

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Лекционные курсы НОЦ

*Выпуск 25*

Издание выходит с 2006 года

Геометрические методы в математической физике.  
Приложения в квантовой механике. Часть 1

М. О. Катанаев

*Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук*



Москва  
2015

*Редакционный совет:*

*С. И. Адян, С. М. Асеев, О. В. Бесов, С. В. Болотин, И. В. Волович,  
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь), В. В. Козлов,  
С. Ю. Немировский (главный редактор), С. П. Новиков, Д. О. Орлов,  
В. П. Павлов (заместитель главного редактора), А. Н. Паршин,  
А. Г. Сергеев, А. А. Славнов, Д. В. Трещев, А. С. Холево, Е. М. Чирка*

**Катанаев М. О.**

Л43 Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 1 – М.: МИАН, 2015. – 176 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 25).

ISBN 978-5-98419-065-7

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук (МИАН). В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в МИАН в рамках программы “Научно-образовательный центр МИАН”.

Вашему вниманию предлагается сокращенный вариант лекций “Геометрические методы в математической физике”, которые автор читал в течении 2008–2014 годов в Научно-образовательном центре МИАН.

Монография подготовлена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00687).

DOI: 10.4213/lkn25

DOI: 10.4213/book1603

# Оглавление

<b>1. Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>2. Многообразия и тензорные поля</b>	<b>6</b>
2.1. Многообразия	6
2.2. Разбиение единицы	13
2.3. Многообразия с краем	14
2.4. Расслоения	16
2.5. Скалярные поля и плотности	19
2.6. Векторные поля и 1-формы	21
2.6.1. Локальное определение	21
2.6.2. Глобальное определение векторных и ковекторных полей	23
2.6.3. Кокасательные векторные поля и ростки	26
2.6.4. Векторные поля и дифференцирования	26
2.6.5. Векторные поля и интегральные кривые	30
2.6.6. 1-формы и гиперповерхности	39
2.6.7. Алгебра Ли векторных полей	39
2.7. Тензорные поля	41
2.8. Полностью антисимметричные тензоры	46
2.9. Отображения многообразий	47
2.10. Подмногообразия	51
2.11. Теорема Фробениуса	55
2.12. Слоения	60
2.13. Бесконечно малые преобразования координат	64
2.14. Производная Ли	67
<b>3. Дифференциальные формы и интегрирование</b>	<b>72</b>
3.1. Внешняя алгебра	72
3.2. Дифференциальные формы	78
3.3. Внешнее дифференцирование	80
3.4. Теорема Дарбу	84
3.5. Оператор Лапласа–Бельтрами	88
3.6. Разложение Ходжа	93
3.7. Интегрирование дифференциальных форм	95
3.7.1. Форма объема	97
3.7.2. Формула Стокса	99
<b>4. Метрика</b>	<b>103</b>
4.1. Определение и свойства	103
4.2. Метрика на лоренцевых многообразиях	106
4.3. Векторные поля и вложения	111
4.4. Выбор системы координат	113
<b>5. Связность на векторном расслоении и расслоении реперов</b>	<b>115</b>
5.1. Векторные расслоения	115
5.2. Связность на векторном расслоении	119
5.3. Аффинная связность	124
5.4. Связность на расслоении реперов	125
5.5. Критерий локальной тривиальности	131

<b>6. Аффинная геометрия. Локальное рассмотрение</b>	<b>133</b>
6.1. Локальное определение аффинной связности	133
6.2. Кручение и неметричность	136
6.3. Ковариантная производная тензорных плотностей	138
6.4. Параллельный перенос	140
6.5. Геометрический смысл кручения	144
6.6. Свойства аффинной связности	145
6.7. Локальное определение тензора кривизны	148
6.8. Свойства тензора кривизны	150
6.9. Неголономный базис	153
6.10. Тождества Бианки	157
<b>7. Криволинейные координаты в <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>158</b>
7.1. Сферические координаты	158
7.2. Цилиндрические координаты	162
Список литературы	165
Предметный указатель	168

# 1. Предисловие

Вашему вниманию предлагается сокращенный вариант лекций “Геометрические методы в математической физике”, которые автор читал в течении 2008–2014 годов в научно-образовательном центре при МИАН им. В. А. Стеклова. Основная цель курса состоит в изложении некоторых аспектов современной дифференциальной геометрии и ее приложений в математической физике. Большая часть материала посвящена изложению тех разделов геометрии, которые уже нашли применение в математической физике. При этом изложение ведется параллельно как на бескоординатном языке, принятом в современных курсах, так и в координатах, что необходимо для приложений. Делается упор на рассмотрение аффинной связности общего вида с кручением и неметричностью, поскольку соответствующие модели довольно широко распространены в современной математической физике. В качестве приложений рассмотрены только два примера из квантовой механики: фаза Берри и эффект Ааронова–Бома.

Существенная часть материала данных записок заимствована из монографий [1]–[4]. Кроме этого, широко использовались (в частности, при подборе примеров) книги [5]–[19].

Важными современными приложениями дифференциальной геометрии являются общая теория относительности и теория калибровочных полей. В настоящее время эти разделы еще не подготовлены к печати и поэтому не включены в предлагаемые записки лекций. Предварительный вариант размещен в архиве [20].

Настоящая монография не является учебником, она, скорее, во многих местах больше похожа на справочник с комментариями. Многие утверждения приводятся без доказательств, но со ссылками на книги и статьи, где они доказаны. От читателя требуется достаточная математическая подготовка. Предполагается, что он знаком с основами общей топологии, линейной алгебры, теории групп и некоторых других разделов математики.

Кроме того, в тексте имеются ссылки на определения и утверждения, которые объясняются только в дальнейшем тексте. Это сделано для подготовленного читателя, который хотя бы слышал об их существовании, чтобы подчеркнуть то место, где рассматриваемое понятие будет использовано в дальнейшем. Если читатель с этим не знаком, то ссылки на дальнейшее рассмотрение можно пропустить.

Курс, который автор читал в НОЦ, был бы невозможен без поддержки и критических замечаний сотрудников Отдела математической физики МИАН им. В. А. Стеклова. Автор выражает искреннюю благодарность [В. С. Владимирову], И. В. Воловичу, А. К. Гущину, Ю. Н. Дрожжинову, В. В. Жаринову, [Б. И. Завьялову], [В. П. Михайлову] и А. Г. Сергееву за многочисленные обсуждения вопросов дифференциальной геометрии и математической физики.

## 2. Многообразия и тензорные поля

В настоящей главе начинается изложение некоторых аспектов современной дифференциальной геометрии. Изложение часто носит координатный характер, т.е. все соотношения записываются в локальной системе координат и приводятся правила преобразований геометрических объектов при переходе от одной системы координат к другой. Параллельно даются также глобальные определения, не зависящие от выбора системы координат, и показывается связь координатного и инвариантного описания. Глобальный бескоординатный подход компактен в обозначениях, прозрачен и удобен для определения геометрических объектов. Координатный подход является более громоздким, однако это не является признаком меньшей строгости. Он незаменим в моделях математической физики, основанных на дифференциальной геометрии, где требуется проведение расчетов.

### 2.1. Многообразия

Базовым понятием дифференциальной геометрии является дифференцируемое многообразие  $M$ , которое обобщает понятие евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . Топологически нетривиальные многообразия не покрываются одной системой координат, однако локально устроены так же, как и евклидовы пространства. Это позволяет использовать математический анализ для построения и анализа многих важных моделей современной математической физики.

Начнем с определений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Говорят, что два топологических пространства  $M_1$  и  $M_2$  *гомеоморфны*, если существуют взаимно обратные непрерывные отображения  $f : M_1 \rightarrow M_2$  и  $g : M_2 \rightarrow M_1$  такие, что  $g \circ f = \text{id}(M_1)$  и  $f \circ g = \text{id}(M_2)$ , где  $\text{id}$  – тождественное отображение. Тогда отображения  $f$  и  $g$  называются *гомеоморфизмами*.

Ясно, что любой гомеоморфизм является биекцией.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Топологическое хаусдорфово пространство  $M$  со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому  $n$ -мерному шару единичного радиуса  $\mathbb{B}_1^n$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , называется  $n$ -мерным *топологическим многообразием*. Число  $n$  называется *размерностью* многообразия. Мы пишем  $\dim M = n$ .

В определении многообразия требование хаусдорфовости существенно и является достаточным условием того, чтобы любая сходящаяся последовательность в хаусдорфовом пространстве имела не более одного предела.

Предположение о счетности базы также существенно, потому что это требование обеспечивает паракомпактность многообразия, которая в рассматриваемом случае достаточна для существования разбиения единицы. В свою очередь, существование разбиения единицы важно, т.к. позволяет определять геометрические объекты на всем многообразии, исходя из их задания в локальных координатах. Оно часто используется для доказательства теорем существования.

Выбор шаров единичного радиуса  $\mathbb{B}_1^n$  сделан для определенности и не является существенным, так как шар единичного радиуса можно заменить на произвольную гомеоморфную ему область, в частности, на все евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ .

В настоящей монографии под областью, как правило, мы понимаем произвольную открытую область, гомеоморфную открытому шару в  $\mathbb{R}^n$ , которую, следовательно, можно покрыть одной системой координат.

Окрестность произвольной точки многообразия  $M$  устроена так же, как и окрестность точки в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Однако в отличие от евклидова пространства, которое, по определению, может быть покрыто одной картой, многообразие в общем случае одной картой не покрывается. Поэтому на многообразии общего вида нельзя ввести структуру векторного или аффинного пространства.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.1.** *Многообразие представляет собой объединение конечного или счетного числа областей,  $M = \bigcup_i U_i$ , каждая из которых гомеоморфна  $n$ -мерному шару, и, следовательно, всему  $\mathbb{R}^n$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$ , то все многообразие можно покрыть, возможно, несчетным числом карт  $U_i$ . Выберем счетную базу на  $M$ , которая также является покрытием. Каждая координатная окрестность  $U_i$  является объединением счетного числа элементов базы и, поэтому, на каждом элементе базы задан гомеоморфизм в  $\mathbb{R}^n$ . Теперь можно выбрать базу топологии в качестве координатного покрытия, а она – счетна.

В приложениях рассматриваются, как правило, многообразия, которые покрываются конечным числом карт.

Согласно данному определению, многообразие, как объединение открытых множеств, не имеет границы, которую в случае многообразий принято называть краем.

Поскольку каждая окрестность многообразия гомеоморфна шару в евклидовом пространстве, то всякое многообразие является локально связным. Поэтому всякое многообразие представляет собой объединение связных компонент, каждая из которых является одновременно открытой и замкнутой. Число этих компонент может быть не более, чем счетным, так как мы предполагаем счетность базы многообразия. В дальнейшем, однако, мы иногда будем рассматривать многообразия, состоящие из несчетного числа компонент.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Под  $0$ -мерным многообразием мы будем понимать счетное множество точек с дискретной топологией. Одномерное и двумерное многообразия называются соответственно *кривой* и *поверхностью*.

Размерность многообразия является топологическим инвариантом: два гомеоморфных многообразия имеют одинаковую размерность.

Данное выше определение задает *топологическое многообразие*, так как в нем говорится только о непрерывности. Теперь перейдем к описанию дифференцируемых многообразий.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Из определения многообразия следует, что существует гомеоморфизм

$$\varphi_i : M \supset U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n,$$

области  $U_i$  на ее образ  $\varphi_i(U_i)$  (суммирования нет) в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Поскольку в евклидовом пространстве есть система координат, например, декартова, то данный гомеоморфизм можно записать в виде

$$\varphi_i : M \supset U_i \ni x \mapsto \varphi_i(x) = (x^1, \dots, x^n) \in \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n,$$

где точку многообразия  $x$  и ее координаты  $(x^1, \dots, x^n)$  мы обозначили одной и той же буквой. Области  $U_i$ , покрывающие многообразие, называются *координатными окрестностями*, а набор чисел  $(x^1, \dots, x^n)$  – *локальными координатами*. Пара  $(U_i, \varphi_i)$  называется *картой*.

Если две карты пересекаются,  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то произвольная точка из пересечения  $x \in U_i \cap U_j$  имеет свой набор координат в каждой карте. Отображение областей евклидова пространства,

$$f_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n,$$

задается набором  $n$  функций  $x^{\alpha'}(x)$  от  $n$  переменных, где  $x^\alpha$  и  $x^{\alpha'}$  ( $\alpha, \alpha' = 1, \dots, n$ ) – координаты соответственно на  $U_i$  и  $U_j$ . Они называются *функциями склейки*, поскольку склеивают между собой различные карты. Совокупность всех карт, покрывающих многообразие,  $M = \bigcup_i U_i$ , называется *координатным покрытием* или *атласом*  $\{U_i, \varphi_i\}$ ,  $i \in I$  многообразия  $M$ . Атлас, который не содержится ни в каком другом атласе, называется *полным*.

При проведении вычислений в одной карте точку многообразия  $x \in M$  и ее координаты  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$  можно отождествлять. Но всегда следует помнить, что точка одна, а координат много.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В силу счетности топологической базы многообразия, координатное покрытие всегда можно выбрать счетным. Однако, даже евклидово пространство можно при желании покрыть несчетным числом карт. Это значит, что полный атлас любого многообразия всегда несчетен.

Мы требуем, чтобы каждая функция склейки  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j)$  заданного атласа определяла некоторый диффеоморфизм, который задавался бы  $k$  раз непрерывно дифференцируемыми функциями. Поэтому мы говорим, что атлас  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  совместим с псевдогруппой преобразований координат  $\text{diff}^k(\mathbb{R}^n)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Многообразие  $\mathbb{M}$  вместе с полным атласом  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  называется *дифференцируемым многообразием* класса  $\mathcal{C}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , если функции склейки для всех пересекающихся карт непрерывны вместе со своими частными производными  $k$ -того порядка:  $f_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in \text{diff}^k(\mathbb{R}^n)$ . Полный атлас  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  называется *дифференцируемой структурой* многообразия  $\mathbb{M}$ .

Аналогично определяются гладкие  $\mathcal{C}^\infty$  и вещественно аналитические многообразия  $\mathcal{C}^\omega$ . На  $\mathcal{C}^\omega$ -многообразиях функции склейки задаются сходящимися степенными рядами. Напомним, что функции склейки имеют ненулевой якобиан и поэтому осуществляют взаимно однозначное отображение областей в  $\mathbb{R}^n$ . Это означает, что обратное преобразование существует, и дифференцируемость обратных функций такая же, как и самих функций склейки. В дальнейшем, если не оговорено противное, под многообразием мы будем понимать  $\mathcal{C}^\infty$  дифференцируемые многообразия. Многие из рассмотренных ниже утверждений справедливы и при более слабых ограничениях на дифференцируемость функций склейки. Для проверки достаточно следить лишь за числом производных при вычислениях.

Отметим некоторые свойства функций склейки.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.2.** *Функции склейки удовлетворяют тождествам:*

$$f_{ij} = f_{ji}^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j, \quad (2.1)$$

$$f_{ij} f_{jk} f_{ki} = \text{id}, \quad \forall x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k, \quad (2.2)$$

где  $\text{id}$  – тождественное отображение.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямая проверка.

**СЛЕДСТВИЕ.** *Справедливо тождество*

$$f_{ii} = \text{id}.$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.3.** *Любой атлас класса  $\mathcal{C}^k$  можно дополнить до полного атласа того же класса гладкости, и соответствующий полный атлас единственный. Если на многообразии задано два диффеоморфных атласа  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  и  $\{\mathbb{V}_\alpha, \psi_\alpha\}$ , т.е. все отображения*

$$\psi_\alpha \circ \varphi_i^{-1} : \quad \varphi_i(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{V}_\alpha) \rightarrow \psi_\alpha(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{V}_\alpha)$$

*являются диффеоморфизмами областей евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , как только пересечения  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{V}_\alpha$  не пусты, то они содержатся в одном полном атласе. Любые два атласа, содержащиеся в одном полном атласе связаны между собой диффеоморфизмом.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{\mathbb{W}, \chi\}$  – семейство всех пар таких, что  $\chi$  есть гомеоморфизм открытого подмножества  $\mathbb{W} \subset \mathbb{M}$  на открытое подмножество в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  и что отображение

$$\varphi_i \circ \chi^{-1} : \quad \chi(\mathbb{W} \cap \mathbb{U}_i) \rightarrow \varphi_i(\mathbb{W} \cap \mathbb{U}_i)$$

есть элемент  $\text{diff}^k(\mathbb{R}^n)$ , как только  $\mathbb{W} \cap \mathbb{U}_i$  не пусто. Тогда  $\{\mathbb{W}, \chi\}$  есть полный атлас, содержащий  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ . Этот атлас единственный по построению.

Если заданы два диффеоморфных атласа  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  и  $\{\mathbb{V}_\alpha, \psi_\alpha\}$ , то их объединение также является атласом и того же класса гладкости. Поэтому они содержатся в одном полном атласе.

Все атласы, содержащиеся в одном полном атласе, получают путем отбрасывания некоторого количества карт. Они диффеоморфны между собой, поскольку все функции склейки полного атласа принадлежат  $\text{diff}^k(\mathbb{R}^n)$ .

Данное предложение означает, что для задания дифференцируемой структуры на многообразии достаточно задать один атлас, не обязательно полный. Если на многообразии  $\mathbb{M}$  можно задать два атласа одного класса гладкости, которые не диффеоморфны между собой, то это означает, что на  $\mathbb{M}$  существуют различные дифференцируемые структуры.



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  введено две дифференцируемые структуры разных классов гладкости  $\mathcal{C}^k$  и  $\mathcal{C}^l$ , где  $l > k$ , причем полный атлас класса  $\mathcal{C}^l$  является одновременно атласом класса  $\mathcal{C}^k$ . Если  $l = \infty$ , то ограничение класса гладкости  $\mathcal{C}^k$ -многообразия до  $\mathcal{C}^\infty$ -многообразия называется *сглаживанием*. При этом сглаживания, которые связаны  $\mathcal{C}^k$  автоморфизмами, рассматриваются, как эквивалентные.

**ТЕОРЕМА 2.1.1 (Уитни).** *Каждое  $\mathcal{C}^k$ -многообразие имеет ровно одно (с точностью до  $\mathcal{C}^k$ -диффеоморфизмов) сглаживание.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См. [21].

В силу этой теоремы во многих случаях можно игнорировать различие между  $\mathcal{C}^k$  дифференцируемыми и  $\mathcal{C}^\infty$  гладкими структурами.

В низших размерностях дифференцируемая структура на многообразиях единственна. Доказано, что двух- и трехмерные многообразия допускают ровно одну дифференцируемую структуру [22]. Для многообразий более высоких размерностей это не так. Данное утверждение иллюстрирует пример Милнора [23], который показал, что на семимерной сфере  $\mathbb{S}^7$ , рассматриваемой, как топологическое многообразие, существует 28 недиффеоморфных дифференцируемых структур. Построение этих структур является сложным, и мы его не приводим. Было также доказано, что четырехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  допускает бесконечное множество недиффеоморфных дифференцируемых структур [24]. Существует также теорема о том, что каждое гладкое многообразие имеет единственную вещественно аналитическую структуру [21].

Если в определении многообразия отбросить требование счетности базы, то получим *локально евклидово топологическое пространство*. Существуют такие топологические локально евклидовы пространства, которые вообще не допускают дифференцируемой структуры [25].

Любое открытое подмножество  $\mathbb{D}$  дифференцируемого многообразия  $\mathbb{M}$  само является многообразием. Дифференцируемая структура на  $\mathbb{D}$  состоит из карт  $(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{D}, \varphi_i|_{\mathbb{D}})$ , возникающих после сужения гомеоморфизмов  $\varphi_i$  на  $\mathbb{D}$ .

Поскольку многообразия являются топологическими пространствами, то их можно умножать как топологические пространства. При этом произведение двух многообразий  $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$  также является многообразием размерности  $m + n$ , где  $\dim \mathbb{M} = m$  и  $\dim \mathbb{N} = n$ . Дифференцируемая структура на прямом произведении многообразий  $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$  строится, как прямое произведение дифференцируемых структур на  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$ . А именно, пусть дифференцируемая структура на многообразии  $\mathbb{M}$  определяется атласом  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ , а на  $\mathbb{N}$  – атласом  $\{\mathbb{V}_\alpha, \phi_\alpha\}$ . Тогда естественная дифференцируемая структура на топологическом произведении  $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$  определяется атласом  $\{\mathbb{U}_i \times \mathbb{V}_\alpha, \varphi_i \times \phi_\alpha\}$ , где отображение

$$\varphi_i \times \phi_\alpha : \mathbb{U}_i \times \mathbb{V}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

определяется естественным образом. Отметим, что этот атлас не будет полным даже если атласы  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  и  $\{\mathbb{V}_\alpha, \phi_\alpha\}$  полны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если связное многообразие покрыто совокупностью карт  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  с координатами  $\varphi_i(x) = \{x_i^\alpha\}$ , причем якобианы функций перехода для всех пересекающихся карт  $\mathbb{U}_i$  и  $\mathbb{U}_j$  положительны,

$$\det \left( \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right) > 0, \quad \forall i, j$$

то многообразие называется *ориентированным*. Многообразие называется *неориентируемым*, если атласа со всеми положительными якобианами функций склейки не существует. При неудачно выбранном атласе на ориентируемом многообразии якобианы могут быть разных знаков, однако атлас с положительными якобианами существует. Такие многообразия называются *ориентируемыми*. Несвязное многообразие  $\mathbb{M}$  называется ориентируемым, если ориентируема каждая его компонента.

Связное ориентируемое многообразие допускает в точности две ориентации. Чтобы поменять ориентацию ориентированного многообразия достаточно заменить каждую карту  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$  ориентированного атласа на карту  $(\mathbb{U}_i, \psi_i)$ , где гомеоморфизм  $\psi_i$  является композицией  $\varphi_i$  и отражения первой (или любой другой) координаты:  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (-x^1, x^2, \dots, x^n)$ . (Более подробно ориентация многообразий будет

обсуждаться в разделе 10.4.) Ориентация несвязного многообразия – это выбор ориентации на каждой компоненте.

Рассмотрим простейшие примеры многообразий.

**ПРИМЕР 2.1.1.** Все евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  является простейшим  $n$ -мерным многообразием, которое можно покрыть одной картой (а можно и несколькими). Дифференцируемая структура – это полный атлас, содержащий естественную карту  $(U = \mathbb{R}^n, \varphi = \text{id}(\mathbb{R}^n))$ . При этом класс гладкости многообразия определяется классом гладкости допустимых преобразований координат. Любое многообразие  $M$ ,  $\dim M = n$ , которое покрывается одной картой, диффеоморфно (см. раздел 2.9)  $\mathbb{R}^n$  и называется *тривиальным*.

**ПРИМЕР 2.1.2.** Рассмотрим произвольное вещественное векторное пространство  $V$ ,  $\dim V = n$ . Если в векторном пространстве выбран базис  $\{e_a\}$ ,  $a = 1, \dots, n$ , то каждая точка векторного пространства задается упорядоченным набором вещественных чисел  $(x^1, \dots, x^n)$ . Тогда его можно отождествить с евклидовым пространством  $\mathbb{R}^n$  и рассматривать, как гладкое многообразие. Дифференцируемая структура в  $V$  не зависит от выбора базиса, так как замена базиса задается невырожденной матрицей, и соответствует преобразованию координат класса  $C^\infty$ . В дальнейшем мы всегда будем считать, что все векторные пространства снабжены естественной дифференцируемой структурой евклидова пространства.

**ПРИМЕР 2.1.3.** Рассмотрим ломаную линию  $\gamma$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , заданную уравнением  $y = |x|$  (см. рис. 2.1, а). Топология, индуцированная из  $\mathbb{R}^2$ , превращает ее в связное хаусдорфово топологическое пространство. Ломаную  $\gamma$  можно покрыть одной картой  $(U, \varphi)$ , спроектировав ломаную линию на ось  $x$ ,

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}, \quad \varphi(x, y) = x.$$

Таким образом  $\gamma$  становится одномерным тривиальным многообразием класса  $C^\infty$ . Однако вложение  $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  (см. раздел 2.9) является только непрерывным, а не дифференцируемым, и это является причиной излома.

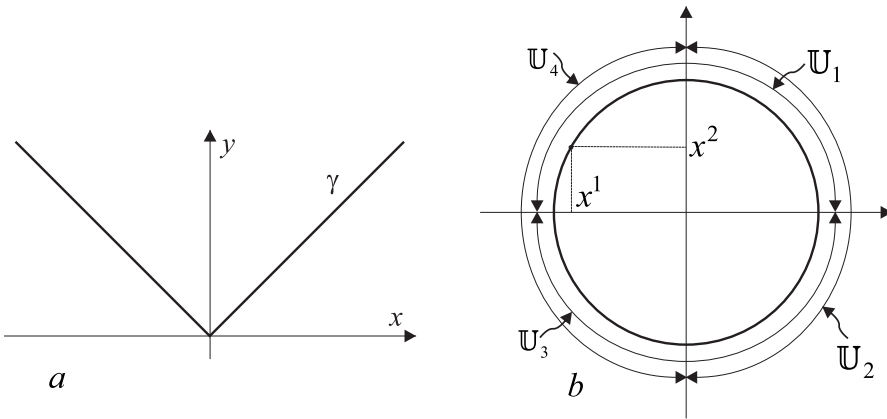


Рис. 2.1. Ломаная прямая  $\gamma$  является  $C^\infty$  многообразием (а). Покрытие окружности  $S^1$  четырьмя картами (б). Показана точка, принадлежащая пересечению  $U_1 \cap U_4$ .

**ПРИМЕР 2.1.4.**  $n$ -мерная сфера  $S_r^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  радиуса  $r$  с центром в начале координат, вложенная в  $(n+1)$ -мерное евклидово пространство, задается уравнением

$$S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = r^2\}, \quad r = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Само по себе это уравнение задает только множество точек в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а никак не многообразие. Зададим на нем топологию, сказав, что топология индуцирована вложением  $S_r^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Пусть  $N = (0, \dots, 0, r)$  и  $S = (0, \dots, 0, -r)$  – северный и южный полюс сферы. Гладкая дифференцируемая структура на  $S_r^n$  – это полный атлас, содержащий две карты:  $(S_r^n \setminus N, \varphi_N)$  и  $(S_r^n \setminus S, \varphi_S)$ , где  $\varphi_N$  и  $\varphi_S$  – стереографические проекции из северного и южного полюса. Тогда сфера становится  $n$ -мерным компактным ориентируемым многообразием. Это многообразие нетривиально и покрывается не менее, чем двумя картами.

**ПРИМЕР 2.1.5.** Сфера Римана  $\overline{\mathbb{C}}$  представляет собой вещественное двумерное многообразие, диффеоморфное обычной сфере,  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$ . С точки зрения комплексной геометрии она является одномерным голоморфным комплексным многообразием комплексной размерности  $\dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{C}} = 1$ . Действительно, покроем сферу Римана двумя картами:  $\mathbb{U}_0 := \mathbb{C}$  – окрестность нуля и  $\mathbb{U}_\infty := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  – окрестность бесконечности. Они имеют непустое пересечение  $\mathbb{U}_0 \cap \mathbb{U}_\infty = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . В качестве координат на  $\mathbb{U}_0$  и  $\mathbb{U}_\infty$  выберем, соответственно,  $z$  и  $1/z$ . В области пересечения функция склейки  $f_{0\infty}(z) = 1/z$  голоморфна. Тем самым мы построили голоморфный атлас на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Как комплексное многообразие сфера Римана диффеоморфна одномерному комплексному проективному пространству (проективной прямой),  $\overline{\mathbb{C}} \approx \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Напомним, что проективная прямая – это множество комплексных прямых  $az^1 + bz^2 = 0$ , где  $(z^1, z^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  и  $a, b \in \mathbb{C}$ , в двумерном комплексном многообразии  $\mathbb{C}^2 := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Если  $b \neq 0$ , то из уравнения прямой следует равенство  $z^2 = -az^1/b$ , т.е. каждая прямая параметризуется комплексным числом  $-a/b = z \in \mathbb{C}$ . При  $a \neq 0$ , аналогично, каждая прямая параметризуется числом  $-b/a = 1/z \in \mathbb{C}$ . Тем самым мы покрыли проективное пространство  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  двумя картами. В области пересечения  $ab \neq 0$  функция склейки имеет вид  $f(z) = 1/z$ . Таким образом, сфера Римана и одномерное комплексное проективное пространство имеют одинаковое координатное покрытие и, следовательно, диффеоморфны.

**ПРИМЕР 2.1.6.** Рассмотрим задание окружности  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  единичного радиуса с помощью четырех карт:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_1 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : x^2 > 0\}, & \varphi_1(x) &= x^1, \\ \mathbb{U}_2 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : x^1 > 0\}, & \varphi_2(x) &= x^2, \\ \mathbb{U}_3 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : x^2 < 0\}, & \varphi_3(x) &= x^1, \\ \mathbb{U}_4 &= \{x \in \mathbb{S}^1 : x^1 < 0\}, & \varphi_4(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что совокупность областей  $\{\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4\}$  является конечным открытым покрытием окружности  $\mathbb{S}^1$ . Четыре карты  $\{(\mathbb{U}_1, \varphi_1), (\mathbb{U}_2, \varphi_2), (\mathbb{U}_3, \varphi_3), (\mathbb{U}_4, \varphi_4)\}$  представляют собой атлас. В области пересечения двух карт  $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_4$  функции преобразования координат имеют вид (см. рис. 2.1, b)

$$\begin{aligned} x^{2'} &= \sqrt{1 - (x^1)^2} > 0, \\ x^{1'} &= -\sqrt{1 - (x^2)^2} < 0, \end{aligned}$$

где нештрихованные и штрихованные координаты относятся соответственно к областям  $\mathbb{U}_1$  и  $\mathbb{U}_4$ . Аналогично выписываются функции склейки для всех других пересечений карт. Все функции склейки являются бесконечно дифференцируемыми. Это значит, что построенный атлас принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$ .

**ПРИМЕР 2.1.7.** Тор  $\mathbb{T}^n$  представляет собой прямое произведение  $n$  окружностей,

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \cdots \times \mathbb{S}}_n,$$

и является  $n$ -мерным компактным ориентируемым многообразием. Дифференцируемая структура на  $\mathbb{T}^n$  задается как на прямом произведении многообразий.

**ПРИМЕР 2.1.8.** *Проективным пространством  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  над полем вещественных чисел называется множество прямых евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через начало координат. Проективное пространство  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  представляет собой многообразие размерности  $n$ . Его можно представлять себе как сферу  $\mathbb{S}^n$  с отождествленными диаметрально противоположными точками. Действительно, любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает единичную сферу с центром в начале координат ровно в двух диаметрально противоположных точках. Обратно, любая из этих двух точек однозначно определяет прямую, проходящую через начало координат. Таким образом,*

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n \approx \frac{\mathbb{S}^n}{\mathbb{Z}_2},$$

где циклическая группа  $\mathbb{Z}_2$  состоит из двух элементов  $\{1, -1\}$ . Проективное пространство  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  можно представить также в виде полусферы  $x \in \mathbb{S}^n$ ,  $x^n \geq 0$ , у которой отождествлены диаметрально противоположные краевые точки, т.е. точки  $(n-1)$ -мерной сферы

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{S}^n : x^n = 0\}.$$

Рассмотрим замкнутую кривую в проективном пространстве, проходящую через одну из краевых точек. На рис. 2.2, *a*, для наглядности изображена проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$  в трехмерном евклидовом пространстве и возможная кривая. Выберем ортонормированный базис вдоль кривой, включающий единичный касательный вектор  $e_1$ . При прохождении через краевую точку  $p$  касательный вектор  $e_1$  не меняет ориентации относительно кривой, в то время как все остальные базисные векторы  $e_2, e_3, \dots$  меняют направление. Это значит, что ориентация ортонормированного базиса при прохождении вдоль этой замкнутой кривой изменится при четных  $n$  и сохранится при нечетных  $n$ . Если замкнутая кривая целиком лежит в верхней полусфере, то ориентация базиса вдоль кривой сохраняется. Тем самым мы показали, что проективные пространства четного числа измерений неориентируемы, а нечетного числа измерений – ориентируемы.

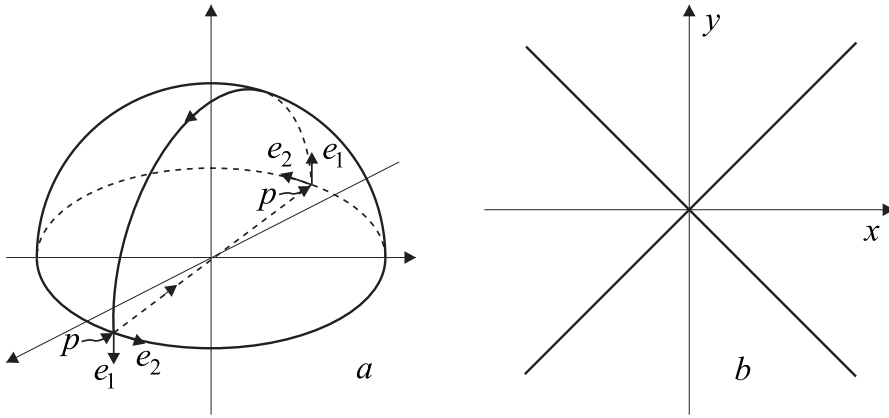


Рис. 2.2. Проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$  как полусфера в  $\mathbb{R}^3$ . Показан замкнутый путь, проходящий через граничную точку  $p$ , и перенос базиса вдоль пути (*a*). Две пересекающиеся прямые не являются многообразием (*b*).

**ПРИМЕР 2.1.9.** Продемонстрируем отличие топологического пространства от многообразия. Пусть множество точек на евклидовой плоскости состоит из двух пересекающихся прямых  $y^2 - x^2 = 0$ , изображенных на рис. 2.2, *b*. Пусть топология на этих прямых индуцирована вложением. Тогда это множество представляет собой связное хаусдорфово топологическое пространство. В то же время оно не является многообразием, потому что окрестность точки пересечения прямых нельзя взаимно однозначно отобразить на интервал вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .

**ПРИМЕР 2.1.10.** Рассмотрим прямое произведение двух прямых  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_D$ . Будем считать, что на первом сомножителе задана естественная топология, а на втором – дискретная, что отмечено индексом  $D$ . Тогда, как множество, многообразие  $M$  совпадает с двумерным евклидовым пространством  $\mathbb{R}^2$ , а как многообразие – нет. База топологии  $M$  состоит из всех интервалов на всех прямых, параллельных оси  $x$  и проходящих через все точки оси  $y$  (см. рис. 2.3). На каждой прямой база топологии счетна. Рассмотрим открытый диск  $D \subset M$ . Так же как и в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$ , он является открытым множеством, но на этот раз как объединение несчетного числа интервалов. Рассмотрим отображение  $f$  многообразия  $M$  на евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$ , которое задается простым отождествлением координат:  $M \ni (x, y) \xrightarrow{f} (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Это отображение биективно и непрерывно. Однако обратное отображение  $f^{-1}$  не является непрерывным, так как на евклидовой плоскости не существует открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^2$ , образ которого при обратном отображении  $f^{-1}(U)$  лежал бы в интервале. Поэтому отображение  $f$  не является гомеоморфизмом и множество  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_D$  не является двумерным многообразием. По построению, множество  $M$  является одномерным несвязным многообразием, состоящим из несчетного числа одномерных многообразий – прямых  $\mathbb{R}$ .

Рассмотренный пример показывает, что на одном и том же множестве точек можно задавать различные структуры. Мы говорим, что на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , рассматриваемой, как двумерное многообразие, задана структура слоения, т.е. мы представляем плоскость в виде объединения несчетного числа одномерных подмногообразий – прямых  $\mathbb{R}$ . Каждая прямая является листом слоения, которые параметризуются точками другой прямой  $\mathbb{R}_D$ . Более подробно слоения рассмотрены в разделе 2.12.

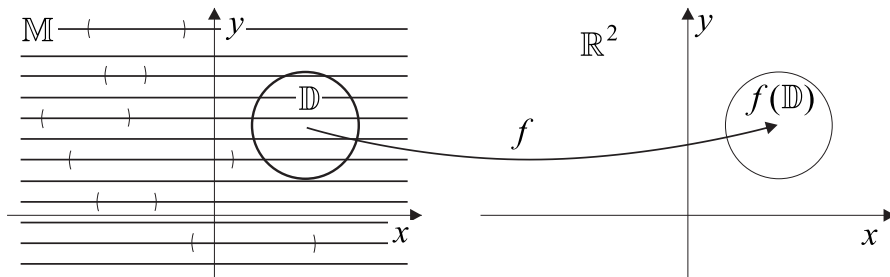


Рис. 2.3. Отображение  $f$  объединения  $\mathbb{M}$  бесчетного числа прямых, параллельных оси  $x$ , на евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$ .

В дальнейшем мы будем изучать различные свойства многообразий. Условимся о терминологии. Будем говорить, что данное свойство выполняется на многообразии  $\mathbb{M}$  *глобально*, если оно выполнено во всех точках  $x \in \mathbb{M}$ . Гораздо чаще встречаются свойства, которые выполнены только *локально*. А именно, для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует координатная окрестность  $U_x$  такая, что данное свойство выполнено на  $U_x$ . В этом случае можно говорить, что данное свойство выполнено в фиксированной системе координат. Конечно, любое свойство, выполненное глобально, справедливо и локально, но не наоборот.

## 2.2. Разбиение единицы

Один из способов задания геометрических структур, например, метрики, на многообразии  $\mathbb{M}$  заключается в следующем. Сначала выбирается некоторый атлас, покрывающий  $\mathbb{M}$ . Затем в каждой карте данного атласа в координатах задается некоторая геометрическая структура. Чтобы задать данную геометрическую структуру на всем многообразии  $\mathbb{M}$ , ее необходимо склеить в областях пересечения карт. Для этого используется разбиение единицы.

Как уже отмечалось, для существования разбиения единицы нам достаточно рассматривать паракомпактные многообразия. Счетность базы многообразия является достаточным условием паракомпактности. Напомним некоторые определения и утверждения из общей топологии, которые понадобятся для формулировки теоремы о существовании разбиения единицы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Топологическое пространство  $\mathbb{M}$  является *счетным в бесконечности*, если существует счетное семейство компактных множеств  $U_i$  таких, что

$$U_1 \subset \text{int } U_2 \subset U_2 \subset \dots \subset U_i \subset \text{int } U_{i+1} \subset U_{i+1} \subset \dots$$

и

$$\mathbb{M} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

**ТЕОРЕМА 2.2.1.** *Паракомпактное топологическое пространство является объединением семейства связных паракомпактных топологических пространств, которые являются счетными в бесконечности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [26], теорема 1.11.

**ТЕОРЕМА 2.2.2.** *Любое покрытие паракомпактного многообразия имеет счетное локально конечное измельчение.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Существование локально конечного измельчения, которое также является покрытием, входит в определение паракомпактности и его доказывать не надо. Нетривиальность утверждения теоремы в том, что локально конечное покрытие можно выбрать счетным. Доказательство приведено в [27], лемма 1.9.

Перед тем как ввести разбиение единицы напомним

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Носителем* функции  $f$ , заданной на многообразии  $\mathbb{M}$ , называется замыкание множества тех точек, в которых она отлична от нуля. Носитель функции обозначается  $\text{supp } f \subset \mathbb{M}$ . Если носитель функции компактен, то функция называется *финитной*.

Из определения следует, что носитель произвольной функции  $f$  всегда замкнут в  $\mathbb{M}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Разбиением единицы*, подчиненным заданному покрытию  $\{\mathbb{U}_i\}_{i \in I}$  многообразия  $\mathbb{M}$ , называется семейство функций  $\{f_i\}$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1)  $\text{supp } f_i \subset \mathbb{U}_i$  для всех  $i$ ;
- 2) каждая точка имеет окрестность  $\mathbb{W}$  такую, что  $\mathbb{W} \cap \text{supp } f_i = \emptyset$  за исключением конечного числа функций  $f_i$ ;
- 3)  $0 \leq f_i(x) \leq 1$ ,  $\sum_i f_i(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В данном определении покрытие произвольно и не обязательно счетное и локально конечное. Сумма в условии 3) определена, так как содержит только конечное число слагаемых в силу условия 2).

**ТЕОРЕМА 2.2.3 (Разбиение единицы).** *На любом паракомпактном многообразии класса  $C^k$  существует  $C^k$  разбиение единицы, подчиненное заданному счетному локально конечному покрытию.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [4], теорема 3.2 или [27], теорема 1.11.

Для заданного покрытия  $\{\mathbb{U}_i\}$  существует много разбиений единицы. Пусть  $\{f_i\}$  и  $\{g_j\}$  – два разбиения единицы, подчиненные одному покрытию  $\{\mathbb{U}_i\}$ . Тогда очевидна формула

$$\sum_i f_i \sum_j g_j = \sum_{ij} f_i g_j = \sum_j g_j \sum_i f_i,$$

поскольку в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  суммы содержат только конечное число слагаемых.

Существование разбиения единицы на многообразии является эффективным средством доказательства существования геометрических структур на многообразии путем склеивания этих структур, заданных в отдельных картах. Например, в теореме 4.1.1 доказано существование римановой метрики на произвольном многообразии.

### 2.3. Многообразия с краем

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $f(x) \in C^\infty(M)$  – гладкая функция на гладком многообразии  $\mathbb{M}$ . Тогда замкнутое множество  $\mathbb{A} \subset \mathbb{M}$ , выделяемое в многообразии  $\mathbb{M}$  неравенством  $f(x) \leq 0$  (или  $f(x) \geq 0$ ) называется *гладким многообразием с краем*. Подмногообразие  $\partial\mathbb{A} \subset \mathbb{M}$ , задаваемое уравнением  $f(x) = 0$ , называется *краем*  $\mathbb{A}$ . При этом мы предполагаем, что градиент функции  $f$  на крае  $\partial\mathbb{A}$  отличен от нуля.

Если функция положительна,  $f > 0$ , на  $\mathbb{M}$ , то край пустой,  $\partial\mathbb{A} = \emptyset$ , и  $\mathbb{A} = \mathbb{M}$ . Нетривиальное многообразие с краем получается, если область значений функции  $f$  включает нуль.

**ПРИМЕР 2.3.1.** Замыкание любой ограниченной открытой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  является многообразием с краем  $\bar{\mathbb{U}}$ . При этом краем является граница области:  $\partial\bar{\mathbb{U}} = \bar{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{U}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Условие отличия градиента функции от нуля на крае является достаточным условием того, что край является  $(n - 1)$ -мерным подмногообразием в  $\mathbb{M}$ . По сути дела это определение является инвариантным обобщением понятия области и ее границы в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если многообразии с краем можно покрыть одной картой, то оба понятия в точности совпадают.

**ПРИМЕР 2.3.2.** Ориентируемым многообразием с краем является цилиндр конечной высоты, который получается при склейке двух краев прямоугольника, показанного на рис. 2.4, а. При этом направление склеиваемых сторон, которое показано стрелками, сохраняется. Цилиндр можно покрыть двумя картами, которые пересекаются по двум областям, и в обеих областях якобиан перехода положителен. Краем цилиндра является объединение двух окружностей.

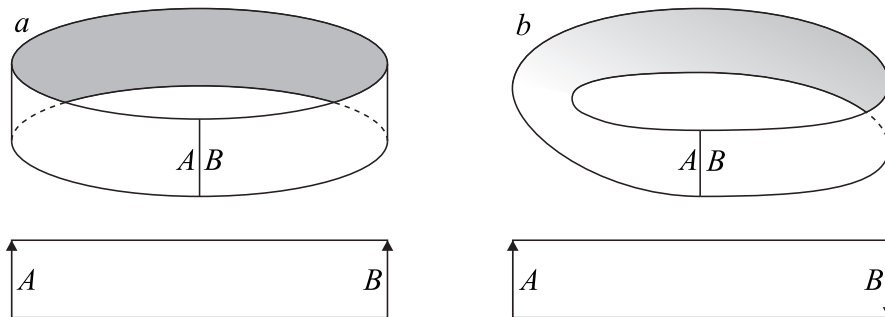


Рис. 2.4. Цилиндр (a) и лента Мебиуса (b) получаются при склеивании двух сторон прямоугольника с сохранением и изменением направления сторон при склейке, как показано стрелками.

**ПРИМЕР 2.3.3.** Если перед склейкой прямоугольника изменить направление одной из сторон, как показано стрелками на рис. 2.4, b, то получится неориентируемая поверхность с краем, которая называется *листом Мебиуса*. Лист Мебиуса также можно покрыть двумя картами, пересекающимися по двум областям, но в этом случае якобиан перехода в этих областях будет иметь разный знак. У листа Мебиуса край диффеоморфен одной окружности и является связным. Окружность, возникающая при склеивании середин отрезков A и B, называется *центральной*.

Если  $\mathbb{A}$  – многообразие с краем, то разность  $\mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$  также является многообразием, но уже без края.

Дадим эквивалентное определение многообразия с краем. Обозначим полупространство евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , определяемое уравнением  $x^n > 0$ , через  $\mathbb{R}_+^n$ . Будем считать, что на замыкании  $\overline{\mathbb{R}_+^n} \subset \mathbb{R}^n$  задана индуцированная топология. При этом открытые множества в  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$  могут как содержать, так и не содержать точки края, определяемого уравнением  $x^n = 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Топологическое хаусдорфово пространство  $\mathbb{M}$  со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в  $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ , называется *n-мерным топологическим многообразием с краем*. Точки, которые имеют окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$ , называются *внутренними*. Остальные точки называются *краевыми*.

Дифференцируемая структура на многообразии с краем вводится так же как и на многообразии без края. При этом мы предполагаем, что функции перехода на крае имеют тот же порядок гладкости, что и для внутренних точек. Если не оговорено противное, то мы рассматриваем гладкие дифференцируемые структуры класса  $\mathcal{C}^\infty$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1.** Пусть  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n \geq 2$ , – многообразие с краем. Если край  $\partial\mathbb{M}$  не является пустым, то  $\partial\mathbb{M}$  представляет собой многообразие размерности  $n - 1$  и без края  $\partial(\partial\mathbb{M}) = \emptyset$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выберем на  $\mathbb{M}$  координатное покрытие  $\{U_i, \varphi_i\}$ , где  $\varphi_i(U_i) \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ . Подмногообразие евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , которое выделяется уравнением  $x^n = 0$ , само является евклидовым пространством, но меньшей размерности:  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Поэтому  $\overline{\mathbb{R}_+^n} = \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}^{n-1}$ . Конечно, имеет место диффеоморфизм  $\mathbb{R}_+^n \approx \mathbb{R}^n$ . Все точки края  $\partial\mathbb{M}$  и только они отображаются в край  $\mathbb{R}^{n-1} \subset \overline{\mathbb{R}_+^n}$ . При этом функции склейки  $f_{ij}$  отображают край в край  $f_{ij} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ . Следовательно, сужение координатного покрытия  $\{U_i, \varphi_i\}$  на точки края дает координатное покрытие некоторого многообразия размерности  $n - 1$ , у которого нет края.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Многообразие с краем  $\mathbb{M}$  называется *ориентируемым*, если ориентируемо соответствующее ему многообразие без края  $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$ .

**ТЕОРЕМА 2.3.1.** Если многообразие с краем  $\mathbb{M}$  ориентируемо, то его край  $\partial\mathbb{M}$  также является ориентируемым многообразием. Ориентация на  $\mathbb{M}$  индуцирует каноническую ориентацию края  $\partial\mathbb{M}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть на  $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$  задана какая либо ориентация, которую назовем положительной. Рассмотрим естественное вложение края  $h : \partial\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ . Тогда дифференциал отображения действует на касательные векторы  $h_* : T_x(\partial\mathbb{M}) \rightarrow T_x(\mathbb{M})$ . Для каждой точки края  $x \in \partial\mathbb{M}$  выберем первый базисный вектор  $e_1 \in T_x(\mathbb{M})$ ,  $e_1 \notin T_x(\partial\mathbb{M})$  таким образом, чтобы он был ориентирован наружу. Это значит, что для

любой дифференцируемой функции, удовлетворяющей условиям  $f(\partial\mathbb{M}) = 0$  и  $f(\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}) \leq 0$ , производная вдоль  $e_1$  неотрицательна,  $e_1 f \geq 0$ . Дополним этот вектор базисными векторами края  $\{e_2, \dots, e_n\}$  таким образом, чтобы базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  имел положительную ориентацию в  $\mathbb{M}$ . Тогда ориентация  $\{e_2, \dots, e_n\}$  задает *каноническую ориентацию* края.

На языке дифференциальных форм задание согласованной ориентации многообразия  $\mathbb{M}$  и его края  $\partial\mathbb{M}$  означает следующее. Пусть  $\{e^a\}$ ,  $a = 1, \dots, n$ , – набор 1-форм, дуальных к базису  $e_a$ , построенному в доказательстве теоремы 2.3.1:  $e^a(e_b) = \delta_b^a$ . Поскольку 1-формы линейно независимы, то  $n$ -форма  $e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$  отлична от нуля и задает ориентацию на  $\mathbb{M}$ . Формы  $e^2, \dots, e^n$ , по построению, линейно независимы на крае  $\partial\mathbb{M}$  и задают каноническую ориентацию края. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что ориентация края  $\partial\mathbb{M}$  индуцирована ориентацией самого многообразия  $\mathbb{M}$ .

Из определения края следует выражение для края прямого произведения двух многообразий (правило Лейбница)

$$\partial(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = (\partial\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) \cup (\mathbb{M}_1 \times \partial\mathbb{M}_2).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** В моделях гравитации принято называть вселенную *замкнутой*, если она представляет собой компактное многообразие без края. *Открытая вселенная* является некомпактным многообразием без края. В общем случае будем называть компактное многообразие без края *замкнутым*. Такие многообразия являются, конечно, замкнутыми множествами в топологическом смысле. Однако термин замкнутый в данном определении и в определении замкнутого множества в топологии имеют разный смысл.

**ПРИМЕР 2.3.4.** Прямая представляет собой замкнутое (и одновременно открытое) множество в естественной топологии. В то же время она не является замкнутым многообразием, поскольку некомпактна.

## 2.4. Расслоения

В разделе 2.1 было определено прямое произведение  $\mathbb{M} \times \mathbb{F}$  двух дифференцируемых многообразий  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{F}$ , которое также является дифференцируемым многообразием. При этом дифференцируемая структура на прямом произведении многообразий определяется дифференцируемыми структурами сомножителей. В настоящем разделе мы обобщим понятие прямого произведения многообразий.

Мы предполагаем, что все многообразия являются достаточно гладкими.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Расслоением* называется четверка  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$ , где  $\mathbb{E}, \mathbb{M}, \mathbb{F}$  – многообразия, а  $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}$  – дифференцируемое отображение, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) каждая точка  $x \in \mathbb{M}$  имеет окрестность  $\mathbb{U}_x$  такую, что существует диффеоморфизм  $\chi : \pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \rightarrow \mathbb{U}_x \times \mathbb{F}$  (локальная тривиальность);
- 2) композиция отображений  $\pi \circ \chi^{-1} : \mathbb{U}_x \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{M}$  есть проекция на первый сомножитель:  $(y, v) \mapsto y$  для всех  $y \in \mathbb{U}_x$  и  $v \in \mathbb{F}$ .

Многообразие  $\mathbb{E}$  называется *пространством расслоения*,  $\mathbb{M}$  – *базой* расслоения,  $\mathbb{F}$  – *типичным слоем* и  $\pi$  – *проекцией*.

Поскольку отображение  $\chi$  в условии 1) является диффеоморфизмом, то

$$\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{F}.$$

Предполагается, что база расслоения является связным многообразием. В противном случае расслоения можно рассматривать над каждой связной компонентой. Расслоение также называется *расслоенным пространством* и обозначается  $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ . Мы считаем, что проекция  $\pi$  является дифференцируемым сюръективным отображением на базу  $\mathbb{M}$ . В противном случае можно рассмотреть расслоение с базой  $\pi(\mathbb{E}) \subset \mathbb{M}$ . Поскольку отображение  $\pi$  непрерывно, то прообраз  $\pi^{-1}(x)$  является замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{E}$ , которое называется *слоем* над точкой базы  $x \in \mathbb{M}$ .

В дальнейшем, для краткости, мы иногда будем обозначать расслоение одной буквой  $\mathbb{E}$ . На рис. 2.5 схематично показана структура расслоения.



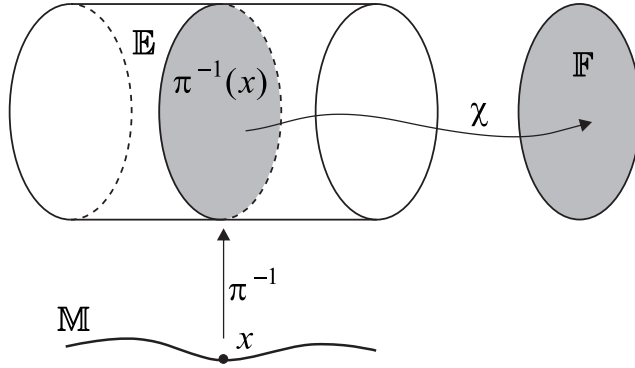


Рис. 2.5. Схематичное изображение структуры расслоения.  $E$  – пространство расслоения,  $M$  – база,  $F$  – типичный слой,  $\pi : E \rightarrow M$  – проекция,  $\chi : \pi^{-1}(x) \rightarrow F$  – диффеоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ. Атласы, заданные на базе и типичном слое, определяют атлас на пространстве расслоения в силу локальной тривиальности расслоения. Тем самым первое условие в определении расслоения является достаточным для того, чтобы дифференцируемые структуры на трех многообразиях  $E, M$  и  $F$  были согласованы между собой. Второе требование является условием коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 E \supset \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\chi} & U_x \times F \\
 \searrow \pi & & \downarrow \text{pr} = \pi \circ \chi^{-1} \\
 & & U_x
 \end{array}$$

где  $\text{pr}$  – естественная проекция прямого произведения  $U_x \times F \xrightarrow{\text{pr}} U_x$  на первый сомножитель. В общем случае это могло бы быть не так. В приведенной диаграмме окрестность  $U_x$  нельзя заменить на все многообразие  $M$ , так как отображение  $\chi$  определено локально.

ПРИМЕР 2.4.1. Прямое произведение двух многообразий  $E = M \times F$  с проекцией на первый сомножитель  $M \times F \xrightarrow{\pi} M$  является расслоением с базой  $M$  и типичным слоем  $F$ , которое называется *тривиальным*. С равным успехом четверка  $M \times F \xrightarrow{\pi'} F$  с проекцией на второй сомножитель является тривиальным расслоением с базой  $F$  и типичным слоем  $M$ .

Многообразия  $M, F, E$  могут быть как с краем, так и без края. Мы допускаем также в качестве базы или типичного слоя 0-мерные многообразия, т.е. конечные или счетные наборы точек с дискретной топологией.

По построению, пространство расслоения  $E$  представляет собой объединение несчетного числа слоев,  $E = \bigcup_{x \in M} \pi^{-1}(x)$ , каждый из которых диффеоморфен типичному слою  $F$  и “нумеруется” точкой базы. Это – частный случай слоений, рассмотренных в разделе 2.12.

Как было отмечено, дифференцируемые структуры на базе и слое согласованы с дифференцируемой структурой на пространстве расслоения  $E$ . Опишем это более подробно. Пусть  $E(M, \pi, F)$  – расслоение,  $\dim M = n$ ,  $\dim F = k$ . По определению, отображение  $\chi$  действует на каждую точку  $p \in E$ :  $\chi(p) = (x = \pi(p), v) \in M \times F$ . Поскольку база и типичный слой – многообразия, то существуют карты:

$$\begin{aligned}
 (U_x, \varphi) : M \supset U_x &\xrightarrow{\varphi} \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n, \\
 (V_v, \phi) : F \supset V_v &\xrightarrow{\phi} \phi(V_v) \subset \mathbb{R}^k.
 \end{aligned}$$

Локально определено отображение из пространства расслоения  $E$  в евклидово пространство  $\mathbb{R}^{n+k}$ :

$$\rho : \chi^{-1}(U_x \times V_v) \rightarrow \varphi(U_x) \times \phi(V_v) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Таким образом, для каждой точки расслоения  $p \in \mathbb{E}$  определена карта  $(\chi^{-1}(\mathbb{U}_x \times \mathbb{V}_v), \rho)$ . Определено также отображение, действующее из  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\tilde{\pi} = \varphi \circ \pi \circ \rho^{-1} : \quad \varphi(\mathbb{U}_x) \times \phi(\mathbb{V}_v) \ni (y, w) \quad \mapsto \quad y \in \varphi(\mathbb{U}_x),$$

где  $y \in \varphi(\mathbb{U}_x) \subset \mathbb{R}^n$  и  $w \in \phi(\mathbb{V}_v) \subset \mathbb{R}^k$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дифференцируемое отображение  $\mathbb{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{E}$  называется *сечением* или *глобальным сечением* расслоения  $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ , если  $\pi \circ \sigma = \text{id}(\mathbb{M})$ . Аналогичным образом, дифференцируемое отображение  $\mathbb{U} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{E}$ , где  $\mathbb{U}$  – открытое подмножество базы  $\mathbb{M}$ , называется *локальным сечением* расслоения  $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ , если  $\pi \circ \sigma = \text{id}(\mathbb{U})$ .

Локальные сечения существуют у любого расслоения – это функции со значениями в пространстве расслоения  $\mathbb{E}$ , которые определены в областях  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ . Глобальные сечения расслоений, как мы увидим в дальнейшем, существуют далеко не всегда.

**ПРИМЕР 2.4.2.** Пусть  $\mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{R}$  – тривиальное расслоение, типичным слоем которого является поле вещественных чисел. Тогда множество всех гладких сечений

$$f : \quad \mathbb{M} \ni \quad x \mapsto (x, f(x)) \quad \in \mathbb{E} = \mathbb{M} \times \mathbb{R}$$

совпадает с множеством графиков всех вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$

**ПРИМЕР 2.4.3 (Цилиндр).** Цилиндр единичной высоты – это прямое произведение окружности на единичный отрезок  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ . Его можно рассматривать как расслоение с базой  $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1$  и типичным слоем  $[0, 1]$ . У этого расслоения существуют глобальные сечения – гладкие функции на окружности со значениями в единичном отрезке  $[0, 1]$ . Например,  $f(\varphi) = \sin \varphi$ , где  $\varphi \in [0, 2\pi]$  – координата на окружности.

**ПРИМЕР 2.4.4 (Лист Мёбиуса).** Лист Мебиуса, изображенный на рис. 2.4, *b*, является расслоением с базой  $\mathbb{S}^1$ , типичным слоем которого, как и у цилиндра, является единичный отрезок  $[0, 1]$ . Это расслоение нетривиально, так как не имеет вида прямого произведения.

**ПРИМЕР 2.4.5 (Бутылка Клейна).** Построение бутылки Клейна изображено на рис. 2.6. Мы берем цилиндр конечной высоты и отождествляем точки граничных окружностей, предварительно отобразив точки окружности с одной стороны цилиндра относительно произвольного диаметра. Эту поверхность нельзя вложить в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  и поэтому трудно представить. Бутылку Клейна можно рассматривать, как расслоение с базой  $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1$  и типичным слоем  $\mathbb{F} = \mathbb{S}^1$ . Это расслоение нетривиально.

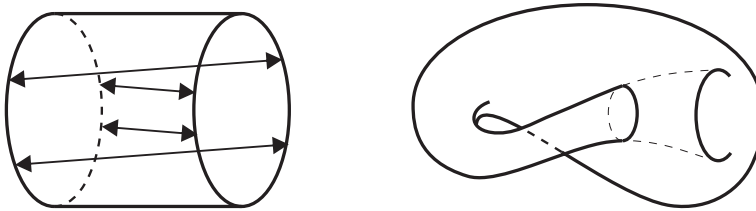


Рис. 2.6. Бутылка Клейна

**ПРИМЕР 2.4.6.** Пусть задана группа Ли  $\mathbb{G}$  и ее нормальная подгруппа  $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ . Рассмотрим отображение группового многообразия  $\mathbb{G}$  на пространство правых (или левых) смежных классов  $\pi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$ , определенное правилом  $\pi(g) = \mathbb{H}g$ , где  $g \in \mathbb{G}$ . Тогда  $\mathbb{G} \xrightarrow{\pi} \mathbb{G}/\mathbb{H}$  – расслоение. Пространством расслоения является группа Ли  $\mathbb{G}$ , базой – факторгруппа  $\mathbb{G}/\mathbb{H}$  и типичным слоем – нормальная подгруппа  $\mathbb{H}$ . Дифференцируемая структура на факторпространстве  $\mathbb{G}/\mathbb{H}$  будет определена позже в теореме 9.1.1. Если размерность группы равна размерности нормальной подгруппы,  $\dim \mathbb{G} = \dim \mathbb{H}$ , то базой является конечный или счетный набор точек, т.е. 0-мерное многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ. В определении расслоения общего вида мы не предполагаем наличия каких либо структур в типичном слое, кроме структуры дифференцируемого многообразия. В дальнейшем мы рассмотрим частные случаи расслоенных пространств, когда типичным слоем является векторное пространство (векторное расслоение) или группа Ли (главное расслоение).

## 2.5. Скалярные поля и плотности

В моделях математической физики, как правило, постулируется, что пространство и пространство-время, в котором мы живем, являются многообразиями. Само по себе это очень глубокое предположение. Однако для построения физических моделей его недостаточно. Для описания движения и взаимодействия различных физических объектов в пространстве-времени необходимо задание дополнительных структур на многообразии. Такими структурами являются скалярные и векторные поля,  $r$ -формы, тензорные поля, метрика и связность, которые, в частности, характеризуются различными трансформационными свойствами при преобразовании координат. Начнем с простейшего объекта – скалярного поля (функции).

Рассмотрим вещественнозначную функцию  $f$  на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , т.е. отображение

$$f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Это отображение часто, особенно в физических приложениях, называют *скалярным полем* на  $\mathbb{M}$ . По определению, скалярное поле должно быть однозначным. Функция называется *дифференцируемой* класса  $\mathcal{C}^k$ , если отображение (2.4), заданное в координатах,

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i) \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

$k$  раз непрерывно дифференцируемо в каждой карте атласа  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$ . Конечно, не имеет смысла говорить о степени гладкости функции, которая превышает степень гладкости дифференцируемой структуры многообразия. Поэтому мы предполагаем, что степень гладкости функции меньше или равна степени гладкости многообразия.

В двух областях  $\mathbb{U}_i$  и  $\mathbb{U}_j$  скалярное поле задается, соответственно, двумя функциями  $f(x)$  и  $f'(x')$  от  $n$  переменных  $x = \{x^\alpha\}$  и  $x' = \{x^{\alpha'}\}$ ,  $\alpha, \alpha' = 1, \dots, n$ . Если области пересекаются, то в области пересечения справедливо равенство

$$f'(x'(x)) = f(x), \quad (2.5)$$

поскольку в каждой точке функция имеет только одно значение. Формулу (2.5) можно интерпретировать, как правило преобразования функции при замене координат  $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$ . Другими словами, значение функции после преобразования в точке  $x'$  равно ее прежнему значению в точке  $x$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем мы будем позволять себе некоторую вольность в обозначениях. Запись  $f(x)$  в зависимости от контекста будет пониматься двояко. Во-первых,  $f(x)$  обозначает значение функции  $f$  в произвольной точке многообразия  $x \in \mathbb{M}$  безотносительно какой либо карты. Это не есть функция  $n$  вещественных переменных. Во-вторых, запись  $f(x)$  обозначает также значение функции  $f \circ \varphi^{-1}$  в точке  $\{x^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$ . Это – обычная функция от  $n$  вещественных переменных (координат). Строго говоря, частная производная от функции на многообразии  $\partial_\alpha f$  не определена, так как мы не знаем, что такое разность двух точек  $x_1 - x_2$  на многообразии. Тем не менее мы будем употреблять запись  $\partial_\alpha f$ , принимая

$$\partial_\alpha f := \partial_\alpha(f \circ \varphi^{-1}).$$

Фактически это означает, что в каждой отдельно взятой карте мы отождествляем точки многообразия с точками евклидова пространства:  $x \sim \varphi(x) = \{x^\alpha\} \in \mathbb{R}^n$ , и функции:  $f \sim f \circ \varphi^{-1}$ . При проведении вычислений в одной карте это не приводит к какой либо путанице.

Множество всех функций класса  $\mathcal{C}^k$  на многообразии  $\mathbb{M}$  обозначим  $\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$ . Множество гладких (бесконечно дифференцируемых) функций обозначим  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ . Скалярное поле называется *тривиальным*, если оно равно нулю на  $\mathbb{M}$ .

На множестве функций  $\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$  определим две поточечные операции: сложение и умножение:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{M}.$$

То есть значения суммы и произведения двух функций в данной точке равно соответственно сумме и произведению значений этих функций в той же точке. Очевидно, что сумма и произведение двух функций снова дает функцию. По отношению к этим операциям функции образуют коммутативное кольцо. Кроме этого функции можно умножать на действительные числа. Умножение на числа вместе с операцией сложения превращает множество функций в векторное пространство над полем вещественных чисел. Если на множестве функций рассматривать все три операции (умножение на числа, сложение и умножение функций), то оно образует коммутативную ассоциативную алгебру с единицей над полем вещественных чисел, которую так же будем обозначать  $\mathcal{C}^k(\mathbb{M})$ . Эта алгебра является бесконечномерной.

Координаты точки евклидова пространства сами можно рассматривать, как набор функций. Для каждой карты  $(\mathbb{U}, \varphi)$  многообразия  $\mathbb{M}$  определен набор функций  $x^\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  от точки многообразия  $x \in \mathbb{U}$ ,

$$\varphi(x) = \{x^\alpha(x)\} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

которые называются *координатными функциями*. Эти функции свои для каждой карты. Во многих случаях координатные функции, определенные на  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , упрощают запись, позволяя опускать символ отображения  $\varphi(x)$ .

Определим новый геометрический объект – скалярную плотность  $h$ . С этой целью рассмотрим две пересекающиеся карты  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$ . При преобразовании координат можно умножить функцию  $h_i$ , заданную на карте  $\mathbb{U}_i$ , на якобиан преобразования в степени  $p$ :

$$h_j(x'(x)) := J_{ji}^p(x) h_i(x), \quad (2.7)$$

Пусть  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  – некоторый атлас на многообразии  $\mathbb{M}$ . В каждой карте  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$  зададим отображение

$$h_i : \mathbb{R}^n \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i) \ni x = \{x^\alpha\} \mapsto h_i(x) \in \mathbb{R}$$

таким образом, что в области пересечения карт  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$  выполнен закон преобразования (2.7) для всех  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ . Это определение корректно, так как в области пересечения трех карт  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k$  с координатами  $x = \{x^\alpha\}$ ,  $x' = \{x^{\alpha'}\}$  и  $x'' = \{x^{\alpha''}\}$  выполнено равенство

$$h_k(x''(x'(x))) = J_{kj}^p h_j(x'(x)) = J_{kj}^p J_{ji}^p h_i(x) = J_{ki}^p h_i(x),$$

где мы воспользовались равенством  $J_{kj} J_{ji} = J_{ki}$  для якобианов преобразования координат  $x \mapsto x'(x)$ ,  $x' \mapsto x''(x')$  и  $x \mapsto x''(x)$ .

Преобразования (2.7) образуют группу. Действительно, якобианы преобразований координат, по определению, отличны от нуля, якобиан двух последовательных преобразований равен произведению якобианов, а якобиан обратного преобразования равен  $J^{-1}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Геометрический объект  $h = \{h_i\}$ , заданный в некотором атласе  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  многообразия  $\mathbb{M}$  с правилом преобразования (2.7) в области пересечения любых двух карт называется *скалярной плотностью степени  $p$* , и мы будем писать  $\deg h = p$ .

Строго говоря, скалярная плотность не является функцией в смысле определения (2.4), и мы не можем писать  $h(x)$ , где  $x$  – точка многообразия. Имеет смысл лишь запись  $h(x^\alpha)$  для функции  $h \circ \varphi^{-1}$ , которая задана в координатном евклидовом пространстве. Несмотря на это, использование скалярных плотностей, например, при интегрировании, бывает удобным. Кроме того, производить вычисления с плотностями часто бывает проще, чем с тензорами, как, например, в общей теории относительности.

Забегая вперед, отметим, что поскольку определитель репера  $\det e_\alpha^a = \sqrt{|g|} \neq 0$  является скалярной плотностью веса  $-1$ , то произвольную скалярную плотность степени  $p$  можно представить в виде

$$h = \sqrt{|g|}^{-p} f,$$

где  $f = \sqrt{|g|}^p h$  – скалярное поле (функция).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Множество скалярных плотностей фиксированной степени алгебры не образует, так как произведение двух плотностей степеней  $p_1$  и  $p_2$  дает скалярную плотность степени  $p_1 + p_2$ .

## 2.6. Векторные поля и 1-формы

**2.6.1. Локальное определение.** Начнем с локального определения векторных полей и 1-форм, которое является более наглядным. Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ . Ограничим наше рассмотрение двумя пересекающимися картами  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$  и  $(\mathbb{U}_j, \varphi_j)$  с координатами  $x^\alpha$  и  $x^{\alpha'}$  соответственно. В области пересечения этих карт (или при преобразовании координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x)$ ) дифференциалы умножаются на матрицу Якоби, а частные производные – на ее обратную:

$$dx^{\alpha'} = dx^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \quad (2.8)$$

$$\partial_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \partial_\alpha. \quad (2.9)$$

Матрицы преобразования дифференциалов и частных производных являются взаимно обратными по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.10)$$

Векторные поля и 1-формы на многообразии определяются, исходя из правила преобразования дифференциалов и частных производных. А именно,  $n$  достаточно гладких функций  $X^\alpha(x)$ , заданных на карте  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$  и преобразующихся по правилу (2.8),

$$X^{\alpha'} := X^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}, \quad (2.11)$$

при преобразовании координат, называются *компонентами векторного* или *контравариантного векторного* поля. Аналогично,  $n$  достаточно гладких функций  $A_\alpha(x)$ , преобразующихся по правилу (2.9),

$$A_{\alpha'} := \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} A_\alpha. \quad (2.12)$$

называются *компонентами ковекторного*, или *ковариантного векторного* поля, или *1-формы*. 1-формы называются также *формами Пфаффа*. В общем случае (ко)векторное поле имеет  $n$  независимых компонент. Каждая из функций  $X^\alpha$  или  $A_\alpha$  является компонентой векторного или ковекторного поля относительно координатных базисов  $e_\alpha := \partial_\alpha$  и  $e^\alpha := dx^\alpha$ . Смысл обозначения координатных базисов частными производными и дифференциалами не случаен и будет ясен из дальнейшего.

Для того, чтобы задать компоненты (ко)векторного поля на всем многообразии, их необходимо задать в каждой карте некоторого атласа  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  таким образом, чтобы во всех областях пересечения карт  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$  они были связаны преобразованием (2.11). Это определение непротиворечиво. Действительно, если точка  $x$  лежит в пересечении трех карт  $(\mathbb{U}_i, \varphi_i)$ ,  $(\mathbb{U}_j, \varphi_j)$  и  $(\mathbb{U}_k, \varphi_k)$  с координатами  $x^\alpha$ ,  $x^{\alpha'}$  и  $x^{\alpha''}$  соответственно, то компоненты векторов преобразуются по правилу:

$$X^{\alpha''} = X^{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha''}}{\partial x^{\alpha'}} = X^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\alpha''}}{\partial x^{\alpha'}} = X^\alpha \frac{\partial x^{\alpha''}}{\partial x^\alpha}.$$

Данное равенство является следствием правила дифференцирования сложных функций и означает коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_i & \xrightarrow{\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i} & \mathbb{U}_j \\ & \searrow \varphi_k^{-1} \circ \varphi_i & \downarrow \varphi_k^{-1} \circ \varphi_j \\ & & \mathbb{U}_k \end{array}$$

для всех точек  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k$ .

Само векторное поле  $X$  на многообразии  $\mathbb{M}$  является инвариантным геометрическим объектом и не зависит от выбора системы координат. Выше мы определили *компоненты* векторного поля на многообразии  $\mathbb{M}$  путем их задания в некотором атласе. Далее мы должны показать, что таким образом определенный геометрический объект – векторное поле – не зависит от выбора атласа. Это также обеспечено

правилом преобразования (2.11). Таким образом, для задания векторного поля  $X$  на многообразии  $\mathbb{M}$  достаточно задать его компоненты в некотором атласе и указать правило преобразования (2.11) или (2.12). Аналогично дается глобальное определение ковекторного поля.

**ПРИМЕР 2.6.1.** Если векторное поле имеет нулевые компоненты в одной системе координат, то они равны нулю и во всех других системах. Нулевое векторное поле, компоненты которого равны нулю во всех картах, называется *тривиальным*. Это единственное векторное поле, компоненты которого инвариантны относительно преобразований координат. Аналогично определяется нулевая 1-форма.

**ПРИМЕР 2.6.2.** Дифференциалы  $dx^\alpha$ , рассматриваемые как функции от точки  $x \in \mathbb{U}$ , являются компонентами гладкого векторного поля. Это векторное поле определено в произвольной карте, а в областях пересечения карт справедливо равенство (2.8). Сами координатные функции  $x^\alpha(x)$ , хотя и имеют векторный индекс, векторного поля не образуют. Это – набор скалярных полей.

**ПРИМЕР 2.6.3.** Частные производные от произвольной функции  $f \circ \varphi$  на образе  $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^n$  являются компонентами ковариантного векторного поля  $\{\partial_\alpha f\}$ , которое называется градиентом функции. Это ковекторное поле определено в произвольной карте и имеет правильный закон преобразования (2.12).

**ПРИМЕР 2.6.4.** Примером векторного поля на кривой  $\gamma = \{x^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$  является вектор скорости. Действительно, при преобразовании координат компоненты вектора скорости  $\dot{x}^\alpha$  преобразуются, как дифференциалы. При этом вектор скорости рассматривается в точке кривой  $\gamma \in \mathbb{M}$ . В то же время сами координатные функции  $x^\alpha(t)$  определены на отрезке  $t \in [0, 1]$ , а не на многообразии и векторного поля не образуют. Векторное поле скорости называется также касательным векторным полем к кривой  $\gamma$ .

Преобразования векторных полей (2.11) и 1-форм (2.12) различны, поэтому контравариантные и ковариантные индексы необходимо различать и они всегда будут писаться, соответственно, сверху и снизу.

Преобразования векторов (2.11) и 1-форм (2.12) линейны и однородны, причем матрица  $\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$  в каждой точке многообразия невырождена и поэтому принадлежит группе невырожденных матриц  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ . То есть каждому преобразованию координат соответствует  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразование компонент векторного поля в касательном пространстве. Поскольку элементы группы  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  зависят от точки многообразия, то такие преобразования называются локальными. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Не каждому локальному  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразованию компонент векторного поля можно сопоставить некоторое преобразование координат. Это видно из подсчета параметров: локальное  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразование параметризуется  $n^2$  функциями по числу элементов  $n \times n$  матрицы, в то время как преобразования координат параметризуются  $n$  функциями.

Из закона преобразования частных производных (2.9) и дифференциалов (2.8) следует, что суммы

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^\alpha e_\alpha, \quad (2.13)$$

$$A = dx^\alpha A_\alpha = e^\alpha A_\alpha \quad (2.14)$$

инвариантны относительно преобразований координат. Эти формулы представляют собой разложения векторов и 1-форм по координатному базису, определенному далее в разделе 2.6.4.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Скажем несколько слов об обозначениях. Там, где это возможно, мы будем записывать индексы суммирования по правилу “с десяти до четырех” (имеется в виду циферблат часов), т.е. сначала будем писать верхний индекс, а затем – нижний. Это правило является следствием записи *оператора внешнего дифференцирования* в виде

$$d = dx^\alpha \partial_\alpha. \quad (2.15)$$

В обратном порядке запись  $d = \partial_\alpha dx^\alpha$  выглядит чрезвычайно неуклюже. В дифференциальной геометрии, когда все координаты являются вещественными числами, это правило не играет существенной роли, так как компоненты векторов и 1-форм можно менять местами. Однако, если часть координат антикоммутирует, то порядок индексов существенен, и необходимо придерживаться какого-либо фиксированного правила. Правило “с десяти до четырех” не является единственным, однако оно широко используется при построении моделей супергравитации в суперпространстве, где часть координат является антикоммутирующей.

Дифференцируемое векторное поле, заданное в какой нибудь одной карте  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , не всегда может быть продолжено до дифференцируемого векторного поля на всем многообразии.

ПРИМЕР 2.6.5. Рассмотрим сферу  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  единичного радиуса, вложенную в евклидово пространство (рис. 2.7):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим открытую верхнюю полусферу:

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}.$$

Зададим на  $\mathbb{U}$  систему координат, спроектировав точки полусферы на плоскость  $x, y$ :  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ .

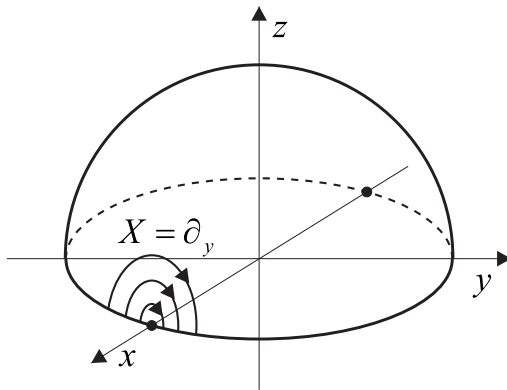


Рис. 2.7. Полусфера, вложенная в трехмерное евклидово пространство. Точки  $(1, 0, 0)$  и  $(-1, 0, 0)$  являются особыми для векторного поля  $X = \partial_y$ .

Таким образом мы построили карту  $(\mathbb{U}, \varphi)$ . Зададим в этой карте векторное поле  $X = \partial_y$ . В координатном базисе оно имеет компоненты  $(0, 1)$  и поэтому является гладким векторным полем на  $\mathbb{U}$ . Точки сферы  $(1, 0, 0)$  и  $(-1, 0, 0)$  являются предельными для  $\mathbb{U}$  и существенно особыми точками для векторного поля  $X$ , поскольку предел зависит от пути, по которому мы стремимся к данным точкам. Пока речь идет об открытом подмножестве  $\mathbb{U}$  проблем не возникает, так как указанные точки не принадлежат  $\mathbb{U}$ . Однако любое продолжение векторного поля на окрестность, содержащую любую из точек  $(1, 0, 0)$  и  $(-1, 0, 0)$  приведет к векторному полю с особенностью. В данном случае особенность означает не обращение компонент векторного поля в бесконечность, а то, что в указанных точках векторное поле не будет однозначно определено.

**2.6.2. Глобальное определение векторных и ковекторных полей.** Дадим глобальное определение векторных полей и 1-форм на многообразии  $\mathbb{M}$ , как это обычно делается в современных курсах дифференциальной геометрии. Рассмотрим дифференцируемую кривую  $\gamma_1 : [-1, 1] \ni t \rightarrow \mathbb{M}$ , проходящую через некоторую точку  $p \in \mathbb{M}$ . Пусть  $(\mathbb{U}, \varphi)$  – карта, содержащая точку  $p \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ . Тогда в координатах кривая задается набором функций:

$$\varphi \circ \gamma_1 = \{x_1^\alpha(t)\}, \quad p = \gamma_1(0).$$

Для определенности мы выбрали такую параметризацию кривой, что точке  $p$  соответствует значение  $t = 0$ . Рассмотрим другую дифференцируемую кривую  $\gamma_2$ , также проходящую через точку  $p$ ,

$$\varphi \circ \gamma_2 = \{x_2^\alpha(t)\}, \quad p = \gamma_2(0).$$

Мы говорим, что две кривые касаются друг друга в точке  $p$ , если векторы скорости кривых в этой точке совпадают:

$$\dot{x}_1^\alpha|_{t=0} = \dot{x}_2^\alpha|_{t=0}, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Поскольку векторы скорости при преобразованиях координат преобразуются одинаково, то данное определение не зависит от карты, покрывающей точку  $p \in \mathbb{M}$ . Касание кривых в точке  $p$  является отношением эквивалентности в классе всех кривых, проходящих через эту точку. Обозначим класс эквивалентности кривых, проходящих через точку  $p$ , который соответствует некоторому представителю  $\gamma_p$ , квадратными скобками  $[\gamma_p]$ . Каждый класс эквивалентности в координатах взаимно однозначно характеризуется набором чисел  $\{\dot{x}^\alpha(0)\}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Касательным вектором*  $X_{(\gamma)}(p)$  к многообразию  $\mathbb{M}$  в точке  $p \in \mathbb{M}$  называется класс эквивалентности кривых  $[\gamma_p]$ , проходящих через эту точку. Множество всех касательных векторов в точке  $p$  называется *касательным пространством* к многообразию в точке  $p$  и обозначается  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ . Объединение всех касательных пространств

$$\mathbb{T}(\mathbb{M}) := \bigcup_{p \in \mathbb{M}} \mathbb{T}_p(\mathbb{M}). \quad (2.16)$$

называется *касательным расслоением* с базой  $\mathbb{M}$  и естественной проекцией  $\pi : \mathbb{T}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{M}$ , которая задана отображением  $(p, [\gamma_p]) \mapsto p$ . Слоем касательного расслоения в точке  $p$  является касательное пространство  $\pi^{-1}(p) = \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ . *Векторным полем* на многообразии  $\mathbb{M}$  называется сечение касательного расслоения  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ .

То, что каждый слой является многообразием и диффеоморфен  $n$ -мерному векторному пространству, мы покажем чуть ниже.

Пусть  $f$  – функция на многообразии  $\mathbb{M}$ . Тогда каждому вектору  $X_{(\gamma)}$  в точке  $p$  мы ставим в соответствие производную функции вдоль вектора

$$X_{(\gamma)}f|_p := \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} = X^\alpha(p) \partial_\alpha (f \circ \varphi^{-1})|_{t=0}, \quad (2.17)$$

где  $X^\alpha(p) := \dot{x}^\alpha(0)$  – компоненты вектора  $X(p)$  в точке  $p$  в некоторой карте. Поскольку векторы скорости для всех кривых из одного класса эквивалентности совпадают, то вектор  $X(p)$  в точке  $p$  взаимно однозначно характеризуется своими компонентами  $\{X^\alpha(p)\}$ . Отсюда следует, что векторное поле в произвольной карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  взаимно однозначно задается своими компонентами  $X(x) = \{X^\alpha(x)\}$ ,  $x \in \mathbb{U}$ . При этом компоненты векторного поля при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по правилу (2.11), что является следствием правила дифференцирования сложных функций. Таким образом, локальное определение векторного поля, данное ранее, вытекает из глобального определения настоящего раздела.

В каждой точке многообразия  $p \in \mathbb{M}$  множество векторов  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  обладает естественной структурой векторного пространства.

ТЕОРЕМА 2.6.1. *Касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  имеет естественную структуру вещественного векторного пространства той же размерности, что и само многообразие,  $\dim \mathbb{T}_p(\mathbb{M}) = \dim \mathbb{M} = n$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два вектора  $X_1 = [\gamma_1] \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  и  $X_2 = [\gamma_2] \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  в произвольной точке  $p \in \mathbb{M}$ . Пусть  $(\mathbb{U}, \varphi)$  – координатная окрестность точки  $p$ . Пусть  $\gamma_1 \in [\gamma_1]$  и  $\gamma_2 \in [\gamma_2]$  – две произвольные кривые из классов эквивалентности  $[\gamma_1]$  и  $[\gamma_2]$ . Тогда в евклидовом пространстве определены две кривые  $\varphi \circ \gamma_1$  и  $\varphi \circ \gamma_2$ , которые задаются набором функций  $\varphi \circ \gamma_1 = \{x_1^\alpha(t)\}$  и  $\varphi \circ \gamma_2 = \{x_2^\alpha(t)\}$ . Поскольку координаты являются вещественными числами, то их можно складывать и умножать. Определим сумму двух векторов и умножение на число  $a \in \mathbb{R}$  как следующие классы эквивалентности

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &:= [\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \gamma_1 + \varphi \circ \gamma_2)], \\ aX &:= [\varphi^{-1} \circ (a\varphi \circ \gamma)]. \end{aligned}$$

Касательные векторы к кривым  $\varphi \circ \gamma_1 + \varphi \circ \gamma_2$  и  $a\varphi \circ \gamma$  в точке  $p$  имеют, соответственно, компоненты:  $\{\dot{x}_1^\alpha(0) + \dot{x}_2^\alpha(0)\}$  и  $\{a\dot{x}^\alpha(0)\}$ . Это определение суммы векторов и умножения на числа не зависит от выбора карты  $(\mathbb{U}, \varphi)$  и представителя  $\gamma \in [\gamma]$ . Тем самым касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  снабжается структурой векторного пространства. Поскольку каждый вектор  $X(p)$  в карте взаимно однозначно задается набором  $n$  чисел  $\{X^\alpha(p)\}$ , то размерность касательного пространства совпадает с размерностью самого многообразия,  $\dim \mathbb{T}_p(\mathbb{M}) = \dim \mathbb{M} = n$ .

Таким образом, мы установили, что касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  в каждой точке многообразия имеет естественную структуру векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ . Определим в этом векторном пространстве евклидову топологию, которая является единственной топологией, согласованной с линейной структурой (см., например, [10], следствие 1 утверждения 4.7). Тем самым касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  так же является многообразием. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  снабжено естественной структурой векторного пространства  $\mathbb{R}^n$  и евклидовой топологией.



Типичным слоем касательного расслоения  $\mathbb{T}(\mathbb{M}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$  является евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , на котором введена структура векторного пространства. Это частный случай векторных расслоений, рассмотренных далее в разделе 5.1.

Касательное расслоение является многообразием размерности  $2n$ . При этом, если на базе  $\mathbb{M}$  задана дифференцируемая структура класса  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ , то касательное расслоение  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$  является дифференцируемым многообразием класса  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Понижение класса дифференцируемости связано с тем, что, если функции преобразования координат принадлежат классу  $\mathcal{C}^k$ , то матрица Якоби преобразования координат, которая действует в касательном пространстве, принадлежит классу  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Пусть  $\mathbb{M}$  – гладкое многообразие. Векторное поле  $X(x)$  называется гладким, если в любой карте атласа  $\{\mathbb{U}_i, \varphi_i\}$  компоненты  $X^\alpha(x)$ , задающие векторное поле, являются гладкими функциями. Множество всех гладких векторных полей на многообразии  $\mathbb{M}$  обозначим  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Это множество, так же как и множество всех векторов в фиксированной точке  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ , обладает структурой вещественного линейного пространства с поточечным определением сложения и умножения на числа. Более того, вместо умножения на числа можно рассматривать умножение на гладкие функции  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ . Легко проверить, что, если  $X(x)$  – векторное поле, то  $fX(x)$  также является векторным полем. Таким образом, множество векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  является модулем над алгеброй гладких функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ . Как линейное пространство множество векторных полей является бесконечномерным.

Теперь нетрудно дать глобальное определение ковариантных векторных полей.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество линейных функционалов на касательном пространстве  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  в точке  $p \in \mathbb{M}$  называется *кокасательным векторным пространством* и обозначается  $\mathbb{T}_p^*(\mathbb{M})$ . Объединение всех кокасательных пространств

$$\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) = \bigcup_{p \in \mathbb{M}} \mathbb{T}_p^*(\mathbb{M}). \quad (2.18)$$

называется *кокасательным расслоением* с базой  $\mathbb{M}$  и естественной проекцией  $\pi : \mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{M}$ . Слой кокасательного расслоения в точке  $p$  является кокасательное пространство  $\pi^{-1}(p) = \mathbb{T}_p^*(\mathbb{M})$ . *Кокасательным векторным полем* или *1-формой* на многообразии  $\mathbb{M}$  называется сечение кокасательного расслоения  $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$  или линейное отображение множества векторных полей

$$A : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X \mapsto A(X) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}).$$

В координатах ковекторное поле задается набором  $n$  функций  $A_\alpha(x)$ , которые при преобразовании координат преобразуются по правилу (2.12). Тогда линейное отображение задается простым суммированием компонент:

$$A(X) = X^\alpha A_\alpha.$$

Кокасательное векторное поле  $A(x)$  называется гладким, если его компоненты  $\{A_\alpha(x)\}$  являются гладкими функциями во всех картах. Кокасательное пространство  $\mathbb{T}_p^*(\mathbb{M})$  в точке  $p \in \mathbb{M}$  снабжается естественной структурой векторного пространства  $\mathbb{R}^n$  и евклидовой топологией. Множество всех кокасательных векторных полей, которое обозначим  $\Lambda_1(\mathbb{M})$ , так же как и множество векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ , образует модуль над алгеброй гладких функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ .

В дальнейшем нам понадобится

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.1.** *Касательное пространство к прямому произведению двух многообразий  $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$  в точке  $(p, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{N}$  естественно изоморфно прямой сумме касательных пространств:*

$$\mathbb{T}_{(p,q)}(\mathbb{M} \times \mathbb{N}) \ni X \simeq (\pi_{1*}(X), \pi_{2*}(X)) \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M}) \oplus \mathbb{T}_q(\mathbb{N}),$$

где введены проекции на первый и второй сомножитель

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad \mathbb{M} \times \mathbb{N} \ni (p, q) &\mapsto p \in \mathbb{M}, \\ \pi_2 : \quad \mathbb{M} \times \mathbb{N} \ni (p, q) &\mapsto q \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

и  $\pi_{1*}, \pi_{2*}$  – дифференциалы соответствующих отображений (см. следующий раздел).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно спроектировать кривую в прямом произведении  $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$  на каждый из сомножителей.

**2.6.3. Кокасательные векторные поля и ростки.** Дадим также независимое определение кокасательного пространства 1-форм  $\mathbb{T}_p^*(\mathbb{M})$  в точке  $p \in \mathbb{M}$ , без обращения к понятию дуального пространства как это было сделано в предыдущем разделе. Рассмотрим алгебру гладких функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ . Зафиксируем точку  $p \in \mathbb{M}$ . Будем считать две функции  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$  эквивалентными,  $f \sim g$ , если существует окрестность  $\mathbb{U} \ni x$  такая, что  $f|_{\mathbb{U}} = g|_{\mathbb{U}}$ . Очевидно, что отношение  $\sim$  является отношением эквивалентности в алгебре функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ . Класс эквивалентности функции  $f$  обозначается  $[f_p]$  и называется  $\mathcal{C}^\infty$  *ростком* в точке  $p \in \mathbb{M}$ . Обозначим множество всех ростков в точке  $p$  через

$$\mathcal{C}_p = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}) / \sim = \{[f_p] : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})\}. \quad (2.19)$$

Это множество естественным образом снабжается структурой векторного пространства, которая переносится из алгебры функций,

$$[f_p] + [g_p] := [f_p + g_p], \quad a[f_p] := [af_p], \quad a \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, множество  $\mathcal{C}^\infty$  ростков  $\mathcal{C}_p$  в точке  $p \in \mathbb{M}$  превращается в бесконечномерное вещественное векторное пространство.

Обозначим множество гладких кривых  $\gamma$ , которые задаются набором функций  $\{x^\alpha(t)\}$ , проходящих через точку  $\gamma(0) = p$ , символом  $\Gamma_p$ . Тогда производная функции вдоль кривой в точке  $p$  равна (2.17). Выражение  $\partial_\alpha(f \circ \varphi^{-1})$  в правой части равенства зависит только от ростка  $[f] \in \mathcal{C}_p$ , но не от представителя  $f \in [f_p]$ . Поэтому будем писать

$$X_{(\gamma)}[f_p] : \mathcal{C}_p \rightarrow \mathbb{R}.$$

Это отображение линейно по росткам:

$$X_{(\gamma)}([f_p] + [g_p]) = X_{(\gamma)}[f_p] + X_{(\gamma)}[g_p], \quad X_{(\gamma)}(a[f_p]) = aX_{(\gamma)}[f_p], \quad a \in \mathbb{R}.$$

Введем обозначение для тех ростков, производные которых вдоль всех кривых  $\gamma \in \Gamma_p$ , проходящих через точку  $p$ , равны нулю

$$\mathcal{H}_p = \{[f_p] \in \mathcal{C}_p : X_{(\gamma)}[f_p] = 0\}.$$

Множество  $\mathcal{H}_p$  является линейным подпространством в  $\mathcal{C}_p$ . В координатах принадлежность  $[f_p] \in \mathcal{H}_p$  задается равенством  $\partial_\alpha(f \circ \varphi^{-1}) = 0$ . То есть подпространство  $\mathcal{H}_p$  состоит в точности из тех ростков, у которых все частные производные равны нулю.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Кокасательным пространством* в точке  $p \in \mathbb{M}$  называется фактор пространство  $\mathbb{T}_p^*(\mathbb{M}) = \mathcal{C}_p / \mathcal{H}_p$ .

Из данного определения следует, что кокасательное пространство состоит из тех ростков  $[f_p]$ , для которых хотя бы одна частная производная была отлична от нуля. Поскольку две функции принадлежат одному ростку  $f \sim g$  тогда и только тогда, когда совпадают все их частные производные, то каждый росток взаимно однозначно определяется градиентом функции. Это доказывает эквивалентность независимого определения кокасательного пространства определению, данному ранее, так как градиент функции есть 1-форма в смысле прежнего определения. В основе данного определения, так же, как и в определении вектора, лежит понятие кривой на многообразии и вектора скорости.

В дальнейшем, в целях упрощения обозначений, мы почти всегда будем писать

$$\partial_\alpha f := \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^\alpha},$$

несмотря на то, что функция  $f(x)$  определена на точках многообразия  $x \in \mathbb{M}$ , а не в евклидовом пространстве. Это является общепринятой записью и не приводит к путанице. В тех местах, где нужно подчеркнуть различие точки многообразия и точки евклидова пространства, мы будем использовать полную запись.

**2.6.4. Векторные поля и дифференцирования.** Дадим второе, теперь уже алгебраическое, глобальное определение векторных полей на многообразии  $\mathbb{M}$ . Зафиксируем произвольную точку  $p \in \mathbb{M}$  и рассмотрим некоторую координатную окрестность этой точки  $(\mathbb{U}, \varphi)$ . С каждым векторным полем

$X \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$  естественным образом связывается оператор дифференцирования (2.13) в алгебре гладких функций  $C^\infty(\mathbb{U})$ . Его действие на функцию в произвольной карте

$$C^\infty(\mathbb{U}) \ni f \mapsto Xf := X^\alpha \partial_\alpha f \in C^\infty(\mathbb{U}) \quad (2.20)$$

представляет собой *дифференцирование вдоль векторного поля*. Это дифференцирование не зависит от выбора карты, так как запись (2.20) инвариантна относительно преобразований координат, и удовлетворяет свойствам:

- 1)  $X(af + bg) = aXf + bXg$  – линейность,
- 2)  $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$  – правило Лейбница,

для всех  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $f, g \in C^\infty(\mathbb{U})$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Непрерывное линейное отображение алгебры функций  $C^\infty(\mathbb{U})$  в  $\mathbb{R}$ :

$$X_p : C^\infty(\mathbb{U}) \ni f \mapsto X_p f \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющее правилу Лейбница 2), называется *дифференцированием* в точке  $p \in \mathbb{M}$ . Множество всех дифференцирований в данной точке обозначим  $\mathbb{D}_p(\mathbb{M})$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Каждое векторное поле на  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  отображает алгебру функций  $C^\infty(\mathbb{U})$  в себя. Обратим внимание, что в определении дифференцирования в точке  $p$  стоит отображение не в алгебру функций  $C^\infty(\mathbb{U})$ , а в вещественную прямую  $\mathbb{R}$ . Ясно, что если два векторных поля касаются друг друга в точке  $p$ , то они порождают одно и то же дифференцирование.

Множество дифференцирований  $\mathbb{D}_p(\mathbb{M})$  снабжается естественной структурой вещественного векторного пространства:

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2)f &:= X_1f + X_2f, \\ (aX)f &:= a(Xf), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $X_1, X_2, X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и  $a \in \mathbb{R}$ .

**ТЕОРЕМА 2.6.2.** *Касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  и пространство дифференцирований  $\mathbb{D}_p(\mathbb{M})$  изоморфны как векторные пространства.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** То, что каждому вектору  $X \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  однозначно ставится в соответствие дифференцирование было показано выше. Нетрудно проверить, что это отображение сохраняет линейную структуру.

Докажем обратное утверждение. С этой целью рассмотрим важный пример отображений  $C^\infty(\mathbb{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p f(p) := \partial_\alpha (f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (2.22)$$

Эти отображения линейны, удовлетворяют правилу Лейбница и, следовательно, являются дифференцированиями. Подчеркнем, что символ  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p$  не является частной производной, так как определен в точке многообразия  $p \in \mathbb{M}$ , а не евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . В правой же части равенства (2.22) стоит частная производная от функции, определенной в евклидовом пространстве. Теперь докажем два утверждения.

**ЛЕММА 2.6.1.** *Пусть  $X$  – дифференцирование в  $C^\infty(\mathbb{U})$  и  $f_c(x) = c = \text{const}$  – постоянная функция на  $\mathbb{M}$ . Тогда  $Xc = 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим постоянную функцию на  $\mathbb{M}$  в виде  $f_c = cf_1 = cf_1 \cdot f_1$ , где  $f_1(x) \equiv 1$  – функция, равная единице на всем многообразии  $\mathbb{M}$ . Используем линейность дифференцирования и правило Лейбница,

$$Xc = cX(1 \cdot 1) = cX(1) + cX(1) = 2cX(1) = 2Xc,$$

что возможно только при  $Xc = 0$ . Это – нетривиальное использование, казалось бы, тривиального тождества:  $1 \cdot 1 = 1$ .

ЛЕММА 2.6.2. Для любой гладкой функции  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$  существует такой набор функций  $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{U})$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , что для любой точки  $x$  в некоторой окрестности точки  $p \in \mathbb{U}$  выполнены равенства:

$$f_\alpha(p) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p f(p), \quad (2.23)$$

$$f(x) = f(p) + x^\alpha(x) f_\alpha(x), \quad (2.24)$$

где  $\{x^\alpha(x)\} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  – координатные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что образ точки  $p \in \mathbb{U}$  совпадает с началом координат евклидова пространства,  $\varphi(p) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Пусть  $F(x^1, \dots, x^n) = f \circ \varphi^{-1}$  – координатное представление функции  $f$  в некоторой окрестности точки  $p$ . Тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} F(x^1, \dots, x^n) &= F(x^1, \dots, x^n) - F(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \\ &\quad + F(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) - F(x^1, \dots, x^{n-2}, 0, 0) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + F(x^1, 0, \dots, 0) - F(0, \dots, 0) \\ &\quad + F(0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Это тождество перепишем в виде

$$\begin{aligned} F(x^1, \dots, x^n) &= F(0, \dots, 0) + \sum_{\alpha=1}^n F(x^1, \dots, tx^\alpha, 0, \dots, 0) \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= F(0, \dots, 0) + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^1 dt \frac{\partial F}{\partial (tx^\alpha)}(x^1, \dots, x^{\alpha-1}, tx^\alpha, 0, \dots, 0) x^\alpha \\ &= F(0, \dots, 0) + x^\alpha F_\alpha(x^1, \dots, x^n), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$F_\alpha(x^1, \dots, x^n) := \int_0^1 dt \frac{\partial F}{\partial (tx^\alpha)}(x^1, \dots, x^{\alpha-1}, tx^\alpha, 0, \dots, 0)$$

– набор гладких функций в некоторой окрестности начала координат евклидова пространства. Теперь вернемся на многообразие и определим набор функций  $f_\alpha := F_\alpha \circ \varphi$ . Тогда из последнего равенства (2.25) следует равенство (2.24).

Теперь надо определить вид функций  $f_\alpha(x)$ . С этой целью применим дифференцирование  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x$  к равенству (2.24)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x f(p) + \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x x^\beta(x) f_\beta(x) + x^\beta(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x f_\beta(x).$$

Первое слагаемое равно нулю, как следствие леммы 2.6.1. Поскольку  $\left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x x^\beta(x) = \delta_\alpha^\beta$ , то в точке  $p$  имеем равенство (2.23), так как  $x^\alpha(p) = 0$ .

СЛЕДСТВИЕ. Если  $X_p \in \mathbb{D}_p(\mathbb{U})$  – дифференцирование в точке  $p \in \mathbb{M}$ , то

$$X_p = X_p x^\alpha(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p = X_p^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_p. \quad (2.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $(\mathbb{U}, \varphi)$  – произвольная карта в окрестности точки  $p \in \mathbb{M}$ . Тогда, возможно,  $x^\alpha(p) \neq 0$ . В этом случае сдвинем начало координат в евклидовом пространстве:  $y^\alpha := x^\alpha - x^\alpha(p)$ . Тогда из леммы 2.6.2 следует представление

$$f(x) = f(p) + (x^\alpha(x) - x^\alpha(p)) f_\alpha(x).$$

Применяя дифференцирование  $X$  к этому равенству и переходя в точку  $p$ , получим равенство (2.26).

Таким образом, множество всех дифференцирований  $\mathbb{D}_p(\mathbb{U})$  в произвольной точке  $p \in \mathbb{M}$  представляет собой конечномерное векторное пространство,  $\dim \mathbb{D}_p(\mathbb{U}) = n$ , с базисом  $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_p$ . Это пространство изоморфно касательному пространству  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M})$ , и теорема доказана.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Координатным базисом векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{U})$  на карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  многообразия  $\mathbb{M}$  называется набор гладких векторных полей

$$\left\{ e_\alpha(x) := \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_x \right\} \in \mathcal{X}(\mathbb{U}), \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

определенных формулой (2.22). Дуальный базис  $\{e^\alpha(x)\} \in \Lambda_1(\mathbb{U})$ ,  $e^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$ , называется координатным базисом ковекторных полей (1-форм). Координатный базис для ковекторных полей обозначается  $dx_p^\alpha$  или просто  $dx^\alpha$ . Координатные базисы называют также голономными.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Подчеркнем, что координатный базис – это не набор частных производных, а векторные поля на многообразии. Их действие, как дифференцирований, определено только для достаточно гладких функций  $C^k(\mathbb{U})$ . Действие векторных полей  $e_\alpha(x)$  на тензоры более высокого ранга не определено.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обозначение координатных базисов векторных и ковекторных полей через  $\partial_\alpha$  и  $dx^\alpha$  оправдано простой формулой из математического анализа

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Для тривиальных многообразий  $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^n$ , покрытых одной картой, векторы  $e_\alpha$  можно отождествить с операторами частных производных  $\partial_\alpha$ , которые действуют на дифференцируемые функции. Тогда дуальный базис  $e^\alpha$  ковекторных полей естественным образом отождествляется с дифференциалами координатных функций  $dx^\alpha$ .

Из разложения по базису (2.26) следует, что компонента векторного поля  $X$  в точке  $p \in \mathbb{M}$  – это результат действия векторного поля на координатную функцию  $X^\alpha(p) = Xx^\alpha(x)|_{x=p}$ .

В дальнейшем мы будем писать сокращенно  $X = X^\alpha(x)\partial_\alpha$ , имея в виду, что на функции  $f \circ \varphi^{-1}$  в евклидовом пространстве координатный базис действительно действует, как частная производная. Для 1-форм в координатном базисе мы часто будем использовать общепринятую запись  $A = dx^\alpha A_\alpha$ ,  $e^\alpha := dx^\alpha$ .

Пусть  $D_x(\mathbb{U}) \in \mathbb{D}_x(\mathbb{M})$  – некоторое дифференцирование в точке  $x \in \mathbb{M}$ . Рассмотрим объединение  $D(\mathbb{M}) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} D_x(\mathbb{U})$  по всем точкам многообразия, которое соответствует некоторому векторному полю  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Оно задает отображение

$$D(\mathbb{M}) : C^\infty(\mathbb{M}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{M}), \quad (2.27)$$

которое называется дифференцированием в алгебре функций  $C^\infty(\mathbb{M})$ , т.е. непрерывный линейный эндоморфизм в  $C^\infty(\mathbb{M})$ , удовлетворяющий правилу Лейбница. Поэтому каждому векторному полю  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  ставится в соответствие некоторое дифференцирование  $D(\mathbb{M}) \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ , где  $\mathcal{D}(\mathbb{M})$  – множество всех дифференцирований в алгебре функций. Верно также и обратное утверждение: любому дифференцированию в алгебре функций  $C^\infty(\mathbb{M})$  соответствует единственное векторное поле. Мы доказали аналогичное утверждение в фиксированной точке многообразия, где пространство  $\mathbb{D}_x(\mathbb{U})$  является конечномерным. Доказательство в рассматриваемом бесконечномерном случае сложнее и приведено в [11], предложение 2.3.5. Линейная структура на  $\mathcal{D}(\mathbb{M})$  вводится так же, как и в точке (2.21). Таким образом, множество векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  биективно отображается на множество дифференцирований  $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ , при этом как векторные пространства эти множества изоморфны. Эта биекция позволяет дать эквивалентное определение векторного поля.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Векторным полем  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется дифференцирование в алгебре функций  $C^\infty(\mathbb{M})$ .

**2.6.5. Векторные поля и интегральные кривые.** Начнем с локального описания. Пусть  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , – локальные координаты в окрестности точки  $x \in \mathbb{U}_x \subset \mathbb{M}$ . Рассмотрим векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ , все компоненты которого отличны от нуля в окрестности  $\mathbb{U}_x$ . Бесконечно малые перемещения  $dx^\alpha$  точки  $x$  вдоль этого векторного поля должны быть пропорциональны компонентам  $X^\alpha$  и поэтому удовлетворять системе уравнений

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \dots = \frac{dx^n}{X^n}. \quad (2.28)$$

Эту систему уравнений можно переписать в виде равенства нулю 1-форм:

$$A^M := \frac{dx^M}{X^M} - \frac{dx^1}{X^1} = 0, \quad M = 2, \dots, n.$$

В каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  векторное поле  $X$  задает одномерное подпространство в касательном пространстве  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ , а совокупность 1-форм  $\{A^M\}$  –  $(n - 1)$ -мерное ортогональное дополнение в сопряженном пространстве  $\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$ , поскольку  $A^M(X) = 0$ .

Согласно теории дифференциальных уравнений, уравнения (2.28) допускают  $n - 1$  функционально независимых решений

$$\varphi^M(x^\alpha) = c^M = \text{const}, \quad M = 2, \dots, n, \quad (2.29)$$

для которых  $A^M = d\varphi^M = 0$ . При этом прямоугольная  $n \times (n - 1)$  матрица, составленная из производных  $\partial_\alpha \varphi^M$ , имеет ранг  $n - 1$ , и каждая из функций  $\varphi^M$  является решением уравнения в частных производных

$$X^\alpha \partial_\alpha \varphi^M = 0. \quad (2.30)$$

Совершим преобразование координат  $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$ , выбрав в качестве последних  $n - 1$  координат функции (2.29)  $(y^2, \dots, y^n) := (\varphi^2, \dots, \varphi^n)$ , а координату  $x^1$  оставим без изменения. Якобиан этого преобразования отличен от нуля в силу функциональной независимости функций  $\varphi^M$ . Тогда из закона преобразования векторного поля (2.11) и уравнения (2.30) следует, что в новой системе координат все компоненты векторного поля, кроме первой, равны нулю:

$$X^1 \neq 0, \quad X^2 = \dots = X^n = 0.$$

Заменим теперь координату  $x^1$  на функцию  $y^1(x)$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy^1}{dx^1} X^1 = 1.$$

Это уравнение локально разрешимо, и, значит, в новой системе координат  $X^1 = 1$ .

Если у векторного поля  $X^\alpha$  часть компонент равнялась нулю до преобразования координат, то все, сказанное выше, можно повторить для ненулевых компонент. Отсюда следует частный случай теоремы Фробениуса, которая будет сформулирована в разделе 2.11.

**ТЕОРЕМА 2.6.3.** *Для произвольного отличного от нуля векторного поля  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  в некоторой окрестности  $\mathbb{U}_x$  произвольной точки  $x \in \mathbb{M}$  существует такая система координат, в которой все компоненты  $X$ , кроме одной (например, первой) обращаются в нуль. Координатную функцию  $x^1(x)$ ,  $x \in \mathbb{U}_x$  можно подобрать таким образом, чтобы первая компонента векторного поля  $X^1$  была равна единице в этой окрестности, т.е.  $X = \partial_1$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Эта теорема показывает, что векторное поле в окрестности точки, в которой оно отлично от нуля, устроено довольно просто. Если в некоторой точке векторное поле обращается в нуль, то в окрестности этой точки оно может быть устроено очень сложно [28]. Нули гладкого касательного поля к многообразию связаны с топологическими свойствами. Например, на четномерной сфере не существует векторного поля, нигде не обращающегося в нуль (см. теорему 10.2.1). В то же время такое поле всегда можно задать на торе.

Если в уравнения (2.29) подставить координаты некоторой фиксированной точки  $p = \{x_p^\alpha\} \in \mathbb{M}$ , то определяются значения постоянных  $c^M$ . При этих значениях постоянных система  $n - 1$  трансцендентных уравнений относительно  $x^\alpha$  (2.29) определяет кривую, проходящую через точку  $p$ . Если кривая  $\gamma$

параметризуется параметром  $t$ ,  $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$ , то уравнения (2.28) эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha(x), \quad (2.31)$$

с начальными условиями

$$x^\alpha|_{t=t_p} = x_p^\alpha, \quad (2.32)$$

где  $t_p$  – значение параметра вдоль кривой, при котором она проходит через точку  $p$ .

Из теории дифференциальных уравнений хорошо известна

**ТЕОРЕМА 2.6.4.** *Если векторное поле  $X$  на многообразии  $\mathbb{M}$  дифференцируемо, то через каждую точку  $p \in \mathbb{M}$  проходит одна и только одна интегральная кривая этого векторного поля.*

На языке теории дифференциальных уравнений это утверждение означает, что решение задачи Коши (2.31), (2.32) существует и единственно.

Общее решение системы уравнений (2.31) зависит от  $n$  постоянных интегрирования. Одна из постоянных соответствует сдвигу параметра вдоль кривой  $t \mapsto t + \text{const}$ , а оставшиеся  $n - 1$  постоянных определяются положением точки  $p$  на гиперповерхности (2.29), проходящей через точку  $p$ .

Если решение системы уравнений (2.31) представимо в виде ряда, то вблизи точки  $p$  оно выглядит очень просто

$$x^\alpha(t) = x_p^\alpha + X_p^\alpha(t - t_p) + \dots, \quad (t - t_p) \ll 1.$$

То есть компоненты векторного поля определяют главную линейную часть интегральной кривой.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Интегральные кривые векторного поля являются ни чем иным, как *характеристиками* (линиями уровня) для решений дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (2.30).

Условие дифференцируемости векторного поля в теореме 2.6.4 можно ослабить.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функция (отображение)

$$f: \quad \mathbb{R}^n \supset \mathbb{U} \ni \quad x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$$

удовлетворяет *условию Липшица* в области  $\mathbb{U}$ , если существует такая положительная постоянная  $C$ , что выполнено неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C|x_2 - x_1|,$$

для всех  $x_{1,2} \in \mathbb{U}$ .

В условии Липшица знак модуля обозначает обычный модуль вектора в евклидовом пространстве. Ясно, что из условия Липшица следует непрерывность функции  $f(x)$ .

**ТЕОРЕМА 2.6.5.** *Пусть правая часть системы уравнений (2.31) удовлетворяет условию Липшица в области  $\mathbb{U}$ . Тогда через каждую точку  $\mathbb{U}$  проходит одна и только одна интегральная кривая системы уравнений (2.31).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [29], § 31.

Если правая часть системы уравнений (2.31) только непрерывна, то и тогда через каждую точку  $p \in \mathbb{U}$  проходит хотя бы одна интегральная кривая. Однако единственность может быть нарушена.

**ПРИМЕР 2.6.6.** Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{2}{3} \dot{x} = x^{1/3}.$$

Его решения имеют вид

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = \pm(x + c)^{3/2}.$$

Отсюда следует, что через каждую точку  $x \neq 0$  проходят две интегральные кривые. Через точку  $x = 0$  проходит даже три интегральные кривые:  $x = 0$ ,  $x = \pm t^{3/2}$ . Если положить в условии Липшица  $x_1 = 0$ , то оно примет вид

$$|x_2|^{1/3} \leq C|x_2|.$$

Ясно, что такой постоянной  $C$  не существует, так как правая часть неравенства при  $x_2 \rightarrow 0$  стремится к нулю быстрее.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что векторное поле по крайней мере дифференцируемо.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.2.** *Если дифференцируемое векторное поле  $X$  обращается в нуль в некоторой точке многообразия  $p \in \mathbb{M}$ , то эта точка является неподвижной относительно потока векторного поля, т.е.  $x(t) = p$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Обратно. Если точка  $p \in \mathbb{M}$  является неподвижной на интегральной кривой некоторого векторного поля, то в этой точке векторное поле обращается в нуль,  $X(p) = 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Постоянные функции  $x^\alpha(t) = x_p^\alpha$  удовлетворяют системе уравнений (2.31), если  $X_p^\alpha = 0$ . Обратное утверждение очевидно.

Если векторное поле умножить на произвольную достаточно гладкую отличную от нуля функцию:  $X \mapsto fX$ , то уравнение для интегральной кривой  $x(\tau)$  примет вид

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = fX^\alpha.$$

Введем новый параметр  $t(\tau)$  вдоль кривой, который является решением уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = f.$$

Решение этого уравнения существует и является монотонным, так как  $f \neq 0$ . В новой параметризации уравнение для интегральной кривой принимает прежний вид (2.31). Таким образом, два векторных поля  $X$  и  $fX$ , отличающиеся умножением на отличную от нуля функцию, имеют интегральные кривые, которые совпадают, как подмножества в  $\mathbb{M}$ . Отличие сводится только к различным параметризациям кривых.

Перейдем к глобальному описанию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Интегральной кривой* векторного поля  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ , проходящей через точку  $p \in \mathbb{M}$  называется кривая  $\gamma : (a, b) \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{M}$  такая, что  $\gamma(t_p) = p$  и

$$\gamma_* \partial_t = X(x(t)), \quad (2.33)$$

где  $\gamma_*$  – дифференциал отображения некоторого открытого интервала  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , содержащего точку  $t_p$ , и  $\partial_t$  – касательный вектор к интервалу в точке  $t \in (a, b)$ . Вектор  $X(x(t))$  называется *касательным вектором* к кривой  $\gamma$  в точке  $x(t)$  (вектором скорости).

Нетрудно проверить, что в каждой карте уравнение (2.33) записывается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.31).

Параметр  $t$  в общем случае определен лишь на некотором конечном или полубесконечном интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , даже для гладких векторных полей, заданных на всем многообразии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  называется *полным*, если все интегральные кривые этого поля определены при всех значениях  $t \in \mathbb{R}$ .

**ТЕОРЕМА 2.6.6.** *На компактном многообразии  $\mathbb{M}$  любое гладкое векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ , не обращающееся в нуль, является полным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [5], § 35.

На некомпактном многообразии векторное поле может быть либо полным, либо неполным.

**ПРИМЕР 2.6.7.** Векторному полю  $\partial_x$  на вещественной прямой  $\mathbb{R}$  соответствуют интегральные кривые  $x = t + \text{const}$ . Они полны на всей прямой  $\mathbb{R}$ . Однако они неполны на полупрямой  $\mathbb{R}_+$  или любом конечном открытом интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ .

**ПРИМЕР 2.6.8.** Рассмотрим гладкое векторное поле  $X = x^2 \partial_x$  на вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Общее решение уравнения интегральной кривой  $\dot{x} = x^2$  имеет вид

$$x = -\frac{1}{t - c}, \quad c = \text{const}.$$



Таким образом, для каждого значения постоянной  $c$ , имеются две никак не связанные между собой интегральные кривые:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: (-\infty, c) \rightarrow (0, \infty), \\ \gamma_2 &: (c, \infty) \rightarrow (-\infty, 0).\end{aligned}$$

При этом точка  $x = 0$  соответствует бесконечному значению параметра вдоль интегральной кривой  $t = \pm\infty$ , а бесконечно удаленные точки  $x = \pm\infty$  – конечному значению параметра  $t = c$ . Поэтому векторное поле  $X = x^2\partial_x$  неполно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Точка  $p \in \mathbb{M}$ , в которой векторное поле обращается в нуль,  $X(p) = 0$ , называется *особой точкой векторного поля*. Если компоненты векторного поля разлагаются в ряд Тейлора, то система уравнений (2.31) в координатной окрестности особой точки в линейном приближении имеет вид

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = x^\beta B_\beta^\alpha, \quad B_\beta^\alpha := \partial_\beta X^\alpha|_{x=p}. \quad (2.34)$$

Если  $\det B \neq 0$ , то особая точка называется *невырожденной*.

При преобразовании координат  $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$  уравнение (2.34) сохраняет свой вид. При этом компоненты матрицы  $B$  преобразуются по правилу

$$B_\beta^\alpha \mapsto B_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} B_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha},$$

т.е. подвергаются преобразованию подобия.

Напомним, что любое дифференциальное уравнение  $n$ -того порядка можно записать в виде эквивалентной ей системы уравнений первого порядка, состоящей из  $n$  уравнений. Следовательно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, разрешенных относительно старшей производной, сводится к нахождению и исследованию свойств интегральных кривых векторных полей. При этом поведение интегральных кривых в окрестностях особых точек представляет исключительный интерес, так как позволяет понять качественное поведение решений.

В общем случае поведение интегральных кривых в окрестности особой точки довольно сложно. Особые точки можно классифицировать, приведя матрицу  $B$  к какому либо каноническому виду с помощью преобразования подобия, что означает переход в новую систему координат.

**ПРИМЕР 2.6.9.** Рассмотрим двумерное многообразие (поверхность)  $\mathbb{M}$ , на котором задано дифференцируемое векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Пусть  $p \in \mathbb{M}$  – невырожденная особая точка векторного поля  $X$ . Выберем систему координат в окрестности особой точки так, чтобы она находилась в начале координат. Обозначим собственные числа матрицы  $B$  через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . В общем случае они комплексны. Из невырожденности следует, что  $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ . Невырожденные особые точки в рассматриваемом случае делятся на шесть классов.

*a) Седло.*  $\lambda_1\lambda_2 < 0$ . Пусть собственные числа вещественны и разных знаков. Тогда существует система координат в которой матрица  $B$  диагональна и уравнения для интегральных кривых (2.34) примут вид

$$\dot{x}^1 = x^1\lambda_1, \quad \dot{x}^2 = x^2\lambda_2. \quad (2.35)$$

Они легко интегрируются:

$$x^1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x^2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

где  $C_{1,2}$  – постоянные интегрирования. Касательный вектор к интегральной кривой имеет угол наклона

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{C_2\lambda_2}{C_1\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}.$$

Соответствующие интегральные кривые для  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  показаны на рис. 2.8 *a*. Стрелки указывают направление возрастания параметра  $t$ . Ни одна из интегральных кривых не проходит через начало координат, которое является неподвижной точкой.

*b) Узел.*  $\lambda_1\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Если собственные числа матрицы  $B$  вещественны одного знака и различны, то ее также можно диагонализировать. При этом уравнения для интегральных кривых и решений имеют

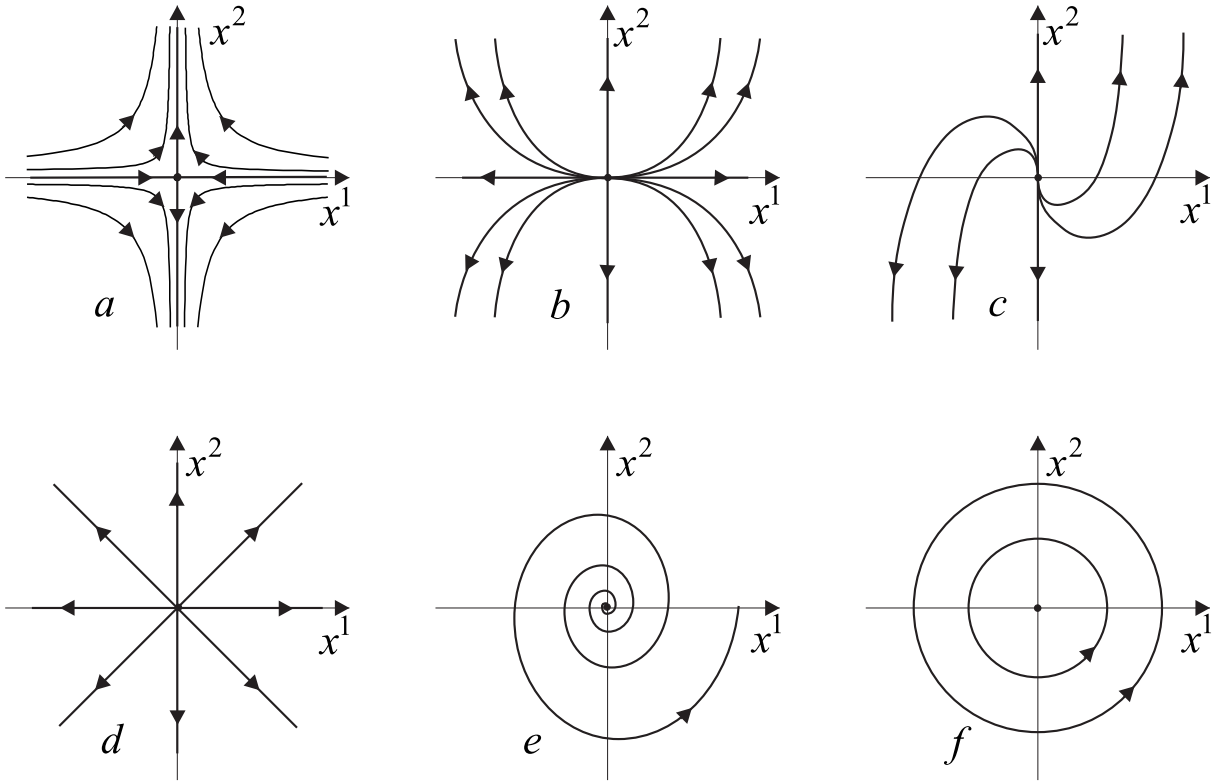


Рис. 2.8. Седло (a), узел (b), жорданов узел (c), дикритический узел (d), фокус (e), центр (f).

прежний вид (2.35), (2.36). Меняется только знак одного из собственных чисел. На рис. 2.8b показаны интегральные кривые для  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

c) *Жорданов узел.*  $\lambda_1 = \lambda_2$ , матрица  $B$  недиагонализуема. Пусть собственные числа матрицы  $B$  вещественны и равны, и матрицу  $B$  нельзя диагонализировать преобразованием подобия. Тогда матрицу  $B$  можно привести к жордановой клетке

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие уравнения интегральных кривых

$$\dot{x}^1 = x^1 \lambda_1, \quad \dot{x}^2 = x^1 + x^2 \lambda_1,$$

легко интегрируются:

$$x^1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x^2 = (C_2 + C_1 t) e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Касательная к интегральной кривой имеет угол наклона

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{C_2}{C_1} + \frac{1}{\lambda_1} + t.$$

На рис. 2.8c показаны интегральные кривые для  $0 < \lambda_1$ .

d) *Дикритический узел.*  $\lambda_1 = \lambda_2$ , матрица  $B$  кратна единичной. Пусть собственные числа матрицы  $B$  вещественны и равны, и матрица  $B$  кратна единичной,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

При преобразовании координат матрица  $B$  не меняется, так как пропорциональна единичной матрице. В этом случае уравнения для интегральных кривых,

$$\dot{x}^1 = x^1 \lambda_1, \quad \dot{x}^2 = x^2 \lambda_1,$$

легко интегрируются:

$$x^1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x^2 = C_2 e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Касательная к интегральной кривой имеет постоянный угол наклона

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

На рис. 2.8 *d* показаны интегральные кривые для  $0 < \lambda_1$ .

*e) Фокус.*  $\lambda_{1,2}$  комплексны,  $\operatorname{re} \lambda_{1,2} \neq 0$ . Поскольку комплексные собственные значения могут встречаться только комплексно сопряженными парами, то  $\lambda_1 = \mu + i\tilde{\omega}$  и  $\lambda_2 = \mu - i\tilde{\omega}$ , где  $\mu, \tilde{\omega} \in \mathbb{R}$  и  $\mu \neq 0$ . В этом случае матрицу  $B$  можно привести к виду

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 2\mu \end{pmatrix},$$

где  $\omega^2 := \tilde{\omega}^2 + \mu^2$ . Соответствующие уравнения для интегральных кривых принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -\omega^2 x^1 + 2\mu x^2. \end{aligned}$$

Дифференцирование первого уравнения приводит к уравнению для осциллятора с трением

$$\ddot{x}^1 - 2\mu \dot{x}^1 + \omega^2 x^1 = 0.$$

Отсюда следует, что интегральные кривые имеют вид

$$\begin{aligned} x^1 &= C_1 e^{\mu t} \cos(\tilde{\omega} t + C_2), \\ x^2 &= C_1 e^{\mu t} [\mu \cos(\tilde{\omega} t + C_2) - \tilde{\omega} \sin(\tilde{\omega} t + C_2)]. \end{aligned}$$

На рис. 2.8 *e* показаны интегральные кривые для  $\tilde{\omega} > 0$ ,  $\mu > 0$ .

*f) Центр.*  $\lambda_{1,2}$  комплексны,  $\operatorname{re} \lambda_{1,2} = 0$ . Пусть собственные числа чисто мнимые:  $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . В этом случае матрицу  $B$  можно привести к виду

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для интегральных кривых,

$$\dot{x}^1 = \omega x^2, \quad \dot{x}^2 = -\omega x^1,$$

соответствуют гармоническому осциллятору

$$\ddot{x}^1 + \omega^2 x^1 = 0$$

и легко интегрируются:

$$x^1 = C_1 \cos(\omega t + C_2), \quad x^2 = -C_1 \sin(\omega t + C_2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Интегральные кривые являются окружностями,

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = C_1^2.$$

Они изображены на рис. 2.8 *f* при  $\omega > 0$ .

Во всех случаях интегральные кривые определены при всех значениях параметра  $t$ . Это означает, что векторные поля полны. Для узлов и фокуса интегральные кривые стремятся к началу координат при  $t \rightarrow -\infty$ . Начало координат в соответствии с предложением 2.6.2 является неподвижной точкой.

Множество всех полных векторных полей на некомпактном многообразии  $\mathbb{M}$  является подмножеством в  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ . В отличие от всего множества  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  это подмножество не образует абелеву группу (модуль) по отношению к сложению.

**ПРИМЕР 2.6.10.** Рассмотрим два векторных поля  $X = y^2 \partial_x$  и  $Y = x^2 \partial_y$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Оба поля являются полными, однако их сумма  $X + Y$  неполна. Действительно, векторное поле  $X$  определяет интегральные кривые:

$$\begin{aligned} \dot{x} = y^2 &\Rightarrow x = y^2 t + C_0, & C_0, C_1 = \text{const}, \\ \dot{y} = 0 &\Rightarrow y = C_1. \end{aligned}$$

Эти интегральные кривые параллельны оси  $x$  и проходят через все точки  $y$ , кроме  $y = 0$ , см. рис. 2.9 *a* (стрелки показывают возрастание параметра  $t$ ). Поскольку все интегральные прямые определены при всех  $t \in (-\infty, \infty)$ , то векторное поле  $X$  полно. Все точки оси абсцисс  $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$  для векторного поля  $X$  являются вырожденными особыми точками и неподвижны. Через них не проходит ни одна интегральная кривая.

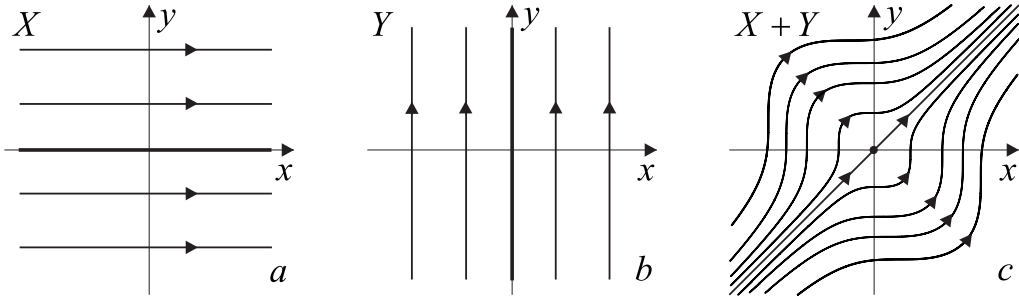


Рис. 2.9. Интегральные кривые для векторного поля  $X$  (*a*),  $Y$  (*b*) и  $X + Y$  (*c*).

Аналогично, векторное поле  $Y$  определяет интегральные кривые:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Rightarrow x = C_2, & C_0, C_2 = \text{const}, \\ \dot{y} = x^2 &\Rightarrow y = x^2 t + C_0. \end{aligned}$$

Интегральные кривые параллельны оси  $y$  и проходят через все точки  $x$ , кроме  $x = 0$ , см. рис. 2.9 *b*. Соответствующее векторное поле  $Y$  полно. Все точки оси ординат  $(0, y) \in \mathbb{R}^2$  являются вырожденными особыми точками и неподвижны.

Уравнения для интегральных кривых, определяемых суммой векторных полей, имеют вид:

$$\dot{x} = y^2, \quad (2.37)$$

$$\dot{y} = x^2. \quad (2.38)$$

При  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$  отсюда следует дифференциальное уравнение для формы интегральной кривой:

$$x^2 dx = y^2 dy \Rightarrow y^3 = x^3 + c, \quad c = \text{const}.$$

Подставляя это решение в уравнение (2.37), получаем равенство

$$\dot{x} = (x^3 + c)^{2/3} \Leftrightarrow t = \int \frac{dx}{(x^3 + c)^{2/3}}. \quad (2.39)$$

При  $c = 0$  это уравнение легко интегрируется

$$x = -\frac{1}{t - c_0}, \quad c_0 = \text{const}. \quad (2.40)$$

После подстановки в (2.38) получаем уравнение

$$y = -\frac{1}{t - c_0} + c_1, \quad c_1 = \text{const}. \quad (2.41)$$

Таким образом мы получили интегральные кривые для векторного поля  $X + Y$ , которые неполны, так как уходят в бесконечность  $x = \pm\infty$ ,  $y = \pm\infty$  при конечном значении параметра  $t = c_0$ . Остальные интегральные кривые можно не исследовать, поскольку, по определению, векторное поле полно, если все интегральные кривые определены при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Интегральные кривые для суммы векторных полей показаны на рис. 2.9 с. Все интегральные кривые неполны в бесконечности. Это легко видеть, так как при  $x \rightarrow \pm\infty$  постоянной  $c$  в интеграле (2.39) можно пренебречь, и, следовательно, справедлива асимптотика (2.40). Матрица  $B$  (2.34), определяющая линейное приближение, для суммы векторных полей  $X + Y$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Она вырождена только в начале координат. Поэтому точка  $(0, 0)$  является вырожденной особой точкой. К ней подходят интегральные кривые (2.40), (2.41) при бесконечном значении параметра  $t$ .

Ранее мы показали, что всюду отличное от нуля дифференцируемое векторное поле, заданное на многообразии  $\mathbb{M}$ , определяет семейство интегральных кривых, проходящих через каждую точку  $\mathbb{M}$ , причем через каждую точку проходит единственная кривая.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $s(t, p)$  – интегральная кривая векторного поля  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ , проходящая через точку  $p$ ,  $s(0, p) = p$ . Будем считать, что векторное поле полно. Тогда отображение

$$s : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{M} \ni \quad t, p \mapsto s(t, p) \in \mathbb{M}, \quad (2.42)$$

генерируемое векторным полем  $X$ , называется *поток векторного поля*.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.3.** *Отображение (2.42) удовлетворяет тождеству*

$$s(t_1, s(t_2, p)) = s(t_1 + t_2, p), \quad (2.43)$$

для всех значений  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , для которых формула (2.43) имеет смысл.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предложение следует из единственности решения системы дифференциальных уравнений. Действительно, в произвольной карте выполнено равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} s^\alpha(t_1, s(t_2, p)) &= X^\alpha(s(t_2, p)) \\ s(0, s(t_2, p)) &= s(t_2, p). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_1} s^\alpha(t_1 + t_2, p) &= \frac{d}{d(t_1 + t_2)} s^\alpha(t_1 + t_2, p) = X^\alpha(s(t_1 + t_2, p)), \\ s(0 + t_2, p) &= s(t_2, p). \end{aligned}$$

Тем самым и правая, и левая часть равенства (2.43) удовлетворяют одной и той же системы уравнений с одинаковыми начальными условиями.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Поток векторного поля можно представлять себе, как стационарный поток жидкости. В этом случае параметр  $t$  является временем, а  $X$  – векторным полем скорости частиц жидкости.

**ПРИМЕР 2.6.11.** Рассмотрим гладкое векторное поле  $K = -y\partial_x + x\partial_y$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Нетрудно проверить, что поток этого векторного поля имеет вид

$$s : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni \quad t \times (x, y) \mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) \in \mathbb{R}^2.$$

Интегральная кривая, проходящая через точку  $(x, y)$ , представляет собой окружность с центром в начале координат. В начале координат векторное поле обращается в нуль, и интегральная кривая вырождается в точку. Матрица (2.34) имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа являются мнимыми  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Поэтому начало координат является для векторного поля  $K$  невырожденной особой точкой – центром.

Векторное поле  $K$  является ничем иным, как векторным полем Киллинга двумерных вращений евклидовой плоскости и принимает особо простой вид в полярных координатах,  $K = \partial_\varphi$ . Интегральные кривые поля  $K$  являются в данном случае траекториями Киллинга. Поток векторного поля на  $\mathbb{R}^2$  определяется независимо от наличия метрики. Однако интерпретация векторного поля  $K$ , как поля Киллинга уже связана с наличием на плоскости евклидовой метрики.

**ПРИМЕР 2.6.12.** Рассмотрим гладкое векторное поле  $K = y\partial_x + x\partial_y$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Поток этого векторного поля имеет вид

$$s : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ni \quad t \times (x, y) \mapsto (x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t, x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t) \in \mathbb{R}^2.$$

Интегральная кривая, проходящая через точку  $(x, y)$ , является ветвью гиперболы  $x^2 - y^2 = \operatorname{const}$  с центром в начале координат. При  $y = \pm x$  гиперболы вырождаются в прямые линии, проходящие через начало координат под углом  $\pm\pi/4$ . Матрица (2.34) имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она невырождена и имеет различные вещественные собственные значения  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Поэтому начало координат является невырожденной особой точкой – седлом.

Векторное поле  $K$  является векторным полем Киллинга для метрики Лоренца, заданной на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а интегральные кривые – траекториями Киллинга.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** При фиксированном значении параметра  $t$  поток  $s(t, x)$  представляет собой диффеоморфизм, обозначаемый также

$$s_t : \quad \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}.$$

Из предложения 2.6.3 следует, что он представляет собой абелеву группу:

- 1)  $s_{t_1} s_{t_2} = s_{t_1+t_2}$ ;
- 2)  $s_0$  – единичный элемент;
- 3)  $s_t^{-1} = s_{-t}$  – обратный элемент.

Эта группа называется *однопараметрической группой преобразований*, генерируемой векторным полем  $X$ . Действительно, из системы уравнений (2.31) следует, что при малых значениях параметра поток имеет вид

$$s_\epsilon : \quad x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \epsilon X^\alpha.$$

То есть векторное поле  $X$  является генератором бесконечно малых преобразований многообразия  $\mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Псевдогруппа гладких преобразований координат  $\operatorname{diff} \mathbb{M}$  на многообразии  $\mathbb{M}$ , бесконечномерна. С соответствующими оговорками множество гладких векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  можно рассматривать, как бесконечномерную алгебру Ли для  $\operatorname{diff} \mathbb{M}$ .

Сам поток часто обозначают

$$s^\alpha(t, x) = \exp(tX)x^\alpha$$

и называют *экспоненциальным отображением*. Это обозначение оправдано следующим образом. Разложим функцию  $s^\alpha(t, x)$  в ряд Тейлора по  $t$ :

$$\begin{aligned} s^\alpha(t, x) &= x^\alpha + t \left. \frac{\partial s^\alpha(\tau, x)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} + \frac{t^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 s^\alpha(\tau, x)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} + \dots \\ &= \left[ 1 + t \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{t^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \dots \right] s^\alpha(\tau, x) \Big|_{\tau=0} \\ &= \exp \left( t \frac{\partial}{\partial \tau} \right) s^\alpha(\tau, x) \Big|_{\tau=0} = \exp(tX)x^\alpha. \end{aligned}$$

При этом выполнены формальные свойства экспоненты:

$$\exp(0X)x = x,$$

$$\begin{aligned}\exp(t_1 X) \exp(t_2 X)x &= \exp[(t_1 + t_2)X]x, \\ \frac{d}{dt} \exp(tX)x &= X \exp(tX)x.\end{aligned}$$

Выше было показано, что любое полное векторное поле генерирует единственную однопараметрическую группу преобразований. Верно и обратное утверждение: любая однопараметрическая группа  $s^\alpha(t, x)$  определяет векторное поле. Для этого достаточно положить

$$X^\alpha := \left. \frac{ds^\alpha}{dt} \right|_{t=0}.$$

Если векторное поле  $X(\mathbb{M})$  является неполным, то понятие потока и однопараметрической группы преобразований можно ввести только локально (см., например, [30].)

**2.6.6. 1-формы и гиперповерхности.** Рассмотрим отличную от нуля в каждой точке 1-форму  $dx^\alpha A_\alpha(x)$  в некоторой карте на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ . Тогда линейное алгебраическое уравнение

$$dx^\alpha A_\alpha = 0 \tag{2.44}$$

относительно дифференциалов  $dx^\alpha$  имеет  $n - 1$  линейно независимых решений в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$ . При этом любое решение уравнения (2.44) является линейной комбинацией данных решений. Отсюда следует, что совокупность векторов  $dx^\alpha$ , удовлетворяющих соотношению (2.44), задает  $(n - 1)$ -мерное подпространство в касательном пространстве  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ . Таким образом, отличная от нуля 1-форма задает распределение  $(n - 1)$ -мерных подпространств в касательном расслоении  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ .

Казалось бы, что существуют такие  $(n - 1)$ -мерные подмногообразия в  $\mathbb{M}$ , что касательные векторы к ним образуют  $(n - 1)$ -мерное распределение, задаваемое 1-формой. Однако в общем случае это не так. Критерий существования таких подмногообразий дает теорема Фробениуса 2.11.4, которая будет рассмотрена несколько позже. Сейчас мы остановимся на простейшем случае.

Пусть 1-форма (2.44) является точной, т.е. имеет вид,

$$dx^\alpha A_\alpha = dx^\alpha \partial_\alpha f, \tag{2.45}$$

для некоторой функции  $f(x) \in C^1(\mathbb{M})$ . Тогда уравнение (2.44) можно рассмотреть, как дифференциальное уравнение на  $f$ , любое решение которого имеет вид

$$f(x) = \text{const}. \tag{2.46}$$

Уравнение (2.46) при разных значениях константы определяет семейство  $(n - 1)$ -мерных подмногообразий в  $\mathbb{M}$ , которые называются *гиперповерхностями*. При  $n = 2$  эти подмногообразия называются *линиями уровня*. В этом случае касательные векторы к гиперповерхностям определяют те же  $(n - 1)$ -мерные подпространства в касательном пространстве, что и 1-форма. Говорят также, что гиперповерхность имеет коразмерность один.

Не ограничивая общности, для непостоянной функции можно считать, что только  $\partial_1 f \neq 0$  в некоторой области. Поэтому функцию  $f$  можно выбрать в качестве первой координаты  $f := x^1$ . Тогда семейство гиперповерхностей будет задано уравнением  $x^1 = \text{const}$ , а направления вдоль остальных координатных осей будут определять касательные к гиперповерхности направления.

**2.6.7. Алгебра Ли векторных полей.** Ранее мы дали два эквивалентных определения векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  как сечений касательного расслоения  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$  и как дифференцирований в алгебре функций  $C^\infty(\mathbb{M})$ . Это – разные определения, одно из которых может иметь определенные преимущества в той или иной ситуации. При рассмотрении алгебраических вопросов, как правило, удобнее использовать алгебраическое определение векторных полей через дифференцирование. Используя это определение, мы введем на множестве векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  структуру алгебры Ли.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Последовательное применение двух дифференцирований (векторных полей)  $X$  и  $Y$  к некоторой функции  $f$  снова дает функцию из  $C^\infty(\mathbb{M})$ . Определим композицию двух дифференцирований  $X \circ Y$  формулой  $(X \circ Y)f := X(Yf)$ . Отображение  $(X \circ Y)$  является линейным, однако правило Лейбница для него не выполнено:

$$(X \circ Y)fg = XfYg + fX(Yg) + XgYf + gX(Yf) \neq f(X \circ Y)g + g(X \circ Y)f.$$

Это означает, что композиция векторных полей  $X \circ Y$  не является векторным полем. По другому, отображение  $X \circ Y$  в координатах содержит не только первые, но и вторые производные. Рассмотрим композицию этих дифференцирований в другом порядке,

$$(Y \circ X)fg = YfXg + fY(Xg) + YgXf + gY(Xf).$$

Нетрудно проверить, что разность  $Y \circ X - X \circ Y$  удовлетворяет правилу Лейбница

$$(X \circ Y - Y \circ X)fg = f(X \circ Y - Y \circ X)g + g(X \circ Y - Y \circ X)f,$$

т.е. является векторным полем. Эта разность называется *коммутатором векторных полей* или *скобкой Ли* и обозначается

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X.$$

Из определения следует, что коммутатор двух векторных полей антисимметричен,

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad (2.47)$$

и коммутаторы трех произвольных векторных полей удовлетворяют *тождеству Якоби*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \quad (2.48)$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Антисимметрия коммутатора (2.47) эквивалентна условию  $[X, X] = 0$ . Действительно, то, что это условие вытекает из (2.47) очевидно. Для доказательства обратного утверждения достаточно рассмотреть уравнение  $[X + Y, X + Y] = 0$ .

Алгебра Ли является неассоциативной алгеброй, при этом условие ассоциативности заменяется на тождества Якоби.

Рассмотрим векторные поля в произвольной карте  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ ,  $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$ . Тогда коммутатор дает новое векторное поле

$$Z := [X, Y] = (X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha) \partial_\alpha. \quad (2.49)$$

Используя закон преобразования компонент векторных полей (2.11), нетрудно проверить, что выражение в правой части инвариантно относительно преобразования координат.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество векторных полей с операцией сложения и коммутирования, которое удовлетворяет условиям (2.47) и (2.48) образует *кольцо Ли*. Умножение векторного поля на числа снова дает векторной поле, при этом коммутатор (2.49) билинеен

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [X, aY + bZ] &= a[X, Y] + b[X, Z], \end{aligned}$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ . Множество векторных полей с операциями умножения на вещественные числа, сложения и коммутирования образует *алгебру Ли* над полем вещественных чисел. Эта алгебра бесконечномерна и также обозначается  $\mathcal{X}(M)$ .

Алгебры Ли образуют не только векторные поля на многообразиях. Структуру алгебры Ли можно также ввести на абстрактном векторном пространстве.

**ПРИМЕР 2.6.13.** Двумерное векторное пространство с базисом  $e_1$  и  $e_2$  становится алгеброй Ли, если положить

$$[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0, \quad [e_1, e_2] = e_2$$

и продолжить эту операцию по линейности. Это – алгебра Ли группы Ли аффинных преобразований прямой, которая рассмотрена в разделе 8.7.



ПРИМЕР 2.6.14. Трехмерное векторное пространство  $\mathbb{R}^3$  с ортонормальным базисом  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , является алгеброй Ли, если в качестве коммутатора двух векторов  $X, Y \in \mathbb{R}^3$  выбрать их векторное произведение

$$[X, Y]^i := -\varepsilon^{ijk} X_j Y_k,$$

где  $\varepsilon^{ijk}$  – полностью антисимметричный тензор третьего ранга и опускание индексов производится с помощью евклидовой метрики  $\delta_{ij}$ . Эта алгебра Ли совпадает с алгеброй Ли группы трехмерных вращений  $\text{SO}(3)$ .

ПРИМЕР 2.6.15. Векторное пространство  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  всех вещественных  $n \times n$ -матриц образует конечномерную алгебру Ли, если положить

$$[A, B] := AB - BA, \quad A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}),$$

где  $AB$  – обычное произведение матриц. При этом  $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = n^2$ .

Забегая вперед (см. раздел 6.2), заметим, что коммутатор векторных полей (2.49) можно записать в эквивалентном виде, используя ковариантную производную и тензор кручения

$$[X, Y] = (X^\beta \nabla_\beta Y^\alpha - Y^\beta \nabla_\beta X^\alpha - X^\beta Y^\gamma T_{\beta\gamma}^\alpha) \partial_\alpha.$$

В таком виде правая часть этого равенства явно ковариантна.

## 2.7. Тензорные поля

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ . В каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  у нас есть два  $n$ -мерных векторных пространства: касательное  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  и кокасательное  $\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$  пространства. Рассмотрим их тензорное произведение

$$\mathbb{T}_{s,x}^r(\mathbb{M}) := \underbrace{\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \otimes \cdots \otimes \mathbb{T}_x(\mathbb{M})}_r \otimes \underbrace{\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M}) \otimes \cdots \otimes \mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})}_s, \quad (2.50)$$

где мы взяли  $r$  экземпляров касательного и  $s$  экземпляров кокасательного пространства. Для определенности мы фиксировали порядок сомножителей. Таким образом в каждой точке многообразия мы построили векторное пространство размерности  $\dim \mathbb{T}_{s,x}^r(\mathbb{M}) = n^{r+s}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Объединение

$$\mathbb{T}_s^r(\mathbb{M}) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{T}_{s,x}^r(\mathbb{M}),$$

взятое по всем точкам многообразия, называется *расслоением тензоров типа  $(r, s)$*  на многообразии  $\mathbb{M}$ . Сечение этого расслоения  $T_s^r(x)$  называется *тензорным полем типа  $(r, s)$*  или  $r$  раз *контравариантным* и  $s$  раз *ковариантным* тензорным полем на многообразии  $\mathbb{M}$ . Число  $r + s$  называется *рангом* тензорного поля.

Базой этого расслоения является многообразие  $\mathbb{M}$ , типичным слоем – векторное пространство

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_r \otimes \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n}_s,$$

где  $\mathbb{R}^n$  – типичный слой касательного расслоения. Слой над  $x \in \mathbb{M}$  является векторное пространство (2.50) (тем самым мы определили проекцию). Дифференцируемая структура на расслоении тензоров задается дифференцируемыми структурами на базе и в типичном слое аналогично тому, как она была построена для касательного расслоения.

Координатные базисы в касательном и кокасательном пространствах,  $e_\alpha = \partial_\alpha$  и  $e^\alpha = dx^\alpha$ , индуцируют координатный базис в тензорном произведении, который мы обозначим

$$e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e^{\beta_s}. \quad (2.51)$$

Напомним, что тензорное произведение векторов не является коммутативным,

$$e_\alpha \otimes e^\beta \neq e^\beta \otimes e_\alpha,$$

поэтому порядок следования базисных векторов в произведении (2.51) фиксирован: сначала мы пишем базисные векторы касательного, а затем кокасательного пространства.

Рассмотрим произвольную карту  $(\mathbb{U}, \varphi)$  на многообразии. Тогда тензорное поле типа  $(r, s)$  в координатах имеет вид

$$T_s^r(x) = T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_s}. \quad (2.52)$$

Нижние и верхние индексы называют соответственно *ковариантными* и *контравариантными*. Общее число индексов  $r + s$  равно рангу тензорного поля.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для определенности, у компонент  $T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  мы сначала выписали все ковариантные индексы, а затем – все контравариантные. Порядок индексов зафиксирован порядком сомножителей в правой части (2.50) и принят нами соглашением для записи тензорного поля типа  $(1, 1)$ :

$$dx^\beta T_\beta^\alpha \partial_\alpha.$$

Контравариантные индексы, так же, как и ковариантные, упорядочены между собой. В разделе 4 будет введена операция опускания и подъема индексов с помощью метрики. Она будет неоднозначной, если порядок контравариантных и ковариантных индексов не фиксирован.

Ниже мы построим тензорную алгебру для тензорных полей вида (2.52). Аналогично можно построить тензорную алгебру для произвольного расположения сомножителей в правой части (2.50), когда касательные и кокасательные пространства чередуются в произвольном порядке. Мы будем предполагать, что все индексы упорядочены определенным образом. В этом случае обозначение векторного поля  $T_s^r(x)$  является грубым, так как учитывает только общее число ковариантных и контравариантных индексов, а не их последовательность.

Набор функций  $X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  с  $r$  верхними и  $s$  нижними индексами называется *компонентами* тензорного поля типа  $(r, s)$  в карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$ . Тензорное поле называется гладким, если все компоненты – гладкие функции. При преобразованиях координат каждый контравариантный индекс умножается на матрицу Якоби, так же, как и компоненты вектора, а каждый ковариантный индекс – на обратную матрицу Якоби, так же, как и 1-форма.

**ПРИМЕР 2.7.1.** Компоненты тензорного поля типа  $(1, 1)$  при преобразовании координат  $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}$  преобразуются по правилу:

$$X_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} X_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}. \quad (2.53)$$

Аналогично преобразуются компоненты тензорных полей произвольного типа.

В дальнейшем, для краткости, тензорные поля мы часто будем называть просто тензорами.

Очевидно, что, если все компоненты тензорного поля равны нулю в какой-то одной системе координат, то они равны нулю во всех остальных системах отсчета. У нетривиальных тензоров хотя бы одна компонента должна быть отлична от нуля. В общем случае у тензора типа  $(r, s)$  на многообразии размерности  $n$  имеется  $n^{r+s}$  независимых компонент в каждой точке.

Обозначим множество гладких тензорных полей типа  $(r, s)$  символом  $\mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$ . При этом  $\mathcal{T}_0^0(\mathbb{M}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ ,  $\mathcal{T}_0^1 = \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и  $\mathcal{T}_1^0 = \Lambda_1(\mathbb{M})$ . В дальнейшем индекс 0 у множеств тензорных полей, имеющих только контравариантные или ковариантные индексы, писаться не будет:  $\mathcal{T}_0^r(\mathbb{M}) = \mathcal{T}^r(\mathbb{M})$  и  $\mathcal{T}_s^0(\mathbb{M}) = \mathcal{T}_s(\mathbb{M})$ .

Тензорные поля фиксированного типа в каждой точке можно складывать и умножать на числа, т.е. они образуют (бесконечномерное) векторное пространство над полем вещественных чисел. Кроме того, тензорное поле произвольного типа можно поточечно умножать на произвольные функции, при этом получится новое тензорное поле того же типа. Таким образом, они образуют модуль над алгеброй гладких функций  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ .

Введем обозначение для прямой суммы тензорных полей

$$\mathcal{T}(\mathbb{M}) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M}).$$

На множестве  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$  можно ввести поточечное тензорное умножение, которое двум тензорам типа  $(r, s)$  и  $(p, q)$  ставит в соответствие тензорное поле типа  $r + p, s + q$ . А именно, зафиксируем точку  $x \in \mathbb{M}$ . Из универсального факторизационного свойства тензорного произведения следует, что существует единственное

билинейное отображение из  $\mathbb{T}_{s,x}^r \times \mathbb{T}_{q,x}^p$  в  $\mathbb{T}_{s+q,x}^{r+p}$ , которое отображает пару тензоров

$$\begin{aligned} (X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s) &\in \mathbb{T}_{s,x}^r, \\ (Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_q) &\in \mathbb{T}_{q,x}^p \end{aligned}$$

в тензор типа  $r + p, s + q$ :

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_q \in \mathbb{T}_{s+q,x}^{r+p}. \quad (2.54)$$

Это отображение называется тензорным произведением тензоров в данной точке.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Мы зафиксировали порядок сомножителей в произведении (2.54), который соответствует тензорному произведению (2.50).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Тензорным произведением тензорных полей  $\mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  и  $\mathcal{T}_q^p(\mathbb{M})$  называется тензорное поле типа  $\mathcal{T}_{s+q}^{r+p}(\mathbb{M})$ , полученное поточечным тензорным произведением (2.54).

Чтобы получить выражение для компонент тензорного произведения в определенной карте, достаточно в качестве векторных  $X, Y$  и ковекторных  $A, B$  полей в определении тензорного произведения выбрать координатный базис. Пусть в некоторой карте задано два тензорных поля:

$$\begin{aligned} K &= K_{\beta_1 \cdots \beta_s}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \cdots \otimes e^{\beta_s} \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M}), \\ L &= L_{\delta_1 \cdots \delta_q}^{\gamma_1 \cdots \gamma_p} e_{\gamma_1} \otimes e_{\gamma_p} \otimes e^{\delta_1} \cdots \otimes e^{\delta_q} \in \mathcal{T}_q^p(\mathbb{M}). \end{aligned}$$

Тогда компоненты их тензорного произведения

$$(K \otimes L)_{\beta_1 \cdots \beta_s \delta_1 \cdots \delta_q}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r \gamma_1 \cdots \gamma_p} = K_{\beta_1 \cdots \beta_s}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} L_{\delta_1 \cdots \delta_q}^{\gamma_1 \cdots \gamma_p}$$

просто равны произведению компонент каждого сомножителя, как чисел.

**ПРИМЕР 2.7.2.** Произведение двух векторных полей  $X \otimes Y$  дает контравариантный тензор второго ранга с компонентами

$$T(x) = T^{\alpha\beta}(x) e_\alpha \otimes e_\beta = X(x) \otimes Y(x) = X^\alpha(x) Y^\beta(x) e_\alpha \otimes e_\beta,$$

Эта операция является некоммутативной, поскольку первый индекс поля  $T(x)$  относится к векторному полю  $X$ , а не  $Y$ .

Вместе с тензорным умножением, множество тензорных полей  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$  образует некоммутативную ассоциативную тензорную алгебру над полем вещественных чисел. Эта алгебра бесконечномерна, поскольку векторное пространство тензоров фиксированного типа бесконечномерно само по себе и, вдобавок, ранг тензоров неограничен. Алгебра тензоров имеет естественную градуировку, как прямая сумма тензоров фиксированного типа. Образующими тензорной алгебры являются векторные поля и 1-формы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Каждой паре индексов  $(i, j)$  таких, что  $1 \leq i \leq r$  и  $1 \leq j \leq s$ , мы ставим в соответствие линейное отображение  $C^{ij} : \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(\mathbb{M})$  с помощью следующей формулы

$$\begin{aligned} X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s \\ \mapsto (A_j, X_i) X_1 \otimes \cdots \otimes X_{i-1} \otimes X_{i+1} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_{j-1} \otimes \cdots \otimes A_{j+1} \otimes \cdots \otimes A_s, \end{aligned}$$

где  $(A_j, X_i) = A_j(X_i)$  — значение 1-формы  $A_j$  на векторе  $X_i$ . Это отображение называется *сверткой* и обозначается  $C^{ij}$ .

Компоненты свернутого тензора  $K \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  имеют вид

$$K_{\beta_1 \cdots \beta_{j-1} \gamma \beta_{j+1} \cdots \beta_s}^{\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \gamma \alpha_{i+1} \cdots \alpha_r} = \delta_{\alpha_i}^{\beta_j} K_{\beta_1 \cdots \beta_s}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r},$$

где произведена свертка по одному верхнему и одному нижнему индексу.

**ПРИМЕР 2.7.3.** Тензору типа  $(1, 1)$  ставится в соответствие скалярное поле  $\text{tr } K = K_\alpha^\alpha$ , которое называется *следом* тензора  $K = K_\beta^\alpha e_\alpha \otimes e^\beta$ .

ПРИМЕР 2.7.4. Значением 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  на векторном поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha$  является свертка тензорного произведения  $A \otimes X$ :  $(A, X) := A(X) = X^\alpha A_\alpha$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тензорное поле  $K \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  называется *разложимым*, если его можно представить в виде

$$K = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s,$$

для некоторых векторов:  $X_i \in \mathcal{T}^1(\mathbb{M}) = \mathcal{X}(\mathbb{M})$ ,  $i = 1, \dots, r$  и 1-форм:  $A_j \in \mathcal{T}_1(\mathbb{M}) = \Lambda_1(\mathbb{M})$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

ПРИМЕР 2.7.5. Сумма двух разложимых контравариантных тензоров второго ранга

$$X_1 \otimes Y_1 + X_2 \otimes Y_2 = (X_1^\alpha Y_1^\beta + X_2^\alpha Y_2^\beta) e_\alpha \otimes e_\beta$$

может не быть разложимым тензором.

Если тензор имеет два или более индексов одного типа, то с помощью симметризации или антисимметризации по верхним или нижним индексам можно строить новые тензорные поля. Поскольку преобразование координат действует одинаково на каждый ковариантный и контравариантный индекс, то симметризация и антисимметризация индексов является инвариантной операцией и свойство симметрии по индексам сохраняется при преобразовании координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тензорное поле называется *неприводимым*, если нельзя найти такие линейные комбинации его компонент с постоянными коэффициентами, которые сами образовывали бы тензор.

ПРИМЕР 2.7.6. Скалярные, векторные поля и 1-формы являются неприводимыми тензорными полями.

ПРИМЕР 2.7.7. Ковариантные или контравариантные тензорные поля второго ранга приводимы, так как их компоненты можно разложить на симметричную и антисимметричную неприводимую части:

$$X_{\alpha\beta} = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]}, \quad (2.55)$$

где

$$X_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{\beta\alpha}), \quad X_{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выделение следа у тензоров со всеми ковариантными или контравариантными индексами невозможно без наличия метрики.

ПРИМЕР 2.7.8. Тензорное поле  $X_\alpha^\beta$  типа (1,1) также приводимо, поскольку у него можно выделить след  $\text{tr } X$  и бесследовую часть  $Y_\alpha^\beta$  ( $Y_\alpha^\alpha = 0$ ):

$$X_\alpha^\beta = Y_\alpha^\beta + \frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \text{tr } X, \quad (2.56)$$

где

$$\text{tr } X := X_\alpha^\alpha, \quad Y_\alpha^\beta := X_\alpha^\beta - \frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \text{tr } X.$$

Тензорные поля ранга три и выше, в общем случае, приводимы. Если на многообразии не задано никаких других объектов, кроме тензорного поля, то разложение на неприводимые компоненты может осуществляться только с помощью взятия следа, симметризации или антисимметризации по индексам.

ЗАМЕЧАНИЕ. При проведении вычислений с тензорными полями важно иметь ввиду следующее обстоятельство. Если тензорное поле приводимо, то его разложение на неприводимые компоненты в большинстве случаев упрощает вычисления и проясняет математическую структуру модели.

ПРИМЕР 2.7.9. *Символ Кронекера*, компоненты которого в каждой карте многообразия  $\mathbb{M}$  составляют  $n$ -мерную единичную матрицу,

$$\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (2.57)$$

и имеют один верхний и один нижний индекс, определяет тензорное поле типа  $(1, 1)$ . Он инвариантен относительно преобразований координат

$$\delta_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \delta_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha' = \beta', \\ 0, & \alpha' \neq \beta', \end{cases}$$

так как верхний и нижний индексы преобразуется с помощью взаимно обратных матриц. Символ Кронекера представляет собой исключение в двух отношениях. Во-первых, он инвариантен относительно преобразований координат и, во-вторых, его индексы можно писать один под другим, поскольку подъем и опускание индексов с помощью метрики приводит к симметричным тензорам.

Тензорное поле  $T_\alpha^\beta \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{M})$  типа  $(1, 1)$  можно рассматривать, как линейный оператор (эндоморфизм), действующий в пространстве векторов  $\mathcal{T}^1(\mathbb{M}) = \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и 1-форм  $\mathcal{T}_1(\mathbb{M}) = \Lambda_1(\mathbb{M})$ . В компонентах действие оператора задается правилами:

$$A'_\alpha = T_\alpha^\beta A_\beta, \quad X'^\alpha = X^\beta T_\beta^\alpha.$$

Действие оператора  $T_\alpha^\beta$  естественным образом распространяется на тензоры произвольного типа.

**ПРИМЕР 2.7.10.** Символ Кронекера представляет собой тождественный оператор.

**ПРИМЕР 2.7.11.** Проекционные операторы (4.25) являются тензорными полями типа  $(1, 1)$ .

На многообразии  $\mathbb{M}$  можно также определить *тензорные плотности* степени  $p \in \mathbb{Z}$  и ранга  $(r, s)$ , если при преобразовании координат все их компоненты умножить на якобиан преобразования в степени  $p$ , как и в случае скалярных полей (2.7). Например, тензорная плотность типа  $(1, 1)$  и степени  $p$  преобразуется по правилу

$$X_{\alpha'}^{\beta'} = J^p \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} X_\alpha^\beta \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}. \quad (2.58)$$

В каждой точке многообразия тензорные плотности фиксированного типа и степени образуют векторное пространство над полем вещественных чисел и модуль над алгеброй гладких функций. По аналогии с тензорным произведением тензоров можно ввести тензорное произведение плотностей, которое двум плотностям типа  $(r_1, s_1)$ ,  $(r_2, s_2)$  и степеней  $p_1$  и  $p_2$  ставит в соответствие тензорную плотность типа  $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$  и степени  $p_1 + p_2$ . Множество тензорных плотностей и всех их линейных комбинаций в фиксированной точке образует некоммутативную ассоциативную алгебру над полем вещественных чисел. Эта алгебра имеет естественную градуировку, как прямая сумма тензорных плотностей фиксированного типа и степени.

Так же, как и в случае скалярных плотностей тензорные плотности  $X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$  степени  $p$  можно представить в виде

$$X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \sqrt{|g|}^{-p} Y_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r},$$

где  $\sqrt{|g|} = \det e_\alpha^a$  – определитель репера, а  $Y_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$  – тензорное поле того же типа, что и исходная тензорная плотность.

Множество тензорных полей можно интерпретировать, как множество полилинейных отображений.

**ТЕОРЕМА 2.7.1.** *Множество ковариантных тензорных полей  $\mathcal{T}_s(\mathbb{M})$  можно рассматривать, как  $s$  линейное отображение ( $\mathcal{C}(\mathbb{M})$ -модуль) из  $\underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_s$  в алгебру непрерывных функций  $\mathcal{C}(\mathbb{M})$  такое, что*

$$K(f_1 X_1, \dots, f_s X_s) = f_1 \dots f_s K(X_1, \dots, X_s), \quad K(x) \in \mathcal{T}_s(\mathbb{M}),$$

для всех  $f_i \in \mathcal{C}(\mathbb{M})$  и  $X_i \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Обратное, каждое такое отображение можно рассматривать, как тензорное поле типа  $(0, s)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [3], предложение 3.1.

Аналогично можно интерпретировать тензоры произвольного типа  $(r, s)$ , как множество всех  $r + s$  линейных отображений:

$$\mathcal{T}_s^r(\mathbb{M}) : \underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_s \times \underbrace{\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_1}_r \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{M}). \quad (2.59)$$

Поскольку между тензорными полями и полилинейными отображениями существует взаимно однозначное соответствие, то некоторые авторы принимают эти отображения в качестве глобального определения тензорных полей.

## 2.8. Полностью антисимметричные тензоры

В настоящем разделе мы рассмотрим полностью антисимметричные тензоры, которые играют очень важную роль в различных приложениях дифференциальной геометрии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Рассмотрим тензорные поля типа  $(r, 0)$  или  $(0, r)$  при  $r \leq n$  на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , компоненты которых антисимметричны относительно перестановки любой пары индексов. В инвариантном виде условие антисимметричности для ковариантных тензоров записывается в виде:

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = -T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r), \quad 1 \leq i < j \leq r,$$

где  $T \in \mathcal{T}_r(\mathbb{M})$ ,  $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Эти тензоры неприводимы и называются *полностью антисимметричными* ковариантными тензорами ранга  $r$ .

Компонента полностью антисимметричного тензорного поля может быть отлична от нуля только в том случае, если все индексы различны, поскольку при совпадении двух или более индексов соответствующая компонента равна нулю. На многообразии размерности  $n$  не существует полностью антисимметричного тензора ранга большего, чем размерность многообразия, так как в этом случае по крайней мере два индекса будут совпадать.

Очевидно, что число независимых компонент полностью антисимметричного тензора ранга  $r$  равно числу выборок  $r$  различных индексов из  $n$ :  $C_n^r = n!/r!(n-r)!$ . В частности, полностью антисимметричный тензор  $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  максимального ранга  $n$  имеет только одну независимую компоненту. Нетрудно проверить, что при преобразовании координат  $x \mapsto y(x)$  полностью антисимметричный тензор типа  $(0, n)$  преобразуется по закону

$$X'_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial y^{\alpha_n}} X_{\beta_1 \dots \beta_n} = X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} J^{-1}, \quad (2.60)$$

где  $J := \det(\partial y^\alpha / \partial x^\beta)$  – якобиан преобразования координат. То есть каждая компонента полностью антисимметричного ковариантного тензора максимального ранга умножается на якобиан преобразования в минус первой степени, и ее фиксированную компоненту можно рассматривать как скалярную плотность степени  $-1$ .

В каждой карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  можно построить полностью антисимметричный объект, компоненты которого равны по модулю единице

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} := \operatorname{sgn} \sigma(\alpha_1 \dots \alpha_n), \quad \hat{\varepsilon}_{1 \dots n} = 1, \quad (2.61)$$

где  $\operatorname{sgn} \sigma$  – *знак перестановки*  $\sigma$ , который равен  $+1$  или  $-1$ , если для получения последовательности индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  из последовательности натуральных чисел  $1, \dots, n$  необходимо переставить соответственно четное и нечетное число пар индексов. Объект  $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  не может быть тензором, так как в общем случае якобиан преобразования  $J$  отличен от единицы. Из закона преобразования тензорных плотностей (2.7) следует, что каждую фиксированную компоненту  $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  можно рассматривать, как скалярную тензорную плотность степени  $-1$ . Поскольку компоненты антисимметричной тензорной плотности постоянны, то в произвольной системе координат справедливо равенство

$$\partial_\alpha \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0. \quad (2.62)$$

В (псевдо)римановом пространстве при наличии метрики  $g_{\alpha\beta}$  (см. раздел 4.1) можно построить полностью антисимметричный тензор

$$\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sqrt{|g|} \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (2.63)$$

где введено сокращенное обозначение для определителя метрики, которое будет часто использоваться в дальнейшем

$$g := \det g_{\alpha\beta}. \quad (2.64)$$

Полностью антисимметричный тензор (2.63) преобразуется по стандартному закону (2.60).

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и в дальнейшем мы примем следующее обозначение: шляпка над символом означает, что рассматривается тензорная плотность, а не тензор.

Полностью антисимметричные тензоры типа  $(k, 0)$  со всеми контравариантными индексами называются *поливекторами*. Поливектор максимального ранга  $n$  имеет одну независимую компоненту, которая при преобразовании координат преобразуется по правилу

$$X'^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = X^{\alpha_1 \dots \alpha_n} J, \quad (2.65)$$

В пространстве контравариантных тензоров можно ввести полностью антисимметричную тензорную плотность степени 1 с компонентами, равными по модулю единице, аналогично тому, как это было сделано для ковариантных тензоров. Мы положим

$$\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} := \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \operatorname{sgn}, \quad (2.66)$$

где множитель  $\operatorname{sgn}$  зависит от того задана ли на многообразии метрика или нет

$$\operatorname{sgn} := \begin{cases} 1, & \text{если метрика не задана,} \\ \operatorname{sgn}(\det g_{\alpha\beta}), & \text{если метрика задана.} \end{cases} \quad (2.67)$$

Компоненты этой плотности также равны по модулю единице и постоянны:  $\partial_\alpha \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$ . При наличии метрики можно ввести полностью антисимметричный контравариантный тензор

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (2.68)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что равенство (2.66) имеет смысл, несмотря на то, что индексы слева контравариантны, а справа ковариантны, так как компоненты тензорных плотностей  $\hat{\varepsilon}$  не зависят от выбора системы координат. Появление множителя (2.67) в определении (2.66) объясняется тем, что на (псевдо)римановом многообразии мы требуем, чтобы тензор с контравариантными индексами можно было бы получить из тензора с ковариантными индексами простым подъемом индексов:

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} := g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_n \beta_n} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_n}.$$

Отсюда следует равенство (2.66).

Наличие тензора  $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  позволяет представить компоненты произвольного ковариантного антисимметричного тензора максимального ранга в виде

$$X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = X^*(x) \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad X^* := \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \operatorname{sgn}, \quad (2.69)$$

где  $X^*(x)$  – некоторое псевдоскалярное поле (меняет знак при отражении одной из координат).

Аналогичное представление имеет место для произвольного контравариантного тензора максимального ранга. Это означает, что полностью антисимметричные тензоры максимального ранга имеют ровно одну независимую компоненту.

## 2.9. Отображения многообразий

Рассмотрим отображение  $h$  многообразия  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = m$ , в многообразие  $\mathbb{N}$ ,  $\dim \mathbb{N} = n$ ,

$$h : \mathbb{M} \ni x \mapsto y \in \mathbb{N}. \quad (2.70)$$

Многообразие  $\mathbb{N}$  мы будем называть *пространством-мишенью*. Пусть при этом отображении карта  $(\mathbb{U}, \varphi)$  многообразия  $\mathbb{M}$  отображается в некоторую карту  $(\mathbb{V}, \phi)$  многообразия  $\mathbb{N}$ ,  $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{V}$ . Обозначим координаты на  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  через  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , и  $y^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ . Тогда отображение

$$\phi \circ h \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \varphi(\mathbb{U}) \rightarrow \phi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{R}^n \quad (2.71)$$

двух областей евклидова пространства  $\varphi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^m$  и  $\phi(\mathbb{V}) \subset \mathbb{R}^n$  задается  $n$  функциями от  $m$  переменных  $y^\mu(x)$ . При этом размерность многообразия  $\mathbb{M}$  может быть меньше, равна или больше размерности  $\mathbb{N}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение гладких многообразий называется *гладким (дифференцируемым)*, если задается гладкими (дифференцируемыми) функциями (2.71) в полных атласах на  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$ .

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать гладкие отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференцируемое отображение (2.70) индуцирует линейное отображение касательных пространств

$$h_* : \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \ni X = X^\alpha \partial_\alpha \mapsto Y = h_* X = Y^\mu \partial_\mu \in \mathbb{T}_{h(x)}(\mathbb{N}) \quad (2.72)$$

следующим образом. Рассмотрим кривую  $\gamma \subset \mathbb{M}$ , проходящую через произвольную точку  $p \in \mathbb{M}$  в направлении произвольного вектора  $X_{(\gamma)}(p)$ . Эта кривая отобразится в некоторую кривую  $h(\gamma)$  на  $\mathbb{N}$ . По определению, вектор  $X_{(\gamma)}(p) \in \mathbb{T}_p(\mathbb{M})$  отображается в тот вектор  $Y_{(h\circ\gamma)} \in \mathbb{T}_{h(p)}(\mathbb{N})$ , который касается кривой  $h(\gamma)$  в точке  $h(p)$ . Поскольку вектор в точке  $p$  — это класс эквивалентности кривых, то это условие записывается в виде

$$h_*(X_{(\gamma)}(p)) = [h \circ \gamma] = Y_{(h\circ\gamma)}(h(p)), \quad X_{(\gamma)}(p) = [\gamma].$$

Теперь мы упростим обозначения, опустив индекс кривой у вектора и обозначение точки  $p$ . Поскольку по правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{y}^\mu(\phi \circ h \circ \gamma(t)) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha(\gamma(t)),$$

то вектор  $Y$  единственен и не зависит от представителя класса эквивалентности кривых, определяющих вектор  $X$  в точке  $x \in \mathbb{M}$ . Это отображение касательных пространств (2.72) называется *дифференциалом отображения*.

В компонентах дифференциал отображения задается матрицей Якоби:

$$Y^\mu = X^\alpha \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}. \quad (2.73)$$

Дифференциал отображения  $h_*$  является линейным отображением:

$$\begin{aligned} h_*(X + Y) &= h_*(X) + h_*(Y), & X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}), \\ h_*(aX) &= ah_*(X), & a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

множества всех векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$  на  $\mathbb{M}$  в множество векторных полей  $\mathcal{X}(h(\mathbb{M}))$  на образе  $h(\mathbb{M}) \subset \mathbb{N}$ , который может не совпадать со всем  $\mathbb{N}$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9.1. *Дифференциал отображения согласован со структурой алгебры Ли в пространствах векторных полей, т.е.*

$$h_*[X, Y] = [h_*X, h_*Y]. \quad (2.74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простая проверка.

Рассмотрим два отображения  $\mathbb{M} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{P}$ . Если обозначить координаты на многообразиях  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{P}$  соответственно через  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то по правилу дифференцирования сложной функции в соответствующих областях определения справедливо равенство

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Здесь, для краткости, мы опустили индексы. Отсюда следует, что дифференциал произведения равен произведению дифференциалов каждого отображения

$$(g \circ h)_* = g_* \circ h_*. \quad (2.75)$$

В координатах мы имеем обычное произведение матриц Якоби. Это уравнение говорит о том, что прямое отображение  $g \circ h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{P}$  не зависит от выбора промежуточного многообразия  $\mathbb{N} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ , т.е.



диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) & \xrightarrow{h_*} & \mathbb{T}_{h(x)}(\mathbb{N}) \\ & \searrow^{g_* \circ h_*} & \downarrow g_* \\ & & \mathbb{T}_{g(h(x))}(\mathbb{P}) \end{array}$$

коммутативна для всех точек  $x \in \mathbb{M}$ .

Дифференциал отображения естественным образом обобщается на случай произвольных тензорных полей типа  $(r, 0)$ , имеющих только контравариантные индексы, и обозначается  $(h_*)^r$ . При этом каждый контравариантный индекс суммируется с матрицей Якоби отображения.

**ПРИМЕР 2.9.1.** Для компонент контравариантных тензоров второго ранга имеем следующий закон преобразования

$$Y^{\mu\nu} = X^{\alpha\beta} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta},$$

где  $X = X^{\alpha\beta}(x) \partial_\alpha \otimes \partial_\beta \in \mathcal{T}^2(\mathbb{M})$  и  $Y = Y^{\mu\nu}(y) \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \mathcal{T}^2(\mathbb{N})$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если векторное поле рассматривается, как дифференцирование в алгебре функций, то дифференциал отображения определяется следующей формулой

$$(h_* X) f = X(f \circ h), \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{N}), X \in \mathcal{X}(\mathbb{M}). \quad (2.76)$$

При таком определении дифференциала отображения, его линейность очевидна. Это еще раз говорит о том, что алгебраические определения удобнее в тех случаях, когда исследуются алгебраические свойства.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Инъективное отображение многообразий  $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  индуцирует отображение дифференциальных форм в кокасательных пространствах, которое мы обозначим тем же символом, но со звездочкой сверху:

$$h^* : \mathbb{T}_{h(x)}^*(\mathbb{N}) \ni B \mapsto A = h^* B \in \mathbb{T}_x^*(\mathbb{M}). \quad (2.77)$$

Отображение дифференциальных форм  $h^*$  дуально к дифференциалу отображения  $h_*$  и определяется следующим равенством

$$A(X) = B(Y) \quad \text{или} \quad h^* B(X) = B(h_* X), \quad (2.78)$$

где  $Y = h_* X$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отображение дифференциальных форм действует в сторону, обратную самому отображению  $h$ .

При определении отображения дифференциальных форм  $h^*$  мы требуем, чтобы исходное отображение  $h$  было инъективным. В противном случае прообраз  $h^{-1}(h(x))$  для некоторого  $x \in \mathbb{M}$  состоит не из одного элемента, и отображение дифференциальных форм не определено. Отображение дифференциальных форм определено не на всех формах из  $\mathcal{T}_1(\mathbb{N})$ , а только на формах из образа инъективного отображения  $\mathcal{T}_1(h(\mathbb{M}))$ . Отображение дифференциальных форм  $h^*$  будет определено на множестве всех форм  $\mathcal{T}_1(\mathbb{N})$  тогда и только тогда, когда отображение  $h$  биективно.

В компонентах отображение дифференциальных форм записывается в виде

$$A_\alpha = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} B_\mu, \quad (2.79)$$

т.е. так же, как и дифференциал отображения, определяется матрицей Якоби.

Отображение дифференциальных форм естественным образом обобщается на тензорные поля из  $\mathcal{T}_s(\mathbb{N})$  типа  $(0, s)$ , имеющие только ковариантные индексы, и обозначается  $(h^*)^s$ .

**ПРИМЕР 2.9.2.** Для компонент ковариантных тензоров второго ранга имеем следующий закон преобразования

$$X_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} Y_{\mu\nu},$$

где  $X = X_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \otimes dx^\beta \in \mathcal{T}_2(\mathbb{M})$  и  $Y = Y_{\mu\nu}(y) dy^\mu \otimes dy^\nu \in \mathcal{T}_2(\mathbb{N})$

Из правила дифференцирования сложных функций следует, что отображение дифференциальных форм для произведения отображений равно произведению отображений дифференциальных форм, но взятых в обратном порядке

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*. \quad (2.80)$$

Для тензоров смешанного типа в общем случае не существует индуцированного отображения, поскольку дифференциал отображения и отображение дифференциальных форм действуют в разные стороны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Назовем *рангом отображения*  $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  ранг соответствующей матрицы Якоби

$$\text{rank } h := \text{rank } \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}.$$

Если  $\text{rank } h = m$  во всех точках многообразия  $\mathbb{M}$ , то отображение  $h$  называется *невырожденным*. Для этого необходимо, чтобы  $m \leq n$ .

Рассмотрим отображение (2.70) двух многообразий одинаковой размерности  $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{N}$  и одного класса дифференцируемости  $C^k$ . Если отображение  $h$  биективно, и оба отображения  $h$  и  $h^{-1}$  в координатах задаются функциями класса  $C^k$ , то отображение  $h$  называется *диффеоморфизмом*.

**ПРИМЕР 2.9.3.** Пусть  $(U, \varphi)$  карта на дифференцируемом многообразии  $\mathbb{M}$ . Тогда отображение  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  является диффеоморфизмом.

**ПРИМЕР 2.9.4.** Преобразование координат является диффеоморфизмом некоторых областей евклидова пространства.

Композиция двух диффеоморфизмов снова будет диффеоморфизмом. Таким образом, диффеоморфизм является отношением эквивалентности в категории дифференцируемых многообразий. С точки зрения дифференциальной геометрии два диффеоморфных между собой многообразия можно рассматривать, как одно многообразие, заданное в различных координатах, поэтому мы пишем  $\mathbb{M} \approx \mathbb{N}^1$ . В этом случае индуцированные отображения касательных пространств представляют собой не что иное, как правила преобразования тензорных полей при преобразовании координат.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Не имеет смысла рассматривать степень гладкости отображения, которая превышает гладкость самих многообразий.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Любой диффеоморфизм представляет собой гомеоморфизм многообразий, рассматриваемых, как топологические пространства, так как функции  $h$  и  $h^{-1}$  непрерывны. Обратное утверждение неверно. Как отмечено в разделе 2.1, на семимерной сфере можно задать несколько различных дифференцируемых структур. То есть гомеоморфные многообразия могут быть недиффеоморфны.

Множество невырожденных гладких отображений  $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$  многообразия  $\mathbb{M}$  в себя образует группу преобразований многообразия, которая обозначается  $\text{diff}(\mathbb{M})$ . Если многообразие тривиально (т.е. покрывается одной картой), то это просто группа преобразований координат  $\text{diff}(\mathbb{R}^n)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть для отображения (2.70)  $m < n$ . Если отображение касательного пространства  $T_x(\mathbb{M})$  для всех точек  $x \in \mathbb{M}$  на его образ в касательном пространстве  $T_{h(x)}(\mathbb{N})$  является взаимно однозначным, т.е.  $\text{rank } h = \dim \mathbb{M}$ , то отображение  $h$  называется *погружением*. По определению, любое невырожденное отображение задает погружение. При погружении само отображение  $h$  может не быть взаимно однозначным. Размерность многообразия  $\mathbb{M}$  не может превосходить размерности многообразия  $\mathbb{N}$ , так как в этом случае не может быть взаимной однозначности дифференциала отображения. Если само отображение  $h$  на его образ  $h(\mathbb{M})$  и его дифференциал являются взаимно однозначными, то отображение  $h$  называется *вложением*. В дальнейшем вложение многообразий мы будем обозначать специальным символом:  $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$ .

Конечно, каждое вложение одновременно является и погружением.

<sup>1</sup>Мы не используем обычный знак равенства, так как множества точек  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$  могут отличаться по другим признакам, например, по наличию групповой структуры.

ПРИМЕР 2.9.5. Отображение окружности  $\mathbb{S}^1$  на плоскость  $\mathbb{R}^2$  в виде восьмерки является погружением, но не вложением, см. рис. 2.10 *a*. В то же время отображение окружности в гладкую замкнутую кривую без самопересечений представляет собой вложение, рис. 2.10 *b*.

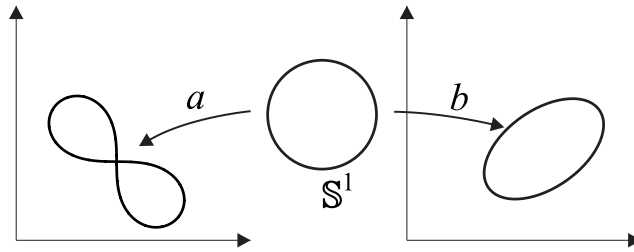


Рис. 2.10. Отображение окружности на плоскость в виде восьмерки является погружением, но не вложением (*a*). Вложение окружности в плоскость в виде гладкой замкнутой кривой без самопересечений (*b*).

Если  $m = n$ , отображение  $h$  биективно и дифференцируемо, а образ  $h(\mathbb{M})$  совпадает со всем  $\mathbb{N}$ , то точки многообразий  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$  можно отождествить и рассматривать вложение  $\mathbb{M} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \approx \mathbb{M}$  как диффеоморфизм. Нетривиальная ситуация может возникнуть, если многообразие  $\mathbb{M}$  отображается только на часть  $\mathbb{N}$ . Тогда мы имеем диффеоморфизм между многообразием  $\mathbb{M}$  и его образом  $h(\mathbb{M})$ .

## 2.10. Подмногообразия

Важным классом отображений многообразий являются подмногообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $f : \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$  – вложение многообразия  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{N}$ , размерностей  $m$  и  $n$ , при этом  $m \leq n$ , тогда пара  $(f, \mathbb{M})$  называется *подмногообразием* в  $\mathbb{N}$ .

В дальнейшем, если не оговорено противное, под вложением мы понимаем гладкое вложение, когда отображение  $f$  определяется гладкими функциями.

ПРИМЕР 2.10.1 (Лемниската Бернулли). Кривая четвертого порядка, заданная в декартовых координатах  $x, y$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (2.81)$$

называется *лемнискатой Бернулли*, рис. 2.11. Эта кривая обладает следующим свойством. Произведение расстояний от произвольной точки лемнискаты до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами. Верно и обратное утверждение. На плоскости можно выбрать такую систему декартовых координат, что произвольная кривая с данным свойством будет задана уравнением (2.81).

В полярных координатах  $r, \varphi$  уравнение лемнискаты имеет вид:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi).$$

Лемниската Бернулли не является одномерным многообразием, так как имеет точку самопересечения – начало координат. Точка самопересечения имеет касательные  $y = \pm x$  и является точкой перегиба. Площадь каждой петли равна  $a^2$ .

Рассмотрим вложение прямой в евклидову плоскость

$$\gamma : \mathbb{R} \ni t \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

гладко отобразив прямую в точки лемнискаты, как показано на рис. 2.11. При этом мы считаем, что точка  $t = 0$  отображается в начало координат  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Стрелки показывают, что концы прямой  $t = \pm\infty$  при вложении стремятся к началу координат  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Это – гладкое вложение. Однако топология прямой не совпадает с топологией, которая индуцирована вложением. Действительно, любая последовательность  $\{t_k\}$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \pm\infty$  в естественной топологии на прямой, будет сходиться к точке  $t = 0$  в индуцированной топологии. Конечно, вместо лемнискаты Бернулли можно было бы выбрать произвольную гладкую кривую в виде восьмерки.

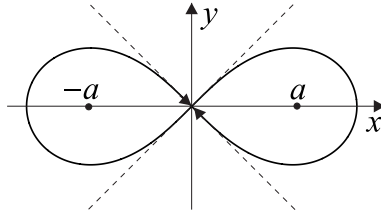


Рис. 2.11. Лемниската Бернулли.

**ПРИМЕР 2.10.2** (Всюду плотная обмотка тора). Двумерный тор  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  можно рассматривать, как двумерное многообразие, полученное путем отождествления противоположных сторон единичного квадрата на евклидовой плоскости. Тем самым точка тора задается упорядоченной парой чисел  $(x, y)$ , каждое из которых определено по модулю один,  $x \sim x + 1$  и  $y \sim y + 1$ . Зафиксируем пару чисел  $a$  и  $b \neq 0$  и рассмотрим отображение вещественной прямой в тор

$$f: \mathbb{R} \ni t \mapsto (at \bmod 1, bt \bmod 1) \in \mathbb{T}^2.$$

Если отношение  $a/b$  иррационально, то отображение  $f$  является вложением, причем образ прямой  $f(\mathbb{R})$  всюду плотен в  $\mathbb{T}^2$  (*всюду плотная обмотка тора*). Если отношение  $a/b$  рационально, то  $f$  представляет собой погружение, и его образ диффеоморфен окружности. Согласно данному выше определению всюду плотная обмотка тора является одномерным подмногообразием на торе. Для всюду плотной обмотки тора индуцированная топология на образе прямой не совпадает с естественной топологией на  $\mathbb{R}$ .

При вложении дифференцируемая структура и топология, заданные на  $\mathbb{M}$ , естественным образом переносятся на образ  $f(\mathbb{M})$ , поскольку отображение  $f$  инъективно и дифференцируемо. Тем самым многообразие  $\mathbb{M}$  диффеоморфно своему образу  $f(\mathbb{M})$ . С другой стороны, поскольку образ  $f(\mathbb{M})$  является некоторым подмножеством в пространстве-мишени  $\mathbb{N}$ , то на нем определяется индуцированная из  $\mathbb{N}$  топология. Рассмотренные выше примеры вложения прямой в плоскость и всюду плотной обмотки тора показывает, что топология на  $f(\mathbb{M})$ , наследуемая из  $\mathbb{M}$  при вложении, совсем не обязательно совпадает с топологией, индуцированной из  $\mathbb{N}$ . В общем случае топология из  $\mathbb{M}$  является более тонкой, чем топология, индуцированная из  $\mathbb{N}$ . Это наблюдение мотивирует следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть вложение  $f: \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$  является также и гомеоморфизмом. Тогда пара  $(f, \mathbb{M})$  называется *регулярным подмногообразием*, а  $f$  – *регулярным вложением*  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{N}$ .

Доказательство следующих трех теорем приведено в [4], теорема 3.4, следствие и теорема 3.5.

**ТЕОРЕМА 2.10.1.** Пусть  $(f, \mathbb{M})$  является  $m$ -мерным подмногообразием в  $n$ -мерном многообразии  $\mathbb{N}$ , причем  $m < n$ . Для того, чтобы пара  $(f, \mathbb{M})$  была регулярным подмногообразием в  $\mathbb{N}$ , необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым подмногообразием некоторого открытого подмногообразия в  $\mathbb{N}$ .

**ТЕОРЕМА 2.10.2.** Пара  $(f, \mathbb{M})$  является регулярным подмногообразием в  $\mathbb{N}$  тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует система координат  $y^\alpha$  на  $\mathbb{U}_{f(x)} \subset \mathbb{N}$ ,  $y^\alpha(f(x)) = 0$ , такая, что пересечение  $f(\mathbb{M}) \cap \mathbb{U}_{f(x)}$  определяется системой, состоящей из  $n - m$  уравнений:

$$y^{m+1} = y^{m+2} = \dots = y^n = 0.$$

**ТЕОРЕМА 2.10.3.** Пусть пара  $(f, \mathbb{M})$  является подмногообразием в  $\mathbb{N}$ . Если многообразие  $\mathbb{M}$  компактно, тогда вложение  $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  регулярно.

В дальнейшем под вложением мы будем понимать регулярное вложение, для краткости не оговаривая этого явно. В этом случае мы будем отождествлять подмногообразие  $\mathbb{M}$  и его образ  $f(\mathbb{M})$  и будем писать  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $\mathbb{U}$  является открытым подмножеством  $\mathbb{N}$ . Если ограничить гладкую структуру  $\mathbb{N}$  на  $\mathbb{U}$ , то  $\mathbb{U}$  становится многообразием той же размерности  $\dim \mathbb{U} = \dim \mathbb{N}$ . Тогда вложение  $f: \mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{N}$

осуществляется тождественным отображением, а подмногообразие  $\mathbb{U} \subset \mathbb{N}$  называется *открытым подмногообразием* в  $\mathbb{N}$ .

Пусть  $f(\mathbb{M})$  является подмногообразием в  $\mathbb{N}$  таким, что выполнены два условия:

- 1)  $f(\mathbb{M})$  – замкнутое подмножество в  $\mathbb{N}$ ;
- 2) для каждой точки  $y \in f(\mathbb{M})$  существует такая система координат  $y^\alpha$  на  $\mathbb{U}_y \subset \mathbb{N}$ , что пересечение  $f(\mathbb{M}) \cap \mathbb{U}_y$  задается уравнениями  $y^{m+1} = y^{m+2} = \dots = y^n = 0$ , где  $m = \dim \mathbb{M}$ .

Тогда подмногообразие  $f(\mathbb{M})$  называется *замкнутым подмногообразием* в  $\mathbb{N}$ . Размерность замкнутого подмногообразия  $f(\mathbb{M})$  всегда меньше размерности  $\mathbb{N}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если подмногообразие (без края)  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  имеет ту же размерность, что и  $\mathbb{N}$ , то оно будет обязательно открытым подмногообразием, так как в противном случае оно имело бы край. Теорема 2.10.2 утверждает, что любое подмногообразие  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  меньшей размерности  $1 < m < n$  является замкнутым подмногообразием.

Мы видим, что подмногообразия меньшей размерности  $1 < m < n$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$  можно задавать с помощью системы алгебраических уравнений на координаты, покрывающие все  $\mathbb{R}^n$ . Вернее, алгебраические уравнения задают только множества точек. Чтобы превратить это множество в многообразие мы предполагаем, что топология на  $\mathbb{M}$  задается вложением  $f : \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда подмногообразие определяется системой уравнений по крайней мере локально. Обратное утверждение неверно. Не каждая система алгебраических уравнений на координаты в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  определяет некоторое подмногообразие.

**ПРИМЕР 2.10.3.** Рассмотрим уравнение  $x^2 = y^2$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Оно определяет две пересекающиеся прямые, которые не являются многообразием.

Приведем критерий, который часто используется в приложениях.

**ТЕОРЕМА 2.10.4.** Для того, чтобы подмножество  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\dim \mathbb{M} = m \leq n$ , было подмногообразием класса  $C^k$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существовала окрестность  $\mathbb{U}$  этой точки и система  $n - m$  функций  $f^M(x) \in C^k(\mathbb{U})$ ,  $M = m + 1, \dots, n$ , определенных на  $\mathbb{U}$ , и обладающих следующими свойствами:

- 1) функции  $f^M$  – функционально независимы;
- 2) пересечение  $\mathbb{U} \cap \mathbb{M}$  в точности определяется системой уравнений

$$f^M = 0, \quad M = m + 1, \dots, n. \quad (2.82)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [31], теорема 33<sub>2</sub>.

Заметим, что если  $m = n$ , то уравнений не будет, а  $\mathbb{M}$  будет некоторым открытым подмножеством в  $\mathbb{M}$ . При  $m = 0$  число уравнений равно размерности многообразия. Тогда, если в точке  $x \in \mathbb{R}^n$  система уравнений (2.82) удовлетворена, то в некоторой окрестности точки  $x$  других решений кроме самой точки не будет. В этом случае подмногообразие  $\mathbb{M}$  имеет размерность 0 и представляет собой множество корней системы уравнений  $f^M = 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Подмногообразие  $(f, \mathbb{M})$  размерности  $n - 1$  в  $\mathbb{N}$  называется *гиперповерхностью* в  $\mathbb{N}$ .

Напомним, что функции  $f^M$  функционально независимы в области  $\mathbb{U}$  тогда и только тогда, когда  $n \times (n - m)$  матрица, составленная из частных производных

$$(\partial_\alpha f^M) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^{m+1} & \partial_1 f^{m+2} & \dots & \partial_1 f^n \\ \partial_2 f^{m+1} & \partial_2 f^{m+2} & \dots & \partial_2 f^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_n f^{m+1} & \partial_n f^{m+2} & \dots & \partial_n f^n \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

имеет постоянный ранг  $n - m$  во всех точках  $\mathbb{U}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Забегая вперед, переформулируем условие 1) в теореме 2.10.4 в терминах 1-форм. По определению, 1-формы  $df^M = dx^\alpha \partial_\alpha f^M$ , заданные на области  $\mathbb{U}$ , называются *линейно независимыми* в области  $\mathbb{U}$ , если в каждой точке этой области ранг матрицы (2.83) равен  $n - m$ . Поэтому условие функциональной независимости функций можно заменить условием линейной независимости 1-форм  $df^M$ .

Если подмногообразие  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$  задано с помощью  $n - m$  алгебраических уравнений (2.82), то множество функций  $f^M$ , в окрестности произвольной точки  $x \in \mathbb{M}$  всегда можно дополнить  $m$  функциями  $g^1(x), \dots, g^m(x)$  такими, что весь набор функций  $g^1, \dots, g^m, f^{m+1}, \dots, f^n$  будет функционально независим. В этом случае можно перейти в новую систему координат

$$\{y^\alpha\} = \{y^A, y^M\} = \{g^A, f^M\} = (g^1, \dots, g^m, f^{m+1}, \dots, f^n), \quad A = 1, \dots, m, \quad M = m + 1, \dots, n, \quad (2.84)$$

в которой подмногообразие  $\mathbb{M}$  будет задаваться особенно просто  $y^M := f^M = 0$ . При этом функции  $y^A = g^A$  образуют локальную систему координат на подмногообразии  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ . Конечно, выбор координат  $g^A$  на  $\mathbb{M}$  является неоднозначным. Отметим, что  $\{y^\alpha\}$  – это те координаты, которые фигурируют в теореме 2.10.2.

**ПРИМЕР 2.10.4.** Двумерная сфера  $\mathbb{S}_r^2$  радиуса  $r$  с центром в начале координат является замкнутым подмногообразием трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , которое задается одним уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Она является гиперповерхностью в  $\mathbb{R}^3$ . В сферической системе координат уравнение сферы задается уравнением  $r = \text{const}$ , а угловые координаты образуют систему координат на сфере.

Функции  $f^M(x)$  определяют  $n - m$  точных 1-форм. В силу их линейной независимости, в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  они определяют  $(n - m)$ -мерное подпространство в касательном пространстве  $\mathbb{T}_x^*(\mathbb{R}^n)$ . Ортогональное дополнение этого подпространства является касательным к подмногообразию  $\mathbb{M}$  и образовано всеми векторами  $X^\alpha \partial_\alpha \in \mathbb{T}_x(\mathbb{R}^n)$ , для которых выполнено условие  $X^\alpha \partial_\alpha f^M = 0$ . Это подпространство касательного пространства имеет размерность  $m$ , такую же, как и само подмногообразие. Нетрудно проверить, что, если два векторных поля  $X_1$  и  $X_2$  касательны к подмногообразию  $\mathbb{M}$ , то их коммутатор  $[X_1, X_2]$  также касателен.

Ответ на обратный вопрос, в каком случае распределение векторных полей на многообразии определяет касательные подпространства к некоторому подмногообразию, дает теорема Фробениуса (см. следующий раздел).

В координатах  $\{g^A, f^M\}$  дополнение касательного пространства к подмногообразию  $\mathbb{M}$  до полного касательного пространства к  $\mathbb{R}^n$  имеет простой геометрический смысл. Пусть в  $\mathbb{R}^n$  задано векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ . Тогда в координатах (2.84), связанных с подмногообразием, оно будет иметь компоненты

$$X = (X^\alpha \partial_\alpha g^A) \partial_A + (X^\alpha \partial_\alpha f^M) \partial_M.$$

При этом первое слагаемое лежит в касательном пространстве  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ .

В дальнейшем нам понадобится следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $f \in C^\infty(\mathbb{N})$  и  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  – подмногообразие, тогда отображение

$$f|_{\mathbb{M}}: \quad \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

называется *сужением* функции на подмногообразии. Функция  $f$  является *продолжением* функции  $g$  с некоторого подмногообразия  $\mathbb{M}$  на все  $\mathbb{N}$ , если ее сужение на  $\mathbb{M}$  совпадает с  $g$ ,  $f|_{\mathbb{M}} = g$ . Аналогично, сужением произвольного тензорного поля  $T \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$  на подмногообразии называется тензорное поле  $T|_{\mathbb{M}}$ , рассматриваемое только в точках  $x \in \mathbb{M}$ . Обратно, тензорное поле  $T \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$  является продолжением тензорного поля  $K \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ , заданного на подмногообразии  $\mathbb{M}$ , если его сужение совпадает с  $K$ ,  $T|_{\mathbb{M}} = K$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Два подмногообразия  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  многообразия  $\mathbb{N}$  называются *трансверсальными* в точке  $x \in \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$ , если касательные подпространства  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}_1)$  и  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}_2)$  порождают все касательное пространство  $\mathbb{T}_x(\mathbb{N})$ , т.е. касательные подпространства  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}_1)$  и  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M}_2)$  трансверсальны.

Трансверсальность подмногообразий означает, что в некоторой окрестности  $\mathbb{U}$  точки  $x \in \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$  существует такая система координат  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , что подмногообразия задаются условиями:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{U} &= \{x \in \mathbb{U} : x^{\dim \mathbb{M}_1 + 1} = 0, \dots, x^n = 0\}, \\ \mathbb{M}_2 \cap \mathbb{U} &= \{x \in \mathbb{U} : x^1 = 0, \dots, x^{n - \dim \mathbb{M}_2} = 0\}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.10.5. Пусть  $\mathbb{N} := \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ . Тогда подмногообразия  $(\mathbb{M}_1, x_2) \subset \mathbb{N}$ , где  $x_2 \in \mathbb{M}_2$ , и  $(x_1, \mathbb{M}_2) \subset \mathbb{N}$ , где  $x_1 \in \mathbb{M}_1$ , трансверсальны в точке  $x = (x_1, x_2)$ . Если в окрестностях  $\mathbb{U}_1 \subset \mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{M}_2$ , где  $x_1 \in \mathbb{U}_1$  и  $x_2 \in \mathbb{U}_2$ , заданы системы координат,  $x_1 = \{x_1^\mu\}$  и  $x_2 = \{x_2^\lambda\}$ , то подмногообразия задаются уравнениями:

$$\begin{aligned} (\mathbb{U}_1, x_2) &= \{x \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 : x_2^\lambda = \text{const}, \forall \lambda\}, \\ (x_1, \mathbb{U}_2) &= \{x \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 : x_1^\mu = \text{const}, \forall \mu\}. \end{aligned}$$

Конечно, системы координат можно выбрать таким образом, что точки  $x_1$  и  $x_2$  будут находиться в началах систем отсчета.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  трансверсально к подмногообразию  $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}$  в точке  $x \in f^{-1}(\mathbb{L} \cap f(\mathbb{M}))$ , если образ  $f_*(\mathbb{T}_x(\mathbb{M}))$  трансверсален к  $\mathbb{T}_{f(x)}(\mathbb{L})$ . Два отображения  $f_1 : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{N}$  и  $f_2 : \mathbb{M}_2 \rightarrow \mathbb{N}$  трансверсальны друг к другу в точке  $(x_1, x_2) \in \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$ , где  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ , если образы  $f_{1*}(\mathbb{T}_{x_1}(\mathbb{M}_1))$  и  $f_{2*}(\mathbb{T}_{x_2}(\mathbb{M}_2))$  порождают все касательное пространство  $\mathbb{T}_{f_1(x_1)}(\mathbb{N})$ .

Понятия трансверсальных подмногообразий и трансверсальных отображений естественным образом сводятся друг к другу. Если  $f_{1,2} : \mathbb{M}_{1,2} \hookrightarrow \mathbb{N}$  – вложения, то трансверсальность вложений эквивалентна трансверсальности подмногообразий  $f_1(\mathbb{M}_1) \subset \mathbb{N}$  и  $f_2(\mathbb{M}_2) \subset \mathbb{N}$ .

## 2.11. Теорема Фробениуса

В разделе 2.6.5 было показано, что у любого дифференцируемого векторного поля  $X$  существуют интегральные кривые. Если векторное поле нигде не обращается в нуль на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , то интегральная кривая, проходящая через некоторую точку  $x \in \mathbb{M}$ , представляет собой одномерное подмногообразие, и в окрестности точки  $x$  существует такая система координат, что  $X = \partial_1$ . Поставим более общую задачу. Пусть в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  задано  $k$  векторных полей  $(X_1, \dots, X_k) = \{X_\lambda\}$ ,  $\lambda = 1, \dots, k < n$ , которые линейно независимы в каждой точке  $x \in \mathbb{U}$ . Возникает вопрос о том, существуют ли такие подмногообразия в  $\mathbb{M}$ , касательные пространства к которым в каждой точке  $x \in \mathbb{U}$  совпадают с подпространством, натянутым на векторы  $\{X_\lambda\}$ ? Ответ на этот вопрос дает теорема Фробениуса. Чтобы ее сформулировать введем несколько новых понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Распределением  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  размерности  $k$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется сопоставление каждой точке  $x \in \mathbb{M}$   $k$ -мерного подпространства в касательном пространстве  $\mathbb{L}_x(\mathbb{M}) \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ . Распределение называется дифференцируемым, если каждая точка  $x \in \mathbb{M}$  имеет окрестность  $\mathbb{U}$  и  $k$  дифференцируемых векторных полей  $(X_1, \dots, X_k)$  на  $\mathbb{U}$ , которые образуют базис в  $\mathbb{L}_x(\mathbb{M})$  для всех  $x \in \mathbb{U}$ . Множество векторных полей  $(X_1, \dots, X_k)$  называется локальным базисом распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  на  $\mathbb{U}$ . Векторное поле  $X$  принадлежит распределению, если  $X(x) \in \mathbb{L}_x(\mathbb{M})$  для всех  $x \in \mathbb{M}$ . Распределение называется инволютивным или вполне интегрируемым, если для любых векторных полей из распределения  $X, Y \in \mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  их коммутатор также принадлежит распределению:  $[X, Y] \in \mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ .

Ни одно из векторных полей  $X_\lambda$  не может обращаться в нуль, так как в соответствующей точке векторные поля были бы линейно зависимы.

Инволютивность векторных полей, принадлежащих распределению, означает, что эти векторные поля образуют подалгебру Ли алгебры Ли векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связное подмногообразие  $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$  называется интегральным многообразием распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ , если  $f_*(\mathbb{T}_x(\mathbb{N})) = \mathbb{L}_{f(x)}(\mathbb{M})$ , для всех  $x \in \mathbb{N}$ . Если не существует других интегральных многообразий, содержащих  $\mathbb{N}$ , то  $\mathbb{N}$  называется максимальным интегральным многообразием для распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку интегральное многообразие – это подмногообразие и, следовательно, задается парой  $(f, \mathbb{N})$ , где  $f$  – вложение  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{M}$ , то определение максимального интегрального многообразия требует уточнения. А именно, мы говорим, что интегральное многообразие  $(f_1, \mathbb{N}_1)$  содержит интегральное многообразие  $(f_2, \mathbb{N}_2)$ , если  $f_2(\mathbb{N}_2)$  есть подмножество в  $f_1(\mathbb{N}_1)$ :  $f_2(\mathbb{N}_2) \subset f_1(\mathbb{N}_1)$ . Из определения максимального интегрального многообразия сразу следует его единственность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11.1. Пусть  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  – гладкое распределение на многообразии  $\mathbb{M}$  такое, что через каждую точку  $x \in \mathbb{M}$  проходит интегральное многообразие, тогда распределение  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  инволютивно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $X, Y$  – два произвольных векторных поля, принадлежащих распределению  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ . Пусть  $(f, \mathbb{N})$  – интегральное многообразие, проходящее через точку  $f(x) \in \mathbb{M}$ ,  $x \in \mathbb{N}$ . Поскольку отображение  $f$  в каждой точке интегрального многообразия  $x \in \mathbb{N}$  задает изоморфизм  $T_x(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{L}_{f(x)}(\mathbb{M})$ , то на подмногообразии  $\mathbb{N}$  существуют векторные поля  $\tilde{X}(x) = f_*^{-1}X(f(x))$  и  $\tilde{Y} = f_*^{-1}Y(f(x))$ . Поскольку коммутатор касательных векторов к  $\mathbb{N}$  также касателен к  $\mathbb{N}$ , то

$$[X, Y](f(x)) = f_*[\tilde{X}, \tilde{Y}](x) \in \mathbb{L}_x(\mathbb{M}).$$

**ТЕОРЕМА 2.11.1 (Фробениус).** Пусть  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  –  $k$ -мерное гладкое инволютивное распределение на многообразии  $\mathbb{M}$ . Тогда для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует интегральное многообразие распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ , проходящее через точку  $x$ . Кроме того, существует такая система координат в некоторой окрестности точки  $x$ , что базис распределения имеет вид  $(\partial_1, \dots, \partial_k)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [27], теорема 1.60.

Предложение 2.11.1 дает необходимое условие для существования интегральных многообразий, а теорема 2.11.1 – достаточное. Обе теоремы локальны, так как в них говорится об интегральных многообразиях, проходящих через точку многообразия.

Если распределение  $\mathcal{L}_k(\mathbb{U})$  задано набором гладких линейно независимых векторных полей

$$(X_1, \dots, X_k) = \{X_A\}, \quad A = 1, \dots, k < n,$$

в каждой точке  $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , то будем писать  $\mathcal{L}_k(\mathbb{U}) = \{X_A\}$ . В этом случае будем говорить, что распределение задано *распределением векторных полей*. Тогда теорему Фробениуса вместе с предложением 2.11.1 можно переформулировать.

**ТЕОРЕМА 2.11.2 (Фробениус).** Пусть  $\mathcal{L}_k(\mathbb{U}) = \{X_A\}$ ,  $A = 1, \dots, k$ , является  $k$ -мерным гладким распределением векторных полей в области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ . Тогда для существования такой системы координат в некоторой подобласти  $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ , что распределение имеет вид

$$\mathcal{L}_k(\mathbb{V}) = (\partial_1, \dots, \partial_k) \quad (2.85)$$

необходимо и достаточно, чтобы коммутатор векторных полей также принадлежал распределению,

$$[X_A, X_B] = f_{AB}^C X_C \in \mathbb{L}_x(\mathbb{M}), \quad \forall x \in \mathbb{U}, \quad (2.86)$$

где  $f_{AB}^C(x)$  – некоторые гладкие функции на  $\mathbb{U}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [4], теорема 4.4.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Конечно, функции  $f_{AB}^C$  в теореме Фробениуса не могут быть произвольными. Из определения (2.86) следует, что они антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам, вытекающим из тождеств Якоби для коммутатора векторных полей.

Допустим, что на многообразии  $\mathbb{M}$  существует гладкое распределение  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ . Тогда существование системы координат (2.85) в окрестности каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  означает следующее. Уравнения

$$x^\alpha = \text{const}, \quad \alpha = k + 1, \dots, n$$

определяют  $k$ -мерные подмногообразия, которые являются интегральными многообразиями распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ , причем каждое векторное поле  $X_A$  касается одного из подмногообразий. Интегральные многообразия не пересекаются, так как в точке пересечения у нас не было бы подмногообразия. Кроме того, через каждую точку  $\mathbb{M}$  проходит одно подмногообразие. Тем самым  $k$ -мерное распределение  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  расслаивает область  $\mathbb{V} \subset \mathbb{M}$ , представляя ее в виде объединения несчетного числа  $k$ -мерных подмногообразий. Очевидно, что интегральная кривая для любого векторного поля из заданного инволютивного распределения, проходящая через точку  $x \in \mathbb{M}$ , целиком лежит в интегральном подмногообразии, содержащем эту точку.

**ПРИМЕР 2.11.1.** Произвольное дифференцируемое векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ , не равное нулю ни в одной точке, задает одномерное распределение на  $\mathbb{M}$ . Это распределение инволютивно. Интегральными многообразиями одномерного распределения являются интегральные кривые векторного поля  $X$ .



ПРИМЕР 2.11.2. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с выколотым началом координат,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . Отличные от нуля векторные поля  $\partial_\theta$  и  $\partial_\varphi$  коммутируют и, значит, находятся в инволюции. Интегральными подмногообразиями этого распределения являются сферы  $r = \text{const}$  с центром в начале координат. Угловые координаты  $\theta, \varphi$  и есть те координаты, которые фигурируют в теореме Фробениуса.

Векторные поля

$$J_1 = \frac{1}{2}(y\partial_z - z\partial_y), \quad J_2 = \frac{1}{2}(z\partial_x - x\partial_z), \quad J_3 = \frac{1}{2}(x\partial_y - y\partial_x), \quad (2.87)$$

заданные в декартовых координатах, являются генераторами алгебры  $\mathfrak{so}(3)$  и находятся в инволюции. Интегральными подмногообразиями для них также являются сферы. Однако поля (2.87) не задают базис распределения, так как линейно зависимы:

$$xJ_1 + yJ_2 + zJ_3 = 0.$$

Сформулируем глобальный вариант теоремы Фробениуса.

ТЕОРЕМА 2.11.3 (Фробениус). Пусть  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  – гладкое инволютивное  $k$ -мерное распределение. Тогда через каждую точку  $x \in \mathbb{M}$  проходит единственное максимальное  $k$ -мерное интегральное многообразие  $f: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$  распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$ . Любое другое связанное интегральное многообразие этого распределения, проходящее через точку  $x$ , содержится в  $(f, \mathbb{N})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [32], § VIII, теорема 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае интегральное многообразие распределения  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M})$  может не быть регулярным подмногообразием размерности  $k$  в  $\mathbb{M}$ . Примером является иррациональная обмотка тора в примере 2.10.2.

Эта теорема означает, что, если на всем многообразии  $\mathbb{M}$  существует гладкое инволютивное  $k$ -мерное распределение, то оно представляет собой слоение, т.е. объединение несчетного числа  $k$ -мерных максимальных интегральных многообразий (листов) данного распределения (см. следующий раздел).

Переформулируем теорему Фробениуса на языке дифференциальных форм. Дополним поля  $\{X_A\} = (X_1, \dots, X_k)$  в окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$   $n - k$  векторными полями  $\{X_M\} = (X_{k+1}, \dots, X_n)$  так, чтобы вся совокупность векторных полей  $\{X_A, X_M\} = (X_1, \dots, X_n)$  была линейно независима в каждой точке  $x \in \mathbb{U}$ . Пусть  $\{A^A, A^M\} = (A^1, \dots, A^n)$  – соответствующие дуальные 1-формы. Тогда в каждой точке  $x \in \mathbb{U}$  1-формы  $A^M$  определяют ортогональное дополнение  $(\mathcal{L}_k)^\perp$ . Это значит, что локально задание распределения векторных полей эквивалентно нахождению решения системы  $n - k$  уравнений на дифференциалы  $dx^\alpha$ ,

$$A^M = dx^\alpha A_\alpha^M = 0, \quad M = k + 1, \dots, n. \quad (2.88)$$

Эта система называется *пфаффовой системой уравнений*.

Из тождества (3.36) следуют равенства

$$2dA^M(X_A, X_B) = X_A(A^M(X_B)) - X_B(A^M(X_A)) - A^M([X_A, X_B]) = 0, \quad (2.89)$$

так как распределение векторных полей удовлетворяет условию теоремы Фробениуса (2.86). Это значит, что распределение векторных полей  $\mathcal{L}_k$  удовлетворяет условию теоремы Фробениуса тогда и только тогда, когда

$$dA^M(X_A, X_B) = 0, \quad \forall A, B = 1, \dots, k, \quad \forall M = k + 1, \dots, n.$$

Для любой 2-формы, в том числе и для  $dA^M$ , справедливо представление

$$dA^M = B^M_N \wedge A^N + g^M_{BA} A^A \wedge A^B,$$

где  $\{B^M_N\}$  и  $\{g^M_{BA}\}$  – некоторые наборы, соответственно, 1-форм и функций. Поскольку  $A^A(X_B) = \delta_B^A$ , то из равенства (2.89) следует, что  $g^M_{BA} = 0$ . Таким образом, справедливо разложение

$$dA^M = B^M_N \wedge A^N,$$

которое эквивалентно условию коммутативности векторных полей (2.86).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система уравнений Пфаффа называется *вполне интегрируемой*, если существует такая система координат  $y^\alpha(x)$ , что для подмногообразий, определяемых системой уравнений

$$y^M = \text{const} \Leftrightarrow dy^M = dx^\alpha \partial_\alpha y^M = 0, \quad M = k+1, \dots, n, \quad (2.90)$$

выполнялась система уравнений Пфаффа (2.88).

Для вполне интегрируемой системы уравнений Пфаффа распределение векторных полей  $\mathcal{L}_k$  задается в точности первыми  $k$  координатными полями  $\partial_1, \dots, \partial_k$ . Обратное утверждение также справедливо. Таким образом, теорему Фробениуса можно переформулировать полностью в терминах 1-форм.

ТЕОРЕМА 2.11.4 (Фробениус). *Для того, чтобы система уравнений Пфаффа*

$$A^M = 0, \quad M = k+1, \dots, n, \quad (2.91)$$

*была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой набор 1-форм  $B^M_N$ , что*

$$dA^M = B^M_N \wedge A^N. \quad (2.92)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если все 1-формы  $A^M$  замкнуты,  $dA^M = 0$ , то система уравнений Пфаффа (2.91) вполне интегрируема.*

ПРИМЕР 2.11.3. Рассмотрим уравнение Пфаффа на 1-форму заданную на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  в декартовой системе координат

$$dxP + dyQ = 0, \quad (2.93)$$

где  $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Для определенности будем считать, что  $P \neq 0$ . Тогда 1-формы

$$A^1 := dxP + dyQ \quad \text{и} \quad A^2 := dy$$

можно выбрать в качестве базиса 1-форм на плоскости. Соответствующий ему дуальный базис векторных полей имеет вид

$$X_1 = \left( \frac{1}{P}, 0 \right), \quad X_2 = \left( -\frac{Q}{P}, 1 \right).$$

Действительно, нетрудно проверить равенство  $A^i(X_j) = \delta_j^i$ , где  $i, j = 1, 2$ . Векторное поле  $X_2$  определяет ортогональное дополнение к  $A^1$  и задает уравнения, определяющие интегральные кривые в параметрическом виде

$$\dot{x} = -\frac{Q}{P}, \quad \dot{y} = 1.$$

Отсюда следует уравнение на форму интегральной кривой

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P},$$

которое эквивалентно уравнению Пфаффа (2.93). Это уравнение всегда интегрируемо. Нетрудно проверить, что в двумерном случае 1-формы  $B$  в условии теоремы Фробениуса (2.92) всегда существуют.

Отметим, что интегрируемость уравнения Пфаффа (2.93) совсем не означает, что 1-форма  $A^1$  является точной, т.е.  $A^1 = df$  для некоторой функции  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Критерием точности 1-формы на плоскости являются нетривиальные условия интегрируемости  $\partial_x Q = \partial_y P$ , которые не имеют отношения к интегрируемости уравнений Пфаффа. Полная интегрируемость уравнения Пфаффа  $A^1 = 0$  означает существование такой функции  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , что  $df = 0$  для любой траектории, определяемой уравнением Пфаффа (2.93), а не то, что  $A = df$ .

ПРИМЕР 2.11.4. Рассмотрим уравнение Пфаффа на 1-форму в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  в декартовой системе координат

$$A = dxP + dyQ + dzR = 0, \quad (2.94)$$

где  $P, Q, R \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . Полная интегрируемость этого уравнения означает существование функции  $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$  такой, что равенство  $f = \text{const}$  является первым интегралом уравнения Пфаффа (2.94). Из теоремы Фробениуса следует критерий интегрируемости, который можно (только для трехмерного многообразия) записать в виде

$$dA = B \wedge A \Leftrightarrow dA \wedge A = 0. \quad (2.95)$$

Поскольку

$$dA = dx \wedge dy(\partial_x Q - \partial_y P) + dy \wedge dz(\partial_y R - \partial_z Q) + dz \wedge dx(\partial_z P - \partial_x R),$$

то необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнения (2.94) является равенство

$$dA \wedge A = dx \wedge dy \wedge dz [P(\partial_y R - \partial_z Q) + Q(\partial_z P - \partial_x R) + R(\partial_x Q - \partial_y P)] = 0.$$

**ПРИМЕР 2.11.5.** Покажем, что в общем случае, когда распределение не является инволютивным, интегральные многообразия отсутствуют. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана 1-форма

$$A = dx + ydz.$$

Ее внешняя производная равна

$$dA = dy \wedge dz.$$

Поскольку

$$dA \wedge A = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0,$$

то условие теоремы Фробениуса не выполняются, которое в трехмерном случае имеет вид (2.95). Это значит, что уравнение Пфаффа  $A = 0$  в данном случае неинтегрируемо.

Посмотрим на эту задачу с точки зрения векторных полей. Ортогональное дополнение к форме  $A$  натянуто, например, на векторные поля

$$X = -y\partial_x + \partial_z \quad \text{и} \quad Y = \partial_y,$$

поскольку они линейно независимы и

$$A(X) = 0, \quad A(Y) = 0.$$

Эти векторные поля не находятся в инволюции, так как их коммутатор нельзя представить в виде линейной комбинации

$$[X, Y] = \partial_x \neq fX + gY, \quad f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Это значит, что условие теоремы Фробениуса нарушено.

Докажем от противного, что у векторных полей  $X, Y$  интегральных поверхностей не существует. Допустим, что через начало координат проходит интегральная поверхность. Это значит, что, двигая начало координат вдоль интегральных кривых, задаваемых векторными полями, мы никогда не покинем эту поверхность. Векторные поля  $X, Y$  задают потоки  $s_X(t), s_Y(t)$ , проходящие через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  (см. раздел 2.6.5),

$$\begin{aligned} s_X : \quad t \times (x_0, y_0, z_0) &\mapsto (-y_0 t + x_0, y_0, t + z_0), \\ s_Y : \quad t \times (x_0, y_0, z_0) &\mapsto (x_0, t + y_0, z_0). \end{aligned}$$

Коммутатору векторных полей  $[Y, X]$  соответствует отображение

$$s_Y^{-1}(t_2) s_X^{-1}(t_1) s_Y(t_2) s_X(t_1)$$

При этом начало координат перейдет в точку

$$(0, 0, 0) \xrightarrow{s_X(t_1)} (0, 0, t_1) \xrightarrow{s_Y(t_2)} (0, t_2, t_1) \xrightarrow{s_X^{-1}(t_1)} (t_1 t_2, t_2, 0) \xrightarrow{s_Y^{-1}(t_2)} (t_1 t_2, 0, 0).$$

Ясно, что не существует такой линейной комбинации векторных полей  $fX + gY$ , чей поток переводил бы начало координат в точку  $(t_1 t_2, 0, 0)$ . Тем самым мы пришли к противоречию, что и доказывает отсутствие интегральной поверхности, проходящей через начало координат. Аналогичное построение можно провести для произвольной точки  $\mathbb{R}^3$ . По сути дела доказательство теоремы Фробениуса сводится к такому же построению в общем случае.

## 2.12. Слоения

Слоения обобщают понятие расслоения, введенное в разделе 2.4. Они часто возникают и играют большую роль в теории динамических систем. Мы начнем с простейшего примера слоения, который поможет понять данное ниже общее определение.

**ПРИМЕР 2.12.1 (Тривиальное слоение).** Представим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с естественной топологией и декартовой системой координат в виде прямого произведения:

$$\mathbb{R}^n \ni x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \quad 1 \leq k < n.$$

Построим многообразие  $M^k$  меньшей размерности  $k$ , которое как множество совпадает со всем  $\mathbb{R}^n$ , т.е.  $M^k = \mathbb{R}^n$ , и задает на нем структуру слоения. Базу топологии  $M^k$  зададим открытыми множествами вида

$$\mathbb{V}_z := \{(y, z) \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{O},\},$$

где  $\mathbb{O}$  – открытое подмножество в  $\mathbb{R}^k$ , для каждой фиксированной точки  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Эта топология тоньше исходной топологии в  $\mathbb{R}^n$ . Назовем листом тривиального слоения сечение евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  гиперплоскостью  $z = \text{const}$ :

$$\mathbb{V}_z := \{(y, z) \in \mathbb{R}^n : y \in \mathbb{R}^k, z = \text{const}\}.$$

Тогда многообразии  $M^k$  представляет собой несвязное объединение всех листов

$$M^k = \bigcup_{z \in \mathbb{R}^{n-k}} \mathbb{V}_z$$

и покрывается картами

$$\psi_z : \mathbb{V}_z \ni (y, z) \mapsto y \in \mathbb{R}^k.$$

Рассмотренную конструкцию можно представить по-другому. Рассмотрим два евклидова пространства:  $\mathbb{R}^k$  с обычной топологией и  $\mathbb{R}_D^{n-k}$  с дискретной топологией, что отмечено индексом  $D$ . Тогда многообразие  $M^k$  является топологическим произведением  $M^k = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_D^{n-k}$  и как множество совпадает с  $\mathbb{R}^n$ .

В рассмотренном примере многообразии  $M^k$  несвязно и состоит из несчетного множества связных компонент (листов)  $\mathbb{V}_z$ , которые параметризуются точками  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Эти свойства лежат в основе общего определения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть на множестве  $M$  заданы две структуры многообразия разных размерностей. То есть у нас есть два многообразия:  $M^n$ ,  $\dim M^n = n$ , и  $M^k$ ,  $\dim M^k = k$ , где  $1 \leq k < n$ , которые совпадают как множества:  $M^n = M^k = M$ . Многообразие  $M^n$  называется *слоением*, если на нем дополнительно определена другая более тонкая топология и вторая соответствующая ей структура многообразия меньшей размерности  $M^k$ . Поскольку размерность многообразия  $M^k$  меньше размерности многообразия  $M^n$ , то многообразии  $M^k$  не может быть связным, и  $M^n$  представляет собой несчетное объединение связных компонент  $M^k$ . Связная компонента многообразия  $M^k$ , содержащая точку  $p \in M^n$ , называется *листом слоения*, проходящим через эту точку. Мы говорим, что многообразии  $M^k$  *слоит* многообразии  $M^n$ . Числа  $k$  и  $n - k$  называются соответственно *размерностью* и *коразмерностью* слоения. Слоение мы будем обозначать парой  $(M^n, M^k)$ .

По определению, через каждую точку  $p \in M^n$  проходит один и только один лист. В общем случае листы устроены довольно сложно. Как покажет дальнейший пример слоения тора, листы могут не быть даже регулярными подмногообразиями в  $M^n$ . Многообразии  $M^n$  является объединением своих листов, число которых бесконечно и не может быть счетным из-за разных размерностей. Многообразии  $M^k$  также является объединением листов и не может быть связным, так как каждый лист является открытым подмножеством и представляет собой компоненту связности. В этом смысле многообразии  $M^n$  слоится на листы.

Можно доказать, что если  $(M^n, M^k)$  – слоение, то на многообразии  $M^n$  существует атлас  $\{U_i, \varphi_i\}$ ,  $i \in I$ , со следующими свойствами. Пусть

$$\varphi : M^n \supset U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

– карта исходной дифференцируемой структуры многообразия  $\mathbb{M}^n$ . Представим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  в виде прямого произведения  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , тогда для всех  $p \in \mathbb{U}$

$$\varphi(p) = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Для каждой фиксированной точки  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$  обозначим

$$\varphi(\mathbb{U})|_z = \{(y, z) \in \varphi(\mathbb{U}) : z = \text{const}\}$$

сечение образа  $\varphi(\mathbb{U})$  гиперплоскостью  $z = \text{const}$ . Соответствующий прообраз

$$\mathbb{V}_z := \varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{U})|_z)$$

называется *локальным листом*. Локальный лист является частью листа, проходящего через точку  $\varphi^{-1}(y, z)$ . Каждый локальный лист – это открытое подмногообразие (возможно пустое) в  $\mathbb{M}^k$ , а пара  $(\mathbb{V}_z, \psi_z)$  для непустого  $\mathbb{V}_z$  является картой на многообразии  $\mathbb{M}^k$ :

$$\psi_z : \mathbb{M}^k \supset \mathbb{V}_z \rightarrow \psi_z(\mathbb{V}_z) \subset \mathbb{R}^k,$$

где отображение  $\psi_z := \pi_k \circ \varphi|_{\mathbb{V}_z}$  определено естественной проекцией

$$\pi_k : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (y, z) \mapsto y \in \mathbb{R}^k$$

и сужением  $\varphi|_{\mathbb{V}_z}$  отображения  $\varphi$  на  $\mathbb{V}_z$ . Описанная конструкция изображена на рис. 2.12.

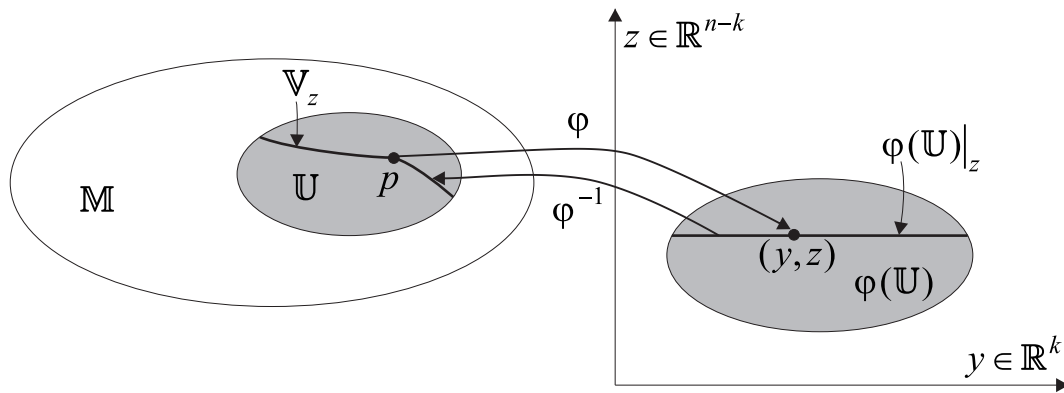


Рис. 2.12. Карта и локальный лист слоения

Функции склейки данного атласа для любых пересекающихся карт имеют вид

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \supset \varphi_i(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \ni y, z \mapsto y', z' \in \varphi_j(\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

где  $y' = y'(y, z)$ , но  $z' = z'(z)$ . В этом случае локальные листы для этих карт принадлежат одному листу слоения тогда и только тогда, когда они содержат хотя бы одну точку из пересечения  $p \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ . Условие того, что функции перехода  $z' = z'(z)$  зависят только от  $z$  необходимо и достаточно, для того, чтобы склеивание локальных листов не зависело от выбора точки  $p$  из пересечения. Действительно, если  $q, p \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$  – две различные точки из пересечения координатных окрестностей, то в этих картах они имеют координаты  $(y_p, z_p)$ ,  $(y'_p, z'_p)$  и  $(y_q, z_q)$ ,  $(y'_q, z'_q)$ . Если  $z_p = z_q$ , то  $z'_p = z'_q$  тогда и только тогда, когда  $z' = z'(z)$ .

Теперь рассмотрим несколько типичных примеров слоений.

**ПРИМЕР 2.12.2.** Пусть  $dy/dx = f(x, y)$  – обыкновенное дифференциальное уравнение, где правая часть  $f(x, y)$  – функция класса  $C^r$  в некоторой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ . Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что через каждую точку области  $\mathbb{U}$  проходит одна и только одна интегральная кривая (решение) данного уравнения класса  $C^{r+1}$ . Поскольку решение является функцией класса  $C^r$  от начальных данных, то объединение всех интегральных кривых образует одномерное многообразие  $\mathbb{V}$ , которое слоит  $\mathbb{U}$ .

Аналогичный результат справедлив и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных ситуация существенно отличается.

**ПРИМЕР 2.12.3 (Распределение).** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}^n$  задано  $k$ -мерное распределение векторных полей  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M}^n)$ , где  $1 \leq k < n$ , которое находится в инволюции (см. раздел 2.11). Напомним, что  $k$ -мерное распределение векторных полей ставит каждой точке многообразия некоторое подпространство размерности  $k$  в касательном пространстве к данной точке:

$$\mathbb{M}^n \ni p \mapsto \mathbb{L}_p(\mathbb{M}^n) \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{M}^n)$$

Тогда согласно теореме Фробениуса через каждую точку  $p \in \mathbb{M}^n$  проходит интегральное подмногообразие данного распределения размерности  $k$ . Эти интегральные подмногообразия можно рассматривать как листы слоения  $(\mathbb{M}^n, \mathbb{M}^k)$ .

Рассмотрим слоение  $\mathbb{M}^n$ , которое слонится многообразием  $\mathbb{M}^k$ . Тогда определено касательное пространство к листу  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M}^k)$  в произвольной точке  $p \in \mathbb{M}^n$ . Размерность этого пространства равна  $k$ , и оно является  $k$ -мерным подпространством касательного пространства  $\mathbb{T}_p(\mathbb{M}^n)$ . Следовательно, определено  $k$ -мерное распределение векторных полей  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M}^n)$  на многообразии  $\mathbb{M}^n$ . Вместе с предыдущим примером это доказывает следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 2.12.1.** *Любое гладкое слоение  $(\mathbb{M}^n, \mathbb{M}^k)$ ,  $1 \leq k < n$ , находится во взаимно однозначном соответствии с  $k$ -мерным гладким инволютивным распределением векторных полей  $\mathcal{L}_k(\mathbb{M}^n)$ , которое касается  $\mathbb{M}^k$ , т.е.  $\mathbb{L}_p(\mathbb{M}^n) = \mathbb{T}_p(\mathbb{M}^k)$ . При этом лист слоения, проходящий через точку  $p \in \mathbb{M}^n$ , совпадает с интегральным подмногообразием данного распределения, проходящим через ту же точку.*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В силу данной теоремы слоение часто определяют с помощью распределений и их интегральных подмногообразий.

Заметим, что не каждое топологически нетривиальное многообразие допускает структуру слоения.

**ПРИМЕР 2.12.4.** Теорема 10.2.1 утверждает, что на четномерной сфере  $\mathbb{S}^{2n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , не существует непрерывного векторного поля, которое всюду отлично от нуля. Это означает, что на  $\mathbb{S}^{2n}$  невозможно задать одномерное распределение векторных полей  $\mathcal{L}_1(\mathbb{S}^{2n})$ , и, следовательно, одномерных слоений на четномерной сфере не существует. В частности, на двумерной сфере  $\mathbb{S}^2$  нельзя задать структуру слоения.

Далее мы рассмотрим более подробно связь слоений и расслоений.

**ПРИМЕР 2.12.5 (Расслоение).** Рассмотрим дифференцируемое расслоение  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$  (см., раздел 2.4) с  $n$ -мерным пространством расслоения  $\mathbb{E}$ ,  $k$ -мерным типичным слоем  $\mathbb{F}$  и  $(n - k)$ -мерной базой  $\mathbb{M}$ . Через каждую точку расслоения  $p \in \mathbb{E}$  проходит слой  $\mathbb{V}_{\pi(p)} := \pi^{-1}(\pi(p))$ , диффеоморфный типичному слою  $\mathbb{F}$ , и, значит, имеющий структуру дифференцируемого  $k$ -мерного многообразия. Известно, что слои расслоения либо совпадают:  $\mathbb{V}_{\pi(p)} = \mathbb{V}_{\pi(q)}$ , если  $\pi(p) = \pi(q)$ , либо не пересекаются:  $\mathbb{V}_{\pi(p)} \cap \mathbb{V}_{\pi(q)} = \emptyset$ , если  $\pi(p) \neq \pi(q)$ . Рассмотрим множество, которое состоит из объединения всех слоев

$$\mathbb{E}^k = \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{V}_x.$$

Как множество оно совпадает с пространством расслоения  $\mathbb{E}$ , но мы введем на нем другую топологию и дифференцируемую структуру. А именно, будем считать, что в этой топологии и дифференцируемой структуре каждый слой является открытым подмножеством и открытым подмногообразием. Для того, чтобы проверить, что многообразие  $\mathbb{E}^k$  слонит расслоение  $\mathbb{E}$  следует воспользоваться картами на  $\mathbb{E}$ , которые тривиализируют расслоение. Как и в предыдущем примере многообразие  $\mathbb{E}^k$  несвязно и состоит из несчетного числа листов, которые совпадают со слоями расслоения  $\mathbb{V}_x$  и параметризуются точками базы  $x \in \mathbb{M}$ . В этом слоении все листы  $\mathbb{V}_x$  диффеоморфны между собой и диффеоморфны типичному слою,  $\mathbb{V}_x \approx \mathbb{F}$ .

Рассмотренный пример показывает, что на каждом расслоении определена естественная структура слоения. Обратное утверждение неверно: не каждое слоение является расслоением. Чтобы построить соответствующий пример, нам понадобится

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дифференцируемое отображение двух многообразий  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$  называется *субмерсией*, если дифференциал отображения  $f_* : \mathbb{T}_p(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{T}_{f(p)}(\mathbb{N})$  является сюръективным отображением для всех точек  $p \in \mathbb{M}$ .

**ПРИМЕР 2.12.6 (Субмерсия).** Рассмотрим субмерсию двух многообразий  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ . Из определения следует, что  $\dim \mathbb{M} \geq \dim \mathbb{N}$ . Мы положим  $\dim \mathbb{M} = n$  и  $\dim \mathbb{N} = n - k$ , где  $1 \leq k < n$ . Каждая точка  $p \in \mathbb{M}$  порождает лист или несвязное объединение листов  $\mathbb{V}_p := f^{-1}(f(p))$ . При этом прообразы либо совпадают:  $\mathbb{V}_p = \mathbb{V}_q$ , если  $f(p) = f(q)$ , либо не пересекаются:  $\mathbb{V}_p \cap \mathbb{V}_q = \emptyset$ , если  $f(p) \neq f(q)$ . Предположим, что отображение  $f$  сюръективно. Тогда слои можно параметризовать точками  $x \in \mathbb{N}$ . Из условия сюръективности  $f_*(\mathbb{T}_p(\mathbb{M})) = \mathbb{T}_{f(p)}(\mathbb{N})$  для всех  $p \in \mathbb{M}$  следует, что для каждой точки  $p \in \mathbb{M}$  найдутся карты:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{M} \supset \mathbb{U} \ni p &\mapsto \varphi(p) \in \mathbb{R}^n, \\ \chi : \mathbb{N} \supset \mathbb{W} \ni x = f(p) &\mapsto \chi(x) \in \mathbb{R}^{n-k} \end{aligned}$$

со следующими свойствами:

1.  $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{W}$ ,
2.  $\varphi(q) = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\forall q \in \mathbb{U}$ ,
3.  $\chi(x) \in \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\forall x \in \mathbb{W}$ ,
4.  $(\chi \circ f \circ \varphi^{-1})(y, z) = z \in \chi(\mathbb{W})$ ,  $\forall (y, z) \in \varphi(\mathbb{U})$ ,
5.  $\varphi(\mathbb{V}_p) = \{(y, z) \in \varphi(\mathbb{U}) : z = \chi(f(p))\}$ ,  $\forall f(p) \in \mathbb{W}$ .

Отсюда легко выводится, что на множестве  $\mathbb{M}$  определена структура  $k$ -мерного слоения  $\mathbb{M}^k$ , в котором листы, содержащиеся в  $f^{-1}(x)$ , являются открытыми подмногообразиями.

Ранее было показано, что любое расслоение является слоением. Приведем пример слоения, которое не является расслоением.

**ПРИМЕР 2.12.7.** Рассмотрим субмерсию, изображенную на рис. 2.13, где лента в  $\mathbb{R}^2$  с вырезанной дыркой проектируется на ось  $x$ . Ленту с вырезанной дыркой мы рассматриваем, как открытое подмногообразие  $\mathbb{M}$  в  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $x, y$ . Субмерсия задается проекцией  $f : (x, y) \mapsto x$  и определяет одномерное слоение  $\mathbb{M}$ . Соответствующее распределение векторных полей имеет вид  $\partial_y$ . Все интегральные кривые этого распределения, которые являются листами слоения, параллельны оси  $y$ . Если  $x < a$  или  $x > b$ , то листами слоения  $f^{-1}(x)$  являются интервалы. В то же время каждый прообраз  $f^{-1}(x)$  для  $a \leq x \leq b$  представляет несвязное объединение двух листов. Ясно, что не все прообразы  $f^{-1}(x)$  данного слоения диффеоморфны между собой, и поэтому рассматриваемое слоение не может быть расслоением.

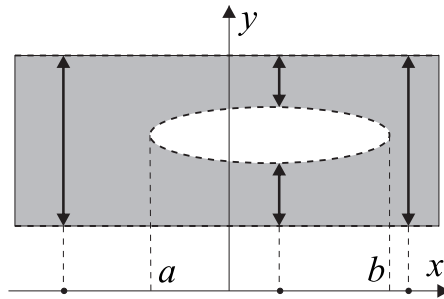


Рис. 2.13. Субмерсия ленты с вырезанной дыркой на ось  $x$ .

Следующий пример показывает, что листы слоения даже в простых случаях могут быть устроены достаточно сложно.

**ПРИМЕР 2.12.8 (Слоения тора).** Рассмотрим двумерный тор, как квадрат на плоскости:  $\mathbb{T}^2 = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  с отождествленными противоположными сторонами. Пусть на нем задано векторное поле  $X = X^x \partial_x + X^y \partial_y$  с постоянными компонентами  $X^x = a \neq 0$  и  $X^y = b$ . Тем самым определено одномерное распределение векторного поля. Оно, конечно, находится в инволюции. Обозначим интегральные кривые этого векторного поля через  $\gamma_{ab}$ . Они же являются листами одномерного слоения тора. Если отношение  $b/a$  рационально, то каждый лист диффеоморфен окружности  $\mathbb{S}^1$  и является регулярным замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{T}^2$ . Если отношение  $b/a$  иррационально (всюду плотная обмотка тора в примере 2.10.2), то каждый лист диффеоморфен прямой  $\mathbb{R}$ . При этом отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \gamma_{ab} \in \mathbb{T}^2$  не является

регулярным. В этом случае лист не является одномерным регулярным подмногообразием и замкнутым подмножеством в  $\mathbb{T}^2$ .

### 2.13. Бесконечно малые преобразования координат

В настоящем разделе рассматриваются свойства различных полей на многообразии при бесконечно малых преобразованиях координат. Полученные ниже формулы важны в приложениях, в частности, они будут использованы в следующем разделе для вычисления производных Ли.

Поскольку рассмотрение носит локальный характер, то для простоты и наглядности мы рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с фиксированной декартовой системой координат. Будем рассматривать преобразования координат с активной точки зрения. То есть будем считать, что в евклидовом пространстве точка с координатами  $x^\alpha$  перемещается в новую точку с координатами  $x'^\alpha(x)$  в той же системе координат. Бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования координат

$$x'^\alpha := x^\alpha + u^\alpha(x) \quad (2.96)$$

определяются векторным полем

$$u = u^\alpha \partial_\alpha.$$

Обозначение  $u^\alpha(x)$  заимствовано из теории упругости, где этот вектор называется *вектором смещения*. Будем считать, что малы сами смещения,  $|u^\alpha| \ll 1^2$ , и относительные смещения  $|\partial_\alpha u^\beta| \ll 1$  для всех значений индексов  $\alpha, \beta$ .

Рассмотрим, как меняются тензорные поля при инфинитезимальных преобразованиях координат (2.96). Начнем с простейшего случая скалярного поля (функции)  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Из закона преобразования скалярного поля (2.5) следует равенство

$$f'(x + u) = f(x). \quad (2.97)$$

Разлагая левую часть этого равенства в ряд Тейлора<sup>3</sup>, в первом порядке по  $u$  получим следующее выражение

$$f' = f - u^\alpha \partial_\alpha f, \quad (2.98)$$

где все поля рассматриваются в точке  $x$ . Полученное соотношение интерпретируется следующим образом. При инфинитезимальном преобразовании координат (2.96) значение функции  $f(x)$  в точке  $x$  меняется на бесконечно малую величину

$$\delta f(x) := f'(x) - f(x) = -u^\alpha \partial_\alpha f = -uf. \quad (2.99)$$

которая называется *приращением* или *вариацией формы* функции  $f$  в точке  $x$ . Правая часть этого равенства с обратным знаком представляет собой производную от функции  $f$  вдоль векторного поля  $u$ , определяющего преобразование координат.

Из закона преобразования векторных полей (2.11), который в первом порядке по  $u$  для инфинитезимальных преобразований можно переписать в виде

$$X'^\alpha(x + u) = X^\beta(\delta_\beta^\alpha + \partial_\beta u^\alpha),$$

следует, что вариация формы компонент векторного поля имеет вид

$$\delta X^\alpha = X^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta X^\alpha = [X, u]^\alpha. \quad (2.100)$$

То есть приращение векторного поля в точке  $x$  равно коммутатору этого векторного поля с инфинитезимальным векторным полем смещения  $u$ .

Закон преобразования компонент 1-формы (2.12) приводит к следующему приращению компонент

$$\delta \omega_\alpha = -\partial_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \partial_\beta \omega_\alpha \quad (2.101)$$

<sup>2</sup>В физике координаты являются размерными величинами, и условие малости смещений записывается в виде  $|u^\alpha| \ll l$ , где  $l$  – выбранная единица длины.

<sup>3</sup>Здесь и далее мы предполагаем, что разложение всех функций и компонент тензорных полей в ряд Тейлора имеет смысл в некоторой окрестности точки  $x$ .



или в ковариантном виде

$$\begin{aligned}\delta\omega_\alpha &= -\nabla_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \nabla_\beta \omega_\alpha + u^\beta T_{\alpha\beta}{}^\gamma \omega_\gamma \\ &= -\tilde{\nabla}_\alpha u^\beta \omega_\beta - u^\beta \tilde{\nabla}_\beta \omega_\alpha.\end{aligned}\quad (2.102)$$

При этом использовано явное выражение для аффинной связности (6.16). Напомним, что  $\nabla$  и  $\tilde{\nabla}$  обозначают ковариантные производные с аффинной связностью и символами Кристоффеля, соответственно.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Приращения компонент тензорных полей, а также связности при инфинитезимальных преобразованиях координат являются тензорными полями. Поскольку бесконечно малые преобразования координат параметризуются векторным полем  $u$ , то вариации полей всегда можно записать в явно ковариантном виде.

Аналогично находится явный вид бесконечно малых преобразований координат для тензоров произвольного ранга. Рассмотрим бесконечно малые преобразования основных геометрических объектов: метрики и аффинной связности, а также репера и линейной связности. В частности, для метрики справедливо равенство

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha u^\gamma g_{\gamma\beta} - \partial_\beta u^\gamma g_{\alpha\gamma} - u^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \quad (2.103)$$

или в ковариантном виде

$$\begin{aligned}\delta g_{\alpha\beta} &= -\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha + u^\gamma (T_{\alpha\gamma\beta} + T_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\alpha\gamma\beta} - Q_{\beta\gamma\alpha} + Q_{\gamma\alpha\beta}) \\ &= -\tilde{\nabla}_\alpha u_\beta - \tilde{\nabla}_\beta u_\alpha.\end{aligned}\quad (2.104)$$

Отсюда следует, что, если метрика инвариантна относительно бесконечно малых преобразований координат,  $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ , то соответствующее векторное поле должно удовлетворять уравнению Киллинга

$$\tilde{\nabla}_\alpha u_\beta + \tilde{\nabla}_\beta u_\alpha = 0.$$

Из уравнения (2.103) следует правило преобразования определителя метрики

$$\delta g = -u^\alpha \partial_\alpha g - 2\partial_\alpha u^\alpha g. \quad (2.105)$$

Рассмотрим, как меняются компоненты аффинной связности при инфинитезимальных преобразованиях координат. Из закона преобразования (6.5) следует выражение для вариации формы компонент аффинной связности:

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\partial_\alpha u^\delta \Gamma_{\delta\beta}{}^\gamma - \partial_\beta u^\delta \Gamma_{\alpha\delta}{}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta \partial_\delta u^\gamma - \partial_{\alpha\beta}^2 u^\gamma - u^\delta \partial_\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma. \quad (2.106)$$

В ковариантном виде это изменение имеет вид

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\gamma + \nabla_\alpha u^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma + u^\delta (R_{\alpha\delta\beta}{}^\gamma + \nabla_\alpha T_{\beta\delta}{}^\gamma). \quad (2.107)$$

В частном случае для символов Кристоффеля справедливо равенство

$$\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = -\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta u^\gamma + u^\delta \tilde{R}_{\alpha\delta\beta}{}^\gamma. \quad (2.108)$$

Эту вариацию можно переписать в виде

$$\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\alpha \delta g_{\beta\gamma} + \tilde{\nabla}_\beta \delta g_{\alpha\gamma} - \tilde{\nabla}_\gamma \delta g_{\alpha\beta}). \quad (2.109)$$

В римановой геометрии, где связность однозначно определяется метрикой, инвариантность метрики является достаточным условием инвариантности символов Кристоффеля. Необходимое и достаточное условие инвариантности символов Кристоффеля относительно бесконечно малых преобразований координат имеет вид  $\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ , где вариация определяется формулой (2.108).

Антисимметризация уравнения (2.107) по индексам  $\alpha, \beta$  дает приращение компонент тензора кручения:

$$\begin{aligned} \delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma &= \nabla_\alpha u^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - \nabla_\beta u^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma + T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\gamma + \\ &+ u^\delta (-R_{\alpha\beta\delta}{}^\gamma - R_{\delta\alpha\beta}{}^\gamma - R_{\beta\delta\alpha}{}^\gamma + \nabla_\alpha T_{\beta\delta}{}^\gamma - \nabla_\beta T_{\alpha\delta}{}^\gamma) \end{aligned} \quad (2.110)$$

или, с учетом (6.76),

$$\begin{aligned} \delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma &= \nabla_\alpha u^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - \nabla_\beta u^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma + T_{\alpha\beta}{}^\delta \nabla_\delta u^\gamma - \\ &- u^\delta (\nabla_\delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma + T_{\alpha\beta}{}^\epsilon T_{\epsilon\delta}{}^\gamma + T_{\beta\delta}{}^\epsilon T_{\epsilon\alpha}{}^\gamma + T_{\delta\alpha}{}^\epsilon T_{\epsilon\beta}{}^\gamma) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Нетрудно получить также вариацию формы компонент тензора неметричности при инфинитезимальных преобразованиях координат:

$$\begin{aligned} \delta Q_{\alpha\beta\gamma} &= -\nabla_\alpha u^\delta Q_{\delta\beta\gamma} - \nabla_\beta u^\delta Q_{\alpha\delta\gamma} - \nabla_\gamma u^\delta Q_{\alpha\beta\delta} \\ &+ u^\delta (T_{\alpha\delta}{}^\epsilon Q_{\epsilon\beta\gamma} + T_{\beta\delta}{}^\epsilon Q_{\alpha\epsilon\gamma} + T_{\gamma\delta}{}^\epsilon Q_{\alpha\beta\epsilon}). \end{aligned} \quad (2.112)$$

В аффинной геометрии при заданной связности можно поставить задачу нахождения таких преобразований координат, которые не меняют связность, кручение или неметричность. Для этого необходимо решить, соответственно, уравнения:

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0, \quad \delta T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0, \quad \delta Q_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Репер и лоренцева связность являются ковекторами относительно преобразований координат. Поэтому их приращения такие же, как и приращения 1-форм (2.101). Приведем их явный вид, так как они часто встречаются в приложениях

$$\delta e_\alpha{}^a = -\partial_\alpha u^\beta e_\beta{}^a - u^\beta \partial_\beta e_\alpha{}^a = -\tilde{\nabla}_\alpha u^a + u^\beta \tilde{\omega}_{\beta b}{}^a e_\alpha{}^b, \quad (2.113)$$

$$\delta \omega_\alpha{}^{ab} = -\partial_\alpha u^\beta \omega_\beta{}^{ab} - u^\beta \partial_\beta \omega_\alpha{}^{ab} = -\tilde{\nabla}_\alpha u^\beta \omega_\beta{}^{ab} - u^\beta (\partial_\beta \omega_\alpha{}^{ab} - \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\gamma \omega_\gamma{}^{ab}). \quad (2.114)$$

Из формулы (2.113) следует выражение для вариации формы элемента объема

$$\delta \sqrt{|g|} = -u^\alpha \partial_\alpha \sqrt{|g|} - \sqrt{|g|} \partial_\alpha u^\alpha = -\sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha u^\alpha, \quad (2.115)$$

Бесконечно малые приращения различных полей, рассмотренные в настоящем разделе, называются вариацией формы, так как показывают как меняется значение полей в фиксированной точке многообразия. Следующее свойство проверяется прямой проверкой и используется при доказательстве теоремы Нетер.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13.1.** *Вариация формы производной скалярного поля равно производной от вариации*

$$\delta(\partial_\alpha f) = \partial_\alpha(\delta f).$$

Рассмотрим коммутатор двух бесконечно малых преобразований координат. Пусть эти преобразования задаются векторными полями  $u = u^\alpha \partial_\alpha$  и  $v = v^\alpha \partial_\alpha$ . Для простоты, ограничимся их последовательным действием на функцию  $f(x)$ . Поскольку преобразования координат евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  образуют псевдогруппу, то коммутатор двух преобразований также является преобразованием координат с параметром, который квадратичен по компонентам  $u^\alpha$  и  $v^\alpha$ . Поэтому, в отличие от предыдущего рассмотрения, для вычисления коммутатора необходимо удерживать квадратичные слагаемые.

Сначала совершим преобразование координат, определяемое векторным полем  $u$ . Из закона преобразования функции (2.97) с учетом квадратичных слагаемых получаем равенство

$$f' + u^\alpha \partial_\alpha f' + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f' = f.$$

Во втором слагаемом в левой части равенства  $f'$  можно выразить через  $f$ , воспользовавшись линейным приближением (2.98), а в третьем слагаемом заменим  $f'$  на  $f$ , потому что коэффициент перед ним уже квадратичен по  $u$ . В результате с точностью до квадратичных слагаемых получаем разложение

$$f' := (1 + T_u)f = f - u^\alpha \partial_\alpha f + u^\alpha \partial_\alpha u^\beta \partial_\beta f + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f + \dots, \quad (2.116)$$

где мы ввели генератор общих преобразований координат  $T_u$  и выписали его действие на функцию в квадратичном приближении.

Совершим теперь второе преобразование координат с параметром  $v$

$$\begin{aligned} (1 + T_v)f' &= (1 + T_v)(1 + T_u)f \\ &= f' - v^\alpha \partial_\alpha f' + v^\alpha \partial_\alpha v^\beta \partial_\beta f' + \frac{1}{2} v^\alpha v^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 f' + \dots \\ &= f - (u^\alpha + v^\alpha - u^\beta \partial_\beta u^\alpha - v^\beta \partial_\beta v^\alpha - v^\beta \partial_\beta u^\alpha) \partial_\alpha f + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u^\alpha u^\beta + 2u^\alpha v^\beta + v^\alpha v^\beta) \partial_{\alpha\beta}^2 f + \dots \end{aligned}$$

Вычитая из этого выражения результат тех же преобразований в обратном порядке, получим явное выражение для коммутатора двух преобразований координат

$$[T_v, T_u]f = T_{[v,u]}f = (v^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta v^\alpha) \partial_\alpha f. \quad (2.117)$$

Таким образом, коммутатор двух преобразований координат в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , определяемых инфинитезимальными векторными полями  $u$  и  $v$ , является преобразованием координат, которое задается коммутатором векторных полей  $[v, u]$ .

Из групповых соображений следует, что коммутатор двух преобразований координат не зависит от представления. Другими словами, это же выражение для коммутатора имеет место не только для функций, но и для тензорных полей или плотностей более высокого ранга. В последнем случае вычисления являются более громоздкими.

Рассмотрим, как меняются при бесконечно малых преобразованиях тензорные плотности, заданные на многообразии  $\mathbb{M}$ . Мы уже получили правила преобразования определителей метрики (2.105) и репера (2.115), которые являются тензорными плотностями соответственно степеней  $-2$  и  $-1$ . В общем случае, если на  $\mathbb{M}$  задана скалярная плотность  $f$  степени  $\deg f = p$ , то из правила преобразования тензорных плотностей (2.7) следует правило

$$\delta f = -u^\alpha \partial_\alpha f + p \partial_\alpha u^\alpha f,$$

так как якобиан бесконечно малых преобразований координат (2.96) в первом порядке по вектору смещения имеет вид

$$J = \det(\delta_\alpha^\beta + \partial_\alpha u^\beta) \approx 1 + \partial_\alpha u^\alpha. \quad (2.118)$$

Если на многообразии  $\mathbb{M}$  задана тензорная плотность  $T$  произвольного ранга и степени  $p$ , то ее вариация формы равна

$$\delta T = \dots + p \partial_\alpha u^\alpha T,$$

где точки обозначают набор обычных тензорных слагаемых для всех ковариантных и контравариантных индексов.

## 2.14. Производная Ли

Понятие потока  $\mathbb{R} \times \mathbb{M} \xrightarrow{s} \mathbb{M}$  или экспоненциального отображения  $s^\alpha(t, x) = \exp(tX)x^\alpha$ , генерируемого отличным от нуля дифференцируемым векторным полем  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  (раздел 2.6.5), позволяет определить производную Ли  $L_X$  от произвольного тензорного поля  $T$  вдоль векторного поля  $X$ . Для этого определения достаточно, чтобы поток существовал локально.

Рассмотрим произвольную точку  $x \in \mathbb{M}$ . Тогда у нее существует окрестность  $\mathbb{U}_x$  такая, что отображение  $s : \mathbb{U}_x \rightarrow s(\mathbb{U}_x)$  является диффеоморфизмом. Поэтому для него определены дифференциал отображения  $s_*$  и обратное отображение  $s^{*-1}$  к отображению дифференциальных форм  $s^*$ . Пусть в некоторой окрестности точки  $x \in \mathbb{M}$  задано тензорное поле  $T \in T_s^r(\mathbb{M})$  типа  $(r, s)$ . В результате экспоненциального отображения  $s(\epsilon, x)$  с малым параметром  $\epsilon$  тензор  $T(x)$  в точке  $x$  отобразится в тензор  $\tilde{s}T(x)$  в точке  $s(\epsilon, x)$ , где  $\tilde{s}T$  обозначает продолжение отображения  $(s_*)^r (s^{*-1})^s T$ , заданного в касательном и кокасательном пространствах, на всю тензорную алгебру (в компонентах: на каждый контравариантный индекс действует дифференциал отображения  $s_*$ , а на каждый ковариантный индекс – обратное отображение  $s^{*-1}$ ). Это значит, что в точку  $x$  отобразится тензор из точки  $s(-\epsilon, x)$ :

$$T(s(-\epsilon, x)) \mapsto \tilde{s}(\epsilon, s(-\epsilon, x))T(s(-\epsilon, x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Производной Ли от тензорного поля  $T$  вдоль векторного поля  $X$  в точке  $x$  называется предел

$$\mathbb{L}_X T := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(x) - \tilde{s}(\epsilon, s(-\epsilon, x))T(s(-\epsilon, x))}{\epsilon}. \quad (2.119)$$

В упрощенной записи мы пишем

$$\mathbb{L}_X T = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(x) - \tilde{s}(\epsilon)T}{\epsilon}, \quad (2.120)$$

где мы опустили аргумент  $s(-\epsilon, x) \in \mathbb{M}$ .

Для дифференцируемых векторных и тензорных полей этот предел существует.

ЗАМЕЧАНИЕ. При малых  $\epsilon$  экспоненциальное отображение имеет вид  $x^\alpha \mapsto s^\alpha(\epsilon, x) = x^\alpha + \epsilon X^\alpha + \dots$ , т.е. соответствует бесконечно малым преобразованиям координат, рассмотренным в предыдущем разделе, с вектором смещения  $u^\alpha = \epsilon X^\alpha$ . При этом выражение, стоящее в числителе производной Ли (2.119), совпадает с вариацией формы тензорного поля  $T$ , взятой с обратным знаком. Это следует непосредственно из определения вариации формы тензорного поля. Поэтому определение (2.119) для компонент тензорного поля типа  $(r, s)$  принимает вид

$$\mathbb{L}_X T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)}{\epsilon}, \quad (2.121)$$

где  $\delta T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  – вариация формы компонент тензорного поля типа  $(r, s)$ , рассмотренная в разделе 2.13. Несложные вычисления приводят к следующему выражению для производной Ли компонент тензорного поля

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_X T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= X^\gamma \partial_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ &+ \partial_{\beta_1} X^\gamma T_{\gamma \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \dots + \partial_{\beta_s} X^\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ &- T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma \alpha_2 \dots \alpha_r} \partial_\gamma X^{\alpha_1} - \dots - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \gamma} \partial_\gamma X^{\alpha_r}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Первое слагаемое в правой части (2.122) соответствует смещению самой точки  $x$ , слагаемые во второй и третьей строках (2.122) возникают при действии отображений  $s^{*-1}$  и  $s_*$  на каждый ковариантный и контравариантный индекс, соответственно.

Формула (2.122) конструктивна и позволяет получить явные выражения для производных Ли различных тензорных полей в координатах.

ПРИМЕР 2.14.1. В простейшем случае скалярного поля  $f(x)$  производная Ли совпадает с производной функции вдоль векторного поля. Покажем это. Поскольку на скалярное поле ни дифференциал отображения, ни отображение дифференциальных форм не действуют, то из определения (2.119) следует

$$\mathbb{L}_X f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \epsilon X)}{\epsilon} = X^\alpha \partial_\alpha f.$$

Таким образом, производная Ли от функции – это просто производная вдоль векторного поля.

ПРИМЕР 2.14.2. Из уравнения (2.122) следует выражение для производной Ли от векторного поля  $Y$  в координатах:

$$\mathbb{L}_X Y^\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha,$$

что совпадает с коммутатором векторных полей (2.49)

$$\mathbb{L}_X Y = [X, Y]. \quad (2.123)$$

Определение производной Ли (2.119) для векторного поля принимает вид

$$\mathbb{L}_X Y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Y - s_*(\epsilon)Y}{\epsilon}. \quad (2.124)$$

Производная Ли от векторного поля обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{fX}Y &= f[X, Y] - (Yf)X, \\ \mathbf{L}_X(fY) &= f[X, Y] + (Xf)Y, \end{aligned}$$

где  $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$  – произвольное скалярное поле.

Отметим, что тождества Якоби (2.48) в алгебре Ли векторных полей можно переписать в эквивалентном виде, используя производную Ли,

$$\mathbf{L}_X[Y, Z] = [\mathbf{L}_X Y, Z] + [Y, \mathbf{L}_X Z].$$

В таком виде тождества Якоби аналогичны правилу Лейбница.

Можно также проверить следующее свойство производной Ли:

$$\mathbf{L}_{[X, Y]} = \mathbf{L}_X \circ \mathbf{L}_Y - \mathbf{L}_Y \circ \mathbf{L}_X. \quad (2.125)$$

Действие этого равенства на векторное поле сводится к тождеству Якоби.

Производная Ли отличается от ковариантной производной вдоль векторного поля (6.11).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14.1.** *Для компонент векторного поля справедливо равенство*

$$\mathbf{L}_X Y^\alpha - \nabla_X Y^\alpha = -Y^\beta (\nabla_\beta X^\alpha + X^\gamma T_{\beta\gamma}^\alpha), \quad (2.126)$$

где  $\nabla_\alpha$  – ковариантная производная и  $T_{\beta\gamma}^\alpha$  – тензор кручения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Простая проверка.

**ПРИМЕР 2.14.3.** Из формулы (2.101) следует, что производная Ли от 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  имеет вид

$$\mathbf{L}_X A_\alpha = X^\beta \partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha X^\beta A_\beta.$$

При этом разность с ковариантной производной вдоль векторного поля имеет другой знак по сравнению с (2.126):

$$\mathbf{L}_X A_\alpha - \nabla_X A_\alpha = (\nabla_\alpha X^\beta + X^\gamma T_{\alpha\gamma}^\beta) A_\beta.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Дифференцированием*  $D$  тензорной алгебры  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$  называется линейный эндоморфизм  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ , удовлетворяющий следующим свойствам:

- 1)  $D$  сохраняет тип тензорных полей:  $D\mathcal{T}_s^r(\mathbb{M}) \subset \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$ .
- 2) Дифференцирование удовлетворяет правилу Лейбница. Если  $Y$  и  $Z$  – два произвольных тензорных поля на  $\mathbb{M}$ , то

$$D(Y \otimes Z) = DY \otimes Z + Y \otimes DZ.$$

- 3)  $D$  перестановочен с каждым свертыванием:  $DC = CD$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14.2.** *Производная Ли  $\mathbf{L}_X$  является дифференцированием в тензорной алгебре  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямая проверка.

Рассмотрим тензорное поле  $S = S_\beta^\alpha(x) e_\alpha \otimes e^\beta$  типа  $(1, 1)$ . В каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  оно задает линейный эндоморфизм касательного  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  и кокасательного  $\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$  пространств, который естественным образом продолжается до линейного эндоморфизма  $D_S$  тензорной алгебры в этой точке. Если  $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  – тензорное поле типа  $(r, s)$ , то в компонентах

$$\begin{aligned} (D_S T)_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= S_{\beta_1}^{\gamma_1} T_{\gamma_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \dots + S_{\beta_s}^{\gamma_s} T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ &\quad - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma \alpha_2 \dots \alpha_r} S_{\gamma}^{\alpha_1} - \dots - T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \gamma} S_{\gamma}^{\alpha_r}. \end{aligned}$$

Тогда  $D_S$  представляет собой дифференцирование тензорной алгебры  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ , индуцированное тензорным полем  $S$  типа  $(1, 1)$ .

ТЕОРЕМА 2.14.1. Каждое дифференцирование  $D$  тензорной алгебры  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$  допускает единственное разложение

$$D = \mathbb{L}_X + D_S,$$

где  $X$  есть векторное поле, а  $S$  – тензорное поле типа  $(1, 1)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [3], предложение 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку любое дифференцирование  $D$  линейно отображает алгебру функций  $C^\infty(\mathbb{M})$  в себя, и выполняется правило Лейбница, то векторное поле  $X$  существует и определяется единственным образом из условия  $Df = Xf$  для всех  $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ .

СЛЕДСТВИЕ. Разность двух произвольных дифференцирований есть дифференцирование, индуцированное некоторым тензорным полем типа  $(1, 1)$ .

Таким образом, у нас есть два дифференцирования в тензорной алгебре  $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ : производная Ли вдоль векторного поля  $\mathbb{L}_X$  и дифференцирование  $D_S$ , индуцированное тензорным полем  $S$  типа  $(1, 1)$ . В разделе 5.3 будет введено еще одно дифференцирование в тензорной алгебре – ковариантное дифференцирование  $\nabla$ . Согласно теореме 2.14.1, эти три вида дифференцирований связаны между собой. Нетрудно убедиться, что в общем случае производная Ли  $\mathbb{L}_X$  и ковариантная производная вдоль векторного поля  $\nabla_X$  связаны следующим соотношением

$$\begin{aligned} & (\mathbb{L}_X - \nabla_X)Y_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ &= (\nabla_{\beta_1} X^\gamma + T_{\beta_1 \delta}^\gamma X^\delta)Y_{\gamma \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \dots + (\nabla_{\beta_s} X^\gamma + T_{\beta_s \delta}^\gamma X^\delta)Y_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ & \quad - Y_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma \alpha_2 \dots \alpha_r} (\nabla_\gamma X^{\alpha_1} + T_{\gamma \delta}^{\alpha_1} X^\delta) - \dots - Y_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \gamma} (\nabla_\gamma X^{\alpha_r} + T_{\gamma \delta}^{\alpha_r} X^\delta). \end{aligned}$$

То есть разность ковариантного дифференцирования и производной Ли является дифференцированием, индуцированным тензорным полем с компонентами  $S_\beta^\alpha := \nabla_\beta X^\alpha + T_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma$ .

Как следствие этой формулы или непосредственной проверкой можно убедиться в том, что в правой части (2.122) все частные производные можно выразить через ковариантные. Это естественно, так как производная Ли является инвариантным оператором. В этом случае появляются дополнительные слагаемые, содержащие тензор кручения для каждого тензорного индекса. Если кручение аффинной связности равно нулю, то все частные производные в производной Ли (2.122) можно просто заменить на ковариантные.

ПРИМЕР 2.14.4. Для иллюстрации приведем формулу производной Ли от компонент тензора  $Y_\alpha^\beta$  типа  $(1, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_X Y_\alpha^\beta &= X^\gamma \partial_\gamma Y_\alpha^\beta + \partial_\alpha X^\gamma Y_\gamma^\beta - Y_\alpha^\gamma \partial_\gamma X^\beta \\ &= X^\gamma \nabla_\gamma Y_\alpha^\beta + \nabla_\alpha X^\gamma Y_\gamma^\beta - Y_\alpha^\gamma \nabla_\gamma X^\beta + X^\gamma Y_\alpha^\delta T_{\delta\gamma}^\beta - X^\gamma Y_\delta^\beta T_{\alpha\gamma}^\delta \\ &= X^\gamma \tilde{\nabla}_\gamma Y_\alpha^\beta + \tilde{\nabla}_\alpha X^\gamma Y_\gamma^\beta - Y_\alpha^\gamma \tilde{\nabla}_\gamma X^\beta. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы справедливы для произвольных тензорных полей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Производная Ли не зависит ни от метрики, ни от аффинной связности, которые могут быть заданы на многообразии совершенно независимо.

ПРИМЕР 2.14.5. Приведем также явное выражение для производной Ли от метрики

$$\mathbb{L}_X g_{\alpha\beta} = X^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha X^\gamma g_{\gamma\beta} + \partial_\beta X^\gamma g_{\alpha\gamma}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\mathbb{L}_X g_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\alpha X_\beta + \tilde{\nabla}_\beta X_\alpha, \quad (2.127)$$

где  $\tilde{\nabla}_\alpha$  – ковариантная производная со связностью Леви–Чивиты (раздел 6.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  и  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  – произвольное тензорное поле типа  $(r, s)$  и полное векторное поле на многообразии  $\mathbb{M}$ . Полное векторное поле порождает однопараметрическую группу преобразований  $s(t, x)$ . Если значение тензорного поля  $T(s)$  в точке  $s(t, x)$  равно  $\tilde{s}(t, x)T(x)$ , то мы говорим, что тензорное поле  $T(x)$  инвариантно при действии однопараметрической группы преобразований.

Из определения производной Ли следует

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14.3.** *Тензорное поле  $T \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований  $s(t, x)$ , порожденной векторным полем  $X$ , для всех  $t$  тогда и только тогда, когда производная Ли равна нулю,  $\mathbf{L}_X T = 0$ .*

### 3. Дифференциальные формы и интегрирование

В дифференциальной геометрии и приложениях важную роль играют дифференциальные формы. Они используются для определения связностей на расслоениях, интегрирования по многообразию, характеристических классов, когомологий де Рама, в гамильтоновом формализме и других областях. В настоящей главе будут даны определения и рассмотрены основные свойства дифференциальных форм. Будут также сформулированы две фундаментальные теоремы: теорема Дарбу и формула Стокса, играющие исключительно важную роль в приложениях.

#### 3.1. Внешняя алгебра

Рассмотрим векторное и сопряженное к нему пространства  $\mathbb{V}$  и  $\mathbb{V}^*$ . Над произвольным векторным пространством, например, над  $\mathbb{V}^*$ , можно построить тензорную алгебру  $\otimes \mathbb{V}^*$ . В этой алгебре существуют двусторонние идеалы, и соответствующие фактор пространства также представляют собой алгебры. Наиболее важными из этих фактор алгебр являются внешняя алгебра и алгебры Клиффорда. В настоящем разделе мы рассмотрим внешнюю алгебру  $\Lambda(\mathbb{V})$ , которая лежит в основе теории дифференциальных форм.

Рассмотрим  $n$ -мерное векторное пространство  $\mathbb{V}$  над полем вещественных чисел с базисом  $e_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ . Дуальный базис сопряженного пространства  $\mathbb{V}^*$  обозначим через  $e^a$ ,  $e^a(e_b) = \delta_b^a$ . В следующем разделе мы отождествим пространства  $\mathbb{V}$  и  $\mathbb{V}^*$  с касательным  $T_x(\mathbb{M})$  и кокасательным  $T_x^*(\mathbb{M})$  пространствами в фиксированной точке  $x \in \mathbb{M}$  многообразия  $\mathbb{M}$ . Пока же под  $\mathbb{V}$  будем понимать абстрактное векторное пространство.

Начнем с длинного, но конструктивного определения внешней алгебры над векторным пространством  $\mathbb{V}$ . Сначала введем вспомогательные понятия.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество полностью антисимметричных ковариантных тензоров типа  $(0, r)$ ,  $0 \leq r \leq n$ , называется множеством *форм степени  $r$*  над векторным пространством  $\mathbb{V}$  и обозначается  $\Lambda_r(\mathbb{V})$ .

В данном определении антисимметрия формы означает следующее. Пусть  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ . Тогда ее значение на произвольном наборе векторов  $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{V}$  антисимметрично относительно перестановки любой пары векторов:

$$A(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = -A(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r), \quad 1 \leq i < j \leq r.$$

В компонентах это условие означает антисимметрию относительно перестановки любой пары индексов.

Множество форм  $\Lambda_r(\mathbb{V}) \subset \otimes \mathbb{V}^*$  степени  $r$  является векторным пространством над полем вещественных чисел размерности  $C_n^r$ .

По определению, вещественные числа (скаляры) образуют множество 0-форм,  $\Lambda_0(\mathbb{V}) = \mathbb{R}$ . Отметим, что 1-формы  $A \in \Lambda_1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$  (ковекторы или линейные формы) являются элементами сопряженного пространства и представляются в виде  $A = e^a A_a$ . Максимальная степень формы совпадает с размерностью векторного пространства  $n$ , поскольку для более высоких степеней по крайней мере два индекса будут совпадать, а это невозможно для антисимметричных тензоров.

Из определения тензора следует, что  $r$ -форма  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$  представляет собой полилинейное отображение  $r$  экземпляров векторного пространства  $\mathbb{V}$  в вещественную прямую

$$A: \underbrace{\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_r \rightarrow \mathbb{R}.$$

*Полилинейность* означает, что значение  $r$ -формы на  $r$  векторах  $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{V}$  линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Ввиду антисимметрии  $r$ -форм относительно перестановки индексов, они имеют меньше независимых компонент, чем ковариантные тензоры типа  $(0, r)$ . Введем обозначение

$$e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r} := \sum_{\sigma} e^{\sigma(a_1)} \otimes \dots \otimes e^{a_r} \operatorname{sgn} \sigma, \quad (3.1)$$



где символ  $\otimes$  обозначает тензорное произведение, сумма берется по всем перестановкам  $\sigma(a_1 \dots a_r)$  индексов, а  $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$  обозначает знак перестановки. Здесь мы ввели знак внешнего умножения  $\wedge$ , которое будет определено ниже. Пока он рассматривается просто, как некоторый символ.

По построению, выражение (3.1) является ковектором типа  $(0, r)$  и антисимметрично относительно перестановки любой пары индексов:

$$e^{\sigma(a_1 \wedge \dots \wedge a_r)} = e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r} \operatorname{sgn} \sigma.$$

Поэтому множество ковекторов с упорядоченным набором индексов

$$e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r}, \quad 1 \leq a_1 < \dots < a_r \leq n, \quad (3.2)$$

образует базис в пространстве  $r$ -форм. Тогда произвольная форма степени  $r$  имеет вид

$$A = \sum_{a_1 < \dots < a_r} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \dots a_r} \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \dots a_r}. \quad (3.4)$$

В разложении (3.3) при фиксированной выборке индексов суммирование по индексам отсутствует, а сумма подразумевается только по различным выборкам. В последнем выражении (3.4) суммирование проводится по всем значениям индексов, и поэтому введен компенсирующий множитель  $1/r!$ . Это часто бывает удобнее, поскольку запись  $r$ -формы  $A$  в виде (3.4) имеет инвариантный вид в отличие от (3.3).

**ПРИМЕР 3.1.1.** Рассмотрим 2-форму  $A = e^a \otimes e^b A_{ab}$ , где  $A_{ab} = -A_{ba}$ . Тогда

$$A = \frac{1}{2} e^a \otimes e^b (A_{ab} - A_{ba}) = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b A_{ab},$$

где

$$e^a \wedge e^b = -e^b \wedge e^a = e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a. \quad (3.5)$$

В компонентах значение  $r$ -формы  $A$  на векторных полях  $\{X_1, \dots, X_r\}$  определяется сверткой компонент:

$$A(X_1, \dots, X_r) := X_1^{a_1} \dots X_r^{a_r} A_{a_1 \dots a_r}.$$

Построим  $2^n$ -мерное векторное пространство, равное прямой сумме форм всех степеней

$$\Lambda(\mathbb{V}) := \bigoplus_{r=0}^n \Lambda_r(\mathbb{V}). \quad (3.6)$$

Базис этого пространства имеет вид

$$1, \quad e^a, \quad e^{a_1} \wedge e^{a_2}, \quad \dots, \quad e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r}, \dots, \quad e^1 \wedge \dots \wedge e^n, \quad (3.7)$$

где последовательность  $a_1 \dots a_r$  является упорядоченным набором различных индексов, расположенных в порядке возрастания  $1 \leq a_1 < \dots < a_r \leq n$ . Первый базисный вектор является единицей, поскольку поле вещественных чисел  $\mathbb{R}$  является подпространством рассматриваемого векторного пространства. Последний базисный вектор единственен, так как содержит ровно  $n$  индексов. Элементы из  $\Lambda(\mathbb{V})$  представимы в виде

$$A = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \dots a_r}, \quad (3.8)$$

где подразумевается суммирование по всем значениям индексов.

Введем на множестве форм *внешнее умножение*, отображающее  $\Lambda(\mathbb{V}) \rightarrow \Lambda(\mathbb{V})$ . Пусть  $A$  и  $B$  – формы фиксированных степеней  $r$  и  $s$ , соответственно. Их тензорное произведение  $A \otimes B$  является ковариантным тензором типа  $(0, r + s)$ , однако не будет формой, так как не будет антисимметрично относительно всех перестановок индексов. Чтобы исправить ситуацию после тензорного умножения форм необходимо привести полную антисимметризацию. Тогда внешнее умножение станет отображением  $\Lambda_r \times \Lambda_s \rightarrow \Lambda_{r+s}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Внешним произведением двух форм  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$  и  $B \in \Lambda_s(\mathbb{V})$  называется форма  $C \in \Lambda_{r+s}(\mathbb{V})$ , построенная по правилу:

$$A \wedge B = \frac{1}{(r+s)!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s}} C_{a_1 \dots a_{r+s}}, \quad (3.9)$$

где компоненты внешнего произведения равны

$$\begin{aligned} C_{a_1 \dots a_{r+s}} &:= \frac{1}{r! s!} \sum_{\sigma} A_{\sigma(a_1 \dots a_r)} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}} \operatorname{sgn} \sigma \\ &= C_{r+s}^r A_{[a_1 \dots a_r} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}]}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь  $\sigma(a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_{r+s})$  обозначает перестановку  $\sigma$  всех индексов  $(a_1 \dots a_{r+s})$ ,  $\operatorname{sgn} \sigma$  – знак перестановки, суммирование ведется по всем перестановкам, а квадратные скобки обозначают антисимметризацию всех индексов.

Формулу внешнего произведения (3.9) можно переписать в эквивалентном виде

$$A \wedge B = \frac{1}{r! s!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s}} A_{a_1 \dots a_r} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}}. \quad (3.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Множитель  $1/(r+s)!$  в (3.9) связан с тем, что суммирование проводится по всем значениям индексов. Необходимость введения множителя  $1/r!s!$  в (3.10) будет ясна из дальнейшего.

ПРИМЕР 3.1.2. Внешнее умножение произвольной  $r$ -формы  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$  на 0-форму (число)  $f \in \mathbb{R} = \Lambda_0(\mathbb{V})$  сводится к обычному умножению компонент формы  $A$  на число,

$$f \wedge A = \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} (f A_{a_1 \dots a_r}).$$

ПРИМЕР 3.1.3. Внешнее произведение двух 1-форм  $A = e^a A_a$  и  $B = e^b B_b$  равно

$$A \wedge B = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b (A_a B_b - A_b B_a) = e^a \wedge e^b A_a B_b. \quad (3.12)$$

ПРИМЕР 3.1.4. Внешнее произведение 1-формы  $A = e^a A_a$  на 2-форму  $B = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b B_{ab}$  равно

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \frac{1}{6} e^a \wedge e^b \wedge e^c (A_a B_{bc} + A_b B_{ca} + A_c B_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} e^a \wedge e^b \wedge e^c A_a B_{bc}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если суммарная степень форм превосходит размерность векторного пространства  $r+s > n$ , то внешнее произведение этих форм дает нуль.

Можно проверить, что внешнее умножение обладает следующими свойствами:

$$A \wedge B \quad \text{линейно по } A \text{ и } B, \quad (3.14)$$

$$A \wedge B = (-1)^{rs} B \wedge A, \quad (3.15)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C). \quad (3.16)$$

Первые два свойства очевидны. Из второго свойства (3.15) следует, что, если  $A$  – форма нечетной степени, то  $A \wedge A = 0$ .

Третье свойство доказывается прямым вычислением. Для трех форм, степеней  $r, s$  и  $t$ , соответственно, справедливо равенство

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(r+s+t)!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s+t}} \frac{1}{r!s!t!} \sum_{\sigma} A_{\sigma(a_1 \dots a_r)} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}} C_{a_{r+s+1} \dots a_{r+s+t}} \operatorname{sgn}(\sigma) \\
&= \frac{1}{r!s!t!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s+t}} A_{a_1 \dots a_r} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}} C_{a_{r+s+1} \dots a_{r+s+t}}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение симметрично относительно перестановок  $r, s$  и  $t$ , что соответствует ассоциативности внешнего умножения и определяют выбор коэффициента в равенстве (3.10): они подобраны таким образом, чтобы внешнее умножение было ассоциативным.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Форма фиксированной степени называется *однородной*. Прямая сумма отличных от нуля форм разных степеней называется *неоднородной*.

Внешнее умножение (3.9), определенное для однородных форм, продолжается на неоднородные формы общего вида (3.8) по линейности. Тем самым множество форм  $\Lambda(\mathbb{V})$  над произвольным векторным пространством  $\mathbb{V}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ , с операцией внешнего умножения представляет собой ассоциативную алгебру над полем вещественных чисел.

**ПРИМЕР 3.1.5.** Пусть  $A, B, C, D$  – четыре однородные формы различных степеней, тогда

$$(A \oplus B) \wedge (C \oplus D) := (A \wedge C) \oplus (B \wedge C) \oplus (A \wedge D) \oplus (B \wedge D).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество форм вида (3.8) с внешним умножением (3.9), продолженным на формы общего вида по линейности, называется *внешней алгеброй*  $\Lambda(\mathbb{V})$  над векторным пространством  $\mathbb{V}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ .

Эта алгебра ассоциативна, градуирована, антикоммутативна и содержит единичный элемент  $1 \in \Lambda_0(\mathbb{V})$ . Внешняя алгебра является алгеброй Грассмана с образующими  $e^a$  (частным случаем алгебр Клиффорда).

В обозначении базисных векторов внешней алгебры (3.2) был использован знак внешнего умножения, которое было определено позже. Покажем, что это обозначение обосновано. Рассмотрим две базисные 1-формы  $A^a = e^a$  и  $B^b = e^b$ . Тогда их внешнее произведение равно

$$A^a \wedge B^b = e^a \wedge e^b. \quad (3.17)$$

Более общо, для двух базисных форм  $A^{a_1 \dots a_r} = e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r}$  и  $B^{b_1 \dots b_s} = e^{b_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_s}$  справедливо равенство

$$A^{a_1 \dots a_r} \wedge B^{b_1 \dots b_s} = e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} \wedge e^{b_1} \wedge \cdots \wedge e^{b_s}.$$

Это оправдывает обозначение для базиса (3.1) и выбор коэффициентов для внешнего умножения (3.10).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для определения ассоциативного умножения в пространстве форм  $\Lambda(\mathbb{V})$  выбор коэффициента в определении внешнего умножения не является единственным. При определении внешнего умножения (3.9), (3.10) можно было бы выбрать другой коэффициент в (3.10):

$$C_{a_1 \dots a_{r+s}} := \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma A_{\sigma(a_1 \dots a_r)} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}}. \quad (3.18)$$

В этом случае произведение трех форм степеней  $r, s$  и  $t$

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C \\
&= \frac{1}{(r+s+t)!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r+s+t}} A_{a_1 \dots a_r} B_{a_{r+1} \dots a_{r+s}} C_{a_{r+s+1} \dots a_{r+s+t}}
\end{aligned}$$

также симметрично относительно перестановок  $r, s, t$  и, значит, ассоциативно. Однако в произведении базисных векторов (3.17) появился бы дополнительный множитель.

К определению внешней алгебры можно подойти с другой, более абстрактной, точки зрения. Рассмотрим две произвольные 1-формы  $A, B \in \Lambda_1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^*$ . Тогда для их тензорного произведения справедливо тождество

$$A \otimes B = A \wedge B + \frac{1}{2} [(A + B) \otimes (A + B) - A \otimes A - B \otimes B]. \quad (3.19)$$

Выражение в квадратных скобках является элементом тензорной алгебры, и каждое слагаемое представляет собой тензорное произведение одинаковых 1-форм. Рассмотрим элементы более общего вида  $X \otimes A \otimes A \otimes Y$ , где  $A \in \mathbb{V}^*$  – линейная форма, а  $X, Y \in \otimes \mathbb{V}^*$  – произвольные элементы тензорной алгебры. Нетрудно проверить, что элементы такого вида образуют двусторонний идеал  $\mathbb{I}$  в тензорной алгебре  $\otimes \mathbb{V}^*$ , которая рассматривается, как кольцо по отношению к сложению и тензорному умножению. Тогда из представления (3.19) следует, что внешняя алгебра является фактор пространством

$$\Lambda(\mathbb{V}) = \otimes \mathbb{V}^* / \mathbb{I}.$$

То есть два элемента  $A, B \in \otimes \mathbb{V}^*$  являются эквивалентными,  $A \sim B$ , если  $A = B + C$ , где  $C \in \mathbb{I}$ . Выражение в квадратных скобках в (3.19) принадлежит идеалу, и, значит,

$$A \otimes B \sim A \wedge B.$$

Таким образом, каждый элемент внешней алгебры взаимно однозначно определяет класс эквивалентности в тензорной алгебре.

Сформулируем четыре утверждения, доказательства которых сводятся к алгебраическим выкладкам.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.1.** *Для того, чтобы набор 1-форм  $\{A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , был линейно зависим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_N = 0. \quad (3.20)$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.2.** *Пусть  $\{A_i\}$  и  $\{B_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – два набора 1-форм таких, что выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^N A_i \wedge B_i = 0.$$

*Если 1-формы  $\{A_i\}$  линейно независимы, то 1-формы  $\{B_i\}$  можно выразить в виде линейной комбинации 1-форм  $\{A_i\}$ :*

$$B_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} A_j,$$

*причем  $C_{ij} = C_{ji}$ .*

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.3.** *Пусть  $\{A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – набор  $N$  линейно независимых 1-форм и  $B \in \Lambda_s$ . Для того, чтобы  $s$ -форму  $B$  можно было представить в виде линейной комбинации*

$$B = A_1 \wedge C_1 + \dots + A_N \wedge C_N,$$

*где  $\{C_i\}$  – некоторый набор  $(s-1)$ -форм, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_N \wedge B = 0.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При  $N + s > n$  эта теорема тривиально выполняется.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.4.** *Пусть  $\{A_i, B_i\}$  и  $\{A'_i, B'_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – два набора по  $2N$  1-форм. Если 1-формы  $\{A_i, B_i\}$  линейно независимы и выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^N A_i \wedge B_i = \sum_{i=1}^N A'_i \wedge B'_i,$$

*то набор 1-форм  $\{A'_i, B'_i\}$  также линейно независим и представляется в виде линейных комбинаций 1-форм  $\{A_i, B_i\}$ .*

Пусть некоторое семейство 1-форм  $\{A_i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , выражается в виде линейной комбинации 1-форм  $\{B_i\}$ :

$$A_i = M_i^j B_j,$$

где  $M_i^j$  – некоторая квадратная  $N \times N$  матрица. Тогда нетрудно проверить следующую формулу

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_N = \det(M_i^j) B_1 \wedge \dots \wedge B_N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$  –  $r$ -форма, тогда внешнее произведение

$$A^s := \underbrace{A \wedge \cdots \wedge A}_s$$

называется *внешней степенью*  $r$ -формы  $A$ .

На множестве 2-форм  $\Lambda_2(\mathbb{V})$  можно определить *внешнюю экспоненту*  $\widehat{\exp}$ , которая каждой 2-форме  $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$  ставит в соответствие прямую сумму форм четной степени по правилу

$$\widehat{\exp} A := 1 \oplus A \oplus \frac{1}{2} A \wedge A \oplus \frac{1}{3!} A \wedge A \wedge A \oplus \cdots \quad (3.21)$$

Ряд (3.21) содержит конечное число слагаемых, так как максимальное число сомножителей в последнем отличном от нуля слагаемом не может превосходить  $n/2$ . Внешняя экспонента обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \widehat{\exp} A \wedge \widehat{\exp} B &= \widehat{\exp} (A + B), \quad \forall A, B \in \Lambda_2(\mathbb{V}). \\ \frac{d}{dt} \widehat{\exp} (tA) &= A \wedge \widehat{\exp} (tA) = \widehat{\exp} (tA) \wedge A. \end{aligned}$$

При доказательстве этих формул использовано равенство  $A \wedge B = B \wedge A$ , справедливое для форм четной степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В пространстве векторов и  $r$ -форм введем *внутреннее умножение* как билинейное отображение

$$i: \mathbb{V} \times \Lambda_r(\mathbb{V}) \ni (X, A) \mapsto i_X A \in \Lambda^{r-1}(\mathbb{V}).$$

Оно определяется следующим образом. Пусть  $X \in \mathbb{V}$  и  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$ . Положим

$$i_X A(X_1, \dots, X_{r-1}) := A(X, X_1, \dots, X_{r-1}). \quad (3.22)$$

Другими словами, компоненты вектора  $X$  нужно просто свернуть с первым индексом  $r$ -формы. Правая часть выражения (3.22)  $(r-1)$ -линейна и антисимметрична, как функция  $X_1, \dots, X_{r-1}$ , а также билинейна по  $X$  и  $A$ . Удобно считать, что  $i_X A = 0$ , если  $A \in \Lambda_0$  – форма нулевой степени. Внутреннее умножение обозначают также  $i_X A = X \lrcorner A$ . Определение (3.22) можно переписать в эквивалентном виде

$$i_X A = X \lrcorner A = \frac{1}{(r-1)!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_{r-1}} X^b A_{ba_1 \dots a_{r-1}}. \quad (3.23)$$

Внутреннее умножение линейно

$$\begin{aligned} i_{X+Y} &= i_X + i_Y, \\ i_{aX} &= a i_X, \quad a \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и антисимметрично

$$i_X i_Y = -i_Y i_X \quad \Leftrightarrow \quad i_X i_X = 0,$$

для всех  $X, Y \in \mathbb{V}$ .

Нетрудно проверить, что внутреннее умножение удовлетворяет правилу Лейбница

$$i_X (A \wedge B) = i_X A \wedge B + (-1)^r A \wedge i_X B, \quad A \in \Lambda_r(\mathbb{V}).$$

Поэтому внутреннее умножение называют также *внутренним дифференцированием*.

Внутреннее умножение удобно использовать для характеристики внешней алгебры, построенной на фактор пространстве  $\mathbb{V}/\mathbb{U}$ , где  $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$  – некоторое линейное подпространство в  $\mathbb{V}$ . А именно, внешняя алгебра  $\Lambda(\mathbb{V}/\mathbb{U})$  состоит из тех форм  $A \in \Lambda(\mathbb{V})$ , для которых выполнено равенство  $i_X A = 0$  для всех  $X \in \mathbb{U}$ . Верно и обратное утверждение. Пусть задано подпространство  $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ . Тогда множество векторов  $X$ , удовлетворяющих условию  $i_X A = 0$  для всех  $A \in \Lambda(\mathbb{V}/\mathbb{U})$  образует подпространство, которое совпадает с  $\mathbb{U}$ .

В заключение обсудим свойства внешнего умножения при отображении векторных пространств. Пусть  $f$  – линейное отображение векторных пространств

$$f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W},$$

и пусть на векторном пространстве-мишени  $\mathbb{W}$  заданы две формы  $A, B \in \Lambda(\mathbb{W})$ , тогда для отображения дифференциальных форм справедливо равенство

$$f^*(A \wedge B) = (f^*A) \wedge (f^*B) \in \Lambda(\mathbb{V}),$$

которое просто проверяется.

### 3.2. Дифференциальные формы

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$  размерности  $\dim \mathbb{M} = n$ . В каждой точке многообразия мы имеем касательное и кокасательное векторные пространства. Построим над касательным векторным пространством  $\mathbb{V} = T_x(\mathbb{M})$  с координатным базисом  $\partial_\alpha$  в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  векторное пространство форм степени  $r$ :  $\Lambda_{r,x}(\mathbb{M})$ , как это было сделано в предыдущем разделе. Объединение форм степени  $r$  по всем точкам многообразия  $\bigcup_{x \in \mathbb{M}} \Lambda_{r,x}(\mathbb{M})$  приведет к векторному расслоению, сечениями которого являются полностью антисимметричные ковариантные тензорные поля ранга  $r$  (дифференциальные формы). Очевидно, что множество дифференциальных форм фиксированной степени с поточечным сложением и умножением на числа образует бесконечномерное линейное пространство. Прямая сумма по  $r$  множества всех дифференциальных форм даст внешнюю алгебру дифференциальных форм  $\Lambda(\mathbb{M})$  на многообразии  $\mathbb{M}$ , в которой все операции (умножение на числа, сложение и внешнее умножение) определены поточечно. Ясно, что все свойства внешнего умножения без изменений переносятся на внешнюю алгебру дифференциальных форм, и мы не будем их переписывать. Отметим изменение обозначений и терминологии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Множество полностью антисимметричных ковариантных тензорных полей типа  $(0, r)$ ,  $0 \leq r \leq n$  называется множеством *дифференциальных форм степени  $r$*  на многообразии  $\mathbb{M}$  и обозначается  $\Lambda_r(\mathbb{M}) \subset \mathcal{T}_r(\mathbb{M})$ .

В дальнейшем дифференциальные формы на многообразии  $\mathbb{M}$  степени  $r$  мы, для краткости, будем называть просто  $r$ -формами.

По определению, гладкие функции на многообразии образуют множество гладких 0-форм,  $\Lambda_0(\mathbb{M}) = C^\infty(\mathbb{M})$ . 1-формы  $A \in \Lambda_1(\mathbb{M}) = \mathcal{T}_1(\mathbb{M})$  (ковариантные векторные поля = сечения кокасательных расслоений) представляются в виде

$$A(x) = dx^\alpha A_\alpha(x),$$

где дифференциалы  $dx^\alpha$  представляют собой координатный базис кокасательного пространства, который дуален к  $\partial_\alpha$ . Дифференциальные 1-формы называются также *формами Пфаффа*. Максимальная степень нетривиальной формы совпадает с размерностью многообразия  $n$ , поскольку для более высоких степеней по крайней мере два индекса будут совпадать, а это невозможно для антисимметричных тензоров.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Напомним, что  $\partial_\alpha$  это сокращенное обозначение набора векторных полей  $(\partial_\alpha)_p \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$ ,  $p \in \mathbb{U}$ , на карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  многообразия  $\mathbb{M}$  (см. раздел 2.6.4), а  $dx^\alpha = (dx^\alpha)_p$  – дуальный базис 1-форм,  $dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta_\beta^\alpha$ .

Как и для векторных пространств, алгебра дифференциальных форм равна прямой сумме форм всех степеней

$$\Lambda(\mathbb{M}) := \bigoplus_{r=0}^n \Lambda_r(\mathbb{M}). \quad (3.24)$$

Координатный базис этого пространства имеет вид

$$1, \quad dx^\alpha, \quad dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2}, \quad \dots, \quad dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r}, \dots, \quad dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (3.25)$$

где индексы упорядочены по возрастанию  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq n$ . Элементы внешней алгебры  $\Lambda(\mathbb{M})$ , в соответствии с разложением (3.24), представимы в виде

$$A = \sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad (3.26)$$

где подразумевается суммирование по всем значениям индексов. Форма  $A$  называется *дифференцируемой*, если все антисимметричные тензорные поля  $A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$  (компоненты формы) дифференцируемы. Если не оговорено противное, мы будем предполагать, что все компоненты форм гладко зависят от точки многообразия.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Запись дифференциальной формы в виде (3.26) имеет смысл только в определенной карте многообразия, где определен координатный базис кокасательного пространства  $dx^\alpha$ . Однако она универсальна, так как инвариантна относительно преобразований координат, поскольку в точках пересечения двух карт с координатами  $x^\alpha$  и  $x^{\alpha'}$  справедливо равенство

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = dx^{\alpha'_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha'_r} A_{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}.$$

Запись дифференциальных форм в виде (3.26) является общепринятой.

Введем несколько новых понятий, которые являются полезными с точки зрения дифференциальной геометрии. Конечно, часть из них можно было бы ввести и для форм над векторным пространством еще в предыдущем разделе.

Можно рассматривать дифференциальные формы со значениями в произвольном векторном пространстве  $\mathbb{W}$ . Пусть  $e_i$  – базис векторного пространства  $\mathbb{W}$ . Тогда  $r$ -форма  $A$  со значениями в  $\mathbb{W}$  имеет вид  $A = A^i e_i$ . При каждом значении индекса  $i$  коэффициенты этого разложения представляют собой  $r$ -формы  $A^i \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ . По индексу  $i$  эти формы преобразуются, как компоненты вектора из пространства  $\mathbb{W}$ .

**ПРИМЕР 3.2.1.** Произвольную  $r$ -форму на многообразии  $\mathbb{M}$

$$A = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \in \Lambda_r(\mathbb{M}),$$

можно поточечно рассматривать, как внешнее произведение базисной  $r$ -формы  $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r}$  на 0-форму  $A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$  со значениями в векторном пространстве  $\mathbb{W} = \mathbb{T}_x^*(\mathbb{M}) \wedge \dots \wedge \mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$ .

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  помимо форм заданы векторные поля. Тогда значение произвольной  $r$ -формы  $A$  на  $r$  векторных полях  $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  равно свертке компонент:

$$A(X_1, \dots, X_r) := X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \in C^\infty(\mathbb{M}).$$

Данное определение не зависит от выбора карты и потому корректно. Отсюда следует, что произвольная  $r$ -форма в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  определяет полилинейное отображение ( $C^\infty$ -модуль):  $(\mathbb{T}_x(\mathbb{M}))^r \rightarrow \mathbb{R}$ , которое антисимметрично относительно перестановки аргументов.

**ПРИМЕР 3.2.2.** Значение 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  на векторном поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha$  определяет функцию, которая равна сумме компонент:  $A(X) = X^\alpha A_\alpha$ .

Пусть  $A_i$  и  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, r \leq n$  – произвольный набор 1-форм и векторных полей на  $\mathbb{M}$ . Тогда из определения внешнего умножения следует, что значение внешнего произведения 1-форм на векторных полях равно определителю матрицы с элементами  $A_i(X_j)$

$$(A_1 \wedge \dots \wedge A_r)(X_1 \dots X_r) = \det(A_i(X_j)).$$

Пусть две 1-формы  $A$  и  $B$  линейно зависимы, т.е.  $A = fB$ , где  $f \in \Lambda_0(\mathbb{M})$ , тогда их внешнее произведение, очевидно, равно нулю. Верно также и обратное утверждение, из которого следует, что, если  $A \wedge B \neq 0$  в некоторой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , то 1-формы линейно независимы в каждой точке  $\mathbb{U}$ . Более общо, справедливо следующее утверждение.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.1.** Для того, чтобы линейные формы  $e^i = dx^\alpha e_\alpha^i$ ,  $i = 1, \dots, r \leq n$  были линейно независимы в области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области  $e^1 \wedge \dots \wedge e^r \neq 0$ .

Дифференциальные формы часто бывает удобно рассматривать в неголономном базисе. Выберем в качестве базиса кокасательного пространства 1-формы  $e^a := dx^\alpha e_\alpha^a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , где  $e_\alpha^a(x)$  – поле репера, тогда соответствующий базис  $r$ -форм имеет вид

$$e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r}, \quad 1 \leq a_1 < \dots < a_r \leq n. \quad (3.27)$$

Мы используем для неголономного базиса те же обозначения, что и для базиса форм над векторным пространством (3.2). Разница заключается в том, что теперь базис  $e^a(x)$  зависит от точки многообразия, и это всегда ясно из контекста.

Для того, чтобы 1-формы  $e^a$  действительно образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det e_a^a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^1 \wedge \cdots \wedge e^n \neq 0$$

во всех точках многообразия  $\mathbb{M}$ , что совпадает с определением репера, который будет введен позже в разделе 5.4. Компоненты разложения  $r$ -формы

$$A = \frac{1}{r!} e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_r} A_{a_1 \dots a_r}$$

по этому базису связаны с компонентами в голономном базисе простым соотношением

$$A_{a_1 \dots a_r} := e^{\alpha_1}_{a_1} \cdots e^{\alpha_r}_{a_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r},$$

где  $e^a_a$  – матрица обратного репера:  $e^a_a e^b_a = \delta^b_a$ .

### 3.3. Внешнее дифференцирование

Во внешней алгебре дифференциальных форм  $\Lambda(\mathbb{M})$  на многообразии  $\mathbb{M}$  определим *внешнее дифференцирование* как линейное отображение

$$d : \Lambda_r(\mathbb{M}) \rightarrow \Lambda_{r+1}(\mathbb{M}) \quad (3.28)$$

множества  $r$ -форм в множество  $(r+1)$ -форм. Начнем с локального определения. Пусть в некоторой карте  $(\mathbb{U}, \varphi)$  задана  $r$ -форма

$$A = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \in \Lambda_r(\mathbb{U}).$$

Положим

$$\begin{aligned} dA &:= \frac{1}{r!} dA_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} \\ &= \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r+1}} \partial_{\alpha_1} A_{\alpha_2 \dots \alpha_{r+1}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь под  $dA_{\alpha_1 \dots \alpha_r} := dx^\alpha \partial_\alpha A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$  понимается обычный дифференциал. Внешнее дифференцирование обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \text{если } f \text{ – } 0\text{-форма, то } df = dx^\alpha \partial_\alpha f, \quad (3.30)$$

$$2) \quad \text{если } A \text{ – } r\text{-форма, то } d(A \wedge B) = dA \wedge B + (-1)^r A \wedge dB, \quad (3.31)$$

$$3) \quad d(dA) = 0 \quad \text{для любой формы } A. \quad (3.32)$$

Первые два свойства легко проверяются, исходя из определения (3.29). Доказательство третьего свойства сводится к тому, что вторая частная производная  $\partial_{\alpha\beta}^2$  симметрична по индексам и дает нуль при свертке с антисимметричным базисным вектором.

Формула для внешнего дифференцирования (3.29) является прямым следствием свойств 1)–3). Действительно, представив  $r$ -форму как внешнее произведение 0-формы  $A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$  со значениями в векторном пространстве на базисную  $r$ -форму  $dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r}$  сразу приходим к (3.29). Поэтому она задает единственное дифференцирование во внешней алгебре, удовлетворяющее условиям 1)–3).

Глобальное определение внешнего дифференцирования сформулируем в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 3.3.1 (Внешнее дифференцирование).** *Существует единственное линейное отображение (3.28) такое, что выполнены условия (3.30)–(3.32). Оно называется внешним дифференцированием.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выше мы доказали существование и единственность внешнего дифференцирования в определенной карте. Осталось доказать, что существование и единственность не зависят от выбора карты. Действительно, компоненты в разложении внешней производной от  $r$ -формы (3.29)

$$\partial_{[\alpha_1} A_{\alpha_2 \dots \alpha_{r+1}]},$$



где квадратные скобки обозначают антисимметризацию всех индексов, являются компонентами полностью антисимметричного тензора типа  $(0, r + 1)$ . Это утверждение нетривиально, потому что обычная частная производная от компонент тензора не дает тензора. Для 1-формы имеем следующий закон преобразования частной производной в области пересечения двух карт

$$\partial_{\alpha'} A_{\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \partial_\alpha A_\beta + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} A_\alpha.$$

Первое слагаемое соответствует тензорному закону преобразования, а второе – нет. Однако второе слагаемое исчезает при антисимметризации и мы получаем тензорный закон преобразования для внешней производной. Аналогично сокращаются дополнительные слагаемые для произвольной  $r$ -формы. Подробности доказательства приведены в [27], теорема 2.20.

Для практических вычислений внешней производной, которые проводятся в координатах, достаточно формулы (3.29).

ПРИМЕР 3.3.1. Внешний дифференциал от 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  равен

$$dA = dA_\alpha \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = dx^\alpha \wedge dx^\beta \partial_\alpha A_\beta. \quad (3.33)$$

ПРИМЕР 3.3.2. Внешний дифференциал от 2-формы  $B = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta B_{\alpha\beta}$  равен

$$\begin{aligned} dB &= \frac{1}{2} dB_{\alpha\beta} \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \partial_\alpha B_{\beta\gamma} \\ &= \frac{1}{12} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma (\partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \partial_\beta B_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma B_{\alpha\beta} - \partial_\alpha B_{\gamma\beta} - \partial_\gamma B_{\beta\alpha} - \partial_\beta B_{\alpha\gamma}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Формулу внешнего дифференцирования легко запомнить с помощью следующего мнемонического правила. Сравнивая последнее выражение в (3.29) с формулой для внешнего умножения (3.11), можно записать

$$dA = \partial \wedge A.$$

Из определения 3.29 следует, что внешний дифференциал можно записать с помощью ковариантной производной, определяемой символами Кристоффеля или другой произвольной *симметричной* аффинной связностью

$$dA = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_{r+1}} \tilde{\nabla}_{\alpha_1} A_{\alpha_2 \dots \alpha_{r+1}}. \quad (3.35)$$

Для несимметричной связности возникнут дополнительные слагаемые с тензором кручения.

Приведем некоторые свойства внешнего дифференцирования. С помощью прямых вычислений доказывается формула

$$2dA(X, Y) = X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X, Y]), \quad (3.36)$$

где  $A$  – произвольная 1-форма, а  $X, Y$  – любые векторные поля на  $M$ . В общем случае справедлива

ТЕОРЕМА 3.3.2. Пусть  $A$  – гладкая дифференциальная форма степени  $r$  и  $X_1 \dots X_{r+1}$  – гладкие векторные поля. Тогда значение  $r + 1$ -формы  $dA$  на этих векторных полях может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned} dA(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \frac{1}{r+1} \sum_i (-1)^{i-1} X_i^\alpha \partial_\alpha A(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &\quad + \frac{1}{r+1} \sum_{i < j} (-1)^{i+j} A([X_i, X_j], X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_{r+1}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где символ  $\check{X}_i$  означает, что соответствующее векторное поле отсутствует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Форма  $A$  степени  $r \geq 1$  называется *точной*, если существует такая  $(r - 1)$ -форма  $B$ , что

$$A = dB. \quad (3.38)$$

Форма  $A$  степени  $r \geq 0$  называется *замкнутой*, если выполнено условие

$$dA = 0. \quad (3.39)$$

По определению, точных 0-форм не существует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.1. Множество всех замкнутых 0-форм (функций) на связном многообразии состоит из функций, которые постоянны на всем многообразии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ . Тогда замкнутость 0-формы в произвольной системе координат означает, что

$$df = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha f = 0.$$

Откуда следует  $f = \text{const}$  и в данной карте и на всем многообразии.

Любая точная форма является замкнутой в силу свойства внешнего дифференцирования (3.32). Обратное утверждение в общем случае неверно. Для замкнутой формы представление (3.38) справедливо только локально, т.е. в некоторой окрестности произвольной точки (лемма Пуанкаре), которая будет сформулирована ниже. При этом глобальное представление может не иметь места. В общем случае множество замкнутых форм больше множества точных форм. В дальнейшем будет показано, что отличие множества замкнутых и точных форм связано с топологическими свойствами многообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если форма  $A$  точна,  $A = dB$ , и принадлежит классу  $\mathcal{C}^k$ , то это не значит, что форма  $B$  принадлежит классу  $\mathcal{C}^{k+1}$ , потому что в определении внешней производной (3.29) содержится только часть частных производных. Например, если  $B \in \Lambda_n(\mathbb{M})$  – форма максимальной степени и класса  $\mathcal{C}^1$ , то  $A = dB = 0$ , и, следовательно, принадлежит классу  $\mathcal{C}^\infty$ , а это ничего не говорит о степени гладкости формы  $B$ . В лемме Пуанкаре нам встретится ситуация, когда обе формы  $A$  и  $B$  одного класса гладкости.

ПРИМЕР 3.3.3. Пусть на компактном многообразии  $\mathbb{M}$  задана гладкая функция  $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ . Тогда 1-форма  $A = dx^\alpha \partial_\alpha f$  точна, замкнута и имеет по крайней мере два нуля. Наличие нулей следует из теоремы о том, что на компактном многообразии всякая непрерывная функция принимает свое минимальное и максимальное значения, где все частные производные обращаются в нуль. Этот пример показывает, что нули замкнутых форм связаны с топологией многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.2. Внешнее произведение замкнутых форм замкнуто, а если одна из форм, кроме того, точна, то это произведение является точной формой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

Приведем важную теорему, имеющую многочисленные применения в дифференциальной геометрии.

ТЕОРЕМА 3.3.3 (Лемма Пуанкаре). Пусть  $A \in \Lambda_r(\mathbb{R}^n)$ ,  $r \geq 1$ , – замкнутая  $r$ -форма,  $dA = 0$ , класса  $\mathcal{C}^1$ , задана в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Тогда существуют  $(r - 1)$ -формы  $B \in \Lambda_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ , класса  $\mathcal{C}^1$ , такие, что  $A = dB$ . При этом все формы  $B$  отличаются друг от друга на точные формы  $B_1 = B_2 + dC$ , где  $C \in \Lambda_{r-2}(\mathbb{R}^n)$ , класса  $\mathcal{C}^1$  при  $r \geq 2$ . При  $r = 1$ , 0-формы  $B$  определены с точностью до константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится по индукции по размерности евклидова пространства путем явного построения формы  $B$  с помощью интеграла вдоль кривой [31], глава 6, теорема 19.

Эта теорема локальна, так как все евклидово пространство диффеоморфно, например, шару  $\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ . В случае, когда многообразии  $\mathbb{M}$  нетривиально и не покрывается одной картой, лемма Пуанкаре справедлива для каждой карты, но не для всего  $\mathbb{M}$ . Отличие классов замкнутых и точных форм служит для глобальной характеристики многообразий и лежит в основе теории когомологий де Рама – одного из подходов к теории гомологий.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно лемме Пуанкаре, если форма  $A$  определена на области  $U \subset \mathbb{M}$ , гомеоморфной евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$ , то она всегда точна. Поэтому различие между точными и замкнутыми формами проявляется только для форм, заданных на всем многообразии  $\mathbb{M}$ .

**ПРИМЕР 3.3.4.** Поясним лемму Пуанкаре на примере 1-формы  $A$  и 0-формы  $f$ . В этом случае условие точности формы (3.38) сводится к уравнению

$$A_\alpha = \partial_\alpha f. \quad (3.40)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что это уравнение локально разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad dA = 0. \quad (3.41)$$

Таким образом, замкнутость некоторой формы обеспечивает ее точность только локально, но не глобально.

Дифференциальная 1-форма  $dx^\alpha A_\alpha$  на  $n$ -мерном многообразии задается  $n$  независимыми компонентами, а скалярное поле  $f$  — только одной. С другой стороны, если форма  $A$  точна, то она параметризуется только одной функцией, так как выполнено равенство (3.40). На первый взгляд, число уравнений на компоненты  $A_\alpha$  в (3.41) равно  $C_n^2$ , что превышает разность в числе независимых компонент, которая равна  $n - 1$ , при  $n \geq 3$ . Кажущееся противоречие заключается в наивном подсчете числа уравнений. Подсчитаем число независимых уравнений в (3.41). Общее число уравнений равно  $C_n^2$ , однако независимых уравнений меньше, поскольку имеется дифференциальное тождество  $d^2 A = 0$ . Число этих тождеств равно  $C_n^3$ , однако среди них также есть зависящие в силу тождества  $d^3 A = 0$ . Продолжая этот процесс до порядка  $n - 1$  (дальнейшая антисимметризация по индексам не имеет смысла) получим, что число независимых уравнений среди (3.41) равно

$$C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \dots (-1)^n C_n^n = C_n^1 - 1 = n - 1.$$

Это равенство следует из формулы бинома Ньютона. То есть среди  $n$  компонент замкнутой 1-формы  $A$  (ковекторного поля) только одна является независимой, в качестве которой можно выбрать  $f$ .

**ПРИМЕР 3.3.5.** Продемонстрируем локальность леммы Пуанкаре и важность нетривиальных замкнутых форм для описания глобальных свойств многообразий. Рассмотрим евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  в декартовых координатах  $x, y$ . Тогда дифференциал полярного угла  $\varphi$  имеет вид

$$A = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

1-форма  $A$  определена и замкнута,  $dA = 0$ , всюду, за исключением начала координат, и, значит, не удовлетворяет условиям леммы Пуанкаре. Отсюда следует, что не существует дифференцируемой функции  $\varphi(x, y)$ , определенной на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , такой, что  $A = d\varphi$ . Действительно, при обходе начала координат по замкнутому контуру один раз, функция  $\varphi$  получит приращение  $2\pi$ . В то же время на любой односвязной области, не содержащей начала координат, такая функция существует.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.3.** Если на многообразии задано векторное поле  $X$ , то производная Ли (см. раздел 2.14) от произвольной  $r$ -формы  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  представляет собой симметричную комбинацию внешней и внутренней производной

$$\mathbf{L}_X = d i_X + i_X d. \quad (3.42)$$

Это соотношение называется основной формулой гомотопии.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно показать, что правая часть этого выражения является дифференцированием, коммутирующим с внешней производной  $d$ , и что оно совпадает с производной Ли на функциях. Действительно, пусть  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  и  $B \in \Lambda_s(\mathbb{M})$ , тогда нетрудно проверить равенство

$$(d i_X + i_X d)(A \wedge B) = (d i_X + i_X d)A \wedge B + A \wedge (d i_X + i_X d)B. \quad (3.43)$$

На функциях  $f \in \Lambda_0(\mathbb{M})$

$$(d i_X + i_X d)f = i_X df = Xf = \mathbf{L}_X f.$$

Коммутативность  $(d i_X + i_X d)$  с внешней производной легко проверяется.

Формулу (3.43) можно переписать в виде

$$\mathbf{L}_X(A \wedge B) = \mathbf{L}_X A \wedge B + A \wedge \mathbf{L}_X B.$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.4.** Пусть задан диффеоморфизм двух многообразий  $h : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ . Тогда отображение дифференциальных форм

$$h^* : \mathbb{T}^*(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{T}^*(\mathbb{M}),$$

имеет следующие свойства.

1) Для произвольных форм  $A, B \in \Lambda(\mathbb{N})$ , заданных на многообразии  $\mathbb{N}$ , справедливо равенство

$$h^*(A \wedge B) = h^*A \wedge h^*B.$$

2) Отображение дифференциальных форм коммутирует с внешней производной

$$h^*dA = d(h^*A), \quad (3.44)$$

где  $A$  – произвольная  $r$ -форма на многообразии  $\mathbb{N}$ .

3) Пусть задан набор векторных полей  $X_1, \dots, X_r$  на  $\mathbb{M}$ . Тогда

$$h^*A(X_1, \dots, X_r) = A(h_*X_1, \dots, h_*X_r),$$

где  $A$  – произвольная  $r$ -форма на  $\mathbb{N}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямая проверка.

Поскольку производная Ли от форм определяется отображением дифференциальных форм, то из свойства 1) вытекает, что производная Ли от произвольной  $r$ -формы коммутирует с внешним дифференцированием:

$$L_X d = d L_X.$$

Это свойство было использовано в доказательстве равенства (3.43).

### 3.4. Теорема Дарбу

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , задана произвольная  $r$ -форма

$$A = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \in \Lambda_r(\mathbb{M}).$$

Зададим вопрос о том, каково минимальное число функций  $f^1(x), \dots, f^q(x)$  таких, что  $r$ -форма  $A$  представима в виде

$$A = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq q} df^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge df^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (f^1 \dots f^q). \quad (3.45)$$

Ясно, что при  $q = n$  любая форма уже имеет такой вид. С другой стороны, число функций не может быть меньше степени формы. Поэтому представляет интерес случай  $r \leq q < n$ . Важность этого вопроса заключается в том, что функции  $f^1, \dots, f^q$  можно выбрать в качестве части координат некоторой новой координатной системы и тем самым привести форму к каноническому виду, в котором она будет зависеть не от всех координат, а только от их части. Ответ на поставленный вопрос дает теорема 3.46, сформулированная в настоящем разделе. Для 1- и 2-форм ответ дают теоремы Дарбу.

Для формулировки теорем мы введем новые понятия: ранг и класс дифференциальных форм. Начнем с форм над произвольным векторным пространством  $\mathbb{V}$  с базисом  $e_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Дадим несколько определений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Назовем  $r$ -форму  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$  *разложимой*, если существует  $r$  линейно независимых 1-форм  $a^1, \dots, a^r \in \Lambda_1(\mathbb{V})$  таких, что

$$A = a^1 \wedge \dots \wedge a^r.$$

Ясно, что всякую  $r$ -форму можно представить в виде суммы разложимых  $r$ -форм, например, разложив по базису. Однако, не всякая  $r$ -форма разложима.

ПРИМЕР 3.4.1. Рассмотрим четырехмерное векторное пространство  $\mathbb{V}$  с базисом  $e_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ . Базис сопряженного пространства  $\mathbb{V}^*$  обозначим через  $e^\alpha$ . Рассмотрим 2-форму

$$A = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda_2(\mathbb{V}).$$

Если форма  $A$  разложима, то существуют две 1-формы  $a = e^\alpha a_\alpha$  и  $b = e^\beta b_\beta$  такие, что выполнено условие

$$A = a \wedge b = e^\alpha \wedge e^\beta a_\alpha b_\beta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4.$$

Отсюда вытекает следующая система уравнений на компоненты

$$\begin{aligned} a_1 b_2 &= 1, & a_2 b_3 &= 0, \\ a_1 b_3 &= 0, & a_2 b_4 &= 0, \\ a_1 b_4 &= 0, & a_3 b_4 &= 1. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно положить  $a_1 = 1$ . Тогда из трех уравнений в первой колонке следует  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = b_4 = 0$ . Подставив эти решения в остальные уравнения, приходим к противоречию. Следовательно, 2-форма  $A$  является неразложимой.

Рассмотрим другую 2-форму над тем же векторным пространством  $\mathbb{V}$

$$A = e^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge e^3 \in \Lambda_2(\mathbb{V}).$$

Ее можно представить в виде  $A = e^1 \wedge (e^2 + e^3)$ . Отсюда следует, что эта форма разложима:  $A = e^1 \wedge b$ , где  $b := e^2 + e^3 \in \Lambda_1(\mathbb{V})$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем подпространство  $\mathbb{A}(A) \subset \mathbb{V}$  ассоциированным с формой  $A$ , если это наибольшее из тех подпространств  $\mathbb{H} \subset \mathbb{V}$ , для которых  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V}/\mathbb{H})$ . Другими словами, пространство  $\mathbb{A}(A)$  образовано теми векторами  $X \in \mathbb{V}$ , чье внутреннее произведение с формой равно нулю,  $i_X A = 0$ . Это значит, что подпространство, ассоциированное с формой  $A$ , есть подпространство в  $\mathbb{V}$ , которое определяется системой уравнений  $i_X A = 0$ .

Каждому ассоциированному пространству  $\mathbb{A}(A)$  можно поставить в соответствие ассоциированную с формой систему  $\mathbb{A}^*(A)$ , как ортогональное дополнение сопряженного пространства

$$\mathbb{A}^*(A) := \mathbb{A}^\perp(A) \in \mathbb{V}^*.$$

Размерность ассоциированной системы называется рангом формы  $A$

$$\text{rank } A := \dim \mathbb{A}^*(A).$$

Ясно, что ранг  $r$ -формы  $A$  равен минимальному числу линейно независимых 1-форм таких, что форма  $A$  равна линейной комбинации их внешних произведений.

ПРИМЕР 3.4.2. Для 2-форм  $A = \frac{1}{2} e^\alpha \wedge e^\beta A_{\alpha\beta}$  понятие ранга особенно наглядно: это просто ранг матрицы компонент,

$$\dim \mathbb{A}^*(A) = \text{rank } A_{\alpha\beta}.$$

ПРИМЕР 3.4.3. Рассмотрим 0-формы  $A \in \Lambda_0(\mathbb{V})$ , т.е.  $A \in \mathbb{R}$ . Тогда ассоциированное подпространство  $\mathbb{A}(A) = \mathbb{V}$ , так как факторпространство  $\mathbb{V}/\mathbb{V}$  состоит из одной точки – начала координат, и  $\Lambda_0(\mathbb{V}/\mathbb{V}) = \mathbb{R}$ . Соответствующая система  $\mathbb{A}^*(A)$ , ассоциированная с формой  $A$ , также состоит из одной точки – начала координат сопряженного пространства  $\mathbb{A}^*(A) = \{0\}$ . Таким образом, ранг произвольной 0-формы равен нулю.

ПРИМЕР 3.4.4. Пусть  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$  с базисом  $\{e_1, \dots, e_n\}$  и  $A = e^1 + e^2 \in \Lambda_1(\mathbb{R}^n)$ , тогда ассоциированное подпространство  $\mathbb{A}(A) = \mathbb{R}^{n-1}$  порождено базисными векторами  $\{e_1 - e_2, e_3, \dots, e_n\}$ . Соответствующая ассоциированная система  $\mathbb{A}^*(A)$  представляет собой одномерное подпространство сопряженного пространства  $\mathbb{V}^* = \mathbb{R}^n$ , порожденное формой  $A$ , т.е. натянутое на базисный вектор  $e^1 + e^2$ . Ранг 1-формы  $e^1 + e^2$  равен единице. Ясно, что ранг произвольной 1-формы равен единице.

ПРИМЕР 3.4.5. Пусть  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$  и  $A = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ . Эта 2-форма неразложима, поэтому ассоциированное с ней подпространство имеет размерность  $n - 4$ . Следовательно, ассоциированное подпространство имеет вид  $\mathbb{A}(A) = \mathbb{R}^{n-4}$  и порождено векторами  $e_5, \dots, e_n$ . Соответствующая ассоциированная система четырехмерна и порождена векторами  $e^1, e^2, e^3, e^4$ . Таким образом, ранг 2-формы  $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$  равен четырем.

В общем случае справедлива следующая теорема, дающая ограничения на возможный ранг формы степени  $r$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.1. Если  $A \in \Lambda_r(\mathbb{V})$  – ненулевая  $r$ -форма на  $\mathbb{V}$ , то ее ранг не меньше  $r$  и не больше  $n$

$$r \leq \text{rank } A \leq n.$$

Ранг  $r$ -формы  $A$  равен  $r$  тогда и только тогда, когда форма  $A$  разложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [33], предложение 7.13.

Как следствие получаем, что, поскольку любая  $n$ -форма разложима, то ее ранг равен  $n$ . Можно доказать, что любая  $(n - 1)$ -форма разложима и ее ранг, следовательно, равен  $n - 1$ . А также, что ранг  $(n - 2)$ -формы равен либо  $n - 2$ , либо  $n$ .

Доказательства следующих трех предложений для внешних форм второй степени  $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$ ,  $\dim(\mathbb{V}) = n$ , приведены в [33], следствия теоремы 8.1 и предложение 8.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.2. Пусть  $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$  – внешняя 2-форма. Тогда существует целое четное число  $2s$  такое, что  $2 \leq 2s \leq n$ , и  $2s$  независимых линейных форм  $a^1, \dots, a^{2s}$  таких, что

$$A = a^1 \wedge a^2 + \dots + a^{2s-1} \wedge a^{2s}.$$

При этом 1-форму  $a^1$  можно выбрать произвольно в ассоциированной системе  $\mathbb{A}^*(A)$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.3. Внешняя 2-форма имеет четный ранг.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.4. Пусть  $A \in \Lambda_2(\mathbb{V})$  – внешняя 2-форма. Для того, чтобы 2-форма  $A$  имела ранг  $2s$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$A^s \neq 0 \quad \text{и} \quad A^{s+1} = 0,$$

где в левой части соотношений стоят внешние степени формы  $A$ .

Приведенные выше определения и утверждения даны для внешней алгебры  $\Lambda(\mathbb{V})$  над произвольным векторным пространством  $\mathbb{V}$  и применимы в каждой точке многообразия  $\mathbb{M}$  для внешней алгебры  $\Lambda(\mathbb{M})$ . При рассмотрении форм на многообразии эти понятия, в том числе ранг формы, могут меняться от точки к точке.

Введем несколько новых понятий, для которых уже важна зависимость компонент формы от точки многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Характеристическим подпространством  $r$ -формы  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  называется подпространство касательного пространства  $\mathbb{C}_x(A) \subset \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ , которое является пересечением ассоциированных подпространств для формы  $A$  и ее внешней производной  $dA$ ,

$$\mathbb{C}_x(A) := \mathbb{A}_x(A) \cap \mathbb{A}_x(dA),$$

в точке  $x$ . Характеристической системой формы  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  называется подпространство  $\mathbb{C}_x^*(A) \subset \mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$ , которое ортогонально характеристическому подпространству этой формы  $\mathbb{C}_x(A)$ .

Из определения вытекает, что характеристическая система  $\mathbb{C}_x^*(A)$  строится по ассоциированным системам  $\mathbb{A}_x^*(A)$  и  $\mathbb{A}_x^*(dA)$  следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_x^*(A) &= \mathbb{A}_x^*(A) \oplus [\mathbb{A}_x^*(dA) \setminus (\mathbb{A}_x^*(A) \cap \mathbb{A}_x^*(dA))] \\ &= [\mathbb{A}_x^*(A) \setminus (\mathbb{A}_x^*(A) \cap \mathbb{A}_x^*(dA))] \oplus \mathbb{A}_x^*(dA). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Классом  $r$ -формы  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  называется размерность характеристической системы:  $\text{class}(A) := \dim \mathbb{C}_x^*(A)$ .

Из определения следует, что класс ненулевой  $r$ -формы  $A$  не меньше ее ранга и, следовательно, не меньше степени  $r$

$$r \leq \text{rank}(A) \leq \text{class}(A).$$

В общем случае класс формы может зависеть от точки многообразия.

ПРИМЕР 3.4.6. Рассмотрим 1-форму  $A = dy(x^2 + y^2)$  на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $x, y$ . Ее внешний дифференциал равен  $dA = dx \wedge dy$ . Существуют три случая.

1)  $x \neq 0$ . В этом случае ассоциированное подпространство  $\mathbb{A}(A)$  порождено вектором  $\partial_x$ , а ассоциированное подпространство внешнего дифференциала нульмерно,  $\mathbb{A}(dA) = \{0\}$ . Поэтому характеристическое подпространство состоит из одной точки  $\mathbb{C}_x(A) = \{0\}$ , а характеристическая система совпадает с касательным пространством,  $\mathbb{C}_x(A) = \mathbb{T}_x^*(\mathbb{R}^2)$ . Следовательно, класс формы  $A$  равен двум,  $\text{class}(A) = 2$ .

2)  $x = 0, y \neq 0$ . Ассоциированное подпространство  $\mathbb{A}(A)$  по-прежнему порождено вектором  $\partial_x$ . Внешний дифференциал формы  $A$  равен нулю,  $dA = 0$ , и ассоциированное подпространство внешнего дифференциала совпадает с касательным пространством,  $\mathbb{A}(dA) = \mathbb{T}_x(\mathbb{R}^2)$ . Следовательно, характеристическое подпространство  $\mathbb{C}_x(A)$  порождено вектором  $\partial_x$ , а характеристическая система – дифференциалом  $dy$ . Поэтому класс формы  $A$  равен единице,  $\text{class}(A) = 1$ .

3)  $x = y = 0$ . В этом случае и форма, и ее внешний дифференциал обращаются в нуль:  $A = 0, dA = 0$ . Поэтому ассоциированное подпространство совпадает с касательным пространством,  $\mathbb{C}_x(A) = \mathbb{T}_x(\mathbb{R}^2)$ , а ассоциированная система состоит из одной точки  $\mathbb{C}_x^* = \{0\}$ . Следовательно, класс формы  $A$  равен нулю,  $\text{class}(A) = 0$ .

Таким образом, класс рассматриваемой формы зависит от точки плоскости и равен:

- $\text{class}(A) = 2$ , если  $x \neq 0$ ;
- $\text{class}(A) = 1$ , если  $x = 0$  и  $y \neq 0$ ;
- $\text{class}(A) = 0$ , если  $x = y = 0$ .

Продолжим общее рассмотрение. Нетрудно проверить, что если класс  $r$ -формы  $A$  равен ее степени  $r$  в некоторой точке  $x \in \mathbb{M}$ , то эта форма замкнута,  $dA(x) = 0$ . В обратную сторону справедливо другое утверждение. Если форма замкнута,  $dA(x) = 0$ , в точке  $x$ , то в этой точке ее класс равен рангу, а не степени. Отсюда, в частности, следует, что замкнутая форма второй степени имеет четный класс.

Теперь сформулируем основное утверждение настоящего раздела.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  – дифференциальная  $r$ -форма на многообразии  $\mathbb{M}$  постоянного класса,  $\text{class}(A) = q, r \leq q \leq n$ . Тогда в окрестности любой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует такая система координат  $y^1, \dots, y^n$ , что форма  $A$  представима в виде

$$A = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_r \leq q} dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(y^1 \dots y^q). \quad (3.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [33], предложение 3.2.

Нетривиальность этой теоремы заключается в том, что форма записана в виде, содержащим только первые  $q$  координат. Эта теорема дает ответ на вопрос, поставленный в начале раздела. Другими словами, класс формы равен минимальному числу независимых функций, необходимых для явного выражения  $r$ -формы постоянного класса.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  – дифференциальная  $r$ -форма на многообразии  $\mathbb{M}$  постоянного класса, который равен степени,  $\text{class}(A) = r$ . Тогда в окрестности любой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует такая система координат  $y^1, \dots, y^n$ , что форма  $A$  имеет вид

$$A = dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_r} \quad (3.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [33], следствие 3.4.

Для замкнутых 1- и 2-форм постоянного класса теорему 3.4.1 можно уточнить.

**ТЕОРЕМА 3.4.2 (Дарбу).** Пусть  $A$  – произвольная 1-форма без нулей на многообразии  $\mathbb{M}$  постоянного класса  $2s + 1$  (или  $2s$ ). Тогда для любой точки  $x \in \mathbb{M}$  существуют  $2s + 1$  (или  $2s$ ) функций  $y^1, \dots, y^{2s+1}$  (или  $y^1, \dots, y^{2s}$ ), заданных в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , содержащей точку  $x$ , такие, что

$$y^1(x) = \dots = y^{2s+1}(x) = 0, \quad \text{или} \quad y^1(x) = \dots = y^{2s}(x) = 0,$$

и

$$A|_{\mathbb{U}} = dy^1 + y^2 dy^3 + \dots + y^{2s} dy^{2s+1}, \quad \text{или} \quad A|_{\mathbb{U}} = (1 + y^1) dy^2 + y^3 dy^4 + \dots + y^{2s-1} dy^{2s}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [33], теорема 4.1.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если 1-форма имеет постоянный нечетный класс, то она не имеет нулей на многообразии. Напротив, если 1-форма имеет постоянный четный класс, то она может иметь нули. В этом случае невозможно привести общую локальную модель 1-формы.

**ТЕОРЕМА 3.4.3 (Дарбу).** Пусть  $\omega$  – замкнутая дифференциальная 2-форма на многообразии  $\mathbb{M}$  постоянного класса  $\text{class } \omega = 2s$ . Тогда для любой точки  $x \in \mathbb{M}$  существуют  $2s$  дифференцируемых функций  $y^1, \dots, y^{2s}$ , заданных в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , содержащей точку  $x$ , такие, что

$$y^1(x) = \dots = y^{2s}(x) = 0, \\ \omega|_{\mathbb{U}} = dy^1 \wedge dy^2 + \dots + dy^{2s-1} \wedge dy^{2s}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из замкнутости 2-формы  $\omega$  по лемме Пуанкаре следует, что она локально представима в виде  $\omega = dA$ , где 1-форма  $A$  в точке  $x$  имеет класс  $2s$  или  $2s + 1$ . Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 3.4.2.

**ПРИМЕР 3.4.7.** Рассмотрим симплектическое многообразие  $(\mathbb{M}, \omega)$ ,  $\dim \mathbb{M} = 2n$ . По определению, симплектическая форма  $\omega$  на многообразии  $\mathbb{M}$  невырождена, и, следовательно, ее ранг и класс постоянны и равны размерности многообразия

$$\text{rank } \omega = \text{class } \omega = \dim \mathbb{M} = 2n.$$

Симплектическая форма  $\omega$  также замкнута. Поэтому из теоремы Дарбу следует, что для любой точки  $x \in \mathbb{M}$  существуют  $2n$  дифференцируемых функций  $y^1, \dots, y^{2n}$ , заданных в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , содержащей точку  $x$ , таких, что

$$y^1(x) = \dots = y^{2n}(x) = 0, \\ \omega|_{\mathbb{U}} = dy^1 \wedge dy^2 + \dots + dy^{2n-1} \wedge dy^{2n}. \quad (3.48)$$

Другими словами, для любой симплектической формы в окрестности произвольной точки существует такая система координат, в которой она имеет канонический вид. Именно это следствие теоремы Дарбу, которое часто тоже называют теоремой Дарбу, обычно используют в гамильтоновой динамике.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Система координат, в которой симплектическая форма имеет канонический вид (3.48), называется *координатами Дарбу*.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В римановой геометрии  $(\mathbb{M}, g)$  с метрикой  $g$  общего вида всегда можно выбрать такие координаты, чтобы метрика совпала с евклидовой метрикой (единичной матрицей) в любой заданной точке многообразия. В общем случае этого можно добиться вдоль экстремали, но не в окрестности. На симплектическом многообразии симплектическую форму можно привести к каноническому виду в окрестности произвольной точки, что является значительно более сильным утверждением.

### 3.5. Оператор Лапласа–Бельтрами

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пространства форм  $\Lambda_r(\mathbb{M})$  и  $\Lambda_{n-r}(\mathbb{M})$  имеют одинаковую размерность  $C_n^r = C_n^{n-r}$ , и при наличии метрики  $g_{\alpha\beta}$  между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие (изоморфизм  $C^\infty(\mathbb{M})$ -модулей), которое задается оператором

$$* : \Lambda_r(\mathbb{M}) \leftrightarrow \Lambda_{n-r}(\mathbb{M}).$$



Рассмотрим дифференциальную  $r$ -форму  $A = \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$  в (псевдо)римановом пространстве, т.е. при наличии метрики. Поставим ей в соответствие  $(n-r)$ -форму по следующему правилу

$$*A := \frac{1}{(n-r)!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{n-r}} (*A)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-r}}, \quad (3.49)$$

где компоненты  $(n-r)$ -формы определены выражением

$$(*A)_{\alpha_{r+1} \dots \alpha_n} := \frac{1}{r!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} A^{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad A^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_r \beta_r} A_{\beta_1 \dots \beta_r}. \quad (3.50)$$

Действие оператора  $*$  можно записать также в виде

$$*A = \frac{1}{(n-r)!} dx^{\alpha_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \frac{1}{r!} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} A^{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \quad (3.51)$$

Эти формулы определяют *оператор*  $*$ , который также называется *оператором Ходжа*. Форма  $*A$  называется *дуальной* к форме  $A$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Метрика риманова пространства входит в определение оператора  $*$  дважды. Во-первых, с ее помощью определяется полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sqrt{|g|} \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ . Во-вторых, метрика используется для подъема индексов в уравнении (3.50). Отметим, что для определения оператора  $*$  необходимо не только наличие метрики на многообразии, но и его ориентируемость. В противном случае плотность  $\sqrt{|g|}$  глобально не определена.

Оператор Ходжа  $*$  линеен:

$$*(fA + gB) = f(*A) + g(*B), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{M}), \quad A, B \in \Lambda_r(\mathbb{M}).$$

Оператор  $*$ , действуя на  $r$ -форму, обладает следующим свойством

$$**A = (-1)^{r(n-r)} A \operatorname{sgn}, \quad (3.52)$$

где множитель  $\operatorname{sgn}$  равен знаку определителя метрики (2.67). Вид этой формулы сохраняется при замене  $r \mapsto n-r$ . Отсюда следует, что обратный оператор, действующий на  $(n-r)$ -форму в порядке  $*^{-1}*$  или на  $r$ -форму в обратном порядке  $**^{-1}$ , имеет одинаковый вид

$$*^{-1} = (-1)^{r(n-r)} * \operatorname{sgn}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При проведении расчетов необходимо учитывать, что множитель  $(-1)^{r(n-r)}$  зависит от степени формы, на которую действует оператор  $*^{-1}$ . Для форм четной степени он всегда равен единице.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Оператор  $*$  можно определить в произвольной внешней алгебре, снабженной метрикой, поскольку он не содержит дифференцирования.

Поскольку на  $\mathbb{M}$  задана метрика, то определена свертка двух  $r$ -форм  $A$  и  $B$ :

$$(A, B) := g^{\alpha_1 \beta_1} \dots g^{\alpha_r \beta_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} B_{\beta_1 \dots \beta_r},$$

которая дает скалярное поле (функцию).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.1.** Для двух  $r$ -форм  $A, B \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  справедлива формула

$$A \wedge *B = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} \frac{(A, B)}{r!}. \quad (3.53)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямая проверка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем *скалярное произведение*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda_r(\mathbb{M}) \times \Lambda_r(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

в пространстве  $r$ -форм  $A, B \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  с помощью интеграла

$$\langle A, B \rangle := \int_{\mathbb{M}} A \wedge *B = \int_{\mathbb{M}} B \wedge *A = \frac{1}{r!} \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} (A, B) \operatorname{sgn}. \quad (3.54)$$

Мы предполагаем, что этот интеграл сходится. В противном случае скалярное произведение неопределено.

Скалярное произведение симметрично,  $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$ . Если метрика риманова, т.е. положительно определена, то скалярное произведение  $\langle A, B \rangle$  также положительно определено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.2. *Оператор  $*$  ортогонален:*

$$\langle *A, *B \rangle = \langle A, B \rangle \operatorname{sgn}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем дифференциальный оператор *кограницы*  $\delta: \Lambda_r(\mathbb{M}) \rightarrow \Lambda_{r-1}(\mathbb{M})$

$$\delta := (-1)^{n(r+1)+1} \operatorname{sgn} * d*, \quad (3.55)$$

понижающий степень формы на единицу. Его можно записать также в виде

$$\delta = (-1)^r *^{-1} d*,$$

учитывая, что обратный оператор  $*^{-1}$  действует на  $(n-r+1)$ -форму. По определению, действие оператора кограницы на функцию дает нуль  $\delta f = 0$ .

В компонентах действие оператора  $\delta$  на  $r$ -форму  $A$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta A &= -\frac{1}{(r-1)!} dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} \frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{\alpha_2\beta_2} \cdots g_{\alpha_r\beta_r}) \partial_{\alpha_1} (\sqrt{|g|} A^{\alpha_1\beta_2 \cdots \beta_r}) \\ &= -\frac{1}{(r-1)!} dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} \tilde{\nabla}_{\alpha_1} A^{\alpha_1}_{\alpha_2 \cdots \alpha_r}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Отсюда следует, что оператор  $\delta$  можно интерпретировать, как ковариантную дивергенцию антисимметричного тензора с верхними индексами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.3. *Для замкнутых (компактных и без края) многообразий оператор  $\delta$  сопряжен с оператором внешнего дифференцирования относительно скалярного произведения (3.54)*

$$\langle dA, B \rangle = \langle A, \delta B \rangle, \quad (3.57)$$

где  $A \in \Lambda_{r-1}(\mathbb{M})$  и  $B \in \Lambda_r(\mathbb{M})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка. Компактность многообразия достаточна для существования интеграла (3.54), а отсутствие края позволяет отбросить граничные слагаемые, возникающие при интегрировании по частям.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.4. *Квадрат оператора кограницы  $\delta$  равен нулю:*

$$\delta\delta = 0, \quad (3.58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое следствием определения (3.55) и нильпотентности внешнего дифференцирования (3.32).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператором *Лапласа–Бельтрами* в римановом пространстве называется оператор

$$\Delta_F := -(d + \delta)^2 = -d\delta - \delta d, \quad (3.59)$$

который действует в пространстве форм,  $\Delta_F : \Lambda_r(\mathbb{M}) \rightarrow \Lambda_r(\mathbb{M})$ ,  $0 \leq r \leq n$ ,

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор Лапласа–Бельтрами (3.59) определен с помощью оператора  $*$ , для существования которого необходима ориентируемость многообразия  $\mathbb{M}$ . Если на  $\mathbb{M}$  задана метрика, то его можно также определить равенством  $\tilde{\Delta} := g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta$ , где  $\tilde{\nabla}_\alpha$  – ковариантная производная, построенная с помощью символов Кристоффеля (6.23). Конечно, для ориентируемых многообразий оба определения приводят к одному и тому же дифференциальному оператору второго порядка для функций. Тем самым ориентируемость многообразия  $\mathbb{M}$  не является необходимым условием для определения оператора Лапласа–Бельтрами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.5. Для замкнутых многообразий оператор Лапласа–Бельтрами самосопряжен:

$$\langle \Delta_F A, B \rangle = \langle A, \Delta_F B \rangle,$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из симметричности скалярного произведения и формулы (3.57) следуют равенства

$$\langle d\delta A, B \rangle = \langle \delta A, \delta B \rangle = \langle A, d\delta B \rangle.$$

Аналогичные равенства справедливы для оператора  $\delta d$ . Отсюда вытекает самосопряженность оператора Лапласа–Бельтрами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор Лапласа–Бельтрами является дифференциальным оператором второго порядка эллиптического типа в римановом пространстве с положительно определенной метрикой. Если на многообразии задана метрика лоренцевой сигнатуры, то инвариантный оператор (3.59) также определен. В этом случае он будет гиперболического типа. Если для метрики лоренцевой сигнатуры скалярное произведение определено, то оператор (3.59) будет также самосопряжен, поскольку в доказательстве сигнатура метрики не используется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.6. Оператор Лапласа–Бельтрами удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$\Delta_F d = d\Delta_F, \quad \Delta_F \delta = \delta\Delta_F, \quad \Delta_F * = * \Delta_F, \quad (3.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое следствие определения (3.59).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.7. Формулы действия оператора Лапласа–Бельтрами на 0-форму  $f$ , 1-форму  $A$  и произвольную  $r$ -форму  $B$  в компонентах можно выразить через ковариантные производные и тензор кривизны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_F f &= \tilde{\Delta} f, \\ \Delta_F A &= dx^\alpha (\tilde{\Delta} A_\alpha + \tilde{R}_\alpha{}^\beta A_\beta), \\ \Delta_F B &= \frac{1}{r!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_r} \left( \tilde{\Delta} B_{\alpha_1 \dots \alpha_r} + r \tilde{R}_{\alpha_1}{}^\beta B_{\beta \alpha_2 \dots \alpha_r} - \frac{r(r-1)}{2} \tilde{R}_{\alpha_1 \alpha_2}{}^{\beta\gamma} B_{\beta\gamma \alpha_3 \dots \alpha_r} \right), \end{aligned} \quad (3.61)$$

где  $\tilde{\Delta} := g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta$  – оператор Лапласа–Бельтрами, построенный с помощью символов Кристоффеля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямые вычисления.

ЗАМЕЧАНИЕ. В аффинной геометрии мы имеем три инвариантных дифференциальных оператора второго порядка  $\Delta_F$ ,  $\tilde{\Delta}$  и  $\Delta$ , действующих из  $\Lambda_r(\mathbb{M}) \rightarrow \Lambda_r(\mathbb{M})$ . Первый оператор определен только на формах и поэтому помечен индексом  $F$ . Два других определены для произвольных тензорных полей. В (псевдо)римановой геометрии при нулевом кручении и неметричности  $\tilde{\Delta} = \Delta$ . Отметим также, что действие операторов  $\Delta_F$  и  $\tilde{\Delta}$  на функции совпадает. Как правило, под оператором Лапласа–Бельтрами мы понимаем оператор  $\tilde{\Delta}$ , действующий на произвольные тензорные поля и зависящий только от метрики.

ПРИМЕР 3.5.1. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x^\alpha = \{x, y, z\}$ . Приведем явные формулы действия операторов, введенных ранее, на формы. В трехмерном пространстве могут быть заданы только 0-, 1-, 2- и 3-формы:

$$\begin{aligned} f & & - 0\text{-форма,} \\ A = dx^\alpha A_\alpha = dx A_x + dy A_y + dz A_z & & - 1\text{-форма,} \\ B = \frac{1}{2} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} B_{\alpha_1 \alpha_2} = dx \wedge dy B_{xy} + dy \wedge dz B_{yz} + dz \wedge dx B_{zx} & & - 2\text{-форма,} \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{3!} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} C_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = dx \wedge dy \wedge dz C_{xyz} \quad - \text{3-форма.}$$

Формы более высокого порядка тождественно равны нулю в силу трехмерности пространства. Пространства 0- и 3-форм являются одномерными, а пространства 1- и 2-форм – трехмерными.

Оператор внешнего дифференцирования (3.29) повышает на единицу степень формы и действует следующим образом:

$$\begin{aligned} df &= dx \partial_x f + dy \partial_y f + dz \partial_z f, \\ dA &= dx \wedge dy (\partial_x A_y - \partial_y A_x) + dy \wedge dz (\partial_y A_z - \partial_z A_y) + dz \wedge dx (\partial_z A_x - \partial_x A_z), \\ dB &= dx \wedge dy \wedge dz (\partial_x B_{yz} + \partial_y B_{zx} + \partial_z B_{xy}), \\ dC &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что оператор  $*$ , определенный соотношением (3.49), действует на формы по правилам:

$$\begin{aligned} *f &= dx \wedge dy \wedge dz f, \\ *A &= dx \wedge dy A_z + dy \wedge dz A_x + dz \wedge dx A_y, \\ *B &= dx B_{yz} + dy B_{zx} + dz B_{xy}, \\ *C &= C_{xyz}. \end{aligned}$$

Этот оператор устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами  $\Lambda_0(\mathbb{R}^3)$  и  $\Lambda_3(\mathbb{R}^3)$ , а также между  $\Lambda_1(\mathbb{R}^3)$  и  $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ . Заметим, что для любой формы в трехмерном евклидовом пространстве квадрат оператора  $*$  является тождественным оператором:

$$** = 1.$$

Оператор кограницы  $\delta$ , определенный соотношением (3.55), понижает степень форм на единицу:

$$\begin{aligned} \delta f &= 0, \\ \delta A &= -(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z), \\ \delta B &= dx (\partial_y B_{xy} - \partial_z B_{zx}) + dy (\partial_z B_{yz} - \partial_x B_{xy}) + dz (\partial_x B_{zx} - \partial_y B_{yz}), \\ \delta C &= -(dx \wedge dy \partial_z C_{xyz} + dy \wedge dz \partial_x C_{xyz} + dz \wedge dx \partial_y C_{xyz}). \end{aligned}$$

Теперь нетрудно найти явное действие оператора Лапласа–Бельтрами в пространстве форм:

$$\begin{aligned} \Delta_F f &= \Delta f, \\ \Delta_F A &= dx \Delta A_x + dy \Delta A_y + dz \Delta A_z, \\ \Delta_F B &= dx \wedge dy \Delta B_{xy} + dy \wedge dz \Delta B_{yz} + dz \wedge dx \Delta B_{zx}, \\ \Delta_F C &= dx \wedge dy \wedge dz \Delta C_{xyz}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

– обычный оператор Лапласа в трехмерном евклидовом пространстве.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Действие оператора внешнего дифференцирования на 0-формы совпадает с определением градиента функции, поэтому назовем *градиентом* произвольной  $r$ -формы ее внешнюю производную

$$\text{grad} := d. \quad (3.62)$$

Действие оператора  $\delta$  на 1-формы с точностью до знака совпадает с дивергенцией 1-формы. Поэтому примем в качестве инвариантного определения *дивергенции* от произвольной  $r$ -формы соотношение

$$\text{div} := -\delta. \quad (3.63)$$

В заключение рассмотрим еще один инвариантный оператор, действующий в пространстве форм произвольной степени,

$$\text{rot} := *d : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_{n-r-1}. \quad (3.64)$$

В частном случае трехмерного евклидова пространства (пример 3.5.1) он отображает 1-формы в 1-формы:

$$*dA = dx(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + dy(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + dz(\partial_x A_y - \partial_y A_x),$$

что совпадает с определением ротора от 1-формы. Поэтому примем выражение (3.64) в качестве инвариантного определения ротора. Тогда определение оператора Лапласа–Бельтрами (3.59) сводится к хорошо известному тождеству из векторного анализа

$$\Delta_F = \text{grad div} - \text{rot rot}. \quad (3.65)$$

### 3.6. Разложение Ходжа

Если на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , задана положительно определенная риманова метрика, то можно доказать ряд важных результатов для дифференциальных форм, которые не имеют места в общем случае. Для формулировки этих результатов введем несколько понятий.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Форма  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  является *коточной*, если ее можно представить в виде

$$A = \delta B, \quad \text{где } B \in \Lambda_{r+1}(\mathbb{M}).$$

Форма  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  называется *козамкнутой*, если

$$\delta A = 0.$$

Форма  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  называется *гармонической*, если

$$\Delta_F A = 0.$$

Любая функция  $f \in C^1(\mathbb{M})$ , очевидно, является козамкнутой,  $\delta f = 0$ . Любая коточная форма является козамкнутой в силу свойства (3.58).

**ТЕОРЕМА 3.6.1.** *Любая гармоническая форма  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  на компактном ориентируемом римановом многообразии является замкнутой и козамкнутой.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из определения оператора Лапласа–Бельтрами (3.59) для скалярного произведения (3.54) следует равенство

$$\langle \Delta_F A, A \rangle = -\langle \delta A, \delta A \rangle - \langle dA, dA \rangle. \quad (3.66)$$

Отсюда следует, что условие гармоничности  $\Delta_F A = 0$  влечет за собой равенства  $\delta A = 0$  и  $dA = 0$ . При этом ориентируемость и компактность многообразия достаточны для существования интеграла, входящего в скалярное произведение. Положительная определенность метрики необходима для того, чтобы оба слагаемых в правой части равенства (3.66) обращались в нуль по отдельности, и из равенства  $\langle \delta A, \delta A \rangle = 0$  вытекало  $\delta A = 0$  (аналогично для  $dA$ ).

**СЛЕДСТВИЕ.** *Любая гармоническая функция на компактном ориентируемом римановом многообразии является замкнутой  $df = 0$  и, следовательно, равна константе.*

**ТЕОРЕМА 3.6.2 (Разложение Ходжа).** *Пусть  $\mathbb{M}$  – компактное ориентируемое риманово многообразие. Тогда любую  $r$ -форму  $A \in \Lambda_r(\mathbb{M})$  можно представить в виде суммы точной, коточной и гармонической формы*

$$A = dB + \delta C + H, \quad B \in \Lambda_{r-1}(\mathbb{M}), \quad C \in \Lambda_{r+1}(\mathbb{M}), \quad H \in \Lambda_r(\mathbb{M}). \quad (3.67)$$

*Это разложение единственно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [34], глава V, §31, следствие 1.

Единственность разложения вытекает из ортогональности трех подпространств относительно скалярного произведения форм:

$$\langle A, A \rangle = \langle dB, dB \rangle + \langle \delta C, \delta C \rangle + \langle H, H \rangle.$$

СЛЕДСТВИЕ. Уравнение

$$\Delta_{\mathbb{F}} A = D, \quad A, D \in \Lambda_r(\mathbb{M}),$$

на компактном ориентируемом многообразии имеет решение тогда и только тогда, когда  $r$ -форма  $D$  ортогональна пространству гармонических  $r$ -форм.

ТЕОРЕМА 3.6.3. На компактном ориентируемом римановом многообразии существует только конечное число линейно независимых гармонических форм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [35], теорема 22.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Размерность пространства гармонических  $r$ -форм

$$\mathcal{H}_r(\mathbb{M}) = \{H \in \Lambda_r(\mathbb{M}) : \Delta_{\mathbb{F}} H = 0\}$$

называется  $r$ -тым числом Бетти

$$b_r(\mathbb{M}) := \dim \mathcal{H}_r(\mathbb{M}). \quad (3.68)$$

Отметим несколько свойств чисел Бетти. Числа Бетти конечны. Поскольку оператор Лапласа–Бельтрами коммутирует с оператором Ходжа (3.60), а оператор Ходжа устанавливает изоморфизм  $\mathcal{H}_r(\mathbb{M})$  и  $\mathcal{H}_{n-r}(\mathbb{M})$ , то  $b_r(\mathbb{M}) = b_{n-r}(\mathbb{M})$ . Так как все гармонические 0-формы на компактном ориентируемом римановом многообразии являются константами, то для связных пространств  $b_0(\mathbb{M}) = b_n(\mathbb{M}) = 1$ . В общем случае нулевое число Бетти  $b_0(\mathbb{M})$  равно числу компонент связности многообразия  $\mathbb{M}$ . Отметим, что пространство  $\mathcal{H}_n(\mathbb{M})$  состоит из  $n$ -форм, пропорциональных форме объема  $v$  (3.78). Если многообразие  $\mathbb{M}$  связно, то  $b_n(\mathbb{M}) = 1$  или  $b_n(\mathbb{M}) = 0$  соответственно для ориентируемых и неориентируемых многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число

$$\chi(\mathbb{M}) = \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(\mathbb{M}) \quad (3.69)$$

называется эйлеровой характеристикой компактного ориентируемого риманова многообразия  $\mathbb{M}$ .

ТЕОРЕМА 3.6.4. Пусть  $\mathbb{M}$  – компактное ориентируемое риманово многообразие и  $A$  – дифференцируемая 1-форма. Тогда

$$\int v \delta A = 0.$$

В частности, для произвольной функции  $f \in C^2(\mathbb{M})$

$$\int v \Delta_{\mathbb{F}} f = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{M}} v \delta A = \langle \delta A, 1 \rangle = \langle A, d1 \rangle = 0.$$

ТЕОРЕМА 3.6.5. Пусть  $\mathbb{M}$  – компактное риманово ориентируемое многообразие с положительной гауссовой кривизной  $K > 0$ . Тогда первое число Бетти равно нулю  $b_1(\mathbb{M}) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что  $K = -\frac{1}{2} \tilde{R}$ , где  $\tilde{R}$  – скалярная кривизна, определенная в разделе 6.8. Доказательство приведено, например, в [26].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6.1. Любая ковариантно постоянная форма является замкнутой, козамкнутой и гармонической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из выражений для внешней производной (3.35), оператора кограницы (3.56) и определения оператора Лапласа–Бельтрами (3.59).

ПРИМЕР 3.6.1. Форма объема  $v$  (3.78) замкнута, козамкнута и гармонична, поскольку  $\tilde{\nabla}_{\alpha} \sqrt{|g|} = 0$ .

### 3.7. Интегрирование дифференциальных форм

Начнем с обсуждения интегрирования в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Для наших целей достаточно знакомства с определением интеграла по Риману, так как мы будем интегрировать непрерывные функции по достаточно хорошим областям.

Напомним правило замены переменных интегрирования. Пусть  $h$  – диффеоморфизм ограниченного открытого подмножества  $U \subset \mathbb{R}^n$  на ограниченное открытое подмножество  $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ . В координатах диффеоморфизм  $h$  задается  $n$  гладкими функциями  $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , где  $x^\alpha$  – координаты точки  $x \in U$ . Пусть  $f$  – ограниченная непрерывная функция на  $\bar{U}$ , включая границу. Тогда справедлива формула замены переменных интегрирования, которая хорошо известна из курса математического анализа,

$$\int_U dx^1 \dots dx^n f(x) = \int_{h(U)} dy^1 \dots dy^n |J|^{-1} f(x(y)). \quad (3.70)$$

где  $J := \det(\partial y^\beta / \partial x^\alpha)$  – якобиан преобразования координат. Поскольку мы предполагаем, что отображение  $h$  является диффеоморфизмом, то якобиан преобразования всюду отличен от нуля. В частном случае, если  $f = 1$ , то равенство (3.70) принимает вид

$$\int_U dx^1 \dots dx^n = \int_{h(U)} dy^1 \dots dy^n |J|^{-1}.$$

Если предположить, что  $x^\alpha$  – это декартовы координаты в  $\mathbb{R}^n$ , то последняя формула представляет собой объем области  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Его можно вычислить как в декартовой системе координат  $x^\alpha$ , так и в произвольной криволинейной системе координат  $y^\alpha$ . В последнем случае появляется нетривиальный множитель, который равен модулю якобиана преобразования координат.

В дальнейшем мы ограничимся преобразованиями координат с положительным якобианом,  $J > 0$ , т.е. теми преобразованиями координат, которые сохраняют ориентацию. Кроме этого будем использовать сокращенное выражение для элемента интегрирования

$$dx := dx^1 \dots dx^n.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Рассмотрим произвольную  $n$ -форму на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ . На карте  $(U, \varphi)$  она имеет вид

$$A = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n A_{1\dots n} = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} A_{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$

где в последнем выражении производится суммирование по всем значениям индексов. Положим

$$\int_U A = \int_{\varphi(U)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n A_{1\dots n} := \int_{\varphi(U)} dx^1 \dots dx^n A_{1\dots n}(x) = \int_{\varphi(U)} dx A_{1\dots n}(x). \quad (3.71)$$

Правая часть этого равенства определена, так как  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , а запись  $A_{1\dots n}(x)$  обозначает значение единственной независимой компоненты  $n$ -формы  $A_{1\dots n} \circ \varphi^{-1}$  в точке  $\{x^\alpha\} \in \varphi(U)$ . Мы, конечно, предполагаем, что интеграл в правой части приведенной формулы сходится. Формула (3.71) корректна в том смысле, что не зависит от выбора системы координат, так как при преобразовании координат  $x^\alpha \mapsto y^\alpha(x)$  (замене переменных интегрирования) единственная нетривиальная компонента  $n$ -формы  $A_{1\dots n}$  преобразуется, как тензорная плотность степени  $-1$ :

$$A_{1\dots n}(x) \mapsto J^{-1} A_{1\dots n}(y),$$

что совпадает с правилом замены переменных интегрирования (3.70) при положительном якобиане. Равенство (3.71) примем за определение *интеграла от  $n$ -формы* по области  $U \subset \mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Определение интеграла от  $n$ -формы по области  $U \subset \mathbb{M}$  не зависит от того задана на многообразии метрика или нет.

Из равенства

$$dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (3.72)$$

где  $\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  – полностью антисимметричная тензорная плотность степени  $-1$ , следует, что интеграл (3.71) можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{U}} A = \frac{1}{n!} \int_{\varphi(\mathbb{U})} dx \hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} A_{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Поскольку компоненты тензорной плотности  $\hat{\varepsilon}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  во всех системах координат по модулю равны единице, то этот интеграл не зависит от метрики на  $\mathbb{M}$ .

Правило замены переменных интегрирования можно переписать иначе на языке отображения дифференциальных форм. Пусть  $h : \mathbb{U} \rightarrow h(\mathbb{U})$  диффеоморфизм двух областей многообразия  $\mathbb{M}$ , и пусть  $n$ -форма  $A$  задана на области  $h(\mathbb{U})$ . Тогда справедлива формула

$$\int_{h(\mathbb{U})} A = \int_{\mathbb{U}} h^* A, \quad (3.73)$$

где  $h^*$  – отображение дифференциальных форм.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Запись интеграла  $\int dx A_{1\dots n}$  в виде  $\int dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n A_{1\dots n}$  удобнее, так как якобиан преобразования координат возникает автоматически при замене дифференциалов:

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \left( \frac{\partial y^1}{\partial x^{\alpha_1}} dx^{\alpha_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \frac{\partial y^n}{\partial x^{\alpha_n}} dx^{\alpha_n} \right) = J dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3.74)$$

Теперь определим интеграл по произвольному ориентируемому многообразию с помощью разбиения единицы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , заданы: ориентация, некоторый атлас  $\{\mathbb{U}_i\}$ , согласованный с ориентацией, и разбиение единицы  $\{f_i\}$ , подчиненное выбранному покрытию  $\{\mathbb{U}_i\}$ . Рассмотрим произвольную непрерывную  $n$ -форму  $A \in \Lambda_n(\mathbb{M})$  с компактным носителем. Тогда

$$A = \left( \sum_i f_i \right) A = \sum_i (f_i A).$$

Поскольку  $\text{supp}(f_i A) \subset \text{supp} f_i$ , то справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{M}} f_i A := \int_{\mathbb{U}_i} f_i A,$$

где интеграл в правой части был определен ранее (3.71). Этот интеграл определен корректно, так как не зависит от выбора системы координат на  $\mathbb{U}_i$ . Определим *интеграл по ориентируемому многообразию* от  $n$ -формы с компактным носителем следующей формулой

$$\int_{\mathbb{M}} A := \sum_i \int_{\mathbb{M}} f_i A. \quad (3.75)$$

Для любого заданного разбиения единицы правая часть равенства однозначно определена.

Нетрудно проверить, что данное определение не зависит от разбиения единицы. Требование компактности носителя формы  $A$  является достаточным для существования интеграла.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При изменении ориентации системы координат в области  $\mathbb{U}$  компонента  $n$ -формы  $A_{1\dots n}$  изменит знак. Поэтому правая часть формулы (3.71) также изменит знак, что недопустимо. Поскольку на неориентируемом многообразии не существует возможности однозначно задать ориентацию, то правая часть равенства (3.75) будет зависеть от выбора ориентации областей и, следовательно, определена неоднозначно. Поэтому требование ориентируемости  $\mathbb{M}$  является существенным.



Из свойств интеграла следует, что для любых двух  $n$ -форм  $A$  и  $B$  с компактным носителем справедливы равенства

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M}} (A + B) &= \int_{\mathbb{M}} A + \int_{\mathbb{M}} B, \\ \int_{\mathbb{M}} aA &= a \int_{\mathbb{M}} A, \quad a \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Поэтому интеграл является линейным функционалом на множестве  $n$ -форм с компактным носителем.

Если  $\mathbb{M}$  – ориентируемое многообразие с краем  $\partial\mathbb{M}$ , то положим

$$\int_{\mathbb{M}} A := \int_{\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}} A.$$

Правая часть этого равенства определена выше, так как  $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$  – ориентируемое многообразие без края.

Если ориентируемое многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , можно представить в виде объединения

$$\mathbb{M} = \left( \bigcup_i \mathbb{U}_i \right) \cup \left( \bigcup_A \mathbb{V}_A \right)$$

непересекающихся открытых подмногообразий  $\mathbb{U}_i$  (и, следовательно, многообразий той же размерности  $\dim \mathbb{U}_i = n$ ,  $\forall i$ ) и произвольного набора подмногообразий меньшей размерности  $\mathbb{V}_A$ ,  $\dim \mathbb{V}_A < n$ ,  $\forall A$ , тогда

$$\int_{\mathbb{M}} A = \sum_i \int_{\mathbb{U}_i} A.$$

Это свойство можно использовать для вычисления интегралов, используя “глобальные” координаты, заданные на всем многообразии, за исключением подмногообразий меньшей размерности, которые не дают вклада в интеграл.

**ПРИМЕР 3.7.1.** В задачах со сферической симметрией в  $\mathbb{R}^3$  интегралы удобнее вычислять в сферических координатах, которые покрывают все многообразие, за исключением оси  $z$ . В этом случае евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  представляется в виде

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \cup \mathbb{V},$$

где  $\mathbb{V} = \mathbb{R}$  – ось  $z$ , и  $\mathbb{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{V}$  – неодносвязное открытое подмногообразие в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\dim \mathbb{U} = 3$ .

**3.7.1. Форма объема.** Пусть на ориентируемом многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , задана метрика  $dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$  произвольной сигнатуры. Рассмотрим карту  $(\mathbb{U}, \varphi)$ . В этой карте метрика имеет компоненты  $g_{\alpha\beta}$ , и ее определитель при преобразовании координат  $x \mapsto y(x)$  (в областях пересечения двух карт с координатами  $x^\alpha$  и  $y^\alpha$ ) преобразуется по правилу

$$\det g_{\alpha\beta}(y) = \det g_{\alpha\beta}(x) J^{-2},$$

где  $J := \det(\partial y^\beta / \partial x^\alpha)$  – якобиан преобразования координат. Поэтому определитель метрики является тензорной плотностью степени  $-2$ . Обозначим

$$g := \det g_{\alpha\beta}. \quad (3.76)$$

Тогда  $\sqrt{|g|}$  при преобразованиях координат умножается на модуль якобиана,

$$\sqrt{|g|}(y) = \sqrt{|g|}(x) |J|^{-1}. \quad (3.77)$$

Мы ограничимся преобразованиями координат с положительными якобианами, что позволяет рассматривать  $\sqrt{|g|}$  как тензорную плотность степени  $-1$ . Если задано координатное покрытие многообразия  $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$ , то в каждой карте определена плотность  $\sqrt{|g|}$ . Для того, чтобы плотность  $\sqrt{|g|}$  была определена глобально, необходимо существование такого координатного покрытия, в котором все якобианы преобразований координат были положительны, а это влечет за собой ориентируемость многообразия. Таким образом, плотность  $\sqrt{|g|}$  определена только на ориентируемых многообразиях. Она всюду отлична от нуля, что следует из невырожденности метрики.

<sup>1</sup> Согласно теореме 4.1.1 на любом гладком многообразии можно задать риманову (положительно определенную) метрику.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.  $n$ -форма на ориентируемом многообразии  $\mathbb{M}$  с заданной метрикой  $g_{\alpha\beta}$

$$v := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (3.78)$$

называется *формой объема*  $v$ , задаваемой метрикой  $g_{\alpha\beta}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Форма объема на ориентируемом многообразии  $\mathbb{M}$  задается произвольной метрикой, независимо от ее сигнатуры. Ясно, что различные метрики могут определять одну и ту же форму объема из-за наличия знака модуля. Например, евклидова метрика и метрика Лоренца в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  задают одинаковую форму объема.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для обозначения формы объема мы используем греческую букву эpsilon  $v$ , которая по написанию очень похожа на латинскую букву  $v$ .

Форма объема определена глобально на ориентируемых многообразиях и всюду отлична от нуля, поэтому она задает ориентацию многообразия и выбор знака в форме (3.78) соответствует выбору ориентации. При замене координат с отрицательным якобианом ориентация формы объема меняется на противоположную, а интеграл меняет знак.

Метрика евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  в декартовых координатах равна единичной матрице. Поэтому форма объема евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  в декартовых координатах имеет канонический вид

$$v_0 = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (3.79)$$

Будем говорить, что данная форма объема задает *каноническую ориентацию*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, что форма объема  $v$  на многообразии  $\mathbb{M}$  соответствует нашему обычному представлению об объеме. Для этого зафиксируем произвольную точку  $x$  риманова многообразия  $\mathbb{M}$  с положительно определенной метрикой и диагонализировем в ней метрику, что всегда возможно в произвольной фиксированной точке. Тогда все базисные векторы в точке  $x$  будут ортогональны, а длина базисного вектора  $\partial_\alpha$  будет равна  $\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ . В этом случае объем бесконечно малого параллелепипеда со сторонами  $\partial_\alpha$  равен  $\prod_\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}} = \sqrt{g}$ .

Интеграл (3.71) от произвольной  $n$ -формы по многообразию можно переписать, используя форму объема,

$$\int_{\mathbb{U}} A = \frac{1}{n!} \int_{\varphi(\mathbb{U})} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} A_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{1}{n!} \int_{\varphi(\mathbb{U})} dx \sqrt{|g|} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} A_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \operatorname{sgn}, \quad (3.80)$$

где множитель  $\operatorname{sgn}$  равен знаку определителя метрики (2.67).

Приведем два свойства формы объема. Нетрудно проверить, что форма объема дуальна к единице

$$v = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = *1.$$

Кроме того она является гармонической формой  $\Delta_{\mathbb{F}} v = 0$ , так как форма объема точна  $dv = 0$ , как форма максимальной размерности, и коточна  $\delta v = 0$ , поскольку  $(n+1)$ -форм на  $\mathbb{R}^n$  не существует и  $\tilde{\nabla}_\alpha \sqrt{|g|} = 0$ .

Если на многообразии задан репер,  $g_{\alpha\beta} = e_\alpha^a e_\beta^b \eta_{ab}$ , где  $\eta_{ab}$  – евклидова или лоренцева метрика, то  $\sqrt{|g|} = |\det e_\alpha^a|$ . Тогда репер  $e_\alpha^a$  однозначно определяет форму объема  $v$ . В обратную сторону утверждение неверно, так как форма объема определяет только определитель репера. Даже если метрика и форма объема на ориентируемом многообразии  $\mathbb{M}$  существуют, то репер может не существовать. Локально репер всегда существует, однако глобально это не так.

ПРИМЕР 3.7.2. В теореме 10.2.1 о невозможности причесать ежа доказано, что на четномерной сфере не существует непрерывных векторных полей, нигде не обращающихся в нуль. Поскольку репер представляет собой набор из  $n$  линейно независимых в каждой точке векторных полей на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , то на четномерной сфере не существует глобально определенного репера. В то же время метрика определена глобально.

Наличие формы объема на (псевдо)римановом ориентируемом многообразии позволяет определить инвариантным образом интеграл от произвольной функции  $f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{M})$  с компактным носителем:

$$\int_{\mathbb{M}} vf = \int_{\mathbb{M}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} f(x) = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|} f(x).$$

Используя определение скалярного произведения (3.54), этот интеграл можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{M}} vf = \langle f, 1 \rangle.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Именно это свойство чаще всего используется для построения моделей математической физики. А именно, мы фиксируем некоторый набор полей  $\{\varphi^a(x)\}$ ,  $a = 1, 2, \dots$ , на многообразии  $\mathbb{M}$ , среди которых содержится метрика пространства-времени, как в общей теории относительности. Затем строится лагранжева плотность  $L(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \dots)$ , которая является скалярным полем (функцией), зависящим от данного набора полей и их частных производных. Определяем инвариантное действие на многообразии

$$S := \int_{\mathbb{M}} vL.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для данного действия принимаются в качестве уравнений движения (уравнений равновесия и т.д.) для рассматриваемой модели. По построению, действие инвариантно относительно общих преобразований координат и, возможно, других преобразований симметрии. Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа ковариантны, т.е. преобразуются, как тензорные поля, и из второй теоремы Нетер следует зависимость уравнений движения. В релятивистских моделях теории поля, не описывающих гравитационные взаимодействия, предполагается, что многообразие  $\mathbb{M}$  является пространством-временем Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  с заданной лоренцевой метрикой, по которой варьирование не проводится. Соответствующие модели инвариантны относительно преобразований из группы Пуанкаре и, возможно, других групп симметрии, а инвариантность относительно общих преобразований координат в них отсутствует. В этом случае из первой теоремы Нетер следуют законы сохранения.

Приведем без доказательства два свойства формы объема  $v$  на ориентированном римановом многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ . Пусть  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_n$  – два набора векторных полей на  $\mathbb{M}$ . Тогда

$$\begin{aligned} v(X_1, \dots, X_n) \cdot v(Y_1, \dots, Y_n) &= \det \{(X_i, Y_j)\}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ v(X_1, \dots, X_n) \cdot v &= \tilde{X}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{X}_n, \end{aligned}$$

где  $(X_i, Y_j) := X_i^\alpha Y_j^\beta g_{\alpha\beta}$  и  $\tilde{X}_i := dx^\alpha X_{i\alpha}$  обозначает 1-форму, сопряженную в смысле римановой метрики к векторному полю  $X_i = X_i^\alpha \partial_\alpha$ :  $X_{i\alpha} := X_i^\beta g_{\beta\alpha}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Интеграл от формы объема (3.78) по всему многообразию, если он существует, называется *объемом* ориентируемого многообразия  $\mathbb{M}$

$$V_{\mathbb{M}} := \int_{\mathbb{M}} v = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|g|}. \quad (3.81)$$

Объем многообразия определяется метрикой, входящей в определение формы объема, и всегда положителен, так как ориентация многообразия фиксирована.

**3.7.2. Формула Стокса.** Пусть  $\mathbb{N}$ ,  $\dim \mathbb{N} = n$  – ориентируемое многообразие, на котором задана произвольная  $r$ -форма  $A \in \Lambda_r(\mathbb{N})$ . Рассмотрим  $r$ -мерное ориентируемое подмногообразие  $(f, \mathbb{M})$  в  $\mathbb{N}$ . Поскольку  $r$ -форма задана также на подмногообразии  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$ , то ее можно по нему проинтегрировать. Пусть подмногообразие  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$  задано параметрически<sup>2</sup>

$$x^\alpha = x^\alpha(u^i), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, r \leq n.$$

<sup>2</sup>Чтобы не усложнять ситуацию склейкой карт, которую можно провести, будем считать, что каждое многообразие покрывается одной картой.

Тогда интеграл от произвольной  $r$ -формы  $A$  степени  $r$  по этому подмногообразию равен

$$\begin{aligned} \int_{f(\mathbb{M})} A &= \frac{1}{r!} \int_{f(\mathbb{M})} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_r} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ &= \frac{1}{r!} \int_{\mathbb{M}} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \frac{dx^{\alpha_1}}{du^{i_1}} \cdots \frac{dx^{\alpha_r}}{du^{i_r}} A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Этот интеграл имеет явно ковариантный вид и не зависит ни от выбора системы координат  $x^\alpha$ , ни от параметризации подмногообразия  $u^i$ .

**ПРИМЕР 3.7.3.** Рассмотрим интеграл от 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  вдоль кривой  $x^\alpha(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , соединяющей точки  $x_1$  и  $x_2$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Тогда интеграл (3.82) принимает стандартный вид

$$\int_{x_1}^{x_2} dx^\alpha A_\alpha = \int_a^b dt \frac{dx^\alpha}{dt} A_\alpha.$$

Этот интеграл инвариантен относительно перепараметризации кривой и общего преобразования координат на многообразии.

**ПРИМЕР 3.7.4.** Интеграл от 2-формы  $A = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta}$  по поверхности в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , заданной параметрически  $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{U}$ , равен

$$\frac{1}{2} \int_{f(\mathbb{U})} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv \left( \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{dv} - \frac{dx^\alpha}{dv} \frac{dx^\beta}{du} \right) A_{\alpha\beta}. \quad (3.83)$$

В трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x^\alpha$  этот интеграл можно преобразовать к виду, хорошо знакомому из курса математического анализа. Касательные векторы к поверхности имеют вид

$$\xi = \frac{dx^\alpha}{du} e_\alpha, \quad \eta = \frac{dx^\alpha}{dv} e_\alpha,$$

где  $e_\alpha$  – ортонормированные базисные векторы декартовой системы координат. Их векторное произведение

$$n^\alpha := [\xi, \eta]^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_\beta \eta_\gamma$$

нормально к поверхности. Длина нормального вектора равна  $\sqrt{n^\alpha n_\alpha} = \sqrt{\xi^2 \eta^2 - (\xi\eta)^2}$ , что совпадает с элементом площади  $\sqrt{g}$ , где  $g := \det g_{ij}$  – определитель индуцированной метрики на поверхности

$$g_{ij} = \frac{dx^\alpha}{dw^i} \frac{dx^\beta}{dw^j} \delta_{\alpha\beta}, \quad \{w^i\} = \{u, v\}, \quad i, j = 1, 2.$$

Так как в трехмерном евклидовом пространстве 2-форма  $A$  взаимно однозначно определяется векторным полем  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ , где  $A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma$ , то интеграл (3.83) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \int_{f(\mathbb{U})} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv \sqrt{|g|} (X^\alpha N_\alpha), \quad (3.84)$$

где

$$N^\alpha := \frac{[\xi, \eta]^\alpha}{\sqrt{|g|}}$$

– единичный вектор нормали к поверхности. Таким образом, интеграл от 2-формы по поверхности в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  сводится к суммарному потоку дуального векторного поля через эту поверхность.

Сформулируем общую теорему, связывающую интеграл от  $(n-1)$ -формы  $A$  по границе некоторой области  $\partial\mathbb{U}$  с интегралом от  $n$ -формы  $dA$  по самой области  $\mathbb{U}$ .

**ТЕОРЕМА 3.7.1 (Формула Стокса).** Пусть  $U \subset M$  – открытое подмногообразие в  $M$  такое, что его замыкание  $\bar{U}$  компактно. Пусть  $\partial U = \bar{U} \setminus U$  – его край, который предполагается кусочно гладким. Тогда справедлива формула Стокса

$$\int_{\partial U} A = \int_U dA. \quad (3.85)$$

где  $A \in \Lambda_{n-1}(M)$  – произвольная гладкая дифференциальная  $(n-1)$ -форма на  $M$ . При этом предполагается, что ориентация границы задана каноническим образом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство формулы Стокса довольно громоздко и приведено, например, в [4], теорема 4.2. Каноническая ориентация края определена в доказательстве теоремы 2.3.1.

Формулу Стокса можно переписать в другом виде. Пусть на многообразии задано векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha$ . Тогда ему можно взаимно однозначно поставить в соответствие  $(n-1)$ -форму:

$$A := *X = \frac{1}{(n-1)!} dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \varepsilon_{\beta\alpha_2 \dots \alpha_n} X^\beta.$$

Внешний дифференциал этой формы равен

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{(n-1)!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \partial_{\alpha_1} (\varepsilon_{\beta\alpha_2 \dots \alpha_n} X^\beta) \\ &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha X^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что формулу Стокса можно записать в виде

$$\int_{\partial U} X^\alpha ds_\alpha = \int_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha X^\alpha, \quad (3.86)$$

где

$$ds_\alpha := \frac{1}{(n-1)!} dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \varepsilon_{\alpha\alpha_2 \dots \alpha_n} \quad (3.87)$$

– ориентированный элемент площади гиперповерхности.

Рассмотрим частные случаи формулы Стокса.

**ПРИМЕР 3.7.5.** Пусть многообразие  $M$  одномерно,  $n = 1$ , а форма  $A = f(x)$  имеет нулевую степень. Тогда граница области  $U = (a, b)$  состоит из двух точек  $\partial U = \{a, b\}$ , и формула Стокса принимает вид

$$\int_{\partial U} f = f(b) - f(a) = \int_a^b df = \int_a^b dx \partial_x f.$$

Здесь под интегралом от функции (0-формы) по подмногообразию нулевой размерности, состоящему из отдельных точек, понимается алгебраическая сумма значений функции в этих точках. Таким образом мы получили хорошо известную формулу Ньютона–Лейбница.

**ПРИМЕР 3.7.6.** Пусть задана 1-форма  $dx^\alpha A_\alpha$  на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $\{x^\alpha\} = \{x, y\}$ . Рассмотрим область  $U$ , ограниченную замкнутой кусочно гладкой кривой  $x^\alpha(t)$ . Тогда

$$\int_{\partial U} dt \frac{dx^\alpha}{dt} A_\alpha = \int_{\partial U} (dx A_x + dy A_y) = \int_U dx \wedge dy \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (3.88)$$

Таким образом мы получили формулу Грина.

**ПРИМЕР 3.7.7.** Пусть задана 1-форма  $A = dx^\alpha A_\alpha$  в трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами  $x^\alpha$ . Рассмотрим поверхность  $U \subset \mathbb{R}^3$ , с кусочно гладкой границей  $\partial U$ . Тогда общая формула Стокса (3.85) принимает вид

$$\oint_{\partial U} dx^\alpha A_\alpha = \int_U [dx^1 \wedge dx^2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + dx^1 \wedge dx^3 (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1) + dx^2 \wedge dx^3 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)].$$

Если поверхность задана параметрически  $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$ , то последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\oint_{\partial\mathbb{U}} dx^\alpha A_\alpha = \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv \sqrt{|g|} (\text{rot } A, N), \quad (3.89)$$

где введен ротор (3.64) 1-формы:  $[\text{rot } A]^\alpha := \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$  и  $N = N^\alpha \partial_\alpha$  – единичный вектор нормали. Таким образом получена *формула Стокса*.

**ПРИМЕР 3.7.8.** Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x^\alpha$  задана 2-форма  $A = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta}$ . Рассмотрим двумерную компактную поверхность  $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  с кусочно гладкой границей  $\partial\mathbb{U}$ . Будем считать, что поверхность задана параметрически  $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$ . Тогда общая формула Стокса (3.85) принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{U}} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 (\partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12}). \quad (3.90)$$

Как уже отмечалось 2-форма в трехмерном пространстве взаимно однозначно определяется векторным полем  $A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma$ . Интеграл в левой части равенства сводится к интегралу по поверхности от скалярного произведения вектора  $X^\alpha$  на единичную нормаль  $N = N^\alpha \partial_\alpha$  к поверхности (3.84). Подынтегральное выражение в правой части (3.90) представляет собой дивергенцию от векторного поля

$$\partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12} = \partial_\alpha X^\alpha.$$

Таким образом, окончательно получаем равенство

$$\int_{\partial\mathbb{U}} du \wedge dv \sqrt{|g|} X^\alpha N_\alpha = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \partial_\alpha X^\alpha, \quad (3.91)$$

где  $\sqrt{|g|}$  – квадратный корень из индуцированной метрики (см. пример 3.7.4). Это есть *формула Гаусса–Остроградского* в трехмерном евклидовом пространстве.

## 4. Метрика

Одним из важнейших понятий в геометрии и физике является дифференциально геометрическая метрика или просто метрика. Трудно переоценить ту роль, которую метрика играет в физических приложениях. С ее помощью строятся инварианты, определяется форма объема. Симметрии метрики являются симметриями пространства-времени, которые определяют сохраняющиеся токи. В частности, фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения связаны с наличием у метрики определенных симметрий.

### 4.1. Определение и свойства

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Метрикой  $g \in \mathcal{T}_2(\mathbb{M})$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называется достаточно гладкое ковариантное тензорное поле типа  $(0, 2)$ , которое является симметричным и невырожденным в каждой точке многообразия:

- 1)  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  – симметричность,
- 2)  $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$  – невырожденность,

где  $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$  – выражение для метрики в координатном базисе. Метрика называется *римановой*, если матрица  $g_{\alpha\beta}(x)$  положительно определена во всех точках  $x \in \mathbb{M}$ . В противном случае метрика называется *псевдоримановой*.

Метрика определяет билинейное невырожденное и симметричное отображение

$$g: \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X, Y \mapsto (X, Y) \in C^\infty(\mathbb{M}),$$

которое называется *скалярным произведением* векторных полей. В компонентах скалярное произведение векторных полей  $X = X^\alpha \partial_\alpha$  и  $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$  задается сверткой индексов:

$$(X, Y) := X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

для которого мы также будем иногда употреблять обозначение  $(X, Y) = g(X, Y)$ , чтобы отметить метрику, с помощью которой проводится свертка. Скалярное произведение, очевидно, симметрично:  $(X, Y) = (Y, X)$ . Невырожденность метрики формулируется так: не существует отличного от нуля векторного поля  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  такого, что скалярное произведение  $(X, Y) = 0$  для всех  $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и во всех точках  $x \in \mathbb{M}$ . Для римановой метрики скалярное произведение является положительно определенным в каждой точке, т.е.  $(X, X) \geq 0$ , причем равенство  $(X, X) = 0$  имеет место только для тривиального векторного поля  $X = 0$ . Скалярное произведение базисных векторных полей  $\partial_\alpha$  равно компонентам метрики:

$$(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}. \quad (4.2)$$

Поскольку метрика невырождена, то существует *обратная метрика*, т.е. симметричное невырожденное контравариантное тензорное поле  $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta \in \mathcal{T}^2(\mathbb{M})$  типа  $(2, 0)$ , компоненты которого в каждой точке многообразия удовлетворяют условию

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\gamma\beta} g^{\beta\alpha} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (4.3)$$

При преобразовании координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x)$  компоненты метрики и ее обратной преобразуются по обычным правилам для тензорных полей:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

$$g^{\alpha'\beta'} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}. \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что определитель метрики

$$g(x) := \det g_{\alpha\beta}(x) \quad (4.6)$$

преобразуется по правилу  $g' = J^{-2}g$ , где  $J$  – якобиан преобразования координат. То есть определитель метрики является скалярной плотностью степени  $-2$ .

В общем случае, ввиду симметрии по индексам, метрика  $g_{\alpha\beta}$  задается

$$[g_{\alpha\beta}] = \frac{n(n+1)}{2}$$

произвольными компонентами с единственным условием невырожденности. Здесь и в дальнейшем число компонент тензора мы будем обозначать квадратными скобками.

С помощью метрики и ее обратной можно изменить тип тензора путем опускания или подъема всех или части индексов произвольного тензорного поля.

**ПРИМЕР 4.1.1.** Произвольному векторному полю  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  можно взаимно однозначно поставить в соответствие 1-форму и наоборот. В компонентах отображение задается следующими формулами:

$$X_\alpha := X^\beta g_{\beta\alpha}, \quad X^\alpha = g^{\alpha\beta} X_\beta. \quad (4.7)$$

Это отображение  $\mathcal{X}(\mathbb{M}) \leftrightarrow \Lambda_1(\mathbb{M})$ , очевидно, линейно, не зависит от выбора системы координат и, значит, является изоморфизмом  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ -модулей. Операция подъема и опускания индексов естественным образом продолжается на тензоры произвольного типа.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если на многообразии задана метрика, то между контравариантными и ковариантными тензорными полями одного ранга  $r$  существует взаимно однозначное соответствие, точнее, изоморфизм  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ -модулей:

$$T^r(\mathbb{M}) \simeq T_r(\mathbb{M}) \simeq T_q^p(\mathbb{M}), \quad \forall p, q: \quad p + q = r.$$

По этой причине будем считать, что тензоры одного ранга, но с различным типом индексов, описывают один и тот же геометрический объект и будем обозначать их, как правило, одной буквой. Например,

$$T_{\alpha\beta} = T_\alpha{}^\gamma g_{\gamma\beta} = T^\gamma{}_\beta g_{\gamma\alpha} = T^{\gamma\delta} g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta},$$

где  $T_{\alpha\beta}$  и  $T^{\alpha\beta}$  – ковариантные и контравариантные компоненты тензора второго ранга. Компоненты  $T_\alpha{}^\beta$  и  $T^\alpha{}_\beta$  называются смешанными. Поскольку при наличии метрики появилась возможность опускать и поднимать индексы, то необходимо следить за порядком ковариантных и контравариантных индексов. В общем случае  $T_\alpha{}^\beta \neq T^\beta{}_\alpha$ . Поэтому не стоит писать контра- и ковариантные индексы один под другим.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Скалярное произведение вектора в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  с самим собой называется *квадратом* вектора и обозначается

$$X^2 := (X, X). \quad (4.8)$$

Длиной вектора  $X$  назовем выражение

$$|X| := \sqrt{|X^2|}. \quad (4.9)$$

Знак модуля в этом определении необходим в том случае, если метрика не является положительно определенной. Пусть  $X, Y$  – два векторных поля на римановом многообразии  $\mathbb{M}$ , т.е. с положительно определенной метрикой. Если в точке  $x \in \mathbb{M}$  они отличны от нуля, то определим *угол*  $\varphi$  между ними в данной точке с помощью следующего соотношения

$$\cos \varphi := \frac{(X, Y)}{\sqrt{X^2 Y^2}}. \quad (4.10)$$

Определение угла (4.10) корректно. Действительно, для положительно определенной метрики правая часть соотношения (4.10) не превышает единицу, поскольку справедливо неравенство треугольника

$$(X, Y) \leq \sqrt{X^2 Y^2}.$$

Определение угла инвариантно относительно выбора координат, так как правая часть (4.10) содержит только инвариантные комбинации векторных полей.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если  $(X, Y) = 0$ , то два вектора называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, независимо от положительной определенности метрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две метрики  $g' = dx^\alpha \otimes dx^\beta g'_{\alpha\beta}$  и  $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$  на многообразии  $\mathbb{M}$  называются *конформно эквивалентными* или связанными преобразованием Вейля, если они пропорциональны

$$g' = e^{2\phi} g, \quad (4.11)$$

где  $\phi(x)$  – некоторая функция на  $\mathbb{M}$ . Преобразование (4.11) называют *конформным преобразованием* метрики или *преобразованием Вейля*.

Это определение не зависит от выбора системы координат и поэтому задает вейлевскую (конформную) эквивалентность глобально.

Угол между векторами определяется только метрикой и не изменится, если метрику умножить на произвольную функцию, отличную от нуля (преобразование Вейля).

ЗАМЕЧАНИЕ. Термин конформная эквивалентность метрик широко используется, однако он не имеет отношения к конформным преобразованиям в комплексном анализе. Конформные преобразования комплексных переменных – это подгруппа общих преобразований координат, в то время как при преобразовании (4.11) координаты не меняются. Поэтому мы будем употреблять термин вейлевская инвариантность, так как в двумерных моделях математической физики термин конформная инвариантность употребляется в своем первоначальном значении, как в комплексном анализе.

Поскольку метрика невырождена, то у нее существует обратная метрика (4.3), которая естественным образом определяет скалярное произведение в пространстве 1-форм. Скалярное произведение двух 1-форм  $A = dx^\alpha A_\alpha$  и  $B = dx^\beta B_\beta$  по определению равно

$$(A, B) = g(A, B) := g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta. \quad (4.12)$$

Это скалярное произведение согласовано с операцией подъема и опускания индексов (4.7):

$$g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta, \quad \text{где } A^\alpha := g^{\alpha\beta} A_\beta, \quad B^\alpha := g^{\alpha\beta} B_\beta.$$

Скалярные произведения векторов (4.1) и 1-форм (4.12) естественным образом продолжаются на тензорные поля произвольного типа  $(r, s)$ .

Метрика на многообразии определяет инвариантную квадратичную форму дифференциалов, которая называется *интервалом*

$$ds^2 := g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (4.13)$$

Интервал задает расстояние между двумя бесконечно близкими точками с координатами  $x^\alpha$  и  $x^\alpha + dx^\alpha$ . Это расстояние зависит от точки многообразия, но не от выбора системы координат. В случае псевдоримановой метрики выражение (4.13) не задает метрику (расстояние) в топологическом смысле, так как квадратичная форма (4.13) не является положительно определенной. С помощью положительно определенной римановой метрики топологическое расстояние между двумя точками  $p, q \in \mathbb{M}$  можно определить как точную нижнюю грань интеграла

$$l(p, q) := \inf \int_p^q ds, \quad ds := \sqrt{ds^2} = dt \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}, \quad (4.14)$$

где интегрирование ведется по всем кусочно дифференцируемым кривым  $x(t)$ , соединяющим точки  $p$  и  $q$ . Доказательство свойств расстояния при этом существенно опирается на положительную определенность римановой метрики. Топология, определяемая топологической метрикой (4.14), совпадает с топологией многообразия  $\mathbb{M}$

В заключение раздела обсудим вопрос о существовании римановых метрик.

ТЕОРЕМА 4.1.1. *На любом  $n$ -мерном дифференцируемом многообразии  $\mathbb{M}$  существует риманова метрика.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выберем локально конечный атлас  $\{\mathbb{U}_i\}$  на  $\mathbb{M}$ . Такой атлас всегда существует в силу теоремы 2.2.2. Обозначим координаты на каждой карте через  $x_i^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Пусть  $\{f_i\}$  – разбиение единицы, подчиненное данному атласу, такое, что  $\text{supp } f_i \subset \mathbb{U}_i$ . Выберем евклидову метрику на каждой карте и склеим карты с помощью разбиения единицы

$$ds_i^2 := \delta_{\alpha\beta} dx_i^\alpha dx_i^\beta, \quad (4.15)$$

$$ds^2 := \sum_i f_i ds_i^2, \quad (4.16)$$

где выражение  $f_i ds_i^2$  определено

$$(f_i ds_i^2)(x) = \begin{cases} f_i(x) ds_i^2, & x \in \mathbb{U}_i, \\ 0, & x \notin \mathbb{U}_i. \end{cases}$$

Уравнения (4.15), (4.16) определяют гладкое симметричное ковариантное тензорное поле второго ранга на  $\mathbb{M}$ . Поскольку правая часть (4.16) содержит конечное число слагаемых в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$ , то сумма корректно определена. Выберем координатную окрестность  $\mathbb{U}$  с координатами  $x^\alpha$  такую, что замыкание области  $\bar{\mathbb{U}}$  является компактным. Тогда область  $\mathbb{U}$  пересекается с конечным числом карт  $\mathbb{U}_{i_1}, \dots, \mathbb{U}_{i_r}$ , так как атлас является локально конечным покрытием. Поэтому ограничение (4.16) на  $\mathbb{U}$  можно записать в виде

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^r f_{i_\lambda} ds_{i_\lambda}^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

где

$$g_{\alpha\beta} := \sum_{\lambda=1}^r f_{i_\lambda} \delta_{\gamma\delta} \frac{\partial x_{i_\lambda}^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_{i_\lambda}^\delta}{\partial x^\beta}.$$

Поскольку  $0 \leq f_i \leq 1$  и  $\sum_i f_i = 1$ , то существует такой индекс  $j$ , что  $f_j(x) > 0$ . Поэтому

$$ds^2(x) \geq f_j ds_j^2.$$

Таким образом, метрика  $ds^2$  является положительно определенной на  $\mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Доказательство этой теоремы свелось к переносу евклидовой метрики  $\delta_{ij}$  из евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  на многообразие  $\mathbb{M}$  с помощью отображения, которое фигурирует в определении многообразия, как гомеоморфизм. При этом положительная определенность евклидовой метрики существенна. Доказательство не проходит, если таким же образом попытаться перенести лоренцеву метрику из  $\mathbb{R}^{1,n-1}$  на  $\mathbb{M}$ .

## 4.2. Метрика на лоренцевых многообразиях

За счет выбора системы координат метрику всегда можно привести к диагональному виду в любой наперед заданной точке  $x \in \mathbb{M}$ . Действительно, при замене координат компоненты метрики преобразуются по правилу (4.4). При этом матрица Якоби преобразования координат  $\partial x^\alpha / \partial x^{\alpha'}$  в фиксированной точке многообразия может быть выбрана произвольным образом.

**ПРИМЕР 4.2.1.** Однородное линейное преобразование координат  $x^\alpha = x^{\alpha'} M_{\alpha'}^\alpha$  с постоянной невырожденной матрицей  $M_{\alpha'}^\alpha = \text{const}$  дает

$$g_{\alpha'\beta'} = M_{\alpha'}^\alpha M_{\beta'}^\beta g_{\alpha\beta}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В общем случае метрику можно привести к диагональному виду в фиксированной точке, но не в окрестности. Это связано с тем, что  $n$  функций преобразований координат, которыми можно воспользоваться, недостаточно для фиксирования  $n(n-1)/2$  функций, параметризующих недиагональные элементы метрики. Исключения составляют многообразия двух и трех измерений. В двумерном случае метрика имеет только одну недиагональную компоненту и ее можно привести к диагональному

виду в окрестности произвольной точки. Более того, ее можно преобразовать к конформно плоскому виду. На трехмерном многообразии метрика имеет три недиагональные компоненты, что равно числу произвольных функций, параметризующих преобразования координат. Можно показать, что ее также можно привести к диагональному виду не только в заданной точке, но и в некоторой окрестности этой точки.

Привести метрику к диагональному виду в точке можно многими способами. При этом сигнатура не зависит от выбора системы координат в которой метрика диагональна. Действительно, если в точке  $p \in \mathbb{M}$  метрика диагональна в двух системах координат и при этом имеет различную сигнатуру, то эти системы координат не могут быть связаны никаким преобразованием координат. В различных системах координат диагональные компоненты метрики могут иметь различные (ненулевые) значения, может меняться последовательность положительных и отрицательных компонент, однако число положительных и отрицательных компонент остается неизменным.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Сигнатурой метрики*, заданной на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , называется пара натуральных чисел  $(p, q)$  таких, что  $p + q = n$ , где  $p$  и  $q$  – количество, соответственно, положительных и отрицательных чисел, стоящих на диагонали метрики после ее диагонализации в какой либо точке многообразия  $x \in \mathbb{M}$ .

Если  $g_{\alpha\beta}$  – матрица, составленная из компонент метрики в некоторой системе координат, то числа  $p$  и  $q$  равны, соответственно, числу положительных и отрицательных собственных значений. При общих преобразованиях координат собственные числа могут менять свою величину, но не знак. Нулевых собственных значений быть не может, так как в этом случае метрика была бы вырожденной.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.1.** *Сигнатура метрики не зависит от точки линейно связного многообразия.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим, что в некоторых точках  $x_1, x_2 \in \mathbb{M}$  метрика имеет разную сигнатуру, и соединим эти точки произвольной кривой. Тогда из непрерывности метрики следует, что ее определитель обратился бы в нуль в некоторой точке кривой, что недопустимо.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В зависимости от сигнатуры метрики скалярное произведение векторов может быть положительно определено или нет. Риманова метрика на многообразии размерности  $n$  имеет сигнатуру  $(n, 0)$ . Отрицательно определенная метрика имеет сигнатуру  $(0, n)$ . В римановой геометрии  $(\mathbb{M}, g)$  положительно и отрицательно определенные метрики, по существу, можно не различать, так как все геометрические характеристики многообразий связаны простым преобразованием – изменением знака метрики. Поэтому многообразия с отрицательно определенной метрикой мы также будем называть римановыми. В то же время многие модели математической физики инвариантны относительно изменения знака метрики

$$g_{\alpha\beta} \mapsto -g_{\alpha\beta}, \quad (4.17)$$

поскольку действие, которым описывается модель, помимо метрики содержит также другие поля. Поэтому решения уравнений Эйлера–Лагранжа с положительно и отрицательно определенной метрикой, вообще говоря, неэквивалентны.

Сигнатура метрики инвариантна, не зависит от выбора системы координат и точки линейно связного многообразия. Будем считать, что после диагонализации номера координат выбраны таким образом, что сначала идут все положительные, а затем – отрицательные собственные значения. Будем писать

$$\text{sign } g_{\alpha\beta} = \underbrace{(+ \cdots +)}_p \underbrace{(- \cdots -)}_q. \quad (4.18)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пара  $(\mathbb{M}, g)$  называется *римановым многообразием*, если метрика является знакоопределенной  $p = n$  или  $q = n$ , и *псевдоримановым многообразием*, если метрика не является знакоопределенной,  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$ . Если положительный элемент на диагонали один,

$$\text{sign } g_{\alpha\beta} = (+ - \cdots -),$$

то говорят, что метрика имеет *лоренцеву сигнатуру*. Если на многообразии задана метрика лоренцевой сигнатуры, то будем говорить, что многообразие *лоренцево*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркнем, что задание метрики на многообразии может быть произвольным. В частности, на одном многообразии можно задать несколько метрик одновременно, причем разной сигнатуры, если такие существуют.

В настоящей монографии псевдоримановы многообразия размерности  $n \geq 4$  с  $p \geq 2$  и  $q \geq 2$  не рассматриваются, так как они недостаточно хорошо изучены и не имеют широкого применения в математической физике.

Для лоренцевой метрики скалярное произведение двух векторов может быть положительно, отрицательно или равно нулю, а из условия  $X^2 = 0$  не следует, что  $X = 0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *пространством-временем* псевдориманово многообразие  $\mathbb{M}$  с заданной метрикой  $g = dx^\alpha \otimes dx^\beta g_{\alpha\beta}$  лоренцевой сигнатуры (лоренцево многообразие). В пространстве-времени векторное поле  $X$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  называется:

$$\begin{array}{ll} \text{временеподобным,} & \text{если } (X, X) > 0, \\ \text{светоподобным (изотропным, нулевым),} & \text{если } (X, X) = 0, \\ \text{пространственноподобным,} & \text{если } (X, X) < 0. \end{array} \quad (4.19)$$

Это определение распространяется на область  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , если во всех точках  $x \in \mathbb{U}$  выполнены соответствующие соотношения.

Определение (4.19) инвариантно относительно замены координат. В общем случае гладкое векторное поле может иметь различный тип в различных областях связного многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Так же, как и в римановом пространстве, два вектора в пространстве-времени называются *ортогональными (перпендикулярными)*, если их скалярное произведение равно нулю. В частности, любой изотропный вектор перпендикулярен самому себе.

Определим тип координатного векторного поля  $\partial_0$ . Из (4.2) следует, что  $(\partial_0, \partial_0) = g_{00}$ . Если в данной системе координат  $g_{00} > 0$ , то векторное поле  $\partial_0$  времениподобно. В этом случае назовем координату  $x^0 = t$  *временеподобной* или *временем*. Другими словами, временем называется любой параметр вдоль интегральной кривой произвольного времениподобного векторного поля. Противоположно направленное векторное поле  $-\partial_0$  также времениподобно и связано с  $\partial_0$  преобразованием координат  $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \mapsto (-x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ , которое назовем *обращением времени*. Выберем (произвольно) ориентацию координаты  $x^0$  и будем говорить, что векторное поле  $\partial_0$  направлено в будущее, а  $-\partial_0$  – в прошлое. Тогда на времениподобных векторных полях можно ввести ориентацию. Произвольное времениподобное поле  $X$  направлено в будущее, если  $(X, \partial_0) = X^0 > 0$ . В противном случае, когда  $X^0 < 0$ , будем говорить, что времениподобное векторное поле направлено в прошлое.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае метрика, индуцированная на сечениях  $t = x^0 = \text{const}$  лоренцева многообразия, может быть отрицательно определена или быть знаконеопределенной. То есть сечения пространства-времени, соответствующие постоянному времени, совсем не обязательно пространственноподобны (= все касательные векторы пространственноподобны). Это зависит от выбора остальных координат. В конце настоящего раздела мы рассмотрим простой пример.

Можно доказать, что каждая точка многообразия  $\mathbb{M}$  лоренцевой сигнатуры  $(1, n - 1)$  имеет такую координатную окрестность с координатами  $(t, u^1, \dots, u^{n-1})$ , что в этих координатах метрика имеет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dt^2 + g_{\mu\nu}(t, u) du^\mu du^\nu, \quad \mu, \nu = 1 \dots n - 1. \quad (4.20)$$

При этом метрика  $g_{\mu\nu}$ , индуцированная на сечениях  $t = \text{const}$ , является отрицательно определенной. Другими словами, все сечения  $t = \text{const}$  для метрики вида (4.20) являются пространственноподобными подмногообразиями, т.е. все касательные векторы к сечениям пространственноподобны. Эти сечения являются вложенными римановыми многообразиями с локальной системой координат  $\{u^\mu\}$  и отрицательно определенной метрикой  $g_{\mu\nu}$ . Отметим также, что все векторы, касательные к этому подмногообразию ортогональны времениподобному векторному полю  $\partial_0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения координат на лоренцевом многообразии. Греческие буквы из начала алфавита  $\alpha, \beta, \dots$  будут использоваться для нумерации всех координат, а буквы из середины алфавита  $\mu, \nu, \dots$  – для нумерации остальных координат,

$\{x^\alpha\} = \{x^0, x^\mu\}$ . Это правило легко запомнить по следующим включениям:

$$\{1, \dots, n-1\} \subset \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \{\mu, \nu, \dots\} \subset \{\alpha, \beta, \dots\}.$$

Как правило, мы будем считать, что координата  $x^0$  является временем, и все остальные координатные линии  $x^\mu$  – пространственноподобны. Поэтому координаты  $x^\mu$  будем называть пространственноподобными.

В общем случае метрика на лоренцевом многообразии

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0\nu} \\ g_{\mu 0} & g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

не имеет блочно диагонального вида (4.20). Приведем критерий того, что метрика (4.21), заданная на некотором многообразии  $\mathbb{M}$ , имеет лоренцеву сигнатуру.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.2.** Пусть в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  задана метрика (4.21) такая, что  $g_{00} > 0$ . Эта метрика имеет лоренцеву сигнатуру тогда и только тогда, когда матрица

$$g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}} \quad (4.22)$$

отрицательно определена в каждой точке  $\mathbb{U}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно рассмотреть произвольную точку из  $\mathbb{U}$ . Пусть на  $\mathbb{U}$  задана метрика (4.21) для которой  $g_{00} > 0$ . Интервал в окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  имеет вид

$$ds^2 = g_{00}dx^0dx^0 + 2g_{0\mu}dx^0dx^\mu + g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad g_{00} > 0.$$

Зафиксируем произвольную точку  $x \in \mathbb{U}$ . Введем вместо  $x^0$  новую координату  $\tilde{x}^0$ , для которой в точке  $x \in \mathbb{U}$  выполнено соотношение

$$dx^0 = d\tilde{x}^0 - \frac{dx^\mu g_{0\mu}}{g_{00}}.$$

В фиксированной точке этого всегда можно добиться линейным преобразованием координат. Тогда интервал примет вид

$$ds^2 = g_{00}d\tilde{x}^0d\tilde{x}^0 + \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}\right) dx^\mu dx^\nu. \quad (4.23)$$

Если метрика (4.21) имеет лоренцеву сигнатуру, то существует такая система координат, что в точке  $x \in \mathbb{M}$  метрика диагональна, причем  $g_{00} > 0$ , а все остальные диагональные компоненты  $g_{\mu\mu}$  отрицательны. Поскольку метрика (4.23) связана с диагональной метрикой также невырожденным преобразованием координат, то матрица (4.22) отрицательно определена.

Обратно. Если матрица (4.22) отрицательно определена, то дальнейшим линейным преобразованием координат  $x^\mu$  ее всегда можно преобразовать к диагональному виду в фиксированной точке, причем на диагонали будут стоять отрицательные числа. Следовательно, метрика имеет лоренцеву сигнатуру.

Матрица (4.22) на лоренцевом многообразии симметрична и невырождена, так как отрицательно определена. Она имеет следующий геометрический смысл. Вдоль координатных линий времени  $t = x^0$  всегда можно определить единичное векторное поле

$$n := \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \partial_0, \quad (n, n) = 1.$$

Рассмотрим произвольное векторное поле  $X = X^0\partial_0 + X^\mu\partial_\mu$ . У него есть составляющая, перпендикулярная времениподобному векторному полю  $n$ ,

$$X_\perp = X - (X, n)n = X^\mu\partial_\mu - X^\mu g_{0\mu}\partial_0.$$

Если задано два произвольных векторных поля  $X$  и  $Y$ , то скалярное произведение их перпендикулярных составляющих равно

$$(X_\perp, Y_\perp) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}\right) X^\mu Y^\nu.$$

Таким образом, матрица (4.22) играет роль метрики для перпендикулярных составляющих векторных полей. Из теоремы 4.2.2 следует, что, если  $\mathbb{M}$  – лоренцево многообразие и  $x^0$  – время, то составляющие векторных полей, перпендикулярные  $n$ , всегда пространственноподобны.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Не следует думать, что матрицу (4.22) можно рассматривать, как метрику на некотором  $(n - 1)$ -мерном подмногообразии, касательные векторы к которому всюду перпендикулярны времениподобному векторному полю  $n$ . Дело в том, что такие подмногообразия могут не существовать. Можно проверить, что коммутатор двух перпендикулярных векторных полей  $[X_\perp, Y_\perp]$  в общем случае не будет ортогонален  $n$ . Для этого достаточно, не ограничивая общности, положить  $g_{00} = 1$  и проверить, что коммутатор  $[X_\perp, Y_\perp]$  имеет нетривиальную составляющую вдоль  $n$ . Тем самым множество всех векторных полей  $X_\perp$  не находится в инволюции, и, согласно теореме Фробениуса, подмногообразия, касательные векторы к которому всюду перпендикулярны  $n$ , не существует.

Приведем еще один критерий того, что метрика на многообразии является лоренцевой.

**ТЕОРЕМА 4.2.1.** *Для того, чтобы метрика (4.21) с  $g_{00} > 0$  в точке  $x \in \mathbb{M}$  имела лоренцеву сигнатуру необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\det \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} < 0, \quad \det \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det(g_{\alpha\beta}) \begin{cases} > 0, & n - \text{нечетно,} \\ < 0, & n - \text{четно.} \end{cases} \quad (4.24)$$

**ПРИМЕР 4.2.2.** Рассмотрим плоскость Минковского  $\mathbb{R}^{1,1}$  с декартовой системой координат  $\{x^0, x^1\}$  и метрикой

$$\eta_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Введем новую систему координат  $\{\tilde{x}^0, \tilde{x}^1\} = \{x^0 - \sqrt{2}x^1, x^1\}$ . Тогда координатные базисные векторы преобразуются по правилу (см. рис. 4.1)

$$\{\partial_0, \partial_1\} \mapsto \{\tilde{\partial}_0, \tilde{\partial}_1\} = \{\partial_0, \sqrt{2}\partial_0 + \partial_1\}.$$

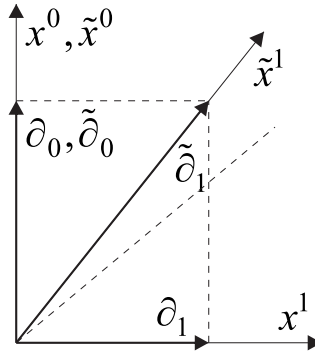


Рис. 4.1. Пример времениподобного сечения  $\tilde{x}^0 = \text{const}$ .

В новой системе координат сечения  $\tilde{x}^0 = \text{const}$  являются времениподобными прямыми, а метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, соответствующая выражению (4.22), состоит из одного элемента  $g_{11} - g_{01}^2/g_{00} = -1$ .

Обратная метрика равна

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в этих координатах обе компоненты обратной метрики на диагонали  $g^{00}$  и  $g^{11}$  отрицательны.

Рассмотренный пример показывает, что “пространственные” компоненты метрики  $g_{\mu\nu}$  в общем случае не образуют отрицательно определенной матрицы. Роль пространственной части метрики играет квадратичная форма (4.22), и она должна быть отрицательно определена на лоренцевом многообразии. Кроме того, из примера следует, что, даже если координата  $x^0$  на лоренцевом многообразии является временем, тем не менее временная компонента обратной метрики  $g^{00}$  может быть отрицательна.

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что координаты на лоренцевом многообразии выбраны таким образом, что координата  $x^0$  является временем, и все сечения  $x^0 = \text{const}$  пространственноподобны. Такой выбор координат удобен, например, при постановке задачи Коши в различных моделях математической физики. На языке компонент метрики эти условия означают, что  $g_{00} > 0$ , и матрица  $g_{\mu\nu}$  отрицательно определена. В этом случае нетрудно доказать, что временная компонента обратной метрики также положительна  $g^{00} > 0$ . В обратную сторону утверждение неверно: условий положительности  $g_{00} > 0$  и  $g^{00} > 0$  недостаточно для отрицательной определенности матрицы  $g_{\mu\nu}$ .

### 4.3. Векторные поля и вложения

В разделе 2.6.6 было установлено, что отличная от нуля 1-форма  $A = dx^\alpha A_\alpha$  определяет в касательном расслоении  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$  распределение  $(n-1)$ -подпространств, натянутое на линейно независимые векторы с компонентами  $Y^\alpha$ , удовлетворяющими уравнению  $Y^\alpha A_\alpha = 0$ . Наличие метрики позволяет каждой 1-форме поставить в соответствие векторное поле  $X^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$ . По построению, это векторное поле перпендикулярно любому вектору из  $(n-1)$ -мерного подпространства в касательном пространстве, так как  $X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta} = 0$ . Таким образом, при наличии метрики задание ненулевого векторного поля эквивалентно заданию  $(n-1)$ -мерного распределения на многообразии. В общем случае это распределение не является инволютивным, и поэтому у него не существует интегральных подмногообразий. То есть векторное поле не определяет ортогональные интегральные подмногообразия. Обратное утверждение верно. Каждое  $(n-1)$ -мерное подмногообразие (гиперповерхность) определяет нормальное векторное поле, заданное на подмногообразии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $\mathbb{M}$  – риманово многообразие. Тогда *углом* между двумя пересекающимися гиперповерхностями в точках их пересечения называется угол между соответствующими нормальными векторами в данных точках.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если на многообразии задана метрика и векторное поле, то определим проекционные операторы на заданное векторное поле и перпендикулярные направления следующим образом. Пусть  $X^\alpha$  – компоненты произвольного векторного поля, такого, что  $X^2 \neq 0$ . Тогда операторы

$$\Pi_\alpha^{\text{L}\beta} := \frac{X_\alpha X^\beta}{X^2}, \quad \Pi_\alpha^{\text{T}\beta} := \delta_\alpha^\beta - \frac{X_\alpha X^\beta}{X^2}, \quad (4.25)$$

являются *проекционными операторами* на направление векторного поля и перпендикулярные направления, соответственно. При этом выполнены равенства, определяющие набор проекционных операторов:

$$(\Pi^{\text{L}})^2 = \Pi^{\text{L}}, \quad (\Pi^{\text{T}})^2 = \Pi^{\text{T}}, \quad \Pi^{\text{L}}\Pi^{\text{T}} = 0, \quad \Pi^{\text{L}} + \Pi^{\text{T}} = 1.$$

**ПРИМЕР 4.3.1.** Векторное поле  $Y = Y^\alpha \partial_\alpha$  имеет следующее разложение

$$Y = Y^{\text{L}} + Y^{\text{T}},$$

где его компоненты определены следующими выражениями:

$$Y^{\text{L}\alpha} := Y^\beta \Pi_\beta^{\text{L}\alpha} = \frac{(Y, X) X^\alpha}{X^2},$$

$$Y^{\text{T}\alpha} := Y^\beta \Pi_\beta^{\text{T}\alpha} = Y^\alpha - \frac{(Y, X) X^\alpha}{X^2}.$$

Аналогично раскладывается 1-форма  $A = dx^\alpha A_\alpha$ :

$$A = A^{\text{L}} + A^{\text{T}},$$

где

$$A_\alpha^L := \Pi_\alpha^{L\beta} A_\beta = \frac{A(X)X_\alpha}{X^2},$$

$$A_\alpha^T := \Pi_\alpha^{T\beta} A_\beta = A_\alpha - \frac{A(X)X_\alpha}{X^2}.$$

Для того, чтобы разложить тензоры более высокого ранга, необходимо произвести разложение по каждому индексу. Например, контравариантный тензор второго ранга  $T$  имеет следующее разложение

$$T = T^{LL} + T^{LT} + T^{TL} + T^{TT},$$

где

$$T^{LL\alpha\beta} := T^{\gamma\delta} \Pi_\gamma^{L\alpha} \Pi_\delta^{L\beta} = \frac{T^{\gamma\delta} X_\gamma X_\delta X^\alpha X^\beta}{X^4},$$

$$T^{LT\alpha\beta} := T^{\gamma\delta} \Pi_\gamma^{L\alpha} \Pi_\delta^{T\beta} = \frac{T^{\gamma\beta} X_\gamma X^\alpha}{X^2} - \frac{T^{\gamma\delta} X_\gamma X_\delta X^\alpha X^\beta}{X^4},$$

$$T^{TL\alpha\beta} := T^{\gamma\delta} \Pi_\gamma^{T\alpha} \Pi_\delta^{L\beta} = \frac{T^{\alpha\gamma} X_\gamma X^\beta}{X^2} - \frac{T^{\gamma\delta} X_\gamma X_\delta X^\alpha X^\beta}{X^4},$$

$$T^{TT\alpha\beta} := T^{\gamma\delta} \Pi_\gamma^{T\alpha} \Pi_\delta^{T\beta} = T^{\alpha\beta} - \frac{T^{\alpha\gamma} X_\gamma X^\beta}{X^2} - \frac{T^{\gamma\beta} X_\gamma X^\alpha}{X^2} + \frac{T^{\gamma\delta} X_\gamma X_\delta X^\alpha X^\beta}{X^4}.$$

Аналогично раскладываются тензоры с произвольным числом контра- и ковариантных индексов.

Поскольку нетривиальные ковекторы с компонентами

$$V_\alpha - X_\alpha \frac{(V, X)}{X^2} \quad \text{и} \quad X_\alpha$$

являются собственными векторами проекционных операторов  $\Pi^L$  и  $\Pi^T$  с нулевыми собственными значениями, то проекционные операторы вырождены:

$$\det \Pi^L = \det \Pi^T = 0.$$

Рассмотрим, как меняется метрика при отображениях. Пусть многообразие  $\mathbb{M}$  вложено<sup>1</sup> в  $\mathbb{N}$ ,  $\dim \mathbb{M} \leq \dim \mathbb{N}$ , и на пространстве мишени  $\mathbb{N}$  задана метрика  $g$ . Тогда отображение  $f : \mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{N}$  задает метрику на  $\mathbb{M}$ . Бескоординатное определение индуцированной метрики  $f^*g$  имеет вид

$$(f^*g)(X, Y) := g(f_*X, f_*Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}),$$

где  $f_*$  – дифференциал отображения, отображающий векторные поля  $X, Y$  на  $\mathbb{M}$  в векторные поля  $f_*X, f_*Y$  на  $\mathbb{N}$ . Скалярные произведения на  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$  заданы соответственно метриками  $f^*g$  и  $g$ . Это значит, что при вложении длины векторов и углы между ними сохраняются. Обозначив координаты на  $\mathbb{M}$  и  $\mathbb{N}$  через  $x^\alpha$  и  $y^A$ , получим явное выражение для компонент индуцированной метрики  $f^*g$ :

$$(f^*g)_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial y^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^B}{\partial x^\beta} g_{AB}(y). \quad (4.26)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана некоторая метрика  $h$ . Если при вложении  $\mathbb{M}$  в многообразие  $\mathbb{N}$  с метрикой  $g$  исходная метрика совпадает с индуцированной,  $h = f^*g$ , то такое вложение называется *изометрическим*.

Представляет большой интерес задача о нахождении изометрических вложений заданного многообразия с определенной на нем метрикой в евклидово пространство.

<sup>1</sup>На самом деле достаточно погружения.



**ПРИМЕР 4.3.2.** Пусть двумерная сфера  $\mathbb{S}_r^2$  радиуса  $r$  вложена в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Вложение можно записать в параметрическом виде

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta \leq \pi$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$  – координаты на сфере и  $r = \text{const} > 0$ . Тогда метрика, индуцированная на сфере, примет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.27)$$

То есть в выражение для евклидова интервала вместо дифференциалов  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  необходимо просто подставить их выражения через дифференциалы полярного и азимутального углов.

**ПРИМЕР 4.3.3.** Пусть двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  радиуса  $r$  с направляющей окружностью радиуса  $R > r$  вложен в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  (см. рис. 4.2):

$$\begin{aligned}x &= (R + r \cos \theta) \cos \varphi, \\y &= (R + r \cos \theta) \sin \varphi, \\z &= r \sin \theta,\end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta < 2\pi$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$  – координаты на торе. Тогда индуцированная метрика имеет вид

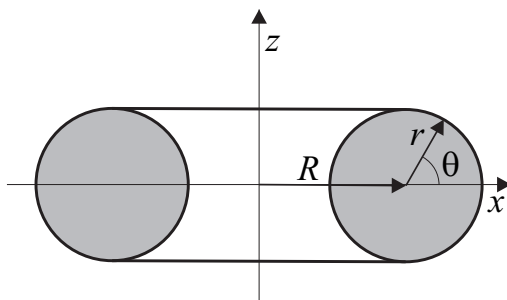


Рис. 4.2. Сечение двумерного тора, вложенного в трехмерное евклидово пространство.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 d\theta^2 + (R + r \cos \theta)^2 d\varphi^2. \quad (4.28)$$

#### 4.4. Выбор системы координат

Если на многообразии задана метрика, которую преобразованием координат нельзя привести к евклидовой или лоренцевой форме, тогда понятие декартовой системы координат отсутствует, и это создает определенные трудности для наглядного представления многообразия. С практической точки зрения удобнее сначала совершить преобразование координат, после которого метрика примет какой-либо относительно простой вид, связанный, например, с симметрией задачи, и уже потом дать физическую интерпретацию пространству или пространству-времени.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Риманова метрика называется *конформно евклидовой* или *вейлевски евклидовой* в некоторой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , если существует такая система координат на  $\mathbb{U}$ , в которой метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.29)$$

Здесь  $\phi(x)$  – некоторая достаточно гладкая функция. Функция  $e^{2\phi}$  называется *конформным множителем*. В таком виде метрика невырождена при  $\phi \neq \pm\infty$ . Если у каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует окрестность, на которой метрика является конформно евклидовой, то метрика называется *локально конформно евклидовой* или *локально вейлевски евклидовой*.

Метрика, обратная к метрике (4.29) имеет вид

$$g^{\alpha\beta} = e^{-2\phi} \delta^{\alpha\beta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркнем, что  $\phi(x)$  не является скалярным полем, хотя и не имеет ни одного индекса, так как в другой системе координат конформно евклидова метрика может не иметь вида (4.29), и, значит, функция  $\phi$  не определена вовсе.

Если метрика записана в конформно евклидовом виде, то в этой системе координат угол (4.10) между двумя произвольными векторами тот же, что и в евклидовом пространстве. Это обстоятельство позволяет более наглядно представить себе свойства многообразия.

Конформно евклидова метрика является частным случаем метрики, и далеко не каждую метрику можно привести к такому виду путем преобразования системы координат. Это видно уже из того, что в общем случае конформно евклидова метрика зависит от  $n + 1$  независимой функции (здесь  $n$  функций соответствует выбору системы координат и одна функция – конформному множителю), в то время как метрика общего вида зависит от  $n(n + 1)/2$  функций. Исключение представляет только случай двух измерений.

ТЕОРЕМА 4.4.1. *Если риманова метрика принадлежит классу  $\mathcal{C}^3(\mathbb{M})$  на двумерном многообразии  $\mathbb{M}$  (поверхности), то для любой точки  $x \in \mathbb{M}$  существует окрестность  $\mathbb{U}_x$ , в которой можно выбрать конформно евклидовы координаты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [36], теорема 2.5.14.

Локально конформно евклидовы координаты  $x^1, x^2$  в теореме 4.4.1 определены на некоторой окрестности  $\mathbb{U}_x$  с точностью до конформных преобразований комплексных координат, которые вводятся на  $\mathbb{U}_x$  следующим образом:  $z := x^1 + ix^2$ , что оправдывает название “конформно евклидова” для метрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в пространстве-времени метрика имеет вид (4.29), где символ Кронекера  $\delta_{\alpha\beta}$  заменен на лоренцеву метрику  $\eta_{\alpha\beta}$ , то пространство-время называется *конформно минковским*.

В общем случае, для того, чтобы задать метрику в некоторой окрестности, необходимо задать  $n(n + 1)/2$  функций от  $n$  переменных (компоненты метрики). Во многих случаях, например, в общей теории относительности, метрика ищется как решение некоторой системы уравнений, которая ковариантна относительно выбора системы координат. То есть система уравнений движения выглядит по-разному в различных системах отсчета, однако пространства решений находятся во взаимно однозначном соответствии. При этом соответствие устанавливается преобразованием координат. При решении ковариантной системы уравнений удобно выбрать ту или иную систему отсчета с тем, чтобы уменьшить число неизвестных функций. Поскольку переход между системами координат характеризуется  $n$  функциями от  $n$  переменных, то максимальное число функций, которое можно зафиксировать в метрике общего вида, равно  $n$ . В результате метрика будет определяться  $n(n - 1)/2$  функциями. В этом случае говорят, что выбрана система координат или *зафиксирована калибровка* для метрики<sup>2</sup>. Как правило, координаты выбираются таким образом, чтобы система уравнений имела наиболее простой вид.

Выбор системы координат не означает, что  $n$  функций, входящих в метрику, можно зафиксировать произвольным образом. Для того, чтобы определить, существует ли система отсчета, где метрика имеет заданный вид, необходимо проанализировать систему уравнений для функций перехода к такой системе координат. Если эта система уравнений имеет решение, то такая калибровка называется *допустимой*. Часто система уравнений на функции перехода, имеет только локальные решения. Это означает, что соответствующая система координат может быть выбрана только локально.

<sup>2</sup>Это название пришло из электродинамики, инвариантной относительно локальных преобразований, которые называются калибровочными

## 5. Связность на векторном расслоении и расслоении реперов

Большинство моделей математической физики сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений, которыми являются уравнения движения или уравнения равновесия. Мы предполагаем, что дифференциальные уравнения являются ковариантными объектами, т.е. при преобразовании координат преобразуются по тензорным правилам. В этом случае физические следствия не будут зависеть от выбора системы отсчета. Чтобы строить такие модели используется понятие связности и соответствующей ковариантной производной, так как обычные частные производные от тензорных полей на многообразии не приводят к тензорным объектам. Это относится не только к уравнениям общей теории относительности, но и к другим моделям математической физики. По сути дела ковариантные производные появляются и в плоском пространстве при переходе к криволинейным системам координат.

### 5.1. Векторные расслоения

В разделе (2.4) были определены расслоения общего вида, когда типичным слоем является произвольное многообразие. Ниже мы рассмотрим частный случай расслоений, типичными слоями которых являются векторные пространства, и введем понятие связности. Рассмотренные ранее касательное  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ , кокасательное  $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$  и тензорные  $\mathbb{T}_s^r(\mathbb{M})$  расслоения с базой  $\mathbb{M}$  представляет собой частные примеры векторных расслоений, а понятие связности приводит к оператору ковариантного дифференцирования произвольных тензорных полей – исключительно важному инструменту для построения моделей математической физики.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Дифференцируемое многообразие  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  называется *векторным расслоением с базой  $\mathbb{M}$ , проекцией  $\pi$  и типичным слоем  $\mathbb{V}$* , где  $\mathbb{M}$  – дифференцируемое многообразие и  $\mathbb{V} \simeq \mathbb{R}^n$  – векторное пространство. Проекция  $\pi$  является дифференцируемым сюръективным отображением  $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$ . При этом требуется, чтобы для любого атласа  $\mathbb{M} = \bigcup_i \mathbb{U}_i$  существовали отображения  $\{\chi_i\}$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) отображение  $\chi_i$  есть диффеоморфизм  $\chi_i : \pi^{-1}(\mathbb{U}_i) \rightarrow \mathbb{U}_i \times \mathbb{V}$  такой, что  $\pi \circ \chi_i^{-1}(x, v) = x$  для всех точек  $x \in \mathbb{U}_i$  и  $v \in \mathbb{V}$ ;
- 2) сужение отображения  $\chi_i$  на каждый слой  $\chi_{i,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{V}$  есть гомоморфизм векторных пространств для всех  $x \in \mathbb{U}_i$ . При этом, если  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ , то отображение

$$f_{ij}(x) := \chi_{j,x} \chi_{i,x}^{-1} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V},$$

является автоморфизмом, т.е.  $f_{ij}(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ;

- 3) если  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$ , то отображение  $f_{ij}(x) : \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$  является достаточно гладким.

Отображения  $\{f_{ij}\}$  называется *функциями перехода*.

Пусть  $p \in \pi^{-1}(x)$  – некоторая точка векторного расслоения  $\mathbb{E}$  из слоя над  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ . Тогда  $\chi_i(p) = (x, v_i)$  и  $\chi_j(p) = (x, v_j)$ . Следовательно,

$$p = \chi_i^{-1}(x, v_i) = \chi_j^{-1}(x, v_j). \quad (5.1)$$

Зафиксируем базис  $\hat{e}_a$ ,  $a = 1, \dots, n$  в векторном пространстве  $\mathbb{V}$  и разложим по нему векторы:  $v_i = v_i^a \hat{e}_a$  и  $v_j = v_j^a \hat{e}_a$ . Тогда из условия 2) следует равенство

$$v_j^a = v_i^b f_{ij}{}^a{}_b,$$

где введена невырожденная матрица  $f_{ij}(x) = \{f_{ij}{}^a{}_b(x)\} \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Эта матрица достаточно гладко зависит от точки  $x$  в силу условия 3 из определения расслоения.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В данном определении оба свойства из определения расслоения общего вида в разделе 2.4 объединены в одно свойство 1). Свойство 2) предполагает, что слой векторного расслоения  $\pi^{-1}(x)$

в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$ , сам является векторным пространством, гомоморфным типичному слою, а в областях пересечения карт допускаются автоморфизмы, то есть линейные отображения  $\mathbb{V}$  на себя. С учетом свойства 1) получаем, что каждый слой изоморфен векторному пространству,  $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{V}$ . В условии 2) гомоморфизм можно заменить на гомеоморфизм и не требовать изначально наличия структуры векторного пространства в слое  $\pi^{-1}(x)$ . Гомеоморфизма достаточно для переноса структуры векторного пространства из  $\mathbb{V}$  на слой  $\pi^{-1}(x)$ , при этом каждый слой будет, конечно, изоморфен  $\mathbb{V}$ . Свойство 3) говорит о том, что автоморфизмы задаются матрицей  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , элементы которой достаточно гладко зависят от координат. Поэтому в определении векторного расслоения был выбран атлас вместо окрестности точки  $x \in \mathbb{M}$  в определении расслоения общего вида.

Если в векторном пространстве  $\mathbb{V}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ , зафиксирован базис  $\{\hat{e}_a\}$ ,  $a = 1, \dots, n$ , то его можно отождествить с евклидовым пространством  $\mathbb{R}^n$ . После этого топология и дифференцируемая структура евклидова пространства с помощью отображений  $\{\chi_i\}$  естественным образом переносятся на пространство расслоения  $\mathbb{E}$ , превращая его в многообразие. Фактически, требование дифференцируемости отображений  $\chi_i$  означает, что дифференцируемая структура на пространстве расслоения  $\mathbb{E}$  согласована с дифференцируемой структурой, индуцированной отображениями  $\chi_i$ .

В общем случае размерности базы  $\mathbb{M}$  и векторного пространства  $\mathbb{V}$  (типичного слоя) могут не совпадать. Если  $\dim \mathbb{M} = m$  и  $\dim \mathbb{V} = n$ , то  $\dim \mathbb{E} = m + n$ .

В силу условия 1) в определении расслоения многообразии  $\pi^{-1}(U_i)$  является тривиальным расслоением над каждой областью  $U_i$ .

**ПРИМЕР 5.1.1.** Построим двумерные расслоения  $\mathbb{E}(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R})$ , базой которых является окружность  $\mathbb{S}^1$ , а типичным слоем – вещественная прямая  $\mathbb{R}$ , которая рассматривается, как векторное пространство. Отождествим каждую точку окружности с полярным углом  $\mathbb{S}^1 \ni \alpha \in [0, 2\pi)$ . Покроем окружность двумя картами (см. рис. 5.1):  $\mathbb{S}^1 \supset U_1 = (2\pi - \delta, 2\pi) \cup [0, \pi + \delta)$  и  $\mathbb{S}^1 \supset U_2 = (\pi - \delta, 2\pi) \cup [0, \delta)$ , где  $0 < \delta < \pi/2$ , которые пересекаются по двум областям  $U_1 \cap U_2 = U_{12} \cup U_{21}$ , где  $U_{12} = (\pi - \delta, \pi + \delta)$  и  $U_{21} = (2\pi - \delta, 2\pi) \cup [0, \delta)$ , при этом координатные функции определяют диффеоморфизмы:

$$\begin{aligned}\varphi_1(U_1) &= (-\delta, \pi + \delta) \in \mathbb{R}, \\ \varphi_2(U_2) &= (\pi - \delta, 2\pi + \delta) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Определим векторное расслоение  $\mathbb{E}$  его локальным вложением в  $\mathbb{R}^3$ :

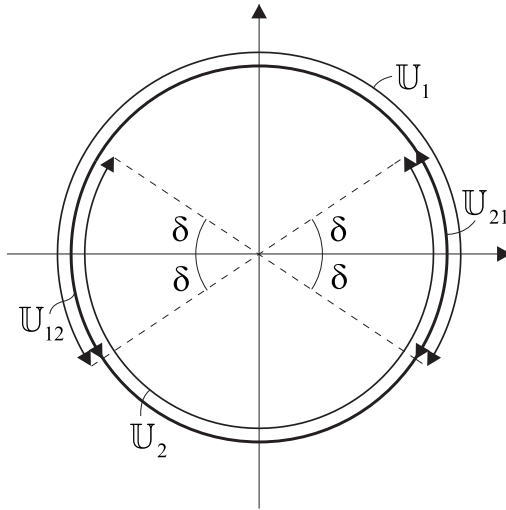


Рис. 5.1. Покрывение окружности двумя картами  $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2$ .  $U_{12}$  и  $U_{21}$  – области пересечения карт.

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U_1) &= \{p = (x, v^1, v^2) \in \mathbb{R}^3 : x \in \varphi_1(U_1), v^2 \cos(kx/2) = v^1 \sin(kx/2)\}, \\ \pi^{-1}(U_2) &= \{p = (x, v^1, v^2) \in \mathbb{R}^3 : x \in \varphi_2(U_2), v^2 \cos(kx/2) = v^1 \sin(kx/2)\},\end{aligned}$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  и  $v^1, v^2$  – декартовы координаты на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Для большей ясности мы обозначили точки окружности  $\alpha \in \mathbb{S}^1$  и их координаты  $x = \varphi(\alpha) \in \mathbb{R}$  разными буквами. Словами, при движении точки по окружности  $\mathbb{S}^1$  вещественная прямая  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  поворачивается в плоскости  $\mathbb{R}^2$  на угол  $kx/2$ . Если  $v \in \mathbb{R}$  – точка на прямой, то ей соответствует точка  $\mathbf{v} = (v^1, v^2) = (v \cos(kx/2), v \sin(kx/2)) \in \mathbb{R}^2$  на плоскости. Направляющим вектором прямой является  $\mathbf{n} = (\cos(kx/2), \sin(kx/2)) \in \mathbb{R}^2$ . Теперь определим отображения:

$$\begin{aligned}\chi_1: \pi^{-1}(\mathbb{U}_1) \ni p &\mapsto (\alpha, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \\ \chi_2: \pi^{-1}(\mathbb{U}_2) \ni p &\mapsto (\alpha, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R},\end{aligned}$$

где  $v := (\mathbf{n}, \mathbf{v}) = v^1 \cos(kx/2) + v^2 \sin(kx/2)$ . Для определения гомоморфизмов  $f_{ij}$  необходимо учесть, что точки  $x$  и  $x + 2\pi$  в пересечении  $\mathbb{U}_{21}$  соответствуют одной и той же точке окружности, и

$$\cos(k(2\pi + x)/2) = (-1)^k \cos(kx/2), \quad \sin(k(2\pi + x)/2) = (-1)^k \sin(kx/2).$$

Поэтому  $f_{12} = \text{id}(\mathbb{R})$  и  $f_{21} = (-1)^k \text{id}(\mathbb{R})$ . Отсюда следует, что все расслоения для четных  $k$  диффеоморфны между собой и диффеоморфны тривиальному расслоению  $\mathbb{E} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , которое получается при  $k = 0$ . Расслоения при нечетных  $k$  также диффеоморфны между собой и диффеоморфны листу Мебиуса, соответствующего  $k = 1$ .

При задании расслоения функции перехода должны удовлетворять условиям совместности:

- 1) для всех  $x \in \mathbb{U}_i$ ,  $f_{ii} = \text{id}$ ;
- 2) для всех  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \cap \mathbb{U}_k \neq \emptyset$ ,  $f_{ij} f_{jk} f_{ki} = \text{id}$ .

Эти условия совместности являются, очевидно, необходимыми. Второе свойство означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_i & \xrightarrow{f_{ij}} & \mathbb{U}_j \\ & \searrow f_{ik} & \downarrow f_{jk} \\ & & \mathbb{U}_k \end{array}$$

где  $f_{ik} = f_{ki}^{-1}$ . При задании расслоения с помощью функций перехода необходимо требовать выполнения данных свойств.

**ТЕОРЕМА 5.1.1.** Пусть  $\{\mathbb{U}_i\}$  – открытое координатное покрытие (атлас) дифференцируемого многообразия  $\mathbb{M}$ , и  $\mathbb{V}$  – векторное пространство. Если для всех пар пересекающихся координатных областей  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$  заданы достаточно гладкие отображения  $f_{ij}: \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V})$ , которые удовлетворяют условиям совместности 1) и 2), тогда существует векторное расслоение  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  с функциями перехода  $f_{ij}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [37], теорема 3.2.

Поскольку слоями векторных расслоений являются векторные пространства, то из заданных векторных расслоений с одной и той же базой можно строить новые векторные расслоения, производя со слоями операции, которые допустимы для векторных пространств, поточечно.

**ПРИМЕР 5.1.2** (Прямая сумма  $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$  и тензорное произведение  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  расслоений). Пусть  $\mathbb{E}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{V}_1)$  и  $\mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{V}_2)$  – два векторных расслоения с одной и той же базой  $\mathbb{M}$ . Определим прямую сумму векторных расслоений

$$\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \pi_1^{-1}(x) \oplus \pi_2^{-1}(x). \quad (5.2)$$

Если точка  $p \in \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$ , то она имеет вид  $p = p_1 \oplus p_2$ , где  $p_1 \in \pi_1^{-1}(x)$ ,  $p_2 \in \pi_2^{-1}(x)$  для некоторого  $x \in \mathbb{M}$ . Тем самым определена проекция  $\pi(p) = x$ . Типичным слоем прямой суммы векторных расслоений является векторное пространство  $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ . Пусть  $\{\mathbb{U}_i\}$  – координатное покрытие  $\mathbb{M}$  и  $\{f_{ij}^{(1)}\}$  и  $\{f_{ij}^{(2)}\}$  – функции

перехода для расслоений  $\mathbb{E}_1$  и  $\mathbb{E}_2$ , соответственно. Функции перехода для прямой суммы векторных расслоений имеют вид

$$h_{ij} := \begin{pmatrix} f_{ij}^{(1)} & 0 \\ 0 & f_{ij}^{(2)} \end{pmatrix},$$

которые задают автоморфизм в  $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ .

Аналогично определяется тензорное произведение векторных расслоений:

$$\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \pi_1^{-1}(x) \otimes \pi_2^{-1}(x). \quad (5.3)$$

Функции перехода для тензорного произведения имеют вид

$$h_{ij} := f_{ij}^{(1)} \otimes f_{ij}^{(2)},$$

которые действуют в тензорном произведении  $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2$ .

Размерности прямой суммы и тензорного произведения расслоений равны:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2) &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2, \\ \dim(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2) &= \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{V}_1 \times \dim \mathbb{V}_2. \end{aligned}$$

В заключение данного раздела обсудим касательное расслоение, построенное в разделе 2.6.2.

**ТЕОРЕМА 5.1.2.** *Касательное расслоение  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$  является векторным расслоением  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{R}^n)$  с базой  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , типичным слоем  $\mathbb{R}^n$  и проекцией  $\pi : (x, X) \rightarrow x$ , где  $X \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проверка свойств 1)–3) в определении векторного расслоения.

Для касательного расслоения размерности базы и типичного слоя совпадают:

$$\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Касательное расслоение имеет свою специфику. Вообще говоря, в определении векторного расслоения ничего не говорится о том, какое именно линейное преобразование векторного пространства происходит в областях пересечения карт. Говорится лишь о том, что оно возможно. Для касательного расслоения реализован естественный способ гладко сопоставить каждому преобразованию координат автоморфизм касательного пространства. А именно, каждому преобразованию координат соответствует тождественное преобразование касательного пространства,  $f_{ij} = \text{id}(\mathbb{T}_x(\mathbb{M}))$  для всех  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$ . Если в касательном пространстве в точке  $x \in \mathbb{M}$  (слое над  $x$ ) выбран координатный (голономный) базис  $\{\partial_\alpha\}$ , то при преобразовании координат в базе компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби, а голономный базис касательного пространства – на обратную матрицу Якоби (2.9). Поэтому сам вектор остается без изменения. Если вектор касательного пространства рассматривается, как набор компонент  $\{X^\alpha\}$ , считая, что базис векторного пространства фиксирован, то при преобразовании координат компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби  $\partial_\alpha x^{\alpha'}$  справа. Тогда функциями перехода являются матрицы Якоби. Обе точки зрения на функции перехода допустимы. Это зависит от того, как рассматривать базис векторного пространства  $\mathbb{V}$ . В общем случае базис касательного пространства  $e_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ , можно зафиксировать произвольным образом (неголономный базис). Тогда мы считаем, что при преобразовании координат базис и координаты векторов относительно этого базиса,  $X = X^a e_a$ , не меняются. Такой подход часто бывает удобнее и соответствует использованию репера  $e_a = e^\alpha_a \partial_\alpha$ , который образует базис касательного пространства.

Дифференцируемое сечение векторного расслоения  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ , которое всюду отлично от нуля, существует не всегда. Существование таких сечений отражает определенные топологические свойства базы  $\mathbb{M}$ . Множество сечений векторного расслоения  $\mathbb{E}$  будем обозначать  $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ .

Понятие (псевдо)риманова многообразия естественным образом обобщается на произвольные векторные расслоения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$  задана невырожденная симметричная билинейная форма  $g$  на слое  $\pi^{-1}(x)$ , и значение  $g(V_1, V_2)$  является достаточно гладкой функцией на  $\mathbb{M}$  для произвольных достаточно гладких сечений  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ , то  $\mathbb{E}$  называется (псевдо)римановым векторным расслоением.

ПРИМЕР 5.1.3. Тензорное расслоение на римановом многообразии является римановым векторным расслоением. Например, для тензорных полей  $X = \{X_\alpha^\beta\}$  и  $\{Y_\alpha^\beta\}$  типа  $(1, 1)$  квадратичная форма задается римановой метрикой:

$$g(X, Y) = g^{\alpha\beta} X_\alpha^\gamma Y_\beta^\delta g_{\gamma\delta}.$$

## 5.2. Связность на векторном расслоении

В настоящем разделе мы определим связность на векторном расслоении в инвариантной форме. Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = m$ , и векторное пространство  $\mathbb{V}$ ,  $\dim \mathbb{V} = n$ . Пусть  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  – векторное расслоение. Сечениями этого расслоения являются векторные поля  $V(x) \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ . На множестве сечений векторного расслоения поточечно вводится сложение и умножение на гладкие функции. Таким образом, множество сечений  $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  является  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ -модулем.

Все дальнейшие конструкции мы будем иллюстрировать записью соответствующих выражений в компонентах, поскольку это, во-первых, наглядно и, во-вторых, необходимо при проведении вычислений. Выберем в каждом слое  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , базис  $e_a(x) \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{U})$ ,  $a = 1, \dots, n$ . Этот базис называется *репером*. Для каждой точки  $x$  существует окрестность  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , в которой репер задается достаточно гладкими функциями от  $x$ . Вообще говоря, такой репер глобально существует не для всех многообразий, и это зависит от их топологических свойств. В компонентах сечение векторного расслоения имеет вид  $V = V^a(x)e_a$ .

Кокасательное расслоение  $\mathbb{T}^*(\mathbb{M})$  имеет ту же базу, что и  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ , поэтому можно построить тензорное произведение расслоений  $\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{E}$ . Пусть  $\mathcal{V}_{\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{E}}(\mathbb{M})$  – множество сечений тензорного произведения расслоений. В компонентах сечение этого расслоения задается векторным полем с дополнительным ковариантным индексом  $dx^\alpha V_\alpha^a(x)e_a$ , где  $dx^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , – координатный базис 1-форм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связностью  $\nabla$  на векторном расслоении  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  называется отображение

$$\nabla : \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{E}}(\mathbb{M}), \quad (5.4)$$

которое удовлетворяет двум условиям:

1) для любых двух сечений  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$

$$\nabla(V_1 + V_2) = \nabla V_1 + \nabla V_2;$$

2) для произвольного сечения  $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  и произвольной функции  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$

$$\nabla(fV) = df \otimes V + f\nabla V. \quad (5.5)$$

Если в определении связности положить  $f = \text{const}$ , то из условий 1) и 2) следует линейность отображения  $\nabla$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сечение  $\nabla V \in \Lambda_1(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{V}$  представляет собой 1-форму на  $\mathbb{M}$  со значениями в векторном пространстве  $\mathbb{V}$ . Рассмотрим касательное векторное поле к базе  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Тогда определено значение 1-формы  $\nabla V$  на векторном поле  $X$

$$\nabla_X V := \nabla V(X), \quad (5.6)$$

которое называется *ковариантной производной* векторного поля  $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  вдоль касательного векторного поля  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ .

Ковариантная производная вдоль векторного поля  $\nabla_X$  является отображением  $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ . Пусть  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  – два произвольных векторных поля на  $\mathbb{M}$ , и  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$  – гладкая функция. Тогда ковариантная производная имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y} V &= \nabla_X V + \nabla_Y V, \\ \nabla_{fX} V &= f\nabla_X V, \\ \nabla_X(V_1 + V_2) &= \nabla_X V_1 + \nabla_X V_2, \end{aligned}$$

$$\nabla_X(fV) = (Xf)V + f\nabla_X V.$$

Построим выражение для ковариантной производной в компонентах. Запишем отображение (5.4) для векторов репера:

$$\nabla e_a = dx^\alpha \otimes \omega_{\alpha a}{}^b e_b, \quad (5.7)$$

где  $\omega_{\alpha a}{}^b(x)$  – некоторые функции на координатной окрестности  $\mathbb{U}$ . Введем 1-формы

$$\omega_a{}^b := dx^\alpha \omega_{\alpha a}{}^b. \quad (5.8)$$

Тогда соотношение (5.7) можно переписать в виде

$$\nabla e_a = \omega_a{}^b \otimes e_b. \quad (5.9)$$

Рассмотрим, как меняются компоненты  $\omega_{\alpha a}{}^b$  при локальном вращении репера

$$e'_a := S_a{}^b e_b, \quad (5.10)$$

где  $S_a{}^b(x) \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  – некоторая матрица преобразования, элементы которой могут зависеть от точки  $x \in \mathbb{U}$ . В новом базисе справедливо равенство

$$\nabla e'_a = \omega'_a{}^b \otimes e'_b.$$

С другой стороны, из определения связности (5.5) следует, что

$$\nabla(S_a{}^b e_b) = dS_a{}^b \otimes e_b + S_a{}^b \nabla e_b.$$

Сравнивая эти выражения, получаем правило преобразования:

$$\omega'_a{}^b = S_a{}^c \omega_c{}^d S^{-1}{}^b{}_d + dS_a{}^c S^{-1}{}^b{}_c, \quad (5.11)$$

или, в компонентах,

$$\omega'_{\alpha a}{}^b = S_a{}^c \omega_{\alpha c}{}^d S^{-1}{}^b{}_d + \partial_\alpha S_a{}^c S^{-1}{}^b{}_c. \quad (5.12)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Это – одна из самых важных формул дифференциальной геометрии, которая широко используется в калибровочных моделях математической физики. Подчеркнем, что преобразование 1-форм  $\omega_a{}^b$  содержит неоднородное слагаемое и поэтому не является тензорным. Следовательно, компоненты  $\omega_{\alpha a}{}^b$  не определяют никакого тензора. Они определяют связность.

**ТЕОРЕМА 5.2.1.** *На любом векторном расслоении  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  существует связность.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство проводится путем явного построения связности с использованием разложения единицы [4], глава 4, теорема 1.1.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задан атлас  $\{\mathbb{U}_i\}$ . Тогда связность в каждой карте задается компонентами  $\omega_{\alpha a}{}^b$ , которые в областях пересечения карт связаны преобразованием (5.12). Верно также и обратное утверждение. Набор компонент  $\omega_{\alpha a}{}^b$ , связанных преобразованием (5.12) в областях пересечения карт, однозначно определяет связность на векторном расслоении.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Компоненты  $dx^\alpha \omega_{\alpha a}{}^b$  называются *локальной формой связности*.

Определив действие связности на репер, можно выписать явное выражение для действия связности на произвольное векторное поле  $V^a e_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ :

$$\nabla V = (dV^a + V^b \omega_b{}^a) \otimes e_a = dx^\alpha (\partial_\alpha V^a + V^b \omega_{\alpha b}{}^a) \otimes e_a, \quad (5.13)$$

где мы воспользовались определением (5.5). Это выражение называется *ковариантной производной* векторного поля. Выражение в скобках,

$$\nabla_\alpha V^a = \partial_\alpha V^a + V^b \omega_{\alpha b}{}^a, \quad (5.14)$$

называется *ковариантной производной компонент* векторного поля.



Замечательным свойством ковариантной производной является то, что при локальном изменении базиса (5.10) ковариантная производная меняется по тензорному закону. Действительно, при изменении базиса (репера) (5.10) компоненты вектора  $V = V^a e_a = V'^a e'_a$  преобразуются по векторному представлению группы  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}^n)$ :

$$V'^a = V^b S^{-1b}_a, \quad S_b^a(x) \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}^n). \quad (5.15)$$

Используя преобразование связности (5.12), нетрудно проверить справедливость следующей формулы преобразования ковариантной производной

$$\nabla'_\alpha V'^a = \partial_\alpha V'^a + V'^b \omega'_{\alpha b}{}^a = (\nabla_\alpha V^b) S^{-1b}_a,$$

где ковариантная производная со штрихом  $\nabla'_\alpha$  берется с локальной формой связности  $\omega'_{\alpha b}{}^a$ . Тем самым ковариантная производная компонент векторного поля преобразуется по векторному представлению группы  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}^n)$ .

Ковариантная производная от компонент векторного поля  $V$  вдоль касательного векторного поля  $X$  (5.6) в компонентах имеет вид

$$\nabla_X V^a = X^\alpha \nabla_\alpha V^a.$$

Рассмотрим некоторые свойства связности. Легко доказывается

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2.1.** Пусть на векторном расслоении  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  задана связность  $\nabla$  и зафиксирована точка базы  $x \in \mathbb{M}$ . Тогда в окрестности точки  $x$  существует такой репер, что компоненты локальной формы связности в этой точке обращаются в нуль  $\omega_{\alpha a}{}^b(x) = 0$ .

Подчеркнем, что в данном предложении речь идет о фиксированной точке многообразия, а не об окрестности.

Продолжим изучение локальной формы связности. Перепишем соотношение (5.11) в виде

$$\omega' S = S \omega + dS, \quad (5.16)$$

где, для краткости, мы опустили векторные индексы, предполагая всюду суммирование “с десяти до четырех” (имеется ввиду расположение чисел на циферблате часов). Внешняя производная от этого равенства имеет вид

$$d\omega' S - \omega' \wedge dS = dS \wedge \omega + S d\omega.$$

Подстановка выражения для  $dS$  из (5.16) приводит к равенству

$$d\omega' - \omega' \wedge \omega' = S(d\omega - \omega \wedge \omega) S^{-1}, \quad (5.17)$$

которое приводит к следующему важному понятию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** 2-форма на  $\mathbb{M}$

$$R_a{}^b := d\omega_a{}^b - \omega_a{}^c \wedge \omega_c{}^b \quad (5.18)$$

называется *локальной формой кривизны* связности  $\nabla$ .

В компонентах локальная форма кривизны имеет вид:

$$R_a{}^b = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta a}{}^b,$$

где

$$R_{\alpha\beta a}{}^b := \partial_\alpha \omega_{\beta a}{}^b - \partial_\beta \omega_{\alpha a}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c \omega_{\beta c}{}^b + \omega_{\beta a}{}^c \omega_{\alpha c}{}^b. \quad (5.19)$$

Локальная форма кривизны – это 2-форма на многообразии  $\mathbb{M}$  со значениями в тензорном произведении  $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$ , где  $\mathbb{V}^*$  – векторное пространство, сопряженное к  $\mathbb{V}$ .

Формула (5.17) показывает, что при локальном преобразовании репера форма кривизны преобразуется по тензорному закону, т.е. однородно, несмотря на то, что преобразование формы связности (5.11) содержит неоднородное слагаемое.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задано два векторных поля  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Тогда значение формы кривизны на этих полях  $R(X, Y)_a{}^b$  определяет линейное преобразование из  $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  в  $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  (эндоморфизм). Если  $V = V^a e_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{E})$ , то

$$R(X, Y) : V^a \rightarrow V^b R(X, Y)_b{}^a.$$

Это отображение обладает очевидными свойствами:

- 1)  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ ;
- 2)  $R(fX, Y) = fR(X, Y)$ ;
- 3)  $R(X, Y)(fV) = fR(X, Y)V$ ;

где  $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2.2.** Пусть на векторном расслоении  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  задана связность  $\nabla$  с локальной формой кривизны  $R$ . Тогда для любых векторных полей  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  справедлива формула

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}. \quad (5.20)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямая проверка в компонентах.

**ТЕОРЕМА 5.2.2** (Тождества Бианки). Форма кривизны  $R$  удовлетворяет тождествам Бианки:

$$dR_a^b + R_a^c \wedge \omega_c^b - \omega_a^c \wedge R_c^b = 0. \quad (5.21)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Внешняя производная от определения кривизны (5.18) равна

$$\begin{aligned} dR &= -d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega \\ &= -(R + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (R + \omega \wedge \omega) \\ &= -R \wedge \omega + \omega \wedge R. \end{aligned}$$

В компонентах тождества Бианки имеют вид:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \partial_\alpha R_{\beta\gamma a}^b = dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma (\omega_{\alpha a}^c R_{\beta\gamma c}^b - R_{\alpha\beta a}^c \omega_{\gamma c}^b)$$

или

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}^b + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha a}^b + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}^b = 0,$$

где

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}^b := \partial_\alpha R_{\beta\gamma a}^b + R_{\beta\gamma a}^c \omega_{\alpha c}^b - \omega_{\alpha a}^c R_{\beta\gamma c}^b.$$

– ковариантная производная от тензора (2-формы) кривизны.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Построенная конструкция имеет важное приложение в калибровочных моделях теории поля. Если матрицы  $S_a^b(x) \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  в (5.15) образуют представление  $\rho$  некоторой полупростой группы Ли  $\mathbb{G}$ , то эта группа называется калибровочной. В этом случае локальная форма связности  $\omega_{\alpha a}^b$  называется *полем Янга–Миллса*, а локальная форма кривизны  $R_{\alpha\beta a}^b$  – *напряженностью* поля Янга–Миллса. Векторные поля  $V = V^a e_a$  называются *полями материи*, преобразующимися по представлению  $\rho$  калибровочной группы. Эти поля называются скалярными полями, так как представляют собой набор функций на многообразии, не меняющихся при преобразовании координат,  $V^a \in C^\infty(\mathbb{M})$  для всех значений индекса  $a$ . Конечно, необходимо также постулировать соответствующие уравнения движения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Рассмотрим сечение векторного расслоения  $\mathbb{E}$ , т.е. векторное поле  $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ . Сечение  $V$  называется *параллельным или горизонтальным* относительно связности  $\nabla$ , если ковариантная производная от него равна нулю

$$\nabla V = 0. \quad (5.22)$$

Нулевое сечение, которое каждой точке базы сопоставляет нулевой вектор, очевидно, всегда является параллельным. В то же время отличное от нуля параллельное сечение в общем случае может отсутствовать. Рассмотрим этот вопрос подробно. Разложим векторное поле по локальному базису:  $V = V^a e_a$ . Тогда уравнение (5.22) эквивалентно пфаффовым уравнениям на компоненты:

$$dV^a + V^b \omega_b^a = 0. \quad (5.23)$$

Для анализа этой системы уравнений введем обозначение для левой части

$$A^a := dV^a + V^b \omega_b^a.$$

Внешняя производная от этой 1-формы равна

$$dA^a = A^b \wedge \omega_b^a + V^b R_b^a.$$

Из этого выражения и теоремы Фробениуса 2.11.4, записанной в терминах дифференциальных форм, следует, что, если кривизна связности равна нулю, то пфафхова система уравнений (5.22) является вполне интегрируемой. В этом случае существует  $n$  линейно независимых параллельных сечений векторного расслоения. Мы видим, что для существования отличных от нуля локальных решений системы уравнений (5.23) локальная форма кривизны данной связности должна обращаться в нуль. Другими словами, равенство нулю формы кривизны является необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений в частных производных (5.23).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана дифференцируемая кривая  $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ . Обозначим касательный вектор к кривой (вектор скорости) через  $u$ . Тогда сечение векторного расслоения  $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  называется *параллельным вдоль кривой*  $\gamma$ , если ковариантная производная от него вдоль  $u$  равна нулю

$$\nabla_u V = 0. \quad (5.24)$$

Касательный вектор к кривой (вектор скорости) имеет вид  $u := \dot{x}^\alpha \partial_\alpha$ . В компонентах условие параллельности сечения вдоль кривой  $\gamma$  сводится к системе уравнений на компоненты сечения

$$\dot{V}^a + \dot{x}^\alpha V^b \omega_{\alpha b}^a = 0. \quad (5.25)$$

Поскольку это – система обыкновенных дифференциальных уравнений, то локально у нее существует единственное решение при заданных начальных данных. Таким образом, если задан вектор  $V_p$  в некоторой точке  $p$  на кривой  $\gamma$ , то он однозначно определяет векторное поле вдоль кривой  $\gamma$ , которое называется *параллельным переносом* вектора  $V_p$  вдоль кривой  $\gamma$ . Очевидно, что параллельный перенос задает изоморфизм слоев векторного расслоения  $\mathbb{E}$  в различных точках кривой  $\gamma$ .

Связность  $\nabla$  на векторном расслоении  $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$  индуцирует связность на сопряженном векторном расслоении  $\mathbb{E}^*(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V}^*)$ , которую мы также обозначим  $\nabla$ . Это делается следующим образом. Пусть заданы сечения  $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$  и  $V^* \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}^*}(\mathbb{M})$ . Тогда каждое сечение  $V^*(x)$  задает поточечное линейное отображение

$$V^*(x) : \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}) \ni V(x) \mapsto (V^*, V) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}).$$

Определим индуцированную связность на сопряженном расслоении  $\mathbb{E}^*$  следующей формулой

$$d(V^*, V) = (V^*, \nabla V) + (\nabla V^*, V), \quad \forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}). \quad (5.26)$$

Найдем выражение для индуцированной связности в компонентах. Пусть  $e^a$  – базис сопряженного векторного пространства  $\mathbb{V}^*$ :  $(e^a, e_b) = \delta_b^a$ . Этот базис называется *корепером*. Тогда подстановка корепера  $e^a$  и репера  $e_b$  в определение (5.26) приводит к равенству

$$\nabla e^a = -e^b \otimes \omega_b^a. \quad (5.27)$$

Отсюда следует выражение для ковариантной производной сечения  $V^* = e^a V_a$  сопряженного расслоения

$$\nabla V^* = e^a \otimes (dV_a - \omega_a^b V_b). \quad (5.28)$$

Эта ковариантная производная отличается знаком у слагаемого со связностью от соответствующего выражения для сечения векторного расслоения (5.13).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть на векторных расслоениях  $\mathbb{E}_1(\mathbb{M}, \pi_1, \mathbb{V}_1)$  и  $\mathbb{E}_2(\mathbb{M}, \pi_2, \mathbb{V}_2)$  с одинаковой базой  $\mathbb{M}$  независимо заданы связности  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$ . Пусть заданы сечения  $V_1 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}_1}(\mathbb{M})$  и  $V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}_2}(\mathbb{M})$ . Тогда на прямой сумме  $\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$  и тензорном произведении  $\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  расслоений определена связность

$$\begin{aligned} \nabla(V_1 \oplus V_2) &= \nabla_1 V_1 \oplus \nabla_2 V_2, \\ \nabla(V_1 \otimes V_2) &= \nabla_1 V_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \nabla_2 V_2, \end{aligned} \quad (5.29)$$

которая называется *индуцированной*.

### 5.3. Аффинная связность

Касательное расслоение  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , является векторным расслоением, типичным слоем которого является векторное пространство  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому определение связности на векторном расслоении без изменений переносится на касательные расслоения. Связность на касательном расслоении называется *аффинной связностью*. Если в касательном пространстве и сопряженном к нему пространстве 1-форм выбрать координатный базис  $\partial_\alpha$  и  $dx^\alpha$ , то формулы для компонент связности (5.7) и (5.27) определяют аффинную связность

$$\begin{aligned}\nabla(\partial_\alpha) &= dx^\beta \otimes \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma \partial_\gamma, \\ \nabla(dx^\alpha) &= -dx^\gamma \otimes dx^\beta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha.\end{aligned}\quad (5.30)$$

У компонент аффинной связности  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$  все индексы являются координатными, и для них принято обозначение  $\Gamma$  вместо  $\omega$ . Формула преобразования компонент аффинной связности при преобразовании координат получается из формулы преобразования компонент связности на векторном расслоении (5.12) после замены матрицы  $S_b{}^a(x)$  на матрицу Якоби  $\partial_\alpha x^{\alpha'}$ . При этом необходимо учесть, что при преобразовании координат преобразуется также базис 1-форм, что приводит к дополнительному общему множителю:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}{}^{\alpha'} = (\partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \partial_{\beta'\gamma'}^2 x^\alpha) \partial_\alpha x^{\alpha'}.\quad (5.31)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Функции  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ , преобразующиеся по правилу (5.31) при преобразовании координат, называются *компонентами локальной формы аффинной связности* или, короче, аффинной связностью на  $\mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Аффинная связность, так же как и связность на произвольном векторном расслоении, определенная в предыдущем разделе, не имеет ничего общего с метрикой. Ее можно задать независимо от метрики, которая может вообще отсутствовать на многообразии.

Аффинная связность  $\nabla$  осуществляет отображение

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X, Y \mapsto \nabla_X Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}),\quad (5.32)$$

где  $\nabla_X Y$  – ковариантная производная от векторного поля  $Y$  вдоль векторного поля  $X$ . Как и в разделе 5.2, можно убедиться, что это отображение обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}\nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \\ \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y, \\ \nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ \nabla_X (fY) &= (Xf)Y + f \nabla_X Y,\end{aligned}\quad (5.33)$$

где  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$  и  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Верно также обратное утверждение: отображение  $\nabla$  со свойствами (5.33) определяет аффинную связность на касательном расслоении. Иногда его принимают в качестве определения аффинной связности.

Связность, определенная на касательном и кокасательном расслоении, индуцирует связность на произвольных тензорных расслоениях с помощью правил (5.29). В компонентах ковариантная производная от тензорных полей будет выписана в следующей главе. Индуцированная ковариантная производная линейна,

$$\nabla(aY \oplus bZ) = a\nabla Y \oplus b\nabla Z, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

где  $Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{M})$  – произвольные тензорные поля. Справедливо правило Лейбница

$$\nabla(Y \otimes Z) = (\nabla Y) \otimes Z + Y \otimes (\nabla Z).\quad (5.34)$$

Нетрудно проверить, что ковариантная производная перестановочна с каждым свертыванием:  $\nabla C = C\nabla$ , где  $C$  – оператор свертки. Кроме того, ковариантная производная вдоль векторного поля  $\nabla_X$  сохраняет тип тензорных полей  $\nabla_X \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M}) \subset \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$ . Таким образом, ковариантная производная вдоль векторного

поля  $\nabla_X$  является дифференцированием в тензорной алгебре, которое было определено в разделе 2.14. В силу теоремы 2.14.1 ковариантная производная вдоль векторного поля  $\nabla_X$  отличается от производной Ли  $L_X$  на дифференцирование, порожденное тензорным полем типа  $(1, 1)$ .

Тензор кривизны (5.19) для аффинной связности (5.30) в компонентах принимает вид

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}{}^\delta - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}{}^\delta + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\alpha\epsilon}{}^\delta. \quad (5.35)$$

Рассмотрим тензор кривизны (5.35), как отображение касательных пространств

$$\mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \times \mathcal{X}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{M})$$

и обозначим

$$R(X, Y, Z) := X^\alpha Y^\beta Z^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \partial_\delta.$$

Тогда нетрудно проверить справедливость следующего тождества:

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

которое является частным случаем предложения 5.2.2. Это соотношение иногда принимают в качестве определения кривизны  $R$  аффинной связности  $\nabla$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** 2-форма со значениями в касательном пространстве,

$$T = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta T_{\alpha\beta}{}^\gamma \partial_\gamma,$$

определенная равенством:

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}). \quad (5.36)$$

называется *тензором кручения*.

Компоненты тензора кручения равны антисимметричной части компонент аффинной связности:

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma. \quad (5.37)$$

Поскольку при преобразовании координат неоднородное слагаемое в (5.31) симметрично по индексам  $\beta', \gamma'$ , то компоненты кручения действительно преобразуются по тензорному закону. Таким образом, аффинная связность определяет два тензора: тензор кривизны и тензор кручения.

## 5.4. Связность на расслоении реперов

Существует тесная взаимосвязь между касательным расслоением и расслоением реперов. Начнем с конструктивного построения расслоения реперов. Предположим, что задано дифференцируемое многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Репером* в точке  $x \in \mathbb{M}$  называется упорядоченный набор объектов  $p = (x, e_1, \dots, e_n) = \{x, e_a\}$ ,  $a = 1, \dots, n$ , где  $\{e_a\}$  – набор линейно независимых касательных векторов в точке  $x$ . Множество всех реперов на  $\mathbb{M}$  обозначим через  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Ниже мы построим дифференцируемую структуру на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ , тем самым превратив множество всех реперов в дифференцируемое многообразие размерности  $\dim \mathbb{L}(\mathbb{M}) = n + n^2$  такое, что естественная проекция

$$\pi(x, e_1, \dots, e_n) := x, \quad (5.38)$$

является гладким отображением  $\mathbb{L}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{M}$ . Тогда  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  называется *расслоением реперов* на  $\mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Забегая вперед, скажем, что расслоение реперов представляет собой главное расслоение  $\mathbb{L}(\mathbb{M}) = \mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}))$  с базой  $\mathbb{M}$ , проекцией  $\pi$  и структурной группой  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ , с которым ассоциировано касательное расслоением  $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ .

Процедура построения дифференцируемой структуры на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  аналогична построению дифференцируемой структуры на тензорных расслоениях. Пусть  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  – некоторая карта с координатами  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Координатный базис касательного расслоения  $\partial_\alpha$  образует координатный репер в каждой точке. Тогда произвольный репер можно разложить по координатному базису:

$$e_a = e^\alpha_a \partial_\alpha. \quad (5.39)$$

По определению, совокупность чисел  $e^\alpha_a$  образует невырожденную  $n \times n$  матрицу, т.е. представляет собой элемент группы  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  в каждой точке  $x \in \mathbb{M}$ . Поэтому можно определить отображение  $\chi : \pi^{-1}(\mathbb{U}) \rightarrow \mathbb{U} \times \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  такое, что для каждой точки  $(x, e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$  и  $x \in \mathbb{U}$ ,  $e^\alpha_a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  имеем равенство

$$\chi(x, e_1, \dots, e_n) = (x, e^\alpha_a),$$

где репер  $e_a$  задан равенством (5.39). Очевидно, что отображение  $\chi$  является взаимно однозначным.

Теперь выберем атлас  $\{\mathbb{U}_i\}$  на  $\mathbb{M}$  с построенными выше отображениями  $\{\chi_i\}$ . Прообразы всех открытых подмножеств топологических произведений  $\mathbb{U}_i \times \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  для отображений  $\chi_i$  образует базу топологии на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . При этом все отображения  $\chi_i$  будут гомеоморфизмами.

Благодаря отображению  $\chi_i$ , прообраз проекции  $\pi^{-1}(\mathbb{U}_i)$  становится координатной окрестностью расслоения реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Пусть в пересекающихся областях  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j \neq \emptyset$  заданы координаты  $x^\alpha$  и  $x^{\alpha'}$  соответственно. Тогда координатами репера  $(x, e_1, \dots, e_n)$  в пересечении  $\mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$  будут наборы из  $n + n^2$  чисел  $\{x^\alpha, e^\beta_a\}$  и  $\{x^{\alpha'}, e^{\beta'}_a\}$ , которые связаны преобразованием

$$\begin{aligned} x^{\alpha'} &= x^\alpha(x), \\ e^{\alpha'}_a &= e^\alpha_a \partial_\alpha x^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Если преобразование координат на  $\mathbb{M}$  класса  $C^\infty$ , то мы получаем бесконечно дифференцируемую структуру на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Таким образом расслоение реперов становится дифференцируемым  $(n + n^2)$ -мерным многообразием класса  $C^\infty$ . При этом естественная проекция  $\pi : \mathbb{L}(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{M}$  является гладким сюръективным отображением.

Сечение расслоения реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  мы будем обозначать  $e_a(x)$ . Его также можно разложить по координатному базису  $e_a(x) = e^\alpha_a(x) \partial_\alpha$ . Мы предполагаем, что все компоненты этого разложения являются гладкими функциями:  $e^\alpha_a(x) \in C^\infty(\mathbb{U})$ . В разделе 5.2 под репером понималось именно сечение расслоения реперов.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В формуле (5.39) компоненты разложения  $e^\alpha_a$  рассматриваются, как координаты (числа) на пространстве главного расслоения  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ , а не как функции на базе  $e^\alpha_a(x)$ . Формулы (5.40) – это также преобразование координат на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . В физической литературе сечение расслоения реперов  $e_a(x)$  принято называть просто репером. Для краткости мы также будем употреблять термин репер для обозначения сечения расслоения реперов там, где это не вызывает двусмысленности.

Отображение  $\chi$  задает локально структуру прямого произведения на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . То есть прообраз  $\pi^{-1}(\mathbb{U})$  диффеоморфен прямому произведению  $\mathbb{U} \times \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Сужение отображения  $\chi$  на каждый слой  $\chi_x : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  является гомоморфизмом групп. Если  $x \in \mathbb{U}_i \cap \mathbb{U}_j$  тогда отображения  $f_{ij}(x) = \chi_{j,x} \circ \chi_{i,x}^{-1}$  (функции перехода) представляют собой автоморфизмы группы  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ . Из (5.40) следует, что преобразование  $\chi_{j,x} \circ \chi_{i,x}^{-1}$  является умножением справа в группе  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  на матрицу Якоби  $J_{ij} \alpha' := \partial x^{\alpha'}_{(j)} / \partial x^\alpha_{(i)}$ . Это значит, что набор матриц Якоби  $J_{ij}$  представляет собой совокупность функций склейки на расслоении реперов.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Типичным слоем расслоения реперов является группа  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ , на которой нет структуры векторного пространства. Поэтому расслоение реперов не является векторным расслоением.

Поскольку каждый слой  $\pi^{-1}(x)$  диффеоморфен и гомоморфен  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ , то он изоморфен группе Ли:  $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ .

Структурная группа  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  естественным образом действует на расслоении реперов и представляет собой группу преобразований  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Пусть  $S_a^b \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ . Тогда правое действие  $r_S$  структурной группы на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  определим следующим образом

$$r_S(x, e_a) = (x, e'_a), \quad \text{где } e'_a := S_a^b e_b.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы записываем правое действие структурной группы в виде матричного умножения слева. В этом нет неоднозначности, так как суммирование всегда проводится по одному нижнему и одному верхнему индексу,  $S_a^b e_b = e_b S_a^b$ . Наши обозначения вызваны принятым правилом суммирования “с десяти до четырех”. Это правило является следствием общепринятой записи  $dx^\alpha \partial_\alpha$ . Другая запись  $\partial_\alpha dx^\alpha$  может вызвать недоразумения. Кроме того, векторы репера принято нумеровать нижним индексом, поскольку координатные векторы  $\partial_\alpha$  образуют координатный репер.

Очевидно, что каждое преобразование  $r_S$  задает диффеоморфизм  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  и сохраняет слои:  $\pi \circ r_S = \pi$ . Действие  $r_S$  называется *правым действием структурной группы*. Если  $S, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ , то

$$r_{ST} = r_S \circ r_T.$$

Действие группы преобразований  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  свободно, т.е. любой элемент группы, отличный от единичного, перемещает все точки многообразия  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ .

Обозначим матрицу, обратную к реперу  $e^\alpha_a$ , через  $e^\beta_b$ :

$$e^\alpha_a e^\beta_a = \delta_a^b, \quad e^\alpha_a e^\beta_a = \delta_\alpha^\beta.$$

Тогда при преобразовании координат (5.40) на пространстве расслоения  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  она преобразуется, как ковекторное поле

$$e_{\alpha'}^a = \partial_{\alpha'} x^\alpha e_\alpha^a.$$

Отсюда следует, что 1-формы (корепер)

$$e^a = dx^\alpha e_\alpha^a \quad (5.41)$$

не зависят от выбора координат на  $\mathbb{M}$ . Это значит, что  $e^a$  являются дифференциальными 1-формами, заданными в каждой координатной окрестности согласованным образом и, следовательно, определяющими некоторую 1-форму на всем пространстве расслоения  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Напомним, что числа  $e_\alpha^a$  в (5.41) рассматриваются в качестве координат на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Поэтому  $e_\alpha^a$  представляют собой набор хорошо определенных функций на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ , поскольку  $\det e_\alpha^a \neq 0$ .

Пфафова система уравнений

$$e^a = 0 \quad (5.42)$$

определяет  $n^2$ -мерное касательное подпространство  $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$  в касательном пространстве  $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$  к каждой точке расслоения  $p = (x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ , которое называется *вертикальным пространством*. Система уравнений (5.42) в каждой координатной окрестности эквивалентна системе уравнений

$$dx^\alpha = 0.$$

Эта система уравнений является вполне интегрируемой, и ее максимальное интегральное многообразие задается уравнениями

$$x^\alpha = \text{const},$$

т.е. является слоем  $\pi^{-1}(x)$  в точке  $x \in \mathbb{M}$ . Это значит, что вертикальные подпространства являются касательными пространствами к слоям.

Векторное поле на пространстве расслоения  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{L})$  в компонентах имеет вид

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + X^a \frac{\partial}{\partial e^\alpha_a}.$$

Поэтому векторное поле  $Y$  принадлежит вертикальному подпространству  $Y \in \mathbb{V}_p(\mathbb{L})$  в каждой точке  $p = (x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$  тогда и только тогда, когда оно имеет компоненты только вдоль координат слоя:

$$Y = Y^a \frac{\partial}{\partial e^\alpha_a}$$

Дифференциал  $\pi_*$  проекции (5.38) отображает касательные пространства  $\mathbb{T}_p(\mathbb{L}) \rightarrow \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ . Очевидно, что все векторы из вертикального подпространства  $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$  отображаются в нулевой вектор  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ . Верно и обратное утверждение. Если какой-либо вектор из  $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$  отображается в нулевой вектор, то он принадлежит вертикальному подпространству. Это значит, что вертикальные подпространства являются ядром дифференциала проекции  $\pi_*$ .

Пусть на базе  $\mathbb{M}$  задана аффинная связность  $\Gamma$  или, что эквивалентно, 1-формы  $\Gamma_\alpha^\beta = dx^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta$ . Тогда ковариантный дифференциал векторного поля  $e_a(x)$  равен

$$De_a = (de^\alpha_a + e^\beta_a \Gamma_\beta^\alpha) \otimes \partial_\alpha.$$

Если рассматривать  $e^\alpha_a$ , как координаты на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  (что мы и делаем), то выражение

$$De^\alpha_a = de^\alpha_a + e^\beta_a \Gamma_\beta^\alpha$$

является 1-формой на координатной окрестности  $\pi^{-1}(\mathbb{U})$  расслоения реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Поскольку 1-форма  $De^\alpha_a$  при преобразовании координат является вектором по индексу  $\alpha$ , то 1-форма

$$\omega_a^b = e_\alpha^b De^\alpha_a \quad (5.43)$$

не зависит от выбора системы координат и, значит, задает дифференциальную 1-форму на всем расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . 1-форма  $\omega_a^b$  называется *формой линейной связности* на расслоении реперов. Так как  $(x^\alpha, e^\beta_a)$  являются координатами на  $\mathbb{L}(\mathbb{U})$ , то  $(dx^\alpha, de^\beta_a)$  представляют собой координатный базис кокасательного пространства к  $\mathbb{L}(\mathbb{U})$ . Поэтому  $(x^\alpha, e^\beta_a, dx^\alpha, de^\beta_a)$  задают систему координат кокасательного расслоения  $\mathbb{T}^*(\mathbb{L})$  к  $\mathbb{L}(\mathbb{U})$ . Теперь  $e^\alpha$  и  $\omega_a^b$  задают  $n + n^2$  дифференциальных 1-форм на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{U})$ . В каждой координатной окрестности  $\pi^{-1}(\mathbb{U})$  их можно выразить в виде линейной комбинации 1-форм  $dx^\alpha$  и  $de^\alpha_a$ , и наоборот. Поскольку 1-формы  $e^\alpha$  и  $\omega_a^b$  линейно независимы, то они задают поле корепера на всем пространстве  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Дуальный к нему базис определяет поле репера на пространстве расслоения  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  глобально.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В общем случае сечение расслоения реперов  $e_a(x)$  может не существовать глобально. Например, на двумерной сфере  $\mathbb{S}^2$  не существует непрерывного векторного поля, которое не обращается в нуль ни в одной точке (теорема 10.2.1). Следовательно, глобального сечения  $\mathbb{L}(\mathbb{S}^2)$  не существует. В то же время, поскольку на произвольном многообразии  $\mathbb{M}$  существует аффинная связность, то на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  всегда существует корепер  $e^\alpha$  глобально. В этом смысле многообразие расслоения реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  устроено проще, чем база  $\mathbb{M}$ .

В локальной системе координат из определения 1-форм  $e^\alpha$  и  $\omega_a^b$  следуют равенства

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= e^\alpha e^\alpha_a, \\ de^\alpha_a &= -e^\beta_a \Gamma_\beta^\alpha + \omega_a^b e^\alpha_b. \end{aligned}$$

Здесь, по-прежнему, все формы рассматриваются на пространстве главного расслоения  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Взятие внешней производной от равенств (5.41) и (5.43) приводит к *структурным уравнениям* для аффинной связности:

$$de^\alpha - e^b \wedge \omega_b^\alpha = \frac{1}{2} e^b \wedge e^c T_{bc}^\alpha, \quad (5.44)$$

$$d\omega_a^b - \omega_a^c \wedge \omega_c^b = \frac{1}{2} e^c \wedge e^d R_{cda}^b, \quad (5.45)$$

где  $T_{bc}^\alpha := e^\beta_b e^\gamma_c T_{\beta\gamma}^\alpha e_\alpha^a$  и  $R_{cda}^b := e^\gamma_c e^\delta_d e^\alpha_a R_{\gamma\delta\alpha}^\beta e_\beta^b$  – компоненты тензоров кручения и кривизны. Компоненты тензоров кручения  $T_{\beta\gamma}^\alpha$  и кривизны  $R_{\gamma\delta\alpha}^\beta$  в координатном базисе были определены ранее (5.37) и (5.35). Введем обозначения для 2-форм кручения и кривизны:

$$\begin{aligned} T^a &:= \frac{1}{2} e^b \wedge e^c T_{bc}^a, \\ R_a^b &:= \frac{1}{2} e^c \wedge e^d R_{cda}^b. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Взятие внешней производной от уравнений структуры (5.44), (5.45) приводит к *тождествам Бианки* для аффинной связности:

$$\begin{aligned} dT^a + T^b \wedge \omega_b^a &= e^b \wedge R_b^a, \\ dR_a^b + R_a^c \wedge \omega_c^b - \omega_a^c \wedge R_c^b &= 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Второе из этих тождеств совпадает с полученной ранее формулой (5.21). В компонентах тождества Бианки будут подробно рассмотрены в разделе 6.10.



ЗАМЕЧАНИЕ. Структурные уравнения (5.44) и (5.45) часто принимают за определение тензоров кручения и кривизны.

В координатном базисе  $e^a \mapsto dx^\alpha$ ,  $\omega_a^b \mapsto \Gamma_\alpha^\beta := dx^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta$ , и структурные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} -dx^\beta \wedge \Gamma_\beta^\alpha &= \frac{1}{2} dx^\beta \wedge dx^\gamma T_{\beta\gamma}^\alpha, \\ d\Gamma_\alpha^\beta - \Gamma_\alpha^\gamma \wedge \Gamma_\gamma^\beta &= \frac{1}{2} dx^\gamma \wedge dx^\delta R_{\gamma\delta\alpha}^\beta, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где в правых частях стоят тензоры кручения  $T_{\beta\gamma}^\alpha$  и кривизны  $R_{\gamma\delta\alpha}^\beta$  и учтено равенство  $ddx^\alpha = 0$ .

ТЕОРЕМА 5.4.1. Пусть на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  заданы  $n^2$  дифференциальных 1-форм  $\omega_a^b$ , которые вместе с корепером  $e^a$  удовлетворяют структурным уравнениям (5.44), (5.45), где  $T_{bc}^a$  и  $R_{cda}^b$  – некоторые функции, определенные на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Тогда существует аффинная связность  $\nabla$  такая, что выполнено равенство (5.43).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См., например, [4], глава 4, теорема 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. От компонент, определяющих кручение и кривизну, нет надобности требовать выполнения тождеств Бианки, так как они являются следствием структурных уравнений, выполнение которых является условием теоремы.

Ранее было отмечено, что пфафхова система уравнений  $e^a = 0$  определяет распределение вертикальных подпространств  $\mathbb{V}_p(\mathbb{L}) \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{L})$  на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . В каждой точке  $(x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$  система пфаффовых уравнений

$$\omega_a^b = 0 \quad (5.49)$$

определяет  $n$ -мерное касательное подпространство  $\mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \subset \mathbb{T}_p(\mathbb{L})$ , которое называется горизонтальным. Таким образом, мы имеем распределение горизонтальных подпространств  $\mathbb{H}(\mathbb{L})$ , однозначно определенное аффинной связностью  $\nabla$  на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . Оно имеет следующие свойства.

ТЕОРЕМА 5.4.2. Пусть задано расслоение реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  и на базе  $\mathbb{M}$  определена аффинная связность  $\nabla$ . Тогда определены распределения вертикальных  $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$  и горизонтальных  $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$  подпространств, которые удовлетворяют свойствам:

1) в каждой точке  $(x, e) \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$  касательное пространство  $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$  разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{T}_p(\mathbb{L}) = \mathbb{V}_p(\mathbb{L}) \oplus \mathbb{H}_p(\mathbb{L}); \quad (5.50)$$

При этом образ горизонтального пространства  $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$  при проекции  $\pi$  изоморфен касательному пространству к базе  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ ;

2) горизонтальные пространства инвариантны относительно правого действия группы преобразований  $r_S$ ,  $S \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ ; т.е.

$$(r_S)_* \mathbb{H}_p(\mathbb{L}) = \mathbb{H}_{r_S(x,p)}(\mathbb{L}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем свойство 1). Поскольку сумма размерностей горизонтального  $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$  и вертикального  $\mathbb{V}_p(\mathbb{L})$  подпространств равна размерности касательного пространства  $\mathbb{T}_p(\mathbb{L})$ , то достаточно доказать, что  $\mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \cap \mathbb{V}_p(\mathbb{L}) = \emptyset$ . От противного. Пусть  $X \in \mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \cap \mathbb{V}_p(\mathbb{L})$ . Тогда, по определению, выполнены уравнения

$$e^a(X) = 0, \quad \omega_a^b(X) = 0.$$

Поскольку 1-формы  $\{e^a, \omega_b^c\}$  образуют базис кореперов на  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ , то  $X = 0$ . Это доказывает разложение (5.50). Поскольку проекция  $\pi$  является гладким и сюръективным отображением, то ее дифференциал  $\pi_*$  является сюръективным гомоморфизмом. Поскольку  $\pi_*(\mathbb{V}_p(\mathbb{L})) = 0$ , то отображение  $\pi_* : \mathbb{H}_p(\mathbb{L}) \rightarrow \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  является изоморфизмом.

Для доказательства свойства 2) необходимо проверить, что правое действие группы преобразований на 1-формы  $\omega_a^b$  имеет вид

$$(r_S)^* \omega_a^b = S_a^c \omega_c^d S_d^{-1b}.$$

Действительно, это следует из определения (5.43) и равенства

$$de'^\alpha_a = \frac{\partial e'^\alpha_a}{\partial e^\beta_b} de^\beta_b = S_a^b de^\alpha_b.$$

Поскольку распределение горизонтальных подпространств  $\mathbb{H}(\mathbb{L})$  является аннигилятором подпространства  $\omega_a^b$ , то из правила действия левых преобразований следует свойство 2).

Верно также обратное утверждение. Если в касательном расслоении  $\mathbb{T}(\mathbb{L})$  задано дифференцируемое  $n$ -мерное распределение горизонтальных подпространств  $\mathbb{H}$ , удовлетворяющих свойствам 1) и 2), то на  $\mathbb{M}$  существует аффинная связность  $\nabla$  такая, что  $\mathbb{H}$  является распределением горизонтальных подпространств расслоения реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  для связности  $\nabla$ . Поэтому, с точки зрения расслоения реперов, задание аффинной связности эквивалентно заданию распределения горизонтальных подпространств со свойствами 1), 2). Далее эти свойства лягут в основу определения связности на главных расслоениях общего вида.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Поскольку аффинная связность  $\nabla$  зависит дифференцируемо от  $p \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ , то распределение горизонтальных подпространств  $\mathbb{H}_p(\mathbb{L})$  также дифференцируемо зависит от точки  $p$ .

В формулах (5.44)–(5.47) все формы рассматривались на пространстве расслоения  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ . В частности, компоненты тензоров кручения  $T_{bc}^a$  и кривизны  $R_{cda}^b$  в структурных уравнениях (5.44) и (5.45) явно зависят от координат слоя  $e^\alpha_a$ . Эти формы можно спустить на базу с помощью отображения дифференциальных форм.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Рассмотрим сечение  $\sigma : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{M})$ , которому в локальных координатах соответствует репер  $e^\alpha_a(x)$ . Тогда дифференциал сечения  $\sigma_*$  отображает касательные векторы к базе в касательные векторы к сечению:

$$\mathcal{X}(\mathbb{M}) \ni X = X^\alpha \partial_\alpha \mapsto \sigma_* X = X^\alpha \partial_\alpha + X^\beta \partial_\beta e^\alpha_a \frac{\partial}{\partial e^\alpha_a} \in \mathcal{X}(\sigma(\mathbb{M})).$$

Следовательно, отображение дифференциальных форм  $\sigma^*$  спускает форму связности для каждого сечения на базу:

$$\sigma^* \omega_a^b := dx^\alpha \omega_{\alpha a}^b = dx^\alpha e_\gamma^b (\partial_\alpha e^\gamma_a + e^\beta_a \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma). \quad (5.51)$$

Форма  $dx^\alpha \omega_{\alpha a}^b$  называется *локальной формой связности* на расслоении реперов. Она получается из формы связности (5.43) простой заменой:  $e^\alpha_a \mapsto e^\alpha_a(x)$  и  $de^\alpha_a \mapsto dx^\beta \partial_\beta e^\alpha_a$ . Аналогично спускаются на базу 2-формы кручения и кривизны (5.46):

$$T^a = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta T_{\alpha\beta}^a = de^a - e^b \wedge \omega_b^a, \quad (5.52)$$

$$R_a^b = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta a}^b = d\omega_a^b - \omega_a^c \wedge \omega_c^b, \quad (5.53)$$

где введены 1-формы локальной связности и корепера:

$$\omega_a^b = dx^\alpha \omega_{\alpha a}^b, \quad e^a = dx^\alpha e_\alpha^a, \quad (5.54)$$

и

$$T_{\alpha\beta}^a = \partial_\alpha e_\beta^a - e_\alpha^b \omega_{\beta b}^a - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (5.55)$$

$$R_{\alpha\beta a}^b = \partial_\alpha \omega_{\beta a}^b - \omega_{\alpha a}^c \omega_{\beta c}^b - (\alpha \leftrightarrow \beta). \quad (5.56)$$

2-формы (5.52) и (5.53) называются *локальными формами* кручения и кривизны.

В приложениях выражения (5.55) и (5.56) часто называют тензорами кручения и кривизны.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для локальных форм мы сохранили прежние обозначения, чтобы не вводить новых. Фактически, в приложениях при проведении вычислений используются локальные формы, заданные на базе  $\mathbb{M}$ , а не на расслоении реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ .

Тождества Бианки (5.47) после спуска на базу имеют точно такой же вид, только вместо компонент корепера  $e_\alpha^a$  надо рассматривать сечение  $e_\alpha^a(x)$ , вместо формы связности  $\omega_a^b$ , определенную в (5.43), – локальную форму связности  $dx^\alpha \omega_{\alpha a}^b(x)$  и вместо форм кручения и кривизны – соответствующие им локальные формы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Поля  $e_\alpha^a(x)$  и  $\omega_{\alpha a}^b(x)$ , заданные на  $\mathbb{M}$ , в аффинной геометрии называются *переменными Картана*.

Переменные Картана часто используются в приложениях, так как позволяют упростить вычисления. Формулы (5.55) и (5.53) дают выражение для тензоров кручения и кривизны в переменных Картана.

## 5.5. Критерий локальной тривиальности

Тензоры кривизны и кручения играют исключительно важную роль в аффинной геометрии. Ниже мы покажем, что их обращение в нуль является критерием локальной тривиальности связности и существования такой системы координат, в которой репер совпадает с координатным базисом касательного пространства.

Рассмотрим расслоение реперов  $\mathbb{L}(\mathbb{M})$  с заданной связностью  $\nabla$  и координатную окрестность  $\mathbb{U}$  произвольной точки базы  $x \in \mathbb{M}$ . Пусть задано некоторое локальное сечение  $\sigma : \mathbb{M} \supset \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{L}$ . Тогда в области  $\mathbb{U}$  определен репер  $e_\alpha^a(x)$  и компоненты локальной формы связности  $\omega_{\alpha a}^b(x)$ . Кроме того, определены тензоры кривизны  $R_{\alpha\beta a}^b$  и кручения  $T_{\alpha\beta}^a$ , которые заданы формулами (5.55) и (5.56).

При локальном вращении репера (5.10) с матрицей  $S(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  компоненты линейной связности преобразуются по правилу (5.11). Поставим следующий вопрос: “Существует ли такая матрица вращений  $S$ , что после преобразования компоненты локальной формы связности  $\omega'_{\alpha a}^b$  обратятся в нуль в некоторой окрестности точки  $x$ ?”. Ответ на этот вопрос дает следующая

**ТЕОРЕМА 5.5.1.** *Пусть в некоторой окрестности  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  задана локальная форма аффинной связности. Тогда равенство нулю тензора кривизны  $R_{\alpha\beta a}^b = 0$  в некоторой (односвязной) окрестности  $\mathbb{U}$  произвольной точки  $x \in \mathbb{M}$  является необходимым и достаточным условием существования такой матрицы  $S(x)$ , что после локального вращения репера (5.10) компоненты локальной формы связности обратятся в нуль в, возможно, меньшей окрестности точки  $x$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если после вращения  $\omega'_{\alpha a}^b = 0$ , то равенство (5.11) после умножения справа на  $S$  приводит к уравнению на компоненты матрицы вращений:

$$\partial_\alpha S_a^b = -S_a^c \omega_{\alpha c}^b. \quad (5.57)$$

Для того, чтобы получить критерий локальной разрешимости этой системы уравнений, ее нужно продифференцировать по  $x^\beta$  и антисимметризовать по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ . После исключения первых производных от матрицы  $S$  в правой части с помощью исходного уравнения, получим равенство

$$(\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta)S = S(\partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta + \omega_\beta \omega_\alpha),$$

где мы, для краткости, опустили матричные индексы. Сравнивая это равенство с определением компонент локальной формы кривизны (5.55), находим искомый критерий.

На этом этапе можно забыть о существовании репера. Достаточно считать, что на  $\mathbb{U}$  заданы только компоненты локальной формы связности  $\omega_{\alpha a}^b(x)$  с соответствующим правилом преобразования. Про метрику можно вообще не вспоминать: она просто отсутствует на многообразии  $\mathbb{M}$ .

При нулевой кривизне зафиксируем матрицу вращений таким образом, что  $\omega_{\alpha a}^b = 0$ . Тогда после локального поворота компоненты локальной формы связности станут нетривиальными в соответствии с правилом преобразования (5.11). Это доказывает следующее утверждение.

**СЛЕДСТВИЕ.** *Пусть тензор кривизны для некоторой линейной связности обращается в нуль в некоторой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ . Тогда, возможно, в меньшей области существует такая матрица вращений  $S(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , что компоненты связности представимы в следующем виде*

$$\omega_{\alpha a}^b = \partial_\alpha S_a^c S^{-1}_c{}^b. \quad (5.58)$$

Такая связность называется чистой калибровкой и является плоской, так как ее тензор кривизны тождественно равен нулю.

Теперь вернемся к вопросу, поставленному в начале раздела. Рассмотрим область  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  с координатами  $x^a$ . Если в этой области существует такая система координат  $y^a(x)$ , что соответствующий координатный базис касательного пространства совпадает с заданным репером, то должно выполняться равенство

$$\partial_\alpha y^a = e_\alpha^a. \quad (5.59)$$

Это – система уравнений на функции перехода к новой системе координат  $y^a(x)$ . Критерием ее разрешимости являются условия

$$\partial_\alpha e_\beta^a - \partial_\beta e_\alpha^a = 0. \quad (5.60)$$

Левая часть этого равенства совпадает с тензором кручения (5.56) при нулевой связности  $\omega_{\alpha a}^b = 0$ . Поэтому справедлива

**ТЕОРЕМА 5.5.2.** Пусть на  $M$  заданы репер и локальная форма аффинной связности. Тогда одновременное обращение в нуль тензоров кривизны и кручения в некоторой области  $U \subset M$  является необходимым и достаточным условием существования в, возможно, меньшей области такой матрицы  $S(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  и системы координат  $y^a(x)$ , что компоненты связности обратятся в нуль,  $\omega_{\alpha a}{}^b = 0$ , и репер совпадет с координатным базисом касательного пространства,  $e_{\alpha}{}^a = \partial_{\alpha} y^a$ .

Подчеркнем, что на многообразии  $M$  не предполагается наличие какой либо метрики.

Теперь предположим дополнительно, что на  $M$  задана метрика с компонентами  $g_{\alpha\beta}$ . Для определенности, предположим, что метрика положительно определена, т.е. риманова. В такой ситуации в приложениях рассматривают, как правило, не всю совокупность реперов, а их подмножество, которое определяется уравнением

$$g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}{}^a e_{\beta}{}^b \delta_{ab}, \quad (5.61)$$

где  $\delta_{ab} = \text{diag}(+\dots+)$  – евклидова метрика. Решения данного квадратного уравнения относительно репера существуют и определены с точностью до локальных  $\mathbb{O}(n)$  вращений. То есть, если репер  $e_{\alpha}{}^a$  удовлетворяет уравнению (5.61), то повернутый репер  $e'_{\alpha}{}^a = e_{\alpha}{}^b S_b{}^a$ , где  $S \in \mathbb{O}(n)$  – произвольная матрица ортогональных вращений из полной группы  $\mathbb{O}(n)$ , также удовлетворяет данному уравнению. Поскольку произвол в выборе репера теперь сужен до подгруппы вращений  $\mathbb{O}(n) \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , то естественно рассматривать не полную линейную связность, а  $\mathbb{S}\mathbb{O}(n)$ -связность, которая удовлетворяет условию

$$\nabla_{\alpha} \delta_{ab} = -\omega_{\alpha a}{}^c \delta_{cb} - \omega_{\alpha b}{}^c \delta_{ac} = 0. \quad (5.62)$$

То есть компоненты связности  $\omega_{\alpha a}{}^b$  принимают значения в алгебре вращений  $\mathfrak{so}(n)$ . Эта связность является метрической, поскольку ковариантная производная от метрики (5.62) равна нулю, а соответствующая геометрия – геометрией Римана–Картана.

Напомним, что алгебры Ли собственных вращений  $\mathfrak{so}(n)$  и полной группы вращений  $\mathfrak{o}(n)$  изоморфны. Поэтому  $\mathbb{S}\mathbb{O}(n)$ - и  $\mathbb{O}(n)$ -связности – это одно и то же.

Согласно теореме 5.5.2 при нулевой кривизне и кручении существует такая матрица вращений и система координат  $y^a$ , что будет выполнено равенство

$$g_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} y^a \partial_{\beta} y^b \delta_{ab}.$$

Это означает, что существует такая система координат в которой метрика является локально евклидовой. Тем самым доказана

**ТЕОРЕМА 5.5.3.** Пусть на многообразии  $M$  задана геометрия Римана–Картана, т.е. в произвольной области определены компоненты репера  $e_{\alpha}{}^a$ , метрики  $g_{\alpha\beta} = e_{\alpha}{}^a e_{\beta}{}^b \delta_{ab}$  и  $\mathbb{S}\mathbb{O}(n)$ -связности  $\omega_{\alpha a}{}^b$ . Если тензоры кривизны и кручения в некоторой области  $U \subset M$  обращаются в нуль, то, возможно, в меньшей области существует такая система координат  $y^a(x)$ , в которой метрика является евклидовой,  $g_{ab} = \delta_{ab}$ . При этом локальное лоренцево вращение можно подобрать таким образом, что  $e_{\alpha}{}^a = \delta_{\alpha}^a$  и  $\omega_{\alpha a}{}^b = 0$ .

Если выбрать произвольный репер для заданной метрики  $g_{\alpha\beta}$ , то условия интегрируемости (5.60) в общем случае выполнены не будут. Однако равенство нулю тензора кривизны гарантирует существование такого вращения, что после поворота репера условия интегрируемости окажутся выполнены. Этот повернутый репер и определит функции перехода  $y^a(x)$  к нужной системе координат.

В настоящем разделе мы подчеркивали, что рассматриваются только области, гомеоморфные шару. В дальнейшем мы увидим, что для областей общего вида, в частности, неодносвязных, приведенные выше утверждения в общем случае не имеют места.

В римановой геометрии кручение равно нулю с самого начала. И, конечно, теорема о приведении метрики к локально евклидову виду верна и в этом случае. Достаточно потребовать равенства нулю только тензора кривизны.

В доказательстве теоремы 5.5.3 сигнатура метрики никак не использовалась. Поэтому сформулированное утверждение верно для метрик произвольной сигнатуры. Например, в равенстве (5.61) евклидову метрику можно заменить на метрику Лоренца  $\eta_{ab}$ . Тогда вместо  $\mathbb{S}\mathbb{O}(n)$ -связности следует рассматривать лоренцеву  $\mathbb{S}\mathbb{O}(1, n-1)$ -связность, и все предыдущее построение остается в силе.

## 6. Аффинная геометрия. Локальное рассмотрение

В современной дифференциальной геометрии принят бескоординатный язык. Это оправдано тем, что все геометрические объекты, например, тензорные поля, являются понятиями, которые не зависят от выбора системы координат. Этот язык удобен для определений и формулировки утверждений. Однако, он абстрактен, и требуется немалое время для его усвоения. Кроме того, при проведении вычислений, особенно в моделях математической физики, используется координатный подход, в котором геометрические объекты отождествляются с набором своих компонент. Этот язык действительно необходим для проведения вычислений и является более наглядным. В настоящем разделе мы дадим определения и опишем основные свойства объектов аффинной геометрии в компонентах. По сути дела это означает, что мы рассматриваем топологически тривиальное многообразие  $\mathbb{M}$ , которое диффеоморфно евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$  и покрывается одной картой. Это не значит, что координатный подход является менее строгим. Как только установлено, что некоторый объект или утверждение не зависят от выбора системы координат в  $\mathbb{R}^n$ , то все сказанное сразу переносится на нетривиальные многообразия.

### 6.1. Локальное определение аффинной связности

Ввиду важности понятия аффинной связности покажем, как она вводится локально без обращения к общей теории связностей в векторных расслоениях. Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , в некоторой карте заданы: функция  $f \in C^1(\mathbb{M})$ , дифференцируемое векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и дифференцируемая 1-форма  $A = dx^\alpha A_\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ . Пусть на этом многообразии задана также аффинная связность  $\nabla$ . Тогда в компонентах ковариантные производные имеют вид:

$$\nabla_\alpha f = \partial_\alpha f \quad (6.1)$$

$$\nabla_\alpha X^\beta = \partial_\alpha X^\beta + X^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta, \quad (6.2)$$

$$\nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A_\gamma, \quad (6.3)$$

где  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(x)$  – компоненты локальной формы аффинной связности, которые, мы предполагаем, являются достаточно гладкими функциями от координат  $x^\alpha$ . То есть ковариантная производная для скалярного поля совпадает с обычной частной производной, а для векторного поля и 1-формы появляются дополнительные слагаемые, линейные по компонентам. Отметим, что дополнительные слагаемые в (6.2) и (6.3) имеют разные знаки.

В дальнейшем мы часто будем обозначать аффинную связность  $\nabla$  буквой  $\Gamma$  как это принято в римановой геометрии.

Покажем, что ковариантная производная от компонент векторного поля преобразуется, как тензор. Рассмотрим преобразование координат. Тогда компоненты векторного поля преобразуется по правилу (2.11). Дифференцируя соотношение (2.11) по  $x^{\beta'}$ , получаем два слагаемых

$$\partial_{\beta'} X^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^\beta \partial_\beta X^\alpha \partial_\alpha x^{\alpha'} + \partial_{\beta'} x^\beta X^\alpha \partial_{\beta\alpha}^2 x^{\alpha'}. \quad (6.4)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует тензорному закону преобразования для производной от векторного поля, в то время как второе слагаемое этот закон нарушает.

Чтобы получить тензорный закон преобразования в общем случае вводится понятие ковариантной производной, которая содержит дополнительное слагаемое в выражении (6.2). Если потребовать, чтобы ковариантная производная после преобразования координат имела тот же вид с некоторыми новыми компонентами  $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}$ ,

$$\partial_{\beta'} X^{\alpha'} + \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} X^{\gamma'} = \partial_{\beta'} x^\beta (\partial_\beta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma) \partial_\alpha x^{\alpha'},$$

то с учетом уравнения (6.4) получим следующий закон преобразования компонент аффинной связности:

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \partial_\alpha x^{\alpha'} - \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\gamma'} x^\gamma \partial_{\beta\gamma}^2 x^{\alpha'}, \quad (6.5)$$

С учетом тождества

$$\partial_\alpha(\partial_\beta x^{\beta'} \partial_{\beta'} x^\gamma) = \partial_\alpha \delta_\gamma^\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\alpha\beta}^2 x^{\beta'} = -\partial_\alpha x^{\alpha'} \partial_\beta x^{\beta'} \partial_{\alpha'\beta'}^2 x^\gamma \partial_\gamma x^{\beta'}$$

закон преобразования (6.5) можно переписать в эквивалентной форме (5.31), отличающейся вторым слагаемым.

Закон преобразования компонент аффинной связности отличается от тензорного закона наличием неоднородных слагаемых в (5.31) и (6.5), которые содержат вторые производные от функций перехода. Если ограничить класс допустимых преобразований координат аффинными (линейными неоднородными), то аффинная связность будет преобразовываться как тензор.

Сами по себе компоненты аффинной связности не являются компонентами тензора, однако они позволяют строить новые тензорные поля из заданных с помощью ковариантного дифференцирования. Собственно, название “ковариантное” и отражает это обстоятельство. Нетрудно проверить, что ковариантная производная от 1-формы (6.3) является тензорным полем второго ранга типа (0, 2).

Ковариантное дифференцирование было продолжено на тензоры произвольного ранга с помощью формул (5.29). В компонентах это выглядит следующим образом. Помимо обычной частной производной в ковариантную производную входят слагаемые с компонентами аффинной связности со знаком плюс для каждого контравариантного и минус для каждого ковариантного индекса:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} &= \partial_\alpha K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} - \Gamma_{\alpha\beta_1}^\delta K_{\delta\beta_2 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} - \dots - \Gamma_{\alpha\beta_s}^\delta K_{\beta_1 \dots \beta_{s-1}\delta}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} + \\ &+ K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\delta\gamma_2 \dots \gamma_r} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma_1} + \dots + K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_{r-1}\delta} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma_r}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6.1.1. Для тензора второго ранга типа (1, 1) ковариантная производная имеет вид

$$\nabla_\alpha K_\beta^\gamma = \partial_\alpha K_\beta^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta K_\delta^\gamma + \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma K_\beta^\delta. \quad (6.6)$$

В частном случае, ковариантная производная от символа Кронекера (2.57) тождественно равна нулю

$$\nabla_\alpha \delta_\beta^\gamma = 0,$$

поскольку равна нулю частная производная  $\partial_\alpha \delta_\beta^\gamma = 0$ , а слагаемые со связностью сокращаются. То есть символ Кронекера ковариантно постоянен (параллелен) относительно произвольной аффинной связности.

Можно показать с помощью прямых вычислений (если доказательство в общем виде, которое было дано ранее, кого то не убеждает), что определенная таким образом ковариантная производная от тензора произвольного типа  $(r, s)$  действительно дает тензор типа  $(r, s + 1)$ .

Поскольку произвольный тензор типа  $(r, s)$  является полилинейным отображением (2.59), то вид ковариантной производной от тензорного поля в компонентах однозначно определяется четырьмя условиями: видом ковариантной производной от функции, векторного и ковекторного полей (6.1)–(6.3) и правилом Лейбница (5.34).

ПРИМЕР 6.1.2. Найдём вид ковариантной производной от тензорного поля второго ранга  $K_\alpha^\beta$ . Ковариантная производная от функции  $K_\gamma^\beta X^\gamma A_\beta \in C^\infty(\mathbb{M})$ , где  $X^\gamma \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и  $A_\beta \in \Lambda_1(\mathbb{M})$  – произвольные векторное и ковекторное поля, совпадает с обычной:

$$\nabla_\alpha (K_\gamma^\beta X^\gamma A_\beta) = \partial_\alpha (K_\gamma^\beta X^\gamma A_\beta).$$

Воспользовавшись правилом Лейбница и видом ковариантных производных (6.2), (6.3), получим формулу для ковариантной производной от тензора второго ранга (6.6).

Ковариантная производная коммутрует с произвольным свертыванием:

$$\nabla_\alpha (\delta_{\alpha_i}^{\beta_j} K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}) = \delta_{\alpha_i}^{\beta_j} \nabla_\alpha K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s.$$

что следует из ковариантного постоянства символа Кронекера. В частном случае,

$$\partial_\alpha (X^\beta A_\beta) = \nabla_\alpha (X^\beta A_\beta) = (\nabla_\alpha X^\beta) A_\beta + X^\beta (\nabla_\alpha A_\beta).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольному векторному полю можно поставить в соответствие бесконечно малую величину

$$DX^\alpha = dx^\beta \nabla_\beta X^\alpha = dx^\beta (\partial_\beta X^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma), \quad (6.7)$$

которая называется *ковариантным дифференциалом*. Аналогично определяется ковариантный дифференциал для произвольного тензорного поля.

Для функции ковариантный дифференциал совпадает с обычным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим произвольную дифференцируемую кривую  $\gamma = \{x^\alpha(t)\}$  в римановом пространстве с положительно определенной метрикой. Тогда длина дуги кривой отлична от нуля

$$ds := dt \sqrt{\dot{x}^2} \neq 0, \quad \text{где } \dot{x}^2 := \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (6.8)$$

Выражение

$$\frac{DX^\alpha}{ds} := u^\beta \nabla_\beta X^\alpha, \quad (6.9)$$

где

$$u^\alpha := \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{\dot{x}^2}}, \quad u^2 = 1, \quad (6.10)$$

– единичный касательный вектор к кривой, называется *ковариантной производной вектора  $X$  вдоль кривой  $\gamma$* .

Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то ковариантную производную можно определить либо вдоль времениподобных, либо вдоль пространственноподобных кривых. В последнем случае  $\dot{x}^2$  заменяется на  $-\dot{x}^2$  под знаком корня.

Аналогично определяется ковариантная производная вдоль кривой от произвольного тензорного поля.

Пусть на многообразии задано векторное поле  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Тогда *ковариантная производная вдоль векторного поля  $X$*  от тензорного поля  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}$  типа  $(r, s)$  дает тензорное поле того же типа с компонентами

$$(\nabla_X K)_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} := X^\gamma \nabla_\gamma K_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}. \quad (6.11)$$

ПРИМЕР 6.1.3. В частности, для двух векторных полей справедливо равенство

$$(\nabla_X Y)^\alpha = X^\beta \nabla_\beta Y^\alpha. \quad (6.12)$$

Рассмотренная выше ковариантная производная от тензора вдоль кривой является частным случаем ковариантной производной вдоль векторного поля, которое касается кривой. Ковариантная производная вдоль кривой определена только в тех точках многообразия  $\mathbb{M}$ , через которые проходит кривая.

Наличие неоднородного слагаемого в законе преобразования компонент аффинной связности (6.5) или (5.31) не позволяет их складывать как тензорные поля и умножать даже на числа. Например, если на многообразии задано две аффинные связности  $\Gamma_{1\alpha\beta}^\gamma$  и  $\Gamma_{2\alpha\beta}^\gamma$ , то их сумма в общем случае связностью не является. В то же время нетрудно проверить, что сумма

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = f \Gamma_{1\alpha\beta}^\gamma + (1-f) \Gamma_{2\alpha\beta}^\gamma, \quad (6.13)$$

где  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{M})$ , задает компоненты некоторой аффинной связности.

Разность двух аффинных связностей является тензорным полем типа  $(1, 2)$ , так как неоднородные слагаемые сокращаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вариацией* аффинной связности  $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  называется разность двух связностей, заданных на многообразии  $\mathbb{M}$ .

Вариация связности является тензорным полем типа  $(1, 2)$ .

## 6.2. Кручение и неметричность

Продолжим локальное изучение аффинной связности. В общем случае компоненты связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  никакой симметрии по индексам не имеет и никак не связаны с метрикой  $g_{\alpha\beta}$ , поскольку эти понятия определяют на многообразии  $\mathbb{M}$  разные геометрические операции. А именно, метрика многообразия определяет в каждой точке скалярное произведение векторов из касательного пространства, а аффинная связность определяет ковариантное дифференцирование и параллельный перенос тензоров. Геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$  определяется метрикой и аффинной связностью. Будем говорить, что на  $\mathbb{M}$  задана *аффинная геометрия*, если заданы достаточно гладкие метрика и аффинная связность, т.е. задано три объекта  $(\mathbb{M}, g, \Gamma)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В общем случае метрика и аффинная связность задаются произвольным образом и являются совершенно независимыми геометрическими объектами. Поэтому при построении физических моделей их можно рассматривать как независимые поля, имеющие разную физическую интерпретацию. В настоящее время принято считать, что метрика описывает гравитационное взаимодействие. Физический смысл аффинной связности пока неясен. Это связано с тем, что физическая интерпретация связности зависит от конкретной модели. Соответствующие модели сложны с математической точки зрения и в настоящее время изучены недостаточно хорошо.

По определению, кручение многообразия в локальной системе координат равно антисимметричной части аффинной связности (5.37)

$$T_{\alpha\beta}^\gamma := \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma. \quad (6.14)$$

Из закона преобразования связности (5.31) следует, что кручение является тензорным полем типа (1, 2).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Если на многообразии задана аффинная геометрия, то можно построить *тензор неметричности*  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ . Он равен ковариантной производной от метрики

$$-Q_{\alpha\beta\gamma} := \nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta g_{\beta\delta}. \quad (6.15)$$

Тензор неметричности, по построению, симметричен относительно перестановки двух последних индексов

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\gamma\beta}.$$

Заметим, что для определения неметричности необходимы оба объекта: и метрика, и связность.

Таким образом, по заданной метрике и аффинной связности построено два тензорных поля: кручение и тензор неметричности. Докажем, что по заданной метрике, кручению и тензору неметричности можно однозначно восстановить соответствующую аффинную связность. Уравнение (6.15) всегда можно решить относительно связности  $\Gamma$ . Действительно, линейная комбинация

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} + \nabla_\beta g_{\gamma\alpha} - \nabla_\gamma g_{\alpha\beta}$$

приводит к следующему общему решению для аффинной связности с опущенным верхним индексом

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} := \Gamma_{\alpha\beta}^\delta g_{\delta\gamma} &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) \\ &+ \frac{1}{2}(Q_{\alpha\beta\gamma} + Q_{\beta\gamma\alpha} - Q_{\gamma\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Правая часть этого равенства симметрична по индексам  $\alpha$  и  $\beta$  за исключением одного слагаемого,  $\frac{1}{2}T_{\alpha\beta\gamma}$ , что согласуется с определением тензора кручения (6.14). Заметим, что слагаемые с метрикой и тензором неметричности в (6.16) имеют одинаковый порядок индексов и знаков, а слагаемые с кручением при том же порядке индексов отличаются знаками. Таким образом, для того, чтобы на многообразии  $\mathbb{M}$  задать аффинную геометрию, необходимо и достаточно задать три тензорных поля: метрику, кручение и неметричность. Подчеркнем еще раз, что все три объекта можно задать совершенно независимым образом, и в моделях математической физики их можно рассматривать как независимые динамические переменные.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Второе слагаемое в (6.16)

$$K_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}) \quad (6.17)$$

называется тензором *кокручения*.

Заметим, что уравнение (6.15) симметрично по индексам  $\beta, \gamma$ , т.е. число алгебраических уравнений в точности равно числу компонент симметричной части связности  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ . Поэтому весь произвол в решении этой системы уравнений определяется тензором кручения.

Вычислив ковариантную производную от тождества  $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$ , находим, что ковариантная производная от обратной метрики,

$$\nabla_{\alpha}g^{\beta\gamma} = Q_{\alpha}^{\beta\gamma}, \quad Q_{\alpha}^{\beta\gamma} := g^{\beta\delta}g^{\gamma\epsilon}Q_{\alpha\delta\epsilon}, \quad (6.18)$$

отличается знаком от (6.15). Если тензор неметричности отличен от нуля, то подъем и опускание индексов не коммутирует с ковариантным дифференцированием.

ПРИМЕР 6.2.1.  $\nabla_{\alpha}X_{\beta} = (\nabla_{\alpha}X^{\gamma})g_{\gamma\beta} - Q_{\alpha\gamma\beta}X^{\gamma}$ .

Для задания аффинной геометрии на многообразии необходимо задать метрику и аффинную связность. Рассмотрим частные случаи аффинной геометрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При попытке объединить гравитацию с электромагнетизмом Г. Вейль рассмотрел тензор неметричности специального вида [38]

$$Q_{\alpha\beta\gamma} := W_{\alpha}g_{\beta\gamma}, \quad (6.19)$$

где  $W_{\alpha}$  – форма Вейля, отождествленная с электромагнитным потенциалом, (при этом предполагалось, что кручение тождественно равно нулю). Будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана–Вейля*, если на нем задана метрика, кручение и неметричность специального вида (6.19).

Если тензор неметричности тождественно равен нулю, а метрика и кручение нетривиальны, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана–Картана*. В этом случае из уравнения (6.16) следует, что аффинная связность однозначно определяется метрикой и кручением:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta}). \quad (6.20)$$

Такую связность называют *метрической*, поскольку ковариантная производная от метрики тождественно равна нулю,

$$\nabla_{\alpha}g_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta}g_{\beta\delta} = 0. \quad (6.21)$$

Это равенство называют *условием метричности*, и оно обеспечивает коммутативность ковариантного дифференцирования с опусканием и подъемом индексов. Условие метричности (6.21) эквивалентно условию  $\nabla_{\alpha}g^{\beta\gamma} = 0$  в силу уравнения (6.18).

Если тензор кручения равен нулю,  $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$ , а неметричность имеет вид (6.19), то будем говорить, что задана геометрия *Римана–Вейля*. В геометрии Римана–Вейля выражение для аффинной связности можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}[(\partial_{\alpha} + W_{\alpha})g_{\beta\gamma} + (\partial_{\beta} + W_{\beta})g_{\alpha\gamma} - (\partial_{\gamma} + W_{\gamma})g_{\alpha\beta}]. \quad (6.22)$$

При этом она симметрична по двум первым индексам.

Если и тензор неметричности, и кручение тождественно равны нулю, а метрика нетривиальна и положительно определена, то будем говорить, что на многообразии задана *геометрия Римана*. В этом случае метрическая связность также симметрична по двум первым индексам и однозначно определяется метрикой:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_{\alpha}g_{\beta\delta} + \partial_{\beta}g_{\alpha\delta} - \partial_{\delta}g_{\alpha\beta}) \quad (6.23)$$

Эта связность называется *связностью Леви–Чивиты* или *символами Кристоффеля*. Заметим, что в определении метрики мы требовали невырожденность матрицы  $g_{\alpha\beta}$ . Из выражения для символов Кристоффеля видно, что это условие необходимо, в частности, для того, чтобы метрика определяла связность Леви–Чивиты. Если метрика не является положительно определенной, то геометрия называется *псевдоримановой*. Для связности при этом сохраняются прежние названия.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если на многообразии задана аффинная геометрия общего вида  $(M, g, \Gamma)$ , то на нем определены две связности: аффинная связность  $\Gamma$  и связность Леви–Чивиты  $\tilde{\Gamma}$ , поскольку задана метрика. В такой ситуации над связностью Леви–Чивиты и построенных с ее помощью геометрических объектах мы будем писать знак тильды.

**ПРИМЕР 6.2.2.** Связность Леви–Чивиты имеет наглядный геометрический смысл для двумерных поверхностей, изометрически вложенных в трехмерное евклидово пространство. Рассмотрим два вектора  $X_x$  и  $Y_y$ , касательных к поверхности в близких точках  $x$  и  $y$ . Леви–Чивита [39] предложил считать вектор  $Y_y$  параллельным вектору  $X_x$ , если его проекция в евклидовом пространстве на касательную плоскость в точке  $x$  параллельна вектору  $X_x$ . Можно проверить, что такая связность согласована с метрикой, индуцированной вложением, и имеет нулевое кручение.

В римановой геометрии ковариантная производная определяется компонентами связности с двумя нижними и одним верхним индексом,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma := \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\delta} g^{\gamma\delta}$  и поэтому одинакова для двух метрик, отличающихся постоянным множителем.

Символы Кристоффеля (6.23) симметричны по первым двум индексам. Это свойство выполняется в голономном базисе. В неголономном базисе эта симметрия нарушается (см. раздел 6.9).

Из выражения для символов Кристоффеля (6.23) или условия метричности (6.21) следует равенство

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma\beta}. \quad (6.24)$$

Это доказывает следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2.1.** *Для того, чтобы символы Кристоффеля в некоторой системе координат были равны нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе координат компоненты метрики были постоянны.*

Поскольку символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, то в другой системе координат они могут быть нетривиальны.

**ПРИМЕР 6.2.3.** Символы Кристоффеля для евклидова пространства в декартовой системе координат равны нулю, но, скажем, в сферической или цилиндрической системе координат они отличны от нуля (см. раздел 7).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** В случае, когда тензор неметричности и кручение тождественно равны нулю, и при этом в окрестности любой точки существует система координат, в которой метрика является единичной диагональной матрицей, и, следовательно, символы Кристоффеля равны нулю, геометрия называется *локально евклидовой* (или *псевдоевклидовой*, если часть единиц входят в метрику с отрицательным знаком). Соответствующая система координат называется *декартовой*.

**ПРИМЕР 6.2.4.** Рассмотрим двумерный тор, вложенный в трехмерное евклидово пространство. Если предположить, что кручение и неметричность на торе равны нулю, а метрика индуцирована вложением, то тензор кривизны тора равен нулю. В этом случае тор представляет собой нетривиальное локально евклидово многообразие.

Нетрудно посчитать число независимых компонент у связности, тензора кручения и неметричности:

$$[\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma] = n^3, \quad [T_{\alpha\beta}{}^\gamma] = \frac{n^2(n-1)}{2}, \quad [Q_{\alpha\beta\gamma}] = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что суммарное число независимых компонент кручения и неметричности равно числу компонент аффинной связности.

### 6.3. Ковариантная производная тензорных плотностей

Ковариантная производная тензорного поля естественным образом обобщается на тензорные плотности произвольной степени  $p$ . Для определенности рассмотрим тензорную плотность  $X_\alpha{}^\beta$  степени  $p$  и типа  $(1, 1)$ . По определению, при преобразовании координат она преобразуется по правилу

$$X_{\alpha'}{}^{\beta'} = J^p \frac{dx^\alpha}{dx^{\alpha'}} X_\alpha{}^\beta \frac{dx^{\beta'}}{dx^\beta},$$

где  $J$  – якобиан преобразования координат. Потребуем, чтобы ковариантная производная от тензорной плотности была тензорной плотностью той же степени,

$$\nabla_{\alpha'} X_{\beta'}^{\gamma'} = J^p \frac{dx^\alpha}{dx^{\alpha'}} \frac{dx^\beta}{dx^{\beta'}} \nabla_\alpha X_{\beta}^{\gamma} \frac{dx^{\gamma'}}{dx^\gamma}. \quad (6.25)$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от тензорной плотности имеет вид

$$\nabla_\alpha X_{\beta}^{\gamma} = \partial_\alpha X_{\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} X_{\delta}^{\gamma} + X_{\beta}^{\delta} \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma} + p \Gamma_{\alpha} X_{\beta}^{\gamma}, \quad (6.26)$$

где  $\Gamma_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}$  – след аффинной связности. Сравнивая эту ковариантную производную с ковариантной производной (6.6) от тензорного поля типа  $(1, 1)$ , находим, что различие состоит в появлении дополнительного слагаемого, пропорционального степени тензорной плотности и следу аффинной связности. Чтобы проверить выполнение закона преобразования (6.25) заметим, что в законе преобразования следа аффинной связности (6.45) содержится неоднородное слагаемое, которое компенсирует производную от якобиана

$$\partial_\alpha J^p = p J^p \frac{dx^\beta}{dx^{\beta'}} \partial_\alpha \left( \frac{dx^{\beta'}}{dx^\beta} \right).$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от тензорной плотности произвольного типа отличается от ковариантной производной соответствующего тензора одним дополнительным слагаемым, пропорциональным степени тензорной плотности и следу аффинной связности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Параллельный перенос для тензорных плотностей определяется так же, как и для тензоров. Мы говорим, что тензорная плотность *параллельно переносится* вдоль заданной кривой, если ее ковариантная производная вдоль этой кривой равна нулю.

Ковариантная производная от линейной комбинации тензорных плотностей  $X$  и  $Y$  одинакового ранга и степени равна линейной комбинации ковариантных производных

$$\nabla_\alpha (aX + bY) = a \nabla_\alpha X + b \nabla_\alpha Y, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Естественным образом определяется тензорное произведение  $X \otimes Y$  тензорных плотностей произвольных рангов и степеней. При этом степени тензорных плотностей складываются. Нетрудно проверить, что для ковариантного дифференцирования справедливо правило Лейбница:

$$\nabla_\alpha (X \otimes Y) = (\nabla_\alpha X) \otimes Y + X \otimes (\nabla_\alpha Y).$$

Так же, как и для тензоров, свертка по индексам тензорных плотностей перестановочна с операцией ковариантного дифференцирования.

**ПРИМЕР 6.3.1.** Рассмотрим частные случаи. Определители метрики  $g$  и элемент объема  $\sqrt{|g|} = \det e_\alpha^a$  являются тензорными плотностями степеней  $-2$  и  $-1$ , соответственно. Используя выражение для следа аффинной связности (6.46), получаем следующие равенства:

$$\nabla_\alpha g = \partial_\alpha g - 2\Gamma_\alpha g = -Q_\alpha \sqrt{|g|}, \quad (6.27)$$

$$\nabla_\alpha \sqrt{|g|} = \partial_\alpha \sqrt{|g|} - \Gamma_\alpha \sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} Q_\alpha \sqrt{|g|}, \quad (6.28)$$

где  $Q_\alpha := Q_{\alpha\beta}^{\beta}$  – след тензора неметричности. Отсюда следует, что для метрической связности определители метрики и репера ковариантно постоянны. То есть в геометрии Римана–Картана и, в частности, в римановой геометрии ковариантные производные от определителя метрики и элемента объема равны нулю:

$$\tilde{\nabla}_\alpha g = 0, \quad \tilde{\nabla}_\alpha \sqrt{|g|} = 0.$$

При этом условие метричности для связности является достаточным, но не необходимым. Из выражения (6.28) следует, что для сохранения элемента объема при параллельном переносе вдоль произвольной кривой, необходимо и достаточно, чтобы след тензора неметричности был равен нулю. В геометрии Римана–Картана–Вейля справедлива формула

$$\nabla_\alpha \sqrt{|g|} = -\frac{n}{2} W_\alpha \sqrt{|g|},$$

где  $n$  – размерность многообразия. То есть форма Вейля в этом случае определяет изменение элемента объема при параллельном переносе.

## 6.4. Параллельный перенос

В разделе 5.2 был определен параллельный перенос векторов. С помощью аффинной связности на многообразии  $\mathbb{M}$  можно определить *параллельный перенос* касательных векторов, а также тензоров произвольного ранга вдоль кривой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть дифференцируемая кривая  $\gamma = x(t) = \{x^\alpha(t)\}$ ,  $t \in [0, 1]$  соединяет две точки многообразия  $p, q \in \mathbb{M}$ :  $x(0) = p$ ,  $x(1) = q$ . Касательный вектор к кривой (вектор скорости) имеет компоненты  $u^\alpha := \dot{x}^\alpha$  и предполагается отличным от нуля. Инвариантное условие параллельного переноса (5.24),

$$\nabla_u X = 0, \quad (6.29)$$

в компонентах (5.25) принимает вид

$$\dot{X}^\alpha = -\dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (6.30)$$

Это – система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на компоненты векторного поля  $X^\alpha(t)$ , которая решается с некоторым начальным условием  $X^\alpha(0) := X_0^\alpha$ . Если функции  $\dot{x}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  непрерывны по  $t$ , то решение этой задачи существует и единственно для всех значений  $t \in [0, 1]$  (см., например, [5], § 27). Решение системы уравнений (6.30) с начальным условием  $X^\alpha(0) := X_0^\alpha$  называется *параллельным переносом* вектора  $X_0$  в точку  $x(t)$  вдоль кривой  $\gamma$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В отличие от параллельного переноса, уравнения геодезических являются нелинейными, и поэтому общие теоремы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют существование и единственность решений только в некоторой достаточно малой окрестности начальной точки  $t = 0$  при надлежащих условиях на правую часть. Это приводит к проблеме продолжения геодезических.

Условие параллельного переноса (6.30) можно переписать в интегральной форме

$$X^\alpha(t) = X_0^\alpha - \int_0^t ds \dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (6.31)$$

где все функции в подынтегральном выражении рассматриваются, как функции от параметра  $s$  вдоль кривой и точка обозначает дифференцирование по  $s$ . При  $t = 1$  получим компоненты вектора в точке  $q$ .

Результат параллельного переноса вектора из точки  $p$  в точку  $q$  не зависит ни от параметризации кривой, что очевидно, ни от выбора системы координат. Действительно, в новой штрихованной системе координат справедливо равенство

$$X^{\alpha'}(t) = X_0^{\alpha'} - \int_0^t ds \dot{x}^{\beta'} X^{\gamma'} \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}.$$

Это интегральное уравнение связано с уравнением (6.31) преобразованием координат. Чтобы доказать независимость параллельного переноса, представим неоднородное слагаемое в преобразовании компонент аффинной связности (6.5), умноженное на  $\dot{x}^{\beta'} X^{\gamma'}$ , в виде

$$\dot{x}^\beta X^\gamma \partial_{\beta\gamma}^2 x^{\alpha'} = X^\gamma \partial_t (\partial_\gamma x^{\alpha'})$$

и проинтегрируем по частям.

В то же время результат параллельного переноса вектора из точки  $p$  в точку  $q$  в общем случае зависит от кривой  $\gamma$ , соединяющей эти точки.

Параллельный перенос вектора вдоль кривой можно естественным образом обобщить на кусочно-гладкие кривые, как последовательный параллельный перенос от одного излома к другому.

Аналогично определяется параллельный перенос 1-форм и тензоров произвольного ранга.

При параллельном переносе вектора из точки  $x$  в близкую точку  $x + dx$ , где инфинитезимальное приращение  $dx^\alpha$  мы рассматриваем, как касательный вектор к кривой в точке  $x$ , компоненты вектора получают приращение

$$\delta X^\alpha = -dx^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (6.32)$$

Эти приращения линейны по дифференциалам  $dx^\alpha$  и самому векторному полю. Формула (6.32) позволяет дать следующую интерпретацию ковариантной производной (6.2). Пусть на многообразии задано

произвольное векторное поле  $X(x)$ . Чтобы получить ковариантную производную от него в точке  $x$ , необходимо взять значение векторного поля в точке  $x+dx$ , вычесть из него результат параллельного переноса вектора из точки  $x$  в точку  $x+dx$  и разделить эту разность на  $dx$ .

**ПРИМЕР 6.4.1.** Система уравнений (6.30) имеет нулевое решение  $X = 0$ . Это значит, что параллельный перенос нулевого вектора из точки  $p$  в произвольную точку  $q$ , которая соединяется с  $p$  некоторой дифференцируемой кривой, дает снова нулевой вектор и не зависит от кривой.

**ПРИМЕР 6.4.2.** При параллельном переносе скаляра  $f$  получаем постоянное скалярное поле вдоль кривой  $\delta f = 0$ . Результат параллельного переноса скаляра для любой аффинной связности не зависит от пути переноса

**ПРИМЕР 6.4.3.** При параллельном переносе 1-форма получает приращение

$$\delta A_\alpha = dx^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma A_\gamma, \quad (6.33)$$

которое отличается знаком от приращения вектора (6.32).

**ПРИМЕР 6.4.4.** При параллельном переносе тензора типа  $(1, 1)$  он получает приращение

$$\delta T^\alpha_\beta = dx^\gamma (-\Gamma_{\gamma\delta}^\alpha T^\delta_\beta + \Gamma_{\gamma\beta}^\delta T^\alpha_\delta).$$

Аналогично для тензора произвольного ранга в правой части будем иметь по одному слагаемому со знаком минус и плюс для каждого контра- и ковариантного индекса соответственно.

**ПРИМЕР 6.4.5.** В геометрии Римана–Картана, по определению, ковариантная производная от метрики равна нулю. Поэтому можно считать, что метрика получается в результате параллельного переноса симметричной невырожденной матрицы из произвольной точки многообразия. При этом результат параллельного переноса заданной матрицы не зависит от пути для любой метрической связности. Это будет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  помимо аффинной связности задана метрика. Рассмотрим, как меняется скалярное произведение  $(X, Y)$  двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольной кривой  $\gamma$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4.1.** Зависимость скалярного произведения  $(X, Y)$  двух векторов, которые параллельно переносятся вдоль  $\gamma$ , от точки кривой определяется только тензором неметричности:

$$\partial_u(X, Y) = \nabla_u(X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}) = -u^\gamma X^\alpha Y^\beta Q_{\gamma\alpha\beta}. \quad (6.34)$$

Отсюда следует, что в геометрии Римана–Картана ( $Q = 0$ ) скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольной кривой сохраняется. В частности, квадрат вектора скорости  $u^2$  кривой  $\gamma$  в геометрии Римана–Картана постоянен вдоль нее.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Следует из определения тензора неметричности (6.15).

**СЛЕДСТВИЕ.** В римановой геометрии и геометрии Римана–Картана длины векторов и углы между ними сохраняются при параллельном переносе вдоль произвольной кривой  $\gamma$ .

Задание аффинной связности позволяет сравнивать компоненты тензоров в бесконечно близких точках, причем делать это ковариантным образом. Трудность сравнения тензоров в различных точках связана с тем, что при преобразовании координат тензоры в разных точках преобразуются по-разному, и их сравнение (сложение компонент) теряет всякий смысл.

Ниже мы дадим геометрическую интерпретацию тензора кривизны, и с этой целью выполним следующее построение.

Выберем точку многообразия  $p = \{p^\alpha\} \in \mathbb{M}$  и замкнутую кривую  $\gamma_p$  с началом и концом в точке  $p$ . Возьмем произвольный вектор  $X_p$  в точке  $p$  и перенесем его параллельно вдоль кривой  $\gamma_p$ . В результате получим новый вектор  $X_p + \Delta X_p$ , который может отличаться от исходного. Рассмотрим класс замкнутых кривых  $\gamma_p = \{x^\alpha(t)\}$  малой “длины”, для которых выполнено неравенство

$$\oint_{\gamma_p} dt \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \dots + (\dot{x}^n)^2} < \epsilon \ll 1. \quad (6.35)$$

Это выражение нековариантно, т.е. мы работаем в фиксированной системе координат некоторой координатной окрестности. Тогда все рассматриваемые кривые заведомо лежат в малой окрестности точки  $p \in \mathbb{U}_{p,\epsilon} \subset \mathbb{M}$ , координаты точек которой удовлетворяют неравенствам:

$$\mathbb{U}_{p,\epsilon} := \{x \in \mathbb{M} : |x^\alpha - p^\alpha| < \epsilon, \alpha = 1, \dots, n\}.$$

Эта окрестность  $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$  диффеоморфна шару и поэтому односвязна. Рассмотрим двумерную поверхность  $\mathbb{S}_\gamma \subset \mathbb{M}$  в многообразии  $\mathbb{M}$ , с границей  $\gamma_p$  и целиком лежащую в  $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$ , которая задана параметрически:  $\{x^\alpha(u, v)\}$ , где  $u, v$  – координаты на поверхности. Тогда справедлива

**ТЕОРЕМА 6.4.1** (Геометрический смысл кривизны). *Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  в некоторой координатной окрестности задана аффинная связность  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^\delta$  с тензором кривизны  $R_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ . Перенесем вектор  $X_p$  вдоль замкнутой кривой  $\gamma_p$ , для которой выполнено неравенство (6.35). Тогда компоненты вектора получают приращение порядка не выше  $\epsilon^2$ :*

$$\Delta X_p^\delta = -X_p^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}^\delta(p) \int_{\mathbb{S}_\gamma} du \wedge dv \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \frac{\partial x^\beta}{\partial v} + o(\epsilon^2), \quad (6.36)$$

где  $\mathbb{S}_\gamma \subset \mathbb{U}_{p,\epsilon}$  – поверхность, ограниченная кривой  $\gamma_p$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При параллельном переносе вектора вдоль замкнутого пути приращение его компонент задается интегралом (6.31)

$$\Delta X_p^\alpha = - \oint_{\gamma_p} dt \dot{x}^\beta X_{\parallel}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = - \oint_{\gamma_p} dx^\beta X_{\parallel}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (6.37)$$

где  $X_{\parallel}^\gamma(t)$  – результат параллельного переноса вектора  $X_p$  вдоль кривой  $\gamma$  до точки  $x(t)$ . Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора

$$X_{\parallel}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = (X_{\parallel}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha)_p + [\partial_\delta (X_{\parallel}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha)]_p (x^\delta - p^\delta) + \dots$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю, так как кривая замкнута, и, поэтому порядок приращения вектора при параллельном переносе не может превышать  $\epsilon^2$ . Это значит, что при вычислении интеграла в (6.37) с точностью  $\epsilon^2$  в подынтегральном выражении достаточно учитывать члены порядка  $\epsilon$ .

Разнесем вектор  $X_p$  из точки  $p$  на всю окрестность  $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$  с помощью следующего соотношения

$$X^\alpha(x) := X_p^\alpha - (x^\beta - p^\beta) X_p^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(p). \quad (6.38)$$

Это – параллельный перенос вектора  $X_p$  на окрестность  $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$  с точностью  $\epsilon$ . С указанной точностью параллельный перенос вектора  $X_p$  не зависит от пути, так как приращение компонент вектора по замкнутому пути порядка  $\epsilon^2$ . В результате мы получаем гладкое векторное поле  $X(x)$  на  $\mathbb{U}_{p,\epsilon}$ . Поэтому в подынтегральном выражении (6.37) можно заменить векторное поле вдоль кривой  $X_{\parallel}^\alpha$ , которое в общем случае не является непрерывным, на гладкое векторное поле  $X$ . Тогда можно воспользоваться формулой Грина (3.88):

$$\oint_{\gamma_p} dt \dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \int_{\mathbb{S}_\gamma} du \wedge dv \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial v} X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial u} X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) \right].$$

Для векторного поля (6.38) выполнено равенство

$$\frac{\partial X^\gamma}{\partial u} = - \frac{\partial x^\delta}{\partial u} X_p^\beta \Gamma_{\delta\beta}^\gamma(p)$$

и аналогичную формулу для частной производной по  $v$ . В результате с точностью  $\epsilon^2$  получаем формулу (6.36).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** С точностью  $\epsilon^2$  приращение компонент вектора (6.36) ковариантно. По построению, это приращение не зависит от выбора поверхности  $\mathbb{S}_\gamma \subset \mathbb{U}_{p,\epsilon}$ , натянутой на контур  $\gamma_p$ .

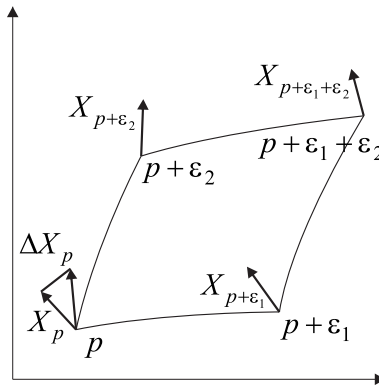


Рис. 6.1. Геометрический смысл кривизны: при параллельном переносе вектора  $X_p$  вдоль замкнутого контура он получает приращение  $\Delta X_p$ .

**ПРИМЕР 6.4.6.** Рассмотрим “параллелограмм”  $\gamma_p$  со сторонами  $\epsilon_1^\alpha, \epsilon_2^\alpha < \epsilon$  и вершинами в точках  $\{p^\alpha\}, \{p^\alpha + \epsilon_1^\alpha\}, \{p^\alpha + \epsilon_1^\alpha + \epsilon_2^\alpha\}$  и  $\{p^\alpha + \epsilon_2^\alpha\}$ . Пусть на него натянута поверхность  $\mathbb{S}_\gamma = \{p^\alpha + \epsilon_1^\alpha u + \epsilon_2^\alpha v\}; u, v \in [0, 1]$ . Тогда при обходе по “параллелограмму” вектор получит приращение

$$\Delta X_p^\delta = -\epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta X_p^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(p),$$

что следует из (6.36). См. рис. 6.1.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Теорема о геометрическом смысле кривизны не зависит от того задана на многообразии  $\mathbb{M}$  метрика или нет, так как параллельный перенос определяется только связностью.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана также метрика  $g_{\alpha\beta}$ . Тогда на поверхности  $\mathbb{S}_\gamma$  индуцируется метрика  $g_{ij} = \partial_i x^\alpha \partial_j x^\beta$  ( $i, j = 1, 2$ , где  $\{u^i\} = (u, v)$ ). Следовательно, определена форма объема (площади поверхности) (3.78)

$$v = \frac{1}{2} du^i \wedge du^j \varepsilon_{ij}.$$

Тогда интеграл в (6.36) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_\gamma} du^i \wedge du^j \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_\gamma} dudv \sqrt{|g|} \varepsilon^{ij} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \text{sgn},$$

где  $\text{sgn} := \text{sign}(\det g_{ij})$  и  $\sqrt{|g|} := \sqrt{|\det g_{ij}|}$ . С точностью  $\epsilon^2$  подынтегральное выражение можно вынести из под знака интегрирования и формула для приращения компонент вектора при параллельном переносе вдоль малого замкнутого пути (6.36) принимает вид

$$\Delta X_p^\delta = -\frac{1}{\sqrt{|g_p|}} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \frac{\partial x^\beta}{\partial v} \right)_p X_p^\gamma R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta(p) S, \quad (6.39)$$

где

$$S := \int_{\mathbb{S}_\gamma} dudv \sqrt{|g|}$$

– площадь поверхности  $\mathbb{S}_\gamma$ , которая имеет порядок  $\epsilon^2$ . Полученная формула ковариантна относительно преобразований координат на многообразии  $x^\alpha$  и инвариантна относительно выбора координат  $u, v$  на поверхности.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Геометрический смысл тензора кривизны лег в основу его физической интерпретации, как поверхностной плотности вектора Франка, характеризующего распределение дисклинаций в упругой среде со спиновой структурой (см. [40]).

Формулы переноса вектора вдоль малого замкнутого контура без труда обобщаются на произвольные тензорные поля.

ПРИМЕР 6.4.7. Рассмотрим такой же “параллелограмм” со сторонами  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  как и в примере 6.4.6. При параллельном переносе вдоль него компоненты тензора  $T$  типа  $(1, 1)$  получает приращение

$$\Delta T_p^\alpha{}_\beta = -\epsilon_1^\gamma \epsilon_2^\delta (R_{\gamma\delta\epsilon}{}^\alpha(p) T_p^\epsilon{}_\beta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon(p) T_p^\alpha{}_\epsilon).$$

Для тензора произвольного ранга в правой части равенства будем иметь по одному слагаемому со знаками плюс и минус соответственно для каждого контравариантного и ковариантного индекса.

## 6.5. Геометрический смысл кручения

Рассмотрим многообразие  $\mathbb{M}$  с заданной аффинной связностью. Пусть  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$  – координатная окрестность и  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$  – компоненты связности. Пусть в произвольной точке  $p \in \mathbb{U}$  заданы два касательных вектора  $X_p = \{X_p^\alpha\}$  и  $Y_p = \{Y_p^\alpha\}$ , рис. 6.2. Чтобы дать геометрическую интерпретацию тензору кручения,

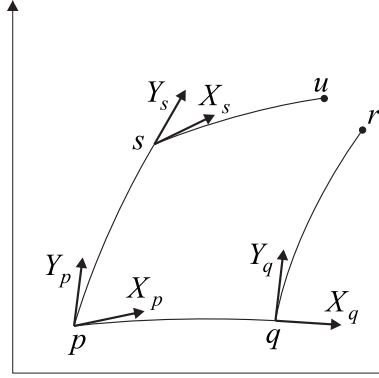


Рис. 6.2. Геометрический смысл кручения: “параллелограмм” с направляющими  $X_p$  и  $Y_p$  разомкнут.

произведем следующее построение. Перенесем вектор  $Y_p$  вдоль геодезической линии, которая касается вектора  $X_p$ , в близкую точку  $q$ , соответствующую параметру  $t_q := t_p + \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ . Затем проведем геодезическую в точке  $q$ , которая касается вектора  $Y_q$ , и отметим на ней точку  $r$ , соответствующую параметру  $t_q + \epsilon$ . Затем проведем то же построение, но в обратном порядке: перенесем вектор  $X_p$  вдоль геодезической для  $Y_p$  в точку  $s$ , соответствующую параметру  $t_p + \epsilon$ , выпустим из нее геодезическую вдоль  $X_s$  и отметим точку  $u$ , соответствующую параметру  $t_s + \epsilon$ . Если кручение аффинной связности равно нулю, то точки  $r$  и  $u$  совпадут. При ненулевом кручении разность координат точек  $r$  и  $u$  имеет порядок  $\epsilon^2$  и, как будет показано, определяется тензором кручения.

Начнем построение. Рассмотрим геодезическую линию  $\{x^\alpha(t)\}$  в  $\mathbb{M}$ , которая проходит через  $p$  и касается вектора  $X_p$ . Перенесем вектор  $X_p$  вдоль геодезической. В результате получим векторное поле  $X(t)$  на геодезической, компоненты которого, по построению, удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\dot{x}} X^\alpha = \frac{DX^\alpha}{dt} = \dot{x}^\beta (\partial_\beta X^\alpha + X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha) = \dot{X}^\alpha + \dot{x}^\beta X^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha = 0, \quad (6.40)$$

где  $DX$  – ковариантный дифференциал векторного поля (6.7) и  $t$  – произвольный параметр вдоль геодезической. Тогда геодезическая будет интегральной кривой полученного векторного поля, проходящей через точку  $p$ .

Предположим, что выбран канонический параметр вдоль геодезической. Тогда геодезическая удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma$$

с начальными условиями:

$$\dot{x}^\alpha|_{t=t_p} = X^\alpha, \quad x^\alpha|_{t=t_p} = x_p^\alpha. \quad (6.41)$$

Для наших целей вычисления достаточно провести во втором порядке по  $\epsilon$ . Ниже мы будем писать знак равенства, понимая его с точностью  $o(\epsilon^2)$ . В этом порядке координаты точки  $q$  равны

$$x_q^\alpha = x_p^\alpha + X_p^\alpha \epsilon + \frac{1}{2} \dot{X}_p^\alpha \epsilon^2 = x_p^\alpha + X_p^\alpha \epsilon - \frac{1}{2} X_p^\beta X_p^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2,$$



где мы учли уравнения (6.40) и (6.41). Теперь параллельно перенесем вектор  $Y_p$  в точку  $q$ :

$$Y_q^\alpha = Y_p^\alpha - (x_q^\beta - x_p^\beta)Y_p^\gamma \Gamma_{p\beta\gamma}{}^\alpha = Y_p^\alpha - X_p^\beta Y_p^\gamma \Gamma_{p\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon,$$

где достаточно учесть только линейный член разложения. Теперь найдем координаты точки  $r$  вдоль геодезической, выпущенной из точки  $q$ :

$$\begin{aligned} x_r^\alpha &= x_q^\alpha + Y_q^\alpha \epsilon - \frac{1}{2} Y_q^\beta Y_q^\gamma \Gamma_{q\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2 = \\ &= x_p^\alpha + (X_p^\alpha + Y_p^\beta) \epsilon^2 - \left( \frac{1}{2} X_p^\beta X_p^\gamma + X_p^\beta Y_p^\gamma + \frac{1}{2} Y_p^\beta Y_p^\gamma \right) \Gamma_{p\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Аналогично, координаты точки  $u$  во втором порядке по  $\epsilon$  равны

$$x_u^\alpha = x_p^\alpha + (X_p^\alpha + Y_p^\beta) \epsilon^2 - \left( \frac{1}{2} X_p^\beta X_p^\gamma + Y_p^\beta X_p^\gamma + \frac{1}{2} Y_p^\beta Y_p^\gamma \right) \Gamma_{p\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2.$$

Таким образом, получаем равенство

$$x_u^\alpha - x_r^\alpha = X_p^\beta Y_p^\gamma T_{p\beta\gamma}{}^\alpha \epsilon^2, \quad (6.43)$$

где  $T_{p\beta\gamma}{}^\alpha$  – компоненты тензора кручения в точке  $p$ .

Формула (6.43) позволяет дать геометрическую интерпретацию тензору кручения: главная часть разомкнутости бесконечно малого “параллелограмма” с направляющими  $X_p \epsilon$  и  $Y_p \epsilon$  квадратична по  $\epsilon$  и определяется тензором кручения.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Геометрический смысл кручения лег в основу физической интерпретации кручения, как поверхностной плотности вектора Бюргерса, характеризующего дислокации в упругой среде (см. [40]).

## 6.6. Свойства аффинной связности

Во многих важных моделях математической физики пространство-время рассматривается, как многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , на котором задана аффинная геометрия, т.е. метрика и аффинная связность. В настоящем разделе приведены тождества, включающие аффинную связность, которые полезны для приложений при проведении вычислений. Кроме того, определены инвариантные дифференциальные операторы второго порядка и приведена формула интегрирования по частям. Все формулы настоящего раздела доказываются прямыми вычислениями.

Определим *след аффинной связности*, который получается после свертки последней пары индексов:

$$\Gamma_\alpha := \Gamma_{\alpha\beta}{}^\beta. \quad (6.44)$$

Он не является ковекторным полем, поскольку закон преобразования содержит неоднородное слагаемое:

$$\Gamma_{\alpha'} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \Gamma_\alpha - \partial_{\alpha'} x^\alpha \partial_{\beta'} x^\beta \partial_{\alpha\beta}^2 x^{\beta'} = \partial_{\alpha'} x^\alpha \Gamma_\alpha + \partial_{\alpha'\beta'}^2 x^\alpha \partial_\alpha x^{\beta'}. \quad (6.45)$$

Из выражения (6.16) для компонент аффинной связности следует, что след аффинной связности (6.44) равен

$$\Gamma_\alpha = \tilde{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha, \quad (6.46)$$

где след символов Кристоффеля,  $\tilde{\Gamma}_\alpha := \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\beta = \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\beta$ , имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_\alpha = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} g_{\beta\gamma} \partial_\alpha g^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial_\alpha g}{g} = \frac{\partial_\alpha \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = e^\beta{}_b \partial_\alpha e_\beta{}^b, \quad (6.47)$$

и введен след тензора неметричности по последним индексам:

$$Q_\alpha := Q_{\alpha\beta}{}^\beta. \quad (6.48)$$

В тождествах (6.47)

$$g := \det g_{\alpha\beta}, \quad \sqrt{|g|} = \det e_\alpha{}^a.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. След аффинной связности не зависит от кручения.

Приведем также несколько полезных формул, справедливых в (псевдо)римановой геометрии:

$$\partial_\alpha g = g g^{\beta\gamma} \partial_\alpha g_{\beta\gamma}, \quad (6.49)$$

$$\partial_\alpha \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\beta\gamma} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \sqrt{|g|} \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\beta = \sqrt{|g|} e^\beta{}_a \partial_\alpha e_\beta{}^a, \quad (6.50)$$

$$\partial_\alpha g^{\beta\gamma} = -g^{\beta\delta} g^{\gamma\epsilon} \partial_\alpha g_{\delta\epsilon} = -g^{\beta\delta} e^\gamma{}_a \partial_\alpha e_\delta{}^a - g^{\gamma\delta} e^\beta{}_a \partial_\alpha e_\delta{}^a, \quad (6.51)$$

$$\partial_\alpha (\sqrt{|g|} g^{\beta\gamma}) = \sqrt{|g|} (g^{\beta\gamma} \tilde{\Gamma}_\alpha - g^{\beta\delta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^\gamma - g^{\gamma\delta} \tilde{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^\beta), \quad (6.52)$$

$$\partial_\beta (\sqrt{|g|} g^{\beta\alpha}) = -\sqrt{|g|} g^{\beta\gamma} \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^\alpha, \quad (6.53)$$

$$e_\alpha{}^a \partial_\beta (\sqrt{|g|} e^a{}_\alpha) = (n-1) \sqrt{|g|} e^a{}_\alpha \partial_\beta e_\alpha{}^a. \quad (6.54)$$

В пространстве Римана–Картана–Вейля след неметричности пропорционален форме Вейля  $W_\alpha$  из (6.19):

$$Q_\alpha = nW_\alpha.$$

Свертка аффинной связности (6.16) по первому и третьему индексам приводит к равенству

$$\Gamma_{\beta\alpha}{}^\beta = \tilde{\Gamma}_\alpha + T_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha = \Gamma_\alpha + T_\alpha, \quad (6.55)$$

где введен след тензора кручения

$$T_\alpha := T_{\beta\alpha}{}^\beta. \quad (6.56)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6.1. *Справедливо равенство*

$$\nabla_\alpha \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = -\frac{1}{2} Q_\alpha \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (6.57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения ковариантной производной и связи между полностью антисимметричным тензором и тензорной плотностью (2.63) следует равенство

$$\nabla_\alpha \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \partial_\alpha \sqrt{|g|} - \Gamma_{\alpha\alpha_1}{}^\beta \varepsilon_{\beta\alpha_2 \dots \alpha_n} - \dots - \Gamma_{\alpha\alpha_n}{}^\beta \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\beta}.$$

Это выражение антисимметрично по индексам  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и, следовательно, пропорционально полностью антисимметричному тензору:

$$\nabla_\alpha \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} X_\alpha,$$

где  $X_\alpha$  – компоненты некоторого ковектора. Свертка полученного равенства с контравариантным тензором  $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  с учетом равенств (6.46), (6.47) определяет

$$X_\alpha = -\frac{1}{2} Q_\alpha.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Для метрической связности полностью антисимметричный тензор является ковариантно постоянным.*

В дифференциальной геометрии естественным образом вводится понятие градиента и дивергенции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *градиентом* скалярного поля (функции)  $f$  ковекторное поле (1-форму):

$$\text{grad } f := dx^\alpha \nabla_\alpha f = df = dx^\alpha \partial_\alpha f. \quad (6.58)$$

Назовем *дивергенцией* векторного поля  $X$  скалярное поле

$$\text{div } X := \nabla_\alpha X^\alpha = \partial_\alpha X^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}{}^\beta X^\alpha, \quad (6.59)$$

построенное с помощью ковариантной производной.

С учетом выражения аффинной связности через кручение и неметричность (6.16) дивергенция векторного поля (6.59) принимает вид

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} X^\alpha) + T_\alpha X^\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha X^\alpha. \quad (6.60)$$

В частности, в (псевдо)римановой геометрии

$$\tilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} X^\alpha). \quad (6.61)$$

Эта полезная формула позволяет переписать инвариантный интеграл от дивергенции произвольного векторного поля в (псевдо)римановой геометрии в виде

$$\int dx \sqrt{|g|} \tilde{\nabla}_\alpha X^\alpha = \int dx \partial_\alpha (\sqrt{|g|} X^\alpha)$$

и воспользоваться формулой Стокса (см. раздел 3.7.2). В пространстве аффинной связности после применения формулы Стокса возникают дополнительные объемные интегралы с кручением и неметричностью (6.60).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В разделе 3.5 мы определили дивергенцию (3.63) для внешних форм. Пусть на многообразии  $M$  задана метрика  $g_{\alpha\beta}$  и 1-форма  $A = dx^\alpha A_\alpha$ , соответствующая вектору  $X$ , где  $A_\alpha := X^\beta g_{\alpha\beta}$ . Тогда из сравнения формул (3.56) и (6.59) следует, что  $\operatorname{div} A = \operatorname{div} X$  тогда и только тогда, когда

$$T_\alpha X^\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha X^\alpha = 0.$$

В частности, равенство  $\operatorname{div} A = \operatorname{div} X$  имеет место в (псевдо)римановой геометрии.

Дивергенция от антисимметричного тензорного поля,  $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ , равна

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} F^{\alpha\beta}) + F^{\alpha\beta} \left( T_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha \right) + \frac{1}{2} F^{\alpha\gamma} T_{\alpha\gamma}{}^\beta. \quad (6.62)$$

В римановой геометрии это тождество упрощается:

$$\tilde{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (\sqrt{|g|} F^{\alpha\beta}). \quad (6.63)$$

Приведем также формулу для антисимметричной ковариантной производной от 1-формы:

$$\nabla_\alpha X_\beta - \nabla_\beta X_\alpha = \partial_\alpha X_\beta - \partial_\beta X_\alpha - T_{\alpha\beta}{}^\gamma X_\gamma. \quad (6.64)$$

Из этого равенства следует, что антисимметризация обычной производной от 1-формы дает тензорное поле типа  $(0, 2)$ . Это процедура положена в основу определения внешней производной от произвольной формы (см. раздел 3.3).

Наличие ковариантной производной  $\nabla_\alpha$  и метрики  $g_{\alpha\beta}$  позволяет строить ковариантные дифференциальные операторы, действующие на произвольные тензорные поля на многообразии. Для их построения достаточно взять произвольный дифференциальный оператор в (псевдо-)евклидовом пространстве, заменить частные производные  $\partial_\alpha$  на ковариантные  $\nabla_\alpha$  и (псевдо-)евклидову метрику  $\eta_{\alpha\beta}$  на метрику многообразия  $g_{\alpha\beta}$ .

Инвариантный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на произвольные тензорные поля на многообразии имеет вид

$$\Delta := g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta = \nabla_\alpha g^{\alpha\beta} \nabla_\beta - Q_\alpha{}^{\alpha\beta} \nabla_\beta. \quad (6.65)$$

Он часто называется *оператором Лапласа–Бельтрами* независимо от сигнатуры метрики. В римановой геометрии оператор Лапласа–Бельтрами устроен проще:

$$\tilde{\Delta} := g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta = \tilde{\nabla}_\alpha g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\beta. \quad (6.66)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то мы будем обозначать оператор Лапласа–Бельтрами квадратом  $\square$ , а не треугольником  $\Delta$ , по аналогии с оператором Даламбера. В этом случае уравнение  $\square K_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = 0$  для каждой компоненты тензорного поля  $K \in \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$  будет гиперболического типа.

Действие оператора Лапласа–Бельтрами на скалярное поле можно записать в виде

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left( \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \right) + \left( T^\beta + \frac{1}{2} Q^\beta - Q_\alpha^{\alpha\beta} \right) \partial_\beta f. \quad (6.67)$$

В римановой геометрии правая часть этого равенства записывается через обычную производную от тензорной плотности:

$$\tilde{\Delta} f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left( \sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f \right). \quad (6.68)$$

Приведем также формулу интегрирования по частям. Используя (6.47) и (6.55), проверяется, что

$$\partial_\alpha \left( \sqrt{|g|} X^{\alpha\Lambda} Y_\Lambda \right) = \sqrt{|g|} \nabla_\alpha X^{\alpha\Lambda} Y_\Lambda - \sqrt{|g|} \left( T_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha \right) X^{\alpha\Lambda} Y_\Lambda + \sqrt{|g|} X^{\alpha\Lambda} \nabla_\alpha Y_\Lambda.$$

Здесь индекс  $\Lambda$  обозначает произвольную совокупность ковариантных и контравариантных индексов, по которым подразумевается суммирование. Интегрируя это соотношение по многообразию и пренебрегая граничными членами, получим равенство

$$\int dx \sqrt{|g|} X^{\alpha\Lambda} \nabla_\alpha Y_\Lambda = - \int dx \sqrt{|g|} \left[ \nabla_\alpha X^{\alpha\Lambda} Y_\Lambda - \left( T_\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha \right) X^{\alpha\Lambda} Y_\Lambda \right]. \quad (6.69)$$

В римановой геометрии эта формула имеет тот же вид, что и обычное интегрирование по частям:

$$\int dx \sqrt{|g|} X^{\alpha\Lambda} \tilde{\nabla}_\alpha Y_\Lambda = - \int dx \sqrt{|g|} \left[ \tilde{\nabla}_\alpha X^{\alpha\Lambda} Y_\Lambda \right]. \quad (6.70)$$

Отсюда следует, что с точностью до граничных членов имеет место равенство

$$\int dx \sqrt{|g|} X^\Lambda \tilde{\Delta} Y_\Lambda = \int dx \sqrt{|g|} \tilde{\Delta} X^\Lambda Y_\Lambda. \quad (6.71)$$

## 6.7. Локальное определение тензора кривизны

Помимо кручения аффинная связность  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  на многообразии  $\mathbb{M}$  задает еще один важный геометрический объект – *тензор кривизны* аффинной связности (5.35) или *тензор Римана–Кристоффеля*. В локальной системе координат он имеет следующие компоненты:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\delta := \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\delta - (\alpha \leftrightarrow \beta), \quad (6.72)$$

где скобки  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  обозначают предыдущие слагаемые с переставленными индексами  $\alpha$  и  $\beta$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Тензор кривизны никакого отношения к метрике не имеет и определяется только связностью.

Тензор кривизны играет очень важную роль в дифференциальной геометрии и возникает в различных контекстах. Покажем, что тензор кривизны позволяет сформулировать критерий локальной тривиальности аффинной связности.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана аффинная связность с нулевым кручением,  $T_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ . При этом неметричность, если задана также метрика, может быть отлична от нуля. Рассмотрим соотношения (5.31) как уравнения на функции перехода  $x^\alpha(x')$ . Потребуем, чтобы в новой системе координат компоненты связности обращались в нуль в некоторой области. Тогда функции перехода должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} = - \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (6.73)$$

Дифференцируя это соотношение по  $x^{\delta'}$  и исключая вторые производные от функций перехода с помощью исходного уравнения (6.73), получим равенство

$$\frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'} \partial x^{\delta'}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} \left( -\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}{}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}{}^\alpha + \Gamma_{\delta\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}{}^\alpha \right).$$

Условия интегрируемости уравнений (6.73) получаются из этих уравнений антисимметризацией выражения в круглых скобках по индексам  $\beta', \delta'$  или  $\gamma', \delta'$  и приравниванием результата нулю. Обе антисимметризации приводят к единственному условию: равенству нулю тензора кривизны (6.72),  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = 0$ .

Равенство нулю тензора кривизны является необходимым и достаточным условием локальной разрешимости системы уравнений (6.73) относительно матриц Якоби преобразования координат. После его решения возникнет система равенств

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = f_{\alpha'}{}^\alpha, \quad (6.74)$$

где в правой части стоят некоторые функции от  $x'$ . Эта система уравнений на функции перехода, в свою очередь, имеет свои условия интегрируемости:

$$\partial_{\alpha'} f_{\beta'}{}^\alpha - \partial_{\beta'} f_{\alpha'}{}^\alpha = 0.$$

Эти условия интегрируемости в общем случае выполнены не будут. Однако, можно доказать, что правая часть уравнений (6.74), как решений исходных уравнений (6.73) определена неоднозначно. Кроме того, этот произвол в выборе решений всегда можно зафиксировать таким образом, чтобы условия интегрируемости для функций перехода были выполнены. Соответствующее доказательство в переменных Картана было дано в разделе 5.5. Таким образом, справедлива

**ТЕОРЕМА 6.7.1.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана геометрия Римана–Картана. Если тензоры кривизны и кручения равны нулю в некоторой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ , то, возможно, в меньшей области существует такая система координат, в которой компоненты связности обратятся в нуль.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Назовем аффинную связность на многообразии  $\mathbb{M}$  локально тривиальной, если для любой точки  $x \in \mathbb{M}$  найдется окрестность  $\mathbb{U}_x \ni x$  и такая система координат, что компоненты связности  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$  на  $\mathbb{U}_x$  равны нулю. Такая аффинная связность называется также интегрируемой.

Таким образом, найден критерий локальной тривиальности аффинной связности.

**ТЕОРЕМА 6.7.2.** Для локальной тривиальности аффинной связности на многообразии  $\mathbb{M}$  необходимо и достаточно, чтобы ее кручение и тензор кривизны равнялись нулю на  $\mathbb{M}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Тензор кручения является тензором, и его компоненты нельзя обратить в нуль никаким преобразованием координат. Поэтому равенство нулю тензора кривизны необходимо для локальной тривиальности аффинной связности.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  помимо связности  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$  задана также метрика  $g_{\alpha\beta}$ . Тогда определен тензор неметричности (6.15). При ненулевом тензоре неметричности локальная тривиальность аффинной связности не означает, что многообразие является локально (псевдо-)евклидовым. Действительно, при  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$  и  $T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$  уравнение (6.15) дает соотношение между метрикой и неметричностью

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = -Q_{\alpha\beta\gamma}. \quad (6.75)$$

В частности, метрику можно задать произвольно, и она будет определять неметричность. В римановой геометрии  $T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$  и  $Q_{\alpha\beta\gamma} = 0$ , и равенство нулю тензора кривизны,  $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = 0$ , означает, что найдется такая система координат, в которой все частные производные метрики обратятся в нуль,  $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$ , т.е. метрика имеет постоянные компоненты в некоторой области  $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ . С помощью последующего линейного преобразования координат ее всегда можно привести к диагональному виду, когда на диагонали будут стоять  $\pm 1$  в соответствии с исходной сигнатурой метрики. Это дает критерий локальной (псевдо-)евклидовости (псевдо)риманова пространства. Сформулируем сразу глобальное утверждение. Оно использует геодезическую полноту многообразий, т.е. любая геодезическая для данной связности может быть продолжена до бесконечных значений канонического параметра.

**ТЕОРЕМА 6.7.3.** Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана аффинная геометрия, и связность полна. Тогда, если тензоры кручения, неметричности и кривизны равны нулю на всем многообразии, то  $\mathbb{M}$  изометрично либо (псевдо-)евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$ , либо факторпространству  $\mathbb{R}^n/\mathbb{G}$ , где  $\mathbb{G}$  – группа преобразований, действующая на  $\mathbb{R}^n$  свободно и собственнo разрывно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** См., например, [36], следствие 1.9.5.

## 6.8. Свойства тензора кривизны

Помимо тождеств Бианки тензоры кручения и кривизны удовлетворяют ряду других дифференциальных соотношений. Выведем ряд полезных тождеств, исходя из определения тензора кривизны (6.72). Прямые вычисления с учетом выражения аффинной связности через метрику, кручение и неметричность показывают, что антисимметризация тензора кривизны по первым трем индексам определяется только тензором кручения и его ковариантными производными:

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta + R_{\beta\gamma\alpha}{}^\delta + R_{\gamma\alpha\beta}{}^\delta = \nabla_\alpha T_{\beta\gamma}{}^\delta + \nabla_\beta T_{\gamma\alpha}{}^\delta + \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^\delta + T_{\alpha\beta}{}^\epsilon T_{\epsilon\gamma}{}^\delta + T_{\beta\gamma}{}^\epsilon T_{\epsilon\alpha}{}^\delta + T_{\gamma\alpha}{}^\epsilon T_{\epsilon\beta}{}^\delta. \quad (6.76)$$

Это означает, что в римановой геометрии, а также в аффинной геометрии без кручения тензор кривизны удовлетворяет тождеству

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta + R_{\beta\gamma\alpha}{}^\delta + R_{\gamma\alpha\beta}{}^\delta = 0. \quad (6.77)$$

Обратное утверждение в общем случае неверно. То есть из равенства (6.77) не следует, что кручение равно нулю.

Пусть на многообразии  $\mathbb{M}$  задана аффинная геометрия, т.е. метрика и связность. Приведем явное выражение для тензора кривизны со всеми опущенными индексами. С учетом разложения связности (6.16) и тождества (6.24) получаем равенство

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} := R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon g_{\epsilon\delta} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\beta\delta\epsilon} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon (T_{\beta\delta\epsilon} + Q_{\beta\delta\epsilon}) - (\alpha \leftrightarrow \beta). \quad (6.78)$$

Если у тензора кривизны со всеми опущенными индексами произвести симметризацию по последней паре индексов, то получим тождество

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta\delta\gamma} = \nabla_\alpha Q_{\beta\gamma\delta} - \nabla_\beta Q_{\alpha\gamma\delta} + T_{\alpha\beta}{}^\epsilon Q_{\epsilon\gamma\delta}. \quad (6.79)$$

Свертывая это тождество по последней паре индексов, получаем равенство

$$\begin{aligned} 2R_{\alpha\beta\gamma}{}^\gamma &= 2(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = \nabla_\alpha Q_\beta - \nabla_\beta Q_\alpha + T_{\alpha\beta}{}^\gamma Q_\gamma \\ &= \partial_\alpha Q_\beta - \partial_\beta Q_\alpha, \end{aligned} \quad (6.80)$$

где  $Q_\alpha := Q_{\alpha\beta}{}^\beta$ . Отсюда следует, что в геометрии Римана–Картана–Вейля свертка тензора кривизны по последним двум индексам дает напряженность для формы Вейля.

Рассмотрим симметрии тензора кривизны относительно перестановок индексов. В общем случае аффинной геометрии единственная симметрия тензора кривизны со всеми опущенными индексами – это антисимметрия по первой паре индексов:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad (6.81)$$

что сразу вытекает из определения (6.72). Отсюда следует, что в аффинной геометрии число линейно независимых компонент тензора кривизны равно

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^3(n-1)}{2}.$$

В геометрии Римана–Картана тензор кривизны антисимметричен также и по второй паре индексов, что является следствием уравнения (6.79),

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}. \quad (6.82)$$

Поэтому число его линейно независимых компонент меньше:

$$[R_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

В (псевдо)римановой геометрии тензор кривизны обладает дополнительной симметрией: его антисимметризация по первым трем индексам тождественно обращается в нуль

$$\tilde{R}_{[\alpha\beta\gamma]\delta} = 0. \quad (6.83)$$

что следует из уравнения (6.76). Следовательно, число его линейно независимых компонент равно

$$[\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}] = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Из свойств (6.81), (6.82) и (6.83) следует, что в (псевдо)римановой геометрии тензор кривизны симметричен также относительно перестановки первой пары индексов со второй,

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}. \quad (6.84)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обратные утверждения, связывающие геометрию с симметрией тензора кривизны неверны. Например, тензор кривизны может быть антисимметричен по второй паре индексов, и в то же время тензор неметричности может быть нетривиальным.

В (псевдо)римановой геометрии тензор кривизны со всеми опущенными индексами следующим образом выражается через метрику:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha\gamma}^2 g_{\beta\delta} - \partial_{\alpha\delta}^2 g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta\gamma}^2 g_{\alpha\delta} + \partial_{\beta\delta}^2 g_{\alpha\gamma}) + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^\epsilon \tilde{\Gamma}_{\beta\delta\epsilon} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^\epsilon \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma\epsilon}. \quad (6.85)$$

Как видим, он линеен по вторым производным от метрики и квадратичен по первым производным.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** По заданному тензору кривизны путем свертки пары индексов можно построить *тензор Риччи*

$$R_{\alpha\gamma} := R_{\alpha\beta\gamma}{}^\beta. \quad (6.86)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Тензор кривизны и тензор Риччи строятся только по аффинной связности, без использования метрики.

В общем случае тензор Риччи не обладает никакой симметрией по своим индексам. В (псевдо)римановой геометрии он симметричен относительно перестановки индексов:

$$\tilde{R}_{\alpha\gamma} = \tilde{R}_{\gamma\alpha}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Свертывая тензор Риччи с обратной метрикой, получаем *скалярную кривизну* многообразия

$$R := R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (6.87)$$

Скалярная кривизна зависит и от связности, и от метрики. Функция

$$K := -\frac{1}{2}R, \quad (6.88)$$

где  $R$  – скалярная кривизна, называется *гауссовой кривизной* многообразия.

ПРИМЕР 6.8.1. Пусть двумерная поверхность задана в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  уравнением  $z = f(x, y)$  с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью, причем

$$f(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0,$$

где  $f_x := \partial_x f$  и  $f_y := \partial_y f$ . Тогда скалярная кривизна в начале координат, соответствующая индуцированной метрике,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2,$$

пропорциональна определителю гессиана

$$R = -2 \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = -2K,$$

где  $K$  – гауссова кривизна поверхности. Поворотом евклидова пространства в плоскости  $x, y$  гессиан всегда можно привести к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & f_{yy} \end{pmatrix},$$

где, скажем,  $f_{xx}(0, 0) \geq f_{yy}(0, 0)$ . Если  $f_{xx} > f_{yy}$ , то оси  $x, y$  называются *главными направлениями* поверхности в данной точке. При  $f_{xx} = f_{yy}$ , главные направления не определены. Если гауссова кривизна положительна,  $K > 0$ , то поверхность в начале координат имеет локальный экстремум и лежит по одну сторону плоскости  $z = 0$ . Если кривизна меньше нуля,  $K < 0$ , то поверхность в начале координат имеет седловую точку. При  $K = 0$  по крайней мере одна из вторых частных производных обращается в нуль, и мы имеем касание более высокого порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Многие авторы определяют тензор кривизны многообразия таким образом, чтобы скалярная кривизна совпала с гауссовой кривизной. Мы используем определения тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны, которые широко используются в дифференциальной геометрии и приложениях. Это не приводит к недоразумениям. Однако надо помнить, что в наших обозначениях скалярная и гауссова кривизна двумерной сферы  $S_r^2$  радиуса  $r$  равны:  $R = -2K = -2/r^2$  и  $K = 1/r^2$ .

В аффинной геометрии компоненты связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  инвариантны относительно преобразования

$$g_{\alpha\beta} \mapsto -g_{\alpha\beta}, \quad T_{\alpha\beta}^\gamma \mapsto T_{\alpha\beta}^\gamma, \quad Q_{\alpha\beta}^\gamma \mapsto Q_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (6.89)$$

Поэтому тензор кривизны и тензор Риччи также инвариантны. При этом скалярная кривизна (6.87) меняет знак.

Рассмотрим на многообразии  $\mathbb{M}$  произвольное векторное поле  $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  и 1-форму  $A = dx^\alpha A_\alpha \in \Lambda_1(\mathbb{M})$ . Ковариантные производные от их компонент имеют вид (6.2), (6.3). Прямые вычисления показывают, что коммутатор двух ковариантных производных определяется тензором кривизны и кручения:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]X^\gamma = R_{\alpha\beta\delta}^\gamma X^\delta - T_{\alpha\beta}^\delta \nabla_\delta X^\gamma, \quad (6.90)$$

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}^\delta A_\delta - T_{\alpha\beta}^\delta \nabla_\delta A_\gamma. \quad (6.91)$$

и отличается только знаком перед слагаемым с кривизной. Коммутатор ковариантных производных от скалярного поля  $\varphi(x)$  проще:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\varphi = -T_{\alpha\beta}^\gamma \nabla_\gamma \varphi \quad (6.92)$$

и определяется только тензором кручения.

Формулы (6.90), (6.91) обобщаются на тензоры произвольного ранга.

ПРИМЕР 6.8.2. Коммутатор ковариантных производных от компонент тензора  $K \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{M})$  типа (1, 1) имеет вид

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]K^\gamma_\delta = R_{\alpha\beta\epsilon}^\gamma K^\epsilon_\delta - R_{\alpha\beta\delta}^\epsilon K^\gamma_\epsilon - T_{\alpha\beta}^\epsilon \nabla_\epsilon K^\gamma_\delta.$$

Для тензоров более высокого ранга будем иметь по одному слагаемому с кривизной со знаком плюс и минус соответственно для каждого контравариантного и ковариантного индекса и одно общее слагаемое с тензором кручения.



Формулы для коммутатора ковариантных производных можно использовать для доказательства некоторых тождеств. Докажем несколько формул, справедливых в (псевдо)римановой геометрии. Пусть  $F^{\alpha\beta}$  – произвольный антисимметричный тензор второго ранга. Тогда в (псевдо)римановой геометрии справедливо равенство

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} = 0.$$

Действительно,

$$[\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta]F^{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\alpha F^{\gamma\beta} + \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\beta F^{\alpha\gamma} = 2\tilde{R}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0,$$

поскольку тензор Риччи в этом случае симметричен.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8.1.** В (псевдо)римановой геометрии имеет место следующая формула

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= [\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta]R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \tilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^\alpha \tilde{R}^{\epsilon\beta\gamma\delta} + \tilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^\beta \tilde{R}^{\alpha\epsilon\gamma\delta} + \tilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^\gamma \tilde{R}^{\alpha\beta\epsilon\delta} + \tilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^\delta \tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\epsilon}. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль в силу симметрии тензора Риччи. Последние два слагаемых сокращаются:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^\gamma \tilde{R}^{\alpha\beta\epsilon\delta} - \tilde{R}_{\alpha\beta\epsilon}{}^\delta \tilde{R}^{\alpha\beta\epsilon\gamma} = 0$$

в силу симметрии слагаемых по индексам  $\gamma, \delta$ .

В заключение настоящего раздела приведем важную формулу, связывающую скалярную кривизну  $R(g, \Gamma)$  в геометрии Римана–Картана со скалярной кривизной  $\tilde{R}(g)$  в соответствующей (псевдо)римановой геометрии, вычисленной только по метрике при нулевом кручении:

$$R + \frac{1}{4}T_{\alpha\beta\gamma}T^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}T_{\alpha\beta\gamma}T^{\gamma\alpha\beta} - T_\alpha T^\alpha - \frac{2}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha(\sqrt{|g|}T^\alpha) = \tilde{R}, \quad (6.93)$$

где  $T_\alpha := T_{\beta\alpha}{}^\beta$  – след тензора кручения. Это тождество проверяется путем прямых вычислений и справедливо в пространстве произвольной размерности  $n \geq 2$  и для метрики произвольной сигнатуры. Приведенное тождество можно переписать в явно ковариантном виде

$$R + \frac{1}{4}T_{\alpha\beta\gamma}T^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}T_{\alpha\beta\gamma}T^{\gamma\alpha\beta} - T_\alpha T^\alpha - 2\tilde{\nabla}_\alpha T^\alpha = \tilde{R},$$

где мы воспользовались тождеством (6.61). Важность этой формулы заключается в том, что, поскольку обе скалярные кривизны приводят к уравнениям движения не выше второго порядка (в переменных Картана), то при выборе лагранжиана можно ограничиться одной скалярной кривизной и квадратами тензоров кручения в моделях гравитации с динамическим кручением.

## 6.9. Неголономный базис

Аффинная геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$  задается метрикой и аффинной связностью или, что эквивалентно, метрикой, кручением и неметричностью. При таком описании каждое преобразование координат сопровождаются соответствующим преобразованием компонент тензорных полей относительно координатного базиса. Существует также другой способ описания геометрии, когда компоненты тензорных полей рассматриваются относительно репера, который не меняется при преобразовании координат. В этом случае на компоненты тензорных полей действует группа локальных преобразований  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ , что соответствует вращению репера. В результате геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$  будет задана репером  $e_\alpha^a$  и линейной или  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ -связностью  $\omega_{\alpha a}{}^b$  (см. раздел 5.4).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Переменные репер  $e_\alpha^a(x)$  и  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ -связность  $\omega_{\alpha a}{}^b(x)$ , задающие на многообразии  $\mathbb{M}$  аффинную геометрию, называются *переменными Картана*. В четырехмерном пространстве-времени репер называется *тетрадой*. В двумерном и трехмерном пространстве репер называется соответственно *диадой* и *триадой*.

ЗАМЕЧАНИЕ. В моделях математической физики переменные Картана, как правило, упрощают вычисления и необходимы при рассмотрении спинорных полей на многообразии  $\mathbb{M}$ .

Напомним, что координатный базис касательных пространств  $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  во всех точках многообразия  $x \in \mathbb{M}$  мы обозначаем  $\partial_\alpha$ , и он называется *голономным*. Важным свойством координатных базисных векторов  $\partial_\alpha$  является их коммутативность:

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0.$$

Предположим, что в каждой точке многообразия  $x \in \mathbb{M}$  задан произвольный базис касательного пространства  $e_a(x)$  (репер) и дуальный к нему базис 1-форм  $e^a(x)$  (корепер),  $a = 1, \dots, n$ . Дуальность означает, что значение 1-форм  $e^a$  на векторных полях  $e_b$  равно символу Кронекера:  $e^a(e_b) = \delta_b^a$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Как уже отмечалось, репер может существовать глобально не для всех многообразий. Например, его не существует на неориентируемых многообразиях. В таких случаях все, сказанное ниже, имеет локальный характер. Тем не менее полученные формулы важны для вычислений, которые, как правило, проводятся в какой либо системе координат.

Репер и корепер можно разложить по координатному базису:

$$e_a = e^\alpha{}_a \partial_\alpha, \quad e^a = dx^\alpha e_\alpha{}^a,$$

где  $e^\alpha{}_a$  и  $e_\alpha{}^a$  – взаимно обратные невырожденные матрицы, что является следствием дуальности:

$$e^\alpha{}_a e_\alpha{}^b = \delta_a^b, \quad e^\alpha{}_a e_\beta{}^a = \delta_\beta^\alpha.$$

По-предположению, матрицы  $e^\alpha{}_a$  и  $e_\alpha{}^a$  невырождены и достаточно гладко зависят от точки многообразия.

В общем случае репер представляет собой *неголономный базис* касательного пространства, т.е. не существует такой системы координат  $x^a = x^a(x)$ , что

$$e^\alpha{}_a = \partial_a x^\alpha. \quad (6.94)$$

Репер определен с точностью до локальных  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразований, действующих на латинские индексы. Его важнейшей характеристикой являются *компоненты неголономности*  $c_{ab}{}^c$ , которые определяются коммутатором базисных векторных полей:

$$[e_a, e_b] := c_{ab}{}^c e_c \quad (6.95)$$

и антисимметричны по нижним индексам,

$$c_{ab}{}^c(x) = -c_{ba}{}^c(x).$$

Из тождеств Якоби для алгебры Ли векторных полей,

$$[e_a[e_b, e_c]] + [e_b[e_c, e_a]] + [e_c[e_a, e_b]] = 0,$$

следуют тождества для компонент неголономности:

$$\partial_a c_{bc}{}^d + \partial_b c_{ca}{}^d + \partial_c c_{ab}{}^d + c_{ab}{}^e c_{ce}{}^d + c_{bc}{}^e c_{ae}{}^d + c_{ca}{}^e c_{be}{}^d = 0, \quad (6.96)$$

где  $\partial_a := e^\alpha{}_a \partial_\alpha$ .

Из определения (6.95) следует явное выражение для компонент неголономности через компоненты репера и их производные

$$c_{ab}{}^c := (e^\alpha{}_a \partial_\alpha e^\beta{}_b - e^\alpha{}_b \partial_\alpha e^\beta{}_a) e_\beta{}^c. \quad (6.97)$$

Умножив это соотношение на обратные матрицы  $e_\alpha{}^a$ , получим эквивалентную формулу

$$c_{\alpha\beta}{}^c = e_\alpha{}^a e_\beta{}^b c_{ab}{}^c = -\partial_\alpha e_\beta{}^c + \partial_\beta e_\alpha{}^c, \quad (6.98)$$

которую можно переписать в виде

$$de^c = \frac{1}{2} e^a \wedge e^b c_{ba}{}^c, \quad (6.99)$$

где использовано определение внешнего умножения и дифференцирования форм (см. раздел 3).

Многие формулы содержат след компонент неголономности, который определяется следующим образом:

$$c_a := c_{ba}{}^b = \partial_\alpha e^\alpha{}_a + \frac{\partial_a \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}. \quad (6.100)$$

Компоненты неголономности ковариантны относительно преобразования координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ ( $x$ ), но не являются компонентами тензора относительно локальных  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразований.

Нетрудно проверить, что равенство нулю компонент неголономности является необходимым и достаточным условием локальной разрешимости системы уравнений (6.94). Это означает, что, если компоненты неголономности равны нулю в некоторой области, то для любой точки из этой области существует окрестность, в которой можно выбрать такую систему координат, что базис станет голономным  $e_a = \partial_a$ .

Использование неголономного базиса вместо координатного бывает значительно удобнее и часто используется в приложениях. Поэтому получим основные формулы дифференциальной геометрии в неголономном базисе.

Произвольное векторное поле можно разложить как по координатному, так и по некоординатному (неголономному) базису

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^a e_a,$$

где  $X^\alpha = e^\alpha{}_a X^a$  и  $X^a = X^\alpha e_\alpha{}^a$ . Предположим, что переход от греческих индексов к латинским и наоборот у компонент тензорных полей произвольного ранга всегда осуществляется с помощью компонент репера и корепера. При этом все симметрии относительно перестановок индексов, конечно, сохраняются. Компоненты метрики в неголономном базисе имеют вид

$$g_{ab} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b g_{\alpha\beta}. \quad (6.101)$$

В общем случае компоненты метрики  $g_{ab}(x)$  зависят от точки многообразия. Метрика  $g_{ab}$  всегда имеет ту же сигнатуру, что и метрика  $g_{\alpha\beta}$ , так как матрица  $e^\alpha{}_a$  невырождена. Подъем и опускание греческих и латинских индексов осуществляется с помощью метрик  $g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ab}$ , соответственно.

Как правило, репер используют в тех случаях, когда матрица  $g_{ab}$  является диагональной и постоянной, а на диагонали расположены плюс и минус единицы:

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag} \left( \underbrace{+\cdots+}_p \underbrace{-\cdots-}_q \right).$$

Локально такой репер существует, поскольку уравнение (6.101) при одинаковых сигнатурах метрик  $g_{ab}$  и  $g_{\alpha\beta}$  всегда разрешимо относительно репера. Такой репер называется *ортонормальным* и определен с точностью до  $\mathbb{O}(p, q)$  вращений. Ортонормальный базис часто бывает более удобным, так как метрика в этом базисе постоянна.

Для римановой метрики множество реперов делится на два класса: с положительным и отрицательным определителем. Для многообразий с метрикой лоренцевой сигнатуры множество реперов можно разбить на четыре класса, по числу несвязных компонент группы Лоренца.

Компоненты тензоров второго и более высокого рангов могут содержать одновременно и греческие и латинские индексы. По построению, ковариантная производная от компонент такого тензора содержит по одному слагаемому с аффинной связностью для каждого греческого индекса и одному слагаемому с линейной связностью для каждого латинского индекса. Из определения (локальной формы) линейной связности (5.51) следует взаимно однозначная связь между линейной и аффинной связностью:

$$\omega_{\alpha a}{}^b = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma e^\beta{}_a e_\gamma{}^b - \partial_\alpha e_\beta{}^b e^\beta{}_a. \quad (6.102)$$

Эту формулу можно переписать в виде равенства нулю ковариантной производной от компонент корепера:

$$\nabla_\alpha e_\beta{}^a = \partial_\alpha e_\beta{}^a - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma{}^a + e_\beta{}^b \omega_{\alpha b}{}^a = 0. \quad (6.103)$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от компонент репера также обращается в нуль

$$\nabla_\alpha e^\beta{}_a = \partial_\alpha e^\beta{}_a + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta e^\gamma{}_a - \omega_{\alpha a}{}^b e^\beta{}_b = 0.$$

Тогда, используя правило Лейбница, можно свободно переходить от греческих индексов к латинским и наоборот под знаком ковариантного дифференцирования:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha X^a &= \nabla_\alpha(X^\beta e_\beta{}^a) = (\nabla_\alpha X^\beta) e_\beta{}^a, \\ \nabla_\alpha X_a &= \nabla_\alpha(X_\beta e^\beta{}_a) = (\nabla_\alpha X_\beta) e^\beta{}_a,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha X^a &= \partial_\alpha X^a + \omega_{\alpha b}{}^a X^b, \\ \nabla_\alpha X_a &= \partial_\alpha X_a - \omega_{\alpha a}{}^b X_b\end{aligned}\tag{6.104}$$

– ковариантные производные от компонент векторного поля относительно неголономного базиса.

Если аффинная связность не является метрической, то операция подъема и опускания индексов с помощью метрик  $g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ab}$  не коммутирует с ковариантной производной.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Формулу (6.102) можно рассматривать, как калибровочное преобразование (вращение)  $\Gamma \mapsto \omega$  в касательном пространстве, которое совпадает с преобразованием калибровочных полей Янга–Миллса. При этом репер  $e_\alpha{}^a \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  играет роль матрицы преобразования (локального вращения), а координаты многообразия не затрагиваются.

В координатном базисе преобразование координат сопровождается преобразованием компонент тензорных полей. Введение репера позволяет отделить преобразование координат от преобразований в касательном пространстве. Это достигается путем введения  $n^2$  новых полей  $e_\alpha{}^a(x)$ . В результате появляется дополнительная возможность совершать локальные  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразования, зависящие также от  $n^2$  функций, в касательном пространстве, не затрагивая координат многообразия. Очевидно, что всегда можно совершить такое преобразование, что в результате репер совпадет с координатным базисом  $e_\alpha{}^a = \delta_\alpha^a$ . В этом случае линейная связность совпадет с аффинной  $\omega_{\alpha a}{}^b = \Gamma_{\alpha a}{}^b$ , а выражения для кривизны (6.105) и кручения (6.106) перейдут в уже знакомые формулы аффинной геометрии, так как компоненты неголономности обратятся в нуль:  $c_{ab}{}^c = 0$ .

Формулы для кривизны (5.56) и кручения (5.55) содержат два греческих индекса. Эти индексы также можно преобразовать в неголономные. Простые вычисления приводят к следующим компонентам тензора кривизны и кручения в неголономном базисе:

$$R_{abc}{}^d = \partial_a \omega_{bc}{}^d - \partial_b \omega_{ac}{}^d - \omega_{ac}{}^e \omega_{be}{}^d + \omega_{bc}{}^e \omega_{ae}{}^d - c_{ab}{}^e \omega_{ec}{}^d,\tag{6.105}$$

$$T_{ab}{}^c = \omega_{ab}{}^c - \omega_{ba}{}^c - c_{ab}{}^c,\tag{6.106}$$

где  $\omega_{ab}{}^c := e^\alpha{}_a \omega_{\alpha b}{}^c$  и  $\partial_a := e^\alpha{}_a \partial_\alpha$ . Эти формулы также часто используются в приложениях, особенно тогда, когда компоненты линейной связности  $\omega_{ab}{}^c$  являются постоянными относительно некоторого неголономного базиса. В разделе 8 мы используем их для вычисления тензора кручения и кривизны групп Ли.

Если на многообразии задана метрика, то ковариантные компоненты тензора кривизны в неголономном базисе равны

$$R_{abcd} = \partial_a \omega_{bcd} - \partial_b \omega_{acd} - \omega_{bc}{}^e \omega_{ade} + \omega_{ac}{}^e \omega_{bde} - c_{ab}{}^e \omega_{ecd}.\tag{6.107}$$

В этом случае линейную связность, аналогично аффинной, можно выразить через репер, кручение и неметричность. Из уравнения (6.16) и определения (6.102) следует выражение для линейной связности со всеми неголономными индексами:

$$\begin{aligned}\omega_{abc} &= \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) + \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}) + \\ &+ \frac{1}{2}(T_{abc} - T_{bca} + T_{cab}) + \frac{1}{2}(Q_{abc} + Q_{bca} - Q_{cab}),\end{aligned}\tag{6.108}$$

где  $c_{abc} := c_{ab}{}^d g_{dc}$ .

Если (псевдо)риманово многообразие допускает векторное поле Киллинга  $K = K^a e_a$ , то уравнение Киллинга в неголономном базисе принимает вид

$$\tilde{\nabla}_a K_b + \tilde{\nabla}_b K_a = 0, \quad (6.109)$$

где

$$\tilde{\nabla}_a K_b = e^\alpha{}_a \partial_\alpha K_b - \tilde{\omega}_{ab}{}^c K_c, \quad K_b := K^a g_{ab}. \quad (6.110)$$

Как и ранее знак тильды означает, что связность построена по метрике при нулевом кручении и неметричности. Эта формула следует из того, что переход между индексами можно проводить под знаком ковариантного дифференцирования.

В (псевдо)римановой геометрии кручение и неметричность равны нулю. Рассмотрим ортонормальные реперы, для которых  $g_{ab} = \delta_{ab}$  или  $\eta_{ab}$ , если сигнатура отличается от евклидовой. Такие реперы определены с точностью до локальных  $\mathbb{O}(n)$  вращений (или  $\mathbb{O}(p, q)$  вращений,  $p + q = n$ , для неевклидовой сигнатуры). Тогда из формулы (6.108) следует выражение для соответствующей  $\mathbb{SO}(n)$ - или  $\mathbb{SO}(p, q)$ -связности через компоненты неголономности:

$$\tilde{\omega}_{abc} = \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}). \quad (6.111)$$

## 6.10. Тождества Бианки

Тождества Бианки играют большую роль в приложениях и поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим их в компонентах. Громоздкие, но прямые вычисления позволяют записать тождества (5.44) и (5.45) после спуска на базу в переменных Картана:

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma a}{}^b + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha a}{}^b + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}{}^b = T_{\alpha\beta}{}^\delta R_{\gamma\delta a}{}^b + T_{\beta\gamma}{}^\delta R_{\alpha\delta a}{}^b + T_{\gamma\alpha}{}^\delta R_{\beta\delta a}{}^b, \quad (6.112)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma}{}^a + \nabla_\beta T_{\gamma\alpha}{}^a + \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^a &= T_{\alpha\beta}{}^\delta T_{\gamma\delta}{}^a + T_{\beta\gamma}{}^\delta T_{\alpha\delta}{}^a + T_{\gamma\alpha}{}^\delta T_{\beta\delta}{}^a \\ &+ R_{\alpha\beta\gamma}{}^a + R_{\beta\gamma\alpha}{}^a + R_{\gamma\alpha\beta}{}^a. \end{aligned} \quad (6.113)$$

В аффинной геометрии их можно свернуть, соответственно, с репером  $e^\gamma{}_b$  и  $e^\gamma{}_a$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha R_{\beta a} - \nabla_\beta R_{\alpha a} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta a}{}^\gamma &= -T_{\alpha\beta}{}^\delta R_{\delta a} - T_{\alpha\gamma}{}^\delta R_{\alpha\delta a}{}^\gamma + T_{\beta\gamma}{}^\delta R_{\alpha\delta a}{}^\gamma, \\ \nabla_\alpha T_\beta - \nabla_\beta T_\alpha - \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^\gamma &= T_{\alpha\gamma}{}^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - T_{\beta\gamma}{}^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma - T_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma + R_{\alpha\beta} - R_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta\gamma}{}^\gamma. \end{aligned}$$

В геометрии Римана–Картана, когда выполнено условие метричности, последнее слагаемое в последнем тождестве обращается в нуль. Тогда свернутые тождества Бианки можно переписать в виде

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma} - \nabla_\beta R_{\alpha\gamma} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = -T_{\alpha\beta}{}^\delta R_{\delta\gamma} - T_{\alpha\delta}{}^\epsilon R_{\beta\epsilon\gamma}{}^\delta + T_{\beta\delta}{}^\epsilon R_{\alpha\epsilon\gamma}{}^\delta, \quad (6.114)$$

$$\nabla_\alpha T_\beta - \nabla_\beta T_\alpha - \nabla_\gamma T_{\alpha\beta}{}^\gamma = T_{\alpha\gamma}{}^\delta T_{\beta\delta}{}^\gamma - T_{\beta\gamma}{}^\delta T_{\alpha\delta}{}^\gamma - T_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma + R_{\alpha\beta} - R_{\beta\alpha}, \quad (6.115)$$

где мы перешли ко всем греческим индексам.

Из последнего тождества (6.115) следует, что антисимметричная часть тензора Риччи в (псевдо)римановой геометрии (при нулевом кручении) всегда равна нулю:  $\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\beta\alpha}$ .

Далее, свертка (6.114) с  $g^{\alpha\gamma}$  (при нулевом тензоре неметричности) приводит к равенству

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 2T_{\alpha\beta\gamma} R^{\gamma\beta} - R_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta\beta}. \quad (6.116)$$

В (псевдо)римановой геометрии это тождество упрощается:

$$\tilde{\nabla}_\beta G^{\beta\alpha} = 0, \quad (6.117)$$

где

$$G_{\alpha\beta} := \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R}$$

– тензор Эйнштейна, построенный из тензора Риччи и скалярной кривизны при нулевом кручении и тензоре неметричности.

Тождество (6.115) антисимметрично по индексам  $\alpha\beta$  и поэтому свертка с  $g^{\alpha\beta}$  приводит к тождеству  $0 = 0$ .

## 7. Криволинейные координаты в $\mathbb{R}^3$

Формализм дифференциальной геометрии, развитый в предыдущих разделах, становится полезным и естественным даже в евклидовом пространстве, если вычисления проводятся в криволинейных системах координат. В настоящей главе мы продемонстрируем это на примере сферической и цилиндрической систем координат в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . В частности, понятие метрики и символов Кристоффеля чрезвычайно полезно при нахождении явного вида ковариантных дифференциальных операторов, которые часто используются в приложениях.

### 7.1. Сферические координаты

Рассмотрим *сферические координаты*  $r, \theta, \varphi$  в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $x, y, z$ , рис. 7.1. Функции перехода от сферических координат к декартовым имеют хорошо

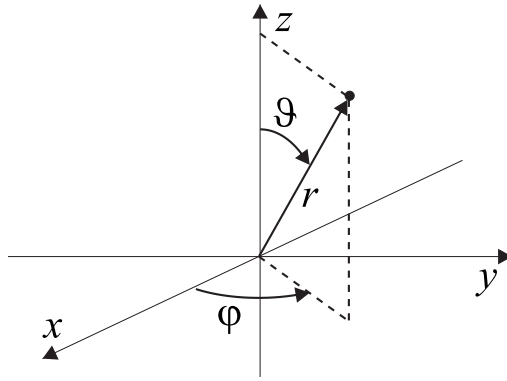


Рис. 7.1. Сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

известный вид

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{7.1}$$

и определены при всех значениях  $r, \theta, \varphi$ . Углы  $\theta$  и  $\varphi$  называются соответственно *азимутальным* и *полярным*. Якобиан этого преобразования легко вычислить

$$J = r^2 \sin \theta.\tag{7.2}$$

Отсюда следует, что преобразование координат (7.1) вырождено при  $r = 0$  или  $\theta = 0, \pi$ , т.е. на оси  $z$ . Действительно, обратные преобразования,

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x},\end{aligned}\tag{7.3}$$

однозначно определены всюду, кроме оси  $z$ . При этом все евклидово пространство, из которого удалена полуплоскость  $y = 0, x \geq 0$ , включающая ось  $z$ , взаимно однозначно отображается на открытую область

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (7.4)$$

Если полуплоскость не удалять, то точки с координатами  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$  необходимо отождествить.

Переход к сферическим координатам сохраняет ориентацию, поскольку якобиан перехода (7.2) положительн в области (7.4).

Из формул (7.1) следуют правила преобразования дифференциалов:

$$\begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi, \\ dy &= \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Подставляя эти выражения в евклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (7.6)$$

получим следующее выражение для метрики в сферической системе координат

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (7.7)$$

где

$$d\Omega := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (7.8)$$

– дифференциал телесного угла. Отсюда следует, что компоненты евклидовой метрики в сферической системе координат

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

являются функциями, а не константами. Отметим, что определитель метрики равен квадрату якобиана преобразования координат,  $\det g_{\alpha\beta} = J^2$ .

Помимо инвариантной квадратичной формы декартовых дифференциалов (7.6) существует еще одна линейно с ней независимая квадратичная форма

$$(xdx + ydy + zdz)^2,$$

инвариантная относительно  $\mathbb{SO}(3)$  вращений. В сферических координатах также имеются две независимые инвариантные квадратичные формы, которые даются, например, выражениями  $dr^2$  и  $d\Omega$ . Между этими формами существует связь:

$$\begin{aligned} dr^2 &= \frac{1}{r^2} (xdx + ydy + zdz)^2, \\ d\Omega &= \frac{1}{r^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1}{r^4} (xdx + ydy + zdz)^2. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Обсудим, какие структуры существуют в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , инвариантные относительно  $\mathbb{SO}(3)$  вращений. Общая теория инвариантных структур будет рассмотрена позже в разделе 9.3.

Из декартовых координат можно составить только одну функционально независимую сферически симметричную комбинацию – это радиус  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Нетрудно показать, что любая сферически симметричная функция или плотность  $h$  может зависеть только от радиуса,  $h = h(r)$ .

Сферически симметричное векторное поле в сферической системе координат имеет только одну нетривиальную компоненту, направленную по радиусу,

$$X = \{X^r(r) := f(r), 0, 0\}.$$

В декартовой системе координат оно имеет вид

$$X = \left\{ \frac{x}{r} f, \frac{y}{r} f, \frac{z}{r} f \right\}$$

или

$$X^i = \frac{x^i}{r} f(r),$$

где  $\{x^i\} = \{x, y, z\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а  $f(r)$  – некоторая функция только от радиуса.

Инвариантный симметричный тензор второго ранга удобно записывать в декартовой системе координат, выделив явно след и бесследовую часть (неприводимые компоненты):

$$X^{ij} = \delta^{ij} f_1(r) + \left( \delta^{ij} - 3 \frac{x^i x^j}{r^2} \right) f_2(r),$$

где  $\delta^{ij}$  – евклидова метрика и  $f_{1,2}$  – некоторые функции. Первое слагаемое в этом разложении пропорционально следу тензора  $X^{ij} \delta_{ij} = 3f_1$ , а второе слагаемое имеет нулевой след. То есть сферически инвариантный тензор второго ранга взаимно однозначно определяется двумя функциями только от радиуса:  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ .

Антисимметричный тензор второго ранга  $Y^{ij} = -Y^{ji}$ , инвариантный относительно полной группы вращений  $\mathbb{O}(3)$ , определяется одной псевдоскалярной функцией  $f^*(r)$  от радиуса:

$$Y^{ij} = \varepsilon^{ijk} x_k f^*(r),$$

где  $\varepsilon^{ijk}$  – полностью антисимметричный псевдотензор третьего ранга. При отражении одной из декартовых осей координат  $\varepsilon^{ijk}$  и  $f^*$  меняют знаки, оставляя антисимметричный тензор без изменения.

Дифференциал телесного угла (7.8) задает метрику на сфере единичного радиуса с центром в начале координат. С топологической точки зрения евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с выколотым началом координат является прямым произведением сферы  $\mathbb{S}^2$  и положительной полуоси  $\mathbb{R}_+$ :

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_+.$$

Приведем явные формулы преобразования частных производных (координатного базиса векторных полей), которые часто используются в приложениях:

$$\begin{aligned} \partial_r &= \sin \theta \cos \varphi \partial_x + \sin \theta \sin \varphi \partial_y + \cos \theta \partial_z, \\ \partial_\theta &= r \cos \theta \cos \varphi \partial_x + r \cos \theta \sin \varphi \partial_y - r \sin \theta \partial_z, \\ \partial_\varphi &= -r \sin \theta \sin \varphi \partial_x + r \sin \theta \cos \varphi \partial_y, \end{aligned}$$

и их обратные:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \sin \theta \cos \varphi \partial_r + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi, \\ \partial_y &= \sin \theta \sin \varphi \partial_r + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\varphi, \\ \partial_z &= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta. \end{aligned}$$

В приложениях тензорные поля часто рассматриваются в ортонормированном базисе векторных полей и 1-форм:

$$\begin{aligned} e_r &:= \partial_r, & e_\theta &:= \frac{1}{r} \partial_\theta, & e_\varphi &:= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi, \\ e^r &:= dr, & e^\theta &:= r d\theta, & e^\varphi &:= r \sin \theta d\varphi, \end{aligned} \quad (7.11)$$

что следует непосредственно из вида метрики (7.7). Этому базису соответствуют следующие компоненты ортонормированного репера и его обратного:

$$\begin{aligned} e_{\hat{r}} &= 1, & e_{\hat{\theta}} &= r, & e_{\hat{\varphi}} &= r \sin \theta, \\ e^{\hat{r}} &= 1, & e^{\hat{\theta}} &= \frac{1}{r}, & e^{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r \sin \theta}. \end{aligned} \quad (7.12)$$



При этом все недиагональные компоненты репера равны нулю. Здесь и далее шляпками обозначены индексы относительно этого репера. Векторное поле можно разложить как по координатному, так и по ортонормированному базису:

$$X = X^r \partial_r + X^\theta \partial_\theta + X^\varphi \partial_\varphi = \hat{X}^r e_r + \hat{X}^\theta e_\theta + \hat{X}^\varphi e_\varphi,$$

причем переход от компонент  $X^\alpha$  к  $X^{\hat{\alpha}}$  осуществляется с помощью репера. Отметим, что, поскольку репер ортонормирован, то компоненты векторных полей и соответствующих 1-форм совпадают:

$$X_{\hat{r}} = X^{\hat{r}}, \quad X_{\hat{\theta}} = X^{\hat{\theta}}, \quad X_{\hat{\varphi}} = X^{\hat{\varphi}}.$$

Получим явные формулы для градиента, ротора, дивергенции и лапласиана в сферической системе координат, которые используются в задачах со сферической симметрией. Чтобы получить явное выражение для инвариантных дифференциальных операторов в сферической системе координат нам понадобятся символы Кристоффеля (6.23). Они имеют девять ненулевых компонент:

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2\theta, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Из условия равенства нулю ковариантной производной репера (7.12)

$$\nabla_\alpha e_\beta^a = \partial_\alpha e_\beta^a - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma^a + \omega_{\alpha\beta}^a e_\beta^a = 0, \quad (7.14)$$

где  $\omega_{\alpha\beta}^a$  –  $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связность (без кручения), находим, что у  $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -связности только 6 компонент отличны от нуля:

$$\begin{aligned} \omega_{\theta\hat{r}}^{\hat{\theta}} &= -\omega_{\theta\hat{\theta}}^{\hat{r}} = 1, \\ \omega_{\varphi\hat{r}}^{\hat{\varphi}} &= -\omega_{\varphi\hat{\varphi}}^{\hat{r}} = \sin\theta, \\ \omega_{\varphi\hat{\theta}}^{\hat{\varphi}} &= -\omega_{\varphi\hat{\varphi}}^{\hat{\theta}} = \cos\theta. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Градиент скалярного поля  $f$  дает 1-форму:

$$df = e^r \partial_r f + e^\theta \frac{1}{r} \partial_\theta f + e^\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi f. \quad (7.16)$$

Для получения этой формулы в дифференциале  $df = dr \partial_r f + d\theta \partial_\theta f + d\varphi \partial_\varphi f$  дифференциалы  $dr$ ,  $d\theta$  и  $d\varphi$  необходимо заменить на ортонормированный базис  $e^r$ ,  $e^\theta$  и  $e^\varphi$  с помощью соотношений (7.11).

Дивергенция вектора (6.61) дает функцию

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 X^{\hat{r}}) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta X^{\hat{\theta}}) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi X^{\hat{\varphi}}. \quad (7.17)$$

Эта и последующие формулы получаются подстановкой символов Кристоффеля (7.13) в ковариантные производные и выражением компонент вектора в координатном базисе через его компоненты в ортонормированном базисе.

В инвариантном виде ротор 1-формы  $A = dx^\alpha A_\alpha$  определяется оператором Ходжа (3.49) и внешним дифференцированием (3.33):

$$\text{rot } A = *dA = e^r B_{\hat{r}} + e^\theta B_{\hat{\theta}} + e^\varphi B_{\hat{\varphi}}, \quad (7.18)$$

где компоненты разложения задаются формулами:

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= B^{\hat{r}} = \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta A_{\hat{\varphi}}) - \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi A_{\hat{\theta}}, \\ B_{\hat{\theta}} &= B^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi A_{\hat{r}} - \frac{1}{r} \partial_r (r A_{\hat{\varphi}}), \\ B_{\hat{\varphi}} &= B^{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \partial_r (r A_{\hat{\theta}}) - \frac{1}{r} \partial_\theta A_{\hat{r}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Лапласиан функции (6.68) дает также функцию:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 f. \quad (7.20)$$

Лапласиан 1-формы снова дает 1-форму:  $\Delta A_{\hat{\alpha}} = g^{\beta\gamma} \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\gamma A_{\hat{\alpha}}$ . После громоздких вычислений можно получить явные выражения для компонент:

$$\begin{aligned} \Delta A_{\hat{r}} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r A_{\hat{r}}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta A_{\hat{r}}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 A_{\hat{r}} - \frac{2}{r^2} A_{\hat{r}} - \\ &\quad - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta A_{\hat{\theta}}) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \partial_\varphi A_{\hat{\varphi}}, \\ \Delta A_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{r} \partial_r^2 (r A_{\hat{\theta}}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta A_{\hat{\theta}}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 A_{\hat{\theta}} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_{\hat{\theta}} + \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_{\hat{r}} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi A_{\hat{\varphi}}, \\ \Delta A_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r} \partial_r^2 (r A_{\hat{\varphi}}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta A_{\hat{\varphi}}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 A_{\hat{\varphi}} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_{\hat{\varphi}} + \\ &\quad + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi A_{\hat{\theta}} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \partial_\varphi A_{\hat{r}}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Отметим появление дополнительных слагаемых по сравнению с лапласианом функции (7.20).

Приведенные выше формулы для дифференциальных операторов можно также получить путем элементарных, но громоздких геометрических построений. Такой подход эквивалентен введенному ранее понятию ковариантной производной. Это показывает, что дифференциальная геометрия предоставляет естественный и конструктивный подход к получению явного вида дифференциальных операторов в различных криволинейных системах координат. Разумеется, геометрия пространства при этом остается евклидовой.

## 7.2. Цилиндрические координаты

Рассмотрим *цилиндрические координаты*  $r, \varphi, z$  в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , рис. 7.2. При переходе к цилиндрическим координатам мы вводим полярные координаты на плоскости  $x, y$ , оставляя координату  $z$  без изменений. Функции перехода и их обратные имеют вид (за третьей координатой  $z$  можно не следить):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= r \sin \varphi, & \varphi &= \arctg(y/x). \end{aligned}$$

Угол  $\varphi$ , как и в случае сферических координат, называется *полярным*. Якобиан преобразования координат равен  $J = r$  и является вырожденным в начале полярных координат, что соответствует оси  $z$ . Область определения цилиндрических координат задается неравенствами:

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty,$$

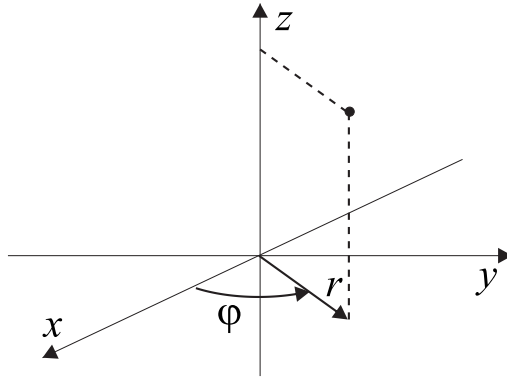
что соответствует евклидову пространству с удаленной полуплоскостью  $y = 0, x \geq 0$ .

Дифференциалы декартовых и полярных координат (координатные базисы 1-форм) связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, & dr &= \cos \varphi dx + \sin \varphi dy, \\ dy &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi, & d\varphi &= -\frac{\sin \varphi}{r} dx + \frac{\cos \varphi}{r} dy. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Частные производные в декартовых и полярных координатах (координатные базисы векторных полей) связаны простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \cos \varphi \partial_r - \frac{\sin \varphi}{r} \partial_\varphi, & \partial_r &= \cos \varphi \partial_x + \sin \varphi \partial_y, \\ \partial_y &= \sin \varphi \partial_r + \frac{\cos \varphi}{r} \partial_\varphi, & \partial_\varphi &= -r \sin \varphi \partial_x + r \cos \varphi \partial_y. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Рис. 7.2. Цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Прямая проверка показывает, что справедлива формула

$$(xdx + ydy)^2 = r^2 dr^2.$$

Соотношения (7.22) приводят к следующему выражению для евклидовой метрики (7.6) в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

В матричных обозначениях метрика и ее обратная имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из символов Кристоффеля только три отличны от нуля:

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r.$$

Ортонормированный базис векторных полей и 1-форм имеет вид (для полярных координат)

$$\begin{aligned} e_r &= \partial_r, & e_\varphi &= \frac{1}{r} \partial_\varphi, \\ e^r &= dr, & e^\varphi &= r d\varphi. \end{aligned}$$

Этому базису соответствует ортонормированный репер

$$\begin{aligned} e_{\hat{r}} &= 1, & e_{\hat{\varphi}} &= r, \\ e^{\hat{r}} &= 1, & e^{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

При этом все недиагональные компоненты равны нулю.

Из условия (7.14) находим компоненты  $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$  связности. Несложные вычисления показывают, что только две компоненты отличны от нуля:

$$\omega_{\varphi\hat{r}}^{\hat{\varphi}} = -\omega_{\varphi\hat{\varphi}}^{\hat{r}} = 1.$$

Вычисления, аналогичные случаю сферических координат, приводят к следующим выражениям для простейших дифференциальных операторов в цилиндрических координатах:

$$df = e^r \partial_r f + e^\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi f + e^z \partial_z f, \quad (7.24)$$

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \frac{1}{r} \partial_r (r X^{\hat{r}}) + \frac{1}{r} \partial_\varphi X^{\hat{\varphi}} + \partial_z X^{\hat{z}}, \quad (7.25)$$

$$\operatorname{rot} A = e^r \left[ \frac{1}{r} \partial_\varphi A_{\hat{z}} - \partial_z A_{\hat{\varphi}} \right] + e^\varphi [\partial_z A_{\hat{r}} - \partial_r A_{\hat{z}}] + e^z \frac{1}{r} [\partial_r (r A_{\hat{\varphi}}) - \partial_\varphi A_{\hat{r}}], \quad (7.26)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f, \quad (7.27)$$

$$\Delta A_{\hat{r}} = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A_{\hat{r}}) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 A_{\hat{r}} + \partial_z^2 A_{\hat{r}} - \frac{1}{r^2} A_{\hat{r}} - \frac{2}{r^2} \partial_\varphi A_{\hat{\varphi}}, \quad (7.28)$$

$$\Delta A_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A_{\hat{\varphi}}) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 A_{\hat{\varphi}} + \partial_z^2 A_{\hat{\varphi}} - \frac{1}{r^2} A_{\hat{\varphi}} + \frac{2}{r^2} \partial_\varphi A_{\hat{r}}, \quad (7.29)$$

$$\Delta A_{\hat{z}} = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A_{\hat{z}}) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 A_{\hat{z}} + \partial_z^2 A_{\hat{z}}. \quad (7.30)$$

Напомним, что шляпки над символами означают, что компоненты (ко)векторов рассматриваются относительно ортонормированного базиса.

## Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1998.
- [2] С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М., 2005.
- [3] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience Publ., New York, 1963; S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 2, Interscience Publ., New York, 1969; Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981; Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 2, Наука, М., 1981.
- [4] S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Sci., Singapore, 1999.
- [5] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1975.
- [6] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Эдиториал УРСС, М., 2002.
- [7] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.
- [8] И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, МЦНМО, М., 1998.
- [9] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, Э. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, Физматлит, М., 1958.
- [10] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекц. курсы НОЦ, **5**, МИАН, М., 2006.
- [11] В. В. Жаринов, *Алгебро-геометрические основы математической физики*, Лекц. курсы НОЦ, **9**, МИАН, М., 2008, 210 с.
- [12] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Toronto, 1957; Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1968.
- [13] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
- [14] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Часть I. *Основы алгебры*, Наука, М., 2000; А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Часть II. *Линейная алгебра*, Наука, М., 2000; А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*. Часть III. *Основные структуры алгебры*, Наука, М., 2000.
- [15] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, Наука, М., 1986.
- [16] М. М. Постников, *Аналитическая геометрия*, Наука, М., 1979.
- [17] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, М., 1967.
- [18] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, Наука, М., 1977.
- [19] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [20] М. О. Katanaev, *Geometrical Methods in Mathematical Physics*, 2015, arXiv:1311.0733v2.
- [21] H. Whitney, "Differentiable manifolds", *Ann. of Math. (2)*, **37**:3 (1936), 645–680.
- [22] J. Munkres, "Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms", *Ann. of Math. (2)*, **72**:3 (1960), 521–554.
- [23] J. Milnor, "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Ann. of Math. (2)*, **64**:2 (1956), 394–405.
- [24] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, The Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [25] M. A. Kervaire, "A manifold which does not admit any differentiable structure", *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 257–270.
- [26] T. Aubin, *A Course in Differential Geometry*, Grad. Stud. Math., **27**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [27] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Grad. Texts in Math., **94**, Springer-Verlag, Berlin, 1983; Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987.
- [28] S. S. Chern, "Curves and surfaces in Euclidean space", *Studies in Global Geometry and Analysis*, Math. Assoc. Amer., Englewood Cliffs, NJ, 1967, 16–56.
- [29] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1970.
- [30] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry*, World Sci. Lecture Notes Phys., **61**, World Sci., Singapore, 1999.
- [31] L. Schwartz, *Analyse Mathématique*, Cours I et II, Hermann, Paris, 1967; Л. Шварц, *Анализ*, Т. 1, 2, Мир, М., 1972.
- [32] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups. I*, Princeton Math. Ser., **8**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1946; К. Шевалле, *Теория групп Ли*, Т. 1, ИЛ, М., 1948.
- [33] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969; К. Годбийон, *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика*, Мир, М., 1973.
- [34] G. de Rham, "Sur la théorie des formes différentielles harmoniques", *Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.)*, **22** (1946), 132–152.
- [35] G. de Rham, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Hermann, Paris, 1955; Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, URSS, М., 2006.

- [36] J. A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, University of California, Berkley, CA, 1972; Д. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982.
- [37] N. E. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton Math. Ser., **14**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1951; Н. Стинрод, *Топология косых произведений*, ИЛ, М., 1953.
- [38] H. Weyl, “Gravitation und Elektrizität”, *Berl. Ber.*, **1918** (1918), 465–480; Г. Вейль, *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 513–527.
- [39] T. Levi-Civita, “Nozione di parallelismo una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana”, *Rend. Palermo*, **42**:1 (1916), 173–204.
- [40] М. О. Катанаев, “Геометрическая теория дефектов”, *УФН*, **175**:7 (2005), 705–733.
- [41] A. M. Gleason, “Groups without small subgroups”, *Ann. of Math.* (2), **56**:2 (1952), 193–212.
- [42] D. Montgomery, L. Zippin, “Small subgroups of finite-dimensional groups”, *Ann. of Math.* (2), **56**:2 (1952), 213–241.
- [43] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1984.
- [44] A. O. Barut, R. Rączka, *Theory of Group Representations and Applications*, PWN – Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977; А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, Т. 1, 2, Мир, М., 1980.
- [45] M. Goto, F. D. Grosshans, *Semisimple Lie Algebras*, Lecture Notes in Pure Appl. Math., **38**, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [46] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Grad. Stud. Math., **34**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001; С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005.
- [47] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York, 1962; С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1983.
- [48] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982.
- [49] Е. Б. Дынкин, “Структура полупростых алгебр Ли”, *УМН*, **2**:4(20) (1947), 59–127.
- [50] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
- [51] J. F. Adams, *Lectures on Exceptional Lie Groups*, University of Chicago Press, Chicago, 1996.
- [52] И. Д. Адо, “Представление алгебр Ли матрицами”, *УМН*, **2**:6(22) (1947), 159–173.
- [53] E. Cartan, “Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne”, *Journ. de Math.* (9), **8** (1929), 1–33.
- [54] M. Hausner, J. T. Schwartz, *Lie Groups; Lie Algebras*, Gordon & Breach Science Publ., New York, 1968.
- [55] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980; Ч. Коснёвски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Современная математика. Вводные курсы, Мир, М., 1983.
- [56] J. F. Adams, “Vector fields on spheres”, *Ann. of Math.* (2), **75**:3 (1962), 603–632.
- [57] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966; Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971.
- [58] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1971; Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971.
- [59] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000.
- [60] K. Iwasawa, “On some types of topological groups”, *Ann. of Math.* (2), **50**:3 (1949), 507–558.
- [61] K. Nomizu, H. Ozeki, “On the degree of differentiability of curves used in the definition of the holonomy groups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 74–75.
- [62] W. Ambrose, I. M. Singer, “A theorem on holonomy”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 428–443.
- [63] J. Hano, H. Ozeki, “On the holonomy groups of linear connexions”, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 97–100.
- [64] K. Nomizu, “Un théorème sur les groupes d’holonomie”, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 101–103.
- [65] H. Ozeki, “Infinitesimal holonomy groups of bundle connections”, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956), 105–123.
- [66] H. Wang, “On invariant connections over a principal fibre bundle”, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 1–19.
- [67] M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **392**:1802 (1984), 45–57.
- [68] Y. Aharonov, D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”, *Phys. Rev.* (2), **115**:3 (1959), 485–491.
- [69] F. Wilczek, A. Zee, “Appearance of gauge structure in simple dynamical systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **52**:24 (1984), 2111.
- [70] M. Born, V. Fock, “Beweis des Adiabatsatzes”, *Z. Phys.*, **51** (1928), 165–180.
- [71] E. Schrödinger, “Quantizierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)”, *Ann. Phys. Leipzig*, **384**:4 (1926), 361–376.
- [72] E. Schrödinger, “Quantizierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)”, *Ann. Phys. Leipzig*, **384**:6 (1926), 489–527.
- [73] В. С. Владимиров, И. В. Волович, “Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений”, *ТМФ*, **62**:1 (1985), 3–29.

- [74] В. С. Владимиров, И. В. Волович, “Законы сохранения для нелинейных уравнений”, *УМН*, **40**:4 (1985), 17–26.
- [75] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. II, North-Holland Publ., Amsterdam, 1962; А. Мессиа, *Квантовая механика*, Т. 2, Наука, М., 1979.
- [76] В. А. Фок, *Начала квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [77] T. Bitter, D. Dubbers, “Manifestation of Berry’s topological phase in neutron spin rotation”, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987), 251–254.
- [78] F. G. Werner, D. R. Brill, “Significance of electromagnetic potentials on the quantum theory in the interpretation of electron interferometer fringe observations.”, *Phys. Rev. Lett.*, **4**:7 (1960), 344–347.
- [79] R. G. Chambers, “Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux”, *Phys. Rev. Lett.*, **5**:1 (1960), 3–5.
- [80] Н. Boersch, Н. Hamisch, D. Wohlleben, K. Grohmann, “Antiparallele Weißsche Bereiche als Biprisma für Elektroneninterferenzen”, *Z. Phys.*, **159**:4 (1960), 397–404.

## Предметный указатель

- 1-форма (1-form), 21, 25  
1-формы линейно независимые (linearly independent 1-forms), 53  
Азимутальный угол (azimuth angle), 158  
Алгебра внешняя (exterior algebra), 75  
Алгебра Ли (Lie algebra), 40  
Алгебра тензорная (tensor algebra), 43  
Атлас (atlas), 7  
Атлас полный (complete atlas), 7  
Аффинная геометрия (affine geometry), 136  
Аффинная связность (affine connection), 123  
База расслоения (base of a fiber bundle), 16  
Базис голономный (holonomic basis), 29, 153  
Базис координатный (coordinate basis), 29  
Базис неголономный (nonholonomic basis), 154  
Базис распределения (basis of a distribution), 55  
Бернулли лемниската (Bernoulli lemniscate), 51  
Бетти число (Betti number), 94  
Бианки тождества (Bianchi identities), 122, 157  
Бутылка Клейна (Klein bottle), 18  
Вариация аффинной связности (variation of an affine connection), 135  
Вариация формы (form variation), 64  
Вейлевски евклидова метрика (Weyl Euclidean metric), 114  
Вейля преобразование (Weyl transformation), 105  
Вейля форма (Weyl form), 137  
Вектор касательный (tangent vector), 23, 32  
Вектор смещения (displacement vector), 64  
Вектора длина (length of a vector), 104  
Векторного поля поток (vector field flow), 37  
Векторное поле (vector field), 21, 24, 29  
Векторное поле времениподобное (time-like vector field), 108  
Векторное поле изотропное (isotropic vector field), 108  
Векторное поле ковариантное (covariant vector field), 41  
Векторное поле кокасательное (cotangent vector field), 25  
Векторное поле контравариантное (contravariant vector field), 41  
Векторное поле нулевое (null vector field), 108  
Векторное поле полное (complete vector field), 32  
Векторное поле пространственноподобное (space-like vector field), 108  
Векторное поле светоподобное (light-like vector field), 108  
Векторное поле тривиальное (trivial vector field), 22  
Векторное пространство кокасательное (cotangent vector space), 25  
Векторное расслоение (vector bundle), 115  
Векторы ортогональные (orthogonal vectors), 105, 108  
Векторы перпендикулярные (perpendicular vectors), 105, 108  
Вертикальное пространство (vertical space), 127  
Вложение изометрическое (isometric embedding), 112  
Вложение многообразия (imbedding of a manifold), 50  
Вложение регулярное (regular embedding), 52  
Внешнего дифференцирования оператор (operator of exterior differentiation), 22  
Внешнее дифференцирование (exterior differentiation), 80  
Внешнее умножение (exterior product, wedge product), 73  
Внешняя алгебра (exterior algebra), 75  
Внешняя степень (external power), 77  
Внешняя экспонента (exterior exponent), 77  
Внутреннее дифференцирование (internal differentiation), 77  
Внутреннее умножение (internal multiplication), 77  
Внутренняя точка многообразия (interior point of a manifold), 15  
Вполне интегрируемая пфаффова система уравнений (totally integrable Pfaffian system of equations), 58  
Вполне интегрируемое распределение (totally integrable distribution), 55  
Времени обращение (time inversion), 108  
Времениподобное векторное поле (time-like vector field), 108  
Время (time), 108  
Вселенная замкнутая (closed universe), 16  
Вселенная открытая (open universe), 16  
Всюду плотная обмотка тора (everywhere dense winding of torus), 52  
Гармоническая форма (harmonic form), 93  
Гаусса–Остроградского формула (Gauss–Ostrogradskii formula), 102  
Гауссова кривизна (Gaussian curvature), 151  
Геометрический смысл кривизны (geometrical meaning of curvature), 142  
Геометрия аффинная (affine geometry), 136  
Геометрия локально евклидова (locally Euclidean geometry), 138  
Геометрия псевдориманова (pseudo-Riemannian geometry), 138  
Геометрия Римана (Riemannian geometry), 137  
Геометрия Римана–Вейля (Riemann–Weyl geometry), 137



- Геометрия Римана–Картана (Riemann–Cartan geometry), 137  
 Геометрия Римана–Картана–Вейля (Riemann–Cartan–Weyl geometry), 137  
 Гиперповерхность (hypersurface), 39, 53  
 Главные направления поверхности (principal directions of a surface), 152  
 Гладкое отображение (smooth map), 48  
 Глобальное сечение (global cross-section), 18  
 Глобальность (globality), 13  
 Голономный базис (holonomic basis), 29, 153  
 Гомеоморфизм (homeomorphism), 6  
 Горизонтальное пространство (horizontal space), 129  
 Горизонтальное сечение (horizontal cross-section), 122  
 Градиент (gradient), 92  
 Градиент скалярного поля (gradient of a scalar field), 147  
 Грина формула (Green’s formula), 101  
 Группа преобразований однопараметрическая (one-parameter transformation group), 38  
 Дарбу координаты (Darboux coordinates), 88  
 Дарбу теорема (Darboux theorem), 88  
 Декартовы координаты (Cartesian coordinates), 138  
 Диада (diad), 153  
 Дивергенция (divergence), 92  
 Дивергенция векторного поля (divergence of a vector field), 147  
 Дикритический узел (critical knot), 34  
 Диффеоморфизм (diffeomorphism), 50  
 Дифференциал ковариантный (covariant differential), 135  
 Дифференциал отображения (map differential), 48  
 Дифференциальная форма степени (differential form of degree)  $r$ , 78  
 Дифференцирование (differentiation), 27  
 Дифференцирование вдоль векторного поля (differentiation along a vector field), 27  
 Дифференцирование внешнее (exterior differentiation), 80  
 Дифференцирование внутреннее (internal differentiation), 77  
 Дифференцирование тензорной алгебры (differentiation in tensor algebra), 69  
 Дифференцируемая структура (differentiable structure), 8  
 Дифференцируемая функция (differentiable function), 19  
 Дифференцируемое многообразие (differentiable manifold), 8  
 Дифференцируемое отображение (differentiable map), 48  
 Длина вектора (length of a vector), 104  
 Допустимая калибровка (admissible gauge), 114  
 Дуальная форма (dual form), 89  
 Жорданов узел (Jordan knot), 34  
 Замкнутая вселенная (closed universe), 16  
 Замкнутая форма (closed form), 82  
 Замкнутое многообразие (closed manifold), 16  
 Замкнутое подмногообразие (closed submanifold), 53  
 Знак перестановки (sign of permutation), 46  
 Изометрическое вложение (isometric embedding), 112  
 Изотропное векторное поле (isotropic vector field), 108  
 Инвариантное тензорное поле (invariant tensor field), 71  
 Инволютивное распределение (involutive distribution), 55  
 Индекс ковариантный (covariant index), 42  
 Индекс контравариантный (contravariant index), 42  
 Индуцированная связность (induced connection), 123  
 Интеграл (integral), 95  
 Интеграл по многообразию (integral over a manifold), 96  
 Интегральная кривая (integral curve), 32  
 Интегральное многообразие (integral manifold), 55  
 Интегральное многообразие максимальное (maximal integral manifold), 55  
 Интегрируемая связность (integrable connection), 149  
 Интервал (interval), 105  
 Калибровка (gauge), 114  
 Калибровка допустимая (admissible gauge), 114  
 Каноническая ориентация (canonical orientation), 98  
 Каноническая ориентация края (canonical orientation of a boundary), 16  
 Карта (chart), 7  
 Картана переменные (Cartan variables), 130  
 Картановы переменные (Cartan variables), 153  
 Касательное пространство (tangent space), 24  
 Касательное расслоение (tangent fiber bundle), 24  
 Касательный вектор (tangent vector), 23, 32  
 Квадрат вектора (square of a vector), 104  
 Класс  $r$ -формы (rank of  $r$ -form), 87  
 Клейна бутылка (Klein bottle), 18  
 Ковариантная производная (covariant derivative), 120  
 Ковариантная производная вдоль векторного поля (covariant derivative along a vector field), 119  
 Ковариантная производная вдоль кривой (covariant derivative along a curve), 135  
 Ковариантное векторное поле (covariant vector field), 21, 41  
 Ковариантный дифференциал (covariant differential), 135

Ковариантный индекс (covariant index), 42  
 Ковекторное поле (covector field), 21  
 Козамкнутая форма (coclosed form), 93  
 Кокасательное векторное поле (cotangent vector field), 25  
 Кокасательное векторное пространство (cotangent vector space), 25  
 Кокасательное пространство (cotangent space), 26  
 Кокасательное расслоение (cotangent fiber bundle), 25  
 Кокручения тензор (contorsion tensor), 137  
 Кольцо Ли (Lie ring), 40  
 Коммутатор векторных полей (commutator of vector fields), 40  
 Компоненты неголономности (nonholonomicity components), 154  
 Компоненты тензорного поля (components of a vector field), 42  
 Контравариантное векторное поле (contravariant vector field), 21, 41  
 Контравариантный индекс (contravariant index), 42  
 Конформно евклидова метрика (conformally Euclidean metric), 114  
 Конформно минковское пространство-время (conformally Minkowskian space-time), 114  
 Конформно эквивалентные метрики (conformally equivalent metrics), 105  
 Конформный множитель (conformal factor), 114  
 Координатная окрестность (coordinate neighborhood), 7  
 Координатное покрытие (coordinate covering), 7  
 Координатные функции (coordinate functions), 20  
 Координатный базис (coordinate basis), 29  
 Координаты Дарбу (Darboux coordinates), 88  
 Координаты декартовы (Cartesian coordinates), 138  
 Координаты локальные (local coordinates), 7  
 Координаты сферические (spherical coordinates), 158  
 Координаты цилиндрические (cylindrical coordinates), 162  
 Коразмерность слоения (codimensionality of a foliation), 60  
 Корепер (coframe), 123, 153  
 Коточная форма (coexact form), 93  
 Краевая точка многообразия (boundary point of a manifold), 15  
 Край многообразия (boundary of a manifold), 14  
 Кривая (curve), 7  
 Кривая интегральная (integral curve), 32  
 Кривизна (curvature), 148  
 Кривизна гауссова (Gaussian curvature), 151  
 Кривизна скалярная (scalar curvature), 151  
 Кривизны тензор (curvature tensor), 148  
 Кристоффеля символы (Christoffel's symbols), 137  
 Кронекера символ (Kronecker symbol), 45  
 Кручение (torsion), 125  
 Кручения тензор (torsion tensor), 125  
 Лапласа–Бельтрами оператор (Laplace–Beltrami operator), 90, 147  
 Леви–Чивита связность (Levi–Civita connection), 137  
 Лемма Пуанкаре (Poincaré lemma), 82  
 Лемниската Бернулли (Bernoulli lemniscate), 51  
 Ли алгебра (Lie algebra), 40  
 Ли кольцо (Lie ring), 40  
 Ли производная (Lie derivative), 68  
 Линейно независимые 1-формы (linearly independent 1-forms), 53  
 Линия уровня (level line, level curve), 39  
 Липшица условие (Lipschitz condition), 31  
 Лист локальный (local leaf), 60  
 Лист Мебиуса (Möbius band, Möbius strip), 15  
 Лист слоения (foliation leaf), 60  
 Локальная тривиальность аффинной связности  
 Локальная форма кривизны (local curvature form), 121, 130  
 Локальная форма кручения (local torsion form), 130  
 Локальная форма связности (local connection form), 120, 130  
 Локально евклидова геометрия (locally Euclidean geometry), 138  
 Локально евклидово топологическое пространство (Locally Euclidean topological space), 9  
 Локально тривиальная связность (locally trivial connection), 149  
 Локальное сечение (local cross-section), 18  
 Локальность (locality), 13  
 Локальные координаты (local coordinates), 7  
 Локальный лист (local leaf), 60  
 Лоренцева сигнатура (Lorentzian signature), 107  
 Лоренцево многообразие (Lorentzian manifold), 107  
 Максимальное интегральное многообразие (maximal integral manifold), 55  
 Мебиуса лист (Möbius band, Möbius strip), 15  
 Метрика (metric), 103  
 Метрика вейлевски евклидова (Weyl Euclidean metric), 114  
 Метрика конформно евклидова (conformally Euclidean metric), 114  
 Метрика обратная (inverse metric), 103  
 Метрика псевдориманова (pseudo-Riemannian metric), 103  
 Метрика риманова (Riemannian metric), 103  
 Метрики конформно эквивалентные (conformally equivalent metrics), 105  
 Метрики сигнатура (signature of a metric), 107  
 Метрическая связность (metrical connection), 137  
 Метричность (metricity), 137  
 Многообразие (manifold), 6

- Многообразие дифференцируемое (differentiable manifold), 8  
 Многообразие замкнутое (closed manifold), 16  
 Многообразие лоренцево (Lorentzian manifold), 107  
 Многообразие неориентируемое (nonorientable manifold), 9  
 Многообразие ориентированное (oriented manifold), 9  
 Многообразие ориентируемое (orientable manifold), 9  
 Многообразие псевдориманово (pseudo-Riemannian manifold), 107  
 Многообразие риманово (Riemannian manifold), 107  
 Многообразие с краем (manifold with a boundary), 14  
 Многообразие с краем ориентируемое (orientable manifold with a boundary), 15  
 Многообразие тривиальное (trivial manifold), 10  
 Множитель конформный (conformal factor), 114  
 Напряженность поля Янга–Миллса (Yang–Mills field strength), 122  
 невырожденная особая точка (nondegenerate singular point), 33  
 невырожденное отображение (nondegenerate map), 50  
 Неголономности компоненты (nonholonomicity components), 154  
 Неголономный базис (nonholonomic basis), 154  
 Неметричности тензор (nonmetricity tensor), 136  
 Неоднородная форма (inhomogeneous form), 75  
 Неориентируемое многообразие (nonorientable manifold), 9  
 Неприводимое тензорное поле (irreducible tensor field), 44  
 Носитель функции (support of a function), 14  
 Нулевое векторное поле (null vector field), 108  
 Ньютона–Лейбница формула (Newton–Leibnitz formula), 101  
 Обмотка тора всюду плотная (everywhere dense winding of torus), 52  
 Обратная метрика (inverse metric), 103  
 Обращение времени (time inversion), 108  
 Объем (volume), 99  
 Объемная форма (volume form), 97  
 Однопараметрическая группа преобразований (one-parameter transformation group), 38  
 Однородная форма (homogeneous form), 75  
 Окрестность координатная (coordinate neighborhood), 7  
 Оператор  $*$  ( $*$ -operator), 89  
 Оператор  $\delta$  (coboundary operator), 90  
 Оператор внешнего дифференцирования (operator of exterior differentiation), 22  
 Оператор кограницы (coboundary operator), 90  
 Оператор Лапласа–Бельтрами (Laplace–Beltrami operator), 90, 147  
 Оператор проекционный (projection operator), 111  
 Оператор Ходжа (Hodge operator), 89  
 Ориентация каноническая (canonical orientation), 98  
 Ориентация края каноническая (canonical orientation of a boundary), 16  
 Ориентированное многообразие (oriented manifold), 9  
 Ориентируемое многообразие (orientable manifold), 9  
 Ориентируемое многообразие с краем (orientable manifold with a boundary), 15  
 Ортогональные векторы (orthogonal vectors), 105, 108  
 Ортонормальный репер (orthonormal frame), 155  
 Особая точка векторного поля (singular point of a vector field), 33  
 Открытая вселенная (open universe), 16  
 Открытое подмногообразие (open submanifold), 53  
 Отображение гладкое (smooth map), 48  
 Отображение дифференцируемое (differentiable map), 48  
 Отображение невырожденное (nondegenerate map), 50  
 Отображение трансверсальное (transversal map), 55  
 Отображение экспоненциальное (exponential map), 38  
 Отображения дифференциал (map differential), 48  
 Параллельное сечение (parallel cross-section), 122  
 Параллельный перенос (parallel transport), 123, 139, 140  
 Переменные Картана (Cartan variables), 130, 153  
 Перенос параллельный (parallel transport), 123, 139, 140  
 Перестановки знак (sign of permutation), 46  
 Перехода функция (transition function), 115  
 Перпендикулярные векторы (perpendicular vectors), 105, 108  
 Плотность степени (density of weight)  $p$ , 20  
 Плотность тензорная (tensor density), 45  
 Поверхность (surface), 7  
 Погружение многообразия (immersion of a manifold), 50  
 Подмногообразие (submanifold), 51  
 Подмногообразие замкнутое (closed submanifold), 53  
 Подмногообразие открытое (open submanifold), 53  
 Подмногообразие регулярное (regular submanifold), 52  
 Подмногообразия трансверсальные (transversal submanifolds), 54  
 Подпространство, ассоциированное с  $r$ -формой, 85

Покрытие координатное (coordinate covering), 7  
 Поле векторное (vector field), 21, 24  
 Поле векторное ковариантное (covariant vector field), 21  
 Поле векторное контравариантное (contravariant vector field), 21  
 Поле ковекторное (covector field), 21  
 Поле скалярное (scalar field), 19  
 Поле Янга–Миллса (Yang–Mills field), 122  
 Поливектор (multivector), 47  
 Полилинейность (multilinearity), 72  
 Полное векторное поле (complete vector field), 32  
 Полностью антисимметричный тензор (totally antisymmetric tensor), 46  
 Полный атлас (complete atlas), 7  
 Поля материи (matter fields), 122  
 Полярный угол (polar angle), 158, 162  
 Поток векторного поля (vector field flow), 37  
 Преобразование Вейля (Weyl transformation), 105  
 Приращение функции (increment of a function), 64  
 Продолжение функции (continuation of a function), 54  
 Проективное пространство (projective space)  $\mathbb{R}P^n$ , 11  
 Проекционный оператор (projection operator), 111  
 Проекция (projection), 16  
 Произведение форм скалярное (scalar product of forms), 90  
 Производная вдоль векторного поля (derivative along a vector field), 135  
 Производная ковариантная (covariant derivative), 120  
 Производная Ли (Lie derivative), 68  
 Пространственноподобное векторное поле (space-like vector field), 108  
 Пространство вертикальное (vertical space), 127  
 Пространство горизонтальное (horizontal space), 129  
 Пространство касательное (tangent space), 24  
 Пространство кокасательное (cotangent space), 26  
 Пространство проективное (projective space)  $\mathbb{R}P^n$ , 11  
 Пространство расслоения (fiber bundle space), 16  
 Пространство расслоенное (fiber bundle), 16  
 Пространство-время (space-time), 108  
 Пространство-мишень (target space), 47  
 Прямая сумма расслоений (direct sum of fiber bundles), 117  
 Псевдо риманово векторное расслоение (pseudo-Riemannian vector bundle), 118  
 Псевдоевклидова геометрия (pseudo-Euclidean geometry), 138  
 Псевдориманова геометрия (pseudo-Riemannian geometry), 138  
 Псевдориманова метрика (pseudo-Riemannian metric), 103  
 Псевдориманово многообразие (pseudo-Riemannian manifold), 107  
 Пуанкаре лемма (Poincaré lemma), 82  
 Пфаффа форма (Pfaffian form), 21  
 Пфафхова система уравнений (Pfaffian system of equations), 57  
 Пфафхова система уравнений вполне интегрируемая (totally integrable Pfaffian system of equations), 58  
 Пфафхова форма (Pfaffian form), 78  
 Разбиение единицы (partition of unity), 14  
 Разложение Ходжа (Hodge decomposition), 93  
 Разложимая  $r$ -форма (decomposable  $r$ -form), 84  
 Разложимое тензорное поле (decomposable vector field), 44  
 Размерность многообразия (dimensionality of a manifold), 6  
 Размерность слоения (dimensionality of a foliation), 60  
 Ранг  $r$ -формы (rank of  $r$ -form), 85  
 Ранг отображения (rank of a map), 50  
 Ранг тензорного поля (rank of a tensor field), 41  
 Распределение (distribution), 55  
 Распределение векторных полей (distribution of vector fields), 56  
 Распределение вполне интегрируемое (totally integrable distribution), 55  
 Распределение инволютивное (involutory distribution), 55  
 Расслоение (fiber bundle), 16  
 Расслоение векторное (vector bundle), 115  
 Расслоение векторное псевдориманово (pseudo-Riemannian vector bundle), 118  
 Расслоение векторное риманово (Riemannian vector bundle), 118  
 Расслоение касательное (tangent fiber bundle), 24  
 Расслоение кокасательное (cotangent fiber bundle), 25  
 Расслоение реперов (frame bundle), 125  
 Расслоение тензоров типа (tensor bundle of type)  $(r, s)$ , 41  
 Расслоение тривиальное (trivial fiber bundle), 17  
 Расслоенное пространство (fiber bundle), 16  
 Регулярное вложение (regular embedding), 52  
 Регулярное подмногообразие (regular submanifold), 52  
 Репер (frame), 119, 125, 153  
 Репер ортонормальный (orthonormal frame), 155  
 Римана–Вейля геометрия (Riemann–Weyl geometry), 137  
 Римана–Картана геометрия (Riemann–Cartan geometry), 137

- Римана–Картана–Вейля геометрия (Riemann–Cartan–Weyl geometry), 137
- Римана–Кристоффеля тензор (Riemann–Christoffel tensor), 148
- Риманова геометрия (Riemannian geometry), 137
- Риманова метрика (Riemannian metric), 103
- Риманово векторное расслоение (Riemannian vector bundle), 118
- Риманово многообразие (Riemannian manifold), 107
- Риччи тензор (Ricci tensor), 151
- Росток (germ), 26
- Ротор (curl), 92
- Свертка тензоров (contraction of tensors), 43
- Светоподобное векторное поле (light-like vector field), 108
- Связности форма (connection form), 127
- Связность аффинная (affine connection), 123
- Связность индуцированная (induced connection), 123
- Связность интегрируемая (integrable connection), 149
- Связность Леви–Чивита (Levi–Civita connection), 137
- Связность локально тривиальная (locally trivial connection), 149
- Связность метрическая (metrical connection), 137
- Связность на векторном расслоении (connection on a vector bundle), 119
- Сглаживание многообразия (smoothing of a manifold), 9
- Седло (saddle point), 33
- Сечение (cross-section), 18
- Сечение глобальное (global cross-section), 18
- Сечение горизонтальное (horizontal cross-section), 122
- Сечение локальное (local cross-section), 18
- Сечение параллельное (parallel cross-section), 122
- Сечение, параллельное вдоль кривой (parallel along a curve section), 123
- Сигнатура лоренцева (Lorentzian signature), 107
- Сигнатура метрики (signature of a metric), 107
- Символ Кронекера (Kronecker symbol), 45
- Символы Кристоффеля (Christoffel’s symbols), 137
- Система уравнений пфаффов (Pfaffian system of equations), 57
- Система, ассоциированная с  $r$ -формой, 85
- Скалярная кривизна (scalar curvature), 151
- Скалярное поле (scalar field), 19
- Скалярное поле тривиальное (trivial scalar field), 19
- Скалярное произведение векторных полей (scalar product of vector fields), 103
- Скалярное произведение форм (scalar product of forms), 90
- Склейки функции (sewing functions), 7
- Скобка Ли векторных полей (Lie bracket of vector fields), 40
- След аффинной связности (trace of an affine connection), 145
- След тензора (trace of a tensor), 44
- Слоение (foliation), 60
- Слоить (foliate), 60
- Слой (fiber), 16
- Слой типичный (typical fiber), 16
- Степень внешняя (external power), 77
- Стокса формула (Stokes formula), 100, 101
- Структура дифференцируемая (differentiable structure), 8
- Структурные уравнения (structure equations), 128
- Субмерсия (submersion), 62
- Сужение функции (restriction of a function), 54
- Сферические координаты (spherical coordinates), 158
- Тензор кокручения (contorsion tensor), 137
- Тензор кривизны (curvature tensor), 148
- Тензор кручения (torsion tensor), 125
- Тензор неметричности (nonmetricity tensor), 136
- Тензор полностью антисимметричный (totally antisymmetric tensor), 46
- Тензор Римана–Кристоффеля (Riemann–Christoffel tensor), 148
- Тензор Риччи (Ricci tensor), 151
- Тензора ранг (rank of a tensor), 41
- Тензорная алгебра (tensor algebra), 43
- Тензорная плотность (tensor density), 45
- Тензорное поле инвариантное (invariant tensor field), 71
- Тензорное поле неприводимое (irreducible tensor field), 44
- Тензорное поле разложимое (decomposable vector field), 44
- Тензорное поле типа (tensor field of type)  $(r, s)$ , 41
- Тензорное произведение расслоений (tensor product of fiber bundles), 118
- Тензорное произведение тензорных полей (tensor product of tensor fields), 43
- Теорема Дарбу (Darboux theorem), 88
- Теорема Фробениуса (Frobenius theorem), 56
- Тетрада (tetrad), 153
- Типичный слой (typical fiber), 16
- Тождества Бианки (Bianchi identities), 122, 128, 157
- Тождество Якоби (Jacobi identity), 40
- Топологическое многообразие (topological manifold), 7
- Топологическое пространство локально евклидово (Locally Euclidean topological space), 9
- Топологическое пространство счетное в бесконечности (locally compact  $\sigma$ -compact topological space), 13

- Точка многообразия внутренняя (interior point of a manifold), 15
- Точка многообразия краевая (boundary point of a manifold), 15
- Точная форма (exact form), 82
- Трансверсальное отображение (transversal map), 55
- Трансверсальные подмногообразия (transversal submanifolds), 54
- Триада (triad), 153
- Тривиальное векторное поле (trivial vector field), 22
- Тривиальное многообразие (trivial manifold), 10
- Тривиальное расслоение (trivial fiber bundle), 17
- Тривиальное скалярное поле (trivial scalar field), 19
- Угол азимутальный (azimuth angle), 158
- Угол между векторами (angle between vectors), 104
- Угол полярный (polar angle), 158, 162
- Узел (knot), 33
- Умножение внешнее (exterior product, wedge product), 73
- Умножение внутреннее (internal multiplication), 77
- Уравнения структурные (structure equations), 128
- Условие Липшица (Lipschitz condition), 31
- Условие метричности (metricity condition), 137
- Фиксирование калибровки (gauge fixing), 114
- Финитная функция (compactly supported function), 14
- Фокус (focus), 35
- Форма Вейля (Weyl form), 137
- Форма гармоническая (harmonic form), 93
- Форма дуальная (dual form), 89
- Форма замкнутая (closed form), 82
- Форма козамкнутая (coclosed form), 93
- Форма коточная (coexact form), 93
- Форма кривизны локальная (local curvature form), 121, 130
- Форма кручения локальная (local torsion form), 130
- Форма неоднородная (inhomogeneous form), 75
- Форма объема (volume form), 97
- Форма однородная (homogeneous form), 75
- Форма Пфаффа (Pfaffian form), 21, 78
- Форма разложимая (decomposable form), 84
- Форма связности (connection form), 127
- Форма связности локальная (local connection form), 120, 130
- Форма степени  $r$  (form of degree  $r$ ,  $r$ -form), 72
- Форма точная (exact form), 82
- Формула Гаусса–Остроградского (Gauss–Ostrogradskii formula), 102
- Формула гомотопии основная, 83
- Формула Грина (Green's formula), 101
- Формула Ньютона–Лейбница (Newton–Leibnitz formula), 101
- Формула Стокса (Stokes formula), 100, 101
- Фробениуса теорема (Frobenius theorem), 56
- Функции координатные (coordinate functions), 20
- Функции носитель (support of a function), 14
- Функция дифференцируемая (differentiable function), 19
- Функция перехода (transition function), 115
- Функция склейки (sewing functions), 7
- Функция финитная (compactly supported function), 14
- Характеристика (characteristic), 31
- Характеристика эйлера (Euler characteristic), 94
- Характеристическая система  $r$ -формы (characteristic system for  $r$ -form), 86
- Характеристическое подпространство  $r$ -формы (characteristic subspace for  $r$ -form), 86
- Ходжа оператор (Hodge operator), 89
- Ходжа разложение (Hodge decomposition), 93
- Цилиндрические координаты (cylindrical coordinates), 162
- Число Бетти (Betti number), 94
- Эйлера характеристика (Euler characteristic), 94
- Экспонента внешняя (exterior exponent), 77
- Экспоненциальное отображение (exponential map), 38
- Элемент площади гиперповерхности (area element of a hypersurface), 101
- Якоби тождество (Jacobi identity), 40
- Янга–Миллса поле (Yang–Mills field), 122



*Научное издание*

**Лекционные курсы НОЦ**

**Выпуск 25**

*Михаил Орионович Катанаев*

**Геометрические методы в математической физике.  
Приложения в квантовой механике. Часть 1**

---

Сдано в набор 12.11.2015. Подписано в печать 25.12.2015.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 100 экз.

---

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук  
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/noc/> e-mail: [pupyrev@mi.ras.ru](mailto:pupyrev@mi.ras.ru)