. Изоморфизм комплексных и вещественных алгебр Ли

Вещественные формы исключительных простых алгебр Ли приведены, например, в [53].

Как уже отмечалось, каждой комплексной простой алгебре Ли соответствует только одна вещественная компактная форма.

Приведем также классификацию комплексных простых групп и их вещественных компактных форм (см., например, [45], глава X, §6). В таблице колонка простых комплексных групп Ли обозначена ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{G}$, а их вещественных компактных форм – $\mathbb{G}$. Универсальные накрывающие вещественных компактных групп Ли отмечены знаком тильды $\widetilde{\mathbb{G}}$, а через $\mathbb{Z}(\widetilde{\mathbb{G}})$ обозначен центр универсальной накрывающей. То есть $\mathbb{G}=\widetilde{\mathbb{G}}/\mathbb{Z}(\widetilde{\mathbb{G}})$. Приведены также размерности вещественных групп Ли.

$\mathfrak{g}$	${}^{\mathbb{C}}\mathbb{G}$	$\mathbb{G}$	$\mathbb{Z}(\widetilde{\mathbb{U}})$	$\dim \mathbb{U}$
$\mathfrak{a}_n \quad (n \geqslant 1)$	$\mathbb{SL}(n+1,\mathbb{C})$	$\mathbb{SU}(n+1)$	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$n(n+2)$
$\mathfrak{b}_n \quad (n \geqslant 2)$	$\mathbb{SO}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathbb{SO}(2n+1)$	$\mathbb{Z}_2$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{c}_n \quad (n \geqslant 3)$	$\mathbb{SP}(n,\mathbb{C})$	$\mathbb{SP}(n)$	$\mathbb{Z}_2$	$n(2n+1)$
$\mathfrak{d}_n \quad (n \geqslant 4)$	$\mathbb{SO}(2n,\mathbb{C})$	$\mathbb{SO}(2n)$	$\mathbb{Z}_4, \quad n$ нечетно $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad n$ четно	$n(2n-1)$
$\mathfrak{g}_2$	${}^{\mathbb{C}}\mathbb{G}_2$	$\mathbb{G}_2$	$\mathbb{Z}_1$	14
$\mathfrak{f}_4$	${}^{\mathbb{C}}\mathbb{F}_4$	$\mathbb{F}_4$	$\mathbb{Z}_1$	52
$\mathfrak{e}_6$	${}^{\mathbb{C}}\mathbb{E}_6$	$\mathbb{E}_6$	$\mathbb{Z}_3$	78
$\mathfrak{e}_7$	${}^{\mathbb{C}}\mathbb{E}_7$	$\mathbb{E}_7$	$\mathbb{Z}_2$	133
$\mathfrak{e}_8$	${}^{\mathbb{C}}\mathbb{E}_8$	$\mathbb{E}_8$	$\mathbb{Z}_1$	248

Таблица 8.2. Простые группы Ли, соответствующие простым комплексным алгебрам Ли и их компактным вещественным формам

9. Группы преобразований

Теория групп имеет важные приложения в математической физике, и почти всегда группы появляются как группы преобразований чего либо. Это может быть группа преобразований пространства-времени, группа симметрий изотопического пространства (например, $\mathbb{SU}(3)$ симметрия в физике элементарных частиц), группа симметрий уравнений движения или что нибудь более экзотическое. В настоящем разделе мы рассмотрим группы преобразований $\mathbb{G}$ многообразия $\mathbb{M}$. В общем случае группа $\mathbb{G}$ может быть конечной, счетной или группой Ли. В основном мы будем рассматривать группы Ли преобразований, хотя многие определения и утверждения справедливы и для произвольных групп.

9.1. Действие групп преобразований

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задано *правое* действие группы $\mathbb{G}$, т.е. задано отображение

$$\mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni \quad x, a \mapsto xa \quad \in \mathbb{M}, \tag{9.1}$$

которое предполагается достаточно гладким по x.

Определение. Пара $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ называется *группой правых преобразований* многообразия $\mathbb{M}$, если действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ справа удовлетворяет следующим условиям:
1) при любом $a \in \mathbb{G}$ отображение $\mathbb{M} \ni x \mapsto xa \in \mathbb{M}$ является диффеоморфизмом,
2) $(xa)b = x(ab)$ для всех $x \in \mathbb{M}$ и $a, b \in \mathbb{G}$.
В этом случае многообразие $\mathbb{M}$ называется $\mathbb{G}$-*многообразием*.

Если $\mathbb{G}$ – группа Ли, то отображение (9.1) предполагается достаточно гладким также по $a \in \mathbb{G}$ и, следовательно, непрерывным для всех $a \in \mathbb{G}$ и для всех $x \in \mathbb{M}$. Для каждой фиксированной точки $x \in \mathbb{M}$ мы имеем достаточно гладкое отображение $\mathbb{G} \to \mathbb{M}$ (орбита точки x).

Замечание. Иногда в качестве $\mathbb{M}$ мы будем рассматривать многообразия с краем. Под дифференцируемой функцией f на $\mathbb{M}$ в таком случае мы понимаем наличие всех частных производных у f во всех внутренних точках и существование предела этих производных на крае $\partial\mathbb{M}$.

Каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ соответствует достаточно гладкое отображение $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$, заданное правилом $x \mapsto xa$. Поэтому группа преобразований определяет отображение $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ группы $\mathbb{G}$ в группу диффеоморфизмов многообразия $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$.

Предложение 9.1.1. *Пара* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ *является группой преобразований многообразия* $\mathbb{M}$ *тогда и только тогда, когда отображение* $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ *является гомоморфизмом групп и отображение* (9.1) *является достаточно гладким.*

Доказательство. Условие 1) в определении группы преобразований означает, что отображение $x \mapsto xa$ принадлежит группе $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$. Групповая операция сохраняется при отображении в силу свойства 2). Осталось доказать, что единица $e \in \mathbb{G}$ отображается в тождественное преобразование многообразия $\mathbb{M}$. Действительно, отображение $x \mapsto xa$ является диффеоморфизмом и, следовательно, биекцией для всех $a \in \mathbb{G}$. В частности, для каждого $x \in \mathbb{M}$ найдется такая точка $y \in \mathbb{M}$, что $x = ye$. Умножив это уравнение справа на e, получаем цепочку равенств:

$$xe = ye^2 = ye = x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{M}.$$

То есть единичный элемент группы не сдвигает ни одну точку многообразия.

Обратно. Каждому элементу a соответствует некоторый диффеоморфизм, т.е. условие 1) выполнено. Поскольку отображение $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ – гомоморфизм, то выполнено условие 2).

Аналогично определяется *левое* действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$, т.е. отображение

$$\mathbb{G} \times \mathbb{M} \ni \quad a, x \mapsto ax \quad \in \mathbb{M}.$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, под *группой преобразований* многообразия будем понимать группу правых преобразований и будем говорить, что $\mathbb{G}$ действует на $\mathbb{M}$, подразумевая действие группы справа.

Пример 9.1.1. Если задано представление группы $\mathbb{G}$, то задана группа линейных преобразований $(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ векторного пространства $\mathbb{V}$ (автоморфизмов), которое снабжено естественной структурой многообразия.

Пример 9.1.2. Группа Ли является группой преобразований самой себя $\mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, которую можно рассматривать, как действующую слева или справа.

Определение. Группа $\mathbb{G}$ действует на $\mathbb{M}$ *тривиально*, если равенство $xa = x$ выполнено для всех $x \in \mathbb{M}$ и всех $a \in \mathbb{G}$. В этом случае группа преобразований превращается в тривиальное главное расслоение $\mathbb{M} \times \mathbb{G} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ с естественной проекцией $\pi : (x, a) \mapsto x$.

Говорят, что $\mathbb{G}$ действует *эффективно* на $\mathbb{M}$, если из равенства $xa = x$ для всех $x \in \mathbb{M}$ следует, что $a = e$. Если для любой точки $x \in \mathbb{M}$ уравнение $xa = x$ имеет единственное решение $a = e$, то говорят, что группа преобразований действует *свободно*.

Другими словами, действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ является эффективным, если любой элемент группы, отличный от единичного, перемещает хотя бы одну точку. Действие группы свободно, если любой элемент группы, отличный от единичного, перемещает все точки многообразия. Группа, действующая свободно, является эффективной. Обратное утверждение неверно, что показывает следующий

Пример 9.1.3. Группа вращений $\mathbb{SO}(3)$ трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ действует эффективно, но не свободно, так как начало координат остается неподвижным.

Если действие группы преобразований свободно, то это значит, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ либо не существует преобразования, связывающего эти точки, $x_2 = x_1 a$, либо элемент $a \in \mathbb{G}$ *единственен*.

Определение. *Ядром* $\mathbb{K}$ *группы преобразований* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ называется множество элементов группы, которое действует тривиально на все точки многообразия,

$$\mathbb{K} := \{a \in \mathbb{G} : \quad xa = x, \ \forall x \in \mathbb{M}\}.$$

Действие группы эффективно, если $\mathbb{K} = \{e\}$.

Предложение 9.1.2. *Ядро группы преобразований является нормальной подгруппой в* $\mathbb{G}$. *Кроме того, эта подгруппа замкнута в* $\mathbb{G}$.

Доказательство. Отображение $\mathbb{G} \to \mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$ непрерывно и ядро $\mathbb{K}$ отображается в единицу группы диффеоморфизмов $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$. Поскольку единица замкнута в $\mathsf{diff}\,(\mathbb{M})$, то ее прообраз $\mathbb{K}$ замкнут в $\mathbb{G}$.

Ядро группы преобразований представляет собой то множество элементов группы, которое вообще не действует на многообразии $\mathbb{M}$. Поэтому действие группы $\mathbb{G}$ естественным образом сводится к действию фактор группы $\mathbb{G}/\mathbb{K}$, которая действует эффективно.

Пример 9.1.4. Рассмотрим присоединенное действие группы Ли на себя $\mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, заданное преобразованием подобия $a \mapsto bab^{-1}$, для всех $a, b \in \mathbb{G}$. Ядром этого действия является центр группы $\mathbb{K} \subset \mathbb{G}$. Присоединенное действие группы Ли не является свободным, так как единичный элемент группы $e \in \mathbb{G}$ остается неподвижным, $aea^{-1} = e$, $\forall a \in \mathbb{G}$. Присоединенное действие фактор группы $\mathbb{G}/\mathbb{K}$ является эффективным.

Определение. Пусть точка $x \in \mathbb{M}$ фиксирована. Множество точек

$$x\mathbb{G} := \{xa \in \mathbb{M} : \forall a \in \mathbb{G}\}$$

называется *орбитой* точки x относительно действия группы $\mathbb{G}$.

Используя групповые свойства, нетрудно проверить, что орбиты двух точек $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ либо совпадают, либо не имеют общих точек. Орбитой произвольного подмножества $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ будем называть объединение орбит всех точек из $\mathbb{U}$. Обозначим его $\mathbb{U}\mathbb{G}$.

Если группа $\mathbb{G}$ конечна, то орбита любой точки также конечна. Если группа преобразований счетна, то ее орбиты либо счетны, либо конечны.

Пример 9.1.5. Рассмотрим поворот евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на конечный угол θ. Начало координат неподвижно относительно вращений. Все остальные точки имеют нетривиальные орбиты, если угол поворота не кратен 2π. Пусть $\theta = 2\pi a$, где $a \in \mathbb{R}$. Если число a рационально, $a = m/n$, где m и n – взаимно простые натуральные числа, то орбиты состоят из n точек. Если a – иррациональное число, то орбита произвольной точки $x \neq 0$ счетна и являются всюду плотным подмножеством на окружности $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, проходящей через точку x.

Если задана группа Ли преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$, то орбита $x\mathbb{G}$ произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ является подмногообразием в $\mathbb{M}$. Это следует из дифференцируемости отображения (9.1) для всех $x \in \mathbb{M}$ и групповых свойств $\mathbb{G}$. Размерность орбиты не превосходит размерности группы, $\operatorname{dim}(x\mathbb{G}) \leqslant \operatorname{dim}\mathbb{G}$.

Пример 9.1.6. Рассмотри евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с декартовой системой координат x^α, $\alpha = 1, \dots, n$. Пусть группа вещественных чисел $\mathbb{R}$ по сложению действует на $\mathbb{R}^n$, как трансляции вдоль первой оси,

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni \quad (x^1, x^2, \dots, x^n), a \mapsto (x^1 + a, x^2, \dots, x^n) \quad \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда орбитой произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ является прямая, проходящая через x и параллельная оси x^1.

Предложение 9.1.3. *Орбита $x\mathbb{G}$ произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{M}$. Кроме того, если $\mathbb{G}$ – связная группа Ли, то орбита является связным подмногообразием.*

Доказательство. Подмножество $\mathbb{M} \setminus x$ открыто в $\mathbb{M}$. Поэтому объединение открытых подмножеств $(\mathbb{M} \setminus x)\mathbb{G}$ открыто в $\mathbb{M}$. Следовательно, орбита произвольной точки замкнута, как дополнение открытого подмножества, $x\mathbb{G} = \mathbb{M} \setminus ((\mathbb{M} \setminus x)\mathbb{G})$. Поскольку отображение (9.1) является непрерывным для всех x, то связность сохраняется.

Определение. Обозначим через $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ множество орбит $\breve{x} := x\mathbb{G}$ относительно действия группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$. То есть $\breve{x}_1 = \breve{x}_2$ тогда и только тогда, когда точки x_1 и x_2 лежат на одной орбите: $x_2 = x_1 a$ для некоторого $a \in \mathbb{G}$. Пусть $\pi : \mathbb{M} \to \mathbb{M}/\mathbb{G}$ – проекция, сопоставляющая каждой точке $x \in \mathbb{M}$ ее орбиту $\breve{x}$. Тогда пространство орбит наделяется фактортопологией, т.е. множество $\mathbb{V} \in \mathbb{M}/\mathbb{G}$ является открытым тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(\mathbb{V})$ открыто в $\mathbb{M}$. Если $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – окрестность точки $x \in \mathbb{M}$, то множество орбит $\mathbb{V} = \mathbb{U}\mathbb{G}$ – окрестность точки $\breve{x} \in \mathbb{M}/\mathbb{G}$. Множество орбит $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ с фактортопологией называется *пространством орбит* многообразия $\mathbb{M}$ относительно действия группы $\mathbb{G}$ или *факторпространством*.

Хотя $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$ – многообразия, пространство орбит с фактортопологией может оказаться весьма сложным. Оно, как покажут дальнейшие примеры, может не иметь структуры многообразия. В общем случае пространство орбит может не быть даже хаусдорфовым топологическим пространством.

Определение. Действие группы $\mathbb{G}$ на многообразии $\mathbb{M}$ называется *транзитивным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ найдется такой элемент $a \in \mathbb{G}$, что $x_1 a = x_2$.

Если действие группы $\mathbb{G}$ на многообразии $\mathbb{M}$ транзитивно, то орбита произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ совпадает со всем $\mathbb{M}$. Если на многообразии существует одна точка $x_0 \in \mathbb{M}$, которую можно преобразовать во все другие точки $\mathbb{M}$, то этого достаточно для того, чтобы действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ было транзитивным. Действительно, если $x_1 = x_0 a$ и $x_2 = x_0 b$, то $x_2 = x_1 a^{-1} b$.

Пример 9.1.7. Действие группы Ли $\mathbb{G}$ на себе является транзитивным и свободным.

Пример 9.1.8. Пусть $\mathbb{G}$ – группа и $\mathbb{H}$ – ее нетривиальная подгруппа. Рассмотрим пространство правых смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, состоящее из элементов вида $\mathbb{H}a$, где $a \in \mathbb{G}$. Определим действие группы $\mathbb{G}$ в пространстве смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ соотношением

$$\mathbb{G}/\mathbb{H} \times \mathbb{G} \ni \quad \mathbb{H}a, b \mapsto \mathbb{H}ab \quad \in \mathbb{G}/\mathbb{H}.$$

Это действие транзитивно для любых $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$. Действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ эффективно тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}$ не содержит нормальных подгрупп. Действительно, если $\mathbb{H}$ – нормальная подгруппа, то для всех $h \in \mathbb{H}$ и $a \in \mathbb{G}$ выполнены равенства:

$$(\mathbb{H}a)h = a\mathbb{H}h = a\mathbb{H} = \mathbb{H}a.$$

Действие группы никогда не является свободным, так как $(\mathbb{H}e)h = \mathbb{H}e$ для всех $h \in \mathbb{H}$.

В теории групп преобразований важную роль играет

Теорема 9.1.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{H}$ – ее замкнутая подгруппа. Тогда на фактор пространстве правых смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ существует единственная структура вещественно аналитического многообразия такая, что действие $\mathbb{G}$ на $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ вещественно аналитично. В частности, проекция $\mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ вещественно аналитична.*

Доказательство. См., например, в [45], глава II, теорема 4.2.

Определение. Точка $x \in \mathbb{M}$ называется *стационарной* или *неподвижной* относительно действия группы преобразований, если $xa = x$ для всех $a \in \mathbb{G}$.

Если группа действует на многообразии свободно или транзитивно, то стационарные точки отсутствуют.

Пример 9.1.9. Представление группы $(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ не может быть транзитивной или свободной группой преобразований, так как нулевой вектор из $\mathbb{V}$ является стационарной точкой.

Определение. *Группой изотропии* $\mathbb{G}_x$ точки многообразия $x \in \mathbb{M}$ называется множество элементов группы $\mathbb{G}$, оставляющих точку x неподвижной,

$$\mathbb{G}_x := \{a \in \mathbb{G} : xa = x\}.$$

Нетрудно проверить, что это множество элементов образует группу. Группы изотропии $\mathbb{G}_{x_1}$ и $\mathbb{G}_{x_2}$ двух точек, лежащих на одной орбите, $x_2 a = x_1$, являются сопряженными подгруппами в $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G}_{x_2} = a\mathbb{G}_{x_1}a^{-1}.$$

Ядро $\mathbb{K}$ группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ связано с группами изотропии простым соотношением

$$\mathbb{K} = \bigcap_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{G}_x,$$

где объединение берется по всем точкам $x \in \mathbb{M}$.

Из теоремы 9.1.1 следует, что пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ является группой транзитивных преобразований. Представляет большой интерес обратное утверждение: если пара $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ – транзитивная группа преобразований, то она имеет вид $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ для некоторой подгруппы $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ и при некоторых дополнительных предположениях, которые мы уточним ниже. Для ясности сначала будет доказана теорема безотносительно топологии и дифференцируемой структуры, заданной на $\mathbb{M}$.

Теорема 9.1.2. *Пусть $\mathbb{G}$ – группа, которая действует транзитивно на некотором множестве $\mathbb{M}$. Тогда для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ существует биекция правых смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{G}_x$ на множество $\mathbb{M}$, заданное отображением*

$$\mathbb{G}/\mathbb{G}_x \ni \quad \mathbb{G}_x a \mapsto xa \quad \in \mathbb{M}, \tag{9.2}$$

где $\mathbb{G}_x$ – группа изотропии точки x.

Доказательство. Отображение (9.2) определено для каждого представителя из правого смежного класса. Покажем сначала, что это отображение не зависит от выбора представителя. Пусть a и b – два представителя какого либо одного смежного класса. Тогда существует элемент $h \in \mathbb{G}_x$ такой, что $a = hb$ и поэтому $xa = xhb = xb$. То есть отображение (9.2) не зависит от выбора представителя смежного класса и, следовательно, определено корректно.

Выберем по представителю из двух смежных классов $\mathbb{G}_x a$ и $\mathbb{G}_x b$ и подействуем на точку x. В результате получим точки $x_1 = xa$ и $x_2 = xb$. Эти точки совпадают тогда и только тогда, когда группа изотропии содержит элемент $ba^{-1} \in \mathbb{G}_x$. Это означает, что отображение (9.2) является взаимно однозначным.

Поскольку группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ является транзитивной, то отображение (9.2) является взаимно однозначным отображением на, т.е. биекцией.

Следствие. *Если группа преобразований* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ *транзитивна и свободна, т.е.* $\mathbb{G}_x = e$ *для всех точек* $x \in \mathbb{M}$, *то отображение*

$$\mathbb{G} \ni \quad a \mapsto xa \quad \in \mathbb{M}$$

является биекцией.

Теперь разберемся с дифференцируемой структурой.

Предложение 9.1.4. *Пусть* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ *– группа транзитивных преобразований. Выберем произвольную точку* $x \in \mathbb{M}$. *Тогда ее группа изотропии* $\mathbb{G}_x$ *является замкнутой подгруппой в* $\mathbb{G}$.

Доказательство. Поскольку группа преобразований транзитивна, то отображение $\mathbb{G} \ni a \mapsto xa \in \mathbb{M}$, определенное для каждого $x \in \mathbb{M}$, является сюрьективным и непрерывным. Точка x является замкнутым подмножеством в $\mathbb{M}$, и поэтому группа изотропии $\mathbb{G}_x$ замкнута в $\mathbb{G}$.

Следствие. *Группа изотропии* $\mathbb{G}_x$ *для всех* $x \in \mathbb{M}$ *является замкнутой подгруппой в* $\mathbb{G}$ *для произвольной группы Ли преобразований* $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$.

Доказательство. Каждая точка $x \in \mathbb{M}$ принадлежит орбите $x\mathbb{G}$, которая является подмногообразием в $\mathbb{M}$. На каждой орбите группа $\mathbb{G}$ действует транзитивно, и поэтому пара $(x\mathbb{G}, \mathbb{G})$ – транзитивная группа преобразований. Следовательно, группа изотропии $\mathbb{G}_x$ является замкнутой подгруппой в $\mathbb{G}$.

Согласно теореме 9.1.1 на пространстве смежных классов $\mathbb{G}/\mathbb{G}_x$ существует единственная дифференцируемая структура. Поскольку отображение (9.2) является биекцией, то эту дифференцируемую структуру можно перенести на $\mathbb{M}$, превратив его тем самым в многообразие. Тогда отображение (9.2) становится диффеоморфизмом.

Таким образом, если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ транзитивна, то многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой фактор пространство $\mathbb{G}/\mathbb{G}_x$. При этом

$$\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{G}_x.$$

Отсюда следует, что размерность многообразия $\mathbb{M}$, на котором действует транзитивная группа преобразований, не может превышать размерность группы.

Определение. Произвольное множество $\mathbb{M}$, на котором группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ действует транзитивно называется *однородным пространством*. Если, вдобавок, действие группы эффективно, то это множество называется *главным однородным пространством* над $\mathbb{G}$.

Пример 9.1.10. Пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ (пример 9.1.8) является однородным пространством. Если подгруппа $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ не содержит нормальных подгрупп, то пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$ – главное однородное пространство.

9.2. Инфинитезимальные преобразования

Пусть задана группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$, где $\mathbb{G}$ – группа Ли. Тогда имеет смысл говорить об инфинитезимальных преобразованиях, которые взаимно однозначно определяются векторными полями на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$. Ниже мы рассмотрим соотношения между алгебрами Ли векторных полей на $\mathbb{G}$ и $\mathbb{M}$.

Построим отображение $\mu : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(\mathbb{M})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathbb{G}$ (множества левоинвариантных векторных полей в $\mathcal{X}(\mathbb{G})$) в бесконечномерную алгебру Ли векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ на многообразии $\mathbb{M}$. Это можно сделать тремя эквивалентными способами.

1) Каждому элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ соответствует однопараметрическая подгруппа (см. раздел 8.9)

$$\mathsf{exp}_X : \quad \mathbb{R} \ni \quad t \mapsto a(t) \quad \in \mathbb{G},$$

где $a(t) := \mathsf{exp}_X(t)$ (экспоненциальное отображение) и $a(0) = e$ – единица группы. Тогда через каждую точку $x \in \mathbb{M}$ проходит единственная кривая $xa(t)$. Касательные векторы к этим кривым образуют векторное поле $X^*(x)$ на многообразии $\mathbb{M}$. Таким образом мы построили отображение μ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{M})$:

$$\mu : \quad \mathfrak{g} \ni \quad X \mapsto \mu(X) := X^* \quad \in \mathcal{X}(\mathbb{M}).$$

2) Для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ определим отображение $\mu_x : G \ni a \mapsto xa \in \mathbb{M}$. Тогда отображение μ определено соотношением

$$X^*(x) = \mu(X)|_x := (\mu_x)_* X_e, \tag{9.3}$$

где $(\mu_x)_*$ – дифференциал отображения μ_x, действующий на касательный вектор $X_e := X(e)$ к единице группы, который соответствует элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$.

3) Каждое векторное поле взаимно однозначно определяется дифференцированием в алгебре функций. Поэтому рассмотрим гладкую функцию $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ и определим векторное поле соотношением

$$X^*(f) := \frac{d}{dt} f(xa(t))\bigg|_{t=0},$$

где $a(t) := \mathsf{exp}\,_X(t)$.

Поскольку произвольное левоинвариантное векторное поле X на группе Ли $\mathbb{G}$ полно, то полно также векторное поле X^* на $\mathbb{M}$. Это следует из определения, так как отображение μ определено для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Предложение 9.2.1. *Отображение μ есть гомоморфизм алгебр Ли. Если $\mathbb{G}$ действует эффективно на $\mathbb{M}$, то μ есть изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее образа $\mu(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Если $\mathbb{G}$ действует свободно на $\mathbb{M}$, то для каждого ненулевого элемента алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$, его образ $\mu(X) = X^*$ не обращается в нуль на $\mathbb{M}$.*

Доказательство. Поскольку дифференциал отображения – это линейная операция, то из определения (9.3) следует, что μ есть линейное отображение из $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{X}(\mathbb{M})$. Доказательство того факта, что отображение μ сохраняет коммутатор векторных полей:

$$[X^*, Y^*] = \mu[X, Y], \qquad \text{где} \quad X^*, Y^* \in \mathcal{X}(\mathbb{M}),\ X, Y \in \mathfrak{g},$$

технично и приведено, например, в [3], глава I, предложение 4.1.

Докажем второе утверждение. Пусть $\mu(X) = 0$ всюду на $\mathbb{M}$. Это значит, что однопараметрическая группа действует тривиально на $\mathbb{M}$, т.е. $a(t) = e$ для всех t. Верно и обратное утверждение. Пусть теперь $X \in \ker \mu$, т.е. $\mu(X) = 0$. Это значит, что $a(t) = e$ для всех t. Отсюда следует, что ядро $\ker \mu$ тривиально, $\mu(X) = 0$. Поэтому отображение μ – изоморфизм.

Пусть $\mu(X) = 0$ в некоторой точке $x \in \mathbb{M}$. Тогда точка x неподвижна, $xa(t) = x$ для всех t. Обратно. Если точка x неподвижна, то $a(t) = e$ для всех t и, следовательно, $X = 0$.

Это предложение является основой для рассмотрения главных расслоений со структурной группой Ли в разделе 12.1.

Мы видим, что транзитивные группы преобразований устроены довольно просто. В этом случае многообразие $\mathbb{M}$ – это одна орбита, и фактор пространство $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ состоит из одной точки. Если действие группы $\mathbb{G}$ на многообразии $\mathbb{M}$ не является транзитивным, то орбит может быть много. В общем случае пространство орбит устроено сложно, что показывает следующий

Пример 9.2.1. Стационарной точкой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ относительно действия группы трехмерных вращений $\mathbb{SO}(3)$ является начало координат. Группа изотропии начала координат совпадает со всей группой, а группой изотропии любой другой точки является подгруппа двумерных вращений $\mathbb{SO}(2) \subset \mathbb{SO}(3)$ вокруг оси, проходящей через данную точку и начало координат. Пространство орбит представляет собой множество сфер $\mathbb{S}^2_r$, которое можно параметризовать их радиусом $r \in \mathbb{R}_+$, объединенное с началом координат $\{0\} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{R}^3 \big/ \mathbb{SO}(3) \approx \mathbb{R}_+ \cup \{0\} = \overline{\mathbb{R}}_+.$$

То есть факторпространство представляет собой положительную полуось $\overline{\mathbb{R}}_+$, включая начало координат, и не является многообразием, так как не является открытым подмножеством в $\mathbb{R}$ (оно является многообразием с краем).

Если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ не является транзитивной, то многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой объединение орбит, на каждой из которых группа $\mathbb{G}$ действует транзитивно. Выберем точку x_i на каждой орбите и обозначим через $\mathbb{G}_i$ ее группу изотропии. Тогда существует диффеоморфизм каждой орбиты на фактор пространство $\mathbb{G}/\mathbb{G}_i$. Другими словами, каждая орбита является однородным пространством и на нем существует естественная дифференцируемая структура (теорема 9.1.1). Согласно предложению 9.1.3 каждая орбита является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{M}$.

Рассмотрим частный случай. Пусть L_{A}, $\text{A} = 1, \dots, \dim \mathbb{G}$, – базис алгебры Ли. Если векторные поля $\mu(L_{\text{A}})$ линейно независимы в каждой точке, то они определяют инволютивное распределение на многообразии $\mathbb{M}$. Тогда, согласно теореме Фробениуса, каждая орбита с естественной дифференцируемой структурой является подмногообразием в $\mathbb{M}$. В общем случае, несмотря на изоморфизм отображения μ, векторные поля $\mu(L_{\text{A}})$ могут быть линейно зависимы. Это показывает пример 9.2.1, в котором орбиты двумерны (за исключением 0-мерного начала координат), а алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ – трехмерна. Вопрос о том можно ли ввести на пространстве орбит (фактор пространстве $\mathbb{M}/\mathbb{G}$) дифференцируемую структуру сложен и выходит за рамки данной книги.

В заключение настоящего раздела докажем утверждение, которое будет использовано при построении связностей в главном расслоении.

Предложение 9.2.2. *Пусть a есть диффеоморфизм многообразия $\mathbb{M}$,*

$$a: \quad \mathbb{M} \ni \quad x \mapsto a(x) \quad \in \mathbb{M}.$$

Если векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ порождает однопараметрическую группу преобразований $s_t : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, то векторное поле a_*X, где a_* – дифференциал отображения a, порождает однопараметрическую группу преобразований $a \circ s_t \circ a^{-1}$.

Доказательство. Ясно, что $a \circ s_t \circ a^{-1}$ есть однопараметрическая группа преобразований. Покажем, что эта группа преобразований индуцирует векторное поле a_*X. Пусть $x \in \mathbb{M}$ – произвольная точка и $y = a^{-1}(x)$. Так как отображение s_t индуцирует векторное поле X, то вектор $X_y \in \mathbb{T}_y(\mathbb{M})$ касается кривой $\gamma_1(t) = s_t(y)$ в точке $y = \gamma_1(0)$. Из этого следует, что вектор

$$(a_*X)_x = a_*X_y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$$

касается кривой $\gamma_2(t) = a \circ s_t(y) = a \circ s_t \circ a^{-1}(x)$.

Замечание. В данном предложении преобразование a не обязано принадлежать какой либо группе. Это может быть произвольный фиксированный диффеоморфизм многообразия $\mathbb{M}$.

Следствие. *Векторное поле $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ инвариантно относительно диффеоморфизма $a : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, т.е. $a_*X = X$, тогда и только тогда, когда диффеоморфизм a перестановочен с однопараметрической группой преобразований s_t, порожденной векторным полем X.*

9.3. Инвариантные структуры

Рассмотрим группу преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$. Предположим, что на многообразии $\mathbb{M}$ задана некоторая геометрическая структура, например, тензорное поле. Возникает вопрос при каких условиях эта структура является инвариантной относительно данной группы преобразований ? Ответ на этот вопрос очень важен для приложений, поскольку часто мы ищем решения некоторой системы уравнений, обладающие определенной симметрией. Такие структуры называются $\mathbb{G}$-*инвариантными*.

Начнем с простейшего случая. Предположим, что на многообразии $\mathbb{M}$ задана функция и действие группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$. Определим действие элемента группы преобразований $a \in \mathbb{G}$ на функцию формулой

$$f(x) \mapsto \hat{f}(x) := f(xa^{-1}).$$

Отсюда следует равенство $\hat{f}(xa) = f(x)$. То есть значение новой функции $\hat{f}$ в точке xa равно значению исходной функции в точке x. Это – обычное преобразование функции при диффеоморфизмах.

Определение. Назовем функцию $\mathbb{G}$-*инвариантной*, если она удовлетворяет условию

$$f(xa) = f(x) \tag{9.4}$$

для всех $a \in \mathbb{G}$.

Из определения следует, что $\mathbb{G}$-инвариантные функции постоянны на орбитах группы преобразований.

Пример 9.3.1. Сферически симметричные функции в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ постоянны на сферах $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Эти функции в сферической системе координат зависят только от радиуса $f = f(r)$.

Пример 9.3.2. Если группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ транзитивна, то $\mathbb{G}$-инвариантные функции на $\mathbb{M}$ постоянны.

Рассмотрим более сложную ситуацию.

Определение. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$, на котором действует группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$, задано поле $\varphi = \{\varphi^i(x)\}$, имеющее N компонент, $i = 1, \dots, N$, которые преобразуются по некоторому представлению группы $\mathbb{G}$. Это значит, что группа преобразований действует не только на точки многообразия, но одновременно и на компоненты φ^i по правилу

$$x \mapsto x' = xa,$$
$$\varphi_i(x) \mapsto \varphi'^i(x') := \varphi^j(x) S_j{}^i(a), \tag{9.5}$$

где $S_j{}^i(a)$ – матрица представления, соответствующая элементу группы $a \in \mathbb{G}$. Поле $\varphi(x)$ называется $\mathbb{G}$-инвариантным, если для его компонент выполнено условие

$$\varphi^i(xa) = \varphi^j(x) S_j{}^i(a). \tag{9.6}$$

В отличие от правила преобразования поля (9.5) в левой части этого равенства опущен штрих у поля, и поэтому условие $\mathbb{G}$-инвариантности представляет собой систему уравнений на компоненты $\varphi^i(x)$. В случае, если представление группы преобразований тривиально, $S_j{}^i(a) = \delta^i_j$ для всех $a \in \mathbb{G}$, мы имеем набор $\mathbb{G}$-инвариантных скалярных полей (9.4).

Условие $\mathbb{G}$-инвариантности можно переписать в эквивалентном виде

$$\varphi^i(x) = \varphi^j(xa^{-1}) S_j{}^i(a).$$

Пример 9.3.3. Рассмотрим сферически инвариантные векторные поля в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Нетрудно проверить, что векторное поле с компонентами

$$\varphi^i(x) = x^i f(r), \qquad i = 1, 2, 3,$$

заданными в декартовой системе координат x^i, где $f(r)$ – произвольная функция от радиуса $r := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, является сферически симметричным. Можно также доказать обратное утверждение, что любое сферически симметричное векторное поле имеет такой вид для некоторой функции $f(r)$. Таким образом, сферически симметричные векторные поля на $\mathbb{R}^3$ параметризуются одной функцией радиуса $f(r)$. В разделе 7.1 приведены также сферически симметричные тензоры второго ранга.

Замечание. При исследовании моделей математической физики предположение о симметрии полей позволяет существенно уменьшить число независимых переменных и число аргументов. Это позволяет в ряде случаев найти явно точное решение уравнений Эйлера–Лагранжа.

Замечание. При рассмотрении групп преобразований мы предполагаем, что преобразования многообразия $\mathbb{M}$ являются глобальными, т.е. элемент группы $a \in \mathbb{G}$ не зависит от точки многообразия $x \in \mathbb{M}$. При таких преобразованиях калибровочные поля преобразуются, как тензоры. Поэтому условие $\mathbb{G}$-инвариантности (9.6) можно распространить и на калибровочные поля.

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть задана группа преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$. Каждому элементу группы $a \in \mathbb{G}$ соответствует диффеоморфизм $\mathbb{M} \xrightarrow{a} \mathbb{M}$, который мы обозначим той же буквой, что и элемент группы. У этого отображения существует дифференциал a_* и отображение дифференциальных форм a^*. Отображение дифференциальных форм обратимо, так как a – диффеоморфизм. Пусть в точке $x \in \mathbb{M}$ задан тензор $T(x) \in \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M})$ типа (r, s). Тогда его можно перенести из точки x в точку xa с помощью дифференциала отображения и отображения дифференциальных форм, которые действуют соответственно на контравариантные и ковариантные индексы, $T(xa) = (a_*)^r (a^{*-1})^s T(x)$.

В координатах это отображение записывается следующим образом. Пусть $x = \{x^\alpha\}$ и $xa = \{y^\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, \operatorname{dim}\mathbb{M}$, – координаты точек. Тогда

$$T_{\beta_1\dots\beta_s}{}^{\alpha_1\dots\alpha_r}(xa) = \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial y^{\beta_1}}\dots\frac{\partial x^{\gamma_s}}{\partial y^{\beta_s}}T_{\gamma_1\dots\gamma_s}{}^{\delta_1\dots\delta_r}(x)\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\delta_1}}\dots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\delta_r}},$$

где матрицы Якоби вычисляются в точке x.

Определение. Произвольное тензорное поле $T \in \mathcal{T}^r_s(\mathbb{M})$, заданное на многообразии $\mathbb{M}$, называется $\mathbb{G}$-*инвариантным*, если выполнено условие

$$T(xa) := (a_*)^r(a^{*-1})^s T(x) \tag{9.7}$$

для всех $x \in \mathbb{M}$ и $a \in \mathbb{G}$.

Замечание. Это определение применимо как для счетных групп, так и для групп Ли.

Поскольку действие группы преобразований транзитивно на каждой орбите, то тензорное поле на всей орбите однозначно задается его значением в некоторой точке x на данной орбите. Это не значит, что тензор в точке x можно задать произвольно, а затем разнести по орбите. Если группа изотропии $\mathbb{G}_x$ нетривиальна, то в соответствии с определением (9.7) тензор в точке x должен быть выбран симметричным относительно преобразований из $\mathbb{G}_x$.

В случае, когда $\mathbb{G}$ – группа Ли, условие (9.7) можно записать в дифференциальной форме. Генераторы группы Ли L_{A}, $\text{A} = 1, \dots, \operatorname{dim}\mathbb{G}$, – это базис левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$. Им соответствуют векторные поля L^*_{A} на многообразии $\mathbb{M}$. Из определения производной Ли следует, что если тензорное поле является $\mathbb{G}$-инвариантным, то

$$\mathsf{L}_{L^*_{\text{A}}} T = 0$$

для всех A и $x \in \mathbb{M}$. Это – система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на компоненты $\mathbb{G}$-инвариантного тензорного поля.

Замечание. В математической физике, как правило, ставится одна из двух задач. 1) По заданному тензорному полю определить его группу симметрии и 2) найти тензорное поле, обладающее определенной симметрией.

В моделях гравитации важную роль играют однопараметрические группы преобразований, которые оставляют инвариантной метрику, заданную на многообразии $\mathbb{M}$. Этим группам преобразований соответствуют векторные поля, которые называются векторными полями Киллинга.

9.4. Отображения групп преобразований

Пусть задано две группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ и $(\mathbb{N}, \mathbb{G})$ двух многообразий $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ с одной и той же группой $\mathbb{G}$. В частном случае многообразия могут совпадать, $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, но действия группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ можно задавать различными способами.

Пример 9.4.1. Можно рассматривать группу вращений плоскости $(\mathbb{R}^2, \mathbb{SO}(2))$ относительно произвольной точки $x \in \mathbb{R}^2$.

Обозначим действие элемента группы $a \in \mathbb{G}$ на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ соответственно через $a_\mathbb{M}$ и $a_\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_\mathbb{M}: &\quad \mathbb{M}\times\mathbb{G} \ni &x, a \mapsto xa &\quad \in \mathbb{M},\\ a_\mathbb{N}: &\quad \mathbb{N}\times\mathbb{G} \ni &y, a \mapsto ya &\quad \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Определение. Отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ называется *эквивариантным*, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{M}\times\mathbb{G} \arrow[r, "f\times\mathsf{id}"] \arrow[d, "a_\mathbb{M}"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{G} \arrow[d, "a_\mathbb{N}"] \\ \mathbb{M} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \end{tikzcd},$$

где id – тождественное отображение $\mathbb{G} \to \mathbb{G}$, коммутативна. То есть

$$f \circ a_{\mathbb{M}} = a_{\mathbb{N}} \circ f \quad \text{или} \quad f(xa) = f(x)a$$

для всех $a \in \mathbb{G}$ и $x \in \mathbb{M}$.

Понятие эквивариантного отображения можно обобщить. Рассмотрим две группы преобразований $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ и $(\mathbb{N}, \mathbb{H})$. Пусть задан гомоморфизм групп $\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ и достаточно гладкое отображение многообразий $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$.

Определение. Отображение $f \times \rho : \mathbb{M} \times \mathbb{G} \to \mathbb{N} \times \mathbb{H}$ называется *эквивариантным*, если диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{M} \times \mathbb{G} \arrow[r, "f \times \rho"] \arrow[d, "a_{\mathbb{M}}"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{H} \arrow[d, "\rho(a)_{\mathbb{N}}"] \\ \mathbb{M} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

коммутативна. То есть

$$f \circ a_{\mathbb{M}} = \rho(a)_{\mathbb{N}} \circ (f \times \rho) \quad \text{или} \quad f(xa) = f(x)\rho(a)$$

для всех $a \in \mathbb{G}$ и $x \in \mathbb{M}$.

Пример 9.4.2. Важным физическим приложением указанной конструкции является понятие спинора. Рассмотрим две группы преобразований: группу вращений $\mathbb{SO}(3)$ трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и группу $\mathbb{SU}(2)$ линейных преобразований двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Группа $\mathbb{SU}(2)$ два раза накрывает группу вращений $\mathbb{SO}(3)$. Обозначим соответствующий гомоморфизм $\rho : \mathbb{SU}(2) \to \mathbb{SO}(3)$. Тогда для спиноров имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{SU}(2) \arrow[r, "f \times \rho"] \arrow[d, "a_{\mathbb{C}^2}"'] & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{SO}(3) \arrow[d, "\rho(a)_{\mathbb{R}^3}"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd},$$

где $a_{\mathbb{C}^2} = U$ – унитарная 2×2 матрица с единичным определителем линейных преобразований двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, и $\rho(a)_{\mathbb{R}^3}$ – соответствующая ортогональная 3×3 матрица вращений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Отображение f задается формулой $x^i = (\bar{\psi}\sigma^i\psi)$, где σ^i, $i = 1, 2, 3$, – матрицы Паули, $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ – столбец из двух комплексных чисел (компоненты спинора) и $\bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*)$ – строка из двух комплексно сопряженных чисел (компоненты сопряженного спинора). В физике принято называть матрицы U – спинорным представлением группы вращений $\mathbb{SO}(3)$. Строго говоря, соответствие

$$\mathbb{SO}(3) \ni \quad \rho(a) \mapsto a \quad \in \mathbb{SU}(2)$$

не является отображением и, следовательно, представлением, так как каждому вращению $\rho(a) \in \mathbb{SO}(3)$ соответствуют две унитарные матрицы $\pm a \in \mathbb{SU}(2)$, которые отличаются знаком. Поэтому спинорное представление называют двузначным представлением.

10. Гомотопии и фундаментальная группа

Все многообразия локально устроены одинаково, так же как и евклидовы пространства. Однако их глобальная структура может существенно отличаться. Описание глобальной структуры многообразий является сложной задачей, и для ее решения применяются различные методы. Например, на каждом многообразии можно задать некоторую алгебраическую структуру, которая является топологическим инвариантом, т.е. сохраняется при диффеоморфизмах. В настоящем разделе мы опишем один из простейших топологических инвариантов – фундаментальную группу. Этот инвариант довольно груб и не различает все топологически различные многообразия. Однако он полезен в приложениях, так как если фундаментальная группа двух многообразий различна, то можно с уверенностью сказать, что данные многообразия недиффеоморфны.

10.1. Пути

Важным методом алгебраического анализа глобальной структуры многообразий является нахождение фундаментальной группы многообразия, которая строится на основе понятия *пути* или *кривой*. Определение кривой в евклидовом пространстве дословно переносится на произвольное многообразие $\mathbb{M}$ размерности n.

Определение. *Путем* γ называется кусочно дифференцируемое отображение единичного отрезка $[0,1] \in \mathbb{R}$ в $\mathbb{M}$,

$$\gamma: \quad [0,1] \ni \quad t \mapsto x(t) \quad \in \mathbb{M}, \tag{10.1}$$

где t – вещественный параметр вдоль кривой. Говорят, что путь соединяет *начало* пути $x(0)$ и его *конец* $x(1)$. Если начало и конец пути совпадают, $x(0) = x(1)$, то путь называют *замкнутым*. Замкнутый путь называют также *петлей*. Мы будем также писать $\gamma = x(t)$.

В координатах отображение (10.1) задается набором n кусочно дифференцируемых функций $x(t) = \{x^\alpha(t)\}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, одной переменной $t \in [0,1]$.

Замечание. В общем случае кривая $x(t)$ может иметь точки самопересечения, и тогда отображение γ не является взаимно однозначным отображением отрезка $[0,1]$ на его образ $\gamma([0,1])$.

Замечание. В алгебраической топологии, где в роли $\mathbb{M}$ выступают топологические пространства, от отображения (10.1) требуется только непрерывность. Для алгебраического анализа многообразий удобно рассматривать кусочно дифференцируемые пути, т.е. функции $x^\alpha(t)$ считать кусочно дифференцируемыми. Это удобно при умножении путей, которое будет введено позже.

Замкнутую кривую в $\mathbb{M}$ можно рассматривать, как непрерывный образ окружности, так как при совпадении начала и конца пути можно отождествить концы единичного интервала $t \in [0,1]$.

Определение. *Простой замкнутой* или *жордановой* кривой называется гомеоморфный образ окружности, т.е. замкнутая кривая без точек самопересечения. В общем случае простая замкнутая кривая может иметь изломы, т.е. от нее требуется только непрерывность. Жорданова кривая на евклидовой плоскости, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков, называется *жордановым* многоугольником.

Теорема 10.1.1 (Жордан). *Пусть $\mathbb{S}$ – простая замкнутая кривая на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}$ несвязно и состоит из двух компонент, общей границей которых является $\mathbb{S}$. В точности одна из этих компонент ограничена.*

Доказательство. Несмотря на интуитивную очевидность утверждения теоремы, ее доказательство сложно. Оно приведено, например, в [54], теорема 12А.12.

В определении пути (10.1) область определения параметра вдоль пути фиксирована единичным отрезком. Этого можно не делать, считая, что параметр принимает значения на отрезке произвольной длины $[a,b] \subset \mathbb{R}$. В этом случае все пути можно разделить на классы эквивалентности. А именно, два пути $x_1(t)$ и $x_2(s)$ называются *эквивалентными*, если они связаны гладкой монотонной заменой параметра $s = s(t)$:

$$x_1(t) = x_2(s(t)), \qquad \frac{ds}{dt} > 0.$$

где $s(a) = 0$ и $s(b) = 1$. В частном случае, возможно преобразование параметра t внутри единичного отрезка, $a = 0$, $b = 1$. В дальнейшем под путем будем понимать класс эквивалентных путей, определенных с точностью до гладкой репараметризации.

Замечание. Иногда понятие пути и кривой различают, понимая под путем отображение (10.1), а под кривой – образ пути $\gamma([0,1])$ в многообразии $\mathbb{M}$. Как правило, мы этого не делаем и употребляем термины путь и кривая как синонимы. При изучении фундаментальных групп отображение (10.1) будем называть путем, как это принято в алгебраической топологии.

Пример 10.1.1. Простейшим примером пути является *тождественный* путь e_x в некоторой точке $x \in \mathbb{M}$, определенный равенством

$$e_x: \quad [0,1] \ni \quad t \mapsto x \quad \in \mathbb{M} \tag{10.2}$$

для всех t, где x – произвольная фиксированная точка многообразия.

Пример 10.1.2. В классической механике под многообразием $\mathbb{M}$ часто понимается пространство, а под вещественным параметром t – время. Тогда путь $x(t) = \{x^\mu(t)\}$ – это траектория точечной частицы.

Введем новое понятие связности, которое удобно, в частности, при рассмотрении фундаментальных групп.

Определение. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *линейно связным*, если для любых двух точек x_1, $x_2 \in \mathbb{M}$ найдется соединяющий их путь, целиком лежащий в $\mathbb{M}$. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *локально линейно связным*, если для любого $x \in \mathbb{M}$ всякая открытая окрестность точки x содержит линейно связную окрестность этой точки.

Если какую либо фиксированную точку $x_0 \in \mathbb{M}$ можно соединить путем с любой другой точкой $x_1 \in \mathbb{M}$, то этого достаточно для линейной связности многообразия, потому что тогда две произвольные точки $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$ можно соединить путем, проходящим через x_0.

Между просто связностью и линейной связностью топологических пространств имеется тесная связь, которая дается следующей теоремой.

Теорема 10.1.2. *Всякое линейно связное топологическое пространство связно.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}$. Тогда ее можно соединить некоторой кривой γ_x, целиком лежащей в $\mathbb{M}$, с произвольной точкой $x \in \mathbb{M}$, потому что $\mathbb{M}$ – линейно связно. Каждая кривая γ_x является связным подмножеством в $\mathbb{M}$. Тогда все пространство $\mathbb{M}$ является объединением, $\mathbb{M} = \bigcup_x \gamma_x$, и связно, как объединение связных подмножеств, имеющих непустое пересечение.

Обратное утверждение теоремы 10.1.2 неверно. Приведем пример связного, но не линейно связного топологического пространства.

Пример 10.1.3 (Блоха и гребенка). Пусть подмножество комплексной плоскости $\mathbb{W} \subset \mathbb{C}$ является объединением двух множеств $\mathbb{W} = \mathbb{U} \cup \mathbb{V}$ (см. рис. 10.1), где

$$\begin{aligned} \mathbb{U} &= \{i\} && \text{– блоха} \\ \mathbb{V} &= [0,1] \bigcup \{1/n + iy: \quad n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} && \text{– гребенка.} \end{aligned}$$

Будем считать, что топология $\mathbb{W}$ индуцирована вложением в комплексную плоскость $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Прежде всего заметим, что множество $\mathbb{V}$ линейно связно как объединение линейно связных множеств и потому связно. Пусть $\mathbb{U}_\epsilon$ – ϵ-окрестность точки i, т.е. пересечение множества $\{z: \quad |z - i| < \epsilon\}$ с $\mathbb{W}$. Подмножество $\mathbb{U}$, состоящее их одной точки, принадлежит замыканию $\overline{\mathbb{V}}$, так как для любого $\epsilon > 0$, пересечение $\mathbb{U}_\epsilon \bigcap \mathbb{V}$

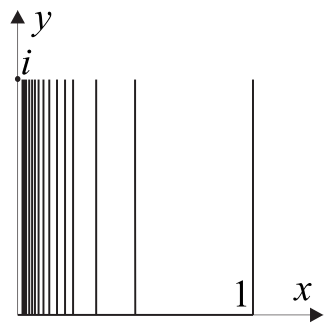

Рис. 10.1. Пример связного, но не линейно связного топологического пространства “блоха и гребенка”.

не пусто, поскольку для достаточно больших n точки $1/n+i \in \mathbb{V}$ лежат в ϵ-окрестности точки i. Отсюда вытекает, что связная компонента $\mathbb{V}$ содержит $\mathbb{U}$ и поэтому совпадает со всем $\mathbb{W}$.

Покажем теперь, что топологическое пространство $\mathbb{W}$ не является линейно связным, так как точку $i \in \mathbb{W}$ нельзя соединить путем с любой другой точкой из $\mathbb{W}$. Предположим, что существует путь с началом в точке $\gamma(0) = i$ и концом в некоторой точке $\gamma(1) \in \mathbb{V}$. Не ограничивая общности можно считать, что $\gamma(t) \neq i$ при $t > 0$. Из непрерывности отображения $\gamma(t)$ следует, что для любого положительного ϵ существует такое положительное число δ, что при $t < \delta$ выполняется неравенство $|x(t) - i| < \epsilon$, т.е. путь лежит в ϵ-окрестности $\mathbb{U}_\epsilon$ точки i. Выберем конечное число $\epsilon < 1$ и некоторое значение параметра $0 < t_0 < \delta$. По предположению, $x(t_0) \in \mathbb{V}$. Окрестность $\mathbb{U}_\epsilon$ многосвязна, так как состоит из самой точки i и объединения непересекающихся интервалов. Отрезок $[0, t_0]$ связен и его невозможно непрерывно отобразить на многосвязную область таким образом, чтобы начало и конец отрезка лежали в разных компонентах.

В рассмотренном примере топологическое пространство $\mathbb{W}$ не является многообразием по двум причинам. Во-первых, окрестность точки i нельзя отобразить на интервал и, во вторых, множество $\mathbb{V}$ имеет точки самопересечения.

Следующий пример показывает, что не всякое линейно связное топологическое пространство является локально линейно связным.

Пример 10.1.4 (Польская окружность). Рассмотрим подмножество на евклидовой плоскости $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, которое имеет вид $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3$, где

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2=1, \quad y \geqslant 0\},\\
\mathbb{U}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \quad y=0\},\\
\mathbb{U}_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 < x \leqslant 1, \quad y = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{x}\right\},
\end{aligned}$$

с индуцированной топологией, см. рис. 10.2. Это пространство линейно связно, но не локально линейно связно, так как начало координат $(0,0)$ не имеет окрестности, содержащей линейно связную окрестность. Это топологическое пространство не является многообразием, поскольку начало координат не имеет окрестности, гомеоморфной прямой $\mathbb{R}$.

Предложение 10.1.1. *Образ линейно связного топологического пространства при непрерывном отображении линейно связен.*

Доказательство. См., например, в [54], теорема 12.4.

Следствие. *Если $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ – два гомеоморфных топологических пространства, то $\mathbb{M}_1$ линейно связно тогда и только тогда, когда $\mathbb{M}_2$ линейно связно.*

Предложение 10.1.2. *Многообразия $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ линейно связны тогда и только тогда, когда их прямое произведение $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ линейно связно.*

Доказательство. См., например, [54], теорема 12.7.

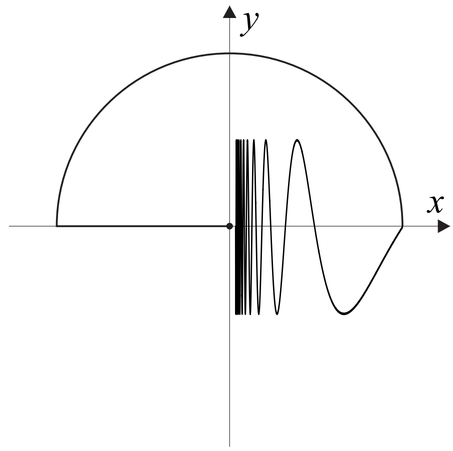

Рис. 10.2. Пример линейно связного, но не локально линейного связного топологического пространства.

Для многообразий понятие связности и линейной связности эквивалентны.

Теорема 10.1.3. *Многообразие* $\mathbb{M}$ *связно тогда и только тогда, когда* $\mathbb{M}$ *– линейно связно.*

Доказательство. Достаточность является утверждением теоремы 10.1.2.

Необходимость докажем от противного. Пусть $\mathbb{M}$ связное, но не линейно связное многообразие. Прежде всего заметим, что каждое многообразие можно покрыть счетным числом карт. Каждая карта является линейно связным подмножеством, потому что гомеоморфна $\mathbb{R}^n$. Если две карты пересекаются, то их объединение также линейно связно. Это значит, что многообразие можно представить в виде объединения не более, чем счетного числа непересекающихся подмножеств, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, где каждое $\mathbb{U}_i$ линейно связно и $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Поскольку $\mathbb{M}$ связно, то среди подмножеств $\mathbb{U}_i$ существует по крайней мере одно подмножество, пусть это будет $\mathbb{U}_i$, которое содержит предельную точку некоторого другого подмножества $\mathbb{U}_j$. Пусть точка $x_0 \in \mathbb{U}_i$ является предельной для подмножества $\mathbb{U}_j$. Это значит, что в $\mathbb{U}_j$ существует последовательность точек $\{x_k\} \in \mathbb{U}_j$, которая сходится к x_0. Поэтому, начиная с некоторого N, все точки последовательности x_k, $k > \mathrm{N}$, лежат в окрестности $\mathbb{U}_0 \ni x_0$. Следовательно, точку x_0 можно соединить кривой с x_k и подмножества $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ – линейно связны, что противоречит предположению.

Пример 10.1.5. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ линейно связно, так как любые две точки $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить путем $x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t$, который представляет собой прямолинейный отрезок.

Нетрудно также доказать

Предложение 10.1.3. *Каждое многообразие* $\mathbb{M}$ *локально линейно связно.*

В общем случае многосвязное многообразие представляет собой набор компонент связности, каждая из которых является линейно связной.

Для полноты картины приведем достаточное условие линейной связности произвольного топологического пространства.

Предложение 10.1.4. *Если топологическое пространство* $\mathbb{M}$ *связно и локально линейно связно, то оно линейно связно.*

Доказательство. См., например, [54], упражнение 12.10(j).

10.2. Гомотопия непрерывных отображений

На множестве непрерывных отображений двух топологических пространств $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ и, в частности, многообразий можно ввести отношение эквивалентности – гомотопию. Понятие гомотопии является топологическим, потому что при его определении используется только непрерывность отображений.

Определение. Два непрерывных отображения

$$\begin{aligned} f_0: \quad & \mathbb{M}_1 \ni \quad x \mapsto f_0(x) \quad \in \mathbb{M}_2, \\ f_1: \quad & \mathbb{M}_1 \ni \quad x \mapsto f_1(x) \quad \in \mathbb{M}_2, \end{aligned}$$

называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение

$$F: \quad \mathbb{M}_1 \times [0,1] \ni \quad x, t \mapsto F(x,t) \quad \in \mathbb{M}_2$$

такое, что $F(x,0) = f_0(x)$ и $F(x,1) = f_1(x)$. При этом само отображение F называется *гомотопией* между f_0 и f_1:

$$F: \quad f_0 \sim f_1.$$

Гомотопия $F(x,t)$ называется также *деформацией* отображения f_0 в f_1.

Другими словами, гомотопия позволяет непрерывно деформировать одно отображение в другое. Нетрудно проверить, что гомотопия является отношением эквивалентности на множестве всех отображений $\mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$. Отображения, гомотопные отображению f, образуют гомотопический класс отображений, который будем обозначать квадратными скобками $[f]$. Множество всех гомотопических классов отображений $\mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ будем обозначать через $[\mathbb{M}_1; \mathbb{M}_2]$.

Гомотопию $F(x,t)$ можно представить себе следующим образом. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{M}_1$ и будем менять параметр $t \in [0,1]$. Тогда мы получим траекторию точки x в пространстве $\mathbb{M}_2$. Тогда гомотопия $F(x,t)$ представляет собой семейство всех траекторий, зависящих от параметра $x \in \mathbb{M}_1$.

Пример 10.2.1. Любой путь $\gamma : [0,1] \ni s \mapsto x(s) \in \mathbb{M}$ гомотопен постоянному пути e_{x_0} с началом и концом в точке $x_0 := x(0)$ посредством гомотопии

$$F: \quad [0,1] \times [0,1] \ni \quad s, t \mapsto F(s,t) \quad \in \mathbb{M}, \qquad \text{где } F(s,t) := x((1-t)s).$$

В этой гомотопии конец пути меняется: он скользит вдоль кривой $\gamma(s)$, приближаясь к началу пути при $t \to 1$. При данном выше определении гомотопии, когда отображения f_0 и f_1 не обязаны совпадать ни в одной точке, все пути на связном многообразии гомотопны между собой.

Понятие гомотопных отображений можно использовать для определения отношения эквивалентности самих топологических пространств.

Определение. Говорят, что пространства $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ имеют один и тот же *гомотопический тип*, если существуют непрерывные отображения $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ и $g : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_1$ такие, что композиции этих отображений гомотопны тождественным отображениям:

$$g \circ f \sim \mathsf{id}_1: \quad \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_1, \qquad f \circ g \sim \mathsf{id}_2: \quad \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2,$$

где $\mathsf{id}_{1,2}$ – тождественные отображения пространств $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$. Отображения f и g называются в этом случае *гомотопическими эквивалентностями*. Говорят также, что пространства $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ в этом случае *гомотопически эквивалентны*.

Это определение отличается от определения гомеоморфизма тем, что вместо знака равенства стоит знак гомотопической эквивалентности. Поэтому два гомеоморфных пространства имеют одинаковый гомотопический тип. Обратное утверждение неверно.

Пример 10.2.2. n-мерный шар $\mathbb{B}^n \in \mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентен точке $x \in \mathbb{B}^n$, но не гомеоморфен ей.

Определение. В общем случае топологическое пространство, гомотопически эквивалентное точке, называется *стягиваемым*.

Другими словами, пространство стягиваемо, если его можно непрерывно деформировать по себе в точку.

Пример 10.2.3. Нестягиваемыми пространствами являются n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$ и тор $\mathbb{T}^n$.

Пример 10.2.4. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а также любая выпуклая область $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентна одной точке $x_0 \in \mathbb{U}$. Напомним, что область $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклой*, если наряду с произвольными точками $x_1, x_2 \in \mathbb{U}$ она содержит также и отрезок $x_1 + (x_2 - x_1)t$, их соединяющий.

Пример 10.2.5. Евклидово пространство с выколотой точкой, $\mathbb{R}^n \setminus x_0$, гомотопически эквивалентно сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, содержащей точку x_0 внутри. В частности, плоскость с выколотой точкой гомотопически эквивалентна окружности.

Пример 10.2.6. Плоскость с двумя выколотыми точками $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ гомотопически эквивалентна *букету окружностей*, изображенному на рис. 10.3. Букет окружностей представляет собой объединение двух окружностей, имеющих одну общую точку. Он является топологическим пространством, но не многообразием.

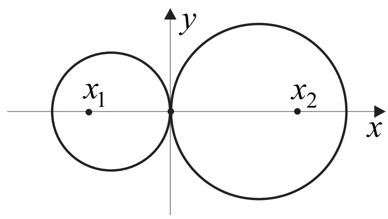

Рис. 10.3. Букет двух окружностей.

Пример 10.2.7. Гомотопически эквивалентными пространствами является тройка: цилиндр, лист Мебиуса и окружность.

Из этих примеров видно, что гомотопически эквивалентные многообразия могут иметь разную размерность и ориентируемость. Многообразия могут быть также гомотопически эквивалентны топологическим пространствам, которые не являются многообразиями, как показывает пример плоскости с двумя выколотыми точками. Тем не менее некоторые топологические свойства являются общими для гомотопически эквивалентных пространств.

Предложение 10.2.1. *Если пространство $\mathbb{M}_1$ связно и имеет тот же гомотопический тип, что и $\mathbb{M}_2$, то пространство $\mathbb{M}_2$ также связно.*

Понятие гомотопии может быть использовано для доказательства нетривиальных утверждений.

Теорема 10.2.1 (О невозможности причесать ежа). *На четномерной сфере $\mathbb{S}^n$ нельзя задать непрерывное векторное поле, которое не обращается в нуль ни в одной точке.*

Доказательство. От противного. Рассмотрим сферу единичного радиуса

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad x^\alpha x_\alpha = 1, \quad \alpha = 1, \dots, n+1\},$$

вложенную в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Допустим, что на сфере задано непрерывное векторное поле X, не имеющее нулей. Тогда векторное поле $T := X/\sqrt{X^2}$ имеет единичную длину и поэтому задает непрерывное отображение сферы на себя $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Касательный вектор к сфере $T = \{T^\alpha(x)\}$ ортогонален радиус-вектору $\{x^\alpha\}$, т.е. $x^\alpha T_\alpha = 0$. При этом мы рассматриваем координаты точки на сфере и касательный вектор как векторы евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда отображение

$$F(x,t) : \quad x^\alpha, t \mapsto x^\alpha \cos(\pi t) + T^\alpha \sin(\pi t)$$

задает гомотопию

$$F : \quad \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n.$$

Эта гомотопия переводит произвольную точку на сфере $\{x^\alpha\}$ в ее антиподальную точку с координатами $\{-x^\alpha\}$. Выберем ориентацию на сфере, согласованную с канонической ориентацией евклидова пространства (3.79). Тогда объем сферы равен

$$V = \int_{\mathbb{S}^n} v \neq 0, \tag{10.3}$$

где форма объема на сфере υ получена сужением канонической формы объема евклидова пространства υ_0 на сферу $\mathbb{S}^n$:

$$\upsilon = \mathsf{i}_N \upsilon_0, \qquad \upsilon_0 := dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}.$$

Здесь i_N – внутреннее умножение формы объема υ_0 на внешнюю нормаль к сфере N. Интеграл (10.3) задает непрерывное отображение $\Lambda_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{R}$. При отображении $x^\alpha \to -x^\alpha$ объем сферы преобразуется по правилу

$$V \mapsto (-1)^{n+1} V.$$

Поскольку изменение знака объема при гомотопии невозможно, так как она является непрерывным отображением, то для четных n приходим к противоречию.

Замечание. На нечетномерной сфере непрерывные векторные поля, нигде не обращающиеся в нуль, существуют. А именно, можно доказать [55], что максимальное число линейно независимых нигде не обращающихся в нуль векторных полей на нечетномерной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ равно $2^c + 8d - 1$, где c и d – неотрицательные целые числа, которые определяются следующим образом. Поскольку n четно, то его единственным образом можно представить в виде $n = (2a-1)2^b$, где a, b – натуральные числа. Тогда $c := b \operatorname{\mathsf{mod}} 4$ и $d := (b-c)/4$.

Рассмотренный выше пример 10.2.1 гомотопных путей показывает, что определение гомотопии является грубым, так как гомотопические классы путей содержат слишком много элементов. Более тонкое деление на классы дает понятие отображений, гомотопных относительно некоторого подмножества $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}_1$.

Определение. Два непрерывных отображения топологических пространств

$$f_0, f_1 : \quad \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$$

называются *гомотопными относительно подмножества* $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}_1$, если существует гомотопия

$$F : \quad \mathbb{M}_1 \times [0,1] \to \mathbb{M}_2,$$

такая, что $F(x,t)$ не зависит от t при $x \in \mathbb{U}$. Мы пишем $f_0 \sim f_1(\,\mathsf{rel}\mathbb{U})$.

В частности, отображения f_0 и f_1 должны совпадать на подмножестве $\mathbb{U}$. Другими словами, при непрерывной деформации отображений допускается их изменение только на множестве $\mathbb{M} \setminus \mathbb{U}$. Соответствующая гомотопия называется *относительной гомотопией* и также определяет отношение эквивалентности на множестве непрерывных отображений топологических пространств, которое является более тонким.

Пример 10.2.8. Можно рассмотреть класс путей, гомотопных относительно начала $x(0)$ и конца $x(1)$ некоторого пути. Этот класс содержит все пути, которые имеют фиксированное начало и конец и которые можно непрерывно деформировать друг в друга по многообразию $\mathbb{M}$. Более того, как показывает пример тора, не все пути с одинаковым началом и концом можно непрерывно деформировать друг в друга, не выходя из многообразия $\mathbb{M}$. Если начало и конец пути отличаются, то пути относительно негомотопны тождественному пути. Это говорит о том, что понятие относительной гомотопии более тонко, чем просто гомотопия.

Понятие относительной гомотопии для путей будет использовано при определении фундаментальной группы многообразия.

10.3. Фундаментальная группа

Существует два простых, но важных способа получения новых путей из старых. А именно, можно определить произведение путей, когда сначала проходится путь γ_1, а затем – путь γ_2, если такое возможно. Кроме того, можно определить *обратный* путь γ^{-1}, который проходится в обратном направлении. Сформулируем это в виде следующего утверждения.

Предложение 10.3.1. 1) *Если начало второго пути* $\gamma_2 = x_2(t)$ *совпадает с концом первого пути* $\gamma_1 = x_1(t)$, *то можно определить произведение путей* $\gamma_2 \circ \gamma_1$ *следующей формулой*:

$$(\gamma_2 \circ \gamma_1) = x(t) := \begin{cases} x_1(2t) & \text{при} \quad 0 < t < \frac{1}{2}, \\ x_2(2t-1) & \text{при} \quad \frac{1}{2} < t < 1, \end{cases} \tag{10.4}$$

которое является путем в $\mathbb{M}$.

2) *Для любого пути* γ *можно определить путь* γ^{-1}, *получаемый как путь* γ, *проходимый в обратном направлении*:

$$\gamma^{-1} := x(1-t). \tag{10.5}$$

Эти операции похожи, но не являются групповыми операциями на множестве всех путей. Действительно, умножение путей определено только в том случае, если конец первого пути совпадает с началом второго. Кроме того, произведения $\gamma^{-1} \circ \gamma$ и $\gamma \circ \gamma^{-1}$ дают не тождественные, а замкнутые пути в началом и концом в точках $x(0)$ и $x(1)$ соответственно.

Разобьем все множество путей γ на классы эквивалентных путей $[\gamma]$, которые гомотопны относительно начала и конца пути. То есть каждый элемент $[\gamma]$ содержит все пути, которые можно непрерывно деформировать друг в друга при фиксированном начале и конце путей: $\gamma_1 \in [\gamma]$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 \sim \gamma(\,\mathsf{rel}\{0,1\})$. В классах эквивалентных путей также можно ввести умножение путей и обратный элемент, выбрав из каждого класса по представителю и воспользовавшись формулами (10.4) и (10.5). Нетрудно показать, что эти операции на множестве относительно гомотопных путей корректно определены, так как не зависят от выбора представителя в каждом классе. В этих классах произведения $[\gamma^{-1}] \circ [\gamma] = [e_{x(0)}]$ и $[\gamma] \circ [\gamma^{-1}] = [e_{x(1)}]$ дают классы путей, гомотопных тождественным путям. Однако умножение определено не для всех классов путей.

Ситуацию можно исправить и превратить некоторое подмножество всех путей на $\mathbb{M}$ в группу, если зафиксировать точку многообразия и ограничиться замкнутыми путями, имеющими начало и конец в данной точке.

Зафиксируем произвольную точку многообразия $x_0 \in \mathbb{M}$ и рассмотрим все замкнутые пути, имеющие начало и конец в данной точке. Множество этих путей обозначим через $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$. При этом допускается, чтобы пути имели точки самопересечения. Поскольку начала и концы всех путей совпадают, то на этом множестве определена операция умножения (10.4). Для каждого пути определен также обратный путь (10.5). Множество $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$ с введенной операцией умножения и обратного элемента группы не образует, потому что произведения двух различных путей на их обратные не совпадают, и, следовательно, невозможно ввести понятие единственного единичного элемента. Эту трудность можно обойти, если разбить множество всех путей $\Omega(\mathbb{M}, x_0)$ на классы путей, гомотопных относительно начала и конца, которые обозначим через $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$. Справедлива следующая

Теорема 10.3.1. *Гомотопические классы путей* $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$ *образуют группу относительно операции умножения путей, причем обратным элементом является гомотопический класс обратного пути, а единицей – гомотопический класс единичного пути* e_{x_0}.

Доказательство. Сводится к проверке корректности операций и групповых свойств. Детали можно найти, например, в [54], теорема 15.2.

Таким образом, для определения группы было сделано два шага. Во-первых, чтобы определить операцию умножения на всех элементах, множество всех путей было ограничено только замкнутыми путями, имеющими начало и конец в фиксированной точке многообразия. Во-вторых, для корректного определения единичного элемента мы перешли от умножения отдельных путей к умножению классов относительно гомотопных путей.

Определение. Группа $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$ называется *фундаментальной группой* топологического пространства или многообразия $\mathbb{M}$ в точке x_0.

В этом определении используется фиксированная точка x_0. Для связных многообразий роль фиксированной точки не является существенной.

Теорема 10.3.2. *Пусть* $\mathbb{M}$ *– линейно связное топологическое пространство (многообразие). Тогда для любых точек* $x_0, x_1 \in \mathbb{M}$ *фундаментальные группы* $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$ *и* $\pi_1(\mathbb{M}, x_1)$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть δ – путь из x_0 в x_1 и γ – произвольный замкнутый путь в точке x_0. Тогда $\delta\circ\gamma\circ\delta^{-1}$ – замкнутый путь в точке x_1. Поэтому между множествами замкнутых путей $\Omega(\mathbb{M},x_0)$ и $\Omega(\mathbb{M},x_1)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Отсюда следует, что между фундаментальными группами существует биекция $f_\delta:\pi_1(\mathbb{M},x_0)\to\pi_1(\mathbb{M},x_1)$. Эта биекция – гомоморфизм групп, т.к.

$$f_\delta([\gamma_2]\circ[\gamma_1])=[\delta]\circ[\gamma_2]\circ[\gamma_1]\circ\delta^{-1}=[\delta]\circ[\gamma_2]\circ\delta^{-1}\circ\delta\circ[\gamma_1]\circ\delta^{-1}=f_\delta([\gamma_2])\circ f_\delta([\gamma_2]).$$

Обратное отображение f_δ^{-1} определяется обратным путем δ^{-1}.

В силу этой теоремы при обозначении фундаментальной группы фиксированную точку x_0 мы часто будем опускать: $\pi_1(\mathbb{M},x_0)=\pi_1(\mathbb{M})$. Изоморфизм между фундаментальными группами f_δ определяется гомотопическим классом пути $[\delta]$ из x_0 в x_1. Поскольку нет естественного (предпочтительного) выбора такого класса путей, то естественного изоморфизма между фундаментальными группами в различных точках не существует.

Пример 10.3.1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ при любом n произвольный замкнутый путь для любой отмеченной точки гомотопен тождественному пути в этой точке. Поэтому фундаментальная группа евклидова пространства тривиальна $\pi_1(\mathbb{R}^n)=e$.

Определение. Топологическое пространство (многообразие) $\mathbb{M}$ называется *односвязным*, если его фундаментальная группа тривиальна, $\pi_1(\mathbb{M})=e$.

Предложение 10.3.2. *Если $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ – односвязные многообразия, то их прямое произведение $\mathbb{M}_1\times\mathbb{M}_2$ односвязно.*

Доказательство. Простая проверка.

Пример 10.3.2. Фундаментальная группа окружности с отмеченной точкой изоморфна группе целых чисел по сложению, $\pi_1(\mathbb{S}^1,x_0)\simeq\mathbb{Z}$. При этом целое число равно количеству полных обходов окружности, причем положительные и отрицательные числа соответствуют обходам против и по часовой стрелке соответственно. Хотя изоморфизм фундаментальной группы окружности группе целых чисел интуитивно очевиден, доказательство громоздко. Его можно найти, например, в [54], теорема 16.7.

Пример 10.3.3. Фундаментальная группа цилиндра совпадает с фундаментальной группой окружности и изоморфна группе целых чисел по сложению $\mathbb{Z}$.

В общем случае вычисление фундаментальной группы является сложной задачей.

Предложение 10.3.3. *Фундаментальная группа группы Ли $\mathbb{U}(n)$ при $n\geqslant 1$ совпадает с группой целых чисел по сложению $\mathbb{Z}$. Группа специальных унитарных матриц $\mathbb{SU}(n)$ при $n\geqslant 1$ односвязна. Фундаментальная группа группы вращений $\mathbb{SO}(n)$ при $n\geqslant 3$ равна $\mathbb{Z}_2$. Фундаментальная группа группы вращений плоскости $\mathbb{SO}(2)$ равна $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. См., например, [47], лекции 12 и 13.

В общем случае фундаментальная группа не является абелевой.

Пример 10.3.4. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с двумя выколотыми точками x_1 и x_2 и фиксированной точкой x_0 (см. рис.10.4). Пусть γ_1 и γ_2 – замкнутые пути с началом и концом в точке x_0, которые

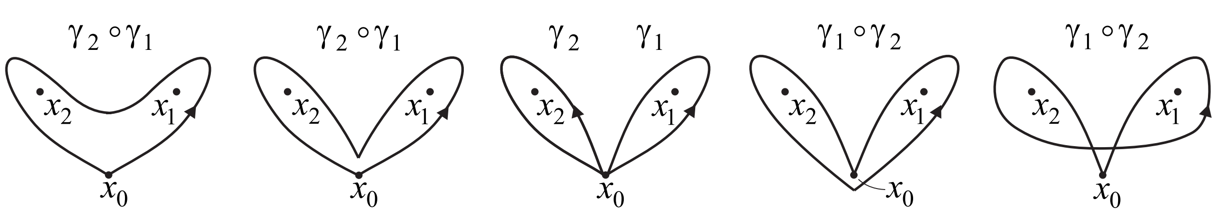

Рис. 10.4. Замкнутые пути γ_1 и γ_2 вокруг точек x_1 и x_2 на евклидовой плоскости (в центре). Непрерывная деформация произведения путей $[\gamma_2]\circ[\gamma_1]$ (влево) и $[\gamma_1]\circ[\gamma_2]$ (вправо).

охватывают соответственно точки x_1 и x_2. На рис.10.4 показаны представители из классов гомотопных путей $[\gamma_2]\circ[\gamma_1]$ и $[\gamma_1]\circ[\gamma_2]$. Ясно, что эти пути не могут быть непрерывно деформированы друг в друга без пересечения выколотых точек и поэтому негомотопны друг другу. Следовательно, фундаментальная группа евклидовой плоскости с двумя выколотыми точками некоммутативна.

В общем случае фундаментальная группа многообразия представляет собой свободную группу с конечным числом образующих. Напомним

Определение. Группа $\mathbb{G}$ называется *свободной* группой с системой $E\subset\mathbb{G}$ порождающих (образующих) элементов, если любое отображение множества E в любую группу $\mathbb{H}$ продолжается до гомоморфизма $\mathbb{G}\to\mathbb{H}$. Система $E\subset\mathbb{G}$ называется *системой свободных порождающих*. Ее мощность называется *рангом свободной группы* $\mathbb{G}$. Множество E называется также *алфавитом*. Элементы $g\in\mathbb{G}$ представляют собой *слова* в алфавите E, т.е. выражения в виде конечного произведения

$$g=e_{i_1}^{\epsilon_1}e_{i_2}^{\epsilon_2}\dots e_{i_k}^{\epsilon_k},\qquad e_{i_j}\in E,\quad \epsilon_j=\pm1,\quad \forall\, j=1,\dots,k, \tag{10.6}$$

а также пустое слово. Слово называется *несократимым*, если

$$e_{i_j}^{\epsilon_j}\neq e_{i_{j+1}}^{-\epsilon_{j+1}},\qquad \forall\, j=1,\dots,k-1.$$

Несократимые слова являются разными элементами свободной группы $\mathbb{G}$, и каждое слово равно единственному несократимому слову. Число k называется *длиной* слова g, если оно несократимо.

Пример 10.3.5. Рассмотрим расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ (сферу Римана).

Определение. Область $\mathbb{D}\subset\overline{\mathbb{C}}$ называется *m-связной*, если ее граница состоит из m связных компонент.

Любая m-связная область диффеоморфна комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $m-1$ дырками.

Предложение 10.3.4. *Фундаментальная группа произвольной m-связной области в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является свободная группа с $m-1$ образующими.*

Доказательство. Каждой связной компоненте границы соответствует ровно одна компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}}\backslash\mathbb{D}$. Обозначим эти компоненты $\mathbb{B}_0,\mathbb{B}_1,\dots,\mathbb{B}_{m-1}$ (см. рис.10.5). Заключим каждую компоненту

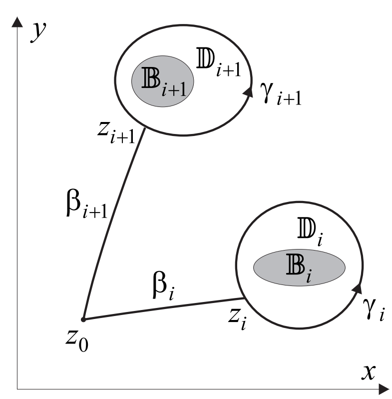

Рис. 10.5. Образующие m-связной области в расширенной комплексной плоскости.

$\mathbb{B}_i$ в некоторую окрестность $\mathbb{D}_i$, которая ограничена простой замкнутой кривой γ_i, целиком лежащей в $\mathbb{D}$. Области $\mathbb{D}_i$ выберем такими, чтобы кривые γ_i не пересекались. На каждой кривой выберем некоторую точку z_i, которую будем считать началом и концом кривой γ_i. Из фиксированной точки z_0 проведем в каждую точку z_i кривую β_i, целиком лежащую в области $\mathbb{D}$. Обозначим

$$e_i:=\beta_i^{-1}\circ\gamma_i\circ\beta_i,\qquad i=0,1,\dots,m-1.$$

Заметим, что справедливо тождество

$$[e_0]\circ[e_1]\circ\dots\circ[e_{m-1}]=1.$$

Поэтому гомотопические классы $[e_1], \dots, [e_{m-1}]$ можно выбрать в качестве образующих фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{D}, z_0)$. Можно проверить, что любой путь γ гомотопен конечному произведению:

$$[\gamma] = [\gamma_{i_1}^{\epsilon_1}] \circ [\gamma_{i_2}^{\epsilon_2}] \circ \dots \circ [e_{i_k}^{\epsilon_k}],$$

где все i_j, $j = 1, \dots, k$, принадлежат множеству $\{1, \dots, m-1\}$. При этом данное представление единственно, если оно несократимо.

Нетрудно доказать, что при непрерывном отображении $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ гомотопически эквивалентные пути $\gamma_1 \sim \gamma_2$ переходят в гомотопически эквивалентные пути $f\gamma_1 \sim f\gamma_2$ и что замкнутые пути переходят в замкнутые. При этом между фундаментальными группами возникает связь.

Теорема 10.3.3. *При непрерывном отображении $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ фундаментальные группы испытывают гомоморфизм*

$$f_* : \quad \pi_1(\mathbb{M}_1, x) \to \pi_1(\mathbb{M}_2, f(x)),$$

где x – произвольная точка из $\mathbb{M}_1$, который называется индуцированным и одинаков для всех отображений, гомотопных относительно точки x.

Доказательство. См., например, [54], лемма 15.7.

Следствие. *Если отображение двух пространств является гомеоморфизмом, то гомоморфизм фундаментальных групп становится изоморфизмом.*

Понятие фундаментальной группы позволяет осуществить переход от топологии пространств к алгебре и является одним из разделов алгебраической топологии. Этот переход позволяет использовать алгебраические методы при изучении топологических пространств и, следовательно, многообразий. При этом 1) каждому топологическому пространству с отмеченной точкой ставится в соответствие фундаментальная группа, 2) каждому непрерывному отображению пространств ставится в соответствие гомоморфизм групп, 3) тождественному отображению отвечает тождественный гомоморфизм, 4) гомеоморфизму отвечает изоморфизм, 5) композиции непрерывных отображений сопоставляется композиция гомоморфизмов.

Замечание. Отмеченные выше свойства 1) – 5) дают пример функтора из категории топологических пространств с отмеченной точкой и непрерывными отображениями, сохраняющими отмеченную точку, в категорию групп и их гомоморфизмов.

Рассмотренные примеры окружности и цилиндра показывают, что изоморфизм фундаментальных групп не означает гомеоморфизма пространств. Однако, если фундаментальные группы не изоморфны, то соответствующие пространства заведомо не гомеоморфны.

Теорема 10.3.4. *Пусть $f : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ – гомотопическая эквивалентность двух пространств, тогда индуцированное отображение $f_* : \pi_1(\mathbb{M}_1, x) \to \pi_1(\mathbb{M}_2, f(x))$ является изоморфизмом для любой точки $x \in \mathbb{M}_1$.*

Доказательство. См., например, [54], теорема 15.13.

Следствие. *Стягиваемое пространство имеет тривиальную фундаментальную группу.*

Мы видим, что любое стягиваемое пространство является односвязным. Обратное утверждение неверно.

Пример 10.3.6. Сфера $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 1$, является односвязным, но не стягиваемым многообразием.

Пример 10.3.7. Шар $\mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, с выколотой точкой является односвязным, но не стягиваемым многообразием.

Теорема 10.3.5. *Пусть $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ – два линейно связных топологических пространства. Тогда фундаментальная группа произведения $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ изоморфна прямому произведению фундаментальных групп, $\pi_1(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \simeq \pi_1(\mathbb{M}_1) \times \pi_1(\mathbb{M}_2)$.*

Доказательство. Доказательство заключается в явном построении изоморфизма. См., например, [54], теорема 15.17.

Следствие. *Произведение $\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ двух односвязных пространств является односвязным.*

Пример 10.3.8. Фундаментальная группа тора $\mathbb{T}^n \approx \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ изоморфна прямому произведению групп целых чисел, $\pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$.

10.4. Фундаментальная группа и ориентируемость

Все связные многообразия можно разделить на два класса: ориентируемые и неориентируемые. Напомним, что многообразие $\mathbb{M}$ называется ориентируемым (см. раздел 2), если его можно покрыть системой карт, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, причем якобиан преобразования координат во всех пересечениях $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ положителен.

Рассмотрим класс многообразий, на которых можно задать репер $\{e_a\}$, $a = 1, \dots, n$, т.е. n достаточно гладких векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке многообразии $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. Отсюда, в частности, следует, что векторные поля $e_a(x)$ не могут обращаться в нуль ни в какой точке многообразия $\mathbb{M}$, так как в противном случае они были бы линейно зависимы в этой точке. Репер $\{e_a\}$ образует базис для касательных векторных полей. Локально репер всегда существует. Однако его глобальное существование является сильным предположением, и далеко не каждое ориентируемое многообразие допускает существование репера.

Пример 10.4.1. Двумерная сфера $\mathbb{S}^2$ является ориентируемым многообразием, однако она не допускает существование репера, так как на ней не существует векторных полей, которые не обращаются в нуль (теорема о невозможности причесать ежа 10.2.1).

В локальной системе координат репер раскладывается по координатному базису, $e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha$, $\mathsf{det}\, e^\alpha{}_a \neq 0$.

Введенное ниже определение класса ориентации репера основано на локальном существовании репера и поэтому применимо ко всем многообразиям.

Если от отдельных реперов перейти к классам ориентирующих реперов, то можно дать новое эквивалентное определение ориентируемости многообразий. А именно, пусть в точке $x \in \mathbb{M}$ задан *класс ориентации*, т.е. класс реперов $\{e_a\}$, связанных друг с другом линейным преобразованием с положительным определителем. Подробнее, два репера $\{e'_a\}$ и $\{e_a\}$ принадлежат одному классу ориентации, если они связаны преобразованием $e'_a = S_a{}^b e_b$, причем $\mathsf{det}\, S(x) > 0$. Если $\mathsf{det}\, S < 0$, то будем говорить, что в точке x реперы принадлежат классам противоположной ориентации. Таким образом, в каждой точке многообразия имеются ровно два класса ориентации. Поскольку репер можно непрерывно смещать из точки x в близкие точки многообразия, то имеет смысл говорить о непрерывной зависимости классов ориентации от точки многообразия.

Определение. Если в каждой точке многообразия $\mathbb{M}$ существует класс ориентации реперов, который непрерывно зависит от точки многообразия, то многообразие $\mathbb{M}$ называется *ориентируемым.*

Класс ориентации принимает только два значения, например, $+1$ или -1. Поэтому непрерывность означает, что во всех точках ориентируемого многообразия можно выбрать класс ориентации $+1$.

Докажем эквивалентность нового определения и определения ориентируемости многообразий, которое было дано в разделе 2. Пусть многообразие ориентируемо. Тогда на нем существует координатное покрытие $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ такое, что якобиан преобразования координат положителен, $\mathsf{det}\, \partial_\alpha x^{\alpha'} > 0$, во всех областях пересечения карт. В каждой координатной окрестности выберем координатный репер $\{\partial_\alpha\}$. Множество этих реперов определяет класс ориентации, который непрерывно зависит от точки многообразия. Действительно, если точка принадлежит различным картам, то координатные реперы принадлежат одному классу ориентации. Обратно. Пусть существует класс ориентации реперов, непрерывно зависящий от точки многообразия. Выберем координатное покрытие многообразия, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$. Тогда в двух пересекающихся картах $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ можно выбрать координаты x^α и $x^{\alpha'}$ таким образом, что

$$e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha = e^{\alpha'}{}_a \partial_{\alpha'}, \qquad \mathsf{det}\, e^\alpha{}_a > 0, \quad \mathsf{det}\, e^{\alpha'}{}_a > 0,$$

где $\{e_a\}$ – некоторый представитель заданного класса ориентации. Действительно, если в какой то системе координат $\mathsf{det}\, e^\alpha{}_a < 0$, то, переставив две произвольные координаты, получим $\mathsf{det}\, e^\alpha{}_a > 0$. Отсюда следует положительность якобиана преобразования координат в области пересечения карт,

$$J = \det \partial_\alpha x^{\alpha'} = \det (e^a{}_\alpha e^{\alpha'}{}_a) > 0. \tag{10.7}$$

Это справедливо для любого представителя из класса ориентации.

На произвольном многообразии, в том числе и неориентируемом, ориентацию можно переносить вдоль путей. Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задан кусочно дифференцируемый путь $\gamma = x(t)$, $t \in [0,1]$, и класс ориентации реперов $\{e_a(x(t))\}$ во всех точках пути, который непрерывно зависит от точки пути. Тогда класс ориентации $\{e_a(1)\}$ в конечной точке $x(1)$ называется *переносом класса ориентации* репера $\{e_a(0)\}$ из точки $x(0)$ в точку $x(1)$ вдоль пути γ.

Операция переноса ориентации вдоль путей обладает следующими свойствами.

1) Из любой точки $x \in \mathbb{M}$ ориентацию можно однозначно перенести во все близлежащие точки многообразия вдоль путей, целиком лежащих в пределах координатной окрестности точки x.

2) Для любого кусочно дифференцируемого пути перенос ориентации существует и не зависит от выбора репера вдоль пути. Существование очевидно, так как достаточно задать произвольным образом компоненты n линейно независимых векторов $\{e_a(t)\}$, как дифференцируемые функции одного переменного. Независимость от выбора репера доказывается просто. Пусть $\{e_a(t)\}$ и $\{e'_a(t)\}$ – два репера вдоль одной кривой $x(t)$, имеющие одинаковую ориентацию при $t = 0$. Матрица перехода от одного репера к другому, $e'_a = S_a{}^b e_b$, невырождена, $\det S(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$. Поэтому, если в начальный момент $\det S(0) > 0$, то из непрерывности следует, что $\det S(t) > 0$ для всех $t \in [0,1]$, поскольку матрица S не может быть вырождена.

3) Если два пути $x_1(t)$ и $x_2(t)$ гомотопны относительно начала и конца, то переносы класса ориентации вдоль этих путей совпадают. Действительно, для гомотопных путей существует непрерывное отображение $F(t,s) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{M}$ такое, что $F(t,0) = x_1(t)$ и $F(t,1) = x_2(t)$. Пусть $\{e_a(t)\}$ – репер вдоль $x_1(t)$. Перенесем каким либо непрерывным образом этот репер из каждой точки кривой γ_1 вдоль кривых $F(t,s)$ по второму аргументу s. Перенос ориентации в конечные точки не зависит от выбора репера $\{e_a(t)\}$ вдоль γ_1 в силу свойства 2). В результате получим некоторый репер вдоль второй кривой γ_2. Поскольку в начальной и конечной точке реперы по построению совпадают, то совпадают и переносы классов ориентации вдоль гомотопных путей.

Приведенные выше определения удобны для доказательства неориентируемости некоторых многообразий в силу следующей теоремы.

Теорема 10.4.1. *Связное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда перенос класса ориентации репера вдоль любого замкнутого пути сохраняет ориентацию.*

Доказательство. Пусть многообразие $\mathbb{M}$ ориентируемо. Выберем координатное покрытие такое, чтобы якобиан преобразования координат был положителен, $\det \partial_\alpha x^{\alpha'} > 0$, во всех областях пересечения карт. Выберем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{M}$ и зафиксируем какой либо репер, который принадлежал бы тому же классу ориентации, что и координатный базис, т.е. $\det (e^\alpha{}_a(x_0)) > 0$. Эту ориентацию можно перенести в любую точку многообразия, так как оно линейно связно. Результат переноса ориентации не зависит от пути, потому что ориентацию можно переносить внутри произвольной карты, а при переходе от карты к карте принадлежность репера определенному классу ориентации сохраняется. В частности, принадлежность репера данному классу ориентации сохраняется при переносе ориентации вдоль произвольного замкнутого пути.

Обратно. Выберем произвольным образом репер в какой либо точке $x_0 \in \mathbb{M}$ и разнесем эту ориентацию во все другие точки $x \in \mathbb{M}$. Результат будет однозначен, так как перенос класса ориентации вдоль произвольного замкнутого пути сохраняет ориентацию. Таким образом в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ определен класс ориентации $\{e_a(x)\}$. Пусть $\mathbb{U}_i$ – координатное покрытие многообразия $\mathbb{M}$. На каждой координатной окрестности можно выбрать систему координат такую, что $\det e^\alpha{}_a > 0$ для некоторого представителя из класса ориентации. Следовательно, из (10.7) следует, что якобиан преобразования координат во всех пересекающихся областях будет положителен.

Из этой теоремы вытекает, что если можно указать замкнутый путь, вдоль которого не существует переноса класса ориентации репера, то многообразие является неориентируемым. В частности, неориентируемое многообразие не может быть односвязным. Действительно, любой замкнутый путь на односвязном многообразии можно непрерывно стянуть в точку. Поскольку замкнутые пути в достаточно малой окрестности произвольной точки сохраняют ориентацию, то из непрерывности следует, что на односвязном многообразии любой замкнутый путь сохраняет ориентацию. То есть каждая односвязная компонента многообразия всегда ориентируема. Неодносвязные многообразия могут быть как ориентируемыми, так и неориентируемыми.

Пример 10.4.2. Цилиндр и лист Мебиуса имеют изоморфные фундаментальные группы $\pi_1 \simeq \mathbb{Z}$, однако являются соответственно ориентируемой и неориентируемой поверхностями.

Пусть на многообразии $\mathbb{M}$ задан ориентирующий репер $\{e_a\}$ глобально. Рассмотрим этот репер в качестве базиса касательных векторных полей $X = X^a e_a \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Зададим на $\mathbb{M}$ тривиальную линейную $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ связность: $\omega_{\alpha a}{}^b = 0$ в каждой карте. Это значит, что при параллельном переносе векторов их компоненты относительно выбранного репера не меняются. Тогда рассматриваемое многообразие будет пространством абсолютного параллелизма, так как тензор кривизны для тривиальной связности равен нулю, $R_{\alpha\beta a}{}^b = 0$. По этой причине, если на многообразии можно задать репер глобально, оно называется *параллелизуемым*. В то же время тензор кручения для тривиальной связности в общем случае будет отличен от нуля. При этом тензор кручения на односвязных многообразиях для заданной нулевой связности однозначно определяется репером. Верно также и обратное утверждение: в односвязном пространстве абсолютного параллелизма, в котором тензор кривизны всюду равен нулю, $R_{\alpha\beta a}{}^b = 0$, всегда можно задать репер глобально. Для этого достаточно выбрать n линейно независимых векторов в касательном пространстве произвольной точки, а затем разнести их по всему многообразию, используя то свойство, что результат не зависит от пути параллельного переноса.

Очевидно, что любое параллелизуемое многообразие является ориентируемым.

Пример 10.4.3. Любая группа Ли является параллелизуемым многообразием, если групповое умножение слева (справа) принять за определение параллельного переноса (см. раздел 8.6). Поэтому все группы Ли представляют собой ориентируемые многообразия. При этом левоинвариантные (правоинвариантные) векторные поля представляют собой глобально определенный репер.

Обратное утверждение, что все ориентируемые многообразия являются параллелизуемыми, неверно, как показывает пример сферы 10.4.1.

Приведем критерий параллелизуемости многообразий.

Теорема 10.4.2. *Многообразие $\mathbb{M}$ является параллелизуемым тогда и только тогда, когда касательное расслоение тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}(\mathbb{M}) \approx \mathbb{M} \times \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Проверяется тот факт, что глобально определенный репер устанавливает диффеоморфизм расслоений.

Ориентируемость многообразий можно также определить с помощью дифференциальных форм, рассмотренных в разделе 3. Рассмотрим связное многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. Пространство дифференциальных форм максимальной степени $\Lambda_n(\mathbb{M})$ в каждой точке многообразия одномерно. Пусть $A, B \in \Lambda_n(\mathbb{M})$ и $A \neq 0$, $B \neq 0$ во всех точках $x \in \mathbb{M}$. Отношение $A = f(x)B$, где $f \in \mathcal{C}(\mathbb{M})$ и $f > 0$, задает отношение эквивалентности в пространстве n-форм, не обращающихся в нуль ни в одной точке многообразия. Это отношение определяет ровно два класса эквивалентности. Назовем *ориентацией* многообразия $\mathbb{M}$ соответствующий класс эквивалентности n-форм, если такой класс существует. Это определение ориентируемости эквивалентно приведенному выше в силу следующей теоремы.

Теорема 10.4.3. *Связное многообразие $\mathbb{M}$, $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$, ориентируемо тогда и только тогда, когда оно допускает непрерывную нигде не обращающуюся в нуль n-форму.*

Доказательство. Достаточность. Пусть на связном многообразии $\mathbb{M}$ ориентация задана с помощью n-формы A, которая не равна нулю ни в одной точке. Пусть $\{\mathbb{U}_i\}$ – локально конечное покрытие многообразия $\mathbb{M}$. Пусть x^α, $\alpha = 1, \dots, n$ – система координат на некоторой окрестности $\mathbb{U}_i$. Тогда n-форма $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ не равна нулю ни в какой точке $\mathbb{U}_i$ и поэтому отличается от A на некоторый отличный от нуля множитель $f(x)$:

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = fA.$$

Если $f > 0$, то мы говорим, что система координат x^α согласована с ориентацией на $\mathbb{M}$. В противном случае, при $f < 0$, достаточно переставить две координаты для изменения знака n-формы. Обозначим координаты на области $\mathbb{U}_j$, которая пересекается с $\mathbb{U}_i$, через $x^{\alpha'}$. Эти координаты всегда можно выбрать так, чтобы они были согласованы с ориентацией A. Тогда n-форма $dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'}$ также отличается от формы A на некоторый положительный множитель $g(x) > 0$,

$$dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'} = gA.$$

Поскольку

$$dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'} = \det \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

то якобиан соответствующего преобразования координат $x^\alpha \to x^{\alpha'}$ положителен,

$$\det \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \right) = gf^{-1} > 0.$$

Полученное выражение для якобиана преобразования координат корректно, что легко проверяется для пересечения трех карт.

Необходимость. Пусть f_i – разбиение единицы, подчиненное заданному счетному локально конечному покрытию $\{\mathbb{U}_i\}$ (теорема 2.2.3). Выберем координаты на каждой области $\mathbb{U}_i$ таким образом, чтобы все якобианы преобразований координат в областях пересечения были положительны. На каждой области $\mathbb{U}_i$ можно построить отличную от нуля n-форму $\omega_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Тогда n-форма $\sum_i f_i \omega_i$ определена на всем многообразии и отлична от нуля во всех точках.

Замечание. В доказательстве теоремы использовано разбиение единицы, которое всегда существует, так как в определение многообразия мы включили счетность базы топологии. Если это требование исключено из определения, как это часто делается, то в условии теоремы необходимо дополнительно потребовать, например, паракомпактность многообразия.

В роли n-формы, которая не обращается в нуль, может выступать форма объема (3.78). Если многообразие не допускает существования непрерывной невырожденной n-формы, то оно будет неориентируемым. Если на связном многообразии задана невырожденная n-форма, то мы говорим, что на многообразии задана ориентация. Если многообразие несвязно и состоит из нескольких компонент, то на каждой компоненте ориентацию можно задавать независимо, если каждая компонента связности ориентируема.

Отметим, что каждый репер e_a, заданный глобально, определяет невырожденную n-форму. Действительно, обозначим дуальный базис кокасательного пространства через e^a. Тогда n-форма

$$v := e^1 \wedge \dots \wedge e^n$$

определена глобально и невырождена. Ее можно выбрать в качестве формы объема. Обратное утверждение неверно: не каждая форма объема определяет репер.

Пример 10.4.4. На двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ существует форма объема, однако репер определить глобально нельзя, так как на ней не существует векторных полей, не обращающихся в нуль.

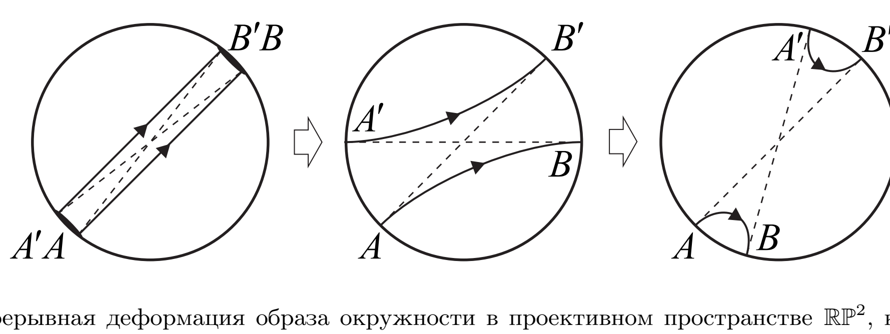

Рис. 10.6. Непрерывная деформация образа окружности в проективном пространстве $\mathbb{RP}^2$, который проходит по диаметру AB два раза, в точку. Пунктиром показано отождествление противоположных точек граничной окружности.

Обсудим более подробно связь неориентируемости многообразия с фундаментальной группой. Перенос ориентации с помощью репера показывает, что каждый гомотопический класс замкнутого пути с началом и концом в точке x_0 (т.е. элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$) либо сохраняет, либо меняет ориентацию репера на противоположную. Это означает, что существует гомоморфизм σ фундаментальной группы в группу $\mathbb{Z}_2$,

$$\sigma : \quad \pi_1(\mathbb{M}, x_0) \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}\,.$$

Другими словами, каждому замкнутому пути ставится в соответствие $+1$ или -1, в зависимости от того, сохраняется ориентация репера при переносе или меняется на противоположную. Если многообразие ориентируемо, то гомоморфизм σ тривиален. Для неориентируемых многообразий ввиду наличия путей, обращающих ориентацию, гомоморфизм σ нетривиален. Как следствие получаем, что фундаментальная группа неориентируемых многообразий не может быть тривиальной.

Пример 10.4.5. Фундаментальная группа листа Мебиуса совпадает с группой целых чисел, $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathbb{Z}$, так как он стягивается к центральной окружности. При гомоморфизме σ все четные и нечетные числа отображаются соответственно в $+1$ и -1.

Пример 10.4.6. Фундаментальная группа проективного пространства $\mathbb{RP}^n$ нетривиальна: $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$, и гомоморфизм σ является изоморфизмом для четных n. Для нечетных n гомоморфизм σ тривиален, так как проективные пространства нечетной размерности ориентируемы. Проективное пространство можно параметризовать точками шара, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки граничной сферы (см. пример 2.1.8). Тогда диаметр шара будет замкнутым путем (образом окружности), который не стягивается в точку. В то же время, если при отображении окружности в проективное пространство диаметр проходится два раза, то такой образ окружности можно стянуть в точку, как показано на рис. 10.6.

Аналогично стягивается в точку любой образ окружности, который проходит диаметр произвольное четное число раз. Это поясняет, почему фундаментальная группа проективного пространства равна $\mathbb{Z}_2$.

11. Накрытия

Важным классом непрерывных отображений топологических пространств являются накрытия, которые представляют собой локальный гомеоморфизм. Все, сказанное в настоящей главе о топологических пространствах, относится также к многообразиям.

11.1. Определения и примеры

Определение. Непрерывное отображение топологических пространств $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ называется *накрытием*, если выполнены следующие условия:

1) p сюрьективно;
2) для любого $x \in \mathbb{M}$ найдется открытая окрестность $\mathbb{U}_x$ точки x такая, что $p^{-1}(\mathbb{U}_x) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{U}_j$ для некоторого семейства открытых подмножеств $\mathbb{U}_j \subset \widetilde{\mathbb{M}}$, удовлетворяющих условиям $\mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k = \varnothing$ при $j \neq k$ и сужение отображения $p|_{\mathbb{U}_j} : \mathbb{U}_j \to \mathbb{U}_x$ – гомеоморфизм для всех $j \in \mathcal{J}$.

Мы говорим также, что окрестность $\mathbb{U}_x$ *просто накрыта* отображением p. Топологическое пространство $\mathbb{M}$ называется *базой* накрытия, а $\widetilde{\mathbb{M}}$ – *накрывающим пространством*. Каждое множество $\mathbb{U}_j$ называется *листом* накрытия области $\mathbb{U}_x$. Если множество $\mathcal{J}$ содержит n элементов, то говорят об n-листном накрытии. Если топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ является односвязным, т.е. фундаментальная группа тривиальна, $\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}) = e$, то накрытие называется *универсальным*.

Предложение 11.1.1. *Если база $\mathbb{M}$ накрытия $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ линейно связна, то мощность множества $\mathcal{J}$ не зависит от точки $x \in \mathbb{M}$.*

Доказательство. См., например, [56], глава 2, §3, следствие 8.

Это утверждение говорит о том, что определение n-листного накрытия корректно, так как не зависит от точки $x \in \mathbb{M}$.

Замечание. Если $\widetilde{\mathbb{M}}$ и $\mathbb{M}$ являются не просто топологическими пространствами, а многообразиями, то вместо непрерывности отображения p мы требуем его дифференцируемость достаточное число раз, а гомеоморфизм заменяем на диффеоморфизм областей $\mathbb{U}_j$ и $\mathbb{U}_x$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Для многообразий $\dim \mathbb{U}_j = \dim \mathbb{U}_x$ для всех $j \in \mathcal{J}$, так как сужение отображения p на $\mathbb{U}_j$ – диффеоморфизм. Кроме того, каждое подмножество $\mathbb{U}_j$, по определению, открыто в $\widetilde{\mathbb{M}}$. Это возможно только если $\dim \widetilde{\mathbb{M}} = \dim \mathbb{U}_j$. Таким образом, если $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ накрытие многообразий, то необходимо, чтобы накрывающее многообразие и база имели одинаковую размерность, $\dim \widetilde{\mathbb{M}} = \dim \mathbb{M}$. Для многообразий отображение p является погружением.

Пример 11.1.1. Всякий гомеоморфизм является однолистным накрытием. В этом случае у каждой области $\mathbb{U}_x$ имеется только один лист.

Пример 11.1.2. Если $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M} \times \mathbb{X}$ – топологическое произведение топологического пространства $\mathbb{M}$ на счетное множество $\mathbb{X}$, то естественная проекция $p : \mathbb{M} \times \mathbb{X} \to \mathbb{M}$ является накрытием. Число листов равно числу элементов множества $\mathbb{X}$.

Пример 11.1.3. Пусть задана аналитическая функция $F(z)$ в некоторой области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Если в каждой точке $z \in \mathbb{D}$ функция $F(z)$ имеет N значений, то риманова поверхность функции $F(z)$ является N-листным накрытием области $\mathbb{D}$.

Пример 11.1.4. Отображение вещественной прямой в окружность,

$$p : \quad \mathbb{R} \ni \quad t \mapsto \mathsf{e}^{2\pi i t} \quad \in \mathbb{S}^1,$$

является накрытием с бесконечным числом листов. Это накрытие является универсальным.

Пример 11.1.5. Пусть окружность $\mathbb{S}^1$ задана на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ уравнением $|z| = 1$. Тогда отображение окружности в окружность,

$$p: \quad \mathbb{S}^1 \ni \quad z \mapsto z^n \quad \in \mathbb{S}^1, \qquad \forall\, n = 1, 2, 3, \dots,$$

является накрытием с n листами. Это же отображение является n-листным накрытием комплексной плоскости с выколотым началом координат $p : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пример 11.1.6. Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{H}$ – ее дискретная подгруппа. Поскольку подгруппа $\mathbb{H}$ замкнута, то по теореме 9.1.1 на фактор пространстве $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ существует дифференцируемая структура многообразия. Тогда проекция $p : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ – пространство левых или правых смежных классов, является накрытием. Число листов равно числу элементов группы $\mathbb{H}$.

Предложение 11.1.2. *Пусть* $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$ *расслоение, определенное в разделе* 2.4, *типичным слоем* $\mathbb{F}$ *которого является* 0*-мерное многообразие. Тогда проекция* $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$ *является накрытием. Наоборот, любое накрытие является расслоением* $\widetilde{\mathbb{M}}(\mathbb{M}, p, \mathcal{J})$ *с* 0*-мерным типичным слоем* $\mathcal{J}$.

Доказательство. Определение накрытия и расслоения в случае 0-мерного типичного слоя совпадают, если записать $\pi^{-1}(\mathbb{U}_x) = \chi^{-1}(\mathbb{U}_x \times \mathbb{F}) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathbb{U}_j$, где точки 0-мерного многообразия $j \in \mathcal{J} = \mathbb{F}$ нумеруют листы накрытия области $\mathbb{U}_x$. Второе условие в определении расслоения при 0-мерном слое выполняется автоматически, так как отображение $\pi \circ \chi^{-1}$ дифференцируемо, а это возможно только при проекции на первый сомножитель, $\pi \circ \chi^{-1} : \mathbb{U}_x \times \mathbb{F} \ni (y, f) \mapsto y \in \mathbb{M}$.

Замечание. Если типичным слоем расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$ является многообразие более высокой размерности, $\dim \mathbb{F} \geqslant 1$, то расслоение не является накрытием, потому что, например, $\dim \pi^{-1}(\mathbb{U}_x) = \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{F} > \dim \mathbb{M}$.

Отображение накрытия позволяет установить связь между ориентируемыми и неориентируемыми многообразиями.

Теорема 11.1.1. *Для любого неориентируемого многообразия* $\mathbb{M}$ *существует двулистное ориентируемое накрытие* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$.

Доказательство. См., например, [57], предложение 2.7.4.

Пример 11.1.7. Четномерная сфера $\mathbb{S}^n$, $n = 2, 4, \dots$, ориентируема и является двулистным универсальным накрывающим пространством для проективной плоскости $\mathbb{RP}^n$, которая неориентируема. Накрытие $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ осуществляется путем отождествления диаметрально противоположных точек сферы.

Пример 11.1.8. Лист Мебиуса можно получить из цилиндра путем отождествления центрально симметричных точек, как показано на рис. 11.1. Это накрытие двулистно, но не является универсальным. Универсальные накрывающие цилиндра и листа Мебиуса совпадают – это плоскость $\mathbb{R}^2$.

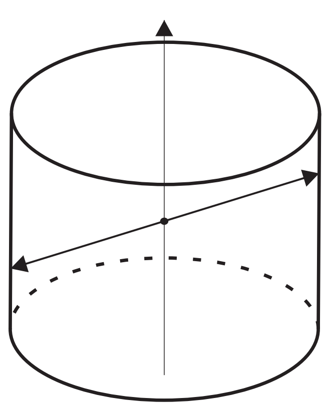

Рис. 11.1. Накрытие листа Мебиуса цилиндром. Отождествив центрально симметричные точки цилиндра, мы получим лист Мебиуса в виде полосы с отождествленными краевыми точками.

Следующее утверждение облегчает изучение накрытий за счет ограничения класса рассматриваемых баз.

Теорема 11.1.2. *Если пространство* $\mathbb{M}$ *– локально связно, то непрерывное отображение* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ *тогда и только тогда является накрытием, когда для каждой компоненты связности* $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ *сужение отображения*

$$p|_{p^{-1}(\mathbb{U})}: \quad p^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U}$$

является накрытием.

Доказательство. См., например, [56], глава 2, §1, теорема 11.

Поскольку все многообразия являются локально связными, то в дифференциальной геометрии мы можем ограничиться рассмотрением накрытий над связными базами $\mathbb{M}$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только линейно связные и, следовательно, связные базы накрытий.

Из определения накрытия следует, что прообраз $p^{-1}(\mathbb{U}_x)$ является объединением непересекающихся открытых подмножеств $\mathbb{U}_j$, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{U}_x$. Если $\mathbb{U}_x$ связно, то каждое из подмножеств $\mathbb{U}_j$ также связно. Отсюда следует

Предложение 11.1.3. *Пусть* $\mathbb{U}$ *– открытое связное подмножество пространства* $\mathbb{M}$*, просто накрытое отображением* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$*. Тогда* p *гомеоморфно отображает каждую компоненту связности множества* $p^{-1}(\mathbb{U})$ *на* $\mathbb{U}$.

Следствие. *Рассмотрим два накрытия* $p_1 : \widetilde{\mathbb{M}}_1 \to \mathbb{M}$, $p_2 : \widetilde{\mathbb{M}}_2 \to \mathbb{M}$ *с одинаковыми базами и коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbb{M}}_1 \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "p_1"'] & \widetilde{\mathbb{M}}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

где база $\mathbb{M}$ *локально связна. Если* p *сюръективно, то оно также является накрытием.*

Теорема 11.1.3. *Пусть* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ *– накрытие. Тогда*
1) p *– открытое отображение;*
2) $\mathbb{M}$ *имеет фактор топологию относительно* p.

Доказательство. См., например, [54], теорема 17.3.

Если на базе накрытия $\mathbb{M}$ задан путь $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{M}$, то возникает вопрос, что представляет собой прообраз $p^{-1}(\gamma)$ при накрытии $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$? Для ответа введем новое понятие.

Пусть задано накрытие $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ и непрерывное отображение некоторого пространства $\mathbb{N}$ в базу накрытия, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$. (Для путей в роли $\mathbb{N}$ выступает единичный отрезок $[0,1]$.)

Определение. *Поднятием* непрерывного отображения f называется непрерывное отображение $\tilde{f} : \mathbb{N} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ такое, что $p \circ \tilde{f} = f$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{\mathbb{M}} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следующий результат показывает, что, если поднятие отображения f существует, то оно, по существу, единственно.

Предложение 11.1.4. *Пусть* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ *– накрытие и* $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}} : \mathbb{N} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ *– два поднятия отображения* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$. *Если* $\mathbb{N}$ *связно и поднятия совпадают* $\tilde{f}(y) = \tilde{\tilde{f}}(y)$ *хотя бы в одной точке* $y \in \mathbb{N}$, *то поднятия совпадают во всех точках,* $\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}}$.

Доказательство. См., например, [54], лемма 17.4.

Теорема 11.1.4 (О накрывающей гомотопии для путей). *Пусть* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ *– накрытие. Тогда*

1) *для пути* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{M}$ *и точки* $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ *такой, что* $p(\tilde{x}) = \gamma(0)$ *существует единственный путь* $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \widetilde{\mathbb{M}}$, *который является поднятием,* $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, *пути* γ *и для которого* $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$;
2) *для непрерывного отображения (гомотопии двух путей в базе)* $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{M}$ *и точки* $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ *такой, что* $p(\tilde{x}) = F(0,0)$ *существует единственное непрерывное отображение (гомотопия двух путей в накрывающем пространстве)* $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \widetilde{\mathbb{M}}$, *которое является поднятием,* $p \circ \widetilde{F} = F$, *отображения* F *и для которого* $\widetilde{F}(0,0) = \tilde{x}$.

Доказательство. Теорема доказывается путем явного построения отображений. Детали можно найти, например, в [54], теорема 17.6.

Следствие (Теорема о монодромии). *Пусть* $\gamma_1 \sim \gamma_2(\,\mathsf{rel}\{0,1\})$ *– два пути в базе* $\mathbb{M}$, *гомотопные относительно начала и конца, и начальные точки их поднятий совпадают,* $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$. *Тогда конечные точки поднятий также совпадают,* $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$.

Напомним, что единица фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$ – это класс замкнутых путей с началом и концом в точке x_0, которые гомотопны тождественному пути e_{x_0}. Из теоремы о монодромии следует, что поднятия всех этих путей также замкнуты в накрывающем пространстве $\widetilde{\mathbb{M}}$. Следующая теорема говорит о том, что поднятие замкнутых путей, которые не стягиваются в точку x_0 будет незамкнутым.

Теорема 11.1.5. *Пусть* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ *– универсальное накрытие, т.е. накрывающее пространство* $\widetilde{\mathbb{M}}$ *– односвязно. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами фундаментальной группы* $\pi_1(\mathbb{M}, p(\tilde{x}))$ *и множеством прообразов* $p^{-1}(p(\tilde{x}))$, *где* $\tilde{x}$ *– произвольная точка* $\widetilde{\mathbb{M}}$.

Доказательство. Пусть $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{M}, p(\tilde{x}))$ – класс гомотопных замкнутых путей на базе и $\tilde{\gamma}$ – поднятие какого либо представителя из данного класса. Определим отображение

$$\varphi : \quad \pi_1(\mathbb{M}, p(\tilde{x})) \ni \quad [\gamma] \mapsto \varphi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \quad \in p^{-1}(p(\tilde{x})).$$

Это отображение определено корректно согласно теореме о монодромии.

Теперь определим обратное отображение $\varphi^{-1} : p^{-1}(p(\tilde{x})) \to \pi_1(\mathbb{M}, p(\tilde{x}))$. Выбираем точку $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(p(\tilde{x}))$ и некоторый путь $\tilde{\gamma}$ из $\tilde{x}$ в $\tilde{x}_1$. Поскольку $\widetilde{\mathbb{M}}$ односвязно, то любые такие пути гомотопны. Поэтому класс замкнутых путей $[p \circ \tilde{\gamma}]$ – корректно определенный элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{M}, p(\tilde{x}))$. Легко проверить, что $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = e$, так что φ и φ^{-1} – биекции.

Эта теорема дает возможность в некоторых случаях вычислить фундаментальную группу. Для этого надо найти универсальное накрытие $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ и групповую структуру на прообразе $p^{-1}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{M}$, так, чтобы биекция $\varphi : \pi_1(\mathbb{M}, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ стала гомоморфизмом групп. Вообще говоря, сделать это сложно.

11.2. Фундаментальная группа пространства орбит

В настоящем разделе мы рассмотрим группы преобразований $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ и приведем достаточные условия на группу преобразований, которые обеспечивают то, что проекция пространства $\widetilde{\mathbb{M}}$ в пространство орбит $\mathbb{M} := \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ является накрытием. Обсудим также связь группы преобразований $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ с фундаментальными группами базы $\mathbb{M} := \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ и накрывающего пространства $\widetilde{\mathbb{M}}$. Кроме того, обсудим достаточные условия существования в пространстве орбит дифференцируемой структуры.

Замечание. Многие определения и теоремы настоящего раздела справедливы не только для многообразий, но и для произвольных топологических пространств. Поэтому мы будем употреблять термин топологическое пространство, имея в виду, что соответствующее утверждение верно и для многообразий. Там, где важна специфика дифференцируемой структуры, мы будем писать многообразие.

Определение. Группа $\mathbb{G}$ действует на топологическом пространстве $\widetilde{\mathbb{M}}$ *собственно разрывно*, если выполнены следующие условия:

1) для любых двух точек $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ из $\widetilde{\mathbb{M}}$, не лежащих на одной орбите, существуют окрестности $\widetilde{\mathbb{U}}_1 \supset \tilde{x}_1$ и $\widetilde{\mathbb{U}}_2 \supset \tilde{x}_2$ такие, что $\widetilde{\mathbb{U}}_1\mathbb{G} \bigcap \widetilde{\mathbb{U}}_2 = \varnothing$,
2) группа изотропии $\mathbb{G}_{\tilde{x}}$ любой точки $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ конечна,
3) для каждой точки $\tilde{x}$ существует окрестность $\widetilde{\mathbb{U}}$, устойчивая относительно группы изотропии $\mathbb{G}_{\tilde{x}}$, т.е. $\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{G}_{\tilde{x}} = \widetilde{\mathbb{U}}$, и такая, что для всех $a \in \mathbb{G}$, не лежащих в $\mathbb{G}_{\tilde{x}}$, пересечение $\widetilde{\mathbb{U}}a \cap \widetilde{\mathbb{U}} = \varnothing$.

Ниже мы увидим, что первое условие в данном определении эквивалентно хаусдорфовости фактор пространства $\mathbb{M}$ с фактортопологией.

Предложение 11.2.1. *Если группа $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ собственно разрывно, то она конечна или счетна.*

Доказательство. В силу условия 3) орбита произвольной точки является дискретным подмножеством многообразия. Поскольку множество таких точек на многообразии счетно, то, вместе с условием 2) это влечет счетность элементов группы $\mathbb{G}$. В частности, оно может быть конечно.

Для доказательства следующей теоремы понадобится лемма, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 11.2.1. *Пусть $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ – группа преобразований топологического пространства $\widetilde{\mathbb{M}}$ и фактор пространство $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ снабжено фактор топологией. Тогда каноническая проекция $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ является открытым отображением.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathbb{U}}$ – открытое подмножество $\widetilde{\mathbb{M}}$. Тогда подмножество $p(\widetilde{\mathbb{U}})$ открыто в $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$, так как оно снабжено фактор топологией. Прообраз этого подмножества можно представить в виде объединения

$$p^{-1}(p(\widetilde{\mathbb{U}})) = \bigcup_{a\in\mathbb{G}} \widetilde{\mathbb{U}}a. \tag{11.1}$$

Поскольку отображение $\widetilde{\mathbb{U}} \to \widetilde{\mathbb{U}}a$ – гомеоморфизм для всех $a \in \mathbb{G}$, то $p^{-1}(p(\widetilde{\mathbb{U}}))$ открыто в $\widetilde{\mathbb{M}}$ как объединение открытых подмножеств.

Теорема 11.2.1. *Пусть группа $\mathbb{G}$ действует в топологическом пространстве $\widetilde{\mathbb{M}}$ собственно разрывно и свободно, а пространство орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ снабжено фактор топологией. Тогда каноническая проекция $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ является накрытием.*

Доказательство. По построению отображение p сюрьективно и непрерывно. По лемме 11.2.1 это отображение открыто. Пусть $\widetilde{\mathbb{U}}$ – окрестность точки $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$, удовлетворяющая условию 3) в определении собственно разрывной группы преобразований. Так как p – открытое отображение, то $p(\widetilde{\mathbb{U}})$ – открытая окрестность орбиты $p(\tilde{x}) = \tilde{x}\mathbb{G}$ и ее прообраз имеет вид (11.1). Поскольку действие группы свободно, то все области $\widetilde{\mathbb{U}}a$, $a \in \mathbb{G}$, открыты в $\widetilde{\mathbb{M}}$ и не пересекаются. Сужение отображения на каждую подобласть $p|_{\widetilde{\mathbb{U}}a} : \widetilde{\mathbb{U}}a \to p(\widetilde{\mathbb{U}})$ является непрерывным открытым биективным отображением и, следовательно, гомеоморфизмом.

Теперь обсудим связь между группой преобразований $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$, действующей собственно разрывно и свободно, и фундаментальной группой пространства орбит $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$, на котором определена фактор топология. Пусть $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ и $x = p(\tilde{x}) \in \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$. Заметим, что

$$p^{-1}(x) = \{\tilde{x}a \in \widetilde{\mathbb{M}} : \quad a \in \mathbb{G}\},$$

т.е. точки орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы. Если класс относительно гомотопных путей принадлежит фундаментальной группе пространства орбит, $[\gamma] \in \pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)$, то существует единственное поднятие $\tilde{\gamma}$ пути γ с началом в точке $\tilde{x} \in \widetilde{\mathbb{M}}$ (теорема 11.1.4). Конец поднятого пути $\tilde{x}(1) \in p^{-1}(x)$, и, поскольку группа преобразований действует свободно, то существует единственный элемент $a_{(\gamma)} \in \mathbb{G}$ такой, что $\tilde{x}(1) = \tilde{x}a_{(\gamma)}$. Следовательно, определено отображение

$$\varphi : \quad \pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x) \ni \quad [\gamma] \mapsto a_{(\gamma)} \quad \in \mathbb{G}. \tag{11.2}$$

Теорема 11.2.2. *Отображение* (11.2) *является гомоморфизмом групп.*

Доказательство. Сводится к проверке равенства $\varphi([\gamma_1][\gamma_2]) = \varphi([\gamma_1])\varphi([\gamma_2])$. Детали можно найти, например, в [54], теорема 19.1.

Если фундаментальная группа накрывающего пространства нетривиальна, то ядро гомоморфизма также нетривиально.

Предложение 11.2.2. *Ядро гомоморфизма* (11.2) *совпадает с индуцированной подгруппой*

$$p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x}) \subset \pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x).$$

Доказательство. См., например, [54], лемма 19.2.

В частности, $p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ – нормальная подгруппа в $\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)$, и поэтому определена фактор группа $\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)/p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$.

Теорема 11.2.3. *Группы* $\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x)/p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ *и* $\mathbb{G}$ *изоморфны.*

Доказательство. См., например, [54], теорема 19.3.

Следствие. *Если накрывающее топологическое пространство* $\widetilde{\mathbb{M}}$ *односвязно, то* $\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}, x) \simeq \mathbb{G}$.

Это следствие позволяет в ряде случаев найти фундаментальную группу многообразия.

Пример 11.2.1. Нетрудно проверить, что окружность $\mathbb{S}^1$ гомеоморфна пространству орбит $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, где группа $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}$ сдвигами на постоянное число. Действие группы $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}$ свободно и собственно разрывно. Поскольку вещественная прямая $\mathbb{R}$ односвязна, то отображение $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – универсальное накрытие. Следовательно, $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Пример 11.2.2. Тор является факторпространством, $\mathbb{T}^n \approx \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Поскольку отображение $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – универсальное накрытие, то $\pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

Следующая теорема дает достаточное условие существования дифференцируемой структуры на пространстве орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$.

Теорема 11.2.4. *Пусть группа преобразований* $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ *действует на многообразии* $\widetilde{\mathbb{M}}$ *собственно разрывно и свободно, тогда факторпространство* $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ *с фактор топологией имеет структуру дифференцируемого многообразия такую, что проекция* $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ *дифференцируема.*

Доказательство. Условие 1) в определении собственно разрывной группы преобразований эквивалентно хаусдорфовости факторпространства $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$. Действительно, окрестностью орбиты $x = \tilde{x}\mathbb{G}$ является множество орбит $\mathbb{U} = \widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{G}$, где $\widetilde{\mathbb{U}}$ – окрестность точки $\tilde{x}$, а условие 1) можно переписать в виде $\widetilde{\mathbb{U}}_1\mathbb{G} \cap \widetilde{\mathbb{U}}_2\mathbb{G} = \varnothing$, так как орбиты либо не имеют общих точек, либо совпадают. Это и есть условие хаусдорфовости пространства орбит с фактортопологией.

В условиях теоремы группа $\mathbb{G}$ действует свободно и условие 2) в определении собственно разрывной группы преобразований выполняется автоматически, так как группа изотропии любой точки состоит только из одного элемента – единицы.

Пусть $\mathbb{U} = \widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{G} \subset \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ – достаточно малая окрестность орбиты $x \in \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$. Условие 3) вместе с условием 2) значит, что каждая точка x в пространстве орбит имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что прообраз $\widetilde{\mathbb{U}} = p^{-1}(\mathbb{U})$ состоит не более, чем из счетного числа компонент, $\widetilde{\mathbb{U}} = \bigcup_i \widetilde{\mathbb{U}}_i$, и проекция p каждой связной компоненты $\widetilde{\mathbb{U}}_i$ на $\mathbb{U}$ есть гомеоморфизм, так как множество орбит можно параметризовать точками из какой либо окрестности $\mathbb{U}_i$. Зафиксируем связную компоненту $\widetilde{\mathbb{U}}_i$ в $p^{-1}(\mathbb{U})$. Тогда p – гомеоморфизм $\widetilde{\mathbb{U}}_i$ на $\mathbb{U}$ и существует обратное непрерывное отображение $p^{-1} : \mathbb{U} \to \widetilde{\mathbb{U}}_i$. Выбрав $\mathbb{U}$ достаточно малым, можно считать, что имеется допустимая карта $(\widetilde{\mathbb{U}}_i, \varphi)$, где $\varphi : \widetilde{\mathbb{U}}_i \to \mathbb{R}^n$, многообразия $\widetilde{\mathbb{M}}$. Теперь можно ввести дифференцируемую структуру в пространстве орбит, рассматривая $(\mathbb{U}, \psi)$, где $\psi = \varphi \circ p^{-1}$, как допустимую карту.

Последняя теорема является достаточным, но не необходимым условием того, что пространство орбит является многообразием.

Пример 11.2.3. Рассмотрим вращения евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на фиксированный угол $\alpha = 2\pi/n$, где n – одно из натуральных чисел $2, 3, \ldots$. При этом мы отождествляем поворот на 2π с единичным элементом группы. Эта группа $\mathbb{G}$ абелева и состоит из n элементов. Действие группы является эффективным. Начало координат является неподвижной точкой и одной из орбит группы. Ее группа изотропии совпадает с $\mathbb{G}$. На остальной части плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ группа $\mathbb{G}$ действует свободно. Нетрудно проверить, что группа $\mathbb{G}$ действует на плоскость собственно разрывно. Пространство орбит $\mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ представляет собой конус с углом дефицита $2\pi/n - 2\pi$ (знак минус означает, что угол вырезается, а не вставляется). Конус является гладким двумерным многообразием, т.е. пространство орбит допускает гладкую структуру, не смотря на то, что действие группы не является свободным. Вершина конуса – это "дефект" не многообразия, а вложения. В этом примере каноническая проекция $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ не является накрытием, так как прообраз $p^{-1}(\mathbb{U}_0)$ окрестности $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{G}$, содержащей начало координат, состоит из одного связного листа, который не гомеоморфен самой окрестности (нет взаимной однозначности). Фундаментальные группы плоскости $\mathbb{R}^2$ и конуса $\mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ тривиальны и совпадают.

Если пара $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$ – группа преобразований, причем группа $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ свободно и собственной разрывно, то одним из способов изучения фактор пространства $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ является построение фундаментальной области.

Определение. Подмножество $\mathbb{D} \subset \widetilde{\mathbb{M}}$ называется *фундаментальной областью* многообразия $\widetilde{\mathbb{M}}$ для группы преобразований $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G})$, действующей свободно и собственно разрывно, если выполнены следующие условия:

1) $\mathbb{D}$ является замкнутым подмножеством в $\widetilde{\mathbb{M}}$;
2) орбита $\mathbb{D}\mathbb{G}$ совпадает со всем многообразием $\widetilde{\mathbb{M}}$;
3) покрытие $\widetilde{\mathbb{M}}$ множествами $\mathbb{D}a$, $a \in \mathbb{G}$, таково, что с достаточно малой окрестностью произвольной точки $\widetilde{\mathbb{M}}$ пересекается лишь конечное число множеств вида $\mathbb{D}a$;
4) образ множества всех внутренних точек фундаментальной области, $(\operatorname{int}\mathbb{D})a$, при действии любого преобразования $a \in \mathbb{G}$, отличного от единичного, не пересекается с множеством внутренних точек фундаментальной области, $(\operatorname{int}\mathbb{D})a \cap \operatorname{int}\mathbb{D} = \varnothing$, $a \neq e$.

Фундаментальная область $\mathbb{D}$ всегда является многообразием с краем той же размерности, что и само $\widetilde{\mathbb{M}}$.

Пример 11.2.4. Группа трансляций $\mathbb{G}$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ на всевозможные векторы с целочисленными компонентами

$$\mathbb{R}^2 \ni \quad (x, y) \mapsto (x + m, y + n) \quad \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{Z},$$

действует гладко, свободно и собственно разрывно. Фактор пространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{G}$ представляет собой тор $\mathbb{T}^2$. В качестве фундаментальной области можно выбрать единичный квадрат

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Тор можно представить в виде квадрата на плоскости, у которого отождествлены противоположные стороны.

Из определения фундаментальной области следует, что отображение $\widetilde{\mathbb{M}} \to \operatorname{int}\mathbb{D}$ всегда представляет собой накрытие. Если фундаментальная область известна, то пространство орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}$ получается из фундаментальной области путем склеивания граничных точек.

11.3. Группа скольжений и существование накрытий

В предыдущем разделе было показано, что отображение многообразия в пространство орбит для группы преобразований, действующей свободно и собственно разрывно, является накрытием. Теперь мы рассмотрим обратный вопрос о том, в каком случае заданное накрытие можно представить, в виде отображения накрывающего пространства в пространство орбит относительно действия некоторой группы преобразований и какова эта группа.

Введем новое понятие, которое дает возможность описать произвол, существующий при построении накрывающего пространства, если база задана.

Определение. *Группой скольжений* накрытия $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ называется группа всех гомеоморфизмов $h : \widetilde{\mathbb{M}} \to \widetilde{\mathbb{M}}$, при которых $p \circ h = p$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbb{M}} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p"'] & \widetilde{\mathbb{M}} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Эта группа обозначается $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$.

Теорема 11.3.1. *Если топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ связно и локально линейно связно, то действие группы скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$ на $\widetilde{\mathbb{M}}$ свободно и собственно разрывно.*

Доказательство. См., например, [54], теорема 21.8.

В частности, действие группы скольжений на связном многообразии $\widetilde{\mathbb{M}}$ является свободным и собственно разрывным. В этом случае группа скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$ конечна или счетна. Поэтому пара $(\widetilde{\mathbb{M}}, \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M}))$ является группой преобразований.

Теорема 11.3.2. *Пусть $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ – накрытие и накрывающее топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ связно и локально линейно связно. Если индуцированная группа $p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ является нормальной подгруппой $\pi_1(\mathbb{M}, x)$, где $x = p(\tilde{x})$, то база $\mathbb{M}$ гомеоморфна пространству орбит $\widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$.*

Доказательство. См., например, [54], теорема 21.9.

Следствие. *Пусть пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ связно и локально линейно связно. Если $p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x})$ – нормальная подгруппа в $\pi_1(\mathbb{M}, x)$, то $\pi_1(\mathbb{M}, x)/p_*\pi_1(\widetilde{\mathbb{M}}, \tilde{x}) \simeq \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$.*

Доказательство. Прямое следствие теорем 11.3.2 и 11.2.3.

Следствие. *Если накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ односвязно и локально линейно связно, то*

$$\pi_1(\mathbb{M}, x) \simeq \mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M}).$$

По своей сути две предыдущие теоремы и следствия означают, что произвольное накрытие можно представить, как отображение многообразия $\widetilde{\mathbb{M}}$ в пространство орбит $\mathbb{M} = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. При этом роль группы преобразований играет группа скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$. Если накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ – многообразие, то действие группы скольжений сводится к перестановке листов накрытия.

Теперь обсудим вопрос о существовании универсального накрытия для заданной базы $\mathbb{M}$. Универсальное накрытие существует, если на топологическое пространство $\mathbb{M}$ наложен ряд условий. Чтобы не вводить новых понятий для их формулировки, мы ограничимся многообразиями, для которых эти условия выполняются.

Теорема 11.3.3. *Произвольное связное n-мерное многообразие $\mathbb{M}$ имеет универсальное накрытие $p : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$, где накрывающее пространство $\widetilde{\mathbb{M}}$ – также n-мерное многообразие (связное и односвязное). Универсальное накрывающее пространство определено с точностью до действия группы скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}}, p, \mathbb{M})$, которая действует на $\widetilde{\mathbb{M}}$ свободно и собственно разрывно.*

Доказательство. См., например, [54], глава 22.

Эта теорема очень важна, так как позволяет разделить задачу классификации многообразий на два этапа: сначала описать все односвязные многообразия, а затем найти все группы преобразований, действующие на них свободно и собственно разрывно. Данная задача решена для поверхностей. Для многообразий размерности три и выше вопрос остается открытым.

12. Главные и ассоциированные расслоения

Теория расслоений или расслоенных пространств играет важнейшую роль в современной математической физике. Достаточно отметить, что в основе общей теории относительности лежит расслоение реперов, которое является главным расслоением со структурной группой $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$. В основе калибровочных моделей элементарных частиц лежит главное расслоение с полупростой компактной структурной группой, которой обычно является некоторая подгруппа унитарной группы $\mathbb{U}(n)$. В настоящем разделе мы дадим определения и рассмотрим основные свойства главных и ассоциированных расслоений.

12.1. Главные расслоения

В дифференциальной геометрии важную роль играют главные расслоения. Фактически, они лежат в основе многих геометрических конструкций.

Определение. *Главным расслоением* называется четверка $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, где $\mathbb{P}$ и $\mathbb{M}$ – многообразия, $\mathbb{G}$ – группа Ли, $\pi:\mathbb{P}\to\mathbb{M}$ – отображение, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) определено свободное дифференцируемое действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{P}$ справа:

$$\mathbb{P}\times\mathbb{G}\ni\quad(p,a)\mapsto pa\quad\in\mathbb{P};\tag{12.1}$$

2) $\mathbb{M}$ есть факторпространство для $\mathbb{P}$ по отношению эквивалентности, индуцированному действием группы $\mathbb{G}$, и каноническая проекция $\pi:\mathbb{P}\to\mathbb{M}=\mathbb{P}/\mathbb{G}$ дифференцируема;
3) каждая точка $x\in\mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}_x$ такую, что существует диффеоморфизм

$$\chi:\quad\pi^{-1}(\mathbb{U}_x)\ni\quad p\mapsto\chi(p)=(\pi(p),\varphi(p))\quad\in\mathbb{U}_x\times\mathbb{G}\tag{12.2}$$

такой, что отображение $\varphi:\pi^{-1}(\mathbb{U}_x)\to\mathbb{G}$ удовлетворяет условию $\varphi(pa)=(\varphi(p))a$ для всех $p\in\pi^{-1}(\mathbb{U}_x)$ и $a\in\mathbb{G}$ (локальная тривиальность).

Многообразие $\mathbb{P}$ называется *пространством расслоения*, $\mathbb{M}$ – *базой расслоения*, $\mathbb{G}$ – *структурной группой* и π – *проекцией*.

Поскольку отображение (12.2) является диффеоморфизмом, то

$$\dim\mathbb{P}=\dim\mathbb{M}+\dim\mathbb{G}.$$

Иногда в качестве структурной группы мы будем рассматривать не группу Ли, а группу, состоящую из конечного или счетного набора элементов. Для удобства такие группы мы будем считать 0-мерными группами Ли. В этом случае $\dim\mathbb{P}=\dim\mathbb{M}$.

Замечание. Каждое главное расслоение является расслоением в смысле определения, данного в разделе 2.4. В дополнение к общему определению расслоения мы зафиксировали типичный слой, предположив, что им является группа Ли $\mathbb{G}$, и добавили действие этой группы на пространстве расслоения $\mathbb{P}$ так, чтобы оно было согласовано с проекцией. Дифференцируемая структура на $\mathbb{P}$ согласована с дифференцируемыми структурами на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$, поскольку отображение χ, по предположению, является диффеоморфизмом. На самом деле, можно было бы потребовать только непрерывность отображения χ, а затем с его помощью перенести дифференцируемую структуру с $\mathbb{M}$ и $\mathbb{G}$ на пространство расслоения $\mathbb{P}$.

Замечание. Пара $(\mathbb{P},\mathbb{G})$ является группой преобразований, определенной в разделе 9. Однако, не всякая группа преобразований есть главное расслоение. Напомним, что в общем случае пространство орбит $\mathbb{M}/\mathbb{G}$ группы преобразований $(\mathbb{M},\mathbb{G})$ может оказаться нехаусдорфовым топологическим пространством и на нем нельзя ввести дифференцируемую структуру.

Условие локальной тривиальности главного расслоения можно изобразить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \supset \pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{U}_x \times \mathbb{G} \arrow[d, "\mathsf{pr} = \pi \circ \chi^{-1}"] \\
& \mathbb{U}_x
\end{tikzcd}$$

где pr – естественная проекция прямого произведения $\mathbb{U}_x \times \mathbb{G} \xrightarrow{\mathsf{pr}} \mathbb{U}_x$ на первый сомножитель. Групповое действие на пространстве расслоения описывается эквивариантной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \times \mathbb{G} \arrow[r, "\chi \circ \mathsf{id}"] \arrow[d, "a_{\mathbb{P}}"'] & (\mathbb{U}_x \times \mathbb{G}) \times \mathbb{G} \arrow[d, "a_{\mathbb{U}_x \times \mathbb{G}}\,,"] \\
\pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \arrow[r, "\chi"] & \mathbb{U}_x \times \mathbb{G}
\end{tikzcd}$$

где $a_{\mathbb{P}}$ и $a_{\mathbb{U}_x \times \mathbb{G}}$ обозначают действие элемента группы $a \in \mathbb{G}$ на пространстве расслоения и прямом произведении $\mathbb{M} \times \mathbb{G}$.

Определение. Для каждой точки базы $x \in \mathbb{M}$ множество $\pi^{-1}(x)$ есть замкнутое подмногообразие в пространстве расслоения $\mathbb{P}$, которое называется *слоем* над x. *Сечением* или *глобальным сечением* главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется дифференцируемое отображение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{P}$ такое, что $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$. Дифференцируемое отображение $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{P}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – некоторая окрестность базы, называется *локальным сечением* над $\mathbb{U}$, если $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{U}}$.

Каждый слой является орбитой $p\mathbb{G}$ какой либо точки $p \in \pi^{-1}(x)$. То, что каждый слой представляет собой замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}$ является следствием предложения 9.1.3. Поскольку действие группы Ли $\mathbb{G}$ в каждом слое свободно и транзитивно, то между точками слоя и структурной группы имеется взаимно однозначное соответствие. То есть каждый слой $\pi^{-1}(x)$ диффеоморфен $\mathbb{G}$. Этот диффеоморфизм осуществляет функция φ в отображении (12.2) при фиксированном $x \in \mathbb{M}$.

При каждом фиксированном $p \in \mathbb{P}$ отображение (12.1) дифференцируемо. Поэтому каждой точке главного расслоения соответствует диффеоморфизм структурной группы на типичный слой в данной точке

$$p: \quad \mathbb{G} \ni \quad a \mapsto pa \quad \in \pi^{-1}(x), \tag{12.3}$$

где $x = \pi(p)$. В дальнейшем мы иногда будем рассматривать точку p именно в этом смысле, как отображение.

Сечение σ, если оно существует, не может быть сюрьективным отображением, так как размерность базы в общем случае меньше размерности расслоения. Для накрытий размерность базы совпадает с размерностью главного расслоения. Если накрытие многолистно, то сечение также не является сюрьективным отображением. Сечение сюрьективно в одном случае, когда структурная группа состоит из единственного элемента – единицы. Сужение проекции π на образ базы $\sigma(\mathbb{M})$ в $\mathbb{P}$ является дифференцируемым отображением, которое обратно к сечению σ. Поэтому пара $(\sigma, \mathbb{M})$ является подмногообразием в $\mathbb{P}$. Если $\mathsf{dim}\,\mathbb{G} \geqslant 1$, то это подмногообразие замкнуто в $\mathbb{P}$ (см. раздел 2.10).

Пример 12.1.1. Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{M}$ – многообразие. Определим действие группы $\mathbb{G}$ справа на прямом произведении $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$:

$$\mathbb{G} \ni b: \quad \mathbb{M} \times \mathbb{G} \ni \quad x, a \mapsto x, ab \quad \in \mathbb{M} \times \mathbb{G}.$$

Тогда четверка $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, где $\pi : \mathbb{M} \times \mathbb{G} \to \mathbb{M}$ – каноническая проекция, является главным расслоением. Это главное расслоение имеет глобальное сечение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{P}$, $\pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}}$. Например,

$$\sigma: \quad \mathbb{M} \ni \quad x \mapsto x, e \quad \in \mathbb{M} \times \mathbb{G}$$

Определение. Главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно главному расслоению вида $\mathbb{M}\times\mathbb{G}\xrightarrow{\mathsf{pr}_{\mathbb{M}}}\mathbb{M}$.

Пример 12.1.2. Расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})=\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}))$, рассмотренное в разделе 5.4, является главным расслоением со структурной группой $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$.

Пример 12.1.3. Пусть $\mathbb{G}$ – группа Ли и $\mathbb{H}\subset\mathbb{G}$ – ее замкнутая подгруппа. Согласно теореме 9.1.1 на пространстве правых смежных классов $\mathbb{H}a\in\mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $a\in\mathbb{G}$, можно задать дифференцируемую структуру. Тогда $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H},\pi,\mathbb{H})$ – главное расслоение с базой $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, структурной группой $\mathbb{H}$ и проекцией $\pi:\mathbb{G}\to\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Пример 12.1.4. Накрытия $\widetilde{\mathbb{M}}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}},p,\mathbb{M}))$, где $p:\widetilde{\mathbb{M}}\to\mathbb{M}$ – отображение накрытия, рассмотренные в разделе 11, являются главными расслоениями с 0-мерной структурной группой Ли, которой является группа скольжений $\mathbb{G}(\widetilde{\mathbb{M}},p,\mathbb{M})$.

Пример 12.1.5. Множество вещественных чисел без нуля образует абелеву группу относительно умножения, которую мы обозначим $\mathbb{R}_0:=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Пусть эта группа действует в евклидовом пространстве без начала координат $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ посредством умножения декартовых координат:

$$\mathbb{R}_0\ni a:\quad (x^1,\dots,x^n)\mapsto(ax^1,\dots,ax^n).$$

Это действие дифференцируемо, свободно и транзитивно на орбитах. Поэтому $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\xrightarrow{\pi}\mathbb{RP}^{n-1}$ – тривиальное главное расслоение со структурной группой $\mathbb{R}_0$, базой которого является вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^{n-1}=(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})/\mathbb{R}_0$.

Пример 12.1.6. Если в предыдущем примере группу $\mathbb{R}_0$ заменить на группу положительных чисел $\mathbb{R}_+$ по умножению, то получим тривиальное главное расслоение $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\xrightarrow{\pi}\mathbb{S}^{n-1}$ со структурной группой $\mathbb{R}_+$, базой которого является сфера $\mathbb{S}^{n-1}=(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})/\mathbb{R}_+$.

Пример 12.1.7. Пусть $\mathbb{C}_0:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ – группа комплексных чисел по отношению к умножению, которая действует в n-мерном комплексном пространстве без начала координат $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ умножением,

$$\mathbb{C}_0\ni a:\quad (z^1,\dots,z^n)\mapsto(az^1,\dots,az^n).$$

Тогда $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}\xrightarrow{\pi}\mathbb{CP}^{n-1}$ – тривиальное главное расслоение со структурной группой $\mathbb{C}_0$, базой которого является комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{n-1}=(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\mathbb{C}_0$.

В примере 12.1.1 мы отметили, что произвольное тривиальное расслоение имеет глобальное сечение. Справедливо и обратное утверждение.

Предложение 12.1.1. *Если главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ имеет глобальное сечение $\sigma:\mathbb{M}\to\mathbb{P}$, то оно изоморфно тривиальному, т.е. существует диффеоморфизм*

$$f_{\mathbb{P}}:\quad \mathbb{P}\ni\quad p\mapsto(\pi(p),\varphi(p))\quad\in\mathbb{M}\times\mathbb{G}\tag{12.4}$$

такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}\mathbb{P} \arrow[r, "f_{\mathbb{P}}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{M}\times\mathbb{G} \arrow[d, "\mathsf{pr}_{\mathbb{M}}"] \\ & \mathbb{M}\end{tikzcd}\tag{12.5}$$

где $\mathsf{pr}_{\mathbb{M}}$ *– проекция на первый сомножитель, и справедливо равенство*

$$f_{\mathbb{P}}(pa)=(\pi(p),\varphi(p)a)\qquad\forall\ p\in\mathbb{P},\ a\in\mathbb{G}.\tag{12.6}$$

Доказательство. Пусть

$$\sigma: \quad \mathbb{M} \ni \quad x \mapsto \sigma(x) \quad \in \mathbb{P}, \qquad \pi \circ \sigma = \mathsf{id}_{\mathbb{M}},$$

– глобальное сечение главного расслоения. Для каждой точки слоя $p \in \pi^{-1}(x)$ определим единственный элемент группы $a \in \mathbb{G}$, для которого $p = \sigma(x)a(p)$. Таким образом определено отображение $p \mapsto f_{\mathbb{P}}(p) = (\pi(p), a(p))$. Легко проверить, что это отображение удовлетворяет требуемым свойствам.

Следствие. *Нетривиальные главные расслоения имеют только локальные сечения.*

В общем случае изоморфизм расслоений будет определен позже в разделе 12.3.

Диаграмму (12.5) вместе с условием (12.6) можно изобразить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \times \mathbb{G} \arrow[r, "f_{\mathbb{P}} \circ \mathsf{id}"] \arrow[d, "a_{\mathbb{P}}"'] & (\mathbb{M} \times \mathbb{G}) \times \mathbb{G} \arrow[d, "a_{\mathbb{M}\times\mathbb{G}}"] \\
\mathbb{P} \arrow[r, "f_{\mathbb{P}}"] & \mathbb{M} \times \mathbb{G}
\end{tikzcd},$$

где $a_{\mathbb{P}}$ и $a_{\mathbb{M}\times\mathbb{G}}$ обозначает действие элемента $a \in \mathbb{G}$ соответственно на $\mathbb{P}$ и $\mathbb{M} \times \mathbb{G}$. Это означает, что отображение (12.4) является эквивариантным (см. раздел 9.4).

Теорема 12.1.1. *Если база главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ диффеоморфна евклидову пространству, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^n$, то главное расслоение изоморфно тривиальному, $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G}) \simeq \mathbb{M} \times \mathbb{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{G})$, базой которого является евклидово пространство. Согласно теореме 13.1.2 любое главное расслоение допускает связность. Предположим, что на $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n, \pi, \mathbb{G})$ задана какая либо связность. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ сферическую систему координат. Тогда каждая отличная от начала координат точка $x \in \mathbb{R}^n$ параметризуется парой (r, n), где r – расстояние от начала координат и n – единичный вектор, определяющий направление луча, выходящего из начала координат и на котором лежит точка x. Пусть $p_0 \in \pi^{-1}(0)$ – произвольная точка из слоя над началом координат. Согласно предложению 13.3.1 для каждого луча существует его единственный горизонтальный лифт в пространство расслоения $\mathbb{P}$ с началом в точке p_0. Обозначим через $p(x)$ единственную точку на горизонтальном лифте луча, которая лежит над x, т.е. $\pi(p) = x$. Таким образом, $p(x)$ – это глобальное сечение главного расслоения. Следовательно, по предложению 12.1.1 главное расслоение тривиально: $\mathbb{P} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{G}$. Если база диффеоморфна $\mathbb{R}^n$, то сферическая система координат просто переносится на $\mathbb{M}$ с помощью диффеоморфизма, и построение глобального сечения повторяется.

При рассмотрении многообразий в разделе 2.1 были введены функции склейки, с помощью которых осуществляется преобразование координат в двух пересекающихся картах. Обобщением этого понятия на случай главных расслоений являются функции перехода, которые вводятся следующим образом.

Определение. В силу условия 3) в определении главного расслоения на базе можно выбрать такое координатное покрытие, $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, что

$$\chi_i: \quad \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \ni \quad p \mapsto (\pi(p), \varphi_i(p)) \quad \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{G},$$

причем $\varphi_i(pa) = \varphi_i(p)a$.

Пусть две карты пересекаются, $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \varnothing$. Если $p \in \pi^{-1}(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j)$, то

$$\varphi_j(pa) \circ \varphi_i(pa)^{-1} = \varphi_j(p) \circ \varphi_i(p)^{-1},$$

где φ_i рассматривается как отображение фиксированного слоя $\pi^{-1}(\pi(p))$ в группу $\mathbb{G}$. Следовательно, отображение $\varphi_j(p) \circ \varphi_i(p)^{-1}$ зависит только от точки базы $x = \pi(p)$. Поэтому определено отображение

$$a_{ji}: \quad \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \ni \quad x = \pi(p) \mapsto a_{ji}(x) := \varphi_j(p) \circ \varphi_i(p)^{-1} \quad \in \mathbb{G}. \tag{12.7}$$

Эти функции на $\mathbb{M}$ со значениями в $\mathbb{G}$ называются *функциями перехода* или *функциями склейки* главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, соответствующими координатному покрытию $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$. Набор функций склейки называется *склеивающим коциклом* главного расслоения $\mathbb{P}$.

Функции перехода показывают насколько в различных картах “сдвинуты” образы слоя в структурной группе над фиксированной точкой $x \in \mathbb{M}$.

Из определения (12.7) следует, что функции склейки обладают следующим свойством

$$a_{ij}(x) = (a_{ji}(x))^{-1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j. \tag{12.8}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что для трех пересекающихся карт выполнено равенство

$$a_{ij}(x)a_{jk}(x)a_{ki}(x) = e \qquad \forall\, x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k, \tag{12.9}$$

где e – единица структурной группы. Поэтому определение функций перехода корректно.

Пример 12.1.8. Пусть $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$, – многообразие. Рассмотрим расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ (см. раздел 5.4). Пусть $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ – две пересекающиеся карты с координатами x^α и $x^{\alpha'}$, $\alpha, \alpha' = 1, \dots, n$. Репер в этих картах имеет компоненты $e^\alpha{}_a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ и $e^{\alpha'}{}_a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, $a = 1, \dots, n$, которые связаны между собой преобразованием

$$e^{\alpha'}{}_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha x^{\alpha'}.$$

Таким образом, функциями перехода для расслоения реперов являются матрицы Якоби преобразования координат. Эти матрицы, как легко проверить, удовлетворяют условиям (12.8) и (12.9).

Таким образом, для каждого главного расслоения можно однозначно построить семейство функций перехода, соответствующих заданному координатному покрытию базы, и эти функции перехода удовлетворяют равенствам (12.8), (12.9). Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 12.1.2. *Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие с координатным покрытием $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ и $\mathbb{G}$ – группа Ли. Если заданы отображения $a_{ji} : \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \to \mathbb{G}$ для всех непустых пересечений $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ такие, что выполнены условия (12.8) и (12.9) во всех областях пересечения карт, то существует единственное с точностью до изоморфизма главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с функциями перехода a_{ji}.*

Доказательство. Рассмотрим несвязное объединение $\mathbb{Q} := \sqcup_i(\mathbb{U}_i \times \mathbb{G})$. Введем на этом множестве отношение эквивалентности:

$$\begin{aligned} &(x, a) \sim (x, aa_{ij}(x)), \qquad &&\forall \quad (x, a) \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{G}, \quad (x, aa_{ij}(x)) \in \mathbb{U}_j \times \mathbb{G}, \\ &(x, a) \sim (x, a), &&\forall \quad (x, a) \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{G}. \end{aligned}$$

Из свойств (12.8), (12.9) следует, что это действительно отношение эквивалентности. Обозначим фактор пространство $\mathbb{Q}/\sim$ через $\mathbb{P}$ и введем на нем естественную дифференцируемую структуру. Пусть $p := \langle x, a\rangle$ – точка $\mathbb{P}$, т.е. класс эквивалентности пары (x, a). Определим действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{P}$ формулой

$$\mathbb{P} \times \mathbb{G} \ni \quad \langle x, a\rangle, b \mapsto \langle x, ab\rangle \quad \in \mathbb{P}.$$

Определим также проекцию

$$\pi : \quad \mathbb{P} \ni \quad \langle x, a\rangle \mapsto \pi(\langle x, a\rangle) := x \quad \in \mathbb{M}.$$

Нетрудно проверить, что все свойства главного расслоения для четверки $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ выполнены.

Теперь докажем единственность построенного главного расслоения с точностью до изоморфизма. Пусть множество функций склеек $\{a_{ji}(x)\}$ построено для некоторого главного расслоения $\mathbb{P}'(\mathbb{M}, \pi', \mathbb{G})$ с фиксированным покрытием базы $\mathbb{M} = \cup_i \mathbb{U}_i$. Построим гомеоморфизм $f_\mathbb{P} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$, где $f_\mathbb{P}$ совпадает с χ_i^{-1} на каждом $\mathbb{U}_i \times \mathbb{G}$. Для корректности этого определения нужно убедиться, что отображения χ_i^{-1} и χ_j^{-1} совпадают на общей области определения. Действительно, если $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ и $(x, a) \in \mathbb{U}_i \times \mathbb{G}$, то, по построению, пары (x, a) и (x, aa_{ji}) определяют одну и ту же точку $\langle x, a\rangle \in \mathbb{P}$. Из определения функций склейки $a_{ji}(x)$ следуют равенства:

$$\chi_i^{-1}(x, a) = \chi_j^{-1} \circ \chi_j \circ \chi_i^{-1}(x, a) = \chi_j^{-1}(x, aa_{ji}).$$

Эквивариантность отображения $f_\mathbb{P}$ и коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P} \arrow[r, "f_\mathbb{P}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & \mathbb{M} \end{tikzcd} \tag{12.10}$$

следуют из построения. Это и означает, что главные расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и $\mathbb{P}'(\mathbb{M},\pi',\mathbb{G})$ изоморфны. (Подробнее изоморфизм расслоений рассматривается в разделе 12.3. Там будет показано, что построенный изоморфизм $f_{\mathbb{P}}$ относится к классу вертикальных автоморфизмов.)

Склеивающий коцикл определяется расслоением неоднозначно. Он зависит от выбора координатного покрытия базы $\mathbb{M}=\bigcup_i \mathbb{U}_i$ и тривиализаций $\{\chi_i\}$.

Определение. Два коцикла $\{a_{ji}\}$ и $\{a'_{ji}\}$, соответствующие заданному координатному покрытию базы $\mathbb{M}=\bigcup_i \mathbb{U}_i$, называются *эквивалентными*, если существуют отображения $b_i:\mathbb{U}_i\to\mathbb{G}$ такие, что выполнены равенства

$$a'_{ji}=b_j a_{ji} b_i^{-1}, \qquad \forall\, x\in\mathbb{U}_i\cap\mathbb{U}_j.$$

Теорема 12.1.3. *Два главных расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и $\mathbb{P}'(\mathbb{M},\pi',\mathbb{G})$ изоморфны тогда и только тогда, когда их склеивающие коциклы $\{a_{ji}\}$ и $\{a'_{ji}\}$, соответствующие некоторому координатному покрытию базы $\mathbb{M}=\bigcup_i \mathbb{U}_i$, эквивалентны.*

Доказательство. См., например, [58], лекция 1, теорема 1.

Пример 12.1.9 (Расслоение Хопфа). Реализуем трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ с помощью вложения

$$|z^1|^2+|z^2|^2=1, \qquad (z^1,z^2)\in\mathbb{C}^2. \tag{12.11}$$

Каждое уравнение $az^1+bz^2=0$, где $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ и по крайней мере одно из комплексных чисел a,b отлично от нуля, задает *комплексную прямую*, комплексной размерности один, проходящую через начало координат. Обратно. Комплексная прямая определяет пару комплексных чисел $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ с точностью до отношения эквивалентности $(a,b)\sim(a',b')$, если и только если $|a'|=\lambda|a|$, $|b'|=\lambda|b|$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$, или $a'=a\,\mathsf{e}^{it}$, $b'=b\,\mathsf{e}^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Множество всех комплексных прямых, проходящих через начало координат, является одномерным комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^1$ и называется *комплексной проективной прямой*. Каждая комплексная прямая, проходящая через начало координат, пересекает трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ по большой окружности $\mathbb{S}^1$, называемой *окружностью Хопфа*, которая задается одной из двух систем уравнений:

$$\begin{aligned}
|z^1|^2&=\frac{1}{1+|k|^2}, &\qquad z^2&=kz^1, &\qquad k&:=-\frac{a}{b}, &\quad b&\ne 0,\\
|z^2|^2&=\frac{1}{1+|k|^2}, & z^1&=kz^2, & k&:=-\frac{b}{a}, & a&\ne 0.
\end{aligned}$$

Поскольку ровно одна окружность Хопфа проходит через каждую точку $\mathbb{S}^3$, эти окружности заполняют всю трехмерную сферу. При этом окружности Хопфа взаимно однозначно соответствуют комплексным прямым в $\mathbb{C}^2$, проходящим через начало координат. Две точки (z^1,z^2) и (z'^1,z'^2) лежат на одной окружности Хопфа тогда и только тогда, когда их координаты отличаются на фазовый множитель: $z'^1=z^1\,\mathsf{e}^{it}$, $z'^2=z^2\,\mathsf{e}^{it}$. Выбрав подходящим образом параметр t, всегда можно добиться, например, чтобы $\mathsf{im}\,z^2=0$. Тогда каждой прямой, проходящей через начало координат, будет соответствовать одна и только одна точка на окружности Хопфа. Множество таких точек образует двумерную сферу $\mathbb{S}^2$, которая задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$(x^1)^2+(y^1)^2+(x^2)^2=1, \qquad y^2=0, \tag{12.12}$$

где $z^1=x^1+iy^1$, $z^2=x^2+iy^2$. Таким образом, комплексная проективная прямая диффеоморфна двумерной сфере, $\mathbb{CP}^1\approx\mathbb{S}^2$. Соответствующая проекция $\mathbb{S}^3\xrightarrow{\pi}\mathbb{S}^2$ определяет главное расслоение с базой $\mathbb{S}^2$ и типичным слоем $\mathbb{G}=\mathbb{U}(1)\approx\mathbb{S}^1$, которое называется *расслоением Хопфа*. Структурная группа действует на пространстве расслоения $\mathbb{S}^3$ умножением комплексных координат на e^{it}, $t\in[0,2\pi]$.

Отображение $g_t:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$, $t\in\mathbb{R}$, задаваемое умножением комплексных координат в $\mathbb{C}^2$ на e^{it}, является изометрией для метрики, индуцированной вложением (12.11). Отсюда следует, что у трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ существуют изометрии, не имеющие выделенной оси: в каждой точке это движение выглядит точно так же, как и в любой другой. Это показывает, что трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ "более круглая", чем ее двумерный аналог $\mathbb{S}^2$. Однопараметрическая группа преобразований g_t называется *потоком Хопфа*.

Очевидно, что метрика проективной прямой $\mathbb{CP}^1 \approx \mathbb{S}^2$, индуцированная вложением (12.12), является стандартной метрикой сферы.

На расслоение Хопфа можно взглянуть с другой точки зрения. Вспомним, что трехмерная сфера может быть оснащена групповой структурой, $\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{SU}(2)$. Двумерные унитарные матрицы с единичным определителем могут быть параметризованы двумя комплексными числами

$$U = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\bar z^2 & \bar z^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{SU}(2),$$

где z^1 и z^2 лежат на сфере (12.11). Группа $\mathbb{SU}(2)$ содержит подгруппу $\mathbb{U}(1)$, которую можно реализовать в виде диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathsf{e}^{it} & 0 \\ 0 & \mathsf{e}^{-it} \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(1).$$

Эта подгруппа не является нормальной. Рассмотрим множество правых смежных классов $\mathbb{SU}(2)/\mathbb{U}(1)$. Два элемента группы $U, U' \in \mathbb{SU}(2)$ принадлежат одному смежному классу тогда и только тогда, когда $z'^1 = z^1\,\mathsf{e}^{it}$ и $z'^2 = z^2\,\mathsf{e}^{it}$. Поэтому расслоение Хопфа можно представить в эквивалентном виде $\mathbb{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathbb{M} := \mathbb{SU}(2)/\mathbb{U}(1)$.

Действия группы $\mathbb{SU}(2)$ слева и справа на сферу $\mathbb{S}^3$, которую мы отождествим с $\mathbb{SU}(2)$,

$$U \mapsto a^{-1}Ub, \qquad a, b \in \mathbb{SU}(2)$$

коммутируют и являются изометриями. Тем самым мы имеем гомоморфизм $\mathbb{SU}(2)\times\mathbb{SU}(2) \to \mathbb{SO}(4)$, где $\mathbb{SO}(4)$ является группой движений евклидова пространства $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$ и вложенной трехмерной сферы. При этом действие группы $\mathbb{SU}(2)$ слева и справа является транзитивным, а группой изотропии являются преобразования вида $\pm(1,1) \in \mathbb{SU}(2)\times\mathbb{SU}(2)$. Тем самым мы имеем сюрьективный гомоморфизм с ядром $\mathbb{Z}_2$ или изоморфизм

$$\mathbb{SO}(4) \simeq \frac{\mathbb{SU}(2)\times\mathbb{SU}(2)}{\mathbb{Z}_2}. \tag{12.13}$$

Теперь дадим координатное описание расслоения Хопфа. Покроем базу $\mathbb{S}^2 = \overline{\mathbb{C}}$, которую мы отождествим с расширенной комплексной плоскостью, двумя картами следующим образом. Введем координату “окрестности нуля” $z := z^2/z^1$ при $z_1 \ne 0$ и “окрестности бесконечности” $w := z^1/z^2$, при $z^2 \ne 0$. Тогда база $\mathbb{S}^2 = \overline{\mathbb{C}}$ покрывается двумя картами:

$$\mathbb{U}_0 := \{z : z \in \mathbb{C}\}, \quad \text{и} \quad \mathbb{U}_\infty := \{w : w \in \mathbb{C}\}.$$

Тривиализация расслоения Хопфа задается двумя отображениями:

$$\begin{aligned} \chi_0: \quad & \mathbb{S}^3 \ni \quad (z^1, z^2) \mapsto (z,\, \mathsf{e}^{i\arg z^1}) \quad \in \mathbb{C}\times\mathbb{S}^1, \\ \chi_\infty: \quad & \mathbb{S}^3 \ni \quad (z^1, z^2) \mapsto (w,\, \mathsf{e}^{i\arg z^2}) \quad \in \mathbb{C}\times\mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

В области пересечения карт $\mathbb{U}_0 \cap \mathbb{U}_\infty$ координаты связаны преобразованием $z \mapsto w = 1/z$. Следовательно, расслоение Хопфа голоморфно. В области пересечения карт задано отображение:

$$\chi_\infty \circ \chi_0^{-1}: \quad \mathbb{C}\times\mathbb{S}^1 \ni \quad (z,\, \mathsf{e}^{i\arg z^1}) \mapsto (z,\, \mathsf{e}^{i\arg z^2}) \quad \in (\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\mathbb{S}^1,$$

которое мы записали в координате z. Поскольку

$$\mathsf{e}^{i\arg z^2} = \mathsf{e}^{i\arg zz^1} = \mathsf{e}^{i\arg z^1}\,\mathsf{e}^{i\arg z},$$

то функция склейки имеет вид $a_{\infty 0} = \mathsf{e}^{i\arg z}$. Таким образом, расслоение Хопфа имеет следующее координатное описание:

$$\begin{aligned} & \mathbb{U}_0 = \mathbb{C}, \qquad \mathbb{U}_\infty = \overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}, \\ a_{\infty 0}: \quad & \mathbb{C}\setminus\{0\} \ni \quad z \mapsto \mathsf{e}^{i\arg z} \quad \in \mathbb{U}(1) \approx \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

В заключение настоящего раздела поясним соотношение между связностью (топологической) пространства главного расслоения $\mathbb{P}$ и связностями базы $\mathbb{M}$ и структурной группы $\mathbb{G}$.

Предложение 12.1.2. *Если база $\mathbb{M}$ и структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ связны, то пространство расслоения $\mathbb{P}$ также связно.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ покрытие базы открытыми множествами такое, что для каждого i существует тривиализация $\chi_i : \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \to \mathbb{U}_i \times \mathbb{G}$. Поскольку $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{G}$ связны, то $\pi^{-1}(\mathbb{U}_i)$ также связно. Поэтому $\mathbb{P}$ тоже связно, как объединение пересекающихся связных множеств.

Это предложение дает достаточное, но не необходимое условие связности пространства главного расслоения.

Пример 12.1.10. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{S}^1(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{Z}^2)$, базой которого является окружность, а структурной группой – $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$. Структурная группа не является связной, однако пространство расслоения связно. Это – двулистное накрытие окружности окружностью, рассмотренное в примере 11.1.5.

12.2. Ассоциированные расслоения

Дать определение расслоения, ассоциированного с заданным главным расслоением, в нескольких предложениях довольно затруднительно. Ассоциированные расслоения, хотя и просты по своему содержанию, требуют некоторой конструкции, которую мы сейчас опишем.

Определение. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение, и $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ – группа преобразований, т.е. задано дифференцируемое отображение

$$\mathbb{F} \times \mathbb{G} \ni \quad (v, a) \mapsto va \quad \in \mathbb{F}. \tag{12.14}$$

Сейчас мы построим расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$, которое ассоциировано с главным расслоением $\mathbb{P}$, и типичным слоем которого является многообразие $\mathbb{F}$. Во-первых, определим действие группы $\mathbb{G}$ на прямом произведении многообразий $\mathbb{P} \times \mathbb{F}$ по формуле

$$\mathbb{G} \ni a : \quad \mathbb{P} \times \mathbb{F} \ni \quad (p, v) \mapsto (pa, va) \quad \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}.$$

Факторпространство для $\mathbb{P} \times \mathbb{F}$ относительно такого действия группы обозначается $\mathbb{E} = \mathbb{P} \times_{\mathbb{G}} \mathbb{F}$. Немного позже мы введем на $\mathbb{E}$ дифференцируемую структуру, а пока $\mathbb{E}$ – всего лишь множество. Проекция π в главном расслоении $\mathbb{P}$ определяет отображение, которое мы обозначим той же буквой

$$\pi : \quad \mathbb{P} \times \mathbb{F} \ni \quad (p, v) \mapsto x = \pi(p) \quad \in \mathbb{M}.$$

Это отображение индуцирует отображение факторпространства,

$$\pi_{\mathbb{E}} : \quad \mathbb{E} \ni \quad u \mapsto x = \pi_{\mathbb{E}}(u) := \pi(p) \quad \in \mathbb{M},$$

где $u = (p\mathbb{G}, v\mathbb{G})$ – орбита точки $(p, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$, которое называется проекцией $\mathbb{E}$ на $\mathbb{M}$. Для каждой точки базы $x \in \mathbb{M}$ множество $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ называется слоем в $\mathbb{E}$ над x. Поскольку главное расслоение $\mathbb{P}$ локально тривиально, то каждая точка $x \in \mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ такую, что прообраз $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ диффеоморфен прямому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$. Отождествляя $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$, мы видим, что действие структурной группы $\mathbb{G}$ на произведении $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \times \mathbb{F}$ задается отображением

$$\mathbb{G} \ni b : \quad \mathbb{U} \times \mathbb{G} \times \mathbb{F} \ni \quad (x, a, v) \mapsto (x, ab, vb) \quad \in \mathbb{U} \times \mathbb{G} \times \mathbb{F}.$$

При этом орбита произвольной точки $(p, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$ имеет вид

$$(x, a\mathbb{G}, v\mathbb{G}) = (x, \mathbb{G}, v\mathbb{G}), \qquad \forall\ a \in \mathbb{G},\ v \in \mathbb{F}.$$

На каждой орбите можно выбрать по одному представителю, соответствующему, например, единице группы $e \in \mathbb{G}$. Тогда множество орбит прямого произведения $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$ будет параметризовано парой элементов (x, e, v), $x \in \mathbb{M}$, $v \in \mathbb{F}$. Отсюда следует, что диффеоморфизм $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times \mathbb{G}$ индуцирует изоморфизм

$\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times \mathbb{F}$ (локальная тривиальность). Поэтому на множестве $\mathbb{E}$ можно ввести дифференцируемую структуру. А именно, мы потребуем, чтобы множество $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ было открытым подмногообразием в $\mathbb{E}$, диффеоморфным прямому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{F}$ относительно изоморфизма $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times \mathbb{F}$. Таким образом построено отображение $\chi_{\mathbb{E}} : \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U} \times \mathbb{F}$, которое является диффеоморфизмом. При этом проекция $\pi_{\mathbb{E}}$ будет дифференцируемым отображением $\pi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$. Назовем объект $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ *расслоением* с базой $\mathbb{M}$, проекцией $\pi_{\mathbb{E}}$, типичным слоем $\mathbb{F}$ и структурной группой $\mathbb{G}$, *ассоциированным* с главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$.

Поскольку отображение $\chi_{\mathbb{E}}$ – диффеоморфизм, то

$$\mathsf{dim}\,\mathbb{E} = \mathsf{dim}\,\mathbb{M} + \mathsf{dim}\,\mathbb{F}.$$

Легко проверить, что расслоение, ассоциированное с главным расслоением, является расслоением в смысле определения, данного в разделе 2.4. В отличии от данного ранее определения на ассоциированном расслоении определено действие структурной группы $\mathbb{G}$ справа. Действительно, согласно построению у каждой точки базы $x \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathbb{U}$ такая, что прообраз $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ диффеоморфен прямому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{F}$. Отождествляя $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U} \times \mathbb{F}$, действие структурной группы справа задано равенством

$$\mathbb{G} \ni a: \quad \mathbb{U} \times \mathbb{F} \ni \quad (x, v) \mapsto (x, va) \quad \in \mathbb{U} \times \mathbb{F},$$

где произведение va было определено в самом начале формулой (12.14). Таким образом, пара $(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ представляет собой группу преобразований. Структурная группа действует внутри каждого слоя и не перемешивает слои между собой.

В терминах представителей действие структурной группы на $\mathbb{E}$ описывается следующим образом. Если $(p, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$ – представитель точки $u \in \mathbb{E}$, то представителем точки $ua \in \mathbb{E}$ является пара $(p, va) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$.

Замечание. В моделях математической физики наиболее распространенным примером типичного слоя $\mathbb{F}$ является векторное пространство, в котором задано представление структурной группы $\mathbb{G}$. В калибровочных моделях Янга–Миллса поля материи, которым соответствуют скалярные или спинорные поля в пространстве-времени, имеют дополнительный изотопический индекс. Этот индекс нумерует компоненты вектора в некотором векторном (изотопическом) пространстве (типичном слое $\mathbb{F}$), в котором задано представление калибровочной группы (структурной группы $\mathbb{G}$).

В дальнейшем часть аргументов у ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ мы, для краткости, будем опускать, оставляя лишь те, которые наиболее существенны в данный момент.

Предложение 12.2.1. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение и $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ – группа преобразований. Пусть $\mathbb{E}$ – расслоение, ассоциированное с $\mathbb{P}$. Для каждого $p \in \mathbb{P}$ и каждого $v \in \mathbb{F}$ обозначим через $p(v)$ образ элемента $(p, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$ при действии естественной проекции $\mathbb{P} \times \mathbb{F} \to \mathbb{E}$. Тогда каждая точка $p \in \mathbb{P}$ определяет отображение типичного слоя $\mathbb{F}$ в слой $\mathbb{F}_x = \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$,*

$$p: \quad \mathbb{F} \ni \quad v \mapsto p(v) \quad \in \mathbb{F}_x, \tag{12.15}$$

где $x = \pi(p)$, и $(pa^{-1})(v) = p(va)$ для всех $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{G}$ и $v \in \mathbb{F}$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "pa^{-1}"'] & \mathbb{F} \arrow[d, "p"] \\
& \mathbb{F}_x
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Следует прямо из определения, если учесть, что точки (pa, va) и (p, v) из произведения $\mathbb{P} \times \mathbb{F}$ проектируются в одну и ту же точку $\mathbb{E}$.

Под изоморфизмом слоя $\mathbb{F}_x := \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ на другой слой $\mathbb{F}_y := \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(y)$, где $x, y \in \mathbb{M}$, мы понимаем диффеоморфизм, который представим в виде $q \circ p^{-1}$, где

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_x \ni p: \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}_x, \\ \mathbb{F}_y \ni q: \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}_y. \end{aligned}$$

В частности, автоморфизм слоя $\mathbb{F}_x$ – это отображение вида $q \circ p^{-1}$, где $p, q \in \mathbb{F}_x$. В этом случае $q = pa$ для некоторого $a \in \mathbb{G}$, так что любой автоморфизм слоя $\mathbb{F}_x$ представим в виде $p \circ a \circ p^{-1}$, где p – произвольная фиксированная точка в том же слое $\mathbb{F}_x$. Поэтому группа автоморфизмов каждого слоя $\mathbb{F}_x$ изоморфна структурной группе $\mathbb{G}$.

Опишем несколько примеров ассоциированных расслоений.

Пример 12.2.1. Рассмотрим группу преобразований $(\mathbb{G}, \mathbb{G})$, когда $\mathbb{G}$ действует на себе справа. Тогда ассоциированное расслоение изоморфно исходному главному расслоению, $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P}) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. В общем случае они могут не совпадать, так как существует произвол в параметризации фактор пространства $\mathbb{E} = \mathbb{P} \times_{\mathbb{G}} \mathbb{F}$. Таким образом, произвольное главное расслоение ассоциировано само с собой. Если пару $(\mathbb{G}, \mathbb{G})$ рассматривать, как группу преобразований, действующую слева, то ассоциированное расслоение также будет изоморфно главному расслоению $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, но структурная группа будет действовать на $\mathbb{P}$ слева.

Пример 12.2.2 (Цилиндр, лист Мебиуса, бутылка Клейна). Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{S}^1(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{Z}_2)$, где пространство расслоения реализовано в виде единичной окружности $\mathbb{P} \approx \mathbb{S}^1$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и структурная группа которого состоит из двух элементов $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ с обычным умножением. Действие структурной группы $\mathbb{Z}_2$ на пространстве расслоения определено отражением относительно центра окружности,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad \mathbb{S}^1 \ni \quad x \mapsto \pm x \quad \in \mathbb{S}^1, \qquad x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2.$$

База расслоения $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ также является окружностью. Это ни что иное, как двулистное накрытие окружности окружностью, рассмотренное в примере 11.1.5. Построенное главное расслоение $\mathbb{S}^1(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{Z}_2)$ нетривиально, так как не диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$.

Построим для этого главного расслоения три ассоциированных расслоения (см. рис.12.1).

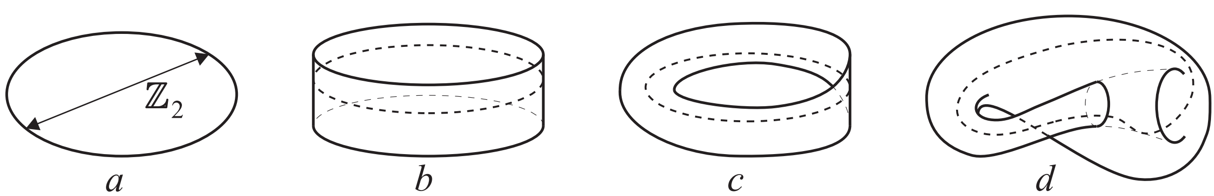

Рис. 12.1. Примеры ассоциированных расслоений. (a) Главное расслоение. (b) Цилиндр. (c) Лист Мёбиуса. (d) Бутылка Клейна.

1) Пусть группа $\mathbb{Z}_2$ действует на отрезок $\mathbb{F} = [-1, 1]$ тривиально,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad [-1, 1] \ni \quad v \mapsto v \quad \in [-1, 1].$$

Тогда ассоциированное расслоение представляет собой *цилиндр*, который является прямым произведением $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{F}$.

2) Пусть группа $\mathbb{Z}_2$ действует на отрезок $\mathbb{F} = [-1, 1]$ нетривиально,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad [-1, 1] \ni \quad v \mapsto \pm v \quad \in [-1, 1].$$

Тогда ассоциированное расслоение представляет собой *лист Мёбиуса*. Лист Мёбиуса является нетривиальным расслоением, так как не имеет вида прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{F}$.

3) Пусть группа $\mathbb{Z}_2$ действует на окружность $\mathbb{F} = \mathbb{S}^1$, отображая точки окружности относительно диаметра,

$$\mathbb{Z}_2 \ni \pm 1: \quad \mathbb{S}^1 \ni \quad \mathsf{e}^{iv} \mapsto \mathsf{e}^{\pm iv} \quad \in \mathbb{S}^1,$$

где окружность $\mathbb{S}^1$ вложена в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Тогда ассоциированное расслоение представляет собой *бутылку Клейна*.

В первых двух примерах типичным слоем является многообразие с краем. Все три ассоциированных расслоения имеют глобальные сечения, несмотря но то, что во втором и третьем случаях ассоциированные расслоения не имеют вида прямого произведения. На рисунках они показаны пунктирными линиями.

Приведенные примеры показывают, что многие хорошо известные примеры многообразий можно рассматривать, как ассоциированные расслоения. Приведем еще два примера, которые играют важную роль в дифференциальной геометрии.

Пример 12.2.3 (Касательное расслоение). Рассмотрим расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, $\dim \mathbb{M} = n$, определенное в разделе 5.4. Оно состоит из упорядоченных наборов (реперов) $p = \{x, e_a\}$, $a = 1, \dots, n$, где $x \in \mathbb{M}$ и $\{e_a\}$ – упорядоченный набор линейно независимых векторов касательного пространства, т.е. базис в $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. При этом проекция определена отображением $\pi(p) := x \in \mathbb{M}$. Общая линейная группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ действует в $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ справа так. Если $a = \{S_a{}^b\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ и $p = \{x, e_a\}$ – репер, то преобразованный репер $pa = \{x, e'_a\}$ есть, по определению, репер, состоящий из векторов $e'_a := S_a{}^b e_b$. Мы записываем правое действие структурной группы как матричное умножение слева из-за принятого нами соглашения суммирования "с десяти до четырех". Отметим, что порядок записи является условным, $S_a{}^b e_b = e_b S_a{}^b$, так как суммирование проводится по одному нижнему и одному верхнему индексу. Группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ действует на расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ свободно и сохраняет слои, так как $\pi(p) = \pi(q)$, $p, q \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ тогда и только тогда, когда $p = qa$ для некоторого $a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Построим теперь ассоциированное расслоение. Пусть $(\mathbb{R}^n, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}))$ – группа преобразований. Группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, по определению, действует в $\mathbb{R}^n$ следующим образом. Пусть b_a, $a = 1, \dots, n$, – некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Если $a = \{S_a{}^b\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ – матрица преобразования, то $b_a a := S_a{}^b b_b \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{R}^n, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbb{L})$ можно отождествить с касательным расслоением $\mathbb{T}(\mathbb{M})$, определенным в разделе 2.6.2. Действительно, базы расслоений совпадают, а слои изоморфны как векторные пространства одинаковой размерности. Покажем, что слои ассоциированного расслоения $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbb{M}$ можно рассматривать, как касательные пространства $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Пусть $p = \{x, e_a\}$ – репер в точке $x \in \mathbb{M}$. Он же является точкой в главном расслоении $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$. Согласно предложению 12.2.1, каждому реперу ставится в соответствие невырожденное линейное отображение. Выберем такой репер, что

$$p: \quad \mathbb{R}^n \ni \quad b_a \mapsto e_a \quad \in \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x).$$

С другой стороны, по определению, набор векторов $\{e_a\}$ образует базис касательного пространства $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Поэтому $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x) = \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$.

В компонентах это отождествление выглядит следующим образом. Произвольный касательный вектор $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ в точке $x \in \mathbb{M}$ можно разложить по координатному базису и реперу: $X = X^\alpha \partial_\alpha = X^a e_a$, где $e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha$. Компоненты вектора X связаны линейным преобразованием $X^a = X^\alpha e_\alpha{}^a$, где $e_\alpha{}^a$ – компоненты обратного репера. Структурная группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ действует на латинские индексы, не меняя касательного вектора, $X = X^a e_a = X'^a e'_a$, где $X'^a = X^b S_b^{-1\,a}$ и $e'_a = S_a{}^b e_b$. При преобразовании координат преобразуются греческие индексы с помощью взаимно обратных матриц Якоби, $X = X^\alpha \partial_\alpha = X^{\alpha'} \partial_{\alpha'}$, где $X^{\alpha'} = X^\alpha \partial_\alpha x^{\alpha'}$ и $\partial_{\alpha'} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \partial_\alpha$. В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ матрицы Якоби также принадлежат общей линейной группе $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Пример 12.2.4 (Тензорные расслоения). Пусть $\mathbb{T}^r_s$ – пространство тензоров типа (r, s) над векторным пространством $\mathbb{R}^n$. Общая группа линейных преобразований $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ действует в $\mathbb{T}^r_s$ обычным образом:

$$e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_r} \otimes e^{b_1} \otimes \cdots \otimes e^{b_s} \quad \mapsto \quad S_{a_1}{}^{c_1} e_{c_1} \otimes \cdots \otimes S_{a_r}{}^{c_r} e_{c_r} \otimes e^{d_1} S^{-1}_{d_1}{}^{b_1} \otimes \cdots \otimes e^{d_s} S^{-1}_{d_s}{}^{b_s},$$

где e_a – базис в $\mathbb{R}^n$, e^a – базис в сопряженное пространстве $\mathbb{R}^{n*}$ и $\{S_a{}^b\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. $a, b, ... = 1, \dots, n$. Расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{T}^r_s, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}), \mathbb{L})$, ассоциированное с расслоением реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, так же как и касательное расслоение, отождествляется с тензорным расслоением $\mathbb{T}^r_s(\mathbb{M})$ типа (r, s), определенным в разделе 2.7.

В разделе 5.1 было дано определение векторного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{GL}(\mathrm{N}, \mathbb{R}), \mathbb{P})$, $\dim \mathbb{V} = \mathrm{N}$, ассоциированного с главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{GL}(\mathrm{N}, \mathbb{R}))$. При этом размерность векторного пространства N не обязана совпадать с размерностью базы $n = \dim \mathbb{M}$. Дадим координатное описание векторных расслоений. Рассмотрим координатное покрытие базы $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$. Каждая область предполагается диффеоморфной шару, и, следовательно, над каждой областью $\mathbb{U}_i$ расслоение является тривиальным, т.е. существуют диффеоморфизмы (тривиализации)

$$\chi_i: \quad \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U}_i) \to \mathbb{U}_i \times \mathbb{V}.$$

Отсюда следует, что определено отображение

$$f_{ji} := \chi_j \circ \chi_i^{-1}: \quad \mathbb{V} \to \mathbb{V},$$

которое называется *функциями склейки*. Если базис векторного пространства $\mathbb{V}$, $\operatorname{dim}\mathbb{V} = \mathrm{n}$, фиксирован, то функции склейки принимают значения в группе невырожденных матриц:

$$f_{ji}: \quad \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \to \mathbb{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R}). \tag{12.16}$$

Теорема 12.2.1. *Пусть задано векторное расслоение* $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R}), \mathbb{P})$, *координатное покрытие базы* $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ *и соответствующие тривиализации* χ_i. *Тогда однозначно определен набор функций склеек* (12.16), *обладающих свойствами*:

$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j, \tag{12.17}$$

$$f_{ij} f_{jk} f_{ki} = \mathsf{id}\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k. \tag{12.18}$$

Обратно. По любому координатному покрытию $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ *и по любому набору отображений* (12.16) *со свойствами* (12.17), (12.18) *Можно построить векторное расслоение* $\mathbb{E}'(\mathbb{M}, \pi'_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R}), \mathbb{P})$. *Если набор функций склеек был построен по векторному расслоению* $\mathbb{E}$, *то расслоения* $\mathbb{E}'$ *и* $\mathbb{E}$ *изоморфны.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 12.1.2 для главных расслоений.

Следствие. *Главное расслоение* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G}(\mathrm{n}, \mathbb{R}))$ *и ассоциированные с ним векторные расслоения* $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{G}(\mathrm{n}, \mathbb{R}), \mathbb{P})$ *определяют эквивалентные склеивающие коциклы.*

Доказательство. См., например, [58], лекция 2, следствие 1.

Следующая конструкция показывает, что коциклы можно использовать для построения новых ассоциированных расслоений.

Предложение 12.2.2. *Пусть дано векторное расслоение* $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V})$, *ассоциированное с главным расслоением* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R}))$, *где* $\mathrm{n} = \operatorname{dim}\mathbb{V}$, *с коциклом* $\{f_{ji}\}$, *соответствующим некоторому координатному покрытию базы* $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$. *Тогда существует* детерминантное расслоение $|\mathbb{E}|(\mathbb{M}, \pi_{|\mathbb{E}|}, \mathbb{R})$ *с одномерным слоем* $\mathbb{R}$, *определенное коциклом* $\{\operatorname{det} f_{ji}\}$, *которое ассоциировано с тем же главным расслоением* $\mathbb{P}$.

Доказательство. Проверка свойств (12.17), (12.18). Кроме того, отображение $f_{ji} \mapsto \operatorname{det} f_{ji}$ определяет одномерное представление группы $\mathbb{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$.

Пример 12.2.5. Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}) = \mathbb{T}(\mathbb{M})$ – касательное расслоение к многообразию $\mathbb{M}$. Тогда скалярные плотности степени 1, введенные в разделе 2.5, являются сечениями детерминантного расслоения.

Вернемся к общему случаю. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение, и $\mathbb{H}$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{G}$. Пара $(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G})$, где $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ – пространство правых смежных классов, является группой преобразований. Поэтому определено ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ со стандартным слоем $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. С другой стороны, группа $\mathbb{H}$, будучи подгруппой в структурной группе $\mathbb{G}$, действует на $\mathbb{P}$ справа. Поэтому определено фактор пространство $\mathbb{P}/\mathbb{H}$. Между построенными ассоциированным расслоением и фактор пространством существует связь.

Предложение 12.2.3. *Расслоение* $\mathbb{E} = \mathbb{P} \times_{\mathbb{G}} (\mathbb{G}/\mathbb{H})$, *ассоциированное с* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, *со стандартным слоем* $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ *можно отождествить с* $\mathbb{P}/\mathbb{H}$ *так. Пусть* $(p, \mathbb{H}a) \in \mathbb{P} \times (\mathbb{G}/\mathbb{H})$, *где* $a \in \mathbb{G}$, *– представитель элемента ассоциированного расслоения* $\mathbb{E}$. *Отождествим его с элементом* $pa \in \mathbb{P}$, *который является представителем некоторого элемента из фактор пространства* $\mathbb{P}/\mathbb{H}$.

Доказательство. Каждый представитель однозначно определяет элемент соответствующего пространства. Поэтому отождествление представителей приводит к отождествлению точек ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ и фактор пространства $\mathbb{P}/\mathbb{H}$. Легко проверить, что это отождествление не зависит от выбора представителей.

Следствие. *Четверка* $\mathbb{P}(\mathbb{E}, \nu, \mathbb{H})$, *где* $\nu : \mathbb{P} \to \mathbb{P}/\mathbb{H}$ – *естественная проекция, является главным расслоением, базой которого является ассоциированное расслоение* $\mathbb{E}$, *а структурной группой* $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$.

Доказательство. Из предложения 12.2.3 следует, что фактор пространство $\mathbb{P}/\mathbb{H}$ является многообразием и поэтому может являться базой некоторого расслоения. Действие группы $\mathbb{H}$ на $\mathbb{P}$ не двигает точки базы $\mathbb{E}$ по построению. Локальная тривиальность $\mathbb{P}(\mathbb{E}, \nu, \mathbb{H})$ следует из локальной тривиальности расслоений $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ и $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{H})$. Действительно, пусть $\mathbb{U}$ – окрестность в $\mathbb{M}$ такая, что $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times (\mathbb{G}/\mathbb{H})$ и $\mathbb{V}$ – окрестность в $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, для которой $\pi_{\mathbb{G}}^{-1}(\mathbb{V}) \approx \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, где $\pi_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ – естественная проекция. Пусть $\mathbb{W}$ – открытое подмножество в $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{E}$, которое соответствует прямому произведению $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ при отождествлении $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \approx \mathbb{U} \times (\mathbb{G}/\mathbb{H})$. Тогда $\nu^{-1}(\mathbb{W}) \approx \mathbb{W} \times \mathbb{H}$.

Выпишем связь размерностей многообразий, которые участвовали в приведенной выше конструкции:

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G}) &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{G}, \\
\dim \mathbb{G} &= \dim \mathbb{G}/\mathbb{H} + \dim \mathbb{H}, \\
\dim \mathbb{E} &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{G}/\mathbb{H}, \\
\dim \mathbb{P}(\mathbb{E}, \nu, \mathbb{H}) &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{G}/\mathbb{H} + \dim \mathbb{H} = \dim \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G}).
\end{aligned}$$

Теперь обсудим возможность продолжения сечения ассоциированного расслоения, которое задано на некотором подмножестве базы $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$. Для формулировки теоремы нам понадобится

Определение. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$ подмножества $\mathbb{N}$ многообразия $\mathbb{M}$ в многообразие $\mathbb{E}$ называется *дифференцируемым на* $\mathbb{N}$, если для каждой точки $x \in \mathbb{N}$ существует дифференцируемое отображение $f_x : \mathbb{U}_x \to \mathbb{E}$, где $\mathbb{U}_x \subset \mathbb{M}$ – некоторая окрестность точки $x \in \mathbb{M}$, такое, что $f_x = f$ на пересечении $\mathbb{U}_x \cap \mathbb{N}$. Если задано ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ и некоторое подмножество базы $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$, то *сечением на* $\mathbb{N}$ называется дифференцируемое отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$ такое, что $\pi_{\mathbb{E}} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{M}}$.

Замечание. В данном определении подмножество $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$ может быть произвольным и в общем случае не является подмногообразием в $\mathbb{M}$.

Пример 12.2.6. Пусть $f : \mathbb{U} \to \mathbb{E}$ – дифференцируемое отображение некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ в $\mathbb{E}$. Тогда сужение $f|_{\mathbb{N}}$ на любое подмножество $\mathbb{N} \subset \mathbb{U}$ является дифференцируемым на $\mathbb{N}$.

Теорема 12.2.2. *Пусть* $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ – *ассоциированное расслоение такое, что типичный слой диффеоморфен евклидову пространству,* $\mathbb{F} \approx \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *Пусть* $\mathbb{N}$ – *замкнутое подмножество (возможно, пустое) в базе* $\mathbb{M}$. *Тогда любое сечение* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{E}$, *определенное на* $\mathbb{N}$, *может быть продолжено до глобального сечения, определенного на всем* $\mathbb{M}$. *В частности, если подмножество* $\mathbb{N}$ *пусто, то на ассоциированном расслоении* $\mathbb{E}$ *с типичным слоем* $\mathbb{F} \approx \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *существует глобальное сечение* $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$.

Доказательство. Явно строится сечение, при этом используется паракомпактность многообразия. Детали можно найти, например, в [3], глава 1, теорема 5.7.

Следствие. *На любом многообразии* $\mathbb{M}$ *существует векторное поле, например, тождественно равное нулю. Более того, если векторное поле задано на произвольном замкнутом подмножестве* $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$, *то его всегда можно продолжить до векторного поля на всем многообразии* $\mathbb{M}$. *Замкнутость подмножества* $\mathbb{N}$ *существенна. Пример* 2.6.5 *показывает, что, если векторное поле задано на открытом подмножестве, то продолжение может не существовать.*

Замечание. Данная теорема показывает, что ассоциированные расслоения существенно отличаются от главных. Согласно предложению 12.1.1 главное расслоение $\mathbb{P}$ допускает глобальное сечение тогда и только тогда, когда оно тривиально. Если ассоциированное расслоение имеет вид прямого произведения, $\mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{F}$, то оно, очевидно, также допускает глобальные сечения. Последняя теорема утверждает, что ассоциированное расслоение $\mathbb{E}$ имеет глобальные сечения даже если оно не имеет вида прямого произведения $\mathbb{M} \times \mathbb{F}$. Однако, взамен мы требуем, чтобы типичный слой был диффеоморфен евклидову пространству, $\mathbb{F} \approx \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, некоторой размерности N.

Пример 12.2.7. Заменим единичный отрезок $[-1,1]$ для листа Мёбиуса из примера 12.2.2 на вещественную прямую $\mathbb{R}$. Тогда мы попадаем в условия теоремы 12.2.2, и, следовательно лист Мёбиуса имеет глобальное сечение.

Определение. Ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ называется *тривиальным*, если соответствующее главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ тривиально.

Из данного определения следует, что тривиальное ассоциированное расслоение всегда имеет вид прямого произведения, $\mathbb{E} \approx \mathbb{M}\times\mathbb{F}$, т.е. оно тривиально как расслоение. Обратное утверждение неверно.

Пример 12.2.8. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – нетривиальное главное расслоение и $\mathbb{F}$ – произвольное многообразие, на котором структурная группа $\mathbb{G}$ действует тривиально. Тогда ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{F},\mathbb{G},\mathbb{P})$ тривиально как расслоение, т.е. $\mathbb{E}\approx\mathbb{M}\times\mathbb{F}$, однако оно не является тривиальным ассоциированным расслоением.

В общем случае справедливо

Предложение 12.2.4. *Векторное расслоение* $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi_{\mathbb{E}},\mathbb{V},\mathbb{GL}(\mathsf{n},\mathbb{R}),\mathbb{P})$, $\dim\mathbb{V}=\mathsf{n}$, *имеет вид прямого произведения* $\mathbb{E}\simeq\mathbb{M}\times\mathbb{V}$ *тогда и только тогда, когда оно имеет* n *сечений (того же класса гладкости), линейно независимых над каждой точкой базы.*

Доказательство. См., например, [58], лекция 2, предложение 1.

12.3. Отображение расслоений

Рассмотрим два главных расслоения $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1,\pi_1,\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2,\pi_2,\mathbb{G}_2)$. Оба расслоения являются группами преобразований $(\mathbb{P}_1,\mathbb{G}_1)$ и $(\mathbb{P}_2,\mathbb{G}_2)$. Поэтому при определении гомоморфизма расслоений используется понятие эквивариантного отображения, введенного в разделе 9.4.

Определение. *Гомоморфизмом* расслоений $f:\ \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1,\pi_1,\mathbb{G}_1)\to\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2,\pi_2,\mathbb{G}_2)$ называется эквивариантное отображение $f=f_{\mathbb{P}}\times f_{\mathbb{G}}$ (пара отображений),

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{P}}:&\quad \mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2,\\ f_{\mathbb{G}}:&\quad \mathbb{G}_1\to\mathbb{G}_2, \end{aligned}$$

где $f_{\mathbb{P}}$ – дифференцируемое отображение пространств расслоений и $f_{\mathbb{G}}$ – гомоморфизм структурных групп, таких, что $f_{\mathbb{P}}(pa)=f_{\mathbb{P}}(p)f_{\mathbb{G}}(a)$ для всех $p\in\mathbb{P}_1$ и $a\in\mathbb{G}_1$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_1\times\mathbb{G}_1 \arrow[r, "f_{\mathbb{P}}\times f_{\mathbb{G}}"] \arrow[d, "a"'] & \mathbb{P}_2\times\mathbb{G}_2 \arrow[d, "f_{\mathbb{G}}(a)"] \\ \mathbb{P}_1 \arrow[r, "f_{\mathbb{P}}"] & \mathbb{P}_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Расслоения $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1,\pi_1,\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2,\pi_2,\mathbb{G}_2)$ *изоморфны*, если $f_{\mathbb{P}}$ – диффеоморфизм пространств расслоений и $f_{\mathbb{G}}$ – изоморфизм структурных групп. Если $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=\mathbb{P}$, то изоморфизм расслоений называется *автоморфизмом* расслоения $\mathbb{P}$.

Из приведенной диаграммы следует, что отображение $f_{\mathbb{P}}:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$ отображает каждый слой $p\mathbb{G}_1\subset\mathbb{P}_1$ расслоения $\mathbb{P}_1$ в слой $f_{\mathbb{P}}(p)\mathbb{G}_2$ из $\mathbb{P}_2$ и поэтому индуцирует дифференцируемое отображение баз

$$f_{\mathbb{M}}:\quad \mathbb{M}_1\ni\quad \pi_1(p)\mapsto\pi_2\big(f_{\mathbb{P}}(p)\big)\quad\in\mathbb{M}_2.$$

Легко проверить, что это отображение не зависит от выбора точки в слое $p\in\pi_1^{-1}(x)$.

Если $f:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$ – изоморфизм расслоений, то индуцированное отображение баз $f_{\mathbb{M}}$ является диффеоморфизмом и существует обратный изоморфизм $f^{-1}:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_1$.

Пример 12.3.1 (Вертикальный автоморфизм). Пусть $a(x)$ – произвольная дифференцируемая функция на базе $\mathbb{M}$ со значениями в структурной группе $\mathbb{G}$. Умножим каждую точку главного расслоения $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ на $a(\pi(p))$, что соответствует повороту каждого слоя. В результате получим главное расслоение $\mathbb{P}'(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, которое изоморфно исходному. Этот автоморфизм задается функциями:

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{P}}: \quad & \mathbb{P} \ni \quad p \mapsto pa(\pi(p)) \quad \in \mathbb{P}' \\ f_{\mathbb{G}} = \mathrm{id}_{\mathbb{G}}: \quad & \mathbb{G} \ni \quad b \mapsto b \quad \in \mathbb{G}. \end{aligned}$$

При этом отображение баз является тождественным преобразованием, $f_{\mathbb{M}} = \mathrm{id}$. Этот автоморфизм называется *вертикальным*.

Определение. Гомоморфизм расслоений называется *вложением* или *инъекцией*, если индуцированное отображение баз $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ есть вложение многообразий и $f_{\mathbb{G}} : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ – мономорфизм (инъективный гомоморфизм). Отождествляя пространство первого расслоения $\mathbb{P}_1$ с его образом $f_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}_1)$, $\mathbb{G}_1$ с $f_{\mathbb{G}}(\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{M}_1$ с $f_{\mathbb{M}}(\mathbb{M}_1)$, мы говорим, что $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1)$ есть *подрасслоение* для $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$. Если, кроме того, $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2 = \mathbb{M}$ и индуцированное отображение баз $f_{\mathbb{M}} = \mathrm{id}_{\mathbb{M}}$ есть тождественное отображение, то гомоморфизм расслоений $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{G}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ называется *редукцией* структурной группы $\mathbb{G}_2$ главного расслоения $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ к подгруппе $\mathbb{G}_1$. Само расслоение $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{G}_1)$ называется *редуцированным расслоением*. Если задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и подгруппа Ли $\mathbb{H}$ в $\mathbb{G}$, то мы говорим, что *структурная группа* $\mathbb{G}$ *редуцируема к* $\mathbb{H}$, если существует редуцированное главное расслоение $\mathbb{P}'(\mathbb{M}, \pi', \mathbb{H})$.

Замечание. Поскольку при вложении главных расслоений $f_{\mathbb{M}}$ – вложение и $f_{\mathbb{G}}$ – мономорфизм, то

$$\dim \mathbb{M}_1 \leqslant \dim \mathbb{M}_2, \quad \text{и} \quad \dim \mathbb{G}_1 \leqslant \dim \mathbb{G}_2.$$

Кроме того, мы не требуем, чтобы подгруппа $\mathbb{H}$ была замкнутой в $\mathbb{G}$. Эта общность необходима в теории связностей.

Теорема 12.3.1. *Структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ редуцируема к подгруппе Ли $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда существует координатное покрытие базы $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ такое, что все функции перехода a_{ji} принимают значение в $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Доказательство проводится путем построения редуцированного расслоения. См., например, [3], глава I, предложение 5.3.

Приведем еще один критерий редуцируемости расслоений.

Теорема 12.3.2. *Структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ редуцируема к подгруппе $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P}) = \mathbb{P}/\mathbb{H}$ (см. предложение 12.2.3) допускает глобальное сечение $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$. Между редуцированными главными расслоениями $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ и сечениями σ существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. См., например, [3], глава I, предложение 5.6.

Следствие. *Структурная группа $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ редуцируема к единичному элементу $e \in \mathbb{G}$ тогда и только тогда, когда оно имеет глобальное сечение и, следовательно, тривиально, $\mathbb{P} \simeq \mathbb{M} \times \mathbb{G}$.*

Замечание. Если структурная группа состоит только из единичного элемента, то пространство редуцированного главного расслоения $\mathbb{P}'(\mathbb{M}, \pi, e)$ естественным образом отождествляется с базой, $\mathbb{P}' = \mathbb{M}$. Поэтому существование отображения $f_{\mathbb{P}} : \mathbb{P}' = \mathbb{M} \to \mathbb{P}$ для редуцированного расслоения эквивалентно существованию глобального сечения для $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$.

Теорема о существовании глобальных сечений на ассоциированном расслоении позволяет по новому доказать и взглянуть на существование римановой метрики на произвольном многообразии. Для формулировки результата нам понадобится дополнительное утверждение.

Из разложения Ивасавы [59] следует, что любая связная группа Ли диффеоморфна прямому произведению, $\mathbb{G} \approx \mathbb{H} \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{H}$ – максимальная компактная подгруппа в $\mathbb{G}$ и $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности $n = \dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{H}$ [45] (глава VI, теорема 2.2).

Предложение 12.3.1. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение со связной структурной группой Ли $\mathbb{G}$. Тогда структурная группа редуцируема к максимальной компактной подгруппе $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P}) = \mathbb{P}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – максимальная компактная подгруппа в $\mathbb{G}$. Поскольку типичный слой $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ диффеоморфен евклидову пространству (разложение Ивасавы), то, согласно теореме 12.2.2, ассоциированное расслоение допускает глобальное сечение. Поэтому из теоремы 12.3.2 вытекает, что структурная группа главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ редуцируема к максимальной компактной подгруппе $\mathbb{H}$.

Пример 12.3.2 (Существование римановой метрики). Пусть $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ – расслоение линейных реперов над многообразием $\mathbb{M}$, $\operatorname{dim}\mathbb{M} = n$. Известно, что максимальной компактной подгруппой в группе общих линейных преобразований $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ является группа вращений $\mathbb{O}(n)$ размерности $\frac{1}{2}n(n-1)$. В силу разложения Ивасавы однородное пространство $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbb{O}(n)$ диффеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^d$ размерности

$$d = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Из теоремы 12.2.2 следует, что ассоциированное расслоение $\mathbb{E} = \mathbb{L}(\mathbb{M})/\mathbb{O}(n)$ со слоем $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})/\mathbb{O}(n)$ имеет глобальное сечение. Поэтому структурная группа $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ может быть редуцирована к группе вращений $\mathbb{O}(n)$ как следствие теоремы 12.3.2.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в декартовых координатах задано скалярное произведение

$$(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \widetilde{X}^a \widetilde{Y}^b \delta_{ab}, \qquad \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^n, \tag{12.19}$$

где δ_{ab} – евклидова метрика. Это скалярное произведение инвариантно относительно вращений евклидова пространства $\mathbb{O}(n)$.

Покажем, что каждая редукция структурной группы $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ порождает риманову метрику g на $\mathbb{M}$. Пусть $\mathbb{O}(\mathbb{M}) := \mathbb{O}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{O}(n))$ – редуцированное подрасслоение для расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$. Типичный слой редуцированного расслоения состоит из реперов вида $p = \{x, S_a{}^b e_b\}$, где e_b – некоторый фиксированный базис касательного пространства и $S_a{}^b \in \mathbb{O}(n)$ – произвольная матрица вращений. Если мы рассматриваем репер $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ как линейный изоморфизм из $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, где $x = \pi(p)$, то каждый репер из редуцированного расслоения $p \in \mathbb{O}(\mathbb{M})$ определяет скалярное произведение в касательном пространстве $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ по формуле

$$g(X, Y) = (p^{-1}X, p^{-1}Y), \qquad X, Y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}). \tag{12.20}$$

Инвариантность скалярного произведения (12.19) относительно вращений $\mathbb{O}(n)$ влечет за собой независимость $g(X, Y)$ от выбора репера $p \in \mathbb{Q}$. Таким образом, мы доказали, что каждое многообразие допускает риманову метрику.

В компонентах определение (12.20) имеет хорошо знакомый вид

$$g(X, Y) = X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta} = \widetilde{X}^a \widetilde{Y}^b \delta_{ab}, \qquad g_{\alpha\beta} := e_\alpha{}^a e_\beta{}^b \delta_{ab},$$

где $\widetilde{X}^a = X^\alpha e_\alpha{}^a$ и $\widetilde{Y}^a = Y^\alpha e_\alpha{}^a$. В таком виде скалярное произведение уже встречалось в разделе 6.9 (без знаков тильды).

Верно также обратное утверждение. Пусть на $\mathbb{M}$ задана риманова метрика g. Пусть $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ – подмножество в расслоении реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$, состоящее из реперов $p = \{x, e_a\}$, которые ортонормальны относительно g, т.е.

$$(e_a, e_b) = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b g_{\alpha\beta} = \delta_{ab}.$$

Если репер $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ рассматривается как изоморфизм из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, то p принадлежит редуцированному подрасслоению $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ тогда и только тогда, когда $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = g(p\widetilde{X}, p\widetilde{Y})$ для всех $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{R}^n$. Легко проверить, что $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ образует редуцированное подрасслоение в $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ над базой $\mathbb{M}$ со структурной группой $\mathbb{O}(n)$. Расслоение $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ называется *расслоением ортонормальных реперов* над $\mathbb{M}$. Каждый элемент из $\mathbb{O}(\mathbb{M})$ есть *ортонормальный репер*.

Чтобы подчеркнуть принадлежность вектора евклидову пространству, в настоящем примере был использован знак тильды. Поскольку репер устанавливает изоморфизм $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, то эти пространства мы отождествим и опустим знак тильды, считая, что X^α и X^a – это компоненты одного касательного вектора $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ относительно координатного базиса и репера. Чтобы их не путать, мы используем буквы греческого и латинского алфавитов.

В рассмотренном примере мы не только доказали существование римановой метрики на произвольном многообразии, но и следующее утверждение.

Теорема 12.3.3. *Существует взаимно однозначное соответствие между римановыми метриками на многообразии $\mathbb{M}$ и редукциями структурной группы $\mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$ расслоения реперов $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ к группе вращений $\mathbb{O}(n)$*

В начале настоящего раздела мы установили, что гомоморфизм расслоений индуцирует дифференцируемое отображение баз расслоений. Теперь мы рассмотрим обратную задачу: в какой степени отображение некоторого многообразия в базу заданного расслоения может быть сопоставлено некоторому гомоморфизму расслоений ? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 12.3.4. *Пусть дано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и дифференцируемое отображение многообразий $f_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{M}$. Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма главное расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ с гомоморфизмом $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{P}$, индуцирующим отображение баз $f_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{M}$ и соответствующим тождественному автоморфизму структурной группы $\mathbb{G}$.*

Доказательство. В прямом произведении $\mathbb{N}\times\mathbb{P}$ рассмотрим подмножество $\mathbb{Q}$, состоящее из точек $(y,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{P}$ таких, что $f_{\mathbb{N}}(y)=\pi(p)$. Определим действие структурной группы $\mathbb{G}$ справа на построенном множестве $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{G}\ni a:\quad \mathbb{Q}\ni\quad (y,p)\mapsto(y,p)a:=(y,pa)\quad\in\mathbb{Q}.$$

Это отображение не зависит от точки слоя $\pi^{-1}(\pi(p))$. Нетрудно проверить, что $\mathbb{G}$ действует свободно на $\mathbb{Q}$ и что множество $\mathbb{Q}$ представляет собой главное расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ с базой $\mathbb{N}$, структурной группой $\mathbb{G}$ и проекцией $\pi_{\mathbb{Q}}:(y,p)\mapsto y$.

Единственность. Пусть $\mathbb{Q}'(\mathbb{N},\pi'_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ – другое главное расслоение с базой $\mathbb{N}$ и структурной группой $\mathbb{G}$ и $f':\mathbb{Q}'\to\mathbb{P}$ – гомоморфизм, индуцирующий заданное отображение баз $f_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{M}$ и соответствующий тождественному автоморфизму структурной группы $\mathbb{G}$. Определим отображение $\mathbb{Q}'$ на $\mathbb{Q}$

$$\tilde f:\quad \mathbb{Q}'\ni\quad p'\mapsto(\pi'_{\mathbb{Q}}(p'),f'(p'))\quad\in\mathbb{Q}.$$

Тогда отображение $\tilde f:\mathbb{Q}'\to\mathbb{Q}$ – изоморфизм расслоений, индуцирующий тождественное преобразование базы $\mathbb{N}$ и соответствующий тождественному автоморфизму структурной группы $\mathbb{G}$.

Определение. Расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ в утверждении теоремы 12.3.4 называется *расслоением, индуцированным отображением баз* $f_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{M}$ *из главного расслоения* $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, или просто *индуцированным расслоением*. Оно обозначается $f_{\mathbb{N}}^{-1}\mathbb{P}$.

Замечание. Если отображение $f_{\mathbb{N}}$ является вложением, то главное расслоение $\mathbb{Q}(\mathbb{N},\pi_{\mathbb{Q}},\mathbb{G})$ есть подрасслоение для $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$.

Пример 12.3.3. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и некоторую окрестность базы $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$ тогда $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}=\pi^{-1}(\mathbb{U})$ есть подрасслоение в $\mathbb{P}$. Оно же является индуцированным расслоением $f_{\mathbb{U}}^{-1}\mathbb{P}$, где $f:\mathbb{U}\to\mathbb{P}$ – вложение.

13. Связности на главных и ассоциированных расслоениях

Теория связностей на расслоениях играет исключительно важную роль в моделях математической физики, так как позволяет определить ковариантную производную. В свою очередь ковариантная производная используется для записи ковариантных уравнений. В настоящем разделе мы определим связность на главном и ассоциированных расслоениях. Покажем, что калибровочные поля Янга–Миллса представляют собой компоненты локальной формы связности. Кроме того, будет рассмотрена группа голономии, которая является одной из важнейших характеристик связности.

13.1. Связность на главном расслоении

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ с базой $\mathbb{M}$, $\dim\mathbb{M}=n$, и структурной группой Ли $\mathbb{G}$, $\dim\mathbb{G}=\textsc{n}$. Пара $(\mathbb{P},\mathbb{G})$ представляет собой группу преобразований. При этом группа Ли $\mathbb{G}$ действует на многообразии $\mathbb{P}$ свободно. Каждый слой $\pi^{-1}(x)$, где $x\in\mathbb{M}$, диффеоморфен структурной группе и ее действие на нем транзитивно. Из предложения 9.2.1 следует, что действие структурной группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{P}$ индуцирует гомоморфизм μ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли векторных полей $\mathcal{X}(\mathbb{P})$. Этот гомоморфизм является мономорфизмом, так как действие группы свободно и, следовательно, эффективно.

Определение. Векторное поле $X^*:=\mu(X)\in\mathcal{X}(\mathbb{P})$, где $X\in\mathfrak{g}$ – произвольный элемент алгебры Ли структурной группы Ли $\mathbb{G}$, называется *фундаментальным векторным полем, соответствующим* $X\in\mathfrak{g}$.

Поскольку действие структурной группы на $\mathbb{P}$ отображает каждый слой в себя, то каждое фундаментальное векторное поле X^*_p касается слоя $\pi^{-1}(\pi(p))$ в каждой точке $p\in\mathbb{P}$. Поскольку действие группы свободно, то по предложению 9.2.1 фундаментальные векторные поля нигде не обращаются в нуль. Так как размерность каждого слоя равна размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то отображение

$$\mathfrak{g}\ni\quad X\mapsto X^*_p\quad\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$$

есть линейный мономорфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в касательное пространство в точке $p\in\mathbb{P}$ к слою, проходящему через p.

Определение. Образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ называется *вертикальным подпространством* в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и обозначается $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$.

Пусть $\{L_\textsc{a}\}$, $\textsc{a}=1,\dots,\textsc{n}=\dim\mathbb{G}$, – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями $[L_\textsc{a},L_\textsc{b}]=f_{\textsc{ab}}{}^\textsc{c}L_\textsc{c}$, где $f_{\textsc{ab}}{}^\textsc{c}$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$. Тогда индуцированные фундаментальные векторные поля $L^*_\textsc{a}$ удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, $[L^*_\textsc{a},L^*_\textsc{b}]=f_{\textsc{ab}}{}^\textsc{c}L^*_\textsc{c}$. Множество фундаментальных векторных полей $\{L^*_\textsc{a}\}$ задает дифференцируемое инволютивное распределение вертикальных подпространств $p\mapsto\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$ (см. раздел 2.11). Согласно теореме Фробениуса 2.11.1 через каждую точку $p\in\mathbb{P}$ проходит интегральное подмногообразие этого распределения. Это интегральное подмногообразие есть ни что иное, как слой $\pi^{-1}(\pi(p))$.

Предложение 13.1.1. *Пусть X^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу алгебры Ли $X=X^\textsc{a}_0L_\textsc{a}\in\mathfrak{g}$, $X^\textsc{a}_0=\mathsf{const}$ для всех* $\textsc{a}$. *Тогда для каждого элемента группы $a\in\mathbb{G}$ векторное поле $r_{a*}X^*$, где r_{a*} – дифференциал отображения, индуцированного действием элемента a справа, является фундаментальным векторным полем, которое соответствует левоинвариантному векторному полю $\mathsf{ad}\,(a^{-1})X=X^\textsc{b}_0S^{-1}{}_\textsc{b}{}^\textsc{a}(a)L_\textsc{a}\in\mathfrak{g}$, где ad обозначает присоединенное представление $\mathbb{G}$ в $\mathfrak{g}$ и $S_\textsc{b}{}^\textsc{a}(a)$ – матрица присоединенного представления.*

Доказательство. Фундаментальное векторное поле X^* индуцируется однопараметрической группой преобразований $r_{b(t)}$, где $b(t)=\exp(tX)$. Векторное поле $r_{a*}X^*$ индуцируется однопараметрической группой преобразований $r_a\circ r_{b(t)}\circ r_{a^{-1}}=r_{a^{-1}b(t)a}$ по предложению 9.2.2. Утверждение предложения следует из того, что преобразования вида $a^{-1}b(t)a$ представляют собой однопараметрическую группу преобразований, порожденную элементом алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(a^{-1})X\in\mathfrak{g}$.

Пример 13.1.1 (Локальное рассмотрение). Чтобы прояснить абстрактное построение, которое было проведено выше, повторим его в компонентах. В настоящей главе мы будем возвращаться к этому примеру неоднократно. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ – окрестность базы, для которой определено отображение (12.2), с координатами x^α, $\alpha = 1, \dots, n$. Используя диффеоморфизм $\chi : \pi^{-1}(\mathbb{U}) \to \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$, мы отождествим подрасслоение $\mathbb{Q} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$ с прямым произведением $\mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$. Мы отметили структурную группу в прямом произведении знаком тильды, потому что в дальнейшем нам будет необходимо различать точку главного расслоения и точку структурной группы. То есть $p = (x, a)$, где $x \in \mathbb{U}$, $a \in \widetilde{\mathbb{G}}$, для всех $p \in \mathbb{Q}$. Действие структурной группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{Q}$ имеет вид

$$\mathbb{G} \ni a : \quad \mathbb{Q} \ni \quad p = (x, b) \mapsto pa = (x, ba) \quad \in \mathbb{Q}.$$

Фактически, данный пример относится к произвольному тривиальному главному расслоению, база которого покрывается одной картой, $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^n$.

Любой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (левоинвариантное векторное поле X на группе Ли $\mathbb{G}$) имеет постоянные компоненты X_0^{A} относительно левоинвариантного базиса, $X = X_0^{\text{A}} L_{\text{A}}$, где L_{A} – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. раздел 8.2). Базису алгебры Ли L_{A} соответствуют фундаментальные векторные поля L^*_{A} на главном расслоении, которые образуют базис вертикальных подпространств. Выберем базис касательных пространств $\mathbb{T}_p(\mathbb{Q})$ в виде $\{\partial_\alpha, L^*_{\text{A}}\}$. Тогда фундаментальное векторное поле, соответствующее произвольному элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$, будет иметь только вертикальные компоненты, $X^* = X_0^{\text{A}} L^*_{\text{A}}$. Утверждение предложения 13.1.1 сводится к равенству

$$r_{a*} X^* = X_0^{\text{A}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) L^*_{\text{B}}, \tag{13.1}$$

где $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) = S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a)$ – матрица присоединенного представления для обратного элемента $a^{-1} \in \mathbb{G}$. Особенно просто это равенство проверяется вблизи единицы группы, где определена функция композиции. Пусть $X^*(e)$ – значение фундаментального векторного поля в единице группы. Тогда

$$r_{a*}(X^*(e)) = X_0^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) \partial_{\text{B}}|_a = X_0^{\text{A}} R_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a) L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{C}}(a) L^*_{\text{C}}(a) = X_0^{\text{A}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a^{-1}) L^*_{\text{B}}(a),$$

где матрицы $R_{\text{A}}{}^{\text{B}}$, $L_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ и $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}$ были определены в разделах 8.2–8.4.

Произвольное векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{Q})$ имеет вид

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}^\alpha \partial_\alpha + \widetilde{X}^{\text{A}} L^*_{\text{A}}.$$

После правого действия группы r_a, оно преобразуется в новое векторное поле

$$r_{a*} \widetilde{X} = \widetilde{X}^\alpha \partial_\alpha + \widetilde{X}^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L^*_{\text{A}}, \tag{13.2}$$

так как дифференциал отображения r_{a*} действует только на вертикальные компоненты по правилу (13.1).

Продолжим общее построение.

Определение. *Связностью* Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется распределение

$$\Gamma : \quad \mathbb{P} \ni \quad p \mapsto \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) \quad \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{P}),$$

которое каждой точке $p \in \mathbb{P}$ ставит в соответствие подпространство $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ такое, что

1) в каждой точке p касательное пространство $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathbb{T}_p(\mathbb{P}) = \mathbb{V}_p(\mathbb{P}) \oplus \mathbb{H}_p(\mathbb{P});$$

2) подпространства $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ инвариантны относительно правого действия структурной группы:

$$r_{a*} \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) = \mathbb{H}_{pa}(\mathbb{P}); \tag{13.3}$$

3) $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ зависит дифференцируемо от p.

Множество касательных векторов $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в точке $p \in \mathbb{P}$ называется *горизонтальным подпространством* в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$. Вектор $\widetilde{X} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ называется *вертикальным* или *горизонтальным*, если он лежит соответственно в $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ или $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$.

Из условия 1) следует, что каждый вектор $\widetilde{X} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ может быть единственным образом представлен в виде суммы

$$\widetilde{X} = \mathsf{v}\widetilde{X} + \mathsf{h}\widetilde{X}, \qquad \mathsf{v}\widetilde{X} \in \mathbb{V}_p(\mathbb{P}),\ \mathsf{h}\widetilde{X} \in \mathbb{H}_p(\mathbb{P}),$$

где v и h – проекторы на соответствующие подпространства. Векторы $\mathsf{v}\widetilde{X}$ и $\mathsf{h}\widetilde{X}$ называются соответственно *вертикальной* и *горизонтальной* компонентами касательного вектора $\widetilde{X}$. Ясно, что

$$\dim \mathbb{V}_p(\mathbb{P}) = \dim \mathbb{G}, \quad \dim \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) = \dim \mathbb{M}, \qquad \forall\, p \in \mathbb{M}.$$

Если главное расслоение тривиально, то у него существует глобальное сечение. В этом случае условие 2) означает, что связность достаточно задать на каком либо сечении, а затем разнести по всему пространству расслоения $\mathbb{P}$ с помощью группового действия. В дальнейшем мы сформулируем теорему 13.1.1, определяющую связность на главном расслоении общего вида через семейство локальных форм связности, которые заданы на координатном покрытии базы.

По определению, условие 3) значит, что, если $\widetilde{X}$ – дифференцируемое векторное поле на $\mathbb{P}$, то таковы же вертикальная и горизонтальная компоненты $\mathsf{v}\widetilde{X}$ и $\mathsf{h}\widetilde{X}$.

Пример 13.1.2. Накрытие $\widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ (см. раздел 11) является главным расслоением с 0-мерной структурной группой. В этом случае вертикальные подпространства отсутствуют, а горизонтальное подпространство в точке $p \in \widetilde{\mathbb{M}}$ совпадает с касательным пространством $\mathbb{T}_p(\widetilde{\mathbb{M}})$. Это означает, что связность для накрытий единственна и распределение горизонтальных подпространств совпадает с касательным расслоением $\mathbb{T}(\widetilde{\mathbb{M}})$.

Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана связность Γ. Для того, чтобы конструктивно описать распределение горизонтальных подпространств построим на главном расслоении $\mathbb{P}$ 1-форму связности ω со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\omega = \omega^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}}$, где $\omega^{\mathrm{A}} \in \Lambda_1(\mathbb{P})$ для всех A. Как было отмечено в начале настоящего раздела, каждому элементу алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ соответствует единственное фундаментальное векторное поле X^*. При этом отображение $X \mapsto X^*_p$ представляет собой линейный мономорфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ для всех точек главного расслоения $p \in \mathbb{P}$.

Определение. Для каждого касательного вектора $\widetilde{X}_p \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ определим значение 1-формы $\omega(\widetilde{X}_p)$ на векторе $\widetilde{X}_p$, как единственный элемент алгебры Ли $X \in \mathfrak{g}$ такой, что фундаментальное векторное поле X^*_p в точке $p \in \mathbb{P}$ совпадает с вертикальной компонентой вектора, $X^*_p = \mathsf{v}\widetilde{X}_p$. 1-форма ω на $\mathbb{P}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется *формой связности* для заданной связности Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$.

По построению, $\omega(\widetilde{X}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторное поле $\widetilde{X}$ горизонтально. В силу следующего предложения 1-форма ω взаимно однозначно определяет распределение горизонтальных подпространств и, следовательно, связность Γ на $\mathbb{P}$.

Предложение 13.1.2. *Форма связности ω на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ имеет следующие свойства*:
1) $\omega(X^*) = X$ *для всех* $X \in \mathfrak{g}$;
2) $r^*_a\omega = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega$, *т.е.*

$$(r^*_a\omega)(\widetilde{X}) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega(\widetilde{X}) = \omega(\widetilde{X})^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(a) L_{\mathrm{A}}$$

для всех $a \in \mathbb{G}$ и каждого векторного поля $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$.
Обратно. Если на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана 1-форма ω со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям 1) и 2), то на $\mathbb{P}$ существует единственная связность Γ такая, что ее форма связности есть ω.

Доказательство. Пусть ω – форма связности на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. Условие 1) следует немедленно из определения ω. Поскольку каждое векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$ разлагается на вертикальную и горизонтальную составляющую, то достаточно проверить условие 2) для этих двух компонент. Если $\widetilde{X}$ горизонтально, то $r_{a*}\widetilde{X}$ также горизонтально для всех $a \in \mathbb{G}$, что следует из условия 2) в определении связности. Поэтому $(r^*_a\omega)_p(\widetilde{X}) = \omega_{pa}(r_{a*}\widetilde{X})$ и $\mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega_p(\widetilde{X})$ одновременно обращаются в нуль. Если $\widetilde{X}$ вертикально, то его значение в точке $p \in \mathbb{P}$ определяется некоторым фундаментальным векторным полем, $\widetilde{X}_p = X^*_p$, для некоторого $X \in \mathfrak{g}$. Тогда из предложения 13.1.1 следует, что векторное поле $r_{a*}X^*$ соответствует элементу алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(a^{-1})X \in \mathfrak{g}$. Поэтому

$$(r^*_a\omega)_p(X^*) = \omega_{pa}(r_{a*}X^*) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})X = \mathsf{ad}\,(a^{-1})(\omega_p(X^*)).$$

Обратно. Пусть задана 1-форма ω, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Определим распределение горизонтальных подпространств

$$\mathbb{H}_p(\mathbb{P}) := \{\widetilde{X} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P}) : \quad \omega(\widetilde{X}) = 0\} \qquad \forall\, p \in \mathbb{P}.$$

Теперь нетрудно проверить, что распределение $\Gamma : p \mapsto \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ является связностью, для которой ω – форма связности.

Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задано две связности Γ_1 и Γ_2 с формами связности ω_1 и ω_2 соответственно. Нетрудно проверить, что 1-форма $(1-t)\omega_1 + t\omega_2$, где $t \in [0,1]$, также задает некоторую связность на $\mathbb{P}$. Таким образом, любые две связности, заданные на одном главном расслоении, гомотопны.

Пример 13.1.3 (Локальное рассмотрение). Продолжим локальное построение, начатое в примере 13.1.1. У нас есть левоинвариантный базис $\{\partial_\alpha, L^*_{\text{A}}\}$ касательных пространств $\mathbb{T}_p(\mathbb{Q})$ к главному подрасслоению $\mathbb{Q}(\mathbb{U}, \pi, \mathbb{G}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. Обозначим дуальный к нему базис 1-форм на $\mathbb{Q}$ через $\{dx^\alpha, \omega^{*\text{A}}\}$. Теперь построим форму связности ω на $\mathbb{Q}$. Произвольную 1-форму на $\mathbb{Q}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно разложить по этому базису,

$$\omega(x,a) = (dx^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} + \omega^{*\text{B}} \omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}) L_{\text{A}},$$

где $\omega_\alpha{}^{\text{A}}(x,a)$ и $\omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}(x,a)$ – некоторые компоненты, зависящие от точки $(x,a) \in \mathbb{Q}$. Свойство 1) предложения 13.1.2 взаимно однозначно определяет компоненту $\omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}$:

$$\omega(X^*) = X \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\text{B}}{}^{\text{A}}(x,a) = \delta^{\text{A}}_{\text{B}}.$$

Нетрудно проверить, что 1-форма $\omega^{*\text{A}} L_{\text{A}}$ удовлетворяет свойству 2) предложения 13.1.2. Действительно,

$$r_a^*(\omega^{*\text{A}} L_{\text{A}})(\widetilde{X}) = (\omega^{*\text{A}} L_{\text{A}})(r_{a*}\widetilde{X}) = \widetilde{X}^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L_{\text{A}},$$

где мы учли действие дифференциала отображения на векторное поле (13.2). Отсюда следует, что форма $\omega^{*\text{A}} L_{\text{A}}$ действительно удовлетворяет условию 2):

$$r_a^*(\omega^{*\text{A}} L_{\text{A}}) = \omega^{*\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L_{\text{A}}.$$

Проведя аналогичные вычисления, получаем, что 1-форма со значениями в алгебре Ли $dx^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} L_{\text{A}}$ удовлетворяет свойству 2) предложения 13.1.2 тогда и только тогда, когда ее компоненты имеют вид

$$\omega_\alpha{}^{\text{A}}(x,b) = \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x) S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b), \tag{13.4}$$

где $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x)$ – произвольные функции от $x \in \mathbb{U}$. Таким образом, форма связности на $\mathbb{Q}(\mathbb{U}, \pi, \mathbb{G}) = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ имеет вид

$$\omega(x,a) = [dx^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}}(x,a) + \omega^{*\text{A}}(a)] L_{\text{A}}, \tag{13.5}$$

где компоненты $\omega_\alpha{}^{\text{A}}$ определены равенством (13.4). Мы видим, что форма связности ω на главном расслоении $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ параметризуется $n \times \text{N}$ произвольными функциями $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x)$ на координатной окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Функции $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x)$ определяют компоненты формы связности на *нулевом локальном сечении*

$$\sigma_0 : \quad \mathbb{U} \ni \quad x \mapsto (x, e) \quad \in \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}. \tag{13.6}$$

Вектор $\widetilde{X}_p = \widetilde{X}_p^\alpha \partial_\alpha + \widetilde{X}_p^{\text{A}} L^*_{\text{A}} \in \mathbb{T}_x(\mathbb{Q})$ горизонтален тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\omega(\widetilde{X}_p) = (\widetilde{X}_p^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} + \widetilde{X}_p^{\text{A}}) L_{\text{A}} = 0,$$

где $\omega_\alpha{}^{\text{A}}$ имеет вид (13.4). Поэтому его вертикальная и горизонтальная составляющие равны

$$\begin{aligned} \mathsf{v}\widetilde{X}_p &= \left(\widetilde{X}_p^{\text{A}} + \widetilde{X}_p^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}}\right) L^*_{\text{A}}, \\ \mathsf{h}\widetilde{X}_p &= \widetilde{X}_p^\alpha \partial_\alpha - \widetilde{X}_p^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} L^*_{\text{A}}. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Перемешивание компонент $\widetilde{X}_p^\alpha$ и $\widetilde{X}_p^{\text{A}}$ связано с тем, что векторные поля ∂_α в общем случае не являются горизонтальными. Они горизонтальны тогда и только тогда, когда $\omega_\alpha{}^{\text{A}} = 0 \Leftrightarrow \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}} = 0$.

Замечание. Из вида формы связности (13.5) следует, что она совпадает с канонической 1-формой θ на группе Ли (8.26), если база расслоения состоит из одной точки. В этом смысле форма связности ω на главном расслоении $\mathbb{P}$ является обобщением канонической 1-формы θ на группе Ли $\mathbb{G}$.

Проекции $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{M}$ соответствует дифференциал отображения $\pi_* : \mathbb{T}_p(\mathbb{P}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, который линейно отображает касательное пространство к главному расслоению в каждой точке $p \in \mathbb{P}$ в касательное пространство к базе в точке $x = \pi(p) \in \mathbb{M}$. Ядром дифференциала проекции π_* является вертикальное подпространство $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$. Действительно, любой вертикальный вектор касается некоторой кривой, целиком лежащей в слое. При проекции вся кривая отображается в одну точку x. Поэтому каждый вертикальный вектор отображается в нулевой вектор из $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$. Поскольку дифференциал проекции – это сюрьективный гомоморфизм, то отсюда следует, что отображение горизонтального подпространства $\pi_* : \mathbb{H}_p(\mathbb{P}) \to \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ является изоморфизмом.

Определение. *Горизонтальным лифтом* или *подъемом* (или просто *лифтом*) векторного поля X на базе $\mathbb{M}$ называется единственное векторное поле $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$, которое горизонтально, $\widetilde{X}_p \in \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$, и проектируется на X, т.е. $\pi_*(\widetilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Предложение 13.1.3. *Если на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана связность Γ и на базе $\mathbb{M}$ задано векторное поле X, то существует единственный горизонтальный лифт $\widetilde{X}$ векторного поля X. Лифт $\widetilde{X}$ инвариантен относительно действия структурной группы, $r_{a*}\widetilde{X}_p = \widetilde{X}_{pa}$, для всех $a \in \mathbb{G}$. Обратно. Каждое горизонтальное векторное поле $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$, инвариантное относительно действия структурной группы, является горизонтальным лифтом некоторого векторного поля X на базе $\mathbb{M}$.*

Доказательство. См., например, [3], глава II, предложение 1.2.

Предложение 13.1.4. *Пусть $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – горизонтальные лифты соответственно векторных полей X и Y, заданных на базе $\mathbb{M}$. Тогда*:
1) *$\widetilde{X} + \widetilde{Y}$ – горизонтальный лифт векторного поля $X + Y$;*
2) *для каждой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ произведение $\tilde{f}\widetilde{X}$ есть горизонтальный лифт для $fX \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, где функция $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P})$ постоянна на слоях и определена равенством $\tilde{f} = f \circ \pi$;*
3) *горизонтальная компонента коммутатора $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ есть горизонтальный лифт коммутатора $[X, Y]$.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидны. Доказательство третьего просто:

$$\pi_*(\mathsf{h}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = \pi_*([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = [X, Y].$$

Пусть x^α, $\alpha = 1, \dots, \dim \mathbb{M}$ – система координат на некоторой окрестности базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Пусть D_α – горизонтальный лифт векторного поля ∂_α в $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ для всех α. Тогда векторные поля $\{D_\alpha\}$ образуют локальный базис распределения $\Gamma : p \mapsto \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в окрестности $\pi^{-1}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{P}$.

Пример 13.1.4 (Локальное рассмотрение). Продолжим локальное построение, начатое в примере 13.1.1. Пусть $X(x) = X_x^\alpha \partial_\alpha$ – произвольное векторное поле на базе $\mathbb{M}$. Его горизонтальный лифт в $\mathbb{Q}$ имеет вид

$$\widetilde{X}_p = X_x^\alpha \partial_\alpha - X_x^\alpha \omega_\alpha{}^{\text{A}} L^*_{\text{A}}, \qquad x = \pi(p),$$

для всех $p \in \mathbb{Q}$. Вблизи единицы группы второе слагаемое имеет вид

$$X_x^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}} S^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}} L^*_{\text{B}} = X_x^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}} R^*_{\text{A}},$$

где R^*_{A} правоинвариантные векторные поля на группе Ли $\widetilde{\mathbb{G}}$ и мы воспользовались выражением матрицы присоединенного представления через производные от функции композиции (8.36). Отсюда сразу следует, что горизонтальное векторное поле $\widetilde{X}$ инвариантно относительно действия структурной группы справа. Утверждения предложения 13.1.2 становятся тривиальными.

В частности, горизонтальный лифт координатного базиса ∂_α на $\mathbb{M}$ имеет вид

$$D_\alpha = \partial_\alpha - \omega_\alpha{}^{\text{A}}(p) L^*_{\text{A}} = \partial_\alpha - \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x) S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a) L^*_{\text{A}} \tag{13.8}$$

для всех точек $p = (x, a) \in \mathbb{P}$.

Теперь спустимся на базу и определим форму связности на $\mathbb{P}$ через семейство 1-форм на $\mathbb{M}$. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение с формой связности ω. Пусть $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$ – некоторая координатная окрестность базы, на которой задано локальное сечение $\sigma:\mathbb{U}\to\mathbb{P}$. Тогда форма связности ω определяет на $\mathbb{U}$ 1-форму с помощью отображения дифференциальных форм σ^*.

Определение. 1-форма $\omega_\sigma:=\sigma^*\omega$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы, $\omega_\sigma=\omega_\sigma^{\text{A}}L_{\text{A}}$, где $\omega_\sigma^{\text{A}}\in\Lambda_1(\mathbb{U})$, называется *локальной формой связности* на $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$. В компонентах она имеет вид

$$\omega_\sigma=dx^\alpha A_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}},\tag{13.9}$$

где $A_\alpha{}^{\text{A}}(x)$ – некоторые функции на $\mathbb{U}$.

Напомним, что, по определению, $\omega_\sigma(X)=\omega(\sigma_*X)$ для всех векторных полей на базе $X\in\mathcal{X}(\mathbb{M})$, где σ_* – дифференциал локального сечения.

Каждая форма связности ω на $\mathbb{P}$ однозначно определяет локальную форму связности ω_σ на $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$. Обратное, конечно, неверно, так как локальная форма связности ω_σ определена только на окрестности $\mathbb{U}$ и, вдобавок, зависит от сечения σ.

Пример 13.1.5 (Локальное рассмотрение). Рассмотрим зависимость локальной формы связности от сечения. Пусть на главном расслоении $\mathbb{Q}=\mathbb{U}\times\widetilde{\mathbb{G}}$ задано два произвольных сечения σ и σ'. Поскольку две точки одного слоя связаны некоторым групповым преобразованием, то σ' можно выразить через первое сечение, $\sigma'(x)=\sigma(x)a(x)$, где $a(x):\mathbb{U}\to\mathbb{G}$ – некоторая функция. Таким образом,

$$\sigma: x\mapsto (x,b(x))\qquad\text{и}\qquad \sigma': x\mapsto(x,b(x)a(x)).\tag{13.10}$$

Рассмотрим случай, когда все элементы структурной группы Ли $\mathbb{G}$ находятся в окрестности единицы группы, соответствующей локальной группе Ли (см. раздел 8.1). То есть каждый элемент группы имеет координаты, $a=\{a^{\text{A}}\}\in\mathbb{G}$, $\text{A}=1,\dots,\text{N}$, и задана функция композиции $ba=f=\{f^{\text{A}}(b,a)\}$. Тогда действие дифференциалов сечений на векторное поле $X=X^\alpha\partial_\alpha\in\mathcal{X}(\mathbb{M})$ имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_*X&=X^\alpha\partial_\alpha+X^\alpha\partial_\alpha b^{\text{A}}\partial_{\text{A}}=X^\alpha\partial_\alpha+X^\alpha\partial_\alpha b^{\text{A}}L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(b)L^*_{\text{B}}(b),\\ \sigma'_*X&=X^\alpha\partial_\alpha+X^\alpha\partial_\alpha f^{\text{A}}\partial_{\text{A}}=X^\alpha\partial_\alpha+X^\alpha\partial_\alpha f^{\text{A}}L^{-1}{}_{\text{A}}{}^{\text{B}}(f)L^*_{\text{B}}(f),\end{aligned}$$

где использован явный вид формы связности (13.5). Локальные формы связности ω_σ и $\omega_{\sigma'}$ являются 1-формами на $\mathbb{U}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому они представимы в виде

$$\begin{aligned}\omega_\sigma&=dx^\alpha A_\alpha{}^{\text{A}}(x)L_{\text{A}},\\ \omega_{\sigma'}&=dx^\alpha A'_\alpha{}^{\text{A}}(x)L_{\text{A}},\end{aligned}\tag{13.11}$$

где $A_\alpha{}^{\text{A}}(x)$ и $A'_\alpha{}^{\text{A}}(x)$ – компоненты этих форм (некоторые дифференцируемые функции от $x\in\mathbb{U}$). С другой стороны, по определению,

$$\begin{aligned}\omega_\sigma(X)&=\omega(\sigma_*X)=X^\alpha[\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b)+\partial_\alpha b^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b)]L_{\text{A}},\\ \omega_{\sigma'}(X)&=\omega(\sigma'_*X)=X^\alpha[\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(f)+\partial_\alpha f^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(f)]L_{\text{A}}.\end{aligned}\tag{13.12}$$

Рассмотрим нулевое сечение $\sigma_0=(x,e)$, где e – единица группы. Тогда

$$\omega_0=dx^\alpha\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}}.$$

То есть функции $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}}(x)$, параметризующие форму связности в (13.5), представляют собой компоненты локальной формы связности для нулевого сечения. Тогда компоненты локальной формы связности ω_σ связаны с компонентами локальной формы связности для нулевого сечения простым соотношением

$$A_\alpha{}^{\text{A}}=\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b)+\partial_\alpha b^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b).\tag{13.13}$$

Сравнивая формулы (13.12), получим связь между компонентами локальных форм связности:

$$A'_\alpha{}^{\text{A}}=A_\alpha{}^{\text{B}}S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a)+\partial_\alpha f^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(f)-\partial_\alpha b^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{C}}(b)S^{-1}{}_{\text{C}}{}^{\text{A}}(a),\tag{13.14}$$

где функция $a(x)$ связывает данные сечения, $\sigma'=\sigma a=(x,f=ba)$.

Полученная связь компонент двух локальных форм связности (13.14), заданных на одной окрестности базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ неудобна в приложениях, так как содержит координатные функции $a^{\text{A}}(x)$, $b^{\text{A}}(x)$, f^{A}, которые в явном виде можно задать только в редких случаях. Чтобы обойти эту трудность выберем присоединенное представление алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})$. То есть вместо локальных 1-форм ω_σ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ будем рассматривать 1-формы связности со значениями в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})$. Этому соответствует переход к матрицам

$$A_\alpha{}^{\text{A}} \mapsto A_{\alpha\text{B}}{}^{\text{C}} := -A_\alpha{}^{\text{A}} f_{\text{AB}}{}^{\text{C}},$$

где $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ – структурные константы группы Ли $\mathbb{G}$. Компоненты локальной формы связности в присоединенном представлении мы будем обозначать $A_\alpha = \{A_{\alpha\text{B}}{}^{\text{C}}\}$, опуская, для краткости, матричные индексы. Продифференцируем матрицу присоединенного представления $S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(b)$,

$$\partial_\alpha S_{\text{A}}{}^{\text{B}} = \partial_\alpha b^{\text{C}} \partial_{\text{C}} S_{\text{A}}{}^{\text{B}} = \partial_\alpha b^{\text{C}} L^{-1}_{\text{C}}{}^{\text{D}} f_{\text{DA}}{}^{\text{E}} S_{\text{E}}{}^{\text{B}},$$

где мы воспользовались формулой дифференцирования (8.40). Умножив это равенство справа на S^{-1}, получим равенство

$$\partial_\alpha S_{\text{A}}{}^{\text{B}} S^{-1}_{\text{B}}{}^{\text{C}} = \partial_\alpha b^{\text{B}} L^{-1}_{\text{B}}{}^{\text{D}} f_{\text{DA}}{}^{\text{C}}.$$

Тогда для компонент локальной формы связности (13.13) со значениями в присоединенном представлении алгебры Ли справедлива формула

$$A_\alpha = S\overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{13.15}$$

где мы опустили матричные индексы. Отсюда следует правило преобразования компонент локальной формы связности при переходе от одного сечения $\sigma(x) : (x, b(x))$ к другому $\sigma'(x) : (x, b(x)a(x))$,

$$A'_\alpha = SA_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{13.16}$$

где $S = (S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(a))$ – матрица присоединенного представления. Это есть ни что иное, как хорошо известная формула калибровочного преобразования полей Янга–Миллса. Эта формула имеет явные преимущества по сравнению с (13.14), так как позволяет проводить вычисления с матрицами присоединенного представления, элементы которых зависят от точки базы $x \in \mathbb{M}$.

Вместо присоединенного можно рассматривать произвольное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $L_{\text{A}i}{}^j$ – матрицы, соответствующие левоинвариантным векторным полям L_{A}, и $A_{\alpha i}{}^j := A_\alpha{}^{\text{A}} L_{\text{A}i}{}^j$ – компоненты локальной формы связности в данном представлении, то формулы преобразования компонент при переходе между сечениями (13.16) сохраняются, если под S понимать матрицу соответствующего преобразования, $S = \{S_i{}^j(a)\}$.

Функции $a(x)$ можно рассматривать как функции, задающие вертикальный автоморфизм главного расслоения $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ (см. пример 12.3.1). Тогда формула (13.16) задает преобразование компонент локальной формы связности при вертикальном автоморфизме.

Отображение $\mathbb{U} \ni x \mapsto S_{\text{A}}{}^{\text{B}}(x) \in \mathsf{ad}\,(\mathfrak{g})$ сопоставляет каждой точке базы матрицу присоединенного представления структурной группы. В формуле (13.16) каждое слагаемое определяет 1-форму на $\mathbb{U}$ и не зависит явно от функции композиции. Поэтому, не смотря на то, что формулы преобразования компонент локальной формы связности были получены в окрестности единицы группы, они справедливы для произвольных локальных сечений на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

Чтобы установить связь рассмотренной конструкции с понятиями, которые широко используются в математической физике, дадим

Определение. *Калибровочным полем* или *полем Янга–Миллса* $A_\alpha{}^{\text{A}}(x)$ на координатной окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ называются компоненты локальной формы связности (13.9), после добавления соответствующих уравнений движения. *Калибровочным преобразованием* называется переход между двумя локальными сечениями σ и σ' на $\mathbb{U}$ или, что эквивалентно, преобразование компонент локальной формы связности при вертикальном автоморфизме. Структурная группа $\mathbb{G}$ называется *калибровочной* группой. В электродинамике структурной группой является абелева группа $\mathbb{U}(1)$, а компоненты локальной формы связности $A_\alpha(x)$ на $\mathbb{U}$, после добавления уравнений Максвелла, называются *электромагнитным потенциалом*. Конечно, когда мы говорим про калибровочные поля, то подразумеваем, что они удовлетворяют некоторой системе уравнений движения (уравнения Янга–Миллса или уравнения Максвелла).

Замечание. Форма связности ω на $\mathbb{P}$ определена инвариантным образом и ее компоненты $\omega_\alpha{}^{\text{A}}(p)$ в (13.5) являются тензорными полями на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$. Важное неоднородное слагаемое в калибровочном преобразовании (13.16) для компонент локальной формы связности $A_\alpha{}^{\text{A}}(x)$ возникает только при переходе к локальным сечениям.

Как уже было отмечено, локальная форма связности ω_σ не определяет форму связности ω и, следовательно, связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. Однако, если задано координатное покрытие базы $\mathbb{M}$ и семейство локальных форм связности на каждой координатной окрестности, то это семейство однозначно определяет связность на $\mathbb{P}$. Опишем соответствующую конструкцию. Пусть задано координатное покрытие базы, $\mathbb{M}=\bigcup_i \mathbb{U}_i$, семейство изоморфизмов

$$\chi_i: \quad \pi^{-1}(\mathbb{U}_i)\to\mathbb{U}_i\times\mathbb{G}$$

и соответствующие функции перехода

$$a_{ji}: \quad \mathbb{U}_i\cap\mathbb{U}_j\to\mathbb{G}.$$

Это необходимо для однозначного определения главного расслоения в терминах функций перехода (теорема 12.1.2). На каждой окрестности $\mathbb{U}_i$ выберем сечение $\sigma_i:\mathbb{U}_i\to\mathbb{P}$, которое соответствует единичному элементу группы $e\in\mathbb{G}$, положив $\sigma_i(x)=\chi_i^{-1}(x,e)$. Пусть θ – (левоинвариантная $\mathfrak{g}$-значная) каноническая 1-форма на $\mathbb{G}$, которая определена в разделе 8.2.

Для каждого непустого пересечения $\mathbb{U}_i\cap\mathbb{U}_j$ определим $\mathfrak{g}$-значную 1-форму на $\mathbb{U}_i\cap\mathbb{U}_j$ с помощью отображения дифференциальных форм a_{ji},

$$\theta_{ji}=a_{ji}^*\theta. \tag{13.17}$$

Для каждой окрестности $\mathbb{U}_i$ определим локальную форму связности на $\mathbb{U}_i$ с помощью отображения дифференциальных форм для сечения σ_i,

$$\omega_i=\sigma_i^*\omega,$$

где ω – форма связности на $\mathbb{P}$. Тогда справедлива

Теорема 13.1.1. *Формы θ_{ji} и ω_i удовлетворяют условиям:*

$$\omega_j=\mathsf{ad}\,(a_{ji}^{-1})\omega_i+\theta_{ji},\qquad \text{на}\quad \mathbb{U}_i\cap\mathbb{U}_j. \tag{13.18}$$

Обратно. Для каждого семейства локальных форм связности $\{\omega_i\}$, заданных на координатном покрытии $\mathbb{M}=\bigcup_i\mathbb{U}_i$ и удовлетворяющих условиям (13.18) во всех пересечениях карт, существует единственная форма связности ω на $\mathbb{P}$, которая порождает семейство 1-форм $\{\omega_i\}$ вышеописанным образом.

Доказательство. См., например, [3], глава II, предложение 1.4.

Пример 13.1.6 (Локальное рассмотрение). Продолжим локальное рассмотрение, чтобы прояснить содержание последнего утверждения. Допустим, что мы находимся в окрестности единицы структурной группы. Тогда каноническая форма на группе Ли имеет вид $\theta=da^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}L_{\text{A}}$, где L_{A} – левоинвариантный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть в пересекающихся картах $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$ заданы координаты x^α и $x^{\alpha'}$ соответственно. Пусть

$$X=X^\alpha\partial_\alpha=X^{\alpha'}\partial_{\alpha'}\in\mathcal{X}(\mathbb{U}_i\cap\mathbb{U}_j)$$

– касательный вектор к базе на пересечении окрестностей. Тогда дифференциал функций перехода отображает этот вектор в касательное пространство группы

$$a_{ji*}X=X^\alpha\partial_\alpha a_{ji}^{\text{A}}\partial_{\text{A}}=X^\alpha\partial_\alpha a_{ji}^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}L_{\text{A}}.$$

Такая же формула имеет место в штрихованной системе координат. Поэтому $\mathfrak{g}$-значная 1-форма (13.17) имеет вид

$$\theta_{ji}=dx^\alpha\partial_\alpha a_{ji}^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a_{ji})L_{\text{A}}=dx^{\alpha'}\partial_{\alpha'}a_{ji}^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a_{ji})L_{\text{A}}.$$

Пусть

$$\omega_i=dx^\alpha A_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}}\qquad\text{и}\qquad\omega_j=dx^{\alpha'}A_{\alpha'}{}^{\text{A}}L_{\text{A}}$$

– локальные формы связности соответственно на $\mathbb{U}_i$ и $\mathbb{U}_j$. Тогда формула (13.18) приводит к равенству

$$A_{\alpha'}{}^{\text{A}} = \partial_{\alpha'}x^{\alpha}\left[A_{\alpha}{}^{\text{B}}S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a_{ji}) + \partial_{\alpha}a_{ji}^{\text{B}}L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a_{ji})\right]. \tag{13.19}$$

Это преобразование калибровочного поля отличается от описанного ранее (13.13) только множителем $\partial_{\alpha'}x^{\alpha}$, соответствующим преобразованию координат в пересечении $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$.

Таким образом, для того, чтобы описать связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ в локальных терминах, необходимо задать координатное покрытие базы $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$, функции перехода $a_{ji}(x)$ в каждом непустом пересечении $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$, которые удовлетворяют условию (12.9) в областях пересечения трех карт, и семейство локальных форм связности (калибровочных полей), заданных на каждой координатной окрестности, такое, что в областях пересечения карт выполнено условие (13.19).

Замечание. В квантовой теории поля обычно рассматривают тривиальные главные расслоения $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{G}$, где $\mathbb{R}^{1,3}$ – четырехмерное пространство Минковского и $\mathbb{G}$ – калибровочная группа. В этом частном случае локальная форма связности $dx^{\alpha}A_{\alpha}{}^{\text{A}}L_{\text{A}}$, заданная на всем пространстве-времени $\mathbb{R}^{1,3}$, взаимно однозначно определяет форму связности ω и, следовательно, связность Γ на $\mathbb{P}$.

В заключение данного раздела обсудим вопрос о существовании связностей. Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение и $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$ – некоторое подмножество базы. Мы говорим, что связность определена над $\mathbb{N}$, если в каждой точке $p \in \pi^{-1}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{P}$ из прообраза $\mathbb{N}$ определено горизонтальное подпространство $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ таким образом, что выполнены первые два условия (прямая сумма и инвариантность относительно действия структурной группы) в определении связности и распределение $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ дифференцируемо зависит от точки p в следующем смысле. Для каждой точки $x \in \mathbb{N}$ существует окрестность $\mathbb{U} \ni x$ и связность на $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ такая, что ее сужение на $\pi^{-1}(x)$ совпадает с $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ для всех точек слоя $p \in \pi^{-1}(x)$.

Теорема 13.1.2. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение и $\mathbb{N}$ – замкнутое подмножество (возможно, пустое) в базе $\mathbb{M}$. Любая связность, определенная над $\mathbb{N}$ может быть продолжена до связности на всем $\mathbb{P}$. В частности, любое главное расслоение $\mathbb{P}$ допускает связность.*

Доказательство. Доказательство проводится путем явного построения связности. При этом существенно используется паракомпактность многообразия. См., например, [3], глава II, теорема 2.1.

Пример 13.1.7. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,e)$, структурная группа которого состоит из единственного элемента – единицы. Тогда на нем существует единственная связность. В этом случае вертикальные касательные пространства отсутствуют, а распределение горизонтальных пространств совпадает с касательным расслоением $\mathbb{T}(\mathbb{M})$. Форма связности и форма кривизны, которая будет определена в следующем разделе, при этом тождественно равны нулю.

Продолжение связности не является единственным.

Пример 13.1.8. Рассмотрим расслоение реперов $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ над евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathbb{R}^n$ покрывается одной картой, то форма связности $\omega = dx^{\alpha}\omega_{\alpha a}{}^{b}\boldsymbol{e}_b{}^{a}$, где $\boldsymbol{e}_b{}^{a}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, взаимно однозначно определятся своими компонентами $\omega_{\alpha a}{}^{b}$ на $\mathbb{L}$. Чтобы их задать, достаточно задать компоненты локальной формы связности на каком либо сечении, а затем разнести их по всему пространству расслоения с помощью действия структурной группы. Если компоненты локальной формы связности $\omega_{\alpha a}{}^{b}(x)$ заданы на замкнутом подмножестве $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^n$, то их можно продолжить на все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ многими достаточно гладкими способами. Тем самым мы определим связность на всем $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$.

13.2. Форма кривизны и структурное уравнение

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ со связностью $\Gamma : \mathbb{P} \ni p \mapsto \mathbb{H}_p \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$. Каждая связность Γ на $\mathbb{P}$ взаимно однозначно определяет $\mathfrak{g}$-значную 1-форму связности $\omega = \omega^{\text{A}}L_{\text{A}}$, где $\omega^{\text{A}} \in \Lambda_1(\mathbb{P})$ для всех $\text{A} = 1,\dots,\text{N}$, которой мы поставим в соответствие единственную 2-форму кривизны $R = R^{\text{A}}L_{\text{A}}$, где $R^{\text{A}} \in \Lambda_2(\mathbb{P})$ для всех A, со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Форма кривизны R является важнейшей характеристикой заданной связности Γ. Для ее определения нам понадобятся новые понятия.

Пусть задано представление ρ структурной группы Ли $\mathbb{G}$ в конечномерном векторном пространстве $\mathbb{V}$,

$$\rho: \quad \mathbb{G} \ni \quad a \mapsto \rho(a) \quad \in \mathsf{aut}\,(\mathbb{V}).$$

При этом $\rho(ab) = \rho(a) \circ \rho(b)$ для всех $a, b \in \mathbb{G}$.

Определение. r-форма $\varphi \in \Lambda_r(\mathbb{P})$ на главном расслоении $\mathbb{P}$ со значениями в векторном пространстве $\mathbb{V}$ называется *псевдотензориальной r-формой типа* $(\rho, \mathbb{V})$, если выполнено условие

$$r_a^*\varphi|_p = \rho(a^{-1})\varphi|_{pa} \qquad \forall\, a \in \mathbb{G}, \quad \forall\, p \in \mathbb{P},$$

где r_a^* – отображение дифференциальных форм для $r_a : p \mapsto pa$. Псевдотензориальная r-форма φ называется *тензориальной* r-формой типа $(\rho, \mathbb{V})$, если она *горизонтальна*, т.е. $\varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r) = 0$, как только один из касательных векторов $\widetilde{X}_i \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$ вертикален. Под тензориальной 0-формой типа $(\rho, \mathbb{V})$ мы понимаем функцию $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{V}$, удовлетворяющую условию $\varphi(p) = \rho(a^{-1})\varphi(pa)$ или, что эквивалентно, $\varphi(pa) = \rho(a)\varphi(p)$.

Пример 13.2.1. В силу свойства 2) предложения 13.1.2 форма связности ω является псевдотензориальной 1-формой типа $(\mathsf{ad}\,, \mathfrak{g})$. Она не является тензориальной, так как не обращается в нуль на вертикальных векторных полях. Для краткости, будем говорить, что форма типа $(\mathsf{ad}\,, \mathfrak{g})$ является формой типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$.

Пример 13.2.2. Пусть ρ_0 – тривиальное представление группы $\mathbb{G}$ в $\mathbb{V}$, т.е. $\rho_0(a)$ есть тождественное преобразование $\mathbb{V}$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Тогда каждая тензориальная r-форма φ типа $(\rho_0, \mathbb{V})$ может быть взаимно однозначно представлена в виде $\varphi = \pi^*\varphi_{\mathbb{M}}$, где $\varphi_{\mathbb{M}}$ некоторая r-форма на базе $\mathbb{M}$ со значениями в $\mathbb{V}$. Для этого достаточно показать, что тензориальная форма φ однозначно определяет форму на базе $\varphi_{\mathbb{M}}$. Поскольку r-форма φ горизонтальна, то ее значения на произвольном наборе касательных векторных полей определяются только горизонтальными компонентами,

$$\varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r) = \varphi(\mathsf{h}\widetilde{X}_1, \dots, \mathsf{h}\widetilde{X}_r).$$

Так как r-форма φ правоинвариантна, то ее значения на правоинвариантных векторных полях не зависят от точки слоя $p \in \pi^{-1}(x)$. Поэтому r-форма φ взаимно однозначно определяет r-форму $\varphi_{\mathbb{M}}$ на базе следующим равенством

$$\varphi_{\mathbb{M}}(X_1, \dots, X_r) = \varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r),$$

где $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r$ – произвольный набор правоинвариантных векторных полей таких, что $X_i = \pi_*\widetilde{X}_i$ для всех $i = 1, \dots, r$.

Пример 13.2.3. Пусть $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ – ассоциированное с $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ расслоение, типичным слоем которого является векторное пространство $\mathbb{V}$, в котором задано представление ρ структурной группы $\mathbb{G}$. Тогда тензориальную r-форму φ типа $(\rho, \mathbb{V})$ можно рассматривать как сопоставление каждой точке $x \in \mathbb{M}$ мультилинейного антисимметричного отображения

$$\tilde{\varphi}_x : \quad \underbrace{\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \times \dots \times \mathbb{T}_x}_{r} \to \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x) \tag{13.20}$$

с помощью равенства

$$\tilde{\varphi}_x(X_1, \dots, X_r) := p(\varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r)), \qquad X_i \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M}),$$

где p – любая точка слоя $\pi^{-1}(x)$ и $\widetilde{X}_i$ – произвольный касательный вектор в p, для которого $\pi_*\widetilde{X}_i = X_i$ для каждого i. Подробнее, $\varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r)$ есть тогда элемент стандартного слоя $\mathbb{V}$, а p – линейное отображение из $\mathbb{V}$ на слой $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$. Поэтому $p(\varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r))$ является элементом слоя $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$. Нетрудно проверить, что этот элемент не зависит от выбора точки p и вектора $\widetilde{X}_i$ в слое $\pi^{-1}(x)$.

Обратно. Пусть задано мультилинейное антисимметричное отображение (13.20) для всех $x \in \mathbb{M}$. Тогда можно определить тензориальную r-форму типа $(\rho, \mathbb{V})$ на $\mathbb{P}$ следующим образом

$$\varphi(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r) := p^{-1}(\tilde{\varphi}_x(\pi_*\widetilde{X}_1, \dots, \pi_*\widetilde{X}_r)), \qquad \widetilde{X}_i \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P}),$$

где $x = \pi(p)$. В частности, тензориальная 0-форма типа $(\rho, \mathbb{V})$, т.е. функция $\varphi : \mathbb{P} \to \mathbb{V}$, удовлетворяющая условию $\varphi(pa) = \rho(a)\varphi(p)$, может быть отождествлена с сечением ассоциированного расслоения $\sigma_{\mathbb{E}} : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$. Несколько специальных случаев данного примера будет использовано в дальнейшем.

Продолжим обсуждение связности Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. Пусть $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ и $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ – вертикальное и горизонтальное подпространства в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и $\mathsf{h}:\mathbb{T}_p(\mathbb{P})\to\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ – проекция на горизонтальное подпространство. Введем новое понятие внешней ковариантной производной от псевдотензориальной r-формы, с помощью которой будет определена кривизна.

Предложение 13.2.1. *Пусть φ – псевдотензориальная r-форма на $\mathbb{P}$ типа $(\rho,\mathbb{V})$. Тогда*:
1) *r-форма $\varphi\mathsf{h}$, определенная равенством*

$$\varphi\mathsf{h}(\widetilde X_1,\dots,\widetilde X_r):=\varphi(\mathsf{h}\widetilde X_1,\dots,\mathsf{h}\widetilde X_r),\qquad \widetilde X_i\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P}),\quad i=1,\dots,r,$$

есть тензориальная форма типа $(\rho,\mathbb{V})$;
2) *$d\varphi$ есть псевдотензориальная $(r+1)$-форма типа $(\rho,\mathbb{V})$;*
3) *$(r+1)$-форма $D\varphi$, определенная как $D\varphi:=(d\varphi)\mathsf{h}$, является тензориальной формой типа $(\rho,\mathbb{V})$.*

Доказательство. Распределение горизонтальных векторных полей инвариантно относительно действия структурной группы, поэтому $r_a\circ\mathsf{h}=\mathsf{h}\circ r_a$. Отсюда следует, что $\varphi\mathsf{h}$ является псевдотензориальной r-формой типа $(\rho,\mathbb{V})$. Очевидно, что

$$\varphi\mathsf{h}(\widetilde X_1,\dots,\widetilde X_r)=0,$$

если один из касательных векторов $\widetilde X_i$ вертикален, и, следовательно, форма $\varphi\mathsf{h}$ горизонтальна. Второе утверждение следует из равенства $r_a^*\circ d=d\circ r_a^*$ для всех $a\in\mathbb{G}$ (3.44). Третье утверждение является прямым следствием двух первых.

Определение. Форма $D\varphi:=(d\varphi)\mathsf{h}$ называется *внешней ковариантной производной* от псевдотензориальной r-формы φ на $\mathbb{P}$. Оператор D называется *внешним ковариантным дифференцированием.*

Пример 13.2.4 (Локальное рассмотрение). Выпишем ковариантную производную от тензориальной 0-формы на $\mathbb{Q}=\mathbb{U}\times\widetilde{\mathbb{G}}$ типа $(\rho,\mathbb{V})$ в компонентах. Пусть e_i, $i=1,\dots,\mathsf{dim}\,\mathbb{V}$, – базис векторного пространства $\mathbb{V}$ и

$$\rho:\quad \mathbb{G}\ni\quad a\mapsto S_i{}^j(a)\quad\in\mathsf{aut}\,\mathbb{V}$$

– представление структурной группы. Пусть $L_{\text{A}j}{}^i$ – представление генераторов (базиса) L_{A} структурной группы. Тогда справедливы формулы (8.65) и (8.66). Поскольку φ – тензориальная 0-форма типа $(\rho,\mathbb{V})$, то она имеет вид

$$\varphi(p)=\varphi^i(p)e_i=\overset{\circ}{\varphi}{}^j(x)S^{-1}{}_j{}^i(b)e_i,\qquad p=(x,b)\in\mathbb{Q},$$

где $\overset{\circ}{\varphi}(x,0)=\overset{\circ}{\varphi}{}^i(x)e_i$ – значение этой функции на нулевом сечении $\sigma_0(x)=(x,0)\in\mathbb{P}$. Внешний дифференциал от компонент φ^i равен

$$\begin{aligned}d\varphi^i&=dx^\alpha\partial_\alpha\overset{\circ}{\varphi}{}^jS^{-1}{}_j{}^i+db^{\text{A}}\overset{\circ}{\varphi}{}^j\partial_{\text{A}}S^{-1}{}_j{}^i=dx^\alpha\partial_\alpha\overset{\circ}{\varphi}{}^jS^{-1}{}_j{}^i+\omega^{*\text{A}}\overset{\circ}{\varphi}{}^jL^*_{\text{A}}S^{-1}{}_j{}^i=\\&=dx^\alpha\partial_\alpha\overset{\circ}{\varphi}{}^jS^{-1}{}_j{}^i+\omega^{*\text{A}}\overset{\circ}{\varphi}{}^jS^{-1}{}_j{}^kL_{\text{A}k}{}^i.\end{aligned}$$

Поскольку горизонтальная составляющая вектора имеет вид (13.7), то значение внешней ковариантной производной на произвольном векторном поле $\widetilde X\in\mathbb{X}(\mathbb{P})$ равно

$$D\varphi^i(\widetilde X)=d\varphi^i(\mathsf{h}\widetilde X)=\widetilde X^\alpha\overset{\circ}{\nabla}_\alpha\overset{\circ}{\varphi}{}^jS^{-1}{}_j{}^i,\tag{13.21}$$

где введены обозначения

$$\overset{\circ}{\nabla}_\alpha\overset{\circ}{\varphi}{}^j:=\partial_\alpha\overset{\circ}{\varphi}{}^j+\overset{\circ}{\varphi}{}^k\overset{\circ}{A}_{\alpha k}{}^j,\qquad \overset{\circ}{A}_{\alpha k}{}^j:=-\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}}L_{\text{A}k}{}^j.$$

Теперь спустимся на базу $\mathbb{U}$. Рассмотрим два произвольных сечения

$$\sigma:\quad x\mapsto(x,b(x)),\qquad\text{и}\qquad \sigma':\quad x\mapsto(x,b(x)a(x)),$$

связанных калибровочным преобразованием, которое параметризуется функцией $a(x)$. Обозначим значение компонент $\varphi^i(p)$ на этих сечениях через

$$\varphi^i(x)=\varphi^i|_\sigma,\qquad\text{и}\qquad \varphi'^i(x)=\varphi^i|_{\sigma'}.\tag{13.22}$$

Эти функции на $\mathbb{U}$ связаны калибровочным преобразованием

$$\varphi'^i = \varphi^j S^{-1}{}_j{}^i(a), \qquad a = a(x). \tag{13.23}$$

Внешний ковариантный дифференциал $D\varphi$ после проектирования на базу с помощью отображений дифференциальных форм σ^* и σ'^* принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma^*(D\varphi^i) &= dx^\alpha \nabla_\alpha \varphi^i, \\ \sigma'^*(D\varphi^i) &= dx^\alpha \nabla'_\alpha \varphi'^i, \end{aligned} \tag{13.24}$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \varphi^i &:= \partial_\alpha \varphi^i + \varphi^j A_{\alpha j}{}^i, \\ \nabla'_\alpha \varphi'^i &:= \partial_\alpha \varphi'^i + \varphi'^j A'_{\alpha j}{}^i. \end{aligned} \tag{13.25}$$

Выше мы ввели обозначения: $A_{\alpha j}{}^i := -A_\alpha{}^{\text{A}} L_{\text{A}j}{}^i$ и $A'_{\alpha j}{}^i := -A'_\alpha{}^{\text{A}} L_{\text{A}j}{}^i$, где $A_\alpha{}^{\text{A}}$ и $A'_\alpha{}^{\text{A}}$ – компоненты локальных форм связности (13.11). Нетрудно проверить, что при калибровочном преобразовании (13.23), (13.15) ковариантная производная ведет себя ковариантно:

$$\nabla'_\alpha \varphi'^i = \nabla_\alpha \varphi^j S^{-1}{}_j{}^i. \tag{13.26}$$

Этого следовало ожидать, так как определение ковариантной производной было дано в инвариантном виде. Таким образом, мы видим, что инвариантное определение внешней ковариантной производной для тензориальной 0-формы типа $(\rho, \mathbb{V})$ совпадает с обычным определением ковариантной производной в теории калибровочных полей. В примере 13.2.3 было показано, что тензориальную 0-форму типа $(\rho, \mathbb{V})$ можно отождествить с сечением ассоциированного расслоения, типичным слоем которого является векторное пространство $\mathbb{V}$. Таким образом, формулы (13.25) определяют ковариантные производные от сечений $\sigma_{\mathbb{E}} : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{V}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$.

В примере 13.2.1 было отмечено, что форма связности ω на $\mathbb{P}$ есть псевдотензориальная 1-форма типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$. Используя предложение 13.2.1, дадим

Определение. Внешняя ковариантная производная $R := D\omega$ от формы связности ω является тензориальной 2-формой на $\mathbb{P}$ типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$ и называется *формой кривизны* для формы связности ω. Если L_{A} базис алгебры Ли, то $R = R^{\text{A}} L_{\text{A}}$, где $R^{\text{A}} \in \Lambda_2(\mathbb{P})$ для всех $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$.

Теорема 13.2.1 (Структурное уравнение). *Пусть ω – форма связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и $R := D\omega$ – ее форма кривизны. Тогда*

$$d\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = -\frac{1}{2}\left[\omega(\widetilde{X}), \omega(\widetilde{Y})\right] + R(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \tag{13.27}$$

для всех $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Каждый вектор в $\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ единственным образом разлагается в сумму вертикального и горизонтального векторов. Так как каждый член в (13.27) билинеен и антисимметричен по $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, то достаточно проверить равенство (13.27) в трех случаях.

1) $\widetilde{X}_p$ и $\widetilde{Y}_p$ горизонтальны для всех $p \in \mathbb{P}$. В этом случае $\omega(\widetilde{X}) = \omega(\widetilde{Y}) = 0$ и равенство (13.27) сводится к определению формы кривизны R, так как $D\omega = d\omega$ для горизонтальных векторных полей.

2) $\widetilde{X}_p$ и $\widetilde{Y}_p$ вертикальны для всех $p \in \mathbb{P}$. В этом случае их значения в точке p соответствуют некоторым фундаментальным векторным полям, т.е. $\widetilde{X}_p = X^*_p$ и $\widetilde{Y}_p = Y^*_p$ для некоторых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Из формулы (3.36), следует равенство

$$2d\omega(X^*, Y^*) = X^*(\omega(Y^*)) - Y^*(\omega(X^*)) - \omega([X^*, Y^*]) = -[X, Y] = -[\omega(X^*), \omega(Y^*)],$$

так как $\omega(X^*) = X$, $\omega(Y^*) = Y$ и $[X^*, Y^*] = [X, Y]^*$. Поскольку для фундаментальных векторных полей $R(X^*, Y^*) = 0$, то формула (13.27) в рассматриваемом случае имеет место.

3) $\widetilde{X}_p$ горизонтально, $\widetilde{Y}_p$ вертикально для всех $p \in \mathbb{P}$. Продолжим $\widetilde{X}_p \in \mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ до горизонтального векторного поля $\widetilde{X}$ на $\mathbb{P}$. Это всегда возможно в силу следствия теоремы 12.2.2. Пусть $\widetilde{Y}_p = Y^*_p$ для некоторого $Y \in \mathfrak{g}$. В рассматриваемом случае правая часть равенства (13.27) равна нулю, поэтому достаточно доказать равенство $d\omega(\widetilde{X}, Y^*) = 0$. Из формулы (3.36) следует, что

$$2d\omega(\widetilde{X}, Y^*) = \widetilde{X}(\omega(Y^*)) - Y^*(\omega(\widetilde{X})) - \omega([\widetilde{X}, Y^*]) = -\omega([\widetilde{X}, Y^*]).$$

Теперь достаточно доказать следующее утверждение

Лемма 13.2.1. *Пусть $\widetilde{X}$ – горизонтальное векторное поле и Y^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу алгебры $Y \in \mathfrak{g}$. Тогда коммутатор $[\widetilde{X}, Y^*]$ горизонтален.*

Доказательство. Фундаментальное векторное поле Y^* индуцировано действием $r_{a(t)}$, где $a(t)$ – 1-параметрическая подгруппа в $\mathbb{G}$, порожденная элементом алгебры $Y \in \mathfrak{g}$ (экспоненциальное отображение). Поскольку коммутатор векторных полей совпадает с производной Ли, то из (2.124) следует равенство

$$[\widetilde{X}, Y^*] = -\mathsf{L}_{Y^*}\widetilde{X} = -\lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{X} - r_{a(t)*}\widetilde{X}}{t}.$$

Если векторное поле $\widetilde{X}$ горизонтально, то $r_{a(t)*}\widetilde{X}$ тоже горизонтально. Поэтому коммутатор $[\widetilde{X}, Y^*]$ горизонтален.

Следствие. *Если $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – горизонтальные векторные поля, то*

$$\omega([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = -2R(\widetilde{X}, \widetilde{Y}). \tag{13.28}$$

Доказательство. Для горизонтальных векторных полей $\omega(\widetilde{X}) = \omega(\widetilde{Y}) = 0$ и

$$2d\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = -\omega([\widetilde{X}, \widetilde{Y}])$$

как следствие (3.36).

Структурное уравнение (13.27) называют также *структурным уравнением Картана* и часто для простоты записывают в виде

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + R. \tag{13.29}$$

Приведем еще одну форму записи структурного уравнения. Пусть L_{A}, $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$, – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями

$$[L_{\text{A}}, L_{\text{B}}] = f_{\text{AB}}{}^{\text{C}} L_{\text{C}},$$

где $f_{\text{AB}}{}^{\text{C}}$ – структурные константы алгебры. Тогда формы связности и кривизны можно разложить по базису, $\omega = \omega^{\text{A}} L_{\text{A}}$ и $R = R^{\text{A}} L_{\text{A}}$, и структурные уравнения принимают вид

$$d\omega^{\text{A}} = -\frac{1}{2}\omega^{\text{B}} \wedge \omega^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} + R^{\text{A}}. \tag{13.30}$$

Замечание. Структурное уравнение (13.27) отличается от формулы Маурера–Картана для групп Ли (8.22) только слагаемым с кривизной. Для фундаментальных векторных полей $R(X^*, Y^*) = 0$ и формулы просто совпадают.

Теперь спустимся на базу. Пусть задано локальное сечение $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{P}$ на некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$.

Определение. 2-форма на $\mathbb{U}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, определенная сечением, $R_\sigma := \sigma^* R$, где R – форма кривизны на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, называется *локальной формой кривизны* формы связности ω.

В компонентах локальная форма кривизны имеет вид

$$R_\sigma = F^{\text{A}} L_{\text{A}} = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} L_{\text{A}}, \tag{13.31}$$

где $F^{\text{A}} = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} \in \Lambda_2(\mathbb{U})$ для всех $\text{A} = 1, \dots, \text{N}$.

Пример 13.2.5 (Локальное рассмотрение). В настоящем примере мы выразим компоненты локальной формы кривизны через компоненты локальной формы связности. Чтобы это сделать, сначала определим компоненты формы кривизны на $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \widetilde{\mathbb{G}}$ через компоненты формы связности. Внешняя производная от формы связности (13.5) имеет вид

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \left(\partial_\alpha \omega_\beta{}^{\text{A}} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{\text{A}}\right) - dx^\alpha \wedge db^{\text{B}} \partial_{\text{B}} \omega_\alpha{}^{\text{A}} + d\omega^{*\text{A}}\right] L_{\text{A}} = \\ &= \left[\frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \left(\partial_\alpha \omega_\beta{}^{\text{A}} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{\text{A}}\right) + dx^\alpha \wedge \omega^{*\text{B}} \omega_\alpha{}^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} - \frac{1}{2} \omega^{*\text{B}} \wedge \omega^{*\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}\right] L_{\text{A}}, \end{aligned}$$

где $\omega_\alpha{}^{\text{A}}(x, b) = \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}}(x) S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b)$. Кроме того мы воспользовались формулой Маурера–Картана (8.23) для структурной группы и правилом дифференцирования матрицы присоединенного представления (8.41). Теперь нетрудно вычислить значение формы кривизны на векторных полях

$$D\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = d\omega(\mathsf{h}\widetilde{X}, \mathsf{h}\widetilde{Y}) = \widetilde{X}^\alpha \widetilde{Y}^\beta R_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} L_{\text{A}},$$

где

$$R_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = \partial_\alpha \omega_\beta{}^{\text{A}} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{\text{A}} - \omega_\alpha{}^{\text{B}} \omega_\beta{}^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} \tag{13.32}$$

– компоненты формы кривизны. Эти компоненты можно выразить через компоненты, заданные на нулевом сечении

$$R_{\alpha\beta}{}^{\text{A}}(x, a) = \overset{\circ}{F}_{\alpha\beta}{}^{\text{B}}(x) S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(a),$$

где

$$\overset{\circ}{F}_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = \partial_\alpha \overset{\circ}{A}_\beta{}^{\text{A}} - \partial_\beta \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}} - \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{B}} \overset{\circ}{A}_\beta{}^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} \tag{13.33}$$

– компоненты тензора кривизны для нулевого сечения. Таким образом, форма кривизны имеет вид

$$R = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} L_{\text{A}}, \tag{13.34}$$

где компоненты определены равенствами (13.32).

Теперь спустимся на базу $\mathbb{U}$. Для сечений (13.22) получаем следующие выражения для локальных форм кривизны

$$\begin{aligned} R_\sigma &:= \sigma^* R = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} L_{\text{A}}, \\ R_{\sigma'} &:= \sigma'^* R = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta F'_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} L_{\text{A}}, \end{aligned}$$

где

$$F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = \partial_\alpha A_\beta{}^{\text{A}} - \partial_\beta A_\alpha{}^{\text{A}} - A_\alpha{}^{\text{B}} A_\beta{}^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} \tag{13.35}$$

и такое же выражение для $F'_{\alpha\beta}{}^{\text{A}}$ через штрихованные компоненты $A'_\alpha{}^{\text{A}}$. Нетрудно проверить, что компоненты локальной формы кривизны преобразуются ковариантным образом,

$$F'_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = F_{\alpha\beta}{}^{\text{B}} S^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}, \tag{13.36}$$

при калибровочном преобразовании (13.19).

Переходя к присоединенному представлению

$$F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} \mapsto F_{\alpha\beta\text{B}}{}^{\text{C}} := -F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} f_{\text{AB}}{}^{\text{C}},$$

получаем следующее выражение для локальной формы кривизны

$$F_{\alpha\beta\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} = \partial_\alpha A_{\beta\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} - \partial_\beta A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} - A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}} A_{\beta\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}} + A_{\beta\mathrm{A}}{}^{\mathrm{C}} A_{\alpha\mathrm{C}}{}^{\mathrm{B}}. \tag{13.37}$$

Это выражение совпадает с выражением для локальной формы кривизны в аффинной геометрии (5.56), которое было получено ранее, после замены $A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}} \mapsto \omega_{\alpha a}{}^{b}$. Тем самым мы показали, что аффинная связность, которая была введена ранее независимым образом, является частным случаем связности на главном расслоении общего вида. Выражение для компонент локальной формы кривизны (13.37) можно записать в виде

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - [A_\alpha, A_\beta], \tag{13.38}$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы и квадратные скобки обозначают коммутатор матриц. При калибровочном преобразовании (13.16) компоненты локальной формы кривизны преобразуются ковариантно:

$$F'_{\alpha\beta} = S F_{\alpha\beta} S^{-1},$$

как и следовало ожидать.

Форма кривизны играет важную роль в приложениях. Обращение в нуль ее компонент дает критерий локальной тривиальности связности. Действительно, при доказательстве локальной тривиальности линейной связности в разделе 5.5 конкретный вид структурной группы не был использован. Поэтому справедлива

Теорема 13.2.2. *Пусть в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ заданы компоненты локальной формы связности $A_{\alpha\mathrm{A}}{}^{\mathrm{B}}$. Если соответствующая локальная форма кривизны равна нулю на $\mathbb{U}$, то существует такое калибровочное преобразование, после которого компоненты локальной формы связности обратятся в нуль, возможно, в меньшей окрестности. Или, существует такая матрица калибровочного преобразования S, что компоненты локальной формы связности имеют вид чистой калибровки*

$$A_\alpha = \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{13.39}$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы.

При проведении вычислений на пространстве главного расслоения $\mathbb{P}$, например, в моделях типа Калуцы–Клейна, в касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ удобно использовать базис $\{D_\alpha, L^*_{\mathrm{A}}\}$, состоящий из горизонтальных векторных полей

$$D_\alpha := \partial_\alpha - \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}}, \tag{13.40}$$

и фундаментальных векторных полей L^*_{A}. Этот базис неголономен:

$$[D_\alpha, D_\beta] = -R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}}, \tag{13.41}$$
$$[D_\alpha, L^*_{\mathrm{A}}] = 0, \tag{13.42}$$
$$[L^*_{\mathrm{A}}, L^*_{\mathrm{B}}] = f_{\mathrm{AB}}{}^{\mathrm{C}} L^*_{\mathrm{C}}, \tag{13.43}$$

где $R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ – компоненты формы кривизны (13.32). Второе коммутационное соотношение (13.42) является следствием инвариантности распределения горизонтальных подпространств относительно действия группы справа (напомним, что левоинвариантные векторные поля генерируют действие группы справа, а правоинвариантные – слева, раздел 8.3). Заметим, что ковариантную производную $D\varphi$ от тензориальной 0-формы типа $(\rho, \mathbb{V})$ можно записать в виде

$$D\varphi = dx^\alpha (D_\alpha \varphi^i) \boldsymbol{e}_i,$$

где векторное поле D_α действует как дифференцирование. Это следует из определения (13.21). В приведенной формуле $\varphi^i = \varphi^i(x, a)$ в отличии от формул (13.25), где ковариантная производная берется от сечений $\varphi^i = \varphi^i(x, \sigma(x))$. Кроме того, справедливо равенство

$$[D_\alpha, D_\beta]\varphi^i = \varphi^j R_{\alpha\beta j}{}^i, \tag{13.44}$$

где $R_{\alpha\beta j}{}^i := R_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}j}{}^i$. Эта формула является аналогом формулы (6.90), полученной в аффинной геометрии. В аффинной геометрии в правой части стоит дополнительное слагаемое с тензором кручения.

Для связи с моделями математической физики дадим

Определение. Компоненты локальной формы кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}}$ называются *напряженностью калибровочного поля* или *напряженностью поля Янга–Миллса*. В электродинамике калибровочной группой является абелева группа $\mathbb{U}(1)$, а компоненты локальной формы кривизны $F_{\alpha\beta}$ называются *напряженностью электромагнитного поля*.

Продолжим общее рассмотрение.

Теорема 13.2.3 (Тождества Бианки). *Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ задана форма связности ω. Тогда форма кривизны $R := D\omega$ удовлетворяет тождествам Бианки*:

$$DR = 0, \tag{13.45}$$

где D – внешняя ковариантная производная.

Доказательство. Из определения внешней ковариантной производной следует, что $DR(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = 0$, если хотя бы один из векторов $\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}$ вертикален. Поэтому достаточно доказать, что $dR(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = 0$, когда все три вектора горизонтальны. Возьмем внешнюю производную от структурного уравнения (13.30):

$$0 = dd\omega^{\text{A}} = -\frac{1}{2}d\omega^{\text{B}}\wedge\omega^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} + \frac{1}{2}\omega^{\text{B}}\wedge d\omega^{\text{C}} f_{\text{BC}}{}^{\text{A}} + dR^{\text{A}}.$$

Поскольку $\omega^{\text{A}}(\widetilde{X}) = 0$, если вектор $\widetilde{X}$ горизонтален, то

$$dR^{\text{A}}(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) = 0$$

если все три вектора горизонтальны.

Теорема 13.2.4. *Пусть ω – форма связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и φ – произвольная тензориальная 1-форма типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$. Тогда*

$$D\varphi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = d\varphi(\widetilde{X},\widetilde{Y}) + \frac{1}{2}[\varphi(\widetilde{X}),\omega(\widetilde{Y})] + \frac{1}{2}[\omega(\widetilde{X}),\varphi(\widetilde{Y})]$$

для всех $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P})$ и $p\in\mathbb{P}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 13.2.1 о структурном уравнении. См., например, [3], глава II, предложение 5.5.

Пример 13.2.6 (Локальное рассмотрение). Запишем тождества Бианки в компонентах. Внешняя производная от компонент формы кривизны (13.34) имеет вид

$$\begin{aligned} dR^{\text{A}} &= \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma\partial_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} + \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge\omega^{*\text{B}}L^*_{\text{B}}R_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = \\ &= \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge dx^\gamma\partial_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} - \frac{1}{2}dx^\alpha\wedge dx^\beta\wedge\omega^{*\text{B}}R_{\alpha\beta}{}^{\text{C}}f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}. \end{aligned}$$

Ее значение на горизонтальных векторных полях равно

$$dR^{\text{A}}(\mathsf{h}\widetilde{X},\mathsf{h}\widetilde{Y},\mathsf{h}\widetilde{Z}) = 3\widetilde{X}^\alpha\widetilde{Y}^\beta\widetilde{Z}^\alpha D_{[\alpha}R_{\beta\gamma]}{}^{\text{A}},$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по трем индексам, и

$$D_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} = \partial_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} + \omega_\alpha{}^{\text{B}}R_{\beta\gamma}{}^{\text{C}}f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}.$$

Таким образом, тождества Бианки в компонентах имеют вид

$$D_\alpha R_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} + D_\beta R_{\gamma\alpha}{}^{\text{A}} + D_\gamma R_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = 0. \tag{13.46}$$

Если задано локальное сечение расслоения, то эти тождества можно спустить на базу, используя отображение диференциальных форм. Тогда тождества Бианки для компонент локальных форм кривизны и связности примут следующий вид

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha}{}^{\text{A}} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}} = 0,$$

где

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma}{}^{\text{A}} + A_\alpha{}^{\text{B}}F_{\beta\gamma}{}^{\text{C}}f_{\text{BC}}{}^{\text{A}}$$

и напряженность $F_{\alpha\beta}{}^{\text{A}}$ имеет вид (13.35). Именно в таком виде они, как правило, используются в приложениях.

13.2.1. Связность на $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2,\pi,\mathbb{R})=\mathbb{R}^3$. Чтобы лучше представить себе довольно сложное понятие связности на главном расслоении, в настоящем разделе мы рассмотрим простой и наглядный пример, когда пространство главного расслоение совпадает с обычным трехмерным евклидовым пространством.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат x, y, z как главное расслоение. В качестве базы расслоения выберем плоскость $x, y \in \mathbb{R}^2$, а типичным слоем будем считать ось $z \in \mathbb{R}$, которая рассматривается, как группа трансляций. Выберем также естественную проекцию

$$\pi: \ \mathbb{R}^3 \ni \quad (x,y,z) \mapsto (x,y) \quad \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, построено гладкое тривиальное главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2,\pi,\mathbb{R})=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$.

Вертикальные подпространства $\mathbb{V}(\mathbb{P})$ в касательном расслоении $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ одномерны, и в каждой точке $p=(x,y,z)\in\mathbb{P}$ натянуты на векторы, параллельные оси z.

Зададим на главном расслоении связность, т.е. инвариантное распределение горизонтальных подпространств. Для этого можно задать достаточно гладкую поверхность $z(x,y)$, где $x,y\in\mathbb{R}^2$ – координаты на поверхности. Тем самым мы выбираем сечение главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2,\pi,\mathbb{R})$. После этого мы сдвигаем поверхность на все возможные постоянные векторы вдоль оси z. Теперь отождествим распределение горизонтальных подпространств с касательными пространствами ко всем поверхностям. По построению, такое распределение будет инвариантно относительно трансляций. При этом мы требуем также выполнение неравенств

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ne\infty, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\ne\infty, \qquad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

Это является необходимым и достаточным условием разложения касательного пространства

$$\mathbb{T}_p(\mathbb{P})=\mathbb{V}_p(\mathbb{P})\oplus\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$$

в каждой точке $p\in\mathbb{P}$ в прямую сумму вертикальных $\mathbb{V}_p(\mathbb{P})$ и горизонтальных $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ подпространств. Таким образом, мы построили связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2,\pi,\mathbb{R})$.

Рассмотрим касательный вектор к главному расслоению в координатном базисе

$$\widetilde{X}=\widetilde{X}^x\partial_x+\widetilde{X}^y\partial_y+\widetilde{X}^z\partial_z\in\mathbb{T}_p(\mathbb{P}).$$

Он раскладывается единственным образом на вертикальную и горизонтальные составляющие

$$\widetilde{X}=\mathsf{v}\widetilde{X}+\mathsf{h}\widetilde{X},$$

где

$$\mathsf{v}\widetilde{X}=\widetilde{X}^z\partial_z-\widetilde{X}^x\frac{\partial z}{\partial x}\partial_z-\widetilde{X}^y\frac{\partial z}{\partial y}\partial_z, \tag{13.47}$$

$$\mathsf{h}\widetilde{X}=\widetilde{X}^x\partial_x+\widetilde{X}^y\partial_y+\widetilde{X}^x\frac{\partial z}{\partial x}\partial_z+\widetilde{X}^y\frac{\partial z}{\partial y}\partial_z. \tag{13.48}$$

Форма связности $\omega=dx\omega_x+dy\omega_y+dz$ в рассматриваемом случае имеет только две неизвестные компоненты: ω_x и ω_y, так как структурная группа одномерна, и $L_{\text{A}}\mapsto\partial_z$ и $\omega^{*\text{A}}\mapsto dz$. Сравнение разложения (13.48) с общей формулой (13.7) показывает, что компоненты связности имеют вид

$$\omega_x=-\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \omega_y=-\frac{\partial z}{\partial y}.$$

В рассматриваемом случае компоненты формы связности не зависят от z в силу трансляционной инвариантности. Легко видеть, что значение формы связности на любом горизонтальном векторном поле равно нулю:

$$\omega(\mathsf{h}\widetilde{X})=0. \tag{13.49}$$

Верно также и обратное утверждение: любое решение уравнения (13.49) имеет вид (13.47).

Единственная возможная нетривиальная компонента тензора кривизны равна нулю:

$$R_{xy}=\partial_x\omega_y-\partial_y\omega_x=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0.$$

Рассмотрим произвольное сечение главного расслоения

$$\sigma: \qquad \mathbb{R}^2 \ni \quad (x,y) \mapsto (x,y,w(x,y)) \quad \in \mathbb{R}^3. \tag{13.50}$$

Дифференциал этого отображения отображает касательные векторы к базе в касательные векторы к пространству главного расслоения

$$\mathbb{T}(\mathbb{R}^2) \ni \quad X = X^x\partial_x + X^y\partial_y \mapsto \sigma_* X = X^z\partial_x + X^y\partial_y + X^x\frac{\partial w}{\partial x}\partial_z + X^y\frac{\partial w}{\partial y}\partial_z \quad \in \mathbb{T}(\mathbb{R}^2).$$

Из равенства $\omega_\sigma(X) = \omega(\sigma_* X)$ следуют выражения для компонент локальной формы связности $\omega_\sigma = dxA_x + dyA_y$:

$$A_x = \frac{\partial(w-z)}{\partial x}, \qquad A_y = \frac{\partial(w-z)}{\partial y}.$$

Если задано другое сечение $w'(x,y)$, то компоненты локальной формы связности преобразуются по правилу

$$A'_x = A_x + \partial_x a, \qquad A'_y = A_y + \partial_y a, \tag{13.51}$$

где $a(x,y) := w'(x,y) - w(x,y)$.

Заметим, что сама форма связности вообще никак не преобразуется при изменении сечений, так как задана на пространстве расслоения и определена до рассмотрения каких либо сечений.

Локальная форма кривизны для введенной выше связности также равна нулю.

Таким образом, построенная связность является плоской. Распределение горизонтальных векторных полей в данном случае находится в инволюции и, согласно теореме Фробениуса, через каждую точку проходит интегральное подмногообразие. Им является поверхность $z(x,y)$, проходящая через эту точку.

Выше мы рассмотрели связность специального вида, которая задается поверхностями $z(x,y)$. В общем случае распределение горизонтальных векторных полей задается произвольной формой связности

$$\omega = dx\omega_x + dy\omega_y + dz,$$

где ω_x и ω_y – некоторые достаточно гладкие функции от x, y. Теперь форма кривизны может иметь нетривиальную компоненту

$$R_{xy} = \partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x.$$

Если задано сечение (13.50), то компоненты локальной формы связности $\omega_\sigma = dxA_x + dyA_y$ будут иметь вид

$$A_x = \omega_x + \partial_x w, \qquad A_y = \omega_y + \partial_y w.$$

Калибровочное преобразование при переходе к другому сечению при этом останется прежним (13.51).

Локальная форма кривизны в общем случае имеет одну независимую компоненту

$$F_{xy} = \partial_x A_y - \partial_y A_x,$$

которая может быть нетривиальной.

13.3. Параллельный перенос

Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задана связность $\Gamma : \mathbb{P} \ni p \mapsto \mathbb{H}_p \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{P})$. Определим понятие параллельного переноса слоя $\pi^{-1}(x_0)$ над точкой базы $x_0 \in \mathbb{M}$ вдоль произвольной кусочно дифференцируемой кривой

$$\gamma: \quad [0,1] \ni \quad t \mapsto x(t) \quad \in \mathbb{M} \tag{13.52}$$

с началом в точке x_0. Для наших целей достаточно рассматривать кусочно дифференцируемые кривые класса $\mathcal{C}^1$.

Определение. *Горизонтальной кривой* в $\mathbb{P}$ называется кусочно дифференцируемая кривая, все касательные векторы которой горизонтальны. *Горизонтальным лифтом* или *подъемом* (или просто *лифтом*) кривой γ (13.52), заданной на базе $\mathbb{M}$, называется горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$,

$$\tilde\gamma: \quad [0,1] \ni \quad t \mapsto p(t) \quad \in \mathbb{P},$$

такая, что $\pi \circ \tilde\gamma = \gamma$.

Понятие горизонтального лифта кривой соответствует понятию лифта векторного поля. Действительно, если $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{P})$ – лифт дифференцируемого векторного поля X, заданного на базе $\mathbb{M}$, то интегральная кривая $\tilde{\gamma}$ векторного поля $\widetilde{X}$, проходящая через точку $p_0 \in \mathbb{P}$, есть горизонтальный лифт интегральной кривой γ поля X, проходящей через точку $x_0 = \pi(p_0)$.

Предложение 13.3.1. *Пусть $\gamma = x(t)$, $t \in [0,1]$, – кусочно дифференцируемая кривая класса $\mathcal{C}^1$ в $\mathbb{M}$ с началом в точке $x_0 \in \mathbb{M}$. Тогда для произвольной точки слоя $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ существует единственный горизонтальный лифт $\tilde{\gamma} = p(t)$ кривой γ с началом в точке p_0.*

Доказательство. Состоит в явном построении лифта $\tilde{\gamma}$. См., например, [3, гл. II, предложение 3.1].

Используя предложение 13.3.1, определим параллельное перенесение слоев следующим образом.

Определение. Пусть $\gamma = x(t)$ – кривая в $\mathbb{M}$ с началом и концом в точках x_0 и x_1. Пусть $\tilde{\gamma}$ – единственный горизонтальный лифт кривой γ, который начинается в точке p_0, находящейся в слое $\pi^{-1}(x_0)$. Лифт $\tilde{\gamma}$ имеет конечную точку $p_1 \in \mathbb{P}$ такую, что $\pi(p_1) = x_1$. Меняя начальную точку p_0 в слое $\pi^{-1}(x_0)$, мы получаем отображение слоя $\pi^{-1}(x_0)$ в слой $\pi^{-1}(x_1)$, которое переводит точку p_0 в p_1. Это отображение называется *параллельным переносом слоя* из точки x_0 в точку x_1 вдоль кривой γ. Параллельный перенос слоев обозначается той же буквой, что и кривая, $\gamma : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$.

Параллельный перенос слоев является изоморфизмом, что вытекает из следующего утверждения.

Предложение 13.3.2. *Параллельный перенос слоя $\gamma : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$ вдоль любой кривой перестановочен с действием структурной группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{P}$: $\gamma \circ r_a = r_a \circ \gamma$ для всех $a \in \mathbb{G}$.*

Доказательство. Следует из того, что правое действие структурной группы r_a отображает каждую горизонтальную кривую в горизонтальную, см. рис.13.1.

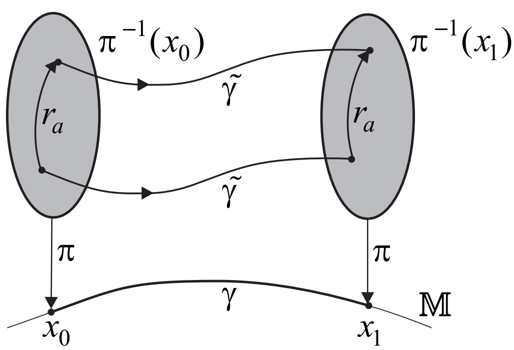

Рис. 13.1. Параллельный перенос слоев вдоль кривой γ.

Параллельный перенос слоя вдоль кривой γ не зависит от выбора параметризации кривой. Кроме того, если слой переносится из точки x_0 в точку x_1 параллельно вдоль кривой γ, то он параллельно переносится вдоль этой же кривой из точки x_0 в любую промежуточную точку $x(t)$, $t \in [0,1]$, на γ.

Замечание. Если точки x_0 и x_1 в базе $\mathbb{M}$ фиксированы, то в общем случае параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x_0)$ в слой $\pi^{-1}(x_1)$ зависит от кривой γ, соединяющей эти точки. Для односвязных баз эта зависимость характеризуется формой кривизны R формы связности ω и будет обсуждаться в следующих разделах.

При рассмотрении фундаментальной группы в разделе 10.3 мы определили произведение путей (кривых) $\gamma_2 \circ \gamma_1$ как последовательный проход вдоль путей γ_1 и γ_2 (10.4) и обратный путь γ^{-1} как путь γ, проходимый в обратном направлении (10.5). Следующее предложение очевидно.

Предложение 13.3.3. 1) *Если γ_1 – путь из x_0 в x_1 и γ_2 – путь из x_1 в x_2, то параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x_0)$ в слой $\pi^{-1}(x_2)$ вдоль произведения путей $\gamma_2 \circ \gamma_1$ равен произведению отображений слоев $\gamma_2 \circ \gamma_1 : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_2)$.*

2) *Если γ^{-1} – обратный путь для пути γ из точки x_0 в точку x_1, то параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x_1)$ в слой $\pi^{-1}(x_0)$ вдоль пути γ^{-1} является обратным отображением $\gamma^{-1} = \gamma^{-1} : \pi^{-1}(x_1) \to \pi^{-1}(x_0)$.*

13.4. Группы голономии

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ со связностью Γ. Используя понятие параллельного переноса, определим группу голономии данной связности Γ.

Обозначим через $\Omega(\mathbb{M},x)$ множество замкнутых кусочно дифференцируемых кривых (петель) на базе $\mathbb{M}$ с началом и концом в точке $x\in\mathbb{M}$. Подмножество, состоящее из путей, гомотопных постоянному пути в точке x, обозначим $\Omega_0(\mathbb{M},x)\subset\Omega(\mathbb{M},x)$. Произведение и обратный путь для всех путей из $\Omega(\mathbb{M},x)$ были определены в разделе 10.3. В разделе 13.3 было показано, что параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x)$ вдоль замкнутого пути $\gamma\in\Omega(\mathbb{M},x)$ есть изоморфизм слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя. В общем случае этот изоморфизм будет нетривиален, так как после параллельного переноса вдоль замкнутого пути слой может повернуться. Множество всех таких изоморфизмов образует группу в силу предложения 13.3.3.

Определение. Группа, состоящая из изоморфизмов слоя $\pi^{-1}(x)$, которые соответствуют параллельным переносам данного слоя вдоль всех замкнутых кусочно дифференцируемых путей $\gamma\in\Omega(\mathbb{M},x)$, называется *группой голономии* $\Phi(x)$ связности Γ в точке $x\in\mathbb{M}$. Подгруппа $\Phi_0(x)\subset\Phi(x)$, соответствующая параллельным переносам вдоль замкнутых путей, стягиваемых в точку, $\gamma\in\Omega_0(\mathbb{M},x)$, называется *суженной группой голономии* связности Γ в точке $x\in\mathbb{M}$.

Группу голономии $\Phi(x)$ и суженную группу голономии $\Phi_0(x)$ можно считать подгруппами в структурной группе $\mathbb{G}$ следующим образом.

Определение. Зафиксируем некоторую точку слоя $p\in\pi^{-1}(x)$. После параллельного переноса слоя вдоль пути $\gamma\in\Omega(\mathbb{M},x)$ эта точка отобразится в некоторую точку $\gamma(p)=pa\in\pi^{-1}(x)$, где $a\in\mathbb{G}$ – некоторый элемент структурной группы. Если задан другой путь $\gamma'\in\Omega(\mathbb{M},x)$, которому соответствует элемент $b\in\mathbb{G}$, то произведение путей $\gamma'\circ\gamma$ определяет элемент $ba\in\mathbb{G}$, поскольку

$$\gamma'\circ\gamma(p)=\gamma'(pa)=(\gamma'(p))a=pba.$$

По предложению 13.3.3 множество элементов $a\in\mathbb{G}$, определенных всеми путями $\gamma\in\Omega(x)$, образует группу, которая называется *группой голономии* $\Phi(p)$ связности Γ в точке $p\in\mathbb{P}$. Замкнутым путям $\gamma\in\Omega_0(\mathbb{M},x)$ соответствует *суженная группа голономии* $\Phi_0(p)$ в точке $p\in\mathbb{P}$.

Замечание. $\Phi(x)$ есть группа изоморфизмов слоя $\pi^{-1}(x)$ на себя, а $\Phi(p)$ есть подгруппа в $\mathbb{G}$. Выше мы построили единственный изоморфизм из $\Phi(x)$ на $\Phi(p)$, который делает коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\mathbb{M},x) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\Phi(x) \arrow[r] & \Phi(p)
\end{tikzcd}$$

Группу голономии $\Phi(p)$ можно определить другим образом. Введем на пространстве главного расслоения отношение эквивалентности $p\sim q$, где $p,q\in\mathbb{P}$, если точки p и q можно можно соединить горизонтальной кривой. При этом точки p и q не обязательно лежат в одном слое. Нетрудно проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Тогда группа голономии $\Phi(p)$ совпадает с множеством тех элементов $a\in\mathbb{G}$, для которых $p\sim pa$. Легко проверить, что это множество элементов образует подгруппу в $\mathbb{G}$, так как $p\sim q$ влечет за собой $pa\sim qa$.

Предложение 13.4.1. *Пусть дано главное расслоение* $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ *со связностью* Γ. *Тогда*:
1) *Если* $q=pa$, $a\in\mathbb{G}$, *то* $\Phi(q)=\mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi(p)$, *т.е. группы голономии точек одного слоя* $\Phi(q)$ *и* $\Phi(p)$ *сопряжены в* $\mathbb{G}$; *аналогично*, $\Phi_0(q)=\mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi_0(p)$.
2) *Если точки* $p,q\in\mathbb{P}$ *можно соединить горизонтальной кривой, т.е.* $p\sim q$, *то* $\Phi(p)=\Phi(q)$ *и* $\Phi_0(p)=\Phi_0(q)$.

Доказательство. 1). Пусть $b\in\Phi(p)$, т.е. $p\sim pb$. Тогда $pa\sim pba$ и, следовательно, $q\sim qa^{-1}ba$. Поэтому $\mathsf{ad}\,(a^{-1})b=a^{-1}ba\in\Phi(q)$. Отсюда вытекает, что $\Phi(q)=\mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi(p)$ и $\Phi_0(q)=\mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi_0(p)$.

2) Отношение $p\sim q$ влечет за собой $pb\sim qb$. Из транзитивности отношения эквивалентности $\sim$ следует, что $p\sim pb$ тогда и только тогда, когда $q\sim qb$, т.е. $b\in\Phi(p)$ тогда и только тогда, когда $b\in\Phi(q)$. Тем

самым, $\Phi(p) = \Phi(q)$. Чтобы доказать равенство $\Phi_0(p) = \Phi_0(q)$, допустим, что $\tilde{\delta}$ – горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$ из p в q. Если $b \in \Phi_0(p)$, то существует горизонтальная кривая $\tilde{\gamma}$ в $\mathbb{P}$ из p в pb такая, что кривая в базе $\pi\tilde{\gamma}$ является замкнутым путем с началом и концом в точке $\pi(p)$, которая гомотопна постоянному пути в точке $\pi(p)$. Тогда композиция $(r_b\tilde{\delta}) \circ \tilde{\gamma} \circ \tilde{\delta}^{-1}$ есть горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$ из q в qb и ее проекция на базу $\mathbb{M}$ есть замкнутый путь с началом и концом в точке $\pi(q)$, который гомотопен постоянному пути. Поэтому $b \in \Phi_0(q)$.

Если база $\mathbb{M}$ связна, то для любой пары точек $p, q \in \mathbb{P}$ найдется элемент $a \in \mathbb{G}$ такой, что $q \sim pa$. Поэтому из предложения 13.4.1 следует, что группы голономии $\Phi(p)$ для всех точек $p \in \mathbb{P}$ сопряжены друг другу в $\mathbb{G}$ и поэтому изоморфны. По тем же причинам все суженные группы голономии $\Phi_0(p)$ также изоморфны друг другу.

Итак, мы определили группу голономии $\Phi(p)$, суженную группу голономии $\Phi_0(p)$ и показали, что с точностью до преобразования подобия они не зависят от точки расслоения $\mathbb{P}$. Теперь сформулируем несколько общих свойств групп голономий.

Теорема 13.4.1. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение со связной базой $\mathbb{M}$. Пусть $\Phi(p)$ и $\Phi_0(p)$ – группа голономии и суженная группа голономии связности Γ в точке $p \in \mathbb{P}$. Тогда*:

1) $\Phi_0(p)$ *есть связная подгруппа Ли в* $\Phi(p)$;
2) $\Phi_0(p)$ *есть нормальная подгруппа в* $\Phi(p)$ *и фактор группа* $\Phi(p)/\Phi_0(p)$ *счетна.*

Доказательство. Используется паракомпактность базы $\mathbb{M}$. См., например, [3], глава II, теорема 4.2.

Следствие. *Группа голономии $\Phi(p)$ является подгруппой Ли в структурной группе $\mathbb{G}$ с компонентой единицы $\Phi_0(p)$. В частности,* $\dim \Phi(p) = \dim \Phi_0(p)$.

При определении групп голономий мы не оговорили класс дифференцируемости рассматриваемых кусочно дифференцируемых кривых $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, x)$. Чем ниже класс дифференцируемости, тем больше множество кривых. Поэтому могло бы оказаться так, что группы голономии зависят от класса дифференцируемости кривых. Это оказывается не верно. Пусть $\Omega^k(\mathbb{M}, x)$ – множество замкнутых кусочно дифференцируемых путей в $\mathbb{M}$ с началом и концом в точке $x \in \mathbb{M}$ класса $\mathcal{C}^k$. Обозначим соответствующую группу голономии через $\Phi^k(p)$. Очевидно, что $\Phi^1(p) \supset \Phi^2(p) \supset \cdots \supset \Phi^\infty(p)$. Верны также и обратные включения.

Теорема 13.4.2 (Номидзу, Одзеки). *Все группы голономии $\Phi^k(p)$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, совпадают.*

Доказательство. См. [60].

Следствие. *Все суженные группы голономии $\Phi_0^k(p)$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, совпадают.*

Доказательство. Согласно теореме 13.4.1 суженная группа голономии $\Phi_0^k(p)$ есть связная компонента единицы группы $\Phi^k(p)$.

Замечание. В случае, когда $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ является вещественно аналитическим главным расслоением с аналитической связностью Γ, можно определить группу голономии $\Phi^\omega(p)$, используя только кусочно аналитические кривые. Можно доказать, что $\Phi^\omega(p) = \Phi^1(p)$ и $\Phi_0^\omega(p) = \Phi_0^1(p)$ [3], глава II, замечание после следствия 7.3.

Поскольку группы голономии не зависят от класса дифференцируемости путей, то в дальнейшем мы не будем его указывать.

13.5. Петля Вильсона

Настоящий раздел посвящен одному из способов вычисления группы голономии. Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связностью Γ. Рассмотрим окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ с координатами x^α, $\alpha = 1, \dots, n$, содержащую точку базы $x_0 \in \mathbb{M}$, и отождествим подрасслоение $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ с прямым произведением $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$. Тогда точка подрасслоения задается парой элементов $p = (x, a) \in \mathbb{U} \times \mathbb{G}$. Пусть $\gamma = x(t)$ – произвольная кривая в $\mathbb{U}$ с началом в точке x_0 и $\tilde{\gamma} = (x(t), a(t))$ – ее единственный горизонтальный лифт с началом в точке $p_0 = (x_0, a_0)$. При этом функция $a(t)$ определяет некоторую кривую в структурной группе $\mathbb{G}$ с началом в точке a_0. В инвариантном виде мы пишем

$$\tilde{\gamma} = \overset{\circ}{\gamma} \circ a(t), \tag{13.53}$$

где $\overset{\circ}{\gamma} = (x(t), e)$ – опорная кривая в $\pi^{-1}(\mathbb{U})$, лежащая в нулевом сечении, для которой $\pi(\overset{\circ}{\gamma}) = \gamma$. При этом мы рассматриваем равенство (13.53) как уравнение на $a(t)$ при заданной кривой γ, которая однозначно определяет опорную кривую $\overset{\circ}{\gamma}$.

Касательный вектор к горизонтальной кривой $\tilde{\gamma}$ имеет вид $\dot{\tilde{\gamma}} = (\dot{x}, \dot{a})$. Уравнение для $a(t)$ получается из условия горизонтальности. Рассмотрим окрестность единицы группы, где форма связности имеет вид (13.5). Горизонтальность касательного вектора к кривой записывается в виде равенства

$$\omega(\dot{\tilde{\gamma}}) = (\dot{x}^\alpha \omega_\alpha{}^{\rm A} + \dot{a}^{\rm B} L^{-1}{}_{\rm B}{}^{\rm A}) L_{\rm A} = 0.$$

Отсюда следует система уравнений на $a^{\rm A}(t)$:

$$\dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\rm B} S^{-1}{}_{\rm B}{}^{\rm A} + \dot{a}^{\rm B} L^{-1}{}_{\rm B}{}^{\rm A} = 0, \tag{13.54}$$

где $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\rm A}(x)$ – компоненты локальной формы связности на нулевом сечении (поле Янга–Миллса) и $S_{\rm B}{}^{\rm A}(a)$ – матрица присоединенного представления, соответствующая элементу $a \in \mathbb{G}$.

Уравнение (13.54) неудобно для приложений, так как содержит матрицу $L^{-1}_{\rm B}{}^{\rm A}(a)$, которая определена только в окрестности единицы группы. Чтобы устранить это неудобство, перейдем к какому либо представлению структурной группы

$$\rho: \quad \mathbb{G} \ni \quad a \mapsto (S^{-1}{}_j{}^i(a)) \quad \in \mathsf{aut}\,\mathbb{V}, \qquad i,j = 1, \dots, \mathsf{dim}\,\mathbb{V}.$$

Мы выбрали представление в виде обратных матриц, чтобы не менять общепринятого определения упорядоченного (хронологического) произведения, которое будет дано ниже. Теперь заметим, что

$$\dot{S}^{-1}{}_i{}^j = \dot{a}^{\rm A} \partial_{\rm A} S^{-1}{}_i{}^j = \dot{a}^{\rm B} L^{-1}{}_{\rm B}{}^{\rm A} L_{\rm A} S^{-1}{}_i{}^j = \dot{a}^{\rm B} L^{-1}{}_{\rm B}{}^{\rm A} S^{-1}{}_i{}^k L_{{\rm A}k}{}^j,$$

где $L_{{\rm A}i}{}^j$ – представление генераторов $L_{\rm A}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и мы воспользовались правилом дифференцирования матриц представления (8.64). Умножив уравнение (13.54) на $S^{-1}{}_i{}^k L_{{\rm A}k}{}^j$ и воспользовавшись инвариантностью генераторов $L_{{\rm A}i}{}^j$ (8.66), получаем уравнение на матрицу представления

$$\dot{S}^{-1}{}_i{}^j - \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_{\alpha i}{}^k S^{-1}{}_k{}^j = 0,$$

где $\overset{\circ}{A}_{\alpha i}{}^j := -\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\rm A} L_{{\rm A}i}{}^j$. Это уравнение можно переписать в почти ковариантном виде

$$\dot{x}^\alpha (\partial_\alpha S^{-1}{}_i{}^j - \overset{\circ}{A}_{\alpha i}{}^k S^{-1}{}_k{}^j) = 0.$$

Для ковариантности не хватает одного слагаемого с калибровочным полем для индекса j. Опустив, для краткости, матричные индексы, получаем уравнение

$$\dot{S}^{-1} = \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1}, \tag{13.55}$$

которое можно записать в интегральном виде:

$$S^{-1}(t) = S_0^{-1} + \int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1} = S_0^{-1} + \int_{x(0)}^{x(t)} dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha S^{-1}.$$

где $S_0^{-1} := S^{-1}(a_0)$, точка обозначает дифференцирование по s и второй интеграл берется вдоль кривой γ от точки $x(0)$ до точки $x(t)$. Решение этого уравнения записывается в виде упорядоченной P-экспоненты

$$S^{-1}(t) = \mathsf{P}\exp\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha \right) S_0^{-1}, \tag{13.56}$$

которая определена разложением в ряд

$$\mathsf{P}\exp\left(\int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha \right) := 1 + \int_0^t ds\, \dot{x}^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2\, \dot{x}^{\alpha_1} \overset{\circ}{A}_{\alpha_1} \dot{x}^{\alpha_2} \overset{\circ}{A}_{\alpha_2} + \dots, \tag{13.57}$$

где

$$\dot{x}^{\alpha_k} \overset{\circ}{A}_{\alpha_k} := \frac{dx^{\alpha_k}(s_k)}{ds_k} \overset{\circ}{A}_{\alpha_k}(s_k), \qquad \forall\, k = 1, 2, \dots.$$

Напомним общее определение P-произведения.

Определение. Пусть задано семейство операторов $A(t)$, непрерывно зависящих от вещественного параметра t, тогда

$$\mathsf{P}[A(t_1)A(t_2)] := \begin{cases} A(t_1)A(t_2), & t_1 \geqslant t_2, \\ A(t_2)A(t_1), & t_1 < t_2 \end{cases} \tag{13.58}$$

называется P-*произведением* или *упорядоченным произведением* операторов $A(t_1)$ и $A(t_2)$.

Если операторы для различных точек коммутируют, то P-произведение совпадает с обычным произведением.

Замечание. В квантовой теории поля роль параметра t часто играет время. Поэтому P-произведение называют также *хронологическим произведением.*

Нетрудно проверить равенство

$$\int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{k-1}} ds_k A(s_1)A(s_2)\dots A(s_k) = \frac{1}{k!}\int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \dots \int_0^t ds_k \mathsf{P}[A(s_1)A(s_2)\dots A(s_k)].$$

Поэтому разложение (13.57) имеет место.

Известно, что ряд (13.57) равномерно сходится в шаре произвольного радиуса.

Продолжим общее построение. Если представление структурной группы является точным, то матрица представления $S^{-1}(a)$ однозначно определяет элемент структурной группы $a = \rho^{-1}(S^{-1})$. В этом случае решение (13.56) определяет кривую $a(t)$ с началом в точке $a_0 \in \mathbb{G}$. Меняя точку a_0, мы получаем отображение

$$\pi^{-1}(x_0) \ni \quad (x_0, a_0) \mapsto (x(t), a(t)) \quad \in \pi^{-1}(x(t)), \qquad \forall\, a_0 \in \mathbb{G}. \tag{13.59}$$

Поскольку кривая $\tilde\gamma$ горизонтальна, то это отображение задает параллельный перенос слоя $\pi^{-1}(x_0)$ главного расслоения $\mathbb{P}$ вдоль пути $\gamma \in \mathbb{M}$.

Таким образом, решение (13.56) определяет параллельный перенос слоев (13.59) через компоненты связности $\overset{\circ}{A}_\alpha$ на опорном нулевом сечении. Отображение (13.59) можно построить для произвольного опорного сечения следующим образом. Пусть задано произвольное сечение $\sigma(x) = (x, b(x))$. Тогда компоненты локальной формы связности для рассматриваемого представления на этом сечении имеют вид (13.15)

$$A_\alpha = S_b \overset{\circ}{A}_\alpha S_b^{-1} + \partial_\alpha S_b S_b^{-1}, \qquad S_b := S(b).$$

Для горизонтальной кривой $\tilde\gamma$ имеем равенство

$$\tilde\gamma = (x(t), a(t)) = (x(t), b(t)c(t)), \tag{13.60}$$

где $c(t)$ – некоторая новая кривая в $\mathbb{G}$, связывающая кривую $(x(t), b(t))$ на сечении σ с горизонтальной кривой $\tilde\gamma$. Поскольку $S_a^{-1} = S_b^{-1} S_c^{-1}$, то простые вычисления приводят (13.55) к уравнению

$$\dot S_c^{-1} = \dot x^\alpha A_\alpha S_c^{-1},$$

определяющему кривую $c(t)$ с начальным условием $c_0 = b_0^{-1} a_0$. Решение этого уравнения также дается упорядоченной экспонентой

$$S_c^{-1}(t) = \mathsf{P}\exp\left(\int_0^t ds\, \dot x^\alpha A_\alpha\right) S_{c(0)}^{-1}.$$

Эта формула также определяет параллельный перенос (13.59), что следует из (13.60).

Поскольку $S_0^{-1} = S_{b(0)}^{-1} S_{c(0)}^{-1}$, то простые вычисления приводят к следующему правилу преобразования упорядоченной экспоненты при изменении сечения $\sigma_0 \mapsto \sigma$

$$\mathsf{P}\exp\left(\int_0^t ds\, \dot x^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) = S(b_0)\mathsf{P}\exp\left(\int_0^t ds\, \dot x^\alpha A_\alpha\right) S^{-1}(b_t). \tag{13.61}$$

Этот закон преобразования похож на тензорный, однако таковым не является, потому что слева и справа стоят матрицы преобразования, взятые в различных точках: в начале и конце пути.

Если задано два произвольных сечения (13.10) то имеет место аналогичная формула.

Рассмотрим замкнутый путь в базе $\gamma \in \Omega(\mathbb{U}, x_0)$. Поскольку мы ограничились координатной окрестностью $\mathbb{U}$, то все пути стягиваемы к точке x_0 (гомотопны постоянному пути в x_0). Для этих путей $S(1) = S(0)$ и P-экспонента при калибровочном преобразовании $\sigma_0 \mapsto \sigma$ преобразуется по тензорному закону

$$\mathsf{P}\exp\left(\oint_\gamma dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) = S(b_0)\mathsf{P}\exp\left(\oint_\gamma dx^\alpha A_\alpha\right) S^{-1}(b_0). \tag{13.62}$$

При параллельном переносе слоя $\pi^{-1}(x_0)$ вдоль замкнутого пути γ точка $p_0 = (x_0, a_0)$ отобразится в точку $p_1 = (x_0, a_1)$. Пусть $a_0 = e$, тогда $S_0 = \mathbb{1}$. В этом случае

$$\hat{a} = \rho^{-1}\left[\mathsf{P}\exp\left(\oint_\gamma dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right)\right] \quad \in \Phi_0(\sigma_0(x_0)) \tag{13.63}$$

– элемент суженной группы голономии $\Phi_0(\sigma_0(x_0))$. Здесь мы предполагаем, что представление ρ является точным. Этот элемент определяется калибровочным полем, соответствующим нулевому сечению σ_0, которое проходит через начальную точку кривой (x_0, e). Если $a_0 \neq e$, то элемент группы голономии имеет вид $a_0^{-1}a_1 \in \Phi_0(p_0)$ и равен

$$\rho^{-1}\left[S_0^{-1}\mathsf{P}\exp\left(\oint_\gamma dx^\alpha \overset{\circ}{A}_\alpha\right) S_0\right] = a_0^{-1}\hat{a}a_0 \quad \in \Phi_0(\sigma(x_0)).$$

То есть он сопряжен элементу $\hat{a}$ в соответствии с утверждением 1) предложения 13.4.1.

Поскольку P-экспонента для замкнутого пути при изменении сечения преобразуется по тензорному закону (13.62), то для произвольного сечения σ P-экспонента определяет элемент суженной группы голономии $\Phi_0(\sigma(x_0))$,

$$\rho^{-1}\left[\mathsf{P}\exp\left(\oint_\gamma dx^\alpha A_\alpha\right)\right] \quad \in \Phi_0(\sigma(x_0)), \tag{13.64}$$

где A_α – калибровочное поле, соответствующее произвольному сечению, проходящему через точку $\sigma(x_0) \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Таким образом, рассматривая все замкнутые пути $\gamma \in \mathbb{M}$ с началом в точке x_0, можно определить суженную группу голономии.

Определение. След от P-экспоненты

$$W_\gamma[A] := \operatorname{tr}\left[\mathsf{P}\exp\left(\oint_\gamma dx^\alpha A_\alpha\right)\right]. \tag{13.65}$$

называется *петлей Вильсона.*

Предложение 13.5.1. *Петля Вильсона инвариантна относительно калибровочных преобразований.*

Доказательство. Прямое следствие равенства (13.62).

Замечание. Петля Вильсона играет важную роль в решеточной формулировке квантовых калибровочных моделей.

Полученное выражение для упорядоченной экспоненты (13.56) не зависит от выбора координат на $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$. Это значит, что понятие упорядоченной экспоненты, которое было получено в одной карте, без труда переносится на произвольные пути в $\mathbb{M}$, которые в общем случае не покрываются одной картой. Для этого весь путь надо разбить на отрезки, каждый из которых покрывается одной картой, и взять сумму интегралов вдоль каждого отрезка.

13.6. Отображение связностей

В разделе 12.3 мы изучили отображение расслоений. В частности, было определено вложение (инъекция) расслоений, редукция структурной группы, а также индуцированное расслоение. Ниже мы изучим вопрос о том, как ведут себя связности и соответствующие им группы голономий при отображении расслоений. В дальнейшем эти результаты будут использованы при изучении групп голономий.

Предложение 13.6.1. *Пусть* $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ *– гомоморфизм главных расслоений, состоящий из дифференцируемого отображения пространств расслоений* $f_\mathbb{P} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ *и гомоморфизма структурных групп* $f_\mathbb{G} : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$, *такой, что индуцированное отображение баз* $f_\mathbb{M} : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ *есть диффеоморфизм. Пусть* Γ_1 *– связность на* $\mathbb{P}_1$ *с формой связности* ω_1 *и формой кривизны* R_1. *Тогда*:

1) *существует единственная связность* Γ_2 *на* $\mathbb{P}_2$ *такая, что* $f_\mathbb{P}$ *отображает горизонтальные подпространства связности* Γ_1 *в горизонтальные подпространства связности* Γ_2;
2) *если* ω_2 *и* R_2 *– формы связности и кривизны для* Γ_2, *то*
$$f^*_\mathbb{P}\omega_2 = f_\mathfrak{g}\omega_1 \qquad \text{и} \qquad f^*_\mathbb{P} R_2 = f_\mathfrak{g} R_1,$$
где правые части $f_\mathfrak{g}\omega_1$ *и* $f_\mathfrak{g}R_1$ *обозначают* $\mathfrak{g}_2$*-значные формы на* $\mathbb{P}_1$, *определенные соотношениями*:
$$(f_\mathfrak{g}\omega_1)(\widetilde{X}) = f_\mathfrak{g}(\omega_1(\widetilde{X})) \quad \text{и} \quad (f_\mathfrak{g}R_1)(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = f_\mathfrak{g}(R_1(\widetilde{X},\widetilde{Y})) \quad \forall\, \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathcal{X}(\mathbb{P}_1),$$
где $f_\mathfrak{g} := f_{\mathbb{G}*}$ *– гомоморфизм алгебр Ли* $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, *индуцированный отображением структурных групп* $f_\mathbb{G} : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ *(дифференциал отображения* $f_\mathbb{G}$*)*;
3) *если* $p_2 = f_\mathbb{P}(p_1) \in \mathbb{P}_2$ *– образ точки* $p_1 \in \mathbb{P}_1$, *то* $f_\mathbb{G}$ *гомоморфно отображает группу голономии* $\Phi(p_1)$ *в точке* p_1 *на* $\Phi(p_2)$ *и ограниченную группу голономии* $\Phi_0(p_1)$ *на* $\Phi_0(p_2)$.

Доказательство. Проводится путем явного построения связности Γ_2 на $\mathbb{P}_2$. См., например, [3], глава II, предложение 6.1.

Определение. В ситуации, описанной в предложении 13.6.1, говорят, что f отображает связность Γ_1 в связность Γ_2. В частном случае, если $\mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1)$ – редуцированное подрасслоение в $\mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$, т.е. $f_\mathbb{G}$ – мономорфизм, $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2 = \mathbb{M}$ и $f_\mathbb{M} = \mathsf{id}_\mathbb{M}$, то говорят, что связность Γ_2 на $\mathbb{P}_2$ *редуцируема* к связности Γ_1 на $\mathbb{P}_1$. Автоморфизм f главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ называется *автоморфизмом связности* Γ на $\mathbb{P}$, если он отображает Γ в Γ. В этом случае говорят, что связность Γ *инвариантна* относительно f.

Предложение 13.6.2. *Любая связность* Γ *на главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *инвариантна относительно вертикальных автоморфизмов (пример 12.3.1).*

Доказательство. Прямое следствие свойства 2) в определении связности.

Следствие. *Пусть* $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ *– подрасслоение в* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, *где* $\mathbb{H}$ *– подгруппа Ли в* $\mathbb{G}$. *Пусть* Γ *– связность на* $\mathbb{P}$ *с формой связности* ω. *Тогда связность* Γ *на* $\mathbb{P}$ *редуцируема к связности* Γ' *на* $\mathbb{Q}$ *тогда и только тогда, когда сужение формы связности* ω *на* $\mathbb{Q}$ *является* $\mathfrak{h}$*-значным, где* $\mathfrak{h}$ *– подалгебра Ли в* $\mathfrak{g}$, *соответствующая подгруппе Ли* $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$. *Если связность* Γ *редуцируема к* Γ', *то группы голономии* Φ *и суженные группы голономии* Φ_0 *для* $\mathbb{Q}$ *и* $\mathbb{P}$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть Γ' – связность на $\mathbb{Q}$. Ее форма связности, по определению, $\mathfrak{h}$-значна и по предложению 13.6.1 продолжается единственным образом до связности Γ на $\mathbb{P}$. Обратно. Если связность Γ на $\mathbb{P}$ редуцируема к связности на $\mathbb{Q}$, то сужение ω на $\mathbb{Q}$ $\mathfrak{h}$-значно. Пусть связность Γ редуцируема к Γ'. Отождествим множество точек $\mathbb{Q}$ с его образом $f_\mathbb{P}(\mathbb{Q})$ в $\mathbb{P}$. Тогда любая горизонтальная кривая в $\mathbb{P}$ с началом в произвольной точке $p' \in f_\mathbb{P}(\mathbb{Q})$ будет целиком лежать в $f_\mathbb{P}(\mathbb{Q})$, так как сужение распределения горизонтальных подпространств в $\mathbb{P}$ на $\mathbb{Q}$ совпадает со связностью на $\mathbb{Q}$. Поскольку группы голономии для всех точек $p \in \mathbb{P}$ изоморфны, то изоморфны также все группы голономии для $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{P}$.

Предложение 13.6.3. *Пусть* $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ *– подрасслоение в главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, *где* $\mathbb{H}$ *– подгруппа Ли в* $\mathbb{G}$. *Допустим, что алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *для* $\mathbb{G}$ *допускает подпространство* $\mathfrak{m}$ *такое, что* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ *и* $\mathsf{ad}(\mathbb{H})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, *где* $\mathfrak{h}$ *подалгебра Ли для* $\mathbb{H}$. *Тогда для каждой формы связности* ω *на* $\mathbb{P}$ $\mathfrak{h}$*-компонента* ω' *формы связности* ω, *суженная на* $\mathbb{Q}$ *является формой связности на* $\mathbb{Q}$.

Доказательство. См., например, [3], глава II, предложение 6.4.

Замечание. В силу следствия из предложения 13.6.1 форма связности ω' совпадает с ω на $\mathbb{Q}$.

В предложении 13.6.1 мы рассматривали отображение связности Γ_1 на $\mathbb{P}_1$ в некоторую связность Γ_2 на $\mathbb{P}_2$. При определенных условиях справедливо также обратное утверждение, и связность с $\mathbb{P}_2$ можно перенести на $\mathbb{P}_1$.

Предложение 13.6.4. *Пусть* $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}_1) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G}_2)$ *– гомоморфизм главных расслоений такой, что гомоморфизм структурных групп* $f_{\mathbb{G}} : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ *является изоморфизмом. Пусть* Γ_2 *– связность на* $\mathbb{P}_2$ *с формой связности* ω_2 *и формой кривизны* R_2*. Тогда*:

1) *Существует единственная связность* Γ_1 *на* $\mathbb{P}_1$ *такая, что* $f_{\mathbb{P}}$ *отображает горизонтальные подпространства связности* Γ_1 *в горизонтальные подпространства связности* Γ_2.
2) *Если* ω_1 *и* R_1 *– формы связности и кривизны для* Γ_1*, то*

$$f_{\mathbb{P}}^* \omega_2 = f_{\mathfrak{g}} \omega_1 \qquad и \qquad f_{\mathbb{P}}^* R_2 = f_{\mathfrak{g}} R_1,$$

где праве части определены в предложении 13.6.1.
3) *Если* $p_2 = f_{\mathbb{P}}(p_1) \in \mathbb{P}_2$ *– образ точки* $p_1 \in \mathbb{P}_1$*, то изоморфизм* $f_{\mathbb{G}}$ *гомоморфно отображает группу голономии* $\Phi(p_1)$ *в точке* p_1 *в* $\Phi(p_2)$ *и ограниченную группу голономии* $\Phi_0(p_1)$ *в* $\Phi_0(p_2)$.

Доказательство. Проводится путем явного построения связности Γ_1 на $\mathbb{P}_1$. См., например, [3], глава II, предложение 6.2.

Определение. В ситуации, описанной в предложении 13.6.4, говорят, что связность Γ_1 *индуцирована гомоморфизмом* f из связности Γ_2.

Следствие. *Пусть* $f : \mathbb{P}_1(\mathbb{M}_1, \pi_1, \mathbb{G}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{M}_2, \pi_2, \mathbb{G})$ *– отображение расслоений с одинаковой структурной группой такое, что* $f_{\mathbb{G}} = \mathsf{id}_{\mathbb{G}}$ *– тождественный автоморфизм. Если* ω_2 *– форма связности на* $\mathbb{P}_2$*, то отображение* $f_{\mathbb{P}}$ *индуцирует связность на* $\mathbb{P}_1$: $\omega_1 = f_{\mathbb{P}}^* \omega_2$*. В частности, для данного главного расслоения* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *и отображения баз* $f_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ *каждая связность на* $\mathbb{P}$ *индуцирует связность на* $f_{\mathbb{N}}^{-1}(\mathbb{P})$*. В частном случае, если* $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ *– открытое подмножество, то связность* Γ *на* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *индуцирует связность на индуцированном подрасслоении* $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$.

Замечание. В предложении 13.6.1 связность Γ_2 на $\mathbb{P}_2$ строилась таким образом, что гомоморфное отображение групп голономий является сюрьективным. В предложении 13.6.4 утверждается, что отображение групп голономий является только гомоморфизмом.

13.7. Связность на ассоциированном расслоении

Пусть дано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и ассоциированное с ним расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ с типичным слоем $\mathbb{F}$ (см. раздел 12.2). Если на $\mathbb{P}$ задана связность, то она определяет связность на $\mathbb{E}$ следующим образом.

Определение. Пусть $u \in \mathbb{E}$ – произвольная точка ассоциированного расслоения. *Вертикальным подпространством* $\mathbb{V}_u(\mathbb{E})$ в касательном пространстве $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$ называется касательное пространство к слою $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(\pi_{\mathbb{E}}(u))$, которое лежит в $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$.

Чтобы определить горизонтальное подпространство, вспомним, что ассоциированное расслоение строилось с помощью естественной проекции на фактор пространство

$$\mathbb{P} \times \mathbb{F} \to \mathbb{E} = \mathbb{P} \times_{\mathbb{G}} \mathbb{F}.$$

Выберем точку $(p, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$, которая проектируется на $u \in \mathbb{E}$. Теперь зафиксируем точку типичного слоя $v \in \mathbb{F}$ и рассмотрим отображение

$$v : \mathbb{P} \ni \quad p \mapsto v(p) = u \quad \in \mathbb{E}, \tag{13.66}$$

отображающее точку $p \in \mathbb{P}$ в $v(p) \in \mathbb{E}$. То есть каждой точке типичного слоя v ставится в соответствие отображение (13.66), которое мы обозначаем той же буквой.

Замечание. В отличии от отображения $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_x$, определенного ранее (12.15), это отображение в общем случае не является диффеоморфизмом, так как размерности главного и ассоциированного расслоения могут отличаться. Даже если размерности совпадают, $\dim \mathbb{G} = \dim \mathbb{F}$, то этого недостаточно для того, чтобы отображение (13.66) было диффеоморфизмом. Действительно, если v_0 – неподвижная точка группы преобразований, то отображение $v_0(p)$ переводит все точки слоя $\pi^{-1}(x)$ в одну фиксированную точку ассоциированного расслоения $u_0 \in \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x)$.

Поскольку точки (p,v) и (pa,va) из $\mathbb{P}\times\mathbb{F}$ проектируются в одну и ту же точку ассоциированного расслоения $u\in\mathbb{E}$, то $(va^{-1})(p)=v(pa)$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "va^{-1}"'] & \mathbb{P} \arrow[d, "v"] \\
& \mathbb{E}
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Используя построенное отображение, определим горизонтальные подпространства в ассоциированное расслоении.

Определение. *Горизонтальным подпространством* в точке $u\in\mathbb{E}$ называется образ $\mathbb{H}_u(\mathbb{E})=v_*(\mathbb{H}_p(\mathbb{P}))$, где v_* – дифференциал отображения (13.66).

Легко видеть, что подпространство $\mathbb{H}_u(\mathbb{E})$ не зависит от выбора точек $(p,v)\in\mathbb{P}\times\mathbb{F}$, которые проектируются в точку $u\in\mathbb{E}$. Действительно, поскольку $(va)(p)=v(pa^{-1})$, то $(va)_*=v_*\circ r^{-1}_{a*}$. Поэтому для точки (pa,va), которая проектируется в ту же точку $u\in\mathbb{E}$, что и (p,v), справедливы равенства

$$\mathbb{H}_u=(va)_*\mathbb{H}_{pa}=v_*\circ r^{-1}_{a*}\circ r_{a*}\mathbb{H}_p=v_*\mathbb{H}_p,$$

где мы использовали инвариантность (13.3) распределения горизонтальных подпространств на $\mathbb{P}$. В следующем примере мы докажем, что касательное пространство к ассоциированному расслоению представляет собой прямую сумму,

$$\mathbb{T}_u(\mathbb{E})=\mathbb{V}_u(\mathbb{E})\oplus\mathbb{H}_u(\mathbb{E}). \tag{13.67}$$

Этого достаточно для определения связности на ассоциированном расслоении. Тем не менее построенная связность на ассоциированном расслоении обладает дополнительным свойством, которое наследуется из главного расслоения: она инвариантна относительно действия группы справа. Действительно, по построению, отображение (13.66) перестановочно с групповым действием. Поэтому перестановочны также дифференциалы этих отображений,

$$v_*\circ r_{a*}=r_{a*}\circ v_*.$$

Тогда из правой инвариантности связности на главном расслоении (13.3) следует инвариантность связности на ассоциированном расслоении:

$$r_{a*}\mathbb{H}_u(\mathbb{E})=\mathbb{H}_{ua}(\mathbb{E}). \tag{13.68}$$

Пример 13.7.1 (Локальное рассмотрение). Рассмотрим достаточно малую координатную окрестность на базе, $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$, с координатами x^α, $\alpha=1,\dots,n$, такую, что выполнены условия локальной тривиализации расслоений, $\pi^{-1}(\mathbb{U})\approx\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ и $\pi^{-1}_{\mathbb{E}}(\mathbb{U})\approx\mathbb{U}\times\mathbb{F}$. Отождествим $\pi^{-1}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ и $\pi^{-1}_{\mathbb{E}}(\mathbb{U})$ с $\mathbb{U}\times\mathbb{F}$. Ограничим наше рассмотрение окрестностью единицы группы Ли, $\mathbb{U}_{\mathbb{G}}\subset\mathbb{G}$, где определены координаты a^{A}, $\mathrm{A}=1,\dots,\mathrm{N}$, и функция композиции (см. раздел 8.1). Выберем также некоторую координатную окрестность в типичном слое, $\mathbb{U}_{\mathbb{F}}\subset\mathbb{F}$, где определены координаты v^i, $i=1,\dots,\dim\mathbb{F}$, и задано отображение $v\mapsto va$ в координатной форме. Тогда точки расслоений будут иметь координаты $p=\{x^\alpha,a^{\mathrm{A}}\}\in\mathbb{P}$ и $u=\{x^\alpha,v^i\}\in\mathbb{E}$. По определению, векторы ∂_i касательны к слою $\pi^{-1}_{\mathbb{E}}(x)$ и, следовательно, образуют базис вертикальных подпространств $\mathbb{V}_u(\mathbb{E})$ для всех $u\in\mathbb{E}$. Пусть $v_0=\{v^i_0\}\in\mathbb{U}_{\mathbb{F}}$ – фиксированная точка типичного слоя. Тогда соответствующее этой точке отображение (13.66) в координатах имеет вид

$$v_0:\quad \mathbb{U}\times\mathbb{U}_{\mathbb{G}}\ni\quad \{x^\alpha,a^{\mathrm{A}}\}\mapsto\{x^\alpha,v^i(v_0,a)\}\quad\in\mathbb{U}\times\mathbb{U}_{\mathbb{F}},$$

где $v^i(v_0,a)$ – некоторая функция координат v^i_0 и a^{A}. Пусть $D_\alpha=\partial_\alpha-\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}L^*_{\mathrm{A}}$, где $\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}$ есть компоненты формы связности (13.4), – базис горизонтальных подпространств $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$ в главном расслоении, который был построен ранее (13.40). Тогда он отображается в касательное пространство к ассоциированному расслоению,

$$v_{0*}:\quad \mathbb{H}_p(\mathbb{P})\ni\quad D_\alpha\mapsto\overline{D}_\alpha=\partial_\alpha-\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}L^*_{\mathrm{A}}v^i\partial_i\quad\in\mathbb{H}_u(\mathbb{E}),$$

где L^*_{A} действует на $v^i(v_0,a)$ как дифференцирование по a. Конкретный вид функций $v^i(v_0,a)$ зависит от типичного слоя и действия на нем структурной группы. Независимо от вида функций $v^i(v_0,a)$ векторы

$\overline{D}_\alpha$ линейно независимы, так как содержат ∂_α, и поэтому образуют базис горизонтального подпространства $\mathbb{H}_u(\mathbb{E})$. Таким образом, совокупность векторов $\{\overline{D}_\alpha, \partial_i\}$ образует базис касательного пространства $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$, который соответствует разложению (13.67). Аналогичное построение можно выполнить в окрестности произвольной точки ассоциированного расслоения $u \in \mathbb{E}$. Следовательно, разложение касательного пространства $\mathbb{T}_u(\mathbb{E})$ в прямую сумму (13.67) имеет место в общем случае.

Если типичный слой – это векторное пространство $\mathbb{V}$, на котором задано представление ρ (см. раздел 8.8), то

$$v^i(v_0, a) = v_0^j S^{-1}{}_j{}^i(a),$$

где $S_j{}^i(a)$ – матрица представления элемента $a \in \mathbb{G}$. В этом случае

$$\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L^*_{\mathrm{A}} v^i = \omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} v_0^j S_j{}^k L_{\mathrm{A}k}{}^i = -v^j \omega_{\alpha j}{}^i,$$

где введено обозначение $\omega_{\alpha j}{}^i := -\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}} L_{\mathrm{A}j}{}^i$ и мы воспользовались правилом дифференцирования матриц представления (8.65). Тогда базис горизонтальных векторных полей на ассоциированном расслоении имеет вид

$$\overline{D}_\alpha = \partial_\alpha + v^j \omega_{\alpha j}{}^i \partial_i. \tag{13.69}$$

Этот базис инвариантен относительно действия структурной группы $\mathbb{G}$ на ассоциированном расслоении $\mathbb{E}$ справа. Действительно, действие элемента $b \in \mathbb{G}$ на базисный вектор (13.69) имеет вид

$$r_{b*}\overline{D}_\alpha = \partial_\alpha + v^i \omega_{\alpha i}{}^j(u) S^{-1}{}_j{}^k(b) \partial_k,$$

так как $v^i(v_0, ab) = v^j(v_0, a) S^{-1}{}_j{}^i(b)$. Поскольку $v^i(ub) = v^j(u) S^{-1}{}_j{}^i(b)$ и $\omega_\alpha{}^{\mathrm{A}}(pb) = \omega_\alpha{}^{\mathrm{B}} S^{-1}{}_{\mathrm{B}}{}^{\mathrm{A}}(b)$, то

$$r_{b*}\overline{D}_\alpha|_u = \overline{D}_\alpha|_{ub},$$

где мы воспользовались инвариантностью (8.66) матриц представления генераторов структурной группы. Это соответствует инвариантности распределения горизонтальных подпространств на ассоциированном расслоении (13.68).

Определения горизонтального лифта и параллельного переноса для ассоциированных расслоений дословно повторяют определения, данные для главных расслоений.

Определение. Кривая $\hat{\gamma}$ в ассоциированном расслоении $\mathbb{E}$ называется *горизонтальной*, если касательный к ней вектор горизонтален в каждой точке. Если задана кривая γ в базе $\mathbb{M}$, то *горизонтальным лифтом* или просто *лифтом* этой кривой называется такая горизонтальная кривая $\hat{\gamma}$ в $\mathbb{E}$, что $\pi_{\mathbb{E}}(\hat{\gamma}) = \gamma$.

Предложение 13.7.1. *Пусть $\gamma = x(t)$, $t \in [0, 1]$, – кусочно дифференцируемая кривая класса $\mathcal{C}^1$ в $\mathbb{M}$ с началом в точке $x_0 \in \mathbb{M}$. Тогда для произвольной точки слоя $u_0 \in \pi_{\mathbb{E}}^{-1}(x_0)$ существует единственный горизонтальный лифт $\hat{\gamma} = u(t)$ кривой γ с началом в точке u_0.*

Доказательство. Для начала докажем существование горизонтального лифта. Выберем точку $(p_0, v_0) \in \mathbb{P} \times \mathbb{F}$ такую, что $p_0(v_0) = u_0$, где отображение p определено формулой (12.15). Согласно предложению 13.3.1 существует единственный горизонтальный лифт $\tilde{\gamma}$ кривой γ в главное расслоение $\mathbb{P}$ с началом в точке $p_0 \in \mathbb{P}$. Тогда кривая $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}(v_0)$ является горизонтальным лифтом кривой в базе γ в ассоциированное расслоение $\mathbb{E}$. Действительно, касательный вектор к кривой $\hat{\gamma}$ лежит в $\mathbb{H}_\gamma(\mathbb{E})$, что сразу следует из определения дифференциала отображения (2.72). Единственность горизонтального лифта следует из единственности решения системы линейных дифференциальных с заданными начальными условиями.

Для формулировки следующего утверждения нам понадобится естественное

Определение. Локальное сечение ассоциированного расслоения $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{E}$, определенное на открытом подмножестве $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, называется *параллельным или горизонтальным*, если образ $\sigma_*\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$, где σ_* – дифференциал сечения, горизонтален при всех $x \in \mathbb{U}$, т.е. для любой кривой γ в $\mathbb{U}$, соединяющей точки x_0 и x_1, точка слоя $\sigma(x_0)$ при параллельном переносе слоя вдоль кривой γ переходит в точку $\sigma(x_1)$.

В предложении 12.2.3 мы отождествили ассоциированное расслоение $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ с фактор пространством $\mathbb{P}/\mathbb{H}$. Затем в теореме 12.3.2 привели критерий редуцируемости структурной группы $\mathbb{G}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ к подгруппе $\mathbb{H}$, который заключается в существовании глобального сечения σ ассоциированного расслоения $\mathbb{E}$. Кроме того, была установлена естественная взаимно однозначная связь между сечениями σ ассоциированного расслоения $\mathbb{E}$ и редуцированными главными расслоениями $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$. В примере 12.3.2 эта теорема была использована для доказательства существования римановой метрики на произвольном многообразии. Возникает вопрос о том, в каком случае связность, заданная на главном расслоении $\mathbb{P}$ редуцируема к связности на редуцированном расслоении $\mathbb{Q}$? Ответ дает следующее утверждение.

Предложение 13.7.2. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение и $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{G}/\mathbb{H}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ ассоциированное расслоение со стандартным слоем $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – замкнутая подгруппа в $\mathbb{G}$. Пусть $\sigma : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ – глобальное сечение ассоциированного расслоения и $\mathbb{Q}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{H})$ редуцированное подрасслоение в $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, соответствующее сечению σ. Связность Γ на $\mathbb{P}$ редуцируема к связности Γ' на $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда сечение σ параллельно относительно Γ.*

Доказательство. См., например, [3], глава II, предложение 7.4.

13.8. Свойства групп голономий

Продолжим изучение свойств групп голономий, которое было начато в разделе 13.4.

Теорема 13.8.1 (Теорема редукции). *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение со связностью Γ и p – произвольная точка в $\mathbb{P}$. Обозначим через $\mathbb{P}(p)$ множество точек в $\mathbb{P}$, которые можно соединить с точкой p горизонтальными кусочно дифференцируемыми кривыми. Тогда*:
1) $\mathbb{P}(p)$ *– редуцированное главное расслоение со структурной группой $\Phi(p)$*;
2) *Связность Γ редуцируема к связности на $\mathbb{P}(p)$.*

Доказательство. См., например, [3],глава II, теорема 7.1.

Эта теорема оправдывает следующее

Определение. Главное расслоение $\mathbb{P}(p)$, с базой $\mathbb{M}$, проекцией π и структурной группой $\Phi(p)$, состоящее из множества точек в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, которые можно соединить с точкой p горизонтальными кусочно дифференцируемыми кривыми, называется *расслоением голономии* через p.

Очевидно, что $\mathbb{P}(p) = \mathbb{P}(q)$ тогда и только тогда, когда точки p и q можно соединить горизонтальной кривой. В разделе 13.4 было введено отношение эквивалентности: $p \sim q$, если p и q можно соединить горизонтальной кривой. Поэтому для каждой пары точек из главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ либо $\mathbb{P}(p) = \mathbb{P}(q)$, либо $\mathbb{P}(p) \cap \mathbb{P}(q) = \varnothing$. Другими словами, главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ разлагается в объединение,

$$\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G}) = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{P}(p),$$

попарно непересекающихся расслоений голономии. Так как каждый элемент $a \in \mathbb{G}$ отображает каждую горизонтальную кривую в горизонтальную, то $r_a \mathbb{P}(p) = \mathbb{P}(pa)$ и отображение

$$r_a : \quad \mathbb{P}(p) \to \mathbb{P}(pa)$$

индуцирует изоморфизм расслоений $f = (f_{\mathbb{P}}, f_{\mathbb{G}})$, где $f_{\mathbb{P}} = r_a$, с соответствующим изоморфизмом структурных групп:

$$f_{\mathbb{G}} = \mathsf{ad}\,(a^{-1}) : \quad \Phi(p) \ni \quad b \mapsto a^{-1} b a \quad \in \Phi(pa),$$

так как группы голономии в различных точках сопряжены друг другу (предложение 13.4.1). Легко видеть, что для двух произвольных точек $p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ существует такой элемент $a \in \mathbb{G}$, что $\mathbb{P}(p) = \mathbb{P}(qa)$. Поэтому все расслоения голономий $\mathbb{P}(p)$ изоморфны друг другу.

Теорема 13.8.2 (Амброз–Зингер). *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение со связной базой $\mathbb{M}$. Пусть Γ – связность на $\mathbb{P}$ с формой кривизны R, $\Phi(p_0)$ – группа голономии в точке $p_0 \in \mathbb{P}$ и $\mathbb{P}(p_0)$ – расслоение голономии через p_0. Тогда алгебра Ли группы голономии $\Phi(p_0)$ совпадает с подпространством в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы $\mathbb{G}$, порожденной всеми элементами вида $R_p(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ для всех $p \in \mathbb{P}(p_0)$ и всех горизонтальных векторных полей $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ в точке p.*

Доказательство. Используется паракомпактность $\mathbb{M}$ [61].

Теорема 13.8.3. *Пусть $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ – главное расслоение со связным пространством расслоения $\mathbb{P}$. Если $\operatorname{dim}\mathbb{M}\geqslant 2$, то существует связность на $\mathbb{P}$ такая, что расслоения голономии $\mathbb{P}(p)$ для всех $p\in\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ совпадают с главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$.*

Доказательство. Явное построение связности. При этом используется паракомпактность $\mathbb{M}$ [3]. Для линейных связностей это утверждение было доказано в [62]. В общем случае доказательство дано в [63].

Следствие. *Любая связная группа Ли $\mathbb{G}$ может быть реализована как группа голономии некоторой связности в тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$, где $\mathbb{M}$ – произвольное дифференцируемое многообразие размерности $\operatorname{dim}\mathbb{M}\geqslant 2$.*

Доказательство. Выберем связную окрестность $\mathbb{U}\subset\mathbb{M}$. Тогда расслоение $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ связно и мы попадаем в зону деятельности теоремы 13.8.3. Связность с $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ продолжается на связность на $\mathbb{M}\times\mathbb{G}$ согласно предложению 13.6.1.

13.9. Плоские связности

Рассмотрим тривиальное главное расслоение $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$. Для каждого элемента структурной группы $a\in\mathbb{G}$ множество $\mathbb{M}\times\{a\}$ есть подмногообразие в $\mathbb{P}$. В частности, $\mathbb{M}\times\{e\}$, где e – единица группы, есть редуцированное подрасслоение в $\mathbb{P}$.

Определение. *Канонической плоской связностью* на тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$ называется распределение горизонтальных подпространств $\mathbb{H}_p(\mathbb{P})$, образованное касательными пространствами к $\mathbb{M}\times\{a\}$ для всех точек $p=(x,a)\in\mathbb{M}\times\mathbb{G}$.

Предложение 13.9.1. *Связность Γ на тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$ является канонической плоской тогда и только тогда, когда она редуцируема к единственной связности на $\mathbb{M}\times\{e\}$.*

Доказательство. Выберем нулевое сечение $\sigma_0 : x\mapsto(x,e)$. Это сечение является главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,e)$, на котором существует единственная связность. Эта связность взаимно однозначно определяет каноническую плоскую связность на $\mathbb{P}=\mathbb{M}\times\mathbb{G}$.

Пусть θ – каноническая форма на группе Ли $\mathbb{G}$, определенная в разделе 8.2. Обозначим через $\mathsf{pr}:\mathbb{M}\times\mathbb{G}\to\mathbb{G}$ естественную проекцию и положим

$$\omega:=\mathsf{pr}^*\theta=\omega^{*\mathrm{A}}L_{\mathrm{A}}. \tag{13.70}$$

Эта 1-форма является частным случаем формы связности (13.5) и определяет каноническую плоскую связность на $\mathbb{P}$. Формула Маурера–Картана для канонической 1-формы (8.27) влечет, что каноническая плоская связность имеет нулевую кривизну, так как

$$d\omega=d(\mathsf{pr}^*\theta)=\mathsf{pr}^*(d\theta)=\mathsf{pr}^*\left(-\frac{1}{2}[\theta,\theta]\right)=-\frac{1}{2}[\mathsf{pr}^*\theta,\,\mathsf{pr}^*\theta]=-\frac{1}{2}[\omega,\omega].$$

Сравнивая полученное равенство со структурным уравнением (13.27), заключаем, что форма кривизны канонической плоской связности тождественно равна нулю, $R=0$.

Теперь рассмотрим случай произвольного главного расслоения. Дадим общее

Определение. Связность Γ на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ называется *плоской*, если каждая точка базы $x\in\mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что индуцированная связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}=\pi^{-1}(\mathbb{U})$ изоморфна канонической плоской связности на $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$. Другими словами, существует изоморфизм $\chi:\pi^{-1}(\mathbb{U})\to\mathbb{U}\times\mathbb{G}$, отображающий горизонтальное подпространство в каждой точке $p\in\pi^{-1}(\mathbb{U})$ в горизонтальное подпространство канонической плоской связности на $\mathbb{U}\times\mathbb{G}$ в точке $\chi(p)$.

Предложение 13.9.2. *Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. Тогда плоская связность на $\mathbb{P}$ существует и единственна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Если задано главное расслоение, то определен атлас на базе $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ и семейство функций перехода (12.7), которые по теореме 12.1.2 с точностью до изоморфизма определяют главное расслоение. Выбрав координатное покрытие базы достаточно малым, можно считать, что все координатные окрестности $\mathbb{U}_i$ соответствуют окрестностям, входящим в определение плоской связности. Согласно теореме 13.1.1 для однозначного задания связности на $\mathbb{P}$ достаточно задать семейство локальных форм связности на каком либо атласе базы. Это означает, что плоская связность на произвольном главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ существует и единственна с точностью до изоморфизма.

Теорема 13.9.1. *Связность* Γ *на главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *является плоской тогда и только тогда, когда ее форма кривизны равна нулю,* $R = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно. Допустим, что форма кривизны равна нулю. Пусть $\mathbb{U}$ – односвязная окрестность точки $x \in \mathbb{P}$ и рассмотрим индуцированную связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$. По теоремам 13.4.1 и Амброза–Зингера 13.8.2 группа голономии индуцированной связности на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}$ состоит только из единицы. Применяя теорему редукции 13.8.1, мы видим, что индуцированная связность на $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}$ изоморфна канонической плоской связности на $\mathbb{U} \times \mathbb{G}$.

Следствие. *Любая связность* Γ *на главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *с одномерной базой* $\mathbb{M}$ *является плоской.*

Доказательство. Любая 2-форма на одномерном многообразии равна нулю. Отсюда следует, что все локальные формы кривизны тоже равны нулю. Так как для формы кривизны только горизонтальные компоненты являются нетривиальными, то она также обращается в нуль.

Следствие. *Пусть* Γ *– связность на главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *такая, что ее форма кривизны равна нулю,* $R = 0$. *Если база* $\mathbb{M}$ *односвязна, то главное расслоение* $\mathbb{P}$ *изоморфно тривиальному расслоению* $\mathbb{M} \times \mathbb{G}$ *и связность* Γ *изоморфна канонической плоской связности на* $\mathbb{M} \times \mathbb{G}$.

Доказательство. Группа голономии в рассматриваемом случае состоит из единственного элемента – единицы. Поэтому расслоение голономии $\mathbb{P}(p)$ пересекает каждый слой ровно в одной точке. Следовательно, каждое расслоение голономии задает глобальное сечение, и поэтому главное расслоение тривиально. При этом горизонтальные подпространства касательны к расслоению голономии. Пусть $q \in \mathbb{P}(p)$ – произвольная точка расслоения голономии через p и $\sigma_0 = (x, e)$ – нулевое сечение главного расслоения $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$. Тогда для каждой точки базы $x \in \mathbb{M}$ существует единственный элемент $a(x) \in \mathbb{G}$ такой, что $\sigma_0 = qa$, где $x = \pi(q)$. При этом вертикальный автоморфизм $p \mapsto pa$ переводит связность Γ на $\mathbb{P} = \mathbb{M} \times \mathbb{G}$ в каноническую плоскую связность.

Если форма кривизны равна нулю, то распределение горизонтальных векторных полей находится в инволюции. Это сразу следует из (13.41), так как векторы D_α образуют базис распределения горизонтальных векторных полей. Согласно теореме Фробениуса для плоской связности через каждую точку p главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ проходит интегральное подмногообразие. Все касательные векторы к интегральным подмногообразиям горизонтальны и интегральное подмногообразие, проходящее через точку p, совпадает с расслоением голономии $\mathbb{P}(p)$ через p.

Пример 13.9.1 (Локальное рассмотрение). Пусть $\mathbb{Q} = \mathbb{U} \times \mathbb{G}$ – тривиальное главное расслоение, база $\mathbb{U}$ которого покрыта одной картой. Общий вид формы связности на $\mathbb{Q}$ был найден ранее, см. формулу (13.5). Сравнение этого выражения с выражением (13.70) показывает, что связность на $\mathbb{Q}$ является канонической плоской тогда и только тогда, когда часть ее компонент, описывающих произвол в выборе связности на нулевом сечении, обращаются в нуль, $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}}(x) = 0$. Из равенства (13.13) следует, что компоненты локальной формы канонической плоской связности для произвольного сечения $\sigma : x \mapsto (x, b(x))$ имеют вид

$$A_\alpha{}^{\text{A}}(x) = \partial_\alpha b^{\text{B}} L^{-1}{}_{\text{B}}{}^{\text{A}}(b).$$

После перехода к какому либо представлению структурной группы

$$\rho : \quad \mathbb{G} \ni \quad a \mapsto \{S_i{}^j(a)\} \quad \in \mathsf{aut}\,\mathbb{V},$$

для компонент локальной формы связности справедливо равенство (13.15). Поскольку $\overset{\circ}{A}_\alpha{}^{\text{A}} = 0$, то компоненты плоской связности в общем случае имеют вид

$$A_\alpha = \partial_\alpha S S^{-1}, \tag{13.71}$$

где мы, для простоты, опустили матричные индексы.

Определение. Калибровочное поле A_α, заданное равенством (13.71) на координатной окрестности U, называется *чистой калибровкой.*

Теперь рассмотрим случай, когда база $\mathbb{M}$ главного расслоения не является односвязной. Пусть Γ – связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связной базой $\mathbb{M}$. Выберем произвольную точку $p_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и обозначим через $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{P}(p_0)$ расслоение голономии через p_0. Тогда $\widetilde{\mathbb{M}}(\mathbb{M}, \pi, \Phi(p_0))$ есть главное расслоение над $\mathbb{M}$ со структурной группой $\Phi(p_0)$. Так как суженная группа голономии $\Phi_0(p_0)$ для плоской связности всегда тривиальна, то по теоремам 13.4.1 и Амброза–Зингера 13.8.2 группа голономии $\Phi(p_0)$ при неодносвязной базе дискретна. Поэтому отображение $\pi : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$ является накрытием со связным накрывающим пространством.

Пусть $x_0 = \pi(p_0) \in \mathbb{M}$. Каждая замкнутая кривая в базе $\mathbb{M}$, исходящая из x_0, при помощи параллельного переноса слоев вдоль нее определяет некоторый элемент группы голономии $\Phi(p_0)$. Поскольку суженная группа голономии тривиальна, то любые две замкнутые и гомотопные относительно начала кривые, представляющие один и тот же элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{M}, x_0)$, порождают один и тот же элемент из $\Phi(p_0)$. Таким образом мы получаем сюрьективное отображение фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{M}, p_0)$ на группу голономии $\Phi(p_0)$. Легко видеть, что это отображение является гомоморфизмом групп. Пусть $\mathbb{H}$ – нормальная подгруппа в $\Phi(p_0)$ и положим $\mathbb{M}' = \widetilde{\mathbb{M}}/\mathbb{H}$. Тогда $\mathbb{M}'$ – главное расслоение над $\mathbb{M}$ со структурной группой $\Phi(p_0)/\mathbb{H}$. В частности, отображение $\pi : \mathbb{M}' \to \mathbb{M}$ – накрытие. Пусть $\mathbb{P}'(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение, индуцированное из $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ накрывающей проекцией $f_\mathbb{M} = \pi : \mathbb{M}' \to \mathbb{M}$. Пусть $f : \mathbb{P}'(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{G}) \to \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ – естественный гомоморфизм главных расслоений, см. теорему 12.3.4, тогда справедливо

Предложение 13.9.3. *Существует единственная связность Γ' на главном расслоении $\mathbb{P}'(\mathbb{M}', \pi, \mathbb{G})$, которая отображается на связность Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ гомоморфизмом $f : \mathbb{P}' \to \mathbb{P}$. Связность Γ' плоская. Если точка $p'_0 \in \mathbb{P}'$ такова, что $f_\mathbb{M}(p'_0) = p_0$, то группа голономии $\Phi(p'_0)$ для связности Γ' изоморфно отображается на $\mathbb{H}$ гомоморфизмом $f_\mathbb{G}$.*

Доказательство. См., например, [3], глава II, предложение 9.3.

В данном утверждении всегда можно выбрать в качестве нормальной подгруппы единицу группы голономии $e \in \Phi(p_0)$.

Следствие. *Пусть $\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi, \mathbb{G})$ – главное расслоение, индуцированное из $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ накрывающей проекцией $f_\mathbb{M} = \pi : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{M}$. Тогда существует единственная связность $\widetilde{\Gamma}$ на главном расслоении $\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi, \mathbb{G})$, которая отображается на связность Γ на $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ гомоморфизмом $f : \widetilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$. Связность $\widetilde{\Gamma}$ плоская, и соответствующая ей группа голономии тривиальна.*

13.10. Локальные и инфинитезимальные группы голономии

Группа голономии $\Phi(p)$ в точке $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, которая является важнейшей глобальной характеристикой связности, была определена при помощи множества всех замкнутых путей в базе $\Omega(\mathbb{M}, \pi(p))$. Это крайне неудобно для практических вычислений, так как зачастую структура многообразия $\mathbb{M}$ просто неизвестна. Возникает вопрос, можно ли каким либо образом вычислить группу голономии, исходя из локальных характеристик связности? В некоторых случаях суженная группа голономии $\Phi_0(p)$ действительно определяется локальными свойствами связности. В настоящем разделе мы опишем два подхода к этой проблеме, которые основаны на понятиях локальной и инфинитезимальной групп голономии.

Начнем рассмотрение с локальной группы голономии. Пусть на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со связной базой $\mathbb{M}$ задана связность Γ. Для каждого связного и односвязного открытого подмножества базы $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ обозначим через $\Gamma_\mathbb{U}$ связность на $\mathbb{P}|_\mathbb{U} = \pi^{-1}(\mathbb{U})$, которая индуцирована из связности Γ. В силу следствия из предложения 13.6.4 связность $\Gamma_\mathbb{U}$ существует и единственна – это сужение связности Γ на

$\pi^{-1}(\mathbb{U})$. Для каждой точки $p \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$ обозначим через $\Phi_0(p,\mathbb{U})$ и $\mathbb{P}(p,\mathbb{U})$ суженную группу голономии с опорной точкой p и расслоение голономии через точку p для связности $\Gamma_{\mathbb{U}}$ соответственно. Напомним, что расслоение голономии $\mathbb{P}(p,\mathbb{U})$ состоит из тех точек $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$, которые можно соединить с точкой p горизонтальной кривой, целиком лежащей в $\pi^{-1}(\mathbb{U})$.

Рассмотрим две окрестности $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1$, которые содержат точку $x = \pi(p)$. Тогда всякая замкнутая петля, целиком лежащая в $\mathbb{U}_2$, будет также петлей в $\mathbb{U}_1$. Поэтому справедливо включение

$$\Phi_0(p,\mathbb{U}_2) \subset \Phi_0(p,\mathbb{U}_1).$$

Как подгруппа суженной группы голономии $\Phi_0(p)$ группа $\Phi_0(p,\mathbb{U}_1)$ однозначно определяется своей алгеброй Ли. Поэтому из равенства размерностей $\mathsf{dim}\,\Phi_0(p,\mathbb{U}_2) = \mathsf{dim}\,\Phi_0(p,\mathbb{U}_1)$ следует совпадение групп голономии $\Phi_0(p,\mathbb{U}_2) = \Phi_0(p,\mathbb{U}_1)$. Это наблюдение приводит к следующему понятию.

Определение. *Локальной группой голономии* $\Phi_{\text{loc}}(p)$ в точке p называется пересечение

$$\Phi_{\text{loc}}(p) := \bigcap_{\mathbb{U}} \Phi_0(p,\mathbb{U}) \tag{13.72}$$

по всем связным и односвязным открытым окрестностям $\mathbb{U}$ точки $x = \pi(p)$.

Замечание. В настоящем разделе мы будем рассматривать только связные и односвязные открытые окрестности точек. Поэтому в дальнейшем, для краткости, мы будем говорить просто окрестности.

Пусть $\{\mathbb{U}_k\}$, $k = 1,2,\dots,$ – последовательность окрестностей, сходящихся к точке x, т.е. $\mathbb{U}_k \supset \overline{\mathbb{U}}_{k+1}$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbb{U}_k = \{x\}$. Тогда, очевидно, имеют место включения

$$\Phi_0(p,\mathbb{U}_1) \supset \Phi_0(p,\mathbb{U}_2) \supset \Phi_0(p,\mathbb{U}_3) \supset \dots$$

Поскольку для каждой окрестности $\mathbb{U}$ точки x существует целое число $k_{\mathbb{U}}$ такое, что $\mathbb{U}_k \subset \mathbb{U}$ для всех $k > k_{\mathbb{U}}$, то локальная группа голономии представима в виде

$$\Phi_{\text{loc}}(p) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_0(p,\mathbb{U}_k).$$

Так как каждая суженная группа голономии $\Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$ есть связная подгруппа Ли в структурной группе $\mathbb{G}$ (теорема 13.4.1), то отсюда следует, что размерность суженной группы голономии $\mathsf{dim}\,\Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$ постоянна для достаточно больших k. Поэтому для достаточно больших значений k справедливо равенство $\Phi_{\text{loc}}(p) = \Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$.

Замечание. Конечно, суженная группа голономии $\Phi_0(p,x)$ для "окрестности", состоящей из одной точки x, состоит ровно из одного элемента – единицы, и ее размерность равна нулю. Допустим, что параметр k в последовательности $\{\mathbb{U}_k\}$ непрерывен. Это может быть, например, радиус шара, если последовательность $\mathbb{U}_k$ состоит из шаров. Тогда функция $\mathsf{dim}\,\Phi_0(p,\mathbb{U}_k)$ от k принимает значения в целых числах и не может быть непрерывной, если суженная группа голономии $\Phi_0(p)$ для всего главного расслоения нетривиальна. В дальнейшем мы увидим, что при определенных условиях локальная группа голономии $\Phi_{\text{loc}}(p)$ совпадает с суженной группой $\Phi_0(p)$.

Предложение 13.10.1. *Локальные группы голономии имеют следующие свойства:*

1) *локальная группа голономии $\Phi_{\text{loc}}(p)$ есть связная подгруппа Ли в структурной группе $\mathbb{G}$, содержащаяся в суженной группе голономии $\Phi_0(p)$;*
2) *каждая точка $x = \pi(p)$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что $\Phi_{\text{loc}}(p) = \Phi_0(p,\mathbb{V})$ для любой окрестности $\mathbb{V} \ni x$, содержащейся в $\mathbb{U}$;*
3) *если $\mathbb{U}$ – окрестность точки $x = \pi(p)$, о которой говорится в свойстве* 2), *то $\Phi_{\text{loc}}(p) \supset \Phi_{\text{loc}}(q)$ для всех точек $q \in \mathbb{P}(p,\mathbb{U})$;*
4) *для каждого $a \in \mathbb{G}$ справедливо равенство*

$$\Phi_{\text{loc}}(pa) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\Phi_{\text{loc}}(p);$$

5) *для каждого целого m множество точек базы*

$$\{\pi(p) = x \in \mathbb{M} : \mathsf{dim}\,\Phi_{\text{loc}}(p) \leqslant m\}$$

открыто в $\mathbb{M}$.

Доказательство. Свойства 1)–4) очевидны. Докажем свойство 5). Из свойства 4) следует, что функция $\operatorname{dim}\Phi_{\text{loc}}(p)$ постоянна на каждом слое и поэтому ее можно рассматривать как функцию на базе $\mathbb{M}$, принимающую целые значения. Из свойств 3) и 4) вытекает, что

$$\operatorname{dim}\Phi_{\mathsf{loc}}(q) \leqslant \operatorname{dim}\Phi_{\mathsf{loc}}(p),$$

для всех точек $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Отсюда вытекает свойство 5).

Теорема 13.10.1. *Пусть $\mathfrak{g}_0(p)$ и $\mathfrak{g}_{\text{loc}}(p)$ – алгебры Ли для групп голономий $\Phi_0(p)$ и $\Phi_{\text{loc}}(p)$ соответственно. Тогда $\Phi_0(p)$ и $\mathfrak{g}_0(p)$ порождаются соответственно всеми $\Phi_{\text{loc}}(q)$ и $\mathfrak{g}_{\text{loc}}(q)$ для всех точек $q \in \mathbb{P}(p)$.*

Доказательство. См., например, [3], глава II, теорема 10.2.

Теорема 13.10.2. *Если $\operatorname{dim}\Phi_{\text{loc}}(p)$ постоянна на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, то локальная и суженная группы голономии совпадают, $\Phi_{\text{loc}}(p) = \Phi_0(p)$, для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Доказательство. По свойству 3) предложения 13.10.1 каждая точка $x = \pi(p)$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что $\Phi_{\text{loc}}(p) \supset \Phi_{\text{loc}}(q)$ для каждой точки q из расслоения голономии $\mathbb{P}(p,\mathbb{U})$. Так как $\operatorname{dim}\Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \operatorname{dim}\Phi_{\mathsf{loc}}(q)$, то сами группы голономии в различных точках совпадают, $\Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(q)$. Отсюда следует, что если $q \in \mathbb{P}(p)$, то $\Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(q)$ для всех $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$. Из теоремы 13.10.1 вытекает равенство $\Phi_0(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p)$.

Теперь перейдем к определению инфинитезимальной группы голономии и изучим ее связь с локальной группой голономии. Инфинитезимальная группа голономии может быть определена только для гладких $\mathcal{C}^\infty$ главных расслоений $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ с гладкой $\mathcal{C}^\infty$ связностью Γ. В дальнейшем мы будем считать, что условие гладкости выполнено.

Инфинитезимальная группа голономии в точке главного расслоения $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ определяется при помощи формы кривизны R связности Γ, заданной на $\mathbb{P}$. Сначала определим индуктивно семейство подпространств $\mathfrak{m}_k(p)$, $k = 0,1,2,\dots$, в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структурной группы $\mathbb{G}$. Пусть $\mathfrak{m}_0(p)$ подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное всеми элементами вида $R_p(X,Y)$, где X,Y – произвольные горизонтальные векторы в точке $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим $\mathfrak{g}$-значную функцию на $\mathbb{P}$ вида

$$f_k := Z_k \dots Z_1(R(X,Y)), \tag{13.73}$$

где $X,Y,Z_1,\dots,Z_k$ – произвольные горизонтальные векторные поля на $\mathbb{P}$ и векторы $Z_1,\dots,Z_k$ действуют на $\mathfrak{g}$-значную функцию $R(X,Y)$ как дифференцирования. Пусть $\mathfrak{m}_k(p)$ – подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, порожденное подпространством $\mathfrak{m}_{k-1}$ и значениями в точке p всех функций f_k вида (13.73). Положим

$$\mathfrak{g}_{\mathsf{inf}}(p) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_k(p). \tag{13.74}$$

По сути дела, это то подмножество в алгебре Ли структурной группы, которое порождается формой кривизны и всеми ее производными.

Предложение 13.10.2. *Подпространство $\mathfrak{g}_{\mathsf{inf}}(p)$ в $\mathfrak{g}$ есть подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathsf{loc}}(p)$ локальной группы голономии.*

Доказательство. См. [64].

Это предложение позволяет ввести новое понятие.

Определение. Связная подгруппа Ли $\Phi_{\mathsf{inf}}(p)$ в структурной группе $\mathbb{G}$, порожденная подалгеброй $\mathfrak{g}_{\mathsf{inf}}(p)$ называется *инфинитезимальной группой голономии* связности Γ в точке $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$.

Предложение 13.10.3. *Инфинитезимальная группа голономии $\Phi_{\mathsf{inf}}(p)$ имеет следующие свойства*:
1) $\Phi_{\mathsf{inf}}(p)$ *является связной подгруппой Ли локальной группы голономии* $\Phi_{\mathsf{loc}}(p)$;
2) $\Phi_{\mathsf{inf}}(pa) = \operatorname{ad}(a^{-1})\Phi_{\mathsf{inf}}(p)$ *и* $\mathfrak{g}_{\mathsf{inf}}(pa) = \operatorname{ad}(a^{-1})\mathfrak{g}_{\mathsf{inf}}(p)$;

3) *для каждого целого* m *множество точек базы*

$$\{\pi(p) = x \in \mathbb{M} : \quad \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(p) \geqslant m\} \tag{13.75}$$

открыто в $\mathbb{M}$;

4) *если* $\Phi_{\mathsf{inf}}(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p)$ *в точке* p, *то существует окрестность* $\mathbb{U}$ *точки* $x = \pi(p)$ *такая, что*

$$\Phi_{\mathsf{inf}}(q) = \Phi_{\mathsf{loc}}(q) = \Phi_{\mathsf{inf}}(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p)$$

для всех $q \in \mathbb{U}$.

Доказательство. Свойство 1) следует из предложения 13.10.2.

Свойство 2) вытекает из интуитивно понятного равенства

$$\mathfrak{m}_k(pa) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\mathfrak{m}_k(p) \qquad \forall\, k.$$

Детали доказательства приведены в [3], глава II, предложение 10.5.

3) Размерность инфинитезимальной группы голономии $\mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(p)$ в силу свойства 2) можно рассматривать как функцию на $\mathbb{M}$ со значениями в целых числах. Если значения конечного числа функций f_k вида (13.73) линейно независимы в точке p, то они таковы и в любой точке из некоторой окрестности точки p. Поэтому, если свойство (13.75) выполнено в точке x, то оно имеет место и в некоторой окрестности x.

4) Допустим, что $\Phi_{\mathsf{inf}}(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p)$. Из свойства 3) предложения 13.10 и свойства 5) предложения 13.10.1 следует, что точка $x = \pi(p)$ имеет окрестность $\mathbb{U}$ такую, что

$$\mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(q) \geqslant \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(p) \qquad \text{и} \qquad \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{loc}}(q) \leqslant \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{loc}}(p), \qquad \forall\, q \in \pi^{-1}(\mathbb{U}).$$

С другой стороны, $\Phi_{\mathsf{loc}}(q) \supset \Phi_{\mathsf{inf}}(q)$ для каждого $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Отсюда вытекают равенства

$$\mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{loc}}(q) = \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(q) = \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(p)$$

и, следовательно, $\Phi_{\mathsf{loc}}(q) = \Phi_{\mathsf{inf}}(q)$ для каждого $q \in \pi^{-1}(\mathbb{U})$. Применяя теорему 13.10.2 к индуцированному расслоению $\mathbb{P}|_{\mathbb{U}}$, видим, что $\Phi_0(p, \mathbb{U}) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p)$ и $\Phi_0(q, \mathbb{U}) = \Phi_{\mathsf{loc}}(q)$. Если $q \in \mathbb{P}(p, \mathbb{U})$, то $\Phi_0(p, \mathbb{U}) = \Phi_0(q, \mathbb{U})$. Поэтому $\Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(q)$.

Теорема 13.10.3. *Если размерность инфинитезимальной группы голономии* $\mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(q)$ *постоянна в некоторой окрестности точки* $p \in \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, *то локальная и инфинитезимальная группы голономий в точке* p *совпадают*, $\Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \Phi_{\mathsf{inf}}(p)$.

Доказательство. См. [64].

Следствие. *Если размерность инфинитезимальной группы голономии* $\mathsf{dim}\, \Phi_{\mathsf{inf}}(p)$ *постоянна на всем главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, *то*

$$\Phi_0(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \Phi_{\mathsf{inf}}(p) \tag{13.76}$$

для всех $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Вытекает из теорем 13.10.2 и 13.10.3.

Теорема 13.10.4. *Для вещественно аналитической связности* Γ *на вещественно аналитическом главном расслоении* $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *следующие группы голономии равны*

$$\Phi_0(p) = \Phi_{\mathsf{loc}}(p) = \Phi_{\mathsf{inf}}(p)$$

для всех $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. См. [64].

Равенство групп голономий (13.76) позволяет вычислить суженную группу голономии $\Phi_0(p)$. Действительно, алгебра Ли инфинитезимальной группы голономии (13.74) порождена всеми функциями вида (13.73). Пусть x^α, $\alpha = 1, \dots, n$, – система координат в окрестности $\mathbb{U}$ точки $x = \pi(p)$ и $\sigma : \mathbb{U} \to \mathbb{P}$

– локальное сечение. Тогда алгебра инфинитезимальной группы голономии порождается значениями компонент локальной формы кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ и всех ее ковариантных производных:

$$F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}, \qquad \nabla_{\gamma_1} F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}, \qquad \nabla_{\gamma_2}\nabla_{\gamma_1} F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}, \qquad \dots$$

Ясно, что подпространство $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{g}$ порождено всеми компонентами тензора кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$, подпространство $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{g}$ – всеми компонентами тензора кривизны $F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ и их первых ковариантных производных $\nabla_{\gamma_1} F_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{A}}$ и так далее. Таким образом, при заданной связности на главном расслоении, инфинитезимальная группа голономии позволяет, в принципе, вычислить суженную группу голономии. Конечно, после этого необходимо проверить, что условие следствия выполнено.

13.11. Инвариантные связности

Прежде чем рассматривать инвариантные связности общего вида, мы опишем важный частный случай.

Теорема 13.11.1. *Пусть $\mathbb{G}$ – связная группа Ли, и $\mathbb{H}$ – ее замкнутая подгруппа Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли для $\mathbb{G}$ и $\mathbb{H}$ соответственно.*

1) *Если существует линейное подпространство $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ такое, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ и $\mathsf{ad}(\mathbb{H})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{h}$-компонента ω канонической 1-формы θ в $\mathbb{G}$ определяет связность на главном расслоении $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, инвариантную относительно действия левых сдвигов из $\mathbb{G}$.*
2) *Обратно, любая связность на главном расслоении $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, инвариантная относительно действия левых сдвигов из $\mathbb{G}$ (если она существует), определяет разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ и может быть получена так, как это описано в пункте 1).*
3) *Форма кривизны R инвариантной связности, определенная формой ω из пункта 1), равна*
$$R(X,Y) = -\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{h}},$$
где $X, Y \in \mathfrak{m}$ – произвольные левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$ из $\mathfrak{m}$ и в правой части равенства взята $\mathfrak{h}$-компонента коммутатора.
4) *Пусть $\mathfrak{g}(e)$ – алгебра Ли группы голономии $\Phi(e)$ в единице e группы Ли $\mathbb{G}$ для инвариантной связности, определенной в пункте 1). Тогда $\mathfrak{g}(e)$ порождается всеми элементами вида $[X,Y]_{\mathfrak{h}}$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$.*

Доказательство. 1). Пусть Z^* – фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу подалгебры $Z \in \mathfrak{h}$. Из определения канонической 1-формы (см. раздел 8.2) следует, что $\omega(Z^*) = \theta(Z^*) = Z$. Пусть $\theta_{\mathfrak{m}}$ есть $\mathfrak{m}$-компонента канонической формы θ. Для любого $a \in \mathbb{H}$ и $X \in \mathbb{T}_p(\mathbb{G})$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\theta(r_{a*}X) &= \omega(r_{a*}X) + \theta_{\mathfrak{m}}(r_{a*}X),\\ \mathsf{ad}\,(a^{-1})\theta(X) &= \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega(X) + \mathsf{ad}\,(a^{-1})\theta_{\mathfrak{m}}(X).\end{aligned}$$

Левые части этих равенств совпадают. Поскольку по условию теоремы $\mathsf{ad}\,(a^{-1})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, то сравнение $\mathfrak{h}$-компонент правых частей приводит к равенству

$$\omega(r_{a*}X) = \mathsf{ad}\,(a^{-1})\omega(X),$$

т.е. 1-форма ω определяет связность на $\mathbb{G}$. Эта связность инвариантна относительно действия группы слева по построению.

2). Пусть ω – форма связности на главном расслоении $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, инвариантная относительно действия левых сдвигов из $\mathbb{G}$. Пусть $X \in \mathfrak{m}$ – множество левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{G}$ таких, что $\omega(X) = 0$. Тогда алгебра Ли на $\mathbb{G}$ разлагается в прямую сумму, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

3). Левоинвариантное векторное поле горизонтально тогда и только тогда, когда оно лежит в $\mathfrak{m}$. Поэтому утверждение 3) следует из равенства (13.28).

4). Пусть $\mathfrak{g}_1$ – подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное множеством элементов вида $R_e(X,Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{g}_2$ – подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное множеством элементов $R_a(X,Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$ для всех $a \in \mathbb{G}$. Тогда по теореме Амброза–Зингера $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}(e) \subset \mathfrak{g}_2$. С другой стороны, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$, так как $R_a(X,Y) = R_e(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ и $a \in \mathbb{G}$. Теперь 4) следует из 3).

Замечание. Линейное подпространство алгебры Ли $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ представляет собой распределение горизонтальных векторных полей на $\mathbb{G}$, т.е. связность Γ на главном расслоении $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, инвариантную относительно действия группы слева. В общем случае $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ является только линейным подпространством, а не подалгеброй.

Замечание. Утверждение 1) теоремы 13.11.1 можно рассматривать как частный случай предложения 13.6.3. Пусть $\mathbb{P} = (\mathbb{G}/\mathbb{H}) \times \mathbb{G}$ – тривиальное главное расслоение над базой $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ со структурной группой $\mathbb{G}$. Вложим расслоение $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$ в $\mathbb{P}$ при помощи отображения

$$f(a) = (\pi(a), a), \qquad a \in \mathbb{G},$$

где $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ – естественная проекция. Пусть ϕ – форма связности, определяющая каноническую плоскую связность на $\mathbb{P}$. Ее $\mathfrak{h}$-компонента, суженная на подрасслоение $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$, по предложению 13.6.3 определяет связность и совпадает с формой связности ω в утверждении 1).

Возвращаясь к общему случаю, сначала докажем предложение, которое является основой для многих приложений.

Предложение 13.11.1. *Пусть s_t – однопараметрическая группа автоморфизмов главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и $\widetilde{X}$ – векторное поле на $\mathbb{P}$, индуцированное s_t. Пусть Γ – связность на $\mathbb{P}$, инвариантная относительно действия s_t. Для произвольной точки главного расслоения $p_0 \in \mathbb{P}$ определим четыре кривые p_t, x_t, $\tilde{x}_t$ и a_t следующим образом:*

$$p_t := s_t(p_0) \in \mathbb{P}, \qquad x_t := \pi(p_t) \in \mathbb{M},$$

$\tilde{x}_t$ есть горизонтальный лифт x_t такой, что $\tilde{x}_0 = p_0$ и

$$p_t := \tilde{x}_t a_t, \qquad a_t \in \mathbb{G}. \tag{13.77}$$

Тогда a_t является однопараметрической подгруппой в структурной группе $\mathbb{G}$, порожденной элементом $X = \omega_{p_0}(\widetilde{X})$, где ω – форма связности для Γ.

Доказательство. Поскольку

$$\dot{p}_t = r_{a_t *}\dot{\tilde{x}}_t + \tilde{x}_{t*}\dot{a}_t,$$

то справедливо равенство

$$\omega(\dot{p}_t) = \operatorname{\mathsf{ad}}(a_t^{-1})\omega(\dot{\tilde{x}}_t) + a_{t*}^{-1}\dot{a}_t,$$

где $\tilde{x}_{t*}$ и a_{t*} – дифференциалы отображений $\tilde{x}_t : \mathbb{G} \to \pi^{-1}(x_t)$ и $a_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ соответственно. Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как кривая $\tilde{x}_t$ горизонтальна. Следовательно, $\omega(\dot{p}_t) = a_{t*}^{-1}\dot{a}_t$. С другой стороны, $\dot{p}_t = s_{t*}\widetilde{X}_{p_0}$, где s_{t*} – дифференциал отображения $s_t : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, и поэтому $\omega(\dot{p}_t) = \omega(\widetilde{X}_{p_0}) = X$, так как форма связности инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований s_t. Отсюда следует равенство $X = a_{t*}^{-1}\dot{a}_t$.

Определение. Кривая a_t в структурной группе Ли $\mathbb{G}$ из условия предложения 13.11.1 называется *разверткой* кривой p_t в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$.

Замечание. В этом определении кривая p_t может быть произвольной кривой в главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$, не обязательно связанной с группой симметрии связности.

Определение. Пусть $\mathbb{K}$ – группа Ли автоморфизмов главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Выберем в главном расслоении опорную точку $p_0 \in \mathbb{P}$. Каждый элемент из $\mathbb{K}$ индуцирует некоторое преобразование базы при помощи проекции. Множество $\mathbb{J}$ всех элементов из $\mathbb{K}$, которые оставляют неподвижной точку $x_0 := \pi(p_0)$, образуют замкнутую подгруппу в $\mathbb{K}$, которая называется *подгруппой изотропии* в $\mathbb{K}$ для точки $x_0 \in \mathbb{M}$. Определим гомоморфизм групп Ли

$$\lambda : \quad \mathbb{J} \ni \quad j \mapsto \lambda(j) = a \quad \in \mathbb{G} \tag{13.78}$$

следующим образом. Каждый автоморфизм $j \in \mathbb{J}$ переводит p_0 в точку $j(p_0)$, которая принадлежит тому же слою $\pi^{-1}(\pi(p_0))$, так как точка x_0 неподвижна. Следовательно, $j(p_0) = p_0 a$ для некоторого $a \in \mathbb{G}$. Положим $\lambda(j) = a$. Тогда для двух элементов подгруппы изотропии, $j_1, j_2 \in \mathbb{J}$, справедливы равенства

$$p_0\lambda(j_1 j_2) = (j_1 j_2)(p_0) = j_1(p_0\lambda(j_2)) = (j_1(p_0))\lambda(j_2) = p_0\lambda(j_1)\lambda(j_2).$$

Тем самым $\lambda(j_1 j_2) = \lambda(j_1)\lambda(j_2)$ и, следовательно, построенное отображение является гомоморфизмом групп. Нетрудно проверить, что отображение $\lambda : \mathbb{J} \to \mathbb{G}$ дифференцируемо. Гомоморфизм групп λ индуцирует гомоморфизм алгебр Ли,

$$\lambda : \quad \mathfrak{j} \to \mathfrak{g},$$

который мы обозначили той же буквой.

Замечание. Отображение (13.78) зависит от выбора опорной точки $p_0 \in \mathbb{P}$. В настоящем разделе мы будем считать, что опорная точка p_0 выбрана и зафиксирована.

Предложение 13.11.2. *Пусть $\mathbb{K}$ – группа Ли автоморфизмов главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$ и Γ – связность на $\mathbb{P}$ с формой связности ω и формой кривизны R, инвариантная относительно автоморфизмов $\mathbb{K}$. Пусть $\mathbb{J} \subset \mathbb{K}$ – подгруппа изотропии в $\mathbb{K}$ для точки $x_0 := \pi(p_0)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{j}$. Определим линейное отображение*

$$\Lambda : \quad \mathfrak{k} \ni \quad X \mapsto \Lambda(X) = \omega_{p_0}(\widetilde{X}) \quad \in \mathfrak{g},$$

где $\widetilde{X}$ – векторное поле на $\mathbb{P}$, индуцированное полем X. Тогда:

1) $\Lambda(X) = \lambda(X)$, $\forall X \in \mathfrak{j}$;
2) $\Lambda(\operatorname{ad}(j)X) = \operatorname{ad}(\lambda(j))\Lambda(X)$, $\forall j \in \mathbb{J}$ *и* $\forall X \in \mathfrak{k}$, *где* $\operatorname{ad}(j)$ *обозначает присоединенное представление подгруппы изотропии* $\mathbb{J}$ *в* $\mathfrak{k}$ *и* $\operatorname{ad}(\lambda(j))$ *– присоединенное представление структурной группы* $\mathbb{G}$ *в* $\mathfrak{g}$;
3) $2R_{p_0}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = [\Lambda(X), \Lambda(Y)] - \Lambda([X, Y])$, $\qquad \forall X, Y \in \mathfrak{k}$.

Доказательство. См., например, [3], глава II, предложение 11.3.

Замечание. Геометрический смысл отображения Λ дается предложением 13.11.1. $\Lambda(X)$ – это тот элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который порождает однопараметрическую подгруппу a_t в структурной группе $\mathbb{G}$, определенную равенством (13.77).

Замечание. Отображение Λ в предложении 13.11.2 является только линейным. В общем случае оно не является гомоморфизмом алгебр Ли.

Определение. Группа автоморфизмов $\mathbb{K}$ действует на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ *слой-транзитивно*, если для любых двух слоев из $\mathbb{P}$ существует элемент в $\mathbb{K}$, отображающий один слой в другой, т.е. если действие $\mathbb{K}$ на базе $\mathbb{M}$ транзитивно.

Предложение 13.11.3. *Если $\mathbb{J}$ – подгруппа изотропии для слой-транзитивной группы автоморфизмов $\mathbb{K}$ в точке $x_0 := \pi(p_0)$, то база $\mathbb{M}$ является однородным пространством, $\mathbb{M} \approx \mathbb{K}/\mathbb{J}$.*

Доказательство. Вытекает из теоремы 9.1.2.

Описание $\mathbb{K}$-инвариантных связностей на главном расслоении в случае слой-транзитивного действия групп автоморфизмов дает

Теорема 13.11.2. *Если связная группа Ли $\mathbb{K}$ является слой-транзитивной группой автоморфизмов главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ и если $\mathbb{J}$ – подгруппа изотропии в $\mathbb{K}$ для точки $x_0 := \pi(p_0)$, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{K}$-инвариантных связностей на $\mathbb{P}$ и множеством линейных отображений $\Lambda : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$, которые удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *предложения* 13.11.2. *Соответствие задается следующим образом:*

$$\Lambda : \quad \mathfrak{k} \ni \quad X \mapsto \Lambda(X) = \omega_{p_0}(\widetilde{X}) \quad \in \mathfrak{g},$$

где $\widetilde{X}$ – векторное поле на $\mathbb{P}$, индуцированное полем X.

Доказательство. См. [65].

Замечание. Из теоремы 13.1.1 следует, что связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ однозначно определяется заданием семейства локальных форм связности на произвольном покрытии базы $\mathbb{M}$. Это происходит потому что при помощи действия структурной группы распределение горизонтальных подпространств с локальных сечений можно разнести на все пространство главного расслоения $\mathbb{P}$. Если известно, что связность инвариантна также относительно слой-транзитивных автоморфизмов $\mathbb{K}$, то локальную форму связности достаточно задать в одной точке базы $\mathbb{M}$. Действительно, при помощи автоморфизмов $\mathbb{K}$ она разносится по всей базе $\mathbb{M}$, а затем, действуя структурной группой, ее можно разнести по всему пространству расслоения $\mathbb{P}$.

Если группа автоморфизмов $\mathbb{K}$ не является слой-транзитивной, тогда в задании инвариантной связности появляется значительный произвол. В этом случае форму связности можно определить на каждой орбите действия группы $\mathbb{K}$ на $\mathbb{P}$. Для этого достаточно задать ее в какой либо одной точке на каждой орбите и при помощи $\mathbb{K}$ разнести ее по орбитам и, наконец, по всему пространству главного расслоения $\mathbb{P}$, действуя структурной группой $\mathbb{G}$. После этого необходимо проверить дифференцируемость полученного распределения горизонтальных подпространств.

Если группа автоморфизмов $\mathbb{K}$ действует на $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ слой-транзитивно, то форма кривизны R, которая является тензориальной формой типа $\mathsf{ad}\,\mathbb{G}$, инвариантная относительно $\mathbb{K}$, полностью определяется своими значениями в опорной точке $R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, где $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ – векторные поля на $\mathbb{P}$, индуцированные элементами $X,Y\in\mathfrak{k}$ алгебры Ли группы автоморфизмов $\mathbb{K}$. В этом случае утверждение 3) предложения 13.11.2 выражает форму кривизны $R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ в терминах Λ.

Из предложения 13.11.2 и теорем 13.9.1 и 13.11.2 получаем

Следствие. *$\mathbb{K}$-инвариантная связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, определенная отображением Λ, является плоской тогда и только тогда, когда отображение $\Lambda:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ есть гомоморфизм алгебр Ли.*

Теорема 13.11.3. *Допустим, что в теореме 13.11.2 алгебра Ли $\mathfrak{k}$ содержит линейное подпространство $\mathfrak{m}$ такое, что $\mathfrak{k}=\mathfrak{j}\oplus\mathfrak{m}$ и $\mathsf{ad}\,(\mathbb{J})\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$, где $\mathsf{ad}\,(\mathbb{J})$ – присоединенное представление $\mathbb{J}$ в $\mathfrak{k}$. Тогда:*

1) *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{K}$-инвариантных связностей на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$ и множеством линейных отображений $\Lambda_\mathfrak{m}:\mathfrak{m}\to\mathfrak{g}$ таких, что*
$$\Lambda_\mathfrak{m}(\mathsf{ad}\,(j)X)=\mathsf{ad}\,(\lambda(j))\Lambda_\mathfrak{m}(X),\qquad \forall\, X\in\mathfrak{m}\ \text{и}\quad \forall\, j\in\mathbb{J};$$
соответствие задается теоремой 13.11.2 следующим образом
$$\Lambda(X)=\begin{cases}\lambda(X), & \text{если}\quad X\in\mathfrak{j},\\ \Lambda_\mathfrak{m}(X), & \text{если}\quad X\in\mathfrak{m}.\end{cases}$$

2) *Форма кривизны R для $\mathbb{K}$-инвариантной связности, определяемой при помощи отображения $\Lambda_\mathfrak{m}$, удовлетворяет следующему равенству*
$$2R_{p_0}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=[\Lambda_\mathfrak{m}(X),\Lambda_\mathfrak{m}(Y)]-\Lambda_\mathfrak{m}([X,Y]_\mathfrak{m})-\lambda([X,Y]_\mathfrak{j}),\qquad \forall\, X,Y\in\mathfrak{m},$$
где $[X,Y]_\mathfrak{m}$ и $[X,Y]_\mathfrak{j}$ обозначают соответственно $\mathfrak{m}$- и $\mathfrak{j}$-компоненту коммутатора $[X,Y]\in\mathfrak{k}$.

Доказательство. Пусть $\Lambda:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$ – линейное отображение, удовлетворяющее утверждениям 1) и 2) предложения 13.11.2. Пусть $\Lambda_\mathfrak{m}$ – сужение отображения Λ на $\mathfrak{m}$. Нетрудно проверить, что отображение $\Lambda\to\Lambda_\mathfrak{m}$ является взаимно однозначным и согласно теореме 13.11.2 дает желаемое соответствие. Утверждение 2) следует из утверждения 3) предложения 13.11.2.

Определение. В теореме 13.11.3 $\mathbb{K}$-инвариантная связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{G})$, определяемая условием $\Lambda_\mathfrak{m}=0$, называется *канонической инвариантной связностью* относительно разложения $\mathfrak{g}=\mathfrak{j}\oplus\mathfrak{m}$.

Следующая теорема определяет алгебру Ли группы голономии $\mathbb{K}$-инвариантной связности.

Теорема 13.11.4. *В предположениях и обозначениях теоремы 13.11.2 алгебра Ли $\mathfrak{g}(p_0)$ группы голономии $\Phi(p_0)$ для $\mathbb{K}$-инвариантной связности, определяемой при помощи линейного отображения $\Lambda:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}$, задается суммой*
$$\mathfrak{m}_0+[\Lambda(\mathfrak{k}),\mathfrak{m}_0]+[\Lambda(\mathfrak{k}),[\Lambda(\mathfrak{k}),\mathfrak{m}_0]]+\cdots,$$
где $\mathfrak{m}_0$ – линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное множеством
$$\{[\Lambda(X),\Lambda(Y)]-\Lambda([X,Y])\},\qquad \forall\, X,Y\in\mathfrak{k}.$$

Доказательство. См., например, [3], глава II, теорема 11.8.

Замечание. Утверждения 1) и 3) теоремы 13.11.1 следуют из теоремы 13.11.3, если в качестве главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ выбрать $\mathbb{G}(\mathbb{G}/\mathbb{H}, \pi, \mathbb{H})$ и положить $\mathbb{K} = \mathbb{G}$. Тогда инвариантная связность из теоремы 13.11.1 является канонической инвариантной связностью. Утверждение 4) теоремы 13.11.1 следует из теоремы 13.11.4.

14. Приложения в квантовой механике

В настоящей главе рассмотрены некоторые приложения дифференциальной геометрии в нерелятивистской квантовой механике. Нетривиальные геометрические структуры, а речь идет о нетривиальной связности на главном расслоении, часто возникают при решении уравнений математической физики. В настоящей главе будет показано, как возникает нетривиальная связность на главном расслоении со структурной группой $\mathbb{U}(1)$ или $\mathbb{U}(\mathrm{N})$ в нерелятивистской квантовой механике при решении уравнения Шредингера. Удивительно не столько то, что главное расслоение возникает естественным образом, а то, что предсказанные эффекты были подтверждены экспериментально.

Сначала мы дадим геометрическую интерпретацию нерелятивистской квантовой механике в конечномерном случае. Будет показано, что гамильтониан квантовой системы задает компоненты локальной формы связности на главном расслоении, а уравнение Шредингера определяет параллельный перенос слоев. При этом базой является одномерное многообразие, соответствующее времени, а структурной группой – унитарная группа $\mathbb{U}(\mathrm{N})$, где N – размерность гильбертова пространства состояний квантовомеханической системы. Решение квантовомеханической задачи не зависит от выбора базиса в гильбертовом пространстве, и его выбирают из соображений удобства. Использование базиса, состоящего из собственных векторов гамильтониана, позволяет упростить доказательство адиабатической теоремы и сделать его более прозрачным.

В качестве приложения адиабатической теоремы рассмотрена фаза Берри [66]. В заключительном разделе настоящей главы рассмотрен эффект Ааронова–Бома [67], который, хотя и не имеет прямого отношения к адиабатической теореме, с геометрической точки зрения аналогичен фазе Берри.

Эффект Ааронова–Бома и фаза Берри привлекают большое внимание теоретиков и экспериментаторов в течении многих лет. Интерес вызван двумя обстоятельствами. Во-первых, в обоих случаях при решении уравнения Шредингера естественным образом возникает $\mathbb{U}(1)$ связность. Во-вторых, в теории калибровочных полей распространено мнение, что к наблюдаемым эффектам может приводить только нетривиальная напряженность поля, а не сами потенциалы, которые не являются калибровочно инвариантными. Вопреки этому мнению Ааронов и Бом, а также Берри показали, что интеграл от калибровочного поля вдоль замкнутой кривой может привести к наблюдаемым эффектам. Эти выводы вскоре были подтверждены экспериментально.

Понятие фазы Берри было обобщено на неабелев случай, соответствующий вырожденным уровням энергии гамильтониана, Вилчеком и Зи [68]. В этом случае при решении уравнения Шредингера естественным образом возникают неабелевы калибровочные поля.

Во всех перечисленных выше случаях к наблюдаемым эффектам приводят элементы группы голономии (см. раздел 13.4) соответствующих связностей. Элементы группы голономии в общем случае являются ковариантными объектами, а для абелевой группы $\mathbb{U}(1)$ – инвариантными. Мы покажем, что главное расслоение может быть тривиальным, но связность, которая на нем возникает, в общем случае имеет нетривиальную группу голономии и приводит к наблюдаемым эффектам. Отсюда следует, что фаза Берри и эффект Ааронова–Бома имеют геометрическую природу.

14.1. Адиабатическая теорема

Адиабатическая теорема [69] занимает одно из центральных мест в нерелятивистской квантовой механике, так как позволяет находить приближенное решение уравнения Шредингера при медленном изменении гамильтониана во времени. Первоначально она была доказана для дискретного (возможно, бесконечного) спектра гамильтониана при некоторых ограничениях на возможное пересечение уровней энергии [69]. Ниже приведено доказательство адиабатической теоремы в наиболее простом конечномерном случае.

В нерелятивистской квантовой механике состояние системы описывается вектором гильбертова пространства (*волновой функцией*) $\psi(t) \in \mathbb{H}$, зависящим от времени $t \in \mathbb{R}$ и некоторого набора других переменных, который определяется рассматриваемой задачей. Эволюция квантовой системы во времени описывается *уравнением Шредингера* [70, 71]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi, \tag{14.1}$$

где H – самосопряженный линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, который называется *гамильтонианом* системы, и $\hbar$ – постоянная Планка.

Для уравнения Шредингера, как правило, ставится задача Коши с начальным условием

$$\psi(0)=\psi_0, \tag{14.2}$$

где $\psi_0\in\mathbb{H}$ – некоторый фиксированный вектор гильбертова пространства.

В дальнейшем, для простоты, положим $\hbar=1$ и обозначим частную производную по времени точкой, $\dot\psi:=\partial_t\psi$.

Предположим, для простоты, что гильбертово пространство представляет собой конечномерное комплексное пространство $\mathbb{H}=\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ комплексной размерности $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\mathbb{H}=\mathrm{N}$. В гильбертовом пространстве задано скалярное произведение, которое обозначим круглыми скобками,

$$\mathbb{H}\times\mathbb{H}\ni\quad\psi,\phi\mapsto(\psi,\phi)\quad\in\mathbb{C}.$$

По определению, скалярное произведение линейно по первому аргументу ψ и выполнено равенство: $(\psi,\phi)^\dagger=(\phi,\psi)$, где символ $\dagger$ обозначает комплексное сопряжение. Квадрат вектора гильбертова пространства (ψ,ψ) является вещественным числом, при этом мы требуем, чтобы квадратичная форма (ψ,ψ) была строго положительно определена, т.е. $(\psi,\psi)\geqslant0$, причем $(\psi,\psi)=0$ тогда и только тогда, когда $\psi=0$. Тогда скалярное произведение определяет норму вектора гильбертова пространства:

$$\|\psi\|:=\sqrt{(\psi,\psi)}.$$

Поскольку уравнение Шредингера линейно по ψ, а гамильтониан самосопряжен, то норма произвольного решения уравнений Шредингера сохраняется во времени. Отсюда следует, что векторы состояния можно нормировать. Обычно предполагается, что векторы состояния нормированы на единицу,

$$\|\psi\|=1. \tag{14.3}$$

Нормировка вектора состояния не устраняет полностью произвол в выборе вектора гильбертова пространства, так как остается произвол в выборе постоянного фазового множителя.

Замечание. Мы используем символ $\dagger$ для обозначения эрмитова сопряжения матриц, т.е. транспонирования матрицы и комплексного сопряжения всех элементов. В частном случае, когда матрица состоит из одного элемента, эрмитово сопряжение совпадает с комплексным.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ выбран некоторый базис e_k, $k=1,\dots,\mathrm{N}$. Тогда гамильтониан квантовомеханической системы задается эрмитовой $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ матрицей, а вектор состояния $\psi=\psi^k(t)e_k$ – строкой из N компонент,

$$\psi=(\psi^1,\dots,\psi^{\mathrm{N}}),$$

где $\psi^1(t),\dots,\psi^{\mathrm{N}}(t)$ – комплекснозначные компоненты вектора. Если базис гильбертова пространства ортонормирован,

$$(e_k,e_l)=\delta_{kl},$$

то скалярное произведение задается равенством

$$(\psi,\phi)=\psi\phi^\dagger=\psi^1\phi_1^\dagger+\dots+\psi^{\mathrm{N}}\phi_{\mathrm{N}}^\dagger.$$

Рассмотрим задачу Коши (14.1), (14.2) в общем случае, когда гамильтониан системы зависит от времени $H=H(t)$. Для решения этой задачи необходимо выбрать базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Конечно, решение задачи от выбора базиса не зависит, и его выбирают из соображений удобства. Рассмотрим два случая.

Пусть базис $e_k\in\mathbb{H}$, $k=1,\dots,\mathrm{N}$, ортонормирован и фиксирован, $\dot e_k=0$. Произвольный вектор можно разложить по этому базису $\psi=\psi^ke_k$. При этом гамильтониан задается эрмитовой $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ матрицей ${H_l}^k$, а задача Коши для уравнения Шредингера в компонентах примет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений с некоторыми начальными условиями:

$$
\begin{aligned}
i\dot\psi^k &= \psi^l H_l{}^k,\\
\psi^k(0) &= \psi^k_0.
\end{aligned}
\tag{14.4}
$$

Замечание. Мы записываем действие гамильтониана в конечномерном случае справа, чтобы согласовать наши обозначения с обозначениями, принятыми в дифференциальной геометрии. Напомним, что в дифференциальной геометрии для векторного поля в координатном базисе принята запись $X = X^\alpha \partial_\alpha$. (Суммирование с десяти до четырех по циферблату часов.) Альтернативная запись $X = \partial_\alpha X^\alpha$ используется для обозначения дивергенции векторного поля. Преобразование координат мы записываем в виде

$$
X = X^\alpha \partial_\alpha = X^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}\partial_\beta.
$$

То есть действие матрицы преобразования координат записывается справа. С другой стороны, действие операторов в квантовой механике общепринято записывать слева. Поэтому, если мы хотим использовать единообразные обозначения, то необходимо чем то пожертвовать. В конечномерном случае мы будем записывать матрицу, задающую линейный оператор, справа. Это вопрос соглашения, и к нему легко привыкнуть.

Рассмотрим теперь другой ортонормированный базис b_k, который может зависеть от времени, $b_k = b_k(t)$. Такой базис может оказаться более удобным для решения некоторых задач. Вектор гильбертова пространства ψ можно разложить также по этому базису $\psi = \psi'^k b_k$. Тогда задача Коши (14.4) будет выглядеть по другому:

$$
\begin{aligned}
i\dot\psi'^k &= \psi'^l H'_l{}^k,\\
\psi'^k(0) &= \psi'^k_0,
\end{aligned}
\tag{14.5}
$$

где $H'_l{}^k$ – компоненты гамильтониана относительно нового базиса, которые будут определены ниже. Поскольку базисы ортонормированы, то они связаны между собой некоторым унитарным преобразованием:

$$
b_k = S_k{}^l e_l, \qquad S \in \mathbb{U}(\textsc{n}),
\tag{14.6}
$$

которое в общем случае зависит от времени, $S = S(t)$. При этом компоненты вектора гильбертова пространства преобразуются с помощью обратной матрицы,

$$
\psi'^k = \psi^l S^{-1}{}_l{}^k.
$$

Отсюда следует выражение для компонент начального вектора гильбертова пространства $\psi'^k_0 = \psi^l_0 S^{-1}{}_l{}^k(0)$. Переписав уравнение Шредингера (14.4) в базисе b_k, получим компоненты гамильтониана относительно нового базиса:

$$
H' = SHS^{-1} + iS\dot S^{-1} = SHS^{-1} - i\dot S S^{-1},
\tag{14.7}
$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы. Мы видим, что компоненты гамильтониана преобразуются также, как компоненты локальной формы $\mathbb{U}(\textsc{n})$-связности (13.16).

Теперь можно дать геометрическую интерпретацию нерелятивистской квантовой механике в конечномерном случае. Пусть время пробегает всю вещественную прямую, $t \in \mathbb{R}$. Тогда мы имеем главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{R}, \pi, \mathbb{U}(\textsc{n})) \approx \mathbb{R} \times \mathbb{U}(\textsc{n})$ с базой $\mathbb{R}$, типичным слоем $\mathbb{U}(\textsc{n})$ и проекцией $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ (см. раздел 12.1). Это расслоение тривиально, так как базой является вещественная прямая. Гамильтониан квантовой системы задает компоненты локальной формы $\mathbb{U}(\textsc{n})$-связности (1-форма на $\mathbb{R}$ со значениями в алгебре Ли):

$$
A_t = (iH_l{}^k) \in \mathfrak{u}(\textsc{n}),
$$

где t – координатный ковариантный индекс, принимающий одно значение, который раньше обозначался греческой буквой α. Вектор гильбертова пространства $\psi \in \mathbb{H}$ – это сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{R}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}, \mathbb{U}(\textsc{n}), \mathbb{P})$, типичным слоем которого является гильбертово пространство $\mathbb{H}$. Уравнение Шредингера имеет вид равенства нулю ковариантной производной,

$$
\nabla_t \psi = \dot\psi + \psi A_t = 0,
$$

т.е. задает параллельный перенос вектора гильбертова пространства. При изменении сечения компоненты связности преобразуются по правилу

$$A'_t = SA_tS^{-1} + \dot{S}S^{-1},$$

как и положено компонентам локальной формы связности (13.16). Кривизна этой связности равна нулю, поскольку база одномерна. Поэтому связность является плоской согласно теореме 13.9.1.

Решение задачи Коши для уравнения Шредингера (14.1), (14.2) не зависит от выбора базиса. Поэтому его выбирают из соображений удобства.

Пример 14.1.1. Пусть в фиксированном базисе e_k компоненты вектора гильбертова пространства имеют вид $\psi^k = \psi_0^l U_l{}^k$, где унитарная матрица $U_l{}^k(t)$ задает оператор эволюции квантовой системы, который, по определению, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$i\dot{U} = UH,$$

с начальным условием $U_l{}^k(0) = \delta_l^k$. Тогда нетрудно проверить, что оператор эволюции задает переход к такому базису гильбертова пространства $b_k := U^{-1}{}_k{}^l e_l$, в котором гамильтониан равен нулю, $H' = 0$. Следовательно, вектор гильбертова пространства, описывающий эволюцию квантовой системы, в этом базисе имеет постоянные компоненты ψ_0^k, которые определяются начальным состоянием.

Замечание. При преобразовании базиса, которое зависит от времени, эрмитова матрица, соответствующая гамильтониану, испытывает калибровочное преобразование (14.7). При этом преобразовании в общем случае собственные значения матрицы меняются. Рассмотренный выше пример показывает, что если гамильтониан, заданный в постоянном базисе, имел некоторый спектр, то после перехода к новому базису, заданному оператором эволюции, гамильтониан H' обращается в нуль, и имеет только нулевые собственные значения. В квантовой механике уравнение Шредингера обычно задают, определив гамильтониан в постоянном базисе, исходя из физических соображений. Затем, если это удобнее, можно перейти к новому базису, зависящему от времени.

Перейдем к определению адиабатического предела и описанию базиса $b_k(t)$, который будет использован при доказательстве адиабатической теоремы. Адиабатическая теорема справедлива для гамильтонианов, которые медленно меняются со временем. А именно, мы предполагаем, что гамильтониан некоторой квантовомеханической системы достаточно гладко зависит от вещественного параметра $\nu = \epsilon t$, где $\epsilon > 0$, который меняется на конечном отрезке, $\nu \in [0, \nu_0]$. Тогда медленное изменение гамильтониана означает, что параметр ν меняется на конечную величину при малых ϵ и больших временах t.

Определение. Двойной предел в решении задачи Коши для уравнения Шредингера (14.1) и (14.2) на отрезке $[0, t]$

$$\epsilon \to 0, \qquad t \to \infty, \qquad \text{при условии} \quad \epsilon t = \nu = \mathsf{const}. \tag{14.8}$$

называется *адиабатическим.*

При исследовании адиабатического предела время t в уравнении Шредингера удобно заменить на параметр ν:

$$i\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \psi H(\nu). \tag{14.9}$$

Вектор состояния $\psi(\nu, \epsilon)$ в таком случае зависит также от параметра ϵ, а адиабатический предел соответствует простому пределу $\epsilon \to 0$ при каждом значении параметра $\nu \in [0, \nu_0]$.

Асимптотическое решение уравнения вида (14.9) в общем случае построено в [72, 73].

Для доказательства адиабатической теоремы нам понадобится специальный базис $b_k(\nu)$, зависящий от ν. Пусть исходный гамильтониан $H(\nu)$ квантовой системы задан в некотором фиксированном базисе e_k. Тогда существует унитарная матрица $S(\nu)$, которая диагонализирует гамильтониан:

$$SH(\nu)S^{-1} = H_{\text{D}}(\nu) = \mathsf{diag}\,(E_1(\nu), \dots, E_{\text{N}}(\nu)), \tag{14.10}$$

где $E_1 \leqslant E_2 \leqslant \dots \leqslant E_{\text{N}}$ – уровни энергии собственных состояний гамильтониана H, которые будем считать упорядоченными. Пусть b_k – собственные векторы исходного гамильтониана:

$$b_k H = E_k b_k, \tag{14.11}$$

для всех ν. Как известно, строками матрицы преобразования $S_k{}^l$, где индекс k фиксирован и $l = 1, \dots, \mathrm{N}$, являются компоненты собственных векторов $b_k = b_k{}^l e_l$ гамильтониана H: $S_k{}^l = b_k{}^l$. То есть гамильтониан $H(\nu)$ в базисе b_k диагонален. Унитарная матрица S определена неоднозначно, и произвол в ее выборе в дальнейшем рассмотрении будет использован.

Мы допускаем, что часть уровней энергии может быть вырождена. Обозначим через Υ_n множество индексов, для которых $E_j(\nu) = E_n(\nu)$ при $j \in \Upsilon_n$. Конечно, в качестве индекса n можно выбрать любой индекс, принадлежащий Υ_n. Если уровень E_n невырожден, то множество индексов состоит из одного элемента: $\Upsilon_n = \{n\}$. Мы докажем адиабатическую теорему в случае, когда множество индексов Υ_n для всех n не меняется со временем, т.е. уровни энергии не пересекаются.

Мы также предполагаем, что гамильтониан H, уровни энергии $E_1, \dots, E_\mathrm{N}$ и матрица преобразования S достаточно гладко зависят от ν на конечном отрезке $[0, \nu_0]$.

Для доказательства адиабатической теоремы нам понадобится

Лемма 14.1.1. *Существует унитарная матрица S в (14.10) такая, что выполнено условие*

$$\left(\frac{dS}{d\nu} S^{-1}\right)_k{}^j = 0 \qquad \forall\, k \in \Upsilon_j. \tag{14.12}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая. Пусть уровень энергии E_k невырожден. Матрица преобразования S в формуле (14.10) определена с точностью до умножения каждой строки на фазовый множитель: $S_k{}^j \mapsto S_k{}^j\, \mathsf{e}^{i\alpha_k(\nu)}$ для всех $j = 1, \dots, \mathrm{N}$. Это соответствует произволу в выборе фазового множителя у собственного вектора состояния (14.11). Пусть фазовый множитель удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\alpha_k}{d\nu} = i \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{dS_k{}^j}{d\nu} S^{-1}{}_j{}^k,$$

где суммирование по k в правой части отсутствует. Тогда нетрудно проверить, что после преобразования для любого решения этого уравнения выполнено равенство

$$\left(\frac{dS}{d\nu} S^{-1}\right)_k{}^k = 0. \tag{14.13}$$

Это можно проделать для всех невырожденных уровней одновременно, выбрав подходящим образом фазы $\alpha_k(\nu)$.

Теперь предположим, что все уровни энергии вырождены, $E_1 = \dots = E_\mathrm{N}$. Тогда матрица S формуле (14.10) определена с точностью до унитарного преобразования:

$$S \mapsto WS, \qquad W(\nu) \in \mathbb{U}(\mathrm{N}).$$

Пусть матрица W удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW}{d\nu} + W \frac{dS}{d\nu} S^{-1} = 0,$$

которое всегда имеет решение. Тогда после преобразования для любого решения будет выполнено равенство (14.12) для всех j, k.

Если вырождена только часть уровней, то соответствующее унитарное преобразование необходимо проделать только с этими уровнями. Таким образом, равенство (14.12) будет выполнено для всех уровней с $E_j = E_k$.

Доказательство адиабатической теоремы будет проведено в ортонормированном базисе (14.6), где матрица S выбрана таким образом, как описано в лемме 14.1.1. Этот базис состоит из собственных векторов исходного гамильтониана и гамильтониан $H(\nu)$ в нем диагонален (14.10). Компоненты вектора состояния в базисе b_k, как и ранее, пометим штрихом, $\psi = \psi'^k b_k$. Поскольку гамильтониан H в этом базисе диагонален, то квадрат модуля k-той компоненты вектора состояния

$$|(\psi, b_k)|^2 = |\psi'^k|^2,$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{H}$, равен вероятности обнаружить квантовую систему в состоянии E_k.

Для формулировки теоремы нам понадобится функция

$$\Delta E_n(\nu) = \min_{j,\sigma} |E_j(\sigma) - E_n(\sigma)| \qquad \forall\, \sigma \in [0,\nu],$$

где минимум $|E_j - E_n|$ берется по всем j, для которых $E_j \neq E_n$, и всем $\sigma \in [0,\nu]$. Поскольку уровни энергии не пересекаются, то для каждого значения параметра ν функция $\Delta E_n(\nu)$ конечна и равна минимальному расстоянию от уровня энергии E_n до остальных уровней энергии.

Теорема 14.1.1 (Адиабатическая теорема). *Пусть гамильтониан $H = H(\nu)$, его собственные состояния $b_k(\nu)$ и уровни энергии $E_k(\nu)$ достаточно гладко зависят от ν на конечном отрезке $\nu \in [0,\nu_0]$. Предположим, что число вырожденных собственных состояний постоянно во времени. Пусть $\psi_{(n)}(\nu,\epsilon)$ – решение уравнения Шредингера, которое в начальный момент времени совпадает с собственным состоянием $b_n(0)$ гамильтониана $H(0)$, соответствующим уровню энергии $E_n(0)$. Тогда в адиабатическом пределе (14.8) справедлива следующая оценка нормы*

$$1 - \sum_{j\in\Upsilon_n} |(\psi_{(n)}, b_j)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\epsilon^2)}{\Delta E_n^2(\nu)} \qquad \forall\, \nu \in [0,\nu_0]. \tag{14.14}$$

То есть в процессе эволюции квантовая система будет оставаться в собственном состоянии гамильтониана $H(\nu)$, соответствующим уровню энергии $E_n(\nu)$, с точностью порядка ϵ^2.

Доказательство. Будем решать задачу Коши (14.5) в базисе (14.6). Гамильтониан, который входит в уравнение Шредингера, в этом базисе диагонален с точностью до линейных членов по ϵ,

$$H' = H_{\text{D}} - i\epsilon \frac{dS}{d\nu} S^{-1}.$$

Пусть матрица S выбрана таким образом, как описано в лемме 14.1.1. Предположим, что в начальный момент времени система находится в собственном состоянии гамильтониана H_{D} и, следовательно, в собственном состоянии исходного гамильтониана $H = S^{-1} H_{\text{D}} S$. Это значит, что начальное условие в базисе b_k имеет вид

$$\psi_{(n)}(0,\epsilon) = b_n(0) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}, 1, 0\ldots,0).$$

Любое решение уравнения Шредингера представимо в виде

$$\psi_{(n)}(\nu,\epsilon) = \phi_{(n)}(\nu,\epsilon) \exp\left(-\frac{i}{\epsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}(\sigma)\right), \tag{14.15}$$

где $\phi_{(n)}$ – некоторый вектор гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Тогда для вектора $\phi_{(n)}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \phi_{(n)}}{\partial \nu} = -\phi_{(n)} \exp\left(-\frac{i}{\epsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}\right) \frac{dS}{d\nu} S^{-1} \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\nu d\sigma H_{\text{D}}\right),$$

Это уравнение вместе с начальным условием перепишем в виде интегрального уравнения

$$\phi_{(n)}(\nu,\epsilon) = \psi'_{(n)}(0) - \int_0^\nu d\sigma \phi_{(n)} \exp\left(-\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda H_{\text{D}}\right) \frac{dS}{d\sigma} S^{-1} \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda H_{\text{D}}\right). \tag{14.16}$$

При $\epsilon \to 0$ подынтегральное выражение содержит быстро осциллирующий множитель и его легко оценить. Рассмотрим модуль компоненты решения $\psi'^{j}_{(n)}$, которая соответствует собственному состоянию гамильтониана H с энергией E_j, где $E_j \neq E_n$,

$$\left|\psi'^{j}_{(n)}\right| = \left|\phi^j_{(n)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\text{N}} \int_0^\nu d\sigma \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda (E_j - E_k)\right) \phi^k_{(n)} \left(\frac{dS}{d\nu} S^{-1}\right)_k^{\ j}\right|. \tag{14.17}$$

В сумме справа слагаемые с $E_k = E_j$ вклада не дают в силу равенства (14.12). При $E_k \neq E_j$ каждое слагаемое проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon}{i(E_j - E_k)} \operatorname{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda(E_j - E_k)\right)\phi^k_{(n)}\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k{}^j\Bigg|_0^\nu \\ &\qquad - \frac{\epsilon}{i}\int_0^\nu d\sigma \operatorname{exp}\left(\frac{i}{\epsilon}\int_0^\sigma d\lambda(E_j - E_k)\right)\frac{1}{E_j - E_k}\frac{d}{d\sigma}\left[\phi^k_{(n)}\left(\frac{dS}{d\nu}S^{-1}\right)_k{}^j\right]. \end{aligned} \tag{14.18}$$

По предположению подынтегральное выражение во втором слагаемом является дифференцируемой функцией и его снова можно проинтегрировать по частям. В результате получим, что оно имеет порядок ϵ^2, и им можно пренебречь. Модуль первого слагаемого, очевидно, ограничен. Таким образом, получаем оценку

$$\left|\psi'^j_{(n)}(\nu, \epsilon)\right| = \frac{\mathsf{O}(\epsilon)}{\min|E_j(\sigma) - E_k(\sigma)|} \qquad \forall\, j \notin \Upsilon_n, \tag{14.19}$$

где минимум берется по всем k, для которых $E_k \neq E_j$, и всем $\sigma \in [0, \nu]$.

Теперь снова вернемся к выражению (14.18). Из оценки (14.19) вытекает, что $|\phi^k_{(n)}|$ для всех k при $E_k \neq E_n$ имеет порядок не ниже ϵ. Поэтому в сумме (14.17) все слагаемые с индексом $k \notin \Upsilon_n$ дают вклад не ниже ϵ^2, и ими можно пренебречь. Поэтому оценку (14.19) можно улучшить

$$\left|\psi'^j_{(n)}(\nu, \epsilon)\right| = \frac{\mathsf{O}(\epsilon)}{\min|E_j(\sigma) - E_n(\sigma)|} \qquad \forall\, j \notin \Upsilon_n,$$

где минимум берется только по $\sigma \in [0, \nu]$.

Норма произвольного решения сохраняется во времени и равна единице. Следовательно,

$$1 - \sum_{j \in \Upsilon_n} |\psi'^j_{(n)}(\nu, \epsilon)|^2 = \sum_{j \notin \Upsilon_n} |\psi'^j_{(n)}(\nu, \epsilon)|^2.$$

Поскольку число уровней конечно, то отсюда вытекает оценка (14.14).

Замечание. В теореме функция $\Delta E_n(\nu)$ для каждого ν равна константе и ее можно включить в $\mathsf{O}(\epsilon^2)$. Тем не менее мы выделили множитель ΔE_n с тем, чтобы показать, что предположение о том, что уровни энергии не пересекаются, является существенным. При пересечении уровней энергии знаменатель в (14.14) обращается в нуль и доказательство не проходит. В этом случае требуются дополнительные предположения о степени касания уровней энергии и дополнительное исследование. В своей оригинальной статье [69] Борн и Фок рассмотрели случай, когда спектр гамильтониана дискретен, но может быть неограничен. Неявно ими было сделано предположение о невырожденности спектра почти для всех моментов времени. Кроме того, допускалась возможность определенного пересечения уровней энергии с течением времени. Мы рассмотрели более простой конечномерный случай, когда уровни энергии не пересекаются. Это позволило упростить доказательство и выявить наиболее существенные моменты. Оценка (14.14) согласуется с оценкой, приведенной в [69].

Адиабатическая теорема утверждает, что, если в начальный момент времени система находилась в собственном состоянии гамильтониана, соответствующем уровню энергии $E_n(0)$, и этот уровень невырожден, то в адиабатическом пределе она будет оставаться в собственном состоянии $E_n(\nu)$ с точностью порядка ϵ^2 при конечных значениях параметра ν. Если уровень энергии E_n вырожден, то система будет находиться в одном из собственных состояний E_j, где $j \in \Upsilon_n$, с той же точностью. В следующем разделе мы увидим, что оценка (14.14) неулучшаема, а в процессе эволюции система может оказаться в любом из вырожденных состояний E_j, $j \in \Upsilon_n$, с вероятностью порядка единицы. Эти утверждения, естественно, не зависят от выбора базиса, который использовался при доказательстве адиабатической теоремы.

Рассмотрим теперь, как выглядит в адиабатическом пределе решение задачи Коши (14.4) в фиксированном базисе в невырожденном случае. Пусть $\varphi(\nu)$ – собственная функция гамильтониана $H(\nu)$, отвечающая невырожденному собственному значению энергии $E(\nu)$,

$$\varphi H = E\varphi \qquad \forall\, \nu \in [0, \nu_0].$$

Эти собственные функции определены с точностью до фазового множителя, который может зависеть от ν. Пусть в начальный момент времени система находилась в собственном состоянии $\psi_0 = \varphi(0)$. В адиабатическом приближении она будет находиться в собственном состоянии, соответствующем энергии $E(\nu)$. Поскольку собственное состояние невырождено, то решение задачи Коши (14.4) может отличаться от φ не более, чем на фазовый множитель. Поэтому будем искать решение в виде $\psi = \mathsf{e}^{i\Theta}\varphi$, где $\Theta(t)$ – неизвестная функция времени. Тогда из уравнения Шредингера следует уравнение на фазу

$$\dot\Theta = i(\dot\varphi, \varphi) - E(\epsilon t), \tag{14.20}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени. Поскольку в начальный момент времени $\Theta(0) = 0$, то фаза имеет вид

$$\Theta(t) = i\int_0^t ds \left(\frac{d\varphi}{ds}, \varphi\right) - \int_0^t dsE(\epsilon s) = i\int_0^\nu d\sigma \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}, \varphi\right) - \int_0^t dsE(\epsilon s), \tag{14.21}$$

где $\sigma := \epsilon s$.

Покажем, что фазу собственной функции φ всегда можно выбрать таким образом, что будет выполнено равенство

$$\left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) = 0, \tag{14.22}$$

если $\nu \in [0, \infty)$. Действительно, пусть $\varphi = \mathsf{e}^{i\beta}\chi$, где функция $\beta(\nu)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{d\beta}{d\nu} = \left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) \tag{14.23}$$

с некоторым начальным условием, например, $\beta(0) = 0$. Тогда нетрудно проверить, что для новых собственных функций выполнено равенство $(d\chi/d\nu, \chi) = 0$. Поскольку уравнение (14.23) всегда имеет решение на полупрямой, то собственные функции φ гамильтониана всегда можно выбрать таким образом, что будет выполнено равенство (14.22).

Однако уравнение (14.23) может не иметь решения на окружности $\mathbb{S}^1$. Будем считать, что на окружности $\nu \in [0, 2\pi]$. Тогда необходимым условием существования решения является равенство

$$i\int_0^{2\pi} d\nu \left(\frac{d\varphi}{d\nu}, \varphi\right) = 2\pi m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \dots .$$

Ясно, что это условие в общем случае не выполняется. Поэтому уравнение (14.23) может не иметь решения на окружности. В этом случае первое слагаемое в выражении для фазы (14.21) устранить нельзя. По сути дела это и есть фаза Берри.

Решение задачи Коши на окружности $\nu \in \mathbb{S}^1$ означает наличие машины времени. Эти решения можно отбросить как нефизические. Однако Берри предложил другую схему рассуждений, которая будет рассмотрена в разделе 14.2.1.

14.1.1. Двухуровневая система. В настоящем разделе в качестве примера мы рассмотрим двухуровневую квантовомеханическую систему, для которой уравнение Шредингера решается явно. Будет показано, что оценка, данная в адиабатической теореме, является неулучшаемой.

Чтобы упростить задачу, поступим следующим образом. Вместо того, чтобы задать исходный гамильтониан в фиксированном базисе, а затем его диагонализировать, мы зададим диагональную матрицу H_{D} и унитарную матрицу S, которые определяют исходный гамильтониан $H = S^{-1}H_{\text{D}}S$. Пусть диагонализированный гамильтониан имеет вид

$$H_{\text{D}} = \begin{pmatrix} E_1(\nu) & 0 \\ 0 & E_2(\nu) \end{pmatrix},$$

где $E_{1,2}(\nu)$ – некоторые заданные функции. Унитарную матрицу S в (14.10) выберем в виде

$$S = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

где $\alpha(\nu) \in \mathbb{R}$ – также некоторая заданная функция. Следовательно, исходный гамильтониан задачи имеет вид

$$H = S^{-1} H_{\text{D}} S = \begin{pmatrix} E_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + E_2 \sin^2\frac{\alpha}{2} & -\frac{i}{2}(E_2 - E_1)\sin\alpha \\ \frac{i}{2}(E_2 - E_1)\sin\alpha & E_1 \sin^2\frac{\alpha}{2} + E_2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

и зависит от трех, пока произвольных, функций $E_1(\nu)$, $E_2(\nu)$ и $\alpha(\nu)$ параметра ν, которые предполагаются достаточно гладкими.

Будем решать уравнение Шредингера в базисе (14.6), в котором гамильтониан имеет вид (14.7). Простые вычисления приводят к гамильтониану

$$H' = \begin{pmatrix} E_1(\nu) & \frac{\dot\alpha}{2} \\ \frac{\dot\alpha}{2} & E_2(\nu) \end{pmatrix},$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t. Ищем решение уравнения Шредингера (14.5) в виде строки

$$\psi' = \left(\exp\left(-i\int_0^t dsE_1\right)\phi,\ \exp\left(-i\int_0^t dsE_2\right)\chi\right),$$

где $\phi(t)$ и $\chi(t)$ – неизвестные функции. Подстановка этого выражения в уравнение Шредингера приводит к системе уравнений для компонент:

$$\begin{aligned} i\dot\phi &= \frac{\dot\alpha}{2}\exp\left(-i\int_0^t ds(E_2 - E_1)\right)\chi, \\ i\dot\chi &= \frac{\dot\alpha}{2}\exp\left(i\int_0^t ds(E_2 - E_1)\right)\phi. \end{aligned} \tag{14.24}$$

При $\dot\alpha \neq 0$ из первого уравнения следует равенство

$$\chi = \frac{2i}{\dot\alpha}\exp\left(i\int_0^t ds(E_2 - E_1)\right)\dot\phi. \tag{14.25}$$

Продифференцируем это равенство по времени и подставим во второе уравнение. В результате получим уравнение второго порядка для ϕ:

$$\ddot\phi + \left(i(E_2 - E_1) - \frac{\ddot\alpha}{\dot\alpha}\right)\dot\phi + \left(\frac{\dot\alpha}{2}\right)^2\phi = 0. \tag{14.26}$$

Для того, чтобы решить это уравнение в явном виде зафиксируем произвольные функции, которые входят в задачу:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^{(0)} + \epsilon t, & E_{1(0)} &= \text{const}, \\ E_2 &= E_2^{(0)} + \epsilon t, & E_{2(0)} &= \text{const}, \\ \alpha &= 2\epsilon t. \end{aligned} \tag{14.27}$$

Тогда уравнение (14.26) примет простой вид

$$\ddot\phi + 2i\Delta E\dot\phi + \epsilon^2\phi = 0, \tag{14.28}$$

где $\Delta E := E_2^{(0)} - E_1^{(0)}$ – расстояние между уровнями энергии. Общее решение этого уравнения зависит от двух постоянных интегрирования $C_{1,2}$ и имеет вид

$$\phi = \mathrm{e}^{-i\Delta Et}\left(C_1\,\mathrm{e}^{i\omega_\epsilon t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega_\epsilon t}\right),$$

где

$$\omega_\epsilon := \sqrt{\Delta E^2 + \epsilon^2}.$$

Компонента χ определяется по формуле (14.25).

Предположим, что в начальный момент времени система находилась в состоянии E_1, т.е.

$$\phi(0) = 1, \qquad \chi(0) = 0. \tag{14.29}$$

Простые вычисления дают решение задачи Коши для системы уравнений (14.24):

$$\begin{aligned} \phi = {} & \mathsf{e}^{-i\Delta E t}\left[\cos\,(\omega_\epsilon t) + \frac{i\Delta E}{\omega_\epsilon}\sin\,(\omega_\epsilon t)\right], \\ \chi = {} & \mathsf{e}^{i\Delta E t}\left[-\frac{i\epsilon}{\omega_\epsilon}\sin\,(\omega_\epsilon t)\right]. \end{aligned} \tag{14.30}$$

Выпишем также компоненты соответствующего вектора состояния

$$\begin{aligned} \psi'^1 = {} & \mathsf{e}^{-i\left(\nu^2/2\epsilon + E_1^{(0)}\nu/\epsilon - \Delta E\nu/\epsilon\right)}\left[\cos\frac{\omega_\epsilon\nu}{\epsilon} + \frac{i\Delta E}{\omega_\epsilon}\sin\frac{\omega_\epsilon\nu}{\epsilon}\right], \\ \psi'^2 = {} & \mathsf{e}^{-i\left(\nu^2/2\epsilon + E_2^{(0)}\nu/\epsilon + \Delta E\nu/\epsilon\right)}\left[-\frac{i\epsilon}{\omega_\epsilon}\sin\frac{\omega_\epsilon\nu}{\epsilon}\right], \end{aligned} \tag{14.31}$$

где мы перешли от t, ϵ к переменным ν, ϵ. Отсюда следует, что адиабатический предел для самого вектора состояния неопределен, так как его фаза стремится к бесконечности. Однако оценку квадрата модуля компонент можно дать. Для решения (14.31) следует оценка

$$1 - |\psi'^1(\nu,\epsilon)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\epsilon^2)}{(\Delta E)^2}, \qquad |\psi'^2(\nu,\epsilon)|^2 = \frac{\mathsf{O}(\epsilon^2)}{(\Delta E)^2},$$

которая совпадает с оценкой в адиабатической теореме. Отсюда следует, что данная оценка неулучшаема.

Теперь рассмотрим случай вырожденных состояний, $E_1 = E_2$, при заданных ранее функциях (14.27). В этом случае уравнение (14.28) сводится к уравнению для свободного осциллятора:

$$\ddot{\phi} + \epsilon^2\phi = 0,$$

и легко интегрируется. Выпишем соответствующее решение задачи Коши (14.29) для компонент вектора состояния:

$$\begin{aligned} \psi'^1 = {} & \mathsf{e}^{-i\left(\nu^2/2\epsilon - E_1^{(0)}\nu/\epsilon\right)}\cos\nu, \\ \psi'^2 = {} & -i\,\mathsf{e}^{-i\left(\nu^2/2\epsilon - E_1^{(0)}\nu/\epsilon\right)}\sin\nu. \end{aligned}$$

Мы снова видим, что адиабатический предел у вектора состояния отсутствует. Однако квадраты модулей компонент хорошо определены:

$$|\psi'^1|^2 = \cos^2\nu, \qquad |\psi'^2|^2 = \sin^2\nu.$$

Отсюда следует, что по мере увеличения параметра ν вектор состояния ψ' осциллирует между вырожденными состояниями. Это показывает, что, если в начальный момент времени система находится в одном из вырожденных состояний, то в процессе эволюции она может оказаться в любом из вырожденных состояний с вероятностью порядка единицы.

14.2. Фаза Берри

Перейдем к задаче, которую рассмотрел М. Берри [66], в ее простейшем варианте.

Пусть гильбертово пространство конечномерно и гамильтониан $H = H(\lambda)$ достаточно гладко зависит от точки некоторого многообразия $\lambda \in \mathbb{M}$ размерности $\mathsf{dim}\,\mathbb{M} = n$. Если на $\mathbb{M}$ выбрать координатную окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$, то гамильтониан будет зависеть от n параметров λ^k, $k = 1, \dots, n$, (координат точки λ). Будем считать, что положение точки λ на $\mathbb{M}$ зависит от времени t некоторым наперед заданным образом, т.е. гамильтониан зависит от точки некоторой кривой $\gamma = \lambda(t)$, $t \in [0, t_0]$. Мы будем решать уравнение Шредингера в адиабатическом приближении, т.е. величина t_0 должна быть достаточно велика. Предположим также, что гамильтониан зависит от времени только через точку $\lambda(t) \in \mathbb{M}$ как сложная функция.

14.2.1. Абелев случай: невырожденное состояние. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\phi H = E\phi, \qquad E = \mathsf{const},$$

где $\phi \in \mathbb{H}$ при всех $\lambda \in \mathbb{M}$. Предположим, что существует невырожденное собственное значение энергии E и соответствующее собственное состояние ϕ, которые достаточно гладко зависят от $\lambda \in \mathbb{M}$. Не ограничивая общности, предположим, что собственная функция ϕ нормирована на единицу, $(\phi, \phi) = 1$. Тогда она единственна с точностью до умножения на фазовый множитель, который может зависеть от λ. Зафиксируем этот фазовый множитель каким либо образом.

Теперь будем решать задачу Коши для уравнения Шредингера (14.1) с начальным условием

$$\psi|_{t=0} = \phi_0, \tag{14.32}$$

где $\phi_0 := \phi(\lambda(0))$. В адиабатическом приближении квантовая система в процессе эволюции будет оставаться в собственном состоянии, соответствующем уровню энергии $E(\lambda)$. Поэтому ищем решение в виде

$$\psi = \mathsf{e}^{i\Theta}\phi,$$

где $\Theta = \Theta(t)$ – некоторая неизвестная функция от времени. Тогда из уравнения Шредингера следует уравнение на фазу (14.20) с начальным условием $\Theta|_{t=0} = 0$. Поскольку $\dot\phi = \dot\lambda^k \partial_k \phi$, то решение задачи Коши для уравнения (14.20) имеет вид

$$\Theta = \int_0^t dt \dot\lambda^k A_k - \int_0^t ds E(\lambda(s)) = \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} d\lambda^k A_k - \int_0^t ds E(\lambda(s)), \tag{14.33}$$

где введено обозначение

$$A_k(\lambda) := i(\phi, \partial_k \phi) \tag{14.34}$$

и интеграл по λ берется вдоль кривой $\lambda(t)$.

Таким образом, интеграл (14.33) в адиабатическом приближении дает решение задачи Коши для уравнения Шредингера (14.1) с начальным условием (14.32). Первое слагаемое в (14.33) называется *геометрической фазой* или *фазой Берри*, а второе – *динамической фазой*.

Заметим, что компоненты (14.34) вещественны вследствие нормировки волновой функции. Действительно, дифференцируя условие нормировки $(\phi, \phi) = 1$, получаем равенство

$$(\partial_k \phi, \phi) + (\phi, \partial_k \phi) = (\phi, \partial_k \phi)^\dagger + (\phi, \partial_k \phi) = 0.$$

Отсюда вытекает вещественность компонент (14.34) и, следовательно, фазы Берри.

Теперь рассмотрим множество замкнутых кривых $\gamma = \lambda(t) \in \Omega(\mathbb{M}, \lambda_0)$ на многообразии параметров $\mathbb{M}$ с началом и концом в некоторой фиксированной точке $\lambda_0 \in \mathbb{M}$. Тогда для полного изменения фазы волновой функции получаем ответ

$$\Theta = \Theta_{\text{в}} - \int_0^{t_0} dt E(\lambda(t)),$$

где

$$\Theta_{\text{в}} := \oint_\gamma d\lambda^k A_k. \tag{14.35}$$

Динамическая часть фазы волновой функции расходится при $t_0 \to \infty$. Однако в экспериментах наблюдается разность фаз двух векторов состояний с одинаковой динамической фазой, которая определяется фазой Берри. Поэтому рассмотрим фазу Берри подробнее.

Заметим, что выражение для фазы Берри не зависит от параметризации кривой γ. Это значит, что переход к адиабатическому пределу в уравнении Шредингера влияет на фазу Берри только через компоненты локальной формы связности (14.34).

В таком виде можно дать геометрическую интерпретацию фазе Берри $\Theta_{\text{в}}$, которая определяется первым слагаемым в полученном выражении (14.33). А именно, мы имеем главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1))$, базой которого является многообразие параметров $\lambda \in \mathbb{M}$, а структурной группой – группа $\mathbb{U}(1)$ (фаза вектора состояния $\mathsf{e}^{i\Theta}$). Вектор гильбертова пространства $\phi \in \mathbb{H}$ представляет собой локальное сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P})$, типичным слоем которого является гильбертово пространство $\mathbb{H}$.

Рассмотрим изменение локального сечения ассоциированного расслоения, которое вызвано умножением вектора гильбертова пространства на фазовый множитель (вертикальный автоморфизм),

$$\phi' = \mathsf{e}^{ia}\phi,$$

где $a = a(\lambda) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{M})$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. Тогда компоненты (14.34) преобразуются по правилу

$$A'_k = A_k - \partial_k a.$$

Сравнивая это правило с преобразованием компонент локальной формы связности, заключаем, что поля $A_k(\lambda)$ можно интерпретировать, как компоненты локальной формы связности для группы $\mathbb{U}(1)$. Другими словами, $A_k(\lambda)$ – это калибровочное поле для одномерной унитарной группы $\mathbb{U}(1)$. Если база ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P})$ покрыта некоторым семейством карт, $\mathbb{M} = \cup_j \mathbb{U}_j$, то множество сечений, заданных в каждой координатной окрестности $\mathbb{U}_j$, определяет семейство локальных форм связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(1))$. Семейство локальных форм связности $d\lambda^k A_k$ определяет единственную с точностью до изоморфизма связность на $\mathbb{P}$ (теорема 13.1.1).

Вспомним выражение для элемента группы голономии в виде упорядоченной P-экспоненты (13.63). В рассматриваемом случае группа $\mathbb{U}(1)$ абелева и P-экспонента совпадает с обычной экспонентой. Поэтому фаза Берри (14.35) определяет элемент $\mathsf{e}^{i\Theta_{\text{в}}}$ группы голономии $\Phi(\lambda_0, e) \subset \mathbb{U}(1)$ главного расслоения в точке $(\lambda_0, e) \in \mathbb{P}$, соответствующей нулевому сечению $\mathbb{M} \ni \lambda \mapsto (\lambda, e) \in \mathbb{P}$, где $\lambda_0 := \lambda(0)$ и e – единица структурной группы $\mathbb{U}(1)$. Сечение является нулевым, поскольку в начальный момент времени фаза Берри равна нулю, $\Theta_{\text{в}}|_{t=0} = 0$. Локальная форма связности $d\lambda^k A_k$ также соответствует нулевому сечению.

Если база $\mathbb{M}$ односвязна, то выражение для фазы Берри (14.35) можно переписать в виде поверхностного интеграла от компонент локальной формы кривизны. Используя формулу Стокса, получаем следующее выражение

$$\Theta_{\text{в}} = \frac{1}{2}\iint_S d\lambda^k \wedge d\lambda^l F_{kl}, \tag{14.36}$$

где S – поверхность в $\mathbb{M}$ с границей $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, \lambda_0)$ и $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ – компоненты локальной формы кривизны (напряженности калибровочного поля). Если база $\mathbb{M}$ не является односвязной, то выражение для фазы Берри в виде поверхностного интеграла (14.36) имеет место только для тех замкнутых путей, которые стягиваются в точку.

14.2.2. Частица со спином 1/2 в магнитном поле. В качестве примера вычислим фазу Берри для частицы со спином $1/2$, находящейся во внешнем однородном магнитном поле. В нерелятивистской квантовой механике частица со спином $1/2$ описывается двухкомпонентной волновой функцией

$$\psi = (\psi_+, \psi_-).$$

Будем считать, что она находится в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с заданным однородным магнитным полем. Пусть напряженность магнитного поля $H^k(t)$, $k = 1, 2, 3$, не зависит от точки пространства, но меняется со временем t некоторым заданным образом. Кроме того, для простоты, пренебрежем кинетической энергией частицы и будем считать, что другие поля отсутствуют. В этом случае гильбертово пространство $\mathbb{H}$ двумерно, и гамильтониан частицы состоит из одного слагаемого – взаимодействия магнитного момента частицы с внешним магнитным полем (см., например, [74, 75]),

$$H = -\mu H^k \sigma_k^{\text{т}},$$

где $\sigma_k^{\text{т}}$ – транспонированные матрицы Паули (поскольку в наших обозначениях они действуют справа) и μ – магнетон (размерная постоянная, равная отношению магнитного момента частицы к ее спину). Чтобы привести гамильтониан к виду, который был рассмотрен ранее, ведем новые переменные $\lambda^k := -\mu H^k$. Тогда гамильтониан примет вид

$$H = \lambda^k \sigma_k^{\text{т}} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^+ \\ \lambda^- & -\lambda^3 \end{pmatrix}, \tag{14.37}$$

где $\lambda^\pm := \lambda^1 \pm i\lambda^2$.

Собственные значения гамильтониана (14.37) находятся из уравнения

$$\mathsf{det}\,(H - E\mathbb{1}) = 0,$$

которое имеет два вещественных решения

$$E_\pm = \pm|\lambda|, \tag{14.38}$$

где

$$|\lambda| := \sqrt{(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2}$$

– длина вектора $\lambda = \{\lambda^k\} \in \mathbb{R}^3$. Нетрудно проверить, что уравнение на собственные функции,

$$\phi_\pm H = E_\pm \phi_\pm,$$

имеет два решения

$$\phi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2|\lambda|}}\left(\pm\frac{\lambda^-}{\sqrt{|\lambda| \mp \lambda^3}},\ \sqrt{|\lambda| \mp \lambda^3}\right). \tag{14.39}$$

В полученном выражении множитель выбран таким образом, что собственные функции нормированы на единицу,

$$(\phi_\pm, \phi_\pm) = 1.$$

Таким образом, гамильтониан (14.37) частицы со спином $1/2$, находящейся во внешнем однородном магнитном поле, имеет два невырожденных собственных состояния (14.39), соответствующих уровням энергии (14.38).

Для дальнейших вычислений в пространстве параметров $\lambda \in \mathbb{R}^3$ удобно ввести сферические координаты $|\lambda|, \theta, \varphi$:

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= |\lambda| \sin\theta \cos\varphi, \\
\lambda^2 &= |\lambda| \sin\theta \sin\varphi, \\
\lambda^3 &= |\lambda| \cos\theta.
\end{aligned}$$

Тогда собственные функции примут вид

$$\phi_+ = \left(\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\varphi},\ \sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad \phi_- = \left(-\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\varphi},\ \cos\frac{\theta}{2}\right).$$

Допустим, что экспериментатор, наблюдающий за частицей, достаточно гладко меняет однородное магнитное со временем. То есть параметры $\lambda^k(t)$, от которых зависит гамильтониан, достаточно гладко зависят от времени. Предположим также, что в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в состоянии ϕ_+. Соответствующее решение уравнения Шредингера (14.1) в адиабатическом приближении имеет вид

$$\psi = \mathrm{e}^{i\Theta}\phi_+,$$

где фаза Θ удовлетворяет уравнению (14.20). Нетрудно вычислить компоненты локальной формы связности $A_k = i(\phi_+, \partial_k\phi_+)$ для собственного состояния ϕ_+:

$$A_{|\lambda|} = 0, \qquad A_\theta = 0, \qquad A_\varphi = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Соответствующая локальная форма кривизны имеет только две отличные от нуля компоненты:

$$F_{\theta\varphi} = -F_{\varphi\theta} = -\frac{1}{2}\sin\theta.$$

Теперь вычислим фазу Берри для замкнутой кривой в пространстве параметров $\gamma = \{\lambda^k(t)\} \in \mathbb{M}$,

$$\Theta_{\text{в}} = \oint_\gamma d\lambda^k A_k = \frac{1}{2}\iint_S d\lambda^k \wedge d\lambda^l F_{kl} = \iint_S d\theta \wedge d\varphi F_{\theta\varphi} = -\frac{1}{2}\iint_S d\theta \wedge d\varphi \sin\theta = -\frac{1}{2}\Omega(\gamma), \tag{14.40}$$

где S – поверхность в $\mathbb{R}^3$ с границей γ и $\Omega(\gamma)$ – телесный угол, который занимает контур γ, если смотреть из начала координат.

Если в начальный момент времени частица находилась в состоянии ϕ_-, то вычисления проводятся аналогично. В этом случае

$$A_{|\lambda|} = 0, \qquad A_\theta = 0, \qquad A_\varphi = \sin^2\frac{\theta}{2},$$

и компоненты локальной формы кривизны отличаются знаком:

$$F_{\theta\varphi} = -F_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\sin\theta.$$

Следовательно, фаза Берри также отличается только знаком.

Таким образом, если в начальный момент времени частица находилась в одном из состояний $\phi_\pm$, то после изменения однородного магнитного поля вдоль замкнутой кривой γ, ее волновая функция изменится на фазовый множитель, геометрическая часть которого равна

$$\Theta_{\text{в}\pm} = \mp\frac{1}{2}\Omega(\gamma), \tag{14.41}$$

где $\Omega(\gamma)$ – телесный угол, под которым виден замкнутый контур γ из начала координат. Этот результат имеет место в адиабатическом приближении, когда параметры $\lambda(t)$ медленно меняются со временем.

Выражение для фазы Берри (14.41) было подтверждено экспериментально [76] для рассеяния поляризованных нейтронов в спиральном магнитном поле.

В рассмотренном примере однородное магнитное поле может иметь произвольное направление и величину. Следовательно, база $\mathbb{M}$ главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{U}(1))$ совпадает с евклидовым пространством, $\mathbb{M}=\mathbb{R}^3$. Поэтому, согласно теореме 12.1.1, главное расслоение $\mathbb{P}$ тривиально, $\mathbb{P}\approx\mathbb{R}^3\times\mathbb{U}(1)$. В случае фазы Берри связность на этом расслоении определяется сечением ассоциированного расслоения, например, ϕ_+, которое находится путем решения уравнения Шредингера. Это сечение (14.39), как нетрудно проверить, имеет особенность на положительной полуоси $\lambda^3\geqslant 0$. Компоненты локальной формы связности относительно декартовой системы координат имеют вид

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda^1}A_\varphi = -\frac{\sin\varphi\cos\frac{\theta}{2}}{2|\lambda|\sin\frac{\theta}{2}},\\
A_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda^2}A_\varphi = \frac{\cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}}{2|\lambda|\sin\frac{\theta}{2}},\\
A_3 &= \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}A_\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{14.42}$$

Здесь мы вынуждены перейти в декартову систему координат, поскольку сферическая система координат сингулярна на оси λ^3 и непригодна для исследования особенностей, которые здесь расположены. Как видим, компоненты локальной формы связности имеют особенность на положительной полуоси $\lambda^3\geqslant 0$ как и вектор ϕ_+. Теперь вычислим компоненты локальной формы тензора кривизны. У нее отличны от нуля все компоненты:

$$\begin{aligned}
F_{12} &= -F_{21} = -\frac{\cos\theta}{2|\lambda|^2},\\
F_{13} &= -F_{31} = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{2|\lambda|^2},\\
F_{23} &= -F_{32} = -\frac{\sin\theta\cos\varphi}{2|\lambda|^2}.
\end{aligned}$$

Наконец, вычислим квадрат тензора кривизны, который является инвариантом,

$$F^2 = 2(F_{12}^2+F_{13}^2+F_{23}^2) = \frac{1}{2|\lambda|^4}.$$

Таким образом, форма кривизны сингулярна только в начале координат.

Вернемся к нашему главному расслоению $\mathbb{R}^3\times\mathbb{U}(1)$. Локальная форма связности (14.42) на нем неопределена, так как имеет особенность на полуоси $\lambda^3\geqslant 0$, которую мы обозначим $\{\lambda^3_+\}$. Поэтому, чтобы построить главное расслоение с заданной связностью, мы вынуждены удалить прообраз $\pi^{-1}(\{\lambda^3_+\})$, где $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{U}(1) \to \mathbb{R}^3$ – естественная проекция. В результате получаем тривиальное главное расслоение $(\mathbb{R}^3 \setminus \{\lambda^3_+\}) \times \mathbb{U}(1)$, которое является подрасслоением исходного расслоения. На этом главном расслоении локальная форма (14.42) бесконечно дифференцируема.

Можно рассуждать по-другому. Поскольку магнитное поле является внешним, то мы вправе предположить, что оно меняется, например, в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$, определяемом условием $\lambda_1 > 0$. Поскольку полупространство $\mathbb{R}^3_+$ диффеоморфно всему евклидову пространству $\mathbb{R}^3$, то соответствующее главное расслоение тривиально: $\mathbb{P} \approx \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{U}(1)$. В этом случае никаких вопросов в определением связности вообще не возникает, так как локальная форма связности (14.42) гладкая. При этом выражение для фазы Берри (14.41) останется прежним.

Таким образом, фаза Берри является не топологическим понятием, а геометрическим, так как топология главного расслоения тривиальна. Она обязана своим происхождением нетривиальной связности, которая определяется сечениями ассоциированного расслоения.

14.2.3. Неабелев случай: вырожденное состояние. Понятие фазы Берри было обобщено на случай, когда уровни энергии гамильтониана $H(\lambda)$ вырождены [68]. В этом случае при решении уравнения Шредингера возникает главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r))$ со структурной группой $\mathbb{U}(r)$, где r – количество независимых собственных функций, соответствующих вырожденному уровню энергии E. Опишем эту конструкцию подробно.

Предположим, что гамильтониан квантовой системы зависит от точки некоторого многообразия $\lambda(t) \in \mathbb{M}$, как и ранее. Пусть E – вырожденное собственное значение гамильтониана H, которому соответствуют r независимых собственных функций $\phi^a \in \mathbb{H}$, $a = 1, \dots, r$,

$$\phi^a H = E\phi^a$$

для всех моментов времени. Мы предполагаем, что $E(\lambda)$ и $\phi^a(\lambda)$ являются достаточно гладкими функциями от точки многообразия λ, и число собственных функций r не меняется со временем.

Собственные функции можно выбрать ортонормированными,

$$(\phi^a, \phi_b) = \delta^a_b,$$

где δ^a_b – символ Кронекера. Будем искать решение задачи Коши ψ^a для уравнения Шредингера (14.1) с начальным условием

$$\psi^a(0) = \psi^a_0 := \phi^a(\lambda(0)).$$

То есть в начальный момент времени система находится в одном из собственных состояний ϕ^a. В адиабатическом приближении решение ψ^a для всех моментов времени является собственной функцией гамильтониана $H(\lambda)$, соответствующей значению энергии $E(\lambda)$. Поэтому его можно разложить по собственным функциям вырожденного состояния

$$\psi^a = \phi^b U^{-1}{}_b{}^a, \tag{14.43}$$

где $U(\lambda) \in \mathbb{U}(r)$ – некоторая унитарная матрица, которая достаточно гладко зависит от точки $\lambda \in \mathbb{M}$.

Унитарность матрицы U обусловлена следующим обстоятельством. Рассмотрим решения ψ^a для всех значений индекса $a = 1, \dots, r$. Дифференцируя скалярное произведение (ψ^a, ψ_b) по времени и используя уравнение Шредингера, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^a, \psi_b) = -i(\psi^a H, \psi_b) + i(\psi^a, H\psi_b) = 0.$$

Последнее равенство следует из самосопряженности гамильтониана. Отсюда следует, что, если в начальный момент времени векторы $\psi^a_0 := \phi^a(\lambda(0))$ ортонормированы, то соответствующие решения уравнения Шредингера останутся таковыми и во все последующие моменты времени. Поэтому матрица U в разложении (14.43) унитарна.

Для искомого решения (14.43) уравнение Шредингера сводится к уравнению

$$i\phi^c \dot{U}^{-1}{}_c{}^b + i\dot{\phi}^c U^{-1}{}_c{}^b = \phi^c H U^{-1}{}_c{}^b.$$

Возьмем скалярное произведение левой и правой части с ϕ_a. В результате получаем уравнение на унитарную матрицу

$$\dot{U}^{-1}{}_a{}^b = \dot{\lambda}^k A_{ka}{}^c U^{-1}{}_c{}^b - iEU^{-1}{}_a{}^b, \tag{14.44}$$

где введено обозначение

$$A_{ka}{}^{c} := -(\partial_k \phi^c, \phi_a). \tag{14.45}$$

Из условия ортонормированности собственных функций ϕ^a следует антиэрмитовость компонент $A_{ka}{}^{b}$ для всех $k = 1, \ldots, n$, если индексы a, b рассматриваются, как матричные. Действительно, дифференцируя условие ортонормированности $(\phi^b, \phi_a) = \delta^b_a$, получаем равенство

$$(\partial_k \phi^b, \phi_a) + (\phi^b, \partial_k \phi_a) = (\phi^a, \partial_k \phi_b)^\dagger + (\phi^b, \partial_k \phi_a) = 0.$$

То есть матрицы A_k антиэрмитовы и поэтому принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{u}(r)$. Следовательно, матрицы A_k определяют 1-формы в некоторой окрестности $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ со значениями в алгебре Ли, как и компоненты локальной формы связности.

Начальное условие для унитарной матрицы имеет вид

$$U^{-1}{}_a{}^b|_{t=0} = \delta^b_a.$$

Решение задачи Коши для уравнения (14.44) можно записать в виде упорядоченного P-произведения (см. раздел 13.5)

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) &= \mathsf{P}\exp\left(\int_0^t ds \dot{\lambda}^k(s) A_k(s) - i\int_0^t ds E(\lambda(s))\right) = \\ &= \mathsf{P}\exp\left(\int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} d\lambda^k A_k\right) \times \exp\left(-i\int_0^t ds E(\lambda(s))\right), \end{aligned} \tag{14.46}$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы.

Первый сомножитель является обобщением фазы Берри на случай вырожденных состояний, а второй сомножитель – это динамическая фаза. Динамическая фаза имеет тот же вид, что и в случае невырожденного состояния.

Первый сомножитель в решении (14.46) представляет собой унитарную матрицу Вилчека–Зи

$$U^{-1}_{\text{wz}} := \mathsf{P}\exp\left(\int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} d\lambda^k A_k\right), \tag{14.47}$$

которой можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Мы имеем главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r))$ со структурной группой $\mathbb{U}(r)$ (преобразование (14.43)). Набор собственных функций ϕ^a представляет собой сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}^r, \mathbb{U}(r), \mathbb{P})$, типичным слоем которого является тензорное произведение гильбертовых пространств

$$\mathbb{H}^r := \underbrace{\mathbb{H} \otimes \cdots \otimes \mathbb{H}}_{r}.$$

При вертикальном автоморфизме, который задан унитарной матрицей $U(\lambda) \in \mathbb{U}(r)$,

$$\phi'^a = \phi^b U^{-1}{}_b{}^a, \qquad \phi'_a = U_a{}^b \phi_b,$$

поля (14.45) преобразуются по правилу

$$A'_k = U A_k U^{-1} + \partial_k U U^{-1}, \tag{14.48}$$

где мы опустили матричные индексы. Отсюда следует, что поля A_k можно интерпретировать, как компоненты локальной формы связности или поля Янга–Миллса. Совокупность этих компонент, заданная на координатном покрытии базы $\mathbb{M}$, однозначно задает связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r))$.

Если путь замкнут, $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, \lambda_0)$, то унитарная матрица Вилчека–Зи (14.47) представляет собой элемент группы голономии $U^{-1}_{\text{wz}} \in \Phi(\lambda_0, e)$, в точке $(\lambda_0, e) \in \mathbb{P}$, соответствующей нулевому сечению $\mathbb{M} \ni \lambda \mapsto (\lambda, e) \in \mathbb{P}$, где $\lambda_0 := \lambda(0)$ и e – единица структурной группы $\mathbb{U}(r)$.

Таким образом, в случае вырожденного уровня энергии гамильтониана возникает главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r))$. В рассматриваемом случае базой $\mathbb{M}$ является многообразие параметров $\lambda \in \mathbb{M}$, от точки которого зависит гамильтониан. Мы предполагаем, что это многообразие конечномерно. Структурной группой является унитарная группа $\mathbb{U}(r)$, которая также конечномерна. Связность на главном расслоении определяется сечениями ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{H}^r, \mathbb{U}(r), \mathbb{P})$. В общем случае типичным слоем ассоциированного расслоения может быть бесконечномерное гильбертово пространство $\mathbb{H}^r$. В настоящей монографии мы не рассматриваем бесконечномерных многообразий и расслоений, чтобы избежать возникающих при этом трудностей [11]. Однако в данном случае все, что нужно, это формула преобразования компонент локальной формы связности (14.48), которую легко проверить в каждом конкретном случае. Если база $\mathbb{M}$ не покрывается одной картой, то состояние квантовой системы задается семейством локальных сечений на координатном покрытии базы. Оно определяет семейство локальных форм связности (14.45). В свою очередь семейство локальных форм связности однозначно с точностью до изоморфизма определяет связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r))$.

Опять мы видим, что главные и ассоциированные расслоения могут быть тривиальными или нет, это зависит от рассматриваемой задачи. Связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{U}(r))$ может быть нетривиальна и приводить к нетривиальной матрице Вилчека–Зи (14.47), которая описывает параллельный перенос слоев вдоль пути на базе $\lambda(t) \in \mathbb{M}$, даже для тривиальных расслоений. Это говорит о ее геометрическом, а не топологическом происхождении. Для замкнутых путей $\gamma \in \Omega(\mathbb{M}, \lambda_0)$ с началом и концом в точке $\lambda_0 \in \mathbb{M}$ матрица Вилчека–Зи определяет элемент группы голономии $U_{\text{wz}} \in \Phi(\lambda_0, e) \subset \mathbb{U}(r)$.

При рассмотрении фазы Берри и матрицы Вилчека–Зи мы, для простоты, предположили, что гильбертово пространство квантовой системы конечномерно. Это предположение можно существенно ослабить. Полученные формулы справедливы для всех уровней, для которых справедлива адиабатическая теорема. То есть это должен быть изолированный уровень, энергия которого отделена от остального спектра.

14.3. Эффект Ааронова–Бома

Другой пример возникновения нетривиальной связности на тривиальном главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1)) \approx \mathbb{R}^4 \times \mathbb{U}(1)$ в нерелятивистской квантовой механике дает эффект Ааронова–Бома [67]. В этом случае, в отличие от фазы Берри, в качестве базы $\mathbb{M}$ главного расслоения выступает не пространство параметров, а пространство-время $\mathbb{R}^4$, в котором частица движется. Эффект Ааронова–Бома не связан с адиабатической теоремой, и обсуждается только с геометрической точки зрения.

Рассмотрим уравнение Шредингера (14.1), в котором гамильтониан описывает движение точечной частицы массы m в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x^μ, $\mu = 1, 2, 3$,

$$H_0 = -\frac{\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{2m} + U = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U, \tag{14.49}$$

где $p_\mu := i\hbar\partial_\mu$ – оператор импульса частицы, $\eta_{\mu\nu} := \mathsf{diag}\,(---)$ – отрицательно определенная пространственная метрика, $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ – оператор Лапласа и $U(x)$ – потенциальная энергия частицы.

Четырехмерный оператор импульса имеет вид $p_\alpha := i\hbar\partial_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. При этом нулевая компонента 4-импульса $p_0 := i\hbar\partial_0 = i\hbar\partial_t$ имеет физический смысл оператора энергии частицы.

Если частица взаимодействует с электромагнитным полем, то это взаимодействие описывается с помощью минимальной подстановки для всех четырех компонент импульса

$$p_\alpha \quad \mapsto \quad i\hbar\partial_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha, \tag{14.50}$$

где e – заряд частицы, c – скорость света и A_α – потенциал электромагнитного поля (компоненты локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности). При этом нулевая компонента, разделенная на скорость света, A_0/c, имеет физический смысл потенциала электрического поля, а пространственные компоненты A_μ – ковекторного потенциала магнитного поля. Таким образом, точечная частица, находящаяся в электромагнитном поле, описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\left(\partial_\nu + i\frac{e}{\hbar c}A_\nu\right) + \frac{e}{c}A_0\right]\psi + U\psi. \tag{14.51}$$

Здесь мы вернулись к стандартным обозначениям квантовой механики, когда гамильтониан действует на вектор гильбертова пространства слева, поскольку он содержит производные.

В дальнейшем, для простоты, положим $\hbar = 1$ и $c = 1$.

С геометрической точки зрения минимальная подстановка (14.50) с точностью до постоянных совпадает с заменой частной производной на ковариантную:

$$\partial_\alpha \quad \mapsto \quad \nabla_\alpha := \partial_\alpha + ieA_\alpha.$$

Посмотрим на уравнение Шредингера (14.51) с геометрической точки зрения. Оно решается во всем пространстве, $\psi = \psi(t, x)$, поэтому базой расслоения является четырехмерное евклидово пространство, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$. При этом $\mathbb{R}^4$ рассматривается просто как четырехмерное многообразие без какой либо четырехмерной метрики. При желании метрику можно ввести, однако ее наличие никак не влияет на структуру главного расслоения и связности. Метрика $\eta_{\mu\nu}$ определена только на пространственных сечениях $t = \mathsf{const}$, поскольку она входит в уравнение Шредингера. Волновая функция $\psi(t, x)$ представляет собой сечение ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{R}^4, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{C}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P})$, типичным слоем которого является комплексная плоскость $\mathbb{C}$ и которое ассоциировано с некоторым главным расслоением $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1))$. Это главное расслоение всегда тривиально, $\mathbb{P} \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{U}(1)$, так как базой является четырехмерное евклидово пространство. На этом главном расслоении задана локальная форма $\mathbb{U}(1)$-связности, которая определяется электромагнитным потенциалом $A_\alpha(t, x)$. В нерелятивистской квантовой механике рассматривается не все множество сечений ассоциированного расслоения, а лишь подмножество, состоящее из тех дифференцируемых функций $\psi(t, x)$, которые в каждый момент времени t принадлежат гильбертову пространству квадратично интегрируемых функций $\mathbb{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ на пространственных сечениях $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим два случая.

14.3.1. Электрический потенциал. Предположим, что магнитный потенциал равен нулю, $A_\mu = 0$, $\mu = 1, 2, 3$. Запишем уравнение Шредингера в виде

$$i\dot{\psi} = (H_0 + eA_0)\psi, \tag{14.52}$$

где H_0 – гамильтониан системы в отсутствии электромагнитного поля (14.49). Предположим также, что электрический потенциал зависит только от времени, $A_0 = A_0(t)$. Будем искать решение уравнения Шредингера (14.52) в виде $\psi = \mathsf{e}^{-i\Theta}\phi$, где ϕ – решение свободного уравнения Шредингера,

$$i\dot{\phi} = H_0\phi, \tag{14.53}$$

и $\Theta = \Theta(t)$ – некоторая фаза, не зависящая от точки пространства. Подстановка $\psi = \mathsf{e}^{-i\Theta}\phi$ в исходное уравнение Шредингера (14.52) приводит к уравнению на фазу

$$\dot{\Theta} = eA_0,$$

где мы сократили общий фазовый множитель $\mathsf{e}^{-i\Theta}$ и ϕ. Это можно сделать, так как уравнение Шредингера должно выполняться для всех t и x. Решение полученного уравнения имеет вид

$$\Theta(t) = \Theta_0 + e\int_0^t ds A_0(s), \tag{14.54}$$

где Θ_0 – значение фазы волновой функции в начальный момент времени.

Ааронов и Бом предложили следующий эксперимент, схема которого показана на рис.14.1. Пучок электронов делится на два пучка, которые пропускаются через две металлические трубки, на которые подается различный потенциал. Затем пучки собираются, и на экране наблюдается интерференционная картина. Электрический потенциал, который подается на трубки, зависит от времени. Предполагается, что он равен нулю, пока оба пучка не окажутся в своих трубках. Затем он возрастает до некоторых значений, которые отличаются внутри каждой трубки, и снова падает до нуля перед выходом пучков из трубок. Таким образом, пучки находятся в поле A_0 только внутри трубок. Интерференционная картина зависит от разности фаз электронов в пучках, которую можно приближенно оценить следующим образом.

Предположим, что электрон описывается волновой функцией $\psi(t, x)$, которая удовлетворяет уравнению Шредингера (14.52) во всем пространстве-времени $\mathbb{R}^4$. Мы считаем, что в каждый момент времени носитель волновой функции отличен от нуля в небольшой окрестности пространства вблизи траектории частицы. Только в этом случае вообще можно говорить о траектории частицы. В частности, при прохождении электрона сквозь металлическую трубку предполагается, что носитель волновой функции целиком лежит внутри трубки. Математически это можно описать, выбрав в уравнении Шредингера (14.52) соответствующий потенциал. Этот гипотетический потенциал не меняет пространство-время, т.е. базу главного расслоения, а только обеспечивает движение электронов по заданной траектории. Изменение

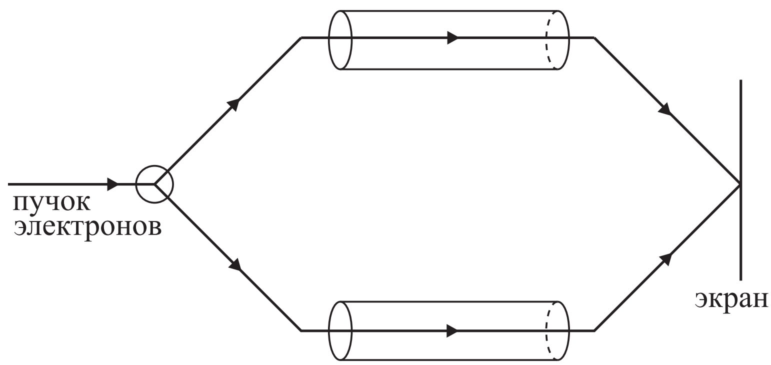

Рис. 14.1. Пучок электронов делится на два пучка, которые пропускаются через две металлические трубки, имеющие разные потенциалы. Затем пучки вновь собираются и наблюдается интерференционная картина, которая зависит от разности фаз электронов в разных пучках.

фазы электрона в верхнем пучке оценим следующим образом. Поскольку потенциал электрического поля однороден внутри трубки и носитель волновой функции целиком содержится внутри трубки, то можно считать, что фаза волновой функции определяется интегралом (14.54). Обозначим моменты времени, соответствующие расщеплению пучка и достижению экрана, соответственно t_1 и t_2. Тогда фаза волновой функции электрона в верхнем пучке при достижении экрана изменится на величину, задаваемую интегралом

$$\Theta_1 = e\int_{t_1}^{t_2} dt A_0^{(1)}(t),$$

где $A_0^{(1)}(t)$ – потенциал электрического поля в момент времени t, т.е. в той точке пространства, где в момент времени t находится электрон из верхнего пучка. Аналогично, изменение фазы волновой функции электрона из нижнего пучка равно

$$\Theta_2 = e\int_{t_1}^{t_2} dt A_0^{(2)}(t),$$

где $A_0^{(2)}$ – потенциал электрического поля вдоль нижней траектории. Ясно, что разность фаз электронов в верхнем и нижнем пучке, $\Theta_{\text{АБ}} = \Theta_2 - \Theta_1$, можно записать в виде интеграла

$$\Theta_{\text{АБ}} = e\oint_\gamma dt A_0(t). \tag{14.55}$$

вдоль замкнутого контура γ в пространстве-времени, когда сначала проходится нижняя половина контура, изображенного на рис.14.1, а затем – верхняя половина в обратную сторону. На рис.14.1 показана проекция контура γ на пространственную плоскость.

Вернемся к геометрической интерпретации. Разность фаз электронов дается интегралом (14.55), который однозначно определяется контуром γ и заданным на нем потенциалом A_0. Электрический потенциал A_0 представляет собой временну́ю компоненту локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1))$. Поэтому разность фаз (14.55) определяет элемент группы голономии $\mathsf{e}^{i\Theta_{\text{АБ}}} \in \Phi((t_0, x_0), e) \subset \mathbb{U}(1)$ в точке $(t_0 = 0, x_0)$, где x_0 – точка пространства, в которой пучок расщепляется, а e – единица группы.

В заключение данного раздела рассмотрим преобразование компоненты локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности при изменении сечения. Из уравнения Шредингера (14.52) следует, что при вертикальном автоморфизме

$$\psi' = \mathsf{e}^{ia}\psi,$$

где $a = a(t)$ – дифференцируемая функция времени, компонента локальной формы $\mathbb{U}(1)$ связности преобразуется по правилу

$$eA_0' = eA_0 + \dot{a},$$

как и подобает компонентам локальной формы $\mathbb{U}(1)$-связности.

Таким образом, в основе эффекта Ааронова–Бома, так же как и для фазы Берри, лежит не топология, а нетривиальная геометрия, т.е. связность с нетривиальной группой голономии. При этом топология пространства может быть как тривиальной, так и нетривиальной.

14.3.2. Магнитный потенциал. Рассмотрим теперь случай, когда потенциал электрического поля равен нулю, $A_0 = 0$. Предположим, что ковекторный потенциал магнитного поля зависит только от пространственных координат x^μ и не завит от времени t (статическое поле). Тогда уравнение Шредингера примет вид

$$i\dot{\psi} = \frac{1}{2m}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu)\psi + U\psi = \frac{1}{2m}\eta^{\mu\nu}(\partial^2_{\mu\nu}\psi + 2ieA_\mu\partial_\nu\psi + ie\partial_\mu A_\nu\psi - e^2A_\mu A_\nu\psi) + U\psi. \tag{14.56}$$

Пусть ϕ – решение уравнения Шредингера в отсутствии потенциала магнитного поля (14.53). Тогда нетрудно проверить, что функция

$$\psi = \mathsf{e}^{-i\Theta}\phi,$$

где фаза Θ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu\Theta = eA_\mu \tag{14.57}$$

является решением исходного уравнения Шредингера (14.56).

Ааронов и Бом предложили эксперимент для определения фазы Θ, схема которого показана на рис.14.2. В этом эксперименте пучок электронов делится на два пучка, которые огибают бесконечно длинный соленоид с постоянным магнитным потоком Φ, который перпендикулярен плоскости рисунка, с разных сторон. Затем пучки собираются вместе и на экране наблюдается интерференционная картина, которая зависит от разности фаз электронов в разных пучках.

Для оценки разности фаз электронов сделаем те же предположения, что и в случае электрического поля. А именно, будем считать, что уравнение Шредингера без магнитного потенциала имеет решение с носителем, который сосредоточен в малой окрестности траектории электрона. Мы предполагаем, что это можно осуществить путем введения в уравнение (14.53) соответствующего потенциала. Этот потенциал не меняет топологию пространства-времени, а только обеспечивает движение электронов вдоль заданной траектории. Тогда для фазы решения уравнения Шредингера с магнитным потенциалом справедливы уравнения (14.57). Поскольку магнитное поле вне соленоида равно нулю, $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$, то условия интегрируемости для системы уравнений (14.57) выполнены. Поэтому разность фаз можно представить в виде контурного интеграла

$$\Theta_{\text{AB}} = e\oint_\gamma dx^\mu A_\mu, \tag{14.58}$$

где γ – замкнутый контур в четырехмерном пространстве времени, который охватывает соленоид. Отметим, что слагаемое dx^0A_0 в подынтегральном выражении равно нулю, так как $A_0 = 0$ по предположению. Этот интеграл не зависит от выбора контура, охватывающего соленоид, поскольку магнитное поле вне соленоида равно нулю, $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$.

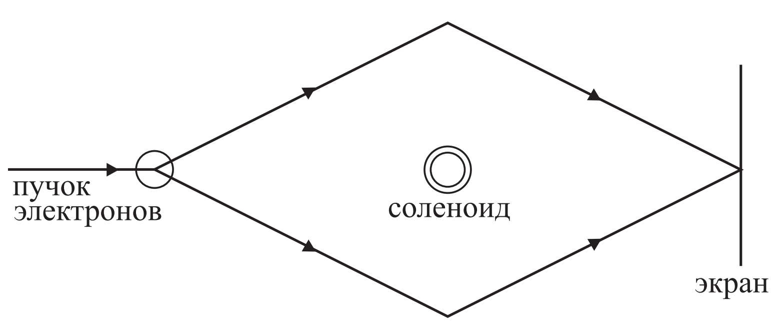

Рис. 14.2. Пучок электронов делится на два пучка, которые огибают тонкий соленоид с разных сторон. Затем пучки вновь собираются и наблюдается интерференционная картина, которая зависит от разности фаз электронов в разных пучках.

Фазу Ааронова–Бома, используя формулу Стокса, можно записать в виде поверхностного интеграла

$$\Theta_{\text{АБ}} = \frac{1}{2} e \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu F_{\mu\nu} = e\Phi, \tag{14.59}$$

где $F_{\mu\nu}$ – напряженность магнитного поля (компоненты локальной 2-формы кривизны) и Φ – полный поток магнитного поля через соленоид. Заметим, что для применения формулы Стокса, необходимо считать, что магнитный потенциал определен в пространстве $\mathbb{R}^3$ всюду, включая сам соленоид.

Геометрическая интерпретация рассмотренного эффекта Ааронова–Бома состоит в следующем. Мы имеем то же самое главное расслоение, что и в случае электрического потенциала, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1))$, базой которого является четырехмерное евклидово пространство, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$, в котором движутся пучки электронов, а структурной группой – унитарная группа $\mathbb{U}(1)$ (фазовый множитель $\mathsf{e}^{i\Theta}$ волновой функции). Однако связность на нем другая: отличны от нуля только пространственные компоненты локальной формы связности A_μ, $\mu = 1, 2, 3$. Разность фаз Ааронова–Бома (14.58) однозначно определяется контуром γ (тем же, что и в случае электрического потенциала) и значениями компонент связности A_μ на нем. При записи контурного интеграла в виде поверхностного (14.59) предполагается, что связность задана на всем пространстве-времени $\mathbb{R}^4$. Тем самым, мы рассматриваем соленоид конечного радиуса, чтобы избежать сингулярностей.

Таким образом, главное расслоение тривиально, а фаза Ааронова–Бома $\Theta_{\text{АБ}}$, зависящая от связности и контура, однозначно определяет элемент группы голономии.

Волновая функция электрона, как и в случае электрического потенциала, является сечением ассоциированного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{R}^4, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{C}, \mathbb{U}(1), \mathbb{P})$, базой которого является евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, а структурной группой – унитарная группа $\mathbb{U}(1)$. При вертикальном автоморфизме

$$\psi' = \mathsf{e}^{ia}\psi,$$

где $a = a(x)$ – дифференцируемая функция пространственных координат x^μ, $\mu = 1, 2, 3$, потенциал магнитного поля преобразуется по правилу

$$eA'_\mu = eA_\mu - \partial_\mu a.$$

Это следует из уравнения Шредингера (14.56). Таким образом, компоненты потенциала магнитного поля действительно ведут себя, как компоненты локальной формы связности.

Поскольку разность фаз электронов (14.58) определяется значениями компонент локальной формы связности только вблизи контура интегрирования, то базу тривиального главного расслоения $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{U}(1))$ можно сузить, не меняя ответа. Например, можно удалить область пространства-времени, лежащую внутри контура γ и содержащую соленоид. Тогда база расслоения перестанет быть односвязной. По этой причине эффект Ааронова–Бома часто называют топологическим. Как было показано выше, это совершенно необязательно. Достаточно считать, что магнитное поле отлично от нуля в ограниченной области на плоскости рис.14.2 внутри контура интегрирования. Если считать, что базой расслоения является евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ с выколотым соленоидом, то формулу Стокса применить нельзя, так как она применима только для стягиваемых контуров. Таким образом, эффект Ааронова–Бома, вызванный магнитным потенциалом, так же как и фазу Берри, следует рассматривать как геометрический, а не топологический.

Эффект Ааронова–Бома как с электрическим, так и с магнитным потенциалом привлек большое внимание физиков по следующей причине. Согласно современным представлениям в калибровочных моделях наблюдаемыми величинами являются только калибровочно инвариантные функции. С этой точки зрения потенциал электромагнитного поля A_α, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, сам по себе ненаблюдаем, так как не является калибровочно инвариантным. В рассмотренных примерах электрического и магнитного полей пучки электронов не подвергаются действию электромагнитных сил, поскольку напряженности электрического и магнитного поля в областях, через которые пролетают электроны, равны нулю. Поэтому, казалось бы, разность фаз в пучках электронов должна быть равна нулю. Однако из уравнения Шредингера следует, что это не так. Следует отметить, что наблюдаемым является не сам потенциал электромагнитного поля, а интеграл от него по замкнутому контуру, который определяет элемент группы голономии $\mathbb{U}(1)$-связности, который является инвариантным объектом.

Вскоре после публикации статьи, эффект Ааронова–Бома был подтвержден экспериментально. Эффект, вызванный магнитным потенциалом наблюдался в экспериментах [77, 78, 79].

Список литературы

[1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1998.

[2] С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М., 2005.

[3] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience Publ., New York, 1963; S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 2, Interscience Publ., New York, 1969; Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981; Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 2, Наука, М., 1981.

[4] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Sci., Singapore, 1999.

[5] В. И. Арнольд, *Обыкновенные диференциальные уравнения*, Наука, М., 1975.

[6] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Эдиториал УРСС, М., 2002.

[7] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.

[8] И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, МЦНМО, М., 1998.

[9] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, Физматлит, М., 1958.

[10] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекц. курсы НОЦ, **5**, МИАН, М., 2006.

[11] В. В. Жаринов, *Алгебро-геометрические основы математической физики*, Лекц. курсы НОЦ, **9**, МИАН, М., 2008, 210 с.

[12] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Toronto, 1957; Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1968.

[13] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.

[14] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Часть I. *Основы алгебры*, Наука, М., 2000; А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Часть II. *Линейная алгебра*, Наука, М., 2000; А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Часть III. *Основные структуры алгебры*, Наука, М., 2000.

[15] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, Наука, М., 1986.

[16] М. М. Постников, *Аналитическая геометрия*, Наука, М., 1979.

[17] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, М., 1967.

[18] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.

[19] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.

[20] H. Whitney, "Differentiable manifolds", *Ann. of Math.* (2), **37**:3 (1936), 645–680.

[21] J. Munkres, "Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms", *Ann. of Math.* (2), **72**:3 (1960), 521–554.

[22] J. Milnor, "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Ann. of Math.* (2), **64**:2 (1956), 394–405.

[23] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, The Clarendon Press, Oxford, 1990.

[24] M. A. Kervaire, "A manifold which does not admit any differentiable structure", *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 257–270.

[25] T. Aubin, *A Course in Differential Geometry*, Grad. Stud. Math., **27**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[26] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Grad. Texts in Math., **94**, Springer-Verlag, Berlin, 1983; Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987.

[27] S. S. Chern, "Curves and surfaces in Euclidean space", *Studies in Global Geometry and Analysis*, Math. Assoc. Amer., Englewood Cliffs, NJ, 1967, 16–56.

[28] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1970.

[29] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry*, World Sci. Lecture Notes Phys., **61**, World Sci., Singapore, 1999.

[30] L. Schwartz, *Analyse Mathématique*, Cours I et II, Hermann, Paris, 1967; Л. Шварц, *Анализ*, Т. 1, 2, Мир, М., 1972.

[31] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups. I*, Princeton Math. Ser., **8**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1946; К. Шевалле, *Теория групп Ли*, Т. 1, ИЛ, М., 1948.

[32] C. Godbillon, *Géométrie différetielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969; К. Годбийон, *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика*, Мир, М., 1973.

[33] G. de Rham, "Sur la théorie des formes différentielles harmoniques", *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)*, **22** (1946), 132–152.

[34] G. de Rham, *Vari'etés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1955; Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, URSS, M., 2006.

[35] J. A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, University of California, Berkley, CA, 1972; Д. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982.
[36] N. E. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton Math. Ser., **14**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1951; Н. Стинрод, *Топология косых произведений*, ИЛ, М., 1953.
[37] H. Weyl, "Gravitation und Elektrizität", *Berl. Ber.*, **1918** (1918), 465–480; Г. Вейль, "Гравитация и электричесво": Е. Куранский (ред.), *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 513–527.
[38] T. Levi-Civita, "Nozione di parallelismo una varietá qualungue e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana", *Rend. Palermo*, **42**:1 (1916), 173–204.
[39] М. О. Катанаев, "Геометрическая теория дефектов", *УФН*, **175**:7 (2005), 705–733.
[40] A. M. Gleason, "Groups without small subgroups", *Ann. of Math.* (2), **56**:2 (1952), 193–212.
[41] D. Montgomery, L. Zippin, "Small subgroups of finite-dimensional groups", *Ann. of Math.* (2), **56**:2 (1952), 213–241.
[42] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1984.
[43] A. O. Barut, R. Rączka, *Theory of Group Representations and Applications*, PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977; А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, Т. 1, 2, Мир, М., 1980.
[44] M. Goto, F. D. Grosshans, *Semisimple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure Appl. Math., **38**, Marcel Dekker, New York, 1978.
[45] S. Helgason, *Differential Geometry*, *Lie Groups*, *and Symmetric Spaces*, Grad. Stud. Math., **34**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001; С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия*, *группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005.
[46] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York, 1962; С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1983.
[47] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр* V. *Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982.
[48] Е. Б. Дынкин, "Структура полупростых алгебр Ли", *УМН*, **2**:4(20) (1947), 59–127.
[49] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
[50] J. F. Adams, *Lectures on Exceptional Lie Groups*, University of Chicago Press, Chicago, 1996.
[51] И. Д. Адо, "Представление алгебр Ли матрицами", *УМН*, **2**:6(22) (1947), 159–173.
[52] E. Cartan, "Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemanniene", *Journ. de Math.* (9), **8** (1929), 1–33.
[53] M. Hausner, J. T. Schwartz, *Lie Groups*; *Lie Algebras*, Gordon & Breach Science Publ., New York, 1968.
[54] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980; Ч. Коснёвски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Современная математика. Вводные курсы, Мир, М., 1983.
[55] J. F. Adams, "Vector fields on spheres", *Ann. of Math.* (2), **75**:3 (1962), 603–632.
[56] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966; Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971.
[57] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1971; Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971.
[58] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000.
[59] K. Iwasawa, "On some types of topological groups", *Ann. of Math.* (2), **50**:3 (1949), 507–558.
[60] K. Nomizu, H. Ozeki, "On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy groups", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 74–75.
[61] W. Ambrose, I. M. Singer, "A theorem on holonomy", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 428–443.
[62] J. Hano, H. Ozeki, "On the holonomy groups of linear connexions", *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 97–100.
[63] K. Nomizu, "Un théorème sur les groupes d'holonomie", *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 101–103.
[64] H. Ozeki, "Infinitesimal holonomy groups of bundle connections", *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 105–123.
[65] H. Wang, "On invariant connections over a principal fibre bundle", *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 1–19.
[66] M. V. Berry, "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes", *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **392**:1802 (1984), 45–57.
[67] Y. Aharonov, D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory", *Phys. Rev.* (2), **115**:3 (1959), 485–491.
[68] F. Wilczek, A. Zee, "Appearance of gauge structure in simple dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.*, **52**:24 (1984), 2111.
[69] M. Born, V. Fock, "Beweis des Adiabatensatzes", *Z. Phys.*, **51** (1928), 165–180.
[70] E. Schrödinger, "Quantizierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)", *Ann. Phys. Leipzig*, **384**:4 (1926), 361–376.
[71] E. Schrödinger, "Quantizierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)", *Ann. Phys. Leipzig*, **384**:6 (1926), 489–527.
[72] В. С. Владимиров, И. В. Волович, "Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений", *ТМФ*, **62**:1 (1985), 3–29.

[73] В. С. Владимиров, И. В. Волович, “Законы сохранения для нелинейных уравнений”, *УМН*, **40**:4 (1985), 17–26.

[74] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. II, North-Holland Publ., Amsterdam, 1962; А. Мессиа, *Квантовая механика*, Т. 2, Наука, М., 1979.

[75] В. А. Фок, *Начала квантовой механики*, Наука, М., 1976.

[76] T. Bitter, D. Dubbers, “Manifestation of Berry's topological phase in neutron spin rotation”, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987), 251–254.

[77] F. G. Werner, D. R. Brill, “Significance of electromagnetic potentials on the quantum theory in the interpretation of electron interferometer fringe observations.”, *Phys. Rev. Lett.*, **4**:7 (1960), 344–347.

[78] R. G. Chambers, “Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux”, *Phys. Rev. Lett.*, **5**:1 (1960), 3–5.

[79] H. Boersch, H. Hamisch, D. Wohlleben, K. Grohmann, “Antiparallele Weißsche Bereiche als Biprisma für Elektroneninterferenzen”, *Z. Phys.*, **159**:4 (1960), 397–404.

Предметный указатель

1-форма левоинвариантная (left invariant 1-form), 13
$\mathbb{G}$-инвариантная функция ($\mathbb{G}$-invariant function), 70
$\mathbb{G}$-инвариантная структура ($\mathbb{G}$-invariant structure), 70
$\mathbb{G}$-инвариантное тензорное поле ($\mathbb{G}$-invariant tensor field), 72
$\mathbb{G}$-многообразие ($\mathbb{G}$-manifold), 64
m-связная область, 83
P-произведение (P-product), 137
r-форма горизонтальная (horizontal r-form), 124
r-форма псевдотензориальная (pseudotensorial r-form), 124
r-форма тензориальная (tensorial r-form), 124
Абелева алгебра Ли (Abelian Lie algebra), 38
Автоморфизм алгебры Ли (automorphism of Lie algebras), 40
Автоморфизм вертикальный (vertical automorphism), 112
Автоморфизм внешний (outer automorphism), 36
Автоморфизм внутренний (inner automorphism), 36
Автоморфизм главного расслоения (automorphism of a principal fiber bundle), 112
Автоморфизм группы Ли (automorphism of a Lie group), 26
Автоморфизм инволютивный (involute automorphism), 40
Автоморфизм расслоения (automorphism of a fiber bundle), 111
Автоморфизм связности (connection automorphism), 139
Адиабатический предел (adiabatic limit), 158
Адо теорема (Ado theorem), 60
Алгебра (algebra) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, 50
Алгебра (algebra) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, 50
Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, 48
Алгебра Ли (Lie algebra), 12, 38
Алгебра Ли абелева (Abelian Lie algebra), 38
Алгебра Ли компактная (compact Lie algebra), 38
Алгебра Ли нильпотентная (nilpotent Lie algebra), 45
Алгебра Ли присоединенная (adjoint Lie algebra), 42
Алгебра Ли простая (simple Lie algebra), 46
Алгебра Ли разрешимая (solvable Lie algebra), 44
Алфавит (alphabet), 83
Ассоциированное расслоение (associated fiber bundle), 106
База накрытия (base of a covering), 90
База расслоения (base of a fiber bundle), 98
Берри фаза (Berry phase), 165
Букет окружностей (union of circles), 79
Бутылка Клейна (Klein bottle), 108
Вейля группа (Weyl group), 33
Вековое уравнение (secular equation), 52
Вектор вертикальный (vertical vector), 117
Вектор горизонтальный (horizontal vector), 117
Векторное поле левоинвариантное (left invariant vector field), 10
Векторное поле фундаментальное (fundamental vector field), 115
Вертикальное подпространство (vertical subspace), 115, 141
Вертикальный автоморфизм (vertical automorphism), 112
Вертикальный вектор (vertical vector), 117
Вильсона петля (Wilson loop), 138
Вложение расслоения (embedding of a fiber bundle), 112
Внешнее ковариантное дифференцирование (external covariant differentiation), 125
Внешний автоморфизм (outer automorphism), 36
Внешняя ковариантная производная (external covariant derivative), 125
Внутренний автоморфизм (inner automorphism), 36
Волновая функция (wave function), 156
Выпуклая область (convex domain), 78
Гамильтониан (Hamiltonian), 156
Генератор группы Ли (generator of a Lie group), 12
Геометрическая фаза (geometric phase), 165
Главное однородное пространство (principal homogeneous space), 68
Главное расслоение (principal fiber bundle), 98
Главное расслоение тривиальное (trivial principal fiber bundle), 100
Глобальное сечение расслоения (global fiber bundle cross-section), 99
Голономии группа (holonomy group), 134
Голономии расслоение (holonomy fiber bundle), 143
Гомоморфизм алгебр Ли (homomorphism of Lie algebras), 40
Гомоморфизм групп Ли (homomorphism of Lie groups), 26
Гомоморфизм индуцированный (induced homomorphism), 84
Гомоморфизм расслоений (homomorphism of fiber bundles), 111
Гомотопическая эквивалентность (homotopic equivalence), 78
Гомотопический тип (homotopic type), 78
Гомотопия (homotopy), 78
Гомотопия относительная (relative homotopy), 80
Гомотопные отображения (homotopic maps), 78
Горизонтальная r-форма (horizontal r-form), 124

Горизонтальная кривая (horizontal curve), 133, 142
Горизонтальное подпространство (horizontal subspace), 117, 141
Горизонтальное сечение (horizontal cross-section), 143
Горизонтальный вектор (horizontal vector), 117
Горизонтальный лифт векторного поля (horizontal lift of a vector field), 119
Горизонтальный лифт кривой (horizontal lift of a curve), 133, 142
Горизонтальный подъем кривой (horizontal lift of a curve), 133
Группа $\mathbb{U}(n)$, 56
Группа Вейля (Weyl group), 33
Группа голономии (holonomy group), 134
Группа голономии инфинитезимальная (infinitesimal holonomy group), 148
Группа голономии локальная (local holonomy group), 147
Группа голономии суженная (restricted holonomy group), 134
Группа изотропии (isotropy group), 67
Группа калибровочная (gauge group), 121
Группа левых преобразований (group of left transformations), 65
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C})$, 54
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, 54
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{O}(n)$, 55
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{O}(p, q)$, 56
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{SL}(n, \mathbb{C})$, 55
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{SL}(n, \mathbb{R})$, 55
Группа Ли (Lie group) $\mathbb{SU}(n)$, 57
Группа Ли (Lie group), 5
Группа Ли компактная (compact Lie group), 6
Группа Ли локальная (local Lie group), 8
Группа Ли простая (simple Lie group), 46
Группа Ли унимодулярная (unimodular Lie group), 32
Группа накрывающая (covering group), 35
Группа правых преобразований (group of right transformations), 64
Группа преобразований (transformation group), 65
Группа преобразований собственно разрывная (properly discontinuous transformation group), 94
Группа скольжений (sliding group), 97
Группа специальных линейных преобразований (group of special linear transformations), 55
Группа фундаментальная (fundamental group), 81
Действие группы свободное (free action of a group), 65
Действие группы слева (left action of a group), 65
Действие группы справа (right action of a group), 64
Действие группы транзитивное (transitive action of a group), 66
Действие группы тривиальное (trivial action of a group), 65
Действие группы эффективное (effective action of a group), 65
Действие слой-транзитивное (cross-section transitive action), 152
Детерминантное расслоение (determinant fiber bundle), 109
Деформация отображения (deformation of a map), 78
Динамическая фаза (dynamical phase), 165
Дифференцирование в алгебре Ли (differentiation in Lie algebra), 41
Длина вектора (length of a vector), 56
Длина слова (word length), 83
Жорданов многоугольник (Jordan polygon), 74
Жорданова кривая (Jordan curve), 74
Замкнутая подгруппа Ли (closed Lie subgroup), 28
Замкнутый путь (closed curve), 74
Идеал (ideal), 40
Изоморфизм алгебр Ли (isomorphism of Lie algebras), 40
Изоморфизм групп Ли (isomorphism of Lie groups), 26
Изоморфизм локальных групп Ли (isomorphism of local Lie groups), 8
Изоморфизм расслоений (isomorphism of fiber bundles), 111
Изотропии группа (isotropy group), 67
Изотропии подгруппа (isotropy subgroup), 151
Инвариантная связность (invariant connection), 139
Инвариантная форма (invariant form), 47
Инволютивный автоморфизм (involute automorphism), 40
Индуцированная связность (induced connection), 140
Индуцированное расслоение (induced fiber bundle), 114
Индуцированный гомоморфизм (induced homomorphism), 84
Инфинитезимальная группа голономии (infinitesimal holonomy group), 148
Инъекция расслоения (injection of a fiber bundle), 112
Калибровка чистая (pure gauge), 146
Калибровочная группа (gauge group), 121
Калибровочное поле (gauge field), 121
Калибровочное преобразование (gauge transformation), 121
Каноническая инвариантная связность (canonical invariant connection), 153
Каноническая левоинвариантная форма (left invariant canonical form), 15

Каноническая плоская связность (canonical flat connection), 144
Картана структурное уравнение (E. Cartan's structure equation), 127
Картана теорема (Cartan theorem), 34
Касательное расслоение (tangent fiber bundle), 108
Киллинга–Картана форма (Killing–Cartan form), 19, 47
Класс ориентации (class of orientation), 85
Клейна бутылка (Klein bottle), 108
Ковариантная производная внешняя (external covariant derivative), 125
Ковариантное дифференцирование внешнее (external covariant differentiation), 125
Компактная алгебра Ли (compact Lie algebra), 38
Компактная группа Ли (compact Lie group), 6
Комплексная проективная прямая (complex projective line), 103
Комплексная прямая (complex line), 103
Композиции функция (composition function), 7
Конец пути (end of a curve), 74
Константы структурные (structure constants), 9
Коцикл склеиващий (sewing cocycle), 102
Кривая горизонтальная (horizontal curve), 142
Кривая жорданова (Jordan curve), 74
Кривая простая замкнутая (closed simple curve), 74
Кривизны форма (curvature form), 126
Левое действие группы (left action of a group), 65
Левоинвариантная 1-форма (left invariant 1-form), 13
Левоинвариантная каноническая форма (left invariant canonical form), 15
Левоинвариантное векторное поле (left invariant vector field), 10
Левых преобразований группа (group of left transformations), 65
Ли алгебра (Lie algebra), 12, 38
Ли группа (Lie group), 5
Ли подалгебра (Lie subalgebra), 40
Ли подгруппа (Lie subgroup), 28
Ли факторалгебра (quotient Lie algebra), 40
Линейно связное топологическое пространство (arcwise connected, path connected topological space), 75
Лист Мебиуса (Möbius band, Möbius strip), 108
Лист накрытия (sheet of a covering), 90
Лифт векторного поля (lift of a vector field), 119
Лифт кривой (lift of a curve), 133, 142
Локальная группа голономии (local holonomy group), 147
Локальная группа Ли (local Lie group), 8
Локальная форма кривизны (local curvature form), 127
Локальная форма связности (local connection form), 120
Локально линейно связное топологическое пространство (arcwise connected, path connected topological space), 75
Локальное сечение нулевое (zero local cross-section), 118
Локальное сечение расслоения (local fiber bundle cross-section), 99
Локальный изоморфизм групп Ли (local isomorphism of Lie groups), 8
Матрица невырожденная (nondegenerate matrix), 49
Матрица подобная (conjugate matrix), 52
Матрица регулярная (regular matrix), 49
Матрица сопряженная (conjugate matrix), 52
Матрица эрмитова (Hermitian matrix), 57
Маурера–Картана формула (Maurer–Cartan formula), 14
Мебиуса лист (Möbius band, Möbius strip), 108
Мера Хаара (Haar measure), 33
Многообразие односвязное (simply connected manifold), 82
Многообразие ориентируемое (orientable manifold), 85
Многообразие параллелизуемое (parallelizable manifold), 87
Многообразия ориентация (orientation of a manifold), 87
Многоугольник жорданов (Jordan polygon), 74
Модулярная функция (modular function), 32
Накрывающая группа (covering group), 35
Накрывающее пространство (covering space), 90
Накрытие (covering), 90
Накрытие универсальное (universal covering), 90
Накрытия лист (sheet of a covering), 90
Напряженность калибровочного поля (gauge field strength), 130
Напряженность поля Янга–Миллса (Yang–Mills field strength), 130
Напряженность электромагнитного поля (electromagnetic field strength), 130
Начало пути (beginning of a curve), 74
Невырожденная матрица (nondegenerate matrix), 49
Неподвижная точка (fixed point), 67
Несократимое слово (reduced word), 83
Нильпотентная алгебра Ли (nilpotent Lie algebra), 45
Нулевое локальное сечение (zero local cross-section), 118
Область выпуклая (convex domain), 78
Область фундаментальная (fundamental domain), 96
Образующие алгебры Ли (generators of a Lie algebra), 11
Обратный путь (inverse path), 80

Однопараметрическая подгруппа (one parameter subgroup), 29
Однородное пространство (homogeneous space), 68
Односвязное многообразие (simply connected manifold), 82
Окружность Хопфа (Hopf circle), 103
Орбита действия группы (orbit of a group action), 66
Ориентации класс (class of orientation), 85
Ориентация многообразия (orientation of a manifold), 87
Ориентируемое многообразие (orientable manifold), 85
Ортогональное представление (orthogonal representation), 34
Ортонормальный репер (orthonormal frame), 113
Относительная гомотопия (relative homotopy), 80
Отображение экспоненциальное (exponential map), 29
Отображения гомотопные (homotopic maps), 78
Отображения деформация (deformation of a map), 78
Отображения поднятие (lifting of a map), 92
Отображения ядро (homomorphism kernel), 26
Параллелизуемое многообразие (parallelizable manifold), 87
Параллельное сечение (parallel cross-section), 143
Параллельный перенос слоя (parallel transport of a fiber), 133
Перенос класса ориентации (transport of a class of orientation), 86
Перехода функция (transition function), 102
Петля (loop), 74
Петля Вильсона (Wilson loop), 138
Плоская связность (flat connection), 144
Плоская связность каноническая (canonical flat connection), 144
Подалгебра Ли (Lie subalgebra), 40
Подгруппа изотропии (isotropy subgroup), 151
Подгруппа Ли (Lie subgroup), 28
Подгруппа Ли замкнутая (closed Lie subgroup), 28
Подгруппа однопараметрическая (one parameter subgroup), 29
Поднятие отображения (lifting of a map), 92
Подобная матрица (conjugate matrix), 52
Подпространство вертикальное (vertical subspace), 115, 141
Подпространство горизонтальное (horizontal subspace), 117, 141
Подрасслоение (sub fiber bundle), 112
Поле калибровочное (gauge field), 121
Поле Янга–Миллса (Yang–Mills field), 121
Полупрямая сумма (semidirect sum), 44
Полупрямое произведение групп (semidirect product of groups), 37
Порождающие свободной группы (generators of a free group), 83
Потенциал электромагнитный (electromagnetic potential), 121
Поток Хопфа (Hopf flow), 103
Предел адиабатический (adiabatic limit), 158
Представление алгебры Ли (representation of a Lie algebra), 41
Представление алгебры Ли точное (exact representation of a Lie algebra), 41
Представление группы Ли (representation of a Lie group), 27
Представление группы Ли точное (exact representation of a Lie group), 27
Представление ортогональное (orthogonal representation), 34
Представление присоединенное (adjoint representation), 16
Представление присоединенное алгебры Ли (adjoint representation of a Lie algebra), 42
Представление унитарное (unitary representation), 34
Преобразование калибровочное (gauge transformation), 121
Преобразований группа (transformation group), 65
Присоединенная алгебра Ли (adjoint Lie algebra), 42
Присоединенное представление (adjoint representation), 16
Проекция (projection), 98
Произведение групп полупрямое (semidirect product of groups), 37
Произведение упорядоченное (ordered product), 137
Произведение хронологическое (chronological product), 137
Простая алгебра Ли (simple Lie algebra), 46
Простая группа Ли (simple Lie group), 46
Простая замкнутая кривая (closed simple curve), 74
Пространство главное однородное (principal homogeneous space), 68
Пространство накрывающее (covering space), 90
Пространство орбит (orbit apace), 66
Пространство расслоения (fiber bundle space), 98
Пространство стягиваемое (contractible space), 78
Прямая комплексная (complex line), 103
Прямая комплексная проективная (complex projective line), 103
Псевдотензориальная r-форма (pseudotensorial r-form), 124
Путь замкнутый (closed curve), 74
Путь обратный (inverse path), 80
Путь тождественный (identical path), 75
Путь эквивалентный (equivalent path), 75
Радикал алгебры Ли (radical of a Lie algebra), 46

Развертка кривой, 151
Размерность группы Ли (dimensionality of a Lie group), 6
Разрешимая алгебра Ли (solvable Lie algebra), 44
Ранг свободной группы (rank of a free group), 83
Расслоение ассоциированное (associated fiber bundle), 106
Расслоение главное (principal fiber bundle), 98
Расслоение голономии (holonomy fiber bundle), 143
Расслоение детерминантное (determinant fiber bundle), 109
Расслоение индуцированное (induced fiber bundle), 114
Расслоение касательное (tangent fiber bundle), 108
Расслоение ортонормальных реперов (fiber bundle of orthonormal frames), 113
Расслоение редуцированное (reduced fiber bundle), 112
Расслоение тензорное (tensor fiber bundle), 108
Расслоение Хопфа (Hopf fiber bundle), 103
Регулярная матрица (regular matrix), 49
Редукции теорема (reduction theorem), 143
Редукция расслоения (reduction of a fiber bundle), 112
Редуцированная связность (reduced connection), 139
Редуцированное расслоение (reduced fiber bundle), 112
Репер ортонормальный (orthonormal frame), 113
Свободная группа (free group), 83
Свободное действие группы (free action of a group), 65
Связности форма (connection form), 117
Связность инвариантная (invariant connection), 139
Связность индуцированная (induced connection), 140
Связность каноническая инвариантная (canonical invariant connection), 153
Связность каноническая плоская (canonical flat connection), 144
Связность на главном расслоении (connection on a principal fiber bundle), 117
Связность плоская (flat connection), 144
Связность редуцированная (reduced connection), 139
Сечение горизонтальное (horizontal cross-section), 143
Сечение параллельное (parallel cross-section), 143
Сечение расслоения (fiber bundle cross-section), 99
Скалярное произведение эрмитово (Hermitian scalar product), 56
Склеиващий коцикл (sewing cocycle), 102
Склейки функции (sewing functions), 102, 109
Скольжений группа (sliding group), 97
Слово (word), 83
Слой (fiber), 99
Слой-транзитивное действие (cross-section transitive action), 152
Собственно разрывная группа преобразований (properly discontinuous transformation group), 94
Собственное число (eigenvalue), 52
Сопряжение в алгебре Ли (conjugation in Lie algebra), 41
Сопряженная матрица (conjugate matrix), 52
Стационарная точка (fixed point), 67
Структура $\mathbb{G}$-инвариантная ($\mathbb{G}$-invariant structure), 70
Структурное уравнение Картана (E. Cartan's structure equation), 127
Структурные константы (structure constants), 9
Стягиваемое пространство (contractible space), 78
Суженная группа голономии (restricted holonomy group), 134
Сумма полупрямая (semidirect sum), 44
Тензориальная r-форма (tensorial r-form), 124
Тензорное поле $\mathbb{G}$-инвариантное ($\mathbb{G}$-invariant tensor field), 72
Тензорное расслоение (tensor fiber bundle), 108
Теорема Адо (Ado theorem), 60
Теорема Картана (Cartan theorem), 34
Теорема о невозможности причесать ежа, 79
Теорема редукции (reduction theorem), 143
Тип гомотопический (homotopic type), 78
Тождественный путь (identical path), 75
Тождество Якоби (Jacobi identity), 9
Топологическое пространство линейно связное (arcwise connected, path connected topological space), 75
Топологическое пространство локально линейно связное (locally arcwise connected, path connected topological space), 75
Точка неподвижная (fixed point), 67
Точка стационарная (fixed point), 67
Точное представление алгебры Ли (exact representation of a Lie algebra), 41
Точное представление группы Ли (exact representation of a Lie group), 27
Транзитивное действие группы (transitive action of a group), 66
Тривиальное главное расслоение (trivial principal fiber bundle), 100
Тривиальное действие группы (trivial action of a group), 65
Универсальное накрытие (universal covering), 90
Унимодулярная группа Ли (unimodular Lie group), 32
Унитарное представление (unitary representation), 34
Унитарность (unitarity), 56

Упорядоченное произведение (ordered product), 137
Уравнение вековое (secular equation), 52
Уравнение характеристическое (secular equation), 52
Уравнение Шредингера (Schrödinger equation), 156
Условие унитарности (unitarity condition), 56
Фаза Берри (Berry phase), 165
Фаза геометрическая (geometric phase), 165
Фаза динамическая (dynamical phase), 165
Факторалгебра Ли (quotient Lie algebra), 40
Факторпространство (coset space), 66
Форма инвариантная (invariant form), 47
Форма каноническая левоинвариантная (left invariant canonical form), 15
Форма Киллинга–Картана (Killing–Cartan form), 19, 47
Форма кривизны (curvature form), 126
Форма кривизны локальная (local curvature form), 127
Форма связности (connection form), 117
Форма связности локальная (local connection form), 120
Формула Маурера–Картана (Maurer–Cartan formula), 14
Фундаментальная группа (fundamental group), 81
Фундаментальная область (fundamental domain), 96
Фундаментальное векторное поле (fundamental vector field), 115
Функции склейки (sewing functions), 109
Функция $\mathbb{G}$-инвариантная ($\mathbb{G}$-invariant function), 70
Функция волновая (wave function), 156
Функция композиции (composition function), 7
Функция модулярная (modular function), 32
Функция перехода (transition function), 102
Функция склейки (sewing functions), 102
Хаара мера (Haar measure), 33
Характеристическое уравнение (secular equation), 52
Хопфа окружность (Hopf circle), 103
Хопфа поток (Hopf flow), 103
Хопфа расслоение (Hopf fiber bundle), 103
Хронологическое произведение (chronological product), 137
Центр алгебры Ли (center of a Lie algebra), 46
Цилиндр (cylinder), 108
Число собственное (eigenvalue), 52
Чистая калибровка (pure gauge), 146
Шредингера уравнение (Schrödinger equation), 156
Эквивалентность гомотопическая (homotopic equivalence), 78
Эквивалентный путь (equivalent path), 75
Эквивариантное отображение (equivariant map), 73
Экспоненциал матрицы (matrix exponent), 53
Экспоненциальное отображение (exponential map), 29
Электромагнитный потенциал (electromagnetic potential), 121
Эндоморфизм (endomorphism), 37
Эрмитова матрица (Hermitian matrix), 57
Эрмитова матрица положительно определенная (positive definite Hermitian matrix), 58
Эрмитово скалярное произведение (Hermitian scalar product), 56
Эффективное действие группы (effective action of a group), 65
Ядро гомоморфизма (kernel of homomorphism), 40
Ядро группы преобразований (kernel of a transformation group), 65
Ядро отображения (homomorphism kernel), 26
Якоби тождество (Jacobi identity), 9
Янга–Миллса поле (Yang–Mills field), 121

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 26

Михаил Орионович Катанаев

**Геометрические методы в математической физике.
Приложения в квантовой механике. Часть 2**

Сдано в набор 12.11.2015. Подписано в печать 25.12.2015.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/noc/ e-mail: pupyrev@mi.ras.ru