ISSN 2226-5929

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 20

Издание выходит с 2003 года

М. А. Королёв

Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Часть 1

МИАН

Москва
2015

УДК 511.331
ББК 22.13
С56

Королёв М. А.

С56 Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Ч. 1 – М.: МИАН, 2015. – 162 с. – (Современные проблемы математики, ISSN 2226-5929; Вып. 20).

ISBN 978-5-98419-064-0

Серия "Современные проблемы математики" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 14-11-00433).

DOI: 10.4213/spm53
DOI: 10.4213/book1602

ISBN 978-5-98419-064-0

Содержание

Светлой памяти моего Учителя
Анатолия Алексеевича Карацубы

Введение

Дзета-функция Римана и ее нули

Для комплексного числа $s = \sigma + it$ с условием $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определяется как сумма бесконечного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Дзета-функцию ввел в математику Леонард Эйлер. В своих рассуждениях он впервые использовал (при вещественных $s > 1$) тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1}$$

теперь носящее его имя[1]. Дзета-функцию как функцию комплексного переменного первым стал изучать Бернхардт Риман.

Правее единичной прямой $\operatorname{Re} s = 1$ справедливо равенство

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}\,du, \tag{2}$$

в котором через $\{u\}$ обозначена дробная доля u. Так как несобственный интеграл в (2) сходится при любом s с положительной вещественной частью, то с помощью этого равенства дзета-функция мероморфно продолжается в область $0 < \operatorname{Re} s \leqslant 1$.

Для продолжения $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость рассматривают функцию

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

которая называется кси-функцией Римана. Определенная при $\operatorname{Re} s > 1$, кси-функция допускает в этой области представление

$$\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_1^{\infty} (x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2})\omega(x)\,dx, \tag{3}$$

в котором $\omega(x)$ обозначает сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Так как несобственный интеграл в (3) сходится при любых s, то кси-функция, а вместе с ней и $\zeta(s)$ продолжаются на всю комплексную плоскость. Из (3) следует, что

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{4}$$

Равенство (4) называется функциональным уравнением дзета-функции Римана.

[1] В правой части тождества (1) стоит бесконечное произведение по всем подряд идущим простым числам.

Кси-функция Римана является целой функцией первого порядка и разлагается в бесконечное произведение Вейерштрасса вида

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{s/\varrho}, \tag{5}$$

где ϱ обозначает нули $\xi(s)$,

$$a = \log 2\sqrt{\pi} - 1 - \frac{1}{2}E = -0.023\,095\,708\ldots,$$

E – постоянная Эйлера[2].

Из равенства (5) и свойств гамма-функции следует, что и $\zeta(s)$ имеет бесконечно много нулей. Ими будут, во-первых, «нетривиальные» нули, совпадающие с нулями ϱ кси-функции Римана, и, во-вторых, «тривиальные» нули в точках $s = -2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, совпадающие с полюсами выражения $s\Gamma(s/2)$. Полагая $s = \varrho$ в (4) и замечая, что $\overline{\xi}(s) = \xi(\overline{s})$, заключаем, что вместе с числом ϱ нулями $\zeta(s)$ будут также и величины $1 - \varrho$, $\overline{\varrho}$ и $1 - \overline{\varrho}$. Иными словами, нетривиальные нули дзета-функции расположены симметрично относительно вещественной оси и прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Известно, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат в вертикальной полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$, которая называется в теории $\zeta(s)$ критической полосой. Можно показать, что правая часть (2) отрицательна при $0 < s < 1$, и что $\xi(0) = 1 \neq 0$. Поэтому все нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе, являются комплексными.

Нули ϱ, лежащие в верхней полуплоскости, нумеруются в порядке возрастания их ординат, а в случае совпадения ординат – произвольным образом[3]:

$$\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n, \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant 1, \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1} \leqslant \cdots, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Гипотеза Римана утверждает, что все нули ϱ_n лежат на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, которая называется критической прямой. Эта гипотеза в настоящее время не доказана и не опровергнута. В то же время известно, что на критической прямой лежит положительная доля всех нетривиальных нулей $\zeta(s)$. Положительные ординаты таких нулей, также упорядоченные по возрастанию, обозначаются[4] через $\mathfrak{c}_n$.

Знаменитый мемуар Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» [1] вызвал к жизни ряд новых направлений в теории чисел и теории функций комплексного переменного, в числе которых – исследования, связанные с вычислением комплексных нулей ϱ_n дзета-функции.

Хотя ординаты первых трех таких нулей были приближенно найдены самим Риманом с помощью созданного им мощного метода, факт этот стал известен лишь после публикации Карла Людвига Зигеля [2] (1932 г.), в которой он восстановил ход рассуждений Римана, основываясь на его черновиках. Первой же публикацией на эту тему следует, по-видимому, считать статью датского математика Йоргена Педерсена Грама [3] (1895 г.), в которой он привел следующие приближенные значения первых трех ординат:

$$\gamma_1 = 14.135, \qquad \gamma_2 = 20.82, \qquad \gamma_3 = 25.1.$$

[2]Постоянную Эйлера принято обозначать через γ; в настоящей работе мы отступаем от этой традиции, поскольку символом γ в дальнейшем обозначаются ординаты нулей дзета-функции Римана, для которых это обозначение также является общепринятым.

[3]Наличие строгих и нестрогих неравенств отражает тот факт, что все нули $\zeta(s)$, приближенные значения которых известны в настоящее время, являются простыми, однако не доказано, что дзета-функция не имеет кратных нулей.

[4]Это обозначение не является общепринятым. Несложно видеть, что $\gamma_n \leqslant \mathfrak{c}_n$; если гипотеза Римана верна, то $\mathfrak{c}_n = \gamma_n$ при любом n.

Использованный Грамом метод был достаточно трудоемок и практически непригоден для дальнейших исследований. Его последующие многолетние поиски привели к открытию осенью 1902 г. иного, более совершенного способа приближенного вычисления нулей $\zeta(s)$.

Точки Грама

Для положительного t через $\vartheta(t)$ обозначим приращение, которое получает непрерывная ветвь аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ при изменении s вдоль отрезка, соединяющего точки $s=1/2$ и $s=1/2+it$. Тогда уравнение (4) приводит к равенству

$$e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=e^{-i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right),$$

которое означает, что функция

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

вещественна при вещественных t, а ее вещественные нули совпадают с ординатами нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой.

В основу метода Грама [4] легло следующее простое соображение. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ – соответственно вещественная и мнимая части функции $\zeta(1/2+it)$. Тогда

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=e^{-i\vartheta(t)}Z(t)=Z(t)(\cos\vartheta(t)-i\sin\vartheta(t)),$$

откуда

$$A(t)=Z(t)\cos\vartheta(t),\qquad B(t)=-Z(t)\sin\vartheta(t).$$

Рассмотрим те значения t, при которых $B(t)$ обращается в нуль. Ими будут, во-первых, вещественные корни функции $Z(t)$, совпадающие, очевидно, с ординатами $\mathfrak{c}_n$ тех нулей $\zeta(s)$, что лежат на критической прямой. Во-вторых, ими будут корни уравнения $\sin\vartheta(t)=0$, т.е. такие t, при которых $\vartheta(t)$ принимает значения, кратные π (рис. 1).

Можно показать, что функция $\vartheta(t)$ не ограничена сверху и монотонно возрастает при $t>t^*=6.289836\ldots$, причем $\vartheta(t^*)=-3.530573\ldots$. Поэтому при любом $n\geqslant 0$ уравнение $\vartheta(t)=(n-1)\pi$ имеет на промежутке $t>t^*$ единственное решение t_n.

Таким образом, величина $\zeta(1/2+it_n)$ оказывается вещественным числом, причем

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)=A(t_n)=Z(t_n)\cos\pi(n-1)=(-1)^{n-1}Z(t_n).$$

Допустим теперь, что в соседних точках t_{n-1} и t_n функция $A(t)$ принимает значения одного знака. Тогда величины $Z(t_{n-1})$ и $Z(t_n)$ будут иметь противоположные знаки, что возможно лишь в случае, когда $Z(t)$ обращается в нуль между точками t_{n-1} и t_n нечетное число раз.

Убедившись с помощью формулы суммирования Эйлера–Маклорена в выполнении неравенства $A(t_n)>0$ для всех $n=1,2,\ldots,15$, Грам смог доказать, что все нули $\zeta(s)$, ординаты которых положительны и не превосходят 66, лежат на критической прямой, и нашел весьма точные приближения для величин $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{15}$.

Таким образом Грам обнаружил, что каждый из промежутков

$$G_n=(t_{n-1},t_n],\qquad n=1,2,\ldots,15,$$

содержит ровно один нуль $Z(t)$, причем $t_{n-1}<\mathfrak{c}_n<t_n$. По поводу этой закономерности Грам высказал в [4] следующее суждение. «*Для значений*[5] t_n *в интервале от* 10 *до* 65 *величина*

[5] Во избежание недоразумений и излишних пояснений при цитировании статьи Грама используются обозначения, принятые в настоящей работе.

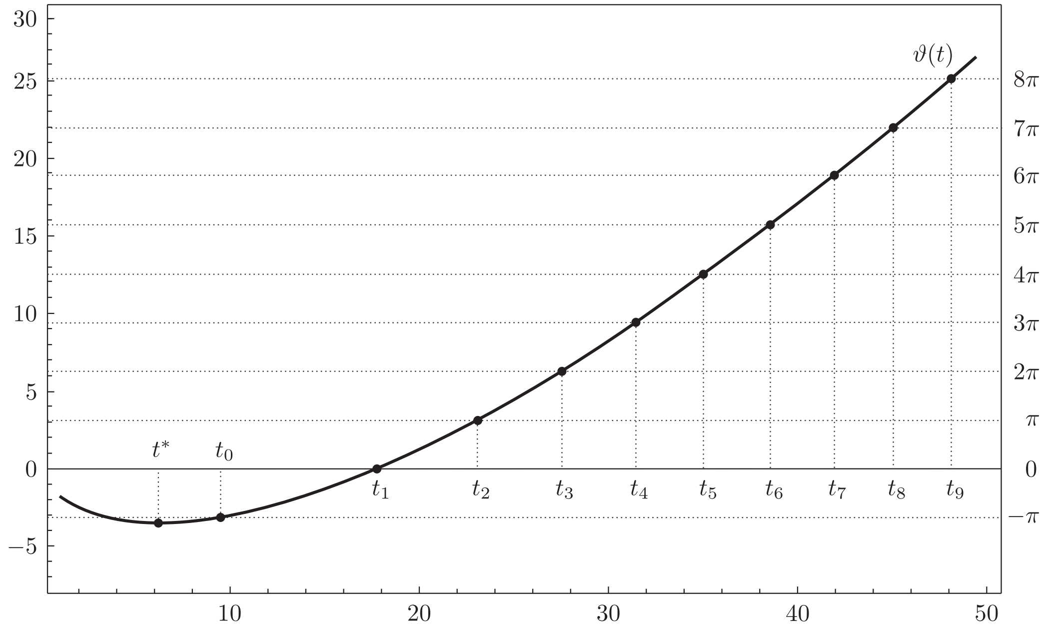


Рис. 1. Точки Грама, являющиеся абсциссами точек пересечения графика функции $y = \vartheta(t)$ с горизонтальными прямыми $y = m\pi$, $m = -1, 0, 1, \ldots, 9$.

$A(t_n)$ *всегда оказывается положительной. По всей видимости, и сама функция* $A(t)$ *остается положительной на большей части этого промежутка. Без сомнения, причина этого явления заключается в том, что первое слагаемое суммы* $\sum_1^n n^{-1/2}\cos(t\log n)$, *равное единице, приводит к преобладанию положительных членов* (над отрицательными – *М. К.*). *Но если это так, то эта закономерность во взаимном расположении чисел* $\mathfrak{c}_n$ *и* t_n *сохранится и для корней* $\mathfrak{c}$, *близких к* $\mathfrak{c}_{15}$ *и следующих за ним, до тех пор, пока мало-помалу не будет восстановлено равновесие.*»

Величины t_n, называемые теперь точками Грама, образуют монотонно возрастающую неограниченную последовательность. Асимптотическое разложение

$$\vartheta(t) \sim \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}2n(2n-1)}(-1)^{n+1}B_{2n}t^{-(2n-1)},$$

где B_{2n} – числа Бернулли,

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \ldots$$

(см. [5]), позволяет вычислять величины t_n с любой заданной степенью точности. В частности, можно показать, что

$$t_n = \frac{2\pi n}{\log n}\left(1 + \frac{\log\log n}{\log n}(1 + o(1))\right), \qquad t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\log n}\left(1 + \frac{\log\log n}{\log n}(1 + o(1))\right)$$

при $n \to +\infty$. Так как при переходе от n к $n+1$ величина $\log n$ изменяется очень слабо, то из последнего соотношения следует, что точки Грама образуют на вещественной оси «почти равномерную» сетку.

Функции $S(t)$ и $N(t)$

Введем еще несколько понятий, необходимых для дальнейшего. При t, отличном от ординаты нуля $\zeta(s)$, величину

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

положим равной приращению непрерывной ветви $\pi^{-1} \arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, соединяющей точки 2, $2 + it$ и $1/2 + it$. В противном случае положим

$$S(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} (S(t+h) + S(t-h)).$$

Так определенная функция $S(t)$ называется аргументом дзета-функции Римана на критической прямой (рис. 2).

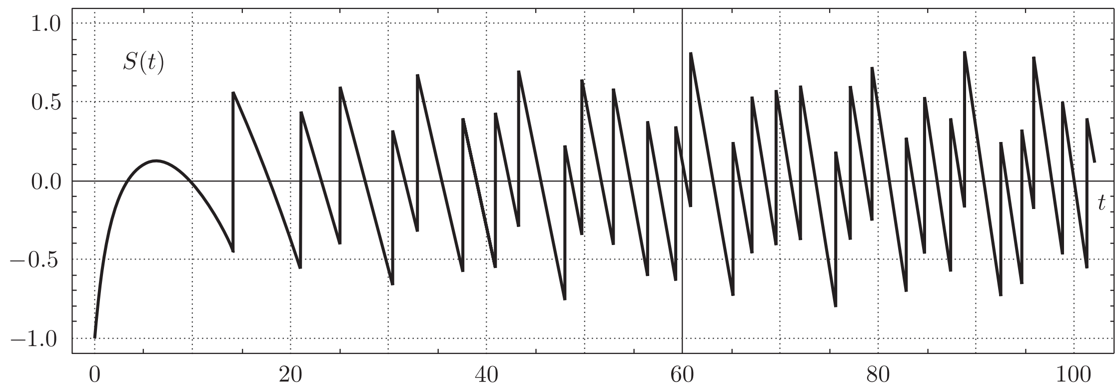


Рис. 2. График функции $S(t)$. Вертикальные отрезки графика отвечают скачкам $S(t)$ в точках разрыва, которые совпадают с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$

Далее, через $N(t)$ обозначим число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$, $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$ с той лишь оговоркой, что в точках разрыва (совпадающих, очевидно, с ординатами γ_n) величина $N(t)$ определяется как полусумма пределов своих значений справа и слева:

$$N(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} (N(t+h) + N(t-h)).$$

Функции $N(t), \vartheta(t)$ и $S(t)$ связаны равенством

$$N(t) = \frac{1}{\pi} \vartheta(t) + 1 + S(t),$$

которое называется формулой Римана–Мангольдта (см., например, [6]). Из этой формулы и классической оценки $S(t) = O(\log t)$, принадлежащей Литтлвуду [7], следует, что количества точек Грама t_n и ординат γ_n, попавших на промежуток $(0, T]$, совпадают с точностью до слагаемого $O(\log T)$ с величиной

$$\frac{1}{\pi} \vartheta(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} - \frac{1}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Таким образом, с ростом n величины t_n асимптотически ведут себя как ординаты нулей дзета-функции Римана: $t_n \sim \gamma_n$.

Наличие такой связи между просто устроенной последовательностью точек Грама, с одной стороны, и с трудно поддающимися изучению нулями $\zeta(s)$, с другой стороны, вызвало интерес к обнаруженной Грамом закономерности.

Классификация законов Грама

Понятие «закон Грама» впервые появилось в работе Хатчинсона [8] (1925 г.), который подразумевал под ним свойство соседних нулей $\mathfrak{c}_n$ и $\mathfrak{c}_{n+1}$ функции Харди быть отделенными друг от друга точкой Грама t_n. Желая подтвердить приведенное выше предположение Грама о том, что найденная им закономерность рано или поздно нарушится, Хатчинсон предпринял вычисление нулей $\zeta(s)$ в более широком, чем Грам, диапазоне и обнаружил в итоге два значения n, этой закономерности не подчиняющиеся, а именно $n = 127$ и $n = 135$ (рис. 3 a), b)), когда

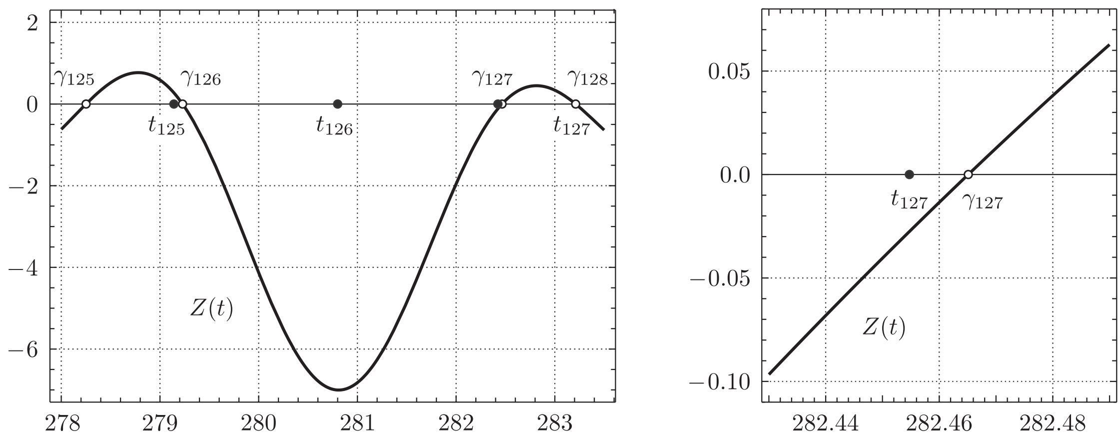
$$t_{127} < \gamma_{127} < \gamma_{128} < t_{128}, \qquad t_{134} < \gamma_{135} < \gamma_{136} < t_{135}.$$

Десять лет спустя вычисления Хатчинсона были продолжены Титчмаршем и Комри с применением счетных машин «Брунсвига», «Холлерит» и «Нейшенел». В ходе этих вычислений, результаты которых изложены в статьях [9], [10], были обнаружены новые исключения из закона Грама, доля которых в общем числе изученных случаев не превышала[6] 4.5%.

Помимо численных данных, статья [9] содержала и первые теоретические результаты, относящиеся к закону Грама. Во-первых, Титчмарш доказал, что последовательность номеров n, для которых нарушено неравенство $A(t_n) > 0$, является неограниченной. Во-вторых, Титчмарш установил, что неограниченной является и последовательность дробей

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \tag{6}$$

Отсюда сразу следовало, что для бесконечно многих n нуль $\mathfrak{c}_n$ функции Харди не попадает в «свой» промежуток Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$.



a) b)

Рис. 3. График функции Харди $Z(t)$ вблизи точки t_{127}, отвечающей первому исключению из закона Грама, обнаруженному Хатчинсоном; промежуток $G_{127} = (t_{126}, t_{127}]$ не содержит ни одной ординаты

Закономерность, допускающая бесконечно много исключений, не может, строго говоря, называться законом. Тем не менее понятие «закон Грама» стало использоваться достаточно широко, правда в различных смыслах. Так, ряд авторов подразумевает под ним свойство

[6] Сам Титчмарш упоминает о 43 исключениях, встретившихся при вычислении 1041 нуля $Z(t)$ на промежутке $0 < t \leqslant 1468$. В действительности между $t = 0$ и $t = 1468$ имеется 1042 нуля функции Харди, 1041 точка Грама t_n и 45 значений n, для которых $(-1)^{n-1} Z(t_n) < 0$.

промежутка Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$ содержать ровно один нуль функции Харди $Z(t)$. Вместе с этим рассматривается и «ослабленный закон Грама», выполнение которого отвечает наличию на промежутке G_n нечетного числа нулей $Z(t)$. Известно, что каждая из этих разновидностей закона Грама нарушается для положительной доли промежутков G_n. Ослабленный закон Грама выполняется в положительной доле случаев, но в то же время не известно даже, конечно или нет число промежутков Грама, содержащих ровно один нуль функции[7] $Z(t)$. Еще более сложной оказывается задача описания множества тех нулей $\mathfrak{c}_n$ функции Харди, каждый из которых попадает в «свой» промежуток Грама[8] G_n.

Ввиду такого разнообразия формальных описаний закономерности, подмеченной Грамом на небольшом количестве численных примеров, название «закон Грама» уместно относить ко всякому утверждению о взаимном расположении членов бесконечных последовательностей ординат нулей $\zeta(s)$ и точек Грама.

Закон Грама в работах Сельберга

В докладе «Дзета-функция и гипотеза Римана» [12], прочитанном на 10-м Скандинавском математическом конгрессе в Копенгагене (1946 г.), Сельберг, желая продемонстрировать, насколько ошибочными могут быть теоретико-числовые гипотезы, основанные на одних лишь численных данных, привел два примера.

Первый – классический – относился к неравенству[9] $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$, подкрепленному большим числом примеров, но которое, тем не менее, нарушается для бесконечного множества целых чисел x.

Второй пример относился к численной проверке закона Грама. Поясним этот пример. Для этого рассмотрим произвольную ординату γ_n нуля дзета-функции Римана. По ее номеру n определим целое число $m = m(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m,$$

и положим $\Delta_n = m - n$.

Вычисления, проделанные Титчмаршем для промежутка $1 \leqslant n \leqslant 1041$, показывают, что равенство $\Delta_n = 0$ имеет место во всех случаях, за исключением 45 ординат γ_n, для которых $\Delta_n = \pm 1$. Появление более совершенных вычислительных средств в каком-то смысле не сильно изменило эту картину. Так, подсчеты Гордона и Демишеля (2004 г.; см. [13]), затронувшие промежутки вида

$$10^k \leqslant n \leqslant 10^k + 2 \cdot 10^9, \qquad k = 13, 14, \ldots, 24,$$

не выявили ни одного n с условием $|\Delta_n| > 3$.

Перечисленные факты как будто указывают на то, что величины $|\Delta_n|$ ограничены по модулю. Для опровержения столь поспешных заключений Сельберг привел в своем докладе найденным им соотношения

$$\sum_{n \leqslant N} \Delta_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!} \frac{N}{(2\pi)^{2k}} (\log\log N)^k + O(N(\log\log N)^{k-1/2}), \tag{7}$$

$$\sum_{n \leqslant N} \Delta_n^{2k-1} = O(N(\log\log N)^{k-1}), \tag{8}$$

в которых $N \to +\infty$, а $k \geqslant 1$ – фиксированное целое число.

[7] Подробное обсуждение этого вопроса см. в [11].

[8] Очевидным следствием теоремы Титчмарша о неограниченности дробей (6) является тот факт, что нуль $\mathfrak{c}_n$ не попадает в G_n для бесконечного множества номеров n.

[9] Здесь $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x, $\mathrm{li}(x) = \int_2^x (1/\log u)\, du$ – интегральный логарифм x.

Равенство (7) наводит на мысль о том, что значения Δ_n, имеющие порядок $\sqrt{\log\log n}$, должны встречаться достаточно часто. Так, в [12] Сельберг высказал следующее предположение: «*По-видимому, хотя я и не мог доказать этого строго,* $\sqrt{\log\log n}$ *есть "нормальный" порядок величины* Δ_n *в следующем смысле: если* $\Phi(n)$ *– положительная функция от* n*, стремящаяся к бесконечности вместе с* n*, то неравенства*

$$\frac{\sqrt{\log\log n}}{\Phi(n)} < |\Delta_n| \leqslant \Phi(n)\sqrt{\log\log n} \tag{9}$$

имеют место для почти всех n*. В частности, это должно означать, что* γ_ν *"почти никогда" не лежит в интервале* $(t_{\nu-1}, t_\nu)$*. Именно первое неравенство составляет основную трудность, его я доказать полностью не смог*[10]».

Позже Сельбергу удалось найти доказательство этого предположения[11]. Об этом можно судить по замечанию, которым снабжен текст доклада в первом томе трудов Сельберга: «*Из этих равенств* (имеются в виду формулы (7) и (8) – *М. К.*) *стандартным образом выводится, что величина* $\Delta_n/\sqrt{\log\log n}$ *имеет гауссово распределение. В частности, это дает ответ на поставленный там же вопрос. В* 1946 *г. я еще не знал, что эти теоремы о моментах* Δ_n *позволяют находить функцию распределения*» (см. [14; с. 355]).

Перечисленные результаты Сельберга объясняют и тот факт, что все вычисленные к настоящему времени значения Δ_n очень малы. Действительно, положив $N = 10^{24}$, для «большинства» номеров $n \leqslant N$ будем иметь $|\Delta_n| \approx \sqrt{\log\log N} \approx 2.001$. Иными словами, влияние растущего множителя $\log\log N$ формулы (7) в области, доступной для вычислений, практически незаметно.

В докладе [12] Сельберг именует законом Грама свойство величины Δ_n, или, что то же, свойство ординаты γ_n, попадать в промежуток Грама G_n с тем же номером.

Отличие этой разновидности закона Грама от перечисленных выше состоит в том, что здесь ограничение накладывается на взаимное расположение точек Грама t_n и произвольных ординат γ_m нулей $\zeta(s)$, в то время как Грам, Хатчинсон и Титчмарш принимали в рассмотрение ординаты $\mathfrak{c}_m$ лишь тех нулей, что лежат на критической прямой[12].

Эта разница является принципиальной. На глубину различия уровней наших знаний о последовательностях ординат γ_n и $\mathfrak{c}_n$ указывает следующий факт. Известно, например, что расстояние между соседними ординатами γ_n и γ_{n+1} стремится к нулю с ростом n. Более того, если n достаточно велико, то для разности этих ординат справедлива оценка

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \leqslant \frac{32}{\log\log\log\gamma_n}\,.$$

Однако ничего подобного до сих пор не известно в отношении величин $\mathfrak{c}_n$. Самое большее, что можно гарантировать, – это выполнение неравенства

$$\mathfrak{c}_{n+1} - \mathfrak{c}_n \leqslant \mathfrak{c}_n^{\alpha+\varepsilon}, \qquad \alpha = 0.1559458\ldots$$

(доказательства этого и предыдущего результатов можно найти в [15] и [16; с. 261] соответственно).

Чтобы отличать в дальнейшем трактовку закона Грама, предложенную Сельбергом, от всех прочих, будем говорить, что в случае $\Delta_n = 0$ (или, что то же, в случае $\gamma_n \in G_n$) для ординаты γ_n наблюдается *явление Грама–Сельберга.* Таким образом, сформулированное Сельбергом в [14; с. 355] и процитированное выше утверждение означает, что явление Грама–Сельберга является в действительности очень редким и не наблюдается «почти никогда».

[10] Слова «почти никогда» в данном случае означают следующее: если $\nu = \nu(\Phi; N)$ – число номеров n, $n \leqslant N$, не удовлетворяющих условиям (9), то $\nu/N \to 0$ при $N \to +\infty$. Подобный смысл несут и используемые здесь и далее словосочетания «почти все», «почти всегда» и т.д.

[11] Доказательство формул (7), (8) ни Сельбергом, ни кем-либо другим опубликовано не было, так что вопрос их обоснования оставался открытым.

[12] Разумеется, это различие исчезает, если гипотеза Римана верна.

Предмет исследования

Первоначальная цель автора состояла в строгом обосновании формул Сельберга (7) и (8). Поиск такого доказательства привел к рассмотрению целого круга вопросов, связанных с величинами Δ_n, которые и составили содержание настоящей работы. В их числе:

1) моменты тригонометрических полиномов специального вида;
2) поведение аргумента дзета-функции Римана в точках Грама;
3) формулы Сельберга для моментов величин Δ_n и их обобщения; распределение значений Δ_n;
4) порядок роста величин Δ_n при $n \to +\infty$; множество значений, которые принимает Δ_n;
5) распределение пар, троек, четверок и т.д. соседних ординат γ_n, для которых величина Δ_n отлична от нуля;
6) малые значения функции $\zeta(1/2 + it)$ в точках Грама t_n.

Поясним каждую из этих задач.

1) Величины Δ_n тесно связаны со значениями функции $S(t)$ в точках Грама t_n. В свою очередь функция $S(t)$ приближается (в метрике пространства $L_a[T; T+H]$, $a > 0$) тригонометрическими полиномами вида

$$W_x(t) = W(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p \leqslant x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}},$$

где $x = x(t)$, а p пробегает простые числа (см. рис. 4). По этой причине особый интерес приобретает задача нахождения асимптотических формул для «дискретных» моментов $W(t)$, т.е. величин

$$\sum_{N < n \leqslant N+M} |W(t_n)|^a, \qquad a > 0.$$

Именно эта задача и рассматривается в гл. 1.

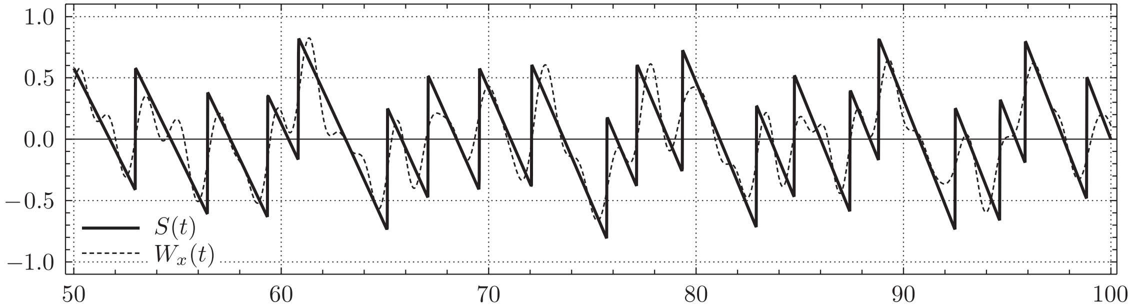


Рис. 4. Графики функций $S(t)$ и $W_x(t)$ при $x = 100$

Основными результатами гл. 1 являются новые формулы, дающие для таких моментов асимптотические разложения по степеням параметра

$$\mathfrak{S} = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}.$$

Примером такого разложения служит следующая формула для первого момента:

$$\sum_{N < n \leqslant N+M} |W(t_n)| = \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}} \left\{ \mathfrak{S}_1^{1/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \Phi_{n+1} \mathfrak{S}_1^{-1/2-n} \right\} + O\left(M \sqrt{\frac{\log x}{\log N}} \right),$$

в которой Φ_n – некоторые коэффициенты, допускающие явные выражения в виде полиномов от величин
$$\mathfrak{S}_r = \sum_{p\leqslant x} p^{-r}, \qquad r = 2, \ldots, n.$$

Следует отметить, что способ вывода соотношений такого рода оказывается применим к достаточно широкому классу полиномов вида
$$\sum_{p\leqslant x} a_p f(t\log p),$$
где a_p – последовательность вещественных чисел, а $f(u)$ – любая из функций $\sin u$, $\cos u$, e^{iu}; он также применим к «непрерывному» случаю, когда суммирование по точкам Грама t_n заменяется интегрированием по промежутку $T < t \leqslant T + H$.

2) Теоремы гл. 1 позволяют значительно уточнить имеющиеся формулы для дискретных моментов аргумента дзета-функции Римана на критической прямой, т.е. для сумм вида
$$\sum_{N<n\leqslant N+M} |S(t_n+0)|^a, \qquad a > 0.$$
Так, например, оценку остаточного члена
$$r \ll \frac{\log\log\log\log N}{\log\log\log N}$$
в формуле
$$\sum_{N<n\leqslant N+M} |S(t_n+0)| = \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log N}\,(1+r)$$
удается заменить оценкой вида
$$r \ll \sqrt{\frac{\log\log\log N}{\log\log N}}\,.$$
Доказательства этого и ряда других результатов содержатся в гл. 2.

3) Некоторые характеристики последовательностей Δ_n и $\Delta(n) = S(t_n+0)$ оказываются во многом схожи. Это касается, в частности, сумм
$$\sum_{N<n\leqslant N+M} |\Delta_n|^a \qquad \text{и} \qquad \sum_{N<n\leqslant N+M} |\Delta(n)|^a.$$
Наличие такой связи позволяет вывести формулы Сельберга (7) и (8) непосредственно из теорем гл. 2. Кроме того, величины Δ_n хорошо приближаются значениями $S(t)$ в точках разрыва (т.е. числами $S(\gamma_n \pm 0)$), а также величинами
$$(\gamma_n - t_n)\frac{\log n}{2\pi}\,.$$
Поэтому прямым следствием формул Сельберга оказываются асимптотические выражения для сумм
$$\sum_{N<n\leqslant N+M} |S(\gamma_n \pm 0)|^a, \qquad \sum_{N<n\leqslant N+M} |\gamma_n - t_n|^a.$$
Переход от моментов величин $\Delta(n)$ к моментам величины Δ_n осуществляется несколькими способами, три из которых приводятся в настоящей работе. Каждый из них представляет и

самостоятельный интерес. Так, один из этих способов приводит к следующему результату: для положительной доли номеров n промежуток Грама G_n не содержит ни одной ординаты нуля $\zeta(s)$, и вместе с тем в положительной доле случаев G_n содержит не менее двух ординат[13]. Это указывает на значительную нерегулярность в распределении нулей $\zeta(s)$, поскольку «в среднем» на один промежуток Грама приходится ровно одна ордината γ_n.

Доказательства этого и других перечисленных выше результатов можно найти в гл. 3.

4) Из формул Сельберга (7), (8) несложно заключить, что

$$\liminf_{n\to+\infty}\Delta_n = -\infty, \qquad \limsup_{n\to+\infty}\Delta_n = +\infty. \tag{10}$$

Связь величин Δ_n с аргументом дзета-функции Римана $\zeta(s)$ позволяет воспользоваться наиболее точными на сегодняшний день результатами о порядке роста функции $S(t)$. Так получаются, например, соотношения

$$\Delta_n = O\bigl(\log n\bigr), \qquad \Delta_n = \Omega_{\pm}\biggl(\sqrt[3]{\frac{\log n}{\log\log n}}\biggr),$$

уточняющие (10).

Ряд дополнительных соображений, в основе которых лежит метод Сельберга оценки числа перемен знака $S(t)$ на заданном промежутке, дает возможность доказать, что всякое целочисленное значение k, лежащее между максимумом и минимумом величины Δ_n, $N < n \leqslant N + M$, принимается величиной Δ_n на указанном промежутке и притом достаточно часто. Например, в случае $k = 0$ оказывается, что явление Грама–Сельберга имеет место по крайней мере для $Me^{-c(\log\log\log N)^2}$ ординат γ_n с условием $N < n \leqslant N + M$. Все эти результаты помещены в гл. 4.

5) Явление Грама–Сельберга оказывается достаточно редким: как следует из результатов гл. 3, равенство $\Delta_n = 0$ имеет место не более чем для $O(N(\log\log\log N)^{-0.5}) = o(N)$ номеров $n \leqslant N$. Отсюда несложно заключить, что и неравенство

$$\Delta_n\Delta_{n+1} \neq 0 \tag{11}$$

выполняется для всех $n \leqslant N$, за исключением $o(N)$ номеров.

Из теорем гл. 3 о распределении значений Δ_n следует, что как число положительных, так и число отрицательных среди первых n членов последовательности Δ_n при $N \to +\infty$ асимптотически эквивалентно $0.5N$. Естественно поставить следующий вопрос: как распределены знаки величин Δ_n, Δ_{n+1}, отвечающих условию (11)? Эта задача обобщается на случай трех, четырех и вообще любого фиксированного числа s подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots$.

Оказывается, что среди всех возможных 2^s наборов длины s, составленных из символов "+" и "−", имеется два «особых» набора, состоящих из одинаковых знаков (т.е. из одних только плюсов или из одних только минусов), каждому из которых отвечает $0.5N + o(N)$ наборов $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$, $n \leqslant N$, с соответствующим распределением знаков. Все же остальные комбинации знаков или вовсе не реализуются, или же встречаются не более чем в $o(N)$ случаях. Это означает, грубо говоря, что перемены знака в последовательности Δ_n встречаются очень редко.

Кроме того, оказывается возможным исследовать распределение значений произведений $|\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|$ с условием $n \leqslant N$, отвечающих наборам чисел одного знака. Эти произведения,

[13] Этот результат является усилением теоремы Труджиана [11], согласно которой положительная доля промежутков Грама G_n содержит «аномальное» (т.е. отличное от единицы) число ординат.

должным образом нормированные, имеют распределение, сходящееся при $N \to +\infty$ к гамма-распределению с плотностью

$$f(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}, \qquad u > 0.$$

Перечисленные выше результаты позволяют доказать и существование сколь угодно большого числа подряд идущих аномально больших или аномально малых значений величины Δ_n. Именно, при любом $s \geqslant 2$ можно указать функции $h(x)$ и $H(x)$ с условиями

$$\frac{h(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to 0, \quad \frac{H(x)}{\sqrt{\log\log x}} \to +\infty, \qquad x \to +\infty,$$

такие, что каждое из неравенств

$$0 < \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} \leqslant h(n), \qquad \Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} > H(n)$$

имеет бесконечно много решений.

6) Грам и ряд последующих авторов обращали особое внимание на тот факт, что точки t_n при малых n действительно отделяют друг от друга нули $\mathfrak{c}_n$ функции Харди:

$$\mathfrak{c}_1 < t_1 < \mathfrak{c}_2 < t_2 < \mathfrak{c}_3 < t_3 < \cdots.$$

Между тем всюду выше речь идет о «попаданиях» нулей $\mathfrak{c}_n$ или ординат γ_n в промежутки Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$. Тем самым допускается совпадение нуля или ординаты с точкой Грама t_n. Это приводит нас к следующему вопросу: возможны ли в действительности такие совпадения? Отметим, что к этому же вопросу приводит нас и следующее рассуждение.

Как отмечалось выше, точки Грама t_n образуют на числовой оси «почти равномерную» сетку в том смысле, что при изменении n в промежутке вида $N < n \leqslant N + M$, $M = o(N)$, все разности $t_{n+1} - t_n$ приближенно равны одному и тому же числу $2\pi(\log N)^{-1}$.

Естественно ожидать, что многие особенности поведения дзета-функции $\zeta(1/2 + it)$ при непрерывном изменении t на вещественной прямой будут присущи и случаю, когда величина t пробегает дискретное множество точек Грама t_n.

В ряде случаев ожидания такого рода оправдываются (полностью или частично). Это касается, например, поведения величин

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^{2k} dt \qquad \text{и} \qquad \sum_{n \leqslant N} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right)\right|^{2k},$$

для которых при некоторых k получены сходные асимптотические формулы или хотя бы близкие по порядку роста верхние и нижние оценки (см. соответственно работы [17] и [18]; [19] и [20], [21]; [22], [23] и [24]–[26]). То же относится и к величинам

$$\max_{0<t\leqslant T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \qquad \text{и} \qquad \max_{0<n\leqslant N} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right)\right|,$$

для которых имеются нижние оценки одного порядка (см. [27], [28] и [29]).

Менее очевидной оказывается ситуация в случае, когда вместо максимума значений дзета-функции на соответствующем множестве точек критической прямой рассматривается минимум. Поскольку дзета-функция имеет на критической прямой бесконечно много нулей, то очевидно, что

$$\min_{0<t\leqslant T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = 0.$$

Вместе с тем совпадение точки Грама t_n с какой-либо из ординат нулей $\zeta(s)$ представляется практически невероятным.

Для проверки такого предположения можно предложить два пути. Первый состоит в получении возможно более точных нижних оценок для количества номеров n, $n \leqslant N$, удовлетворяющих условию

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \neq 0. \tag{12}$$

Второй путь заключается в изучении точек Грама t_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it_{n_k}\right) \to 0$$

при $k \to +\infty$.

Оказывается, например, что среди первых N точек Грама условию (12) удовлетворяют не менее $Ne^{-c(\log\log\log N)^2}$ из них, и вместе с тем при любом $A > 0$ на том же промежутке для положительной доли номеров n выполняется неравенство

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right)\right| < e^{-A\sqrt{\log\log N}}.$$

Все эти результаты содержатся в гл. 6.

Автор считает приятным долгом поблагодарить В. А. Быковского, С. А. Гриценко, А. Ивича, С. В. Конягина, А. П. Лауринчикаса, Н. Г. Мощевитина, Ю. В. Нестеренко, А. Н. Паршина, Д. А. Попова, И. С. Резвякову, К.-М. Тсанга и И. Д. Шкредова за интерес к работе и всестороннюю поддержку. Автор искренне признателен М. Балазару за помощь в переводе с французского статьи Грама, Е. И. Иванниковой за неоценимую помощь в оформлении иллюстраций, Р. Н. Бояринову за многочисленные дискуссии по затронутым здесь вопросам, а также всем своим родным, без поддержки которых эта работа не была бы написана.

Обозначения

В работе используются следующие обозначения:

- $N(t)$ – число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;
- $N_0(t)$ – число нулей $\zeta(s)$ на отрезке критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;
- $N_j(t)$ – число ординат нулей $\zeta(s)$ кратности $j \geqslant 1$ в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;
- $N(\sigma, t)$ – число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leqslant t$;
- $\vartheta(t)$ – приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ вдоль отрезка с концами $s = 1/2$ и $s = 1/2 + it$;
- $S(t) = \pi^{-1} \arg\zeta(1/2 + it)$ – аргумент дзета-функции Римана на критической прямой;
- $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1} \leqslant \cdots$ – положительные ординаты нулей $\zeta(s)$, занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности (а в случае совпадения – в произвольном порядке);
- $0 < \mathfrak{c}_1 < \mathfrak{c}_2 < \cdots \leqslant \mathfrak{c}_n \leqslant \mathfrak{c}_{n+1} \leqslant \cdots$ – положительные ординаты нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой, занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности (а в случае совпадения – в произвольном порядке), или, что то же, вещественные нули функции Харди $Z(t)$;
- $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода;
- $G(u)$ – нормальное распределение,

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2}\, dv;$$

- $\sigma_{x,t}$, $\Lambda_x(n)$ – функции Сельберга (см. параграф 2.1);
- B_n – числа Бернулли,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{42}, \quad \ldots, \qquad B_3 = B_5 = \cdots = 0;$$

- t_n – последовательность точек Грама;
- $G_n = (t_{n-1}, t_n]$ – промежуток Грама;
- $\Delta(n) = S(t_n + 0)$;
- $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$;
- $\#\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}|$ – число элементов во множестве $\mathcal{A}$;
- $\mathsf{E}(\eta)$ – математическое ожидание случайной величины η;
- $\mathsf{P}\{\xi \leqslant u\}$ – вероятность того, что случайная величина ξ не превосходит u;
- ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 10^{-3}$; $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$;
- $\alpha = 27/82 = 1/3 - 1/246$;
- N, M – достаточно большие целые числа, $N^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant M \leqslant N^{\alpha+\varepsilon}$;
- символы $\sum_n$ и $\sum_{n\in A}$ обозначают соответственно $\sum_{N<n\leqslant N+M}$ и $\sum_{\substack{N<n\leqslant N+M \\ n\in A}}$;
- $p, p_1, p_2, \ldots,\ q, q_1, q_2, \ldots$ – простые числа;
- $$V_x(t) = \sum_{p\leqslant x} \frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \qquad W_x(t) = -\pi^{-1} V_x(t);$$
- $L = \log\log N$;
- $$\mathcal{L}_k = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{ML^k}{(2\pi)^{2k}};$$
- $$\varkappa(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^a e^{-v^2}\, dv = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{a+1}{2}\right);$$

  в частности, $\varkappa(2k) = (2k)!/k!$ при целом $k \geqslant 1$;
- $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$ – комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы и в разных соотношениях, вообще говоря, разные;
- $a, a_1, a_2, \ldots,\ b, b_1, b_2, \ldots$ – положительные величины, зависящие разве что от ε;
- $c_0 = 2880\varepsilon^{-1}$ (лемма 2.7);
- $c_1 = (1.75\pi^2)^{1/3} c_0^{-1}$ (теорема 2.1);
- $c_2 = 11^{-2/3} c_0^{-1}$ (теорема 2.3);
- $c_3 = (6c_0)^{-2}$ (теорема 3.13);
- $c_4 = 8.7ec_0$, $c_5 = 9e^5 c_0$ (лемма 5.2);
- $c_6 = 5132.8\varepsilon^{-1}$ (лемма 6.5).

При ссылке на лемму n из приложения I (ч. 2 настоящей работы) используется запись «лемма I.n». Все прочие обозначения вводятся и поясняются по ходу изложения.

Глава 1. Моменты специальных тригонометрических полиномов

Цель настоящей главы состоит в выводе асимптотических формул для дискретных моментов полинома

$$V(t) = V_x(t) = \sum_{p \leqslant x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}}\,,$$

где p пробегает подряд идущие простые числа, т.е. для сумм вида

$$V_a = \sum_{n} |V(t_n)|^a,$$

где a – произвольное (не обязательно целое) положительное число.

В параграфе 1.1 доказывается асимптотическая формула четного момента V_{2k}, главные член которой имеет вид

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}}\, M\biggl\{\frac{\Phi_0}{k!}\,\mathfrak{S}_1^k + \frac{\Phi_1}{(k-1)!}\,\mathfrak{S}_1^{k-1} + \frac{\Phi_2}{(k-2)!}\,\mathfrak{S}_1^{k-2} + \cdots + \Phi_n\biggr\},$$

где

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sim \log\log x.$$

Коэффициенты Φ_n этого выражения являются, в свою очередь, многочленами от величин

$$\mathfrak{S}_r = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^r}\,, \qquad r = 2, 3, \ldots,$$

и имеют довольно сложный вид. Исследованию свойств чисел Φ_n посвящены параграфы 1.2, 1.3.

Утверждения параграфов 1.2, 1.3 находят применение в параграфе 1.4 при выводе формулы для момента V_a при a, отличном от четного целого числа. В этом случае главный член такой формулы представляется асимптотическим рядом

$$\frac{M}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\,\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)}\,\mathfrak{S}_1^{a/2-n}. \tag{1.1}$$

Для основной цели настоящей работы, состоящей в изучении закона Грама, вполне достаточно результатов параграфов 1.1–1.4. Тем не менее ввиду того, что асимптотические разложения дробных моментов могут представлять и самостоятельный интерес, мы сочли уместным включить в эту главу дополнительный параграф 1.5, посвященный уточнению остаточного члена в формуле для первого момента V_1.

Все рассуждения параграфов 1.1–1.5 практически без изменений могут быть перенесены на случай «интегральных» моментов, т.е. величин вида

$$\int_T^{T+H} |V(t)|^a\,dt, \qquad T^{\alpha+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T.$$

Отметим также, что многие результаты гл. 1 (или их аналоги) остаются справедливыми и для полиномов вида

$$\sum_{p \leqslant x} a_p \sin(t \log p), \qquad \sum_{p \leqslant x} a_p \cos(t \log p), \qquad \sum_{p \leqslant x} a_p p^{it}$$

с вещественными коэффициентами a_p. В этом случае роль величин $\mathfrak{S}_r$ будут играть суммы $\sum_{p\leqslant x} a_p^{2r}$. Задача описания класса таких полиномов требует отдельного исследования.

1.1. Четные моменты величины $V(t_n)$

Прежде всего, нам потребуется ряд вспомогательных утверждений о поведении точек Грама t_n и их обобщений на случай нецелого n при неограниченном возрастании параметра n. Все необходимые нам соотношения такого рода содержатся в следующей лемме.

Лемма 1.1. *Пусть $u \geqslant 0$ – произвольное (не обязательно целое) число, t_u – единственное решение уравнения*

$$\vartheta(t_u) = (u-1)\pi, \tag{1.2}$$

отвечающее условию $\vartheta'(t_u) > 0$. Тогда:

1) *при $u \to +\infty$ имеют место соотношения*

$$t_u = \frac{2\pi u}{\log u}\biggl(1 + (1+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\biggr), \tag{1.3}$$

$$\frac{dt_u}{du} = \frac{2\pi}{\log u}\biggl(1 + (1+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\biggr), \tag{1.4}$$

$$\frac{d^2t_u}{du^2} = -\frac{\pi}{u(\log u)^2}\biggl(1 + (2+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\biggr); \tag{1.5}$$

2) *если $u \to +\infty$, $|v| \leqslant u/5$, то*

$$t_{u+v} - t_u = \frac{2\pi v}{\log u}\biggl(1 + (1+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\biggr), \tag{1.6}$$

$$|t_{u+v} - t_u| > \frac{2\pi|v|}{\log u}\,, \tag{1.7}$$

$$t_{u+v} - t_u = \frac{\pi v}{\vartheta'(t_u)}\biggl(1 + \frac{\theta|v|}{u\log u}\biggr); \tag{1.8}$$

3) *если $N < u \leqslant u+v \leqslant N+M$, то*

$$t_{u+v} - t_u = \frac{\pi v}{\vartheta'(t_N)} + \frac{2\pi\theta v M}{N(\log N)^2}\,, \tag{1.9}$$

$$\frac{2\pi}{\log N} < \frac{dt_u}{du} < \frac{2\pi}{\log N - \log\log N}\,. \tag{1.10}$$

Доказательство. Формула (1.3) является следствием леммы 2 из работы [21]. Дважды дифференцируя соотношение (1.2), приходим к равенствам

$$t'_u = \frac{\pi}{\vartheta'(t_u)}\,, \qquad t''_u = -\frac{\pi^2\vartheta''(t_u)}{(\vartheta'(t_u))^3}\,, \tag{1.11}$$

из которых получим (1.4) и (1.5), воспользовавшись (1.2) и соотношениями

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{2}\log\frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}), \qquad \vartheta''(t) = \frac{1}{2t} + O(t^{-3}).$$

При доказательстве формул (1.6)–(1.8) будем предполагать, что $0 \leqslant v \leqslant u/5$ (случай отрицательных u рассматривается аналогично). Тогда из формулы конечных приращений при некотором w, $0 \leqslant w \leqslant v$, получаем

$$\pi v = \vartheta(t_{u+v}) - \vartheta(t_u) = (t_{u+v} - t_u)\vartheta'(t_{u+w}),$$

откуда согласно (1.4) и (1.11) заключаем:

$$t_{u+v}-t_u=\frac{\pi v}{\vartheta'(t_{u+w})}=vt'_{u+w}=\frac{2\pi v}{\log(u+w)}\left(1+(1+o(1))\frac{\log\log(u+w)}{\log(u+w)}\right)$$
$$=\frac{2\pi v}{\log u}\left(1+(1+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\right). \qquad (1.12)$$

Далее, из формулы конечных приращений при некотором (другом) w с условием $|w|\leqslant u/5$ имеем

$$\pi v=\vartheta(t_{u+v})-\vartheta(t_u)=(t_{u+v}-t_u)\vartheta'(t_u)+\frac{1}{2}(t_{u+v}-t_u)^2\vartheta''(t_{u+w}),$$

так что

$$t_{u+v}-t_u=\frac{\pi v}{\vartheta'(t_u)}(1+r)^{-1}, \qquad (1.13)$$

где согласно (1.11) величина r имеет вид

$$r=\frac{1}{2}(t_{u+v}-t_u)\frac{\vartheta''(t_{u+w})}{\vartheta'(t_u)}=-\frac{1}{2}(t_{u+v}-t_u)\frac{t'_u t''_{u+w}}{(t'_{u+w})^3}.$$

Воспользовавшись равенством (1.12) и оценкой (1.13), последовательно находим

$$r=\frac{v}{4(\log u)^2}\frac{\log(u+w)}{u+w}\left(1+(1+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\right)$$
$$=\frac{v}{4u\log u}\left(1-(1+o(1))\frac{w}{u}\right)\left(1+(1+o(1))\frac{\log\log u}{\log u}\right),$$
$$|r|\leqslant\frac{|v|}{3u\log u},\qquad (1+r)^{-1}=1+\frac{\theta|v|}{2u\log u}.$$

Таким образом, (1.6), (1.7) следуют из (1.13) и последнего соотношения.

Предполагая выполненными условия $N<u\leqslant u+v\leqslant N+M$ при некоторых y, z, w с условиями $u\leqslant y, z\leqslant w\leqslant u+v$, будем иметь

$$t_{u+v}-t_u=\frac{\pi v}{\vartheta'(t_w)}=\frac{\pi v}{\vartheta'(t_N)}-h,$$

причем

$$0\leqslant h=\pi v\left(\frac{1}{\vartheta'(t_N)}-\frac{1}{\vartheta'(t_w)}\right)=\frac{\pi v(\vartheta'(t_w)-\vartheta'(t_N))}{\vartheta'(t_N)\vartheta'(t_w)}$$
$$\leqslant\frac{\pi v(t_w-t_N)\vartheta''(t_y)}{(\vartheta'(t_N))^2}=\frac{\pi v(w-N)}{\vartheta'(t_z)}\frac{\vartheta''(t_y)}{(\vartheta'(t_N))^2}\leqslant\frac{\pi v\vartheta''(t_N)}{(\vartheta'(t_N))^3}$$
$$=\frac{\pi vM}{N(\log N)^2}\left(1+(2+o(1))\frac{\log\log N}{\log N}\right)<\frac{2\pi vM}{N(\log N)^2},$$

что и доказывает (1.9).

Наконец, верхнюю оценку в (1.10) получим, воспользовавшись равенством (1.11), соотношением (1.3) и монотонным убыванием функции dt_u/du на промежутке $N\leqslant u\leqslant N+M$. Нижняя оценка (1.10) очевидным образом следует из (1.4). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть μ, ν – целые числа с условием $1\leqslant\mu,\nu\leqslant\sqrt{N/\log N}$, причем $\mu\neq\nu$. Тогда сумма*

$$S=\sum_n\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{it_n}$$

не превосходит по абсолютной величине $\sqrt{\mu\nu}\log N$.

Доказательство. Пусть для определенности $\mu > \nu \geqslant 1$. Запишем S в виде

$$\sum_n e^{2\pi i f(n)}, \qquad \text{где} \quad f(u) = \frac{t_u}{2\pi} \log \frac{\mu}{\nu}.$$

Применяя оценку (1.10) леммы 1.1 и неравенство из условия, получим

$$0 < f'(u) = \frac{1}{2\pi} \frac{dt_u}{du} \log \frac{\mu}{\nu} < \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi \log \mu}{\log N - \log\log N} \leqslant \frac{1}{2}.$$

В силу леммы 1.1 имеем

$$|S| < |j| + 3, \qquad j = \int_N^{N+M} e^{2\pi i f(u)}\, du.$$

Интегрируя по частям и пользуясь монотонностью функции $1/f'(u)$ и оценкой (1.10), найдем

$$\begin{aligned} |j| &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{2\pi i f(N+M)}}{f'(N+M)} - \frac{e^{2\pi i f(N)}}{f'(N)} - \int_N^{N+M} e^{2\pi i f(x)}\, d\frac{1}{f'(x)} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{f'(N+M)} + \frac{1}{f'(N)} + \frac{1}{f'(N+M)} - \frac{1}{f'(N)} \right) = \frac{1}{\pi f'(N+M)} < \frac{1}{\pi} \frac{\log N}{\log(\mu/\nu)}. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что

$$\log \frac{\mu}{\nu} \geqslant \log \frac{\nu+1}{\nu} = \frac{\lambda}{\nu}, \qquad \lambda = 1 - \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{3\nu^2} - \frac{1}{4\nu^3} + \cdots.$$

Замечая, что $\lambda = \log 2$ при $\nu = 1$ и $\lambda \geqslant 3/4$ при $\nu \geqslant 2$, получим

$$|j| < \frac{\nu \log N}{\pi \log 2} < \frac{\sqrt{\mu\nu}}{\pi \log 2} \log N, \qquad |S| < \frac{\sqrt{\mu\nu}}{\pi \log 2} \log N + 3 < \sqrt{\mu\nu} \log N.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть k, m, r – целые числа, $m \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $m + r = k$, $e^2 < y < (N/\log N)^{1/(2k)}$. Пусть, далее, $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_r$ пробегают значения простых чисел из промежутка $(1, y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \cdots p_m \neq q_1 \cdots q_r$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p \leqslant y$ подчинены условию $|a(p)| \leqslant \delta$. Тогда для суммы*

$$S = \sum_n \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_m \\ q_1, \ldots, q_r}} \frac{a(p_1) \cdots a(p_m) \overline{a}(q_1) \cdots \overline{a}(q_r)}{(p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_r)^{1/2}} \left(\frac{q_1 \cdots q_r}{p_1 \cdots p_m} \right)^{it_n} \tag{1.14}$$

имеет место оценка

$$|S| < (\delta y)^k \log N.$$

Доказательство. Изменим в (1.14) порядок суммирования и воспользуемся леммой 1.2, положив в ней $\mu = q_1 \cdots q_r$, $\nu = p_1 \cdots p_m$. Получим

$$|S| < \delta^k \sum_{p_1, \ldots, p_m \leqslant x} \sum_{q_1, \ldots, q_r \leqslant x} (p_1 \cdots q_r)^{-1/2} (p_1 \cdots q_r)^{1/2} \log N = (\delta \pi(y))^k \log N < (\delta y)^k \log N.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть $k \geqslant 1$ – целое число, $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$. Тогда справедливо равенство*

$$V_{2k} = \sum_n V^{2k}(t_n) = \binom{2k}{k}\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{C}_k + \theta x^{2k}\log N,$$

в котором

$$\mathfrak{C}_k = \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}} (p_1\cdots p_k)^{-1}$$

(суммирование в $\mathfrak{C}_k$ ведется по всем наборам простых чисел $p_1,\ldots,q_k$, которые не превосходят x и удовлетворяют уравнению $p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k$).

Доказательство. Полагая

$$U(t) = \sum_{p\leqslant x}\frac{p^{it}}{\sqrt{p}}, \qquad \text{так что} \quad V(t) = \frac{1}{2i}(U(t) - \overline{U}(t)),$$

сумму V_{2k} представим в виде

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\sum_n (U(t_n) - \overline{U}(t_n))^{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}v_\nu,$$

где

$$v_\nu = \sum_n U^\nu(t_n)\overline{U}^{2k-\nu}(t_n) = \sum_n \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_\nu\leqslant x\\ q_1,\ldots,q_{2k-\nu}\leqslant x}} (p_1\cdots q_{2k-\nu})^{-1/2}\left(\frac{p_1\cdots p_\nu}{q_1\cdots q_{2k-\nu}}\right)^{it_n}.$$

Согласно лемме 1.2 при $\nu \neq k$ имеем неравенства

$$|v_\nu| < (\log N)\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_\nu\leqslant x\\ q_1,\ldots,q_{2k-\nu}\leqslant x}} (p_1\cdots q_{2k-\nu})^{-1/2}(p_1\cdots q_{2k-\nu})^{1/2} < x^{2k}\log N.$$

Точно так же оценивается и вклад в v_k слагаемых, отвечающих условию $p_1\cdots p_k \neq q_1\cdots q_k$. Поэтому, положив

$$\mathfrak{C}_k = \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}} (p_1\cdots q_k)^{-1/2} = \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}} (p_1\cdots p_k)^{-1},$$

приходим к равенству

$$V_{2k} = \binom{2k}{k}\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{C}_k + \theta 2^{-2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}x^{2k}\log N,$$

из которого и следует утверждение леммы.

Лемма 1.5. *При любом $k \geqslant 1$ для величины*

$$\mathfrak{C}_k = \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}} (p_1\cdots p_k)^{-1}$$

справедливо равенство $\mathfrak{C}_k = k!H^{(k)}(0)$, где

$$H(z) = \prod_{p\leqslant x} J_0\left(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\right),$$

а $J_0(u)$ – функция Бесселя первого рода.

Доказательство. Преобразуем величину $\mathfrak{C}_k$, следуя работе Радзивилла [30]. Пусть $n \geqslant 2$ – целое число, все простые делители которого не превосходят x, и пусть $r_1^{\alpha_1} \cdots r_s^{\alpha_s}$ – его каноническое разложение. Если число $\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ его простых делителей совпадает с k, то уравнение

$$n = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_k \tag{1.15}$$

разрешимо в простых числах $p_1, \ldots, q_k \leqslant x$ и число его решений равно

$$\left(\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_s!}\right)^2.$$

Если же $\Omega(n) \neq k$ или хотя бы одно из простых чисел $r_1, \ldots, r_s$ превосходит x, то уравнение (1.15), очевидно, неразрешимо.

Определим мультипликативную функцию $f(n)$ на степенях простых чисел равенствами

$$f(r^\alpha) = \begin{cases} (\alpha!)^{-2}, & \text{если } r \leqslant x, \\ 0, & \text{если } r > x. \end{cases}$$

Тогда число решений (1.15) при любом n совпадает с $(k!)^2 f(n)$, а сумма $\mathfrak{C}_k$ – с величиной $(k!)^2 h(k)$, где

$$h(k) = \sum_{\substack{n=1 \\ \Omega(n)=k}}^{+\infty} \frac{f(n)}{n}.$$

Чтобы вычислить $h(k)$, рассмотрим формальный ряд

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^k.$$

Меняя в нем порядок суммирования и пользуясь мультипликативностью (по n) функции $z^{\Omega(n)}$, получим

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \Bigg\{ \sum_{\substack{n=1 \\ \Omega(n)=k}}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} \Bigg\} z^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} z^{\Omega(n)} \\ &= \prod_p \Bigg\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f(p^m)}{p^m} z^{\Omega(p^m)} \Bigg\} = \prod_{p \leqslant x} \Bigg\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{z}{p}\right)^m \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Каждый член последнего произведения представляет собой ряд, сходящийся абсолютно в любой конечной части плоскости. Поэтому и ряд $H(z)$ как произведение конечного числа таких рядов сходится абсолютно для любого z. Этим и обосновывается законность изменения порядка суммирования в (1.16). Таким образом, $H(z)$ – целая функция, так что

$$h(k) = \frac{H^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{C}_k = k!\, H^{(k)}(0).$$

Замечая, наконец, что

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

приходим к утверждению леммы.

Лемма 1.6. *При любом $k \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$H^{(k)}(0) = k!\sum_{n=0}^{k} \frac{\Phi_n}{(k-n)!}\,\mathfrak{S}_1^{k-n},$$

в котором

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p},$$

а модули коэффициентов Φ_n при неограниченном возрастании x остаются ограниченными сверху некоторыми постоянными, зависящими лишь от n.

Доказательство. Первые слагаемые ряда

$$J_0\left(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{z}{p}\right)^m = 1 + \frac{z}{p} + \cdots$$

в правой части (1.16)) совпадают с первыми слагаемыми разложения

$$e^{z/p} = 1 + \frac{z}{p} + \cdots .$$

Это наблюдение позволяет предположить, что при достаточно малых z произведение (1.16) для $H(z)$ ведет себя подобно функции

$$\prod_{p\leqslant x} e^{z/p} = \exp\left\{z\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right\} = e^{z\mathfrak{S}_1}.$$

Поэтому для дальнейшего $H(z)$ удобно представить в виде

$$\prod_{p\leqslant x} e^{z/p}\cdot e^{-z/p}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m!)^2}\left(\frac{z}{p}\right)^m\right\} = \prod_{p\leqslant x} e^{z/p}\varphi\left(\frac{z}{p}\right) = e^{z\mathfrak{S}_1}\Phi(z),$$

где

$$\varphi(v) = e^{-v}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{v^m}{(m!)^2}, \qquad \Phi(z) = \prod_{p\leqslant x}\varphi\left(\frac{z}{p}\right).$$

Дифференцируя равенство $H(z) = e^{z\mathfrak{S}_1}\Phi(z)$, получим

$$H^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k}{n}\Phi^{(n)}(z)(e^{z\mathfrak{S}_1})^{(k-n)} = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\Phi^{(n)}(z)\mathfrak{S}_1^{k-n}e^{z\mathfrak{S}_1},$$

откуда

$$H^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\Phi^{(n)}(0)\mathfrak{S}_1^{k-n}.$$

Обозначая через Φ_n коэффициент разложения $\Phi(z)$ в ряд по степеням z, будем иметь

$$\Phi^{(n)}(0) = n!\,\Phi_n, \qquad H^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{k} n!\binom{k}{n}\Phi_n\mathfrak{S}_1^{k-n}.$$

Далее, заметим, что в разложении $\varphi(z/p)$ в ряд отсутствует член с z/p:

$$\varphi\left(\frac{z}{p}\right) = 1 - \frac{z^2}{4p^2} + \frac{z^3}{18p^3} - \cdots .$$

Следовательно, при перемножении таких разложений по всем $p \leqslant x$ коэффициент при z^n выразится конечной линейной комбинацией сумм произведений вида

$$\frac{1}{p_1^{m_1}\cdots p_r^{m_r}}, \qquad r \leqslant n, \quad p_1,\ldots,p_r \leqslant x, \quad m_1+\cdots+m_r = n,$$

в которых все показатели $m_1,\ldots,m_r$ больше или равны 2. Поскольку ряды $\sum p^{-r}$, $r = 2,3,\ldots$, сходятся, коэффициент Φ_n будет ограничен по модулю некоторой постоянной, зависящей лишь от n и не зависящей от x. Лемма доказана.

Доказанные выше леммы 1.4–1.6 позволяют сформулировать главное утверждение настоящего параграфа в следующей форме.

Теорема 1.1. *Пусть $k \geqslant 1$ – целое число, $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$. Тогда*

$$V_{2k} = \sum_n V^{2k}(t_n) = \frac{M}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{(2k)!}{(k-n)!}\,\Phi_n\mathfrak{S}_1^{k-n} + \theta x^{2k}\log N,$$

где каждый из коэффициентов Φ_n представляет собой полином от величин $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$,

$$\mathfrak{S}_r = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^r}.$$

Первая часть теоремы сразу следует из лемм 1.4–1.6. Доказательство последнего утверждения мы отложим до следующего параграфа, который целиком посвящен изучению свойств коэффициентов Φ_n.

1.2. Явные формулы для коэффициентов Φ_n

Формула для четного момента V_{2k} из теоремы 1.1 содержит величины Φ_n, которые определяются как коэффициенты разложения в ряд по степеням z функции $\Phi(z)$. Для дальнейшей работы с такими формулами необходимо установить некоторые свойства этих коэффициентов. Это и является целью настоящего и следующего параграфов.

Прежде всего, мы завершим доказательство теоремы 1.1. Именно, мы укажем явный вид Φ_n для небольших значений n и опишем процедуру, которая позволяет за конечное число шагов отыскать выражение для Φ_n в виде полинома от величин $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$ при любом n.

Лемма 1.7. *Имеют место следующие равенства*:

$$\Phi_0 \equiv 1, \qquad \Phi_1 \equiv 0, \qquad \Phi_2 = -\frac{1}{2^2}\mathfrak{S}_2, \qquad \Phi_3 = \frac{1}{3^2}\mathfrak{S}_3,$$
$$\Phi_4 = -\frac{11}{2^6\cdot 3}\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2^5}\mathfrak{S}_2^2, \qquad \Phi_5 = \frac{19}{2^3\cdot 3\cdot 5^2}\mathfrak{S}_5 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3,$$
$$\Phi_6 = -\frac{11\cdot 43}{2^6\cdot 3^4\cdot 5}\mathfrak{S}_6 + \frac{11}{2^8\cdot 3}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2\cdot 3^4}\mathfrak{S}_3^2 - \frac{1}{2^7\cdot 3}\mathfrak{S}_2^3,$$
$$\Phi_7 = \frac{229}{2^4\cdot 3^3\cdot 7^2}\mathfrak{S}_7 - \frac{19}{2^5\cdot 3\cdot 5^2}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5 - \frac{11}{2^6\cdot 3^3}\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2^5\cdot 3^2}\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3.$$

Доказательство. Обозначим через ϖ_n коэффициенты разложения в ряд функции $\varphi(v)$, так что

$$\varphi(v) = e^{-v}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{v^m}{(m!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\varpi_n v^n.$$

Тогда несложно проверить, что

$$\varpi_0 = 1, \qquad \varpi_1 = 0, \qquad 2!\,\varpi_2 = -\frac{1}{2}, \qquad 3!\,\varpi_3 = \frac{2}{3}, \qquad 4!\,\varpi_4 = -\frac{5}{8},$$
$$5!\,\varpi_5 = \frac{7}{15}, \qquad 6!\,\varpi_6 = -\frac{37}{144}, \qquad 7!\,\varpi_7 = \frac{17}{420},$$

и вообще

$$n!\,\varpi_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{n}{m}.$$

Перемножая разложения для $\varphi(z/p)$ по всем $p \leqslant x$, получим

$$\Phi(z) = \prod_{p\leqslant x}\sum_{m=0}^{+\infty}\varpi_m\left(\frac{z}{p}\right)^m = \sum_{r\geqslant 0}\sum_{m_1,\ldots,m_r\geqslant 0}\sum_{p_1<\cdots<p_r\leqslant x}\frac{\varpi_{m_1}\cdots\varpi_{m_r}}{p_1^{m_1}\cdots p_r^{m_r}}\,z^{m_1+\cdots+m_r},$$

откуда

$$\Phi_n = \sum_{0\leqslant r\leqslant n}\ \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_r=n\\ m_1,\ldots,m_r\geqslant 0}}\varpi_{m_1}\cdots\varpi_{m_r}T_{m_1,\ldots,m_r},$$

где

$$T_{m_1,\ldots,m_r} = \sum_{p_1<\cdots<p_r\leqslant x}(p_1^{m_1}\cdots p_r^{m_r})^{-1}.$$

Поскольку $\varpi_1 = 0$, ненулевой вклад в Φ_n дают лишь те слагаемые, что отвечают наборам $m_1,\ldots,m_r$, не содержащим единиц, т.е. таким, у которых $m_j = 0$ или $m_j \geqslant 2$ для всех j. Пусть s – число ненулевых компонент такого набора, и пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ – сами компоненты, записанные с сохранением порядка следования. Так как $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \geqslant 2$, то $n = \alpha_1+\cdots+\alpha_s \geqslant 2s$, откуда как необходимое условие при $n \geqslant 2$ получаем неравенство $1 \leqslant s \leqslant n/2$. Следовательно,

$$\Phi_n = \sum_{1\leqslant s\leqslant n/2}\ \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\geqslant 2}}\varpi_{\alpha_1}\ldots\varpi_{\alpha_s}T_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}. \tag{1.17}$$

Таким образом,

$$\Phi_2 = \varpi_2T_2 = \varpi_2\mathfrak{S}_2 = -\frac{1}{4}\,\mathfrak{S}_2, \qquad \Phi_3 = \varpi_3T_3 = \varpi_3\mathfrak{S}_3 = \frac{1}{9}\,\mathfrak{S}_3.$$

Далее, имеем

$$\Phi_4 = \varpi_4T_4 + \varpi_2^2T_{2,2}, \qquad \Phi_5 = \varpi_5T_5 + \varpi_2\varpi_3(T_{2,3}+T_{3,2}),$$
$$\Phi_6 = \varpi_6T_6 + \varpi_3^2T_{3,3} + \varpi_2\varpi_4(T_{2,4}+T_{4,2}) + \varpi_2^3T_{2,2,2},$$
$$\Phi_7 = \varpi_7T_7 + \varpi_2\varpi_5(T_{2,5}+T_{5,2}) + \varpi_3\varpi_4(T_{3,4}+T_{4,3}) + \varpi_2^2\varpi_3(T_{2,2,3}+T_{2,3,2}+T_{3,2,2}).$$

Пусть α и β – произвольные натуральные числа. Тогда

$$\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta = \sum_{p,q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\beta} = \sum_{p<q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\beta} + \sum_{q<p\leqslant x}\frac{1}{q^\beta p^\alpha} + \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{\alpha+\beta}} = T_{\alpha,\beta} + T_{\beta,\alpha} + \mathfrak{S}_{\alpha+\beta},$$

откуда

$$T_{\alpha,\beta} + T_{\beta,\alpha} = \mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta - \mathfrak{S}_{\alpha+\beta}.$$

Аналогично,

$$\mathfrak{S}_\alpha^2\mathfrak{S}_\beta = \sum_{p,q,r\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha r^\beta} = \left\{\sum_{p<q\leqslant x} + \sum_{q<p\leqslant x}\right\}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha}\sum_{r\leqslant x}\frac{1}{r^\beta} + \sum_{p,r\leqslant x}\frac{1}{p^{2\alpha}r^\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{p<q\leqslant x}\sum_{r\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha r^\beta}+\sum_{p<r\leqslant x}\frac{1}{p^{2\alpha}r^\beta}+\sum_{r<p\leqslant x}\frac{1}{r^\beta p^{2\alpha}}+\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{2\alpha+\beta}}\\
&= 2\biggl\{\sum_{r<p<q\leqslant x}\frac{1}{r^\beta p^\alpha q^\alpha}+\sum_{p<q\leqslant x}\frac{1}{p^{\alpha+\beta}q^\alpha}+\sum_{p<r<q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha r^\beta q^\alpha}+\sum_{p<q\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^{\alpha+\beta}}+\sum_{p<q<r\leqslant x}\frac{1}{p^\alpha q^\alpha r^\beta}\biggr\}\\
&\qquad + T_{2\alpha,\beta}+T_{\beta,2\alpha}+\mathfrak{S}_{2\alpha+\beta}\\
&= 2(T_{\beta,\alpha,\alpha}+T_{\alpha+\beta,\alpha}+T_{\alpha,\beta,\alpha}+T_{\alpha,\alpha+\beta}+T_{\alpha,\alpha,\beta})+T_{2\alpha,\beta}+T_{\beta,2\alpha}+\mathfrak{S}_{2\alpha+\beta},
\end{aligned}
$$

так что

$$
T_{\alpha,\alpha,\beta}+T_{\alpha,\beta,\alpha}+T_{\beta,\alpha,\alpha}=\frac{1}{2}(\mathfrak{S}_\alpha^2\mathfrak{S}_\beta-\mathfrak{S}_{2\alpha}\mathfrak{S}_\beta)+\mathfrak{S}_{2\alpha+\beta}-\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_{\alpha+\beta}.
$$

Таким образом,

$$
\begin{gathered}
T_{2,2}=\frac{1}{2}(\mathfrak{S}_2^2-\mathfrak{S}_4),\qquad T_{3,3}=\frac{1}{2}(\mathfrak{S}_3^2-\mathfrak{S}_6),\\
T_{2,3}+T_{3,2}=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_5,\qquad T_{2,4}+T_{4,2}=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4-\mathfrak{S}_6,\\
T_{2,5}+T_{5,2}=\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5-\mathfrak{S}_7,\qquad T_{3,4}+T_{4,3}=\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4-\mathfrak{S}_7,\\
T_{2,2,2}=\frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_2^3-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4+\frac{1}{3}\,\mathfrak{S}_6
\end{gathered}
$$

и, наконец,

$$
T_{2,2,3}+T_{2,3,2}+T_{3,2,2}=\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4+\mathfrak{S}_7.
$$

Возвращаясь к выражениям для Φ_n, $n=4,\ldots,7$, находим

$$
\begin{aligned}
\Phi_4 &= \varpi_4\mathfrak{S}_4+\frac{1}{2}\,\varpi_2^2(\mathfrak{S}_2^2-\mathfrak{S}_4)=\left(\varpi_4-\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\right)\mathfrak{S}_4+\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\mathfrak{S}_2=-\frac{11}{192}\,\mathfrak{S}_4+\frac{1}{32}\,\mathfrak{S}_2^2,\\
\Phi_5 &= \varpi_5\mathfrak{S}_5+\varpi_2\varpi_3(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_5)=(\varpi_5-\varpi_2\varpi_3)\mathfrak{S}_5+\varpi_2\varpi_3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3=\frac{19}{600}\,\mathfrak{S}_5-\frac{1}{36}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3,\\
\Phi_6 &= \varpi_6\mathfrak{S}_6+\frac{1}{2}\,\varpi_3^2(\mathfrak{S}_3^2-\mathfrak{S}_6)+\varpi_2\varpi_4(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4-\mathfrak{S}_6)+\varpi_2^3\left(\frac{1}{3}\,\mathfrak{S}_6-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4+\frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_2^3\right)\\
&\quad= \left(\varpi_6-\frac{1}{2}\,\varpi_3^2-\varpi_2\varpi_4+\frac{1}{3}\,\varpi_2^3\right)\mathfrak{S}_6+\left(\varpi_2\varpi_4-\frac{1}{2}\,\varpi_2^3\right)\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4++\frac{1}{2}\,\varpi_3^2\mathfrak{S}_3^2+\frac{1}{6}\,\varpi_2^3S_2^3\\
&\quad= -\frac{473}{25\,920}\,\mathfrak{S}_6+\frac{11}{768}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4+\frac{1}{162}\,\mathfrak{S}_3^2-\frac{1}{384}\,\mathfrak{S}_2^3,\\
\Phi_7 &= \varpi_7\mathfrak{S}_7+\varpi_2\varpi_5(\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5-\mathfrak{S}_7)+\varpi_3\varpi_4(\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4-\mathfrak{S}_7)\\
&\qquad+\varpi_2^2\varpi_3\left(\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5+\mathfrak{S}_7-\frac{1}{2}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\right)\\
&\quad= (\varpi_7-\varpi_2\varpi_5-\varpi_3\varpi_4+\varpi_2^2\varpi_3)\mathfrak{S}_7+(\varpi_2\varpi_5-\varpi_2^2\varpi_3)\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5\\
&\qquad+\left(\varpi_3\varpi_4-\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_3\right)\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4+\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_3\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3\\
&\quad= \frac{229}{21\,168}\,\mathfrak{S}_7-\frac{19}{2\,400}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_5-\frac{11}{1\,728}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4+\frac{1}{288}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Примененный выше способ нахождения величин Φ_n, $n\leqslant 7$, оказывается очень трудоемким уже при сравнительно небольших n. Имея в виду сделать формулы теоремы 1.1 (как, впрочем, и формулы теорем 1.2, 1.3) пригодными для вычислений, ниже мы приводим описание алгоритма, который позволяет за конечное число шагов найти явное выражение Φ_n в виде полинома от $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$.

Предварим описание алгоритма рядом вспомогательных утверждений.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ – набор произвольных натуральных чисел, упорядоченных по возрастанию: $\alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_s$. Обозначим через $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}(x)$ (или, короче, через $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$) сумму

$$\sideset{}{'}\sum_{p_1,\ldots,p_s \leqslant x} (p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s})^{-1}, \tag{1.18}$$

где штрих обозначает суммирование по всем наборам простых чисел $p_1, \ldots, p_s$, не содержащим повторений.

Лемма 1.8. *Справедливо равенство*

$$Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \nu_1! \cdots \nu_m! \sum_{\overline{\beta}} T_{\beta_1,\ldots,\beta_s},$$

где m – количество различных чисел в наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\nu_1, \ldots, \nu_m$ – их кратности, а суммирование ведется по всем различным упорядоченным наборам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$, которые получаются из $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ перестановкой.

Доказательство. Для любого слагаемого в (1.18) и любой пары простых чисел p_i, p_j имеет место одно из неравенств $p_i < p_j$, $p_j < p_i$. Следовательно, область изменения переменных в (1.18) можно разбить на $s!$ областей, каждая из которых определяется соотношением вида

$$p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_s} \leqslant x,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_s$ – перестановка чисел $1, 2, \ldots, s$. Соответственно $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ распадается на $s!$ сумм вида

$$\sum_{p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_s} \leqslant x} (p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s})^{-1} = \sum_{p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_s} \leqslant x} (p_1^{\alpha_{i_1}} \cdots p_s^{\alpha_{i_s}})^{-1} = T_{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s}}.$$

Поскольку среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ могут встретиться одинаковые, некоторые из этих $s!$ сумм могут совпадать друг с другом. Это будет тогда, когда совпадут перестановки $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$. Меняя в наборе $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$ местами одинаковые элементы, получим $\nu_1! \cdots \nu_m!$ перестановок, совпадающих с исходной. Следовательно, каждая из сумм $T_{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s}}$, отвечающих различным перестановкам $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$, войдет в $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ с коэффициентом $\nu_1! \cdots \nu_m!$. Лемма доказана.

Пример 1.1. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 2, 3)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
Q_{2,2,3} &= \sideset{}{'}\sum_{p_1,p_2,p_3 \leqslant x} (p_1^2 p_2^2 p_3^3)^{-1} \\
&= \Bigg\{ \sum_{p_1<p_2<p_3} + \sum_{p_1<p_3<p_2} + \sum_{p_2<p_1<p_3} + \sum_{p_2<p_3<p_1} + \sum_{p_3<p_1<p_2} + \sum_{p_3<p_2<p_1} \Bigg\} (p_1^2 p_2^2 p_3^3)^{-1} \\
&= \sum_{q_1<q_2<q_3} (q_1^2 q_2^2 q_3^3)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} (q_1^2 q_2^3 q_3^2)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} (q_1^2 q_2^2 q_3^3)^{-1} \\
&\qquad + \sum_{q_1<q_2<q_3} (q_1^2 q_2^3 q_3^2)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} (q_1^3 q_2^2 q_3^2)^{-1} + \sum_{q_1<q_2<q_3} (q_1^3 q_2^2 q_3^2)^{-1} \\
&= T_{2,2,3} + T_{2,3,2} + T_{2,2,3} + T_{2,3,2} + T_{3,2,2} + T_{3,2,2} = 2(T_{2,2,3} + T_{2,3,2} + T_{3,2,2}).
\end{aligned}$$

Лемма 1.9. *Сумма $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ является многочленом от величин $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$, где $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по s. Если $s=1$, то

$$Q_\alpha = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p^\alpha} = \mathfrak{S}_\alpha,$$

и утверждение леммы очевидно.

Предположим, что утверждение проверено для всех $s \leqslant m$, и докажем его для $s=m+1$. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1})$ с условием $\alpha_i \geqslant 2$, $i=1,\ldots,m+1$. При перемножении выражений

$$\mathfrak{S}_{\alpha_1} = \sum_{p_1\leqslant x} p_1^{-\alpha_1}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{S}_{\alpha_{m+1}} = \sum_{p_{m+1}\leqslant x} p_{m+1}^{-\alpha_{m+1}}$$

получим сумму

$$\sum_{p_1,\ldots,p_{m+1}\leqslant x} (p_1^{\alpha_1}\cdots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}})^{-1},$$

все слагаемые которой разобьем на два класса. К первому отнесем те, которые отвечают наборам $(p_1,\ldots,p_{m+1})$, не содержащим повторений. Ко второму классу отнесем все остальные слагаемые.

Слагаемые первого класса образуют сумму $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}}$.

Всякое же слагаемое второго класса отвечает набору, содержащему по крайней мере два одинаковых простых числа, и потому может быть записано в виде $(q_1^{\beta_1}\cdots q_r^{\beta_r})^{-1}$, где число r сомножителей, отвечающих различным простым числам $q_1,\ldots,q_r$, строго меньше s: $r \leqslant s-1=m$.

Следовательно, все слагаемые второго класса можно распределить по суммам $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$, где $1\leqslant r\leqslant s-1=m$. В силу предположения индукции каждая из таких сумм является полиномом от величин $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$. Поэтому и $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}}$ как разность между мономом $\mathfrak{S}_{\alpha_1}\cdots\mathfrak{S}_{\alpha_{m+1}}$ и слагаемыми второго класса также будет полиномом от $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$. Лемма (а вместе с ней и теорема 1.1) доказана.

Анализ предыдущего доказательства обнаруживает следующее. Возникающие при группировке слагаемых второго класса суммы $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ отвечают наборам $\overline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)$, которые получились из набора $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ путем замены некоторых его компонент $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}$ одной, равной их сумме $\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}$ (или же многократным повторением этой операции). Для всякого набора $\overline{\beta}$, полученного таким образом из $\overline{\alpha}$, будем писать $\overline{\beta}\prec\overline{\alpha}$.

Далее, выражение для суммы $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ содержит лишь один моном, равный произведению r величин из числа $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$, а именно моном $\mathfrak{S}_{\beta_1}\cdots\mathfrak{S}_{\beta_r}$, причем последний входит в $Q_{\beta_1,\ldots,\beta_r}$ с коэффициентом, равным единице. Следовательно,

$$Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} = \mathfrak{S}_{\alpha_1}\cdots\mathfrak{S}_{\alpha_s} + \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{\overline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)\prec\overline{\alpha}} A_{\overline{\beta}}\mathfrak{S}_{\beta_1}\cdots\mathfrak{S}_{\beta_r}, \tag{1.19}$$

где $A_{\overline{\beta}}$ – некоторые числа, не зависящие от $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_n$ и x.

Укажем теперь на связь величин Φ_n с суммами $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$.

При доказательстве леммы 1.7 была получена формула

$$\Phi_n = \sum_{1\leqslant s\leqslant n/2} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_s=n\\ \beta_1,\ldots,\beta_s\geqslant 2}} \varpi_{\beta_1}\cdots\varpi_{\beta_s} T_{\beta_1,\ldots,\beta_s},$$

в которой суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $\overline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_s)$ – решениям уравнения

$$\beta_1+\cdots+\beta_s = n \tag{1.20}$$

с условием $\beta_1, \ldots, \beta_s \geqslant 2$. Приведем во внутренней сумме подобные слагаемые, собирая вместе те, что отвечают различным перестановкам $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ одного и того же решения $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ уравнения (1.20), компоненты которого упорядочены по возрастанию: $\alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_s$.

Для всех таких наборов $\overline{\beta}$ произведение $\varpi_{\beta_1} \cdots \varpi_{\beta_s}$ имеет одно и то же значение $\varpi_{\alpha_1} \cdots \varpi_{\alpha_s}$. Сумма же величин $T_{\beta_1,\ldots,\beta_s}$ совпадает в силу леммы 1.8 с величиной $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$, деленной на $\nu_1! \cdots \nu_m!$, где m – число различных элементов в наборе $\overline{\alpha}$, а $\nu_1, \ldots, \nu_m$ – их кратности. Таким образом,

$$\Phi_n = \sum_{1 \leqslant s \leqslant n/2} \sum_{\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}{}' \frac{\varpi_{\alpha_1} \cdots \varpi_{\alpha_s}}{\nu_1! \cdots \nu_m!} Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s},$$

где штрих обозначает суммирование по всем разбиениям числа n на s слагаемых, превосходящих единицу, причем разбиения, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования слагаемых, считаются одинаковыми.

Пример 1.2. В случае $n = 8$ имеем разбиения

$$n = 8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_8 = \varpi_8 T_8 + \varpi_2\varpi_6(T_{2,6} + T_{6,2}) + \varpi_3\varpi_5(T_{3,5} + T_{5,3}) + \varpi_4^2 T_{4,4} + \varpi_2^2\varpi_4(T_{2,2,4} + T_{2,4,2} + T_{4,2,2}) \\ + \varpi_2\varpi_3^2(T_{2,3,3} + T_{3,2,3} + T_{3,3,2}) + \varpi_2^4 T_{2,2,2,2}.\end{aligned}$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, получаем таблицу 1.

Таблица 1

$\overline{\beta}$	m	$\nu_1, \ldots, \nu_m$	$\nu_1! \cdots \nu_m!$
(8)	1	$\nu_1 = 1$	1
$(2,6)$	2	$\nu_1 = \nu_2 = 1$	1
$(3,5)$	2	$\nu_1 = \nu_2 = 1$	1
$(4,4)$	1	$\nu_1 = 2$	2
$(2,2,4)$	2	$\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 1$	2
$(2,3,3)$	2	$\nu_1 = 1,\ \nu_2 = 2$	2
$(2,2,2,2)$	1	$\nu_1 = 4$	24

Окончательно находим

$$\begin{aligned}\Phi_8 = \varpi_8 Q_8 + \varpi_2\varpi_6 Q_{2,6} + \varpi_3\varpi_5 Q_{3,5} \\ + \frac{1}{2}\varpi_4^2 Q_{4,4} + \frac{1}{2}\varpi_2^2\varpi_4 Q_{2,2,4} + \frac{1}{2}\varpi_2\varpi_3^2 Q_{2,3,3} + \frac{1}{24}\varpi_2^4 Q_{2,2,2,2}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Таким образом, для того, чтобы выразить коэффициент Φ_n через $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$, достаточно отыскать способ вычисления коэффициентов $A_{\overline{\beta}}$ в формуле (1.19)). Для этой цели мы составим систему линейных уравнений относительно неизвестных $A_{\overline{\beta}}$, имеющую единственное решение.

Прежде всего, все мономы $\mathfrak{S}_{\beta_1} \cdots \mathfrak{S}_{\beta_r}$ в выражении (1.19) расположим так, чтобы:
1) запись начиналась с монома $\mathfrak{S}_{\alpha_1} \cdots \mathfrak{S}_{\alpha_s}$;
2) для любых наборов $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ и $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, связанных соотношением $\overline{\gamma} \prec \overline{\beta}$, моном $\mathfrak{S}_{\beta_1} \cdots \mathfrak{S}_{\beta_r}$ предшествовал моному $\mathfrak{S}_{\gamma_1} \cdots \mathfrak{S}_{\gamma_k}$.

Опираясь на такой порядок записи мономов, составим матрицу системы с неизвестными $A_{\overline{\beta}}$, подсчитывая, с каким коэффициентом входит в разложение $\mathfrak{S}_{\beta_1}\cdots\mathfrak{S}_{\beta_r}$ всякая дробь $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\overline{\gamma}) = (p_1^{\gamma_1}\cdots p_k^{\gamma_k})^{-1}$.

Каждая из дробей $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$ не встречается в сумме $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$, но входит в сумму, которая образуется при перемножении мономов $\mathfrak{S}_{\alpha_1},\ldots,\mathfrak{S}_{\alpha_s}$.

Далее, дробь $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$ встречается в разложении монома $\mathfrak{S}_{\gamma_1}\cdots\mathfrak{S}_{\gamma_k}$ по меньшей мере один раз и не встречается в разложениях следующих по порядку записи мономов $\mathfrak{S}_{\beta_1}\cdots\mathfrak{S}_{\beta_r}$. Поэтому матрица системы оказывается нижнетреугольной, причем все элементы ее главной диагонали отличны от нуля. Очевидно, система уравнений с такой матрицей имеет единственное решение.

Пример 1.3. Выразим величину $Q = Q_{2,2,2,2}$, которая встречается в формуле (1.21) для Φ_8, через $\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_8$. Прежде всего, имеем

$$(2,2,2,2)\succ(2,2,4)\succ(2,6),(4,4)\succ(8).$$

Следовательно, $Q_{2,2,2,2}$ имеет вид

$$\mathfrak{S}_2^4 + A\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 + B\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 + C\mathfrak{S}_4^2 + D\mathfrak{S}_8$$

(вместо $A_{\overline{\beta}}$ для краткости будем использовать буквы A, B и т.д.). Заполним таблицу 2, в которой на пересечении строки, отвечающей набору $\overline{\gamma}$ (и дроби $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$), и столбца, отвечающего моному $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\beta_1}\cdots\mathfrak{S}_{\beta_2}$, стоит коэффициент, с которым $\mathfrak{f}(\overline{\gamma})$ входит в $\mathfrak{M}$.

Таблица 2

$\overline{\gamma}$	$\mathfrak{f}^{-1}(\overline{\gamma})$	$\mathfrak{S}_2^4$	$\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6$	$\mathfrak{S}_4^2$	$\mathfrak{S}_8$	Q
$(2,2,4)$	$p_1^2p_2^2p_3^4$	12	2	0	0	0	0
$(2,6)$	$p_1^2p_2^6$	4	2	1	0	0	0
$(4,4)$	$p_1^4p_2^4$	6	2	0	2	0	0
(8)	p_1^8	1	1	1	1	1	0

Действительно, дробь $(p_1^2p_2^2p_3^4)^{-1}$ не встречается в разложениях $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{S}_4^2$ и $\mathfrak{S}_8$, дробь $(p_1^2p_2^6)^{-1}$ – в разложениях $\mathfrak{S}_4^2$, $\mathfrak{S}_8$, дробь $(p_1^4p_2^4)^{-1}$ – в разложениях $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6$, $\mathfrak{S}_8$, поэтому соответствующие ячейки таблицы заполняются нулями. Далее, сумма $\mathfrak{S}_2^4$ имеет вид

$$\sum_{q_1,\ldots,q_4\leqslant x}(q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2)^{-1}.$$

Фиксируя различные простые числа p_1, p_2, p_3, подсчитаем число наборов q_1, q_2, q_3, q_4, для которых дробь $(q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2)^{-1}$ совпадет с дробью $(p_1^2p_2^2p_3^4)^{-1}$. Ясно, что это число равно количеству решений уравнения

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^2p_2^2p_3^4 \tag{1.22}$$

в простых $q_1,\ldots,q_4$. Очевидно, что два числа из q_i должны совпадать с p_3. Выбор этой пары можно осуществить $\binom{4}{2} = 6$ способами. Из двух оставшихся q_i одно должно равняться p_1, а другое p_2, так что выбрать значения для них можно двумя способами. Значит, общее число решений (1.22) составит $6\cdot 2 = 12$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что коэффициент, с которым дробь $(p_1^2p_2^2p_3^4)^{-1}$ входит в $\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4$, равен числу решений уравнения $q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^2p_2^2p_3^4$. Так как его решения исчерпываются наборами (p_1,p_2,p_3) и (p_2,p_1,p_3), то искомый коэффициент равен 2.

Далее, несложно проверить, что уравнения

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^2p_2^6, \quad q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^2p_2^6, \quad q_1^2q_2^6 = p_1^2p_2^6$$

имеют четыре, два и одно решения соответственно. Эти числа помещаются во вторую строку таблицы.

Третья строка таблицы будет содержать числа решений уравнений

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^4p_2^4, \qquad q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^4p_2^4, \qquad q_1^2q_2^6 = p_1^4p_2^4,$$

т.е. шесть, два и два решения.

Замечая, наконец, что каждое из уравнений

$$q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2 = p_1^8, \qquad q_1^2q_2^2q_3^4 = p_1^8, \qquad q_1^2q_2^6 = p_1^8$$

имеет единственное решение, все компоненты которого совпадают с p_1, последнюю строку заполняем единицами.

Поскольку ни одна из рассмотренных выше дробей не встречается в сумме Q, то последний столбец таблицы будет содержать лишь нули; система же уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 12 + 2A = 0, \\ 4 + 2A + B = 0, \\ 6 + 2A + 2C = 0, \\ 1 + A + B + C + D = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A = -6$, $B = 8$, $C = 3$, $D = -6$ и

$$Q_{2,2,2,2} = \mathfrak{S}_2^4 - 6\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 + 8\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 + 3\mathfrak{S}_4^2 - 6\mathfrak{S}_8.$$

Последнее соотношение и формула (1.21) позволяют вычислить Φ_8. Действительно, из формул леммы 1.7 следуют равенства

$$\begin{gathered} Q_{2,6} = \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 - \mathfrak{S}_8, \qquad Q_{3,5} = \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{S}_8, \qquad Q_{4,4} = \mathfrak{S}_4^2 - \mathfrak{S}_8, \\ Q_{2,2,4} = 2(T_{2,2,4} + T_{2,4,2} + T_{4,2,2}) = \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 - 2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 - \mathfrak{S}_4^2 + 2\mathfrak{S}_8, \\ Q_{2,3,3} = 2(T_{2,3,3} + T_{3,2,3} + T_{3,3,2}) = \mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 - 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 + 2\mathfrak{S}_8. \end{gathered}$$

Подставляя эти выражения в формулу (1.21), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_8 = \mathfrak{S}_8 &\left(\varpi_8 - \varpi_2\varpi_6 - \varpi_3\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_4^2 + \varpi_2^2\varpi_4 + \varpi_2\varpi_3^2 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^4\right) \\ &+ \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6\left(\varpi_2\varpi_6 - \varpi_2^2\varpi_4 - \frac{1}{2}\,\varpi_2\varpi_3^2 + \frac{1}{3}\,\varpi_2^4\right) + \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5(\varpi_3\varpi_5 - \varpi_2\varpi_3^2) \\ &+ \mathfrak{S}_4^2\left(\frac{1}{2}\,\varpi_4^2 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_4 + \frac{1}{8}\varpi_2^4\right) + \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_4 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^4\right) + \frac{1}{2}\,\varpi_2\varpi_3^2\,\mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_2 + \frac{1}{24}\,\varpi_2^4\mathfrak{S}_2^4 \\ = -&\frac{167\cdot 607}{2^{14}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}\,\mathfrak{S}_8 + \frac{11\cdot 43}{2^8\cdot 3^4\cdot 5}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_6 + \frac{19}{2^3\cdot 3^3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 + \frac{11^2}{2^{13}\cdot 3^2}\,\mathfrak{S}_4^2 \\ &- \frac{11}{2^{11}\cdot 3}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_4 - \frac{1}{2^3\cdot 3^4}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3^2 + \frac{1}{2^{11}\cdot 3}\,\mathfrak{S}_2^4. \end{aligned}$$

Чтобы завершить описание алгоритма вычисления Φ_n в общем случае, остается указать способ подсчета коэффициента, с которым дробь $(q_1^{\beta_1}\cdots q_r^{\beta_r})^{-1}$ входит в сумму, возникающую при перемножении величин $\mathfrak{S}_{\alpha_1},\ldots,\mathfrak{S}_{\alpha_s}$, т.е. в сумму

$$\sum_{p_1,\ldots,p_s\leqslant x}(p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s})^{-1}.$$

Несложно видеть, что этот коэффициент совпадает с числом $\mathcal{N}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ решений уравнения

$$p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}=q_1^{\beta_1}\cdots q_r^{\beta_r} \tag{1.23}$$

в простых числах $p_1,\ldots,p_s$. Для нахождения $\mathcal{N}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ нам потребуется ряд новых понятий.

Разбиением вектора $\overline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)$ с натуральными компонентами β_i назовем представление каждой из его компонент суммой натуральных чисел:

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_{u_1}+\cdots+\alpha_{v_1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_r=\alpha_{u_r}+\cdots+\alpha_{v_r}.\end{cases} \tag{1.24}$$

Представления, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования слагаемых α_i, считаются одинаковыми.

Если $\overline{\alpha}$ – произвольный вектор, компонентами которого являются все слагаемые $\alpha_{u_1},\ldots,\alpha_{v_r}$, фигурирующие в правых частях (1.24), то из (1.24) следует, что $\overline{\beta}\prec\overline{\alpha}$ (или же $\overline{\beta}=\overline{\alpha}$). Для двух векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, связанных условием $\overline{\beta}\prec\overline{\alpha}$, через $\mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ обозначим множество всех разбиений вектора $\overline{\beta}$ на слагаемые, являющиеся компонентами вектора $\overline{\alpha}$.

Пример 1.4. Пусть $\overline{\alpha}=(2,2,2,3,3)$, $\overline{\beta}=(6,6)$. Тогда $\mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ состоит из разбиений π_1 и π_2, которые задаются системами равенств:

$$\pi_1\colon\quad\begin{cases}\beta_1=6=2+2+2,\\ \beta_2=6=3+3,\end{cases}\qquad\qquad \pi_2\colon\quad\begin{cases}\beta_1=6=3+3,\\ \beta_2=6=2+2+2.\end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{Q}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ множество тех разбиений вектора $\overline{\beta}$ из $\mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$, которые не могут быть получены друг из друга перестановкой правых частей равенств (1.24).

Пример 1.5. Для векторов $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ из примера 1.4 множество $\mathcal{Q}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ состоит из единственного разбиения π,

$$\pi\colon\quad\begin{cases}\beta_1=6=2+2+2,\\ \beta_2=6=3+3.\end{cases}$$

Если $\overline{\alpha}=(2,2,2,3,3,4)$, $\overline{\beta}=(4,6,6)$, то $\mathcal{Q}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ состоит из двух разбиений:

$$\pi_1\colon\quad\begin{cases}4=4,\\ 6=3+3,\\ 6=2+2+2,\end{cases}\qquad\qquad \pi_2\colon\quad\begin{cases}4=2+2,\\ 6=2+4,\\ 6=3+3.\end{cases}$$

Зафиксируем произвольное разбиение $\pi\in\mathcal{Q}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ вектора $\overline{\beta}$ и подсчитаем число различных разбиений π', которые могут быть получены из π перестановкой правых частей (1.24).

Пусть β – произвольное число из набора $\beta_1,\ldots,\beta_r$. Рассмотрим все равенства системы (1.24), левая часть которых совпадает с β. Пусть l – число различных типов среди этих равенств (два равенства относятся к разным типам, если они не могут быть получены друг из друга изменением порядка слагаемых), и пусть $m_1,\ldots,m_l$ – их кратности. Новые разбиения из множества $\mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ получим, меняя местами правые части равенств, которые принадлежат к разным типам. Число таких перестановок равно

$$\frac{(m_1+\cdots+m_l)!}{m_1!\cdots m_l!}\,.$$

Общее же число разбиений, которые получаются таким образом из π, равно

$$\mathcal{N}_1(\pi)=\prod_{\beta}\frac{(m_1+\dots+m_l)!}{m_1!\cdots m_l!},$$

где произведение берется по всем различным элементам набора $\beta_1,\dots,\beta_r$.

Пример 1.6. Рассмотрим разбиения π_1 и π_2 из примера 1.5. Для первого разбиения и элемента $\beta=4$ имеем, очевидно, $l=1$, $m_1=1$; если же $\beta=6$, то $l=2$, $m_1=m_2=1$. Следовательно,

$$\mathcal{N}_1(\pi_1)=\frac{1!}{1!}\cdot\frac{(1+1)!}{1!\,1!}=2.$$

Аналогично, $\mathcal{N}_1(\pi_2)=2$. Общее же число разбиений в $\mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ равно $\mathcal{N}_1(\pi_1)+\mathcal{N}_1(\pi_2)=4$.

Вернемся теперь к подсчету числа решений уравнения (1.23). Пусть $\pi\in\mathcal{P}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ – произвольное разбиение вектора $\overline{\beta}$, и пусть этому разбиению отвечает система (1.24). Представим правую часть в виде

$$q_1^{\alpha_{u_1}+\dots+\alpha_{v_1}}\cdots q_r^{\alpha_{u_r}+\dots+\alpha_{v_r}}=(q_1^{\alpha_{u_1}}\cdots q_1^{\alpha_{v_1}})\cdots(q_r^{\alpha_{u_r}}\cdots q_r^{\alpha_{v_r}}).$$

Упорядочивая соответствующим образом множители в левой части (1.21)), получим

$$(p_{u_1}^{\alpha_{u_1}}\cdots p_{v_1}^{\alpha_{v_1}})\cdots(p_{u_r}^{\alpha_{u_r}}\cdots p_{v_r}^{\alpha_{v_r}})=(q_1^{\alpha_{u_1}}\cdots q_1^{\alpha_{v_1}})\cdots(q_r^{\alpha_{u_r}}\cdots q_r^{\alpha_{v_r}}). \tag{1.25}$$

Очевидно, что решением исходного уравнения будет следующий набор:

$$\begin{cases} p_{u_1}=\dots=p_{v_1}=q_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ p_{u_r}=\dots=p_{v_r}=q_r.\end{cases} \tag{1.26}$$

Найденное решение порождает целую серию новых. Действительно, зафиксируем произвольное число α из набора $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ и выделим в каждой из скобок правой части (1.25) все множители q_i^{α}.

Меняя любые два из них местами, но сохраняя при этом порядок следования множителей p_i в левой части, будем получать новые наборы $(p_1,\dots,p_s)$, которые также являются решениями (1.23). Некоторые из этих наборов совпадут с решением (1.26). Это будет, если местами поменяются два одинаковых множителя $q_i^{\alpha},q_i^{\alpha}$. К новым решениям приведут лишь те перестановки, которые меняют местами множители q_i^{α} и q_j^{α}, отвечающие различным простым числам q_i, q_j.

Найдем число таких перестановок. Предположим, что показатель α встречается внутри первой скобки k_1 раз, …, внутри r-й скобки k_r раз (иначе говоря, $k_j=k_j(\alpha)$ равно числу слагаемых в правой части j-го уравнения системы (1.24), равных α). Тогда искомое число перестановок равно

$$\frac{(k_1+\dots+k_r)!}{k_1!\cdots k_r!}.$$

Общее же число различных решений, которые можно таким образом получить из (1.26), равно

$$\mathcal{N}_2(\pi)=\prod_{\alpha}\frac{(k_1+\dots+k_r)!}{k_1!\cdots k_r!},$$

где произведение берется по всем различным элементам набора $\alpha_1,\dots,\alpha_r$.

Отметим, что перестановка множителей q_i^α и q_j^α и полученное таким образом решение $p_1, \ldots, p_s$ не меняют вид разбиения (1.24). Действительно, эта операция равносильна перестановке в правых частях системы (1.24) двух одинаковых слагаемых $\alpha_u = \alpha_v = \alpha$, стоящих в разных строках.

Далее, так как произведение $\mathcal{N}_2(\pi)$ не зависит от порядка записи равенств в (1.24), то его значение будет одним и тем же для всех разбиений $\pi' \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, которые получаются из заданного разбиения $\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Так как общее число разбиений π', получающихся из $\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, равно $\mathcal{N}_1(\pi)$, то с учетом сказанного выше можно указать

$$\sum_{\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} \mathcal{N}_1(\pi) \mathcal{N}_2(\pi)$$

решений уравнения (1.23).

Покажем, что иных решений уравнения (1.23), отличных от тех, которые получаются в ходе описанной выше процедуры, нет.

Напомним, что в ходе ее сначала производился перебор всех разбиений π вектора $\overline{\beta}$ из множества $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Для каждого из них перестановкой равенств в системе (1.24) было построено $\mathcal{N}_1(\pi)$ различных разбиений из $\mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Наконец, по каждому из $\mathcal{N}_1(\pi)$ решений, отвечающих этим разбиениям, перестановкой множителей q_i^α и q_j^α, $i \neq j$, строилось $\mathcal{N}_2(\pi)$ новых.

Пусть теперь $p_1, \ldots, p_s$ – произвольное решение (1.23). В силу основной теоремы арифметики каждое из неизвестных p_i не может принимать значения, отличные от $q_1, \ldots, q_r$. Но тогда, группируя в произведении $p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ множители p_i, равные q_1, затем – множители p_i, равные q_2, и т.д. до множителей, равных q_r, получим равенство

$$(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots p_{j_1}^{\alpha_{j_1}}) \cdots (p_{i_r}^{\alpha_{i_r}} \cdots p_{j_r}^{\alpha_{j_r}}) = q_1^{\beta_1} \cdots q_r^{\beta_r},$$

в котором

$$\begin{cases} p_{i_1} = \cdots = p_{j_1} = q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{i_r} = \cdots = p_{j_r} = q_r \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{j_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_r = \alpha_{i_r} + \cdots + \alpha_{j_r}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Система (1.27) задает разбиение $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$. Такое разбиение необходимо окажется в числе рассмотренных в ходе описанной процедуры построения решений. Соответствующая система равенств типа (1.24), отвечающая разбиению π, возникающему в ходе построения решений, будет отличаться от системы (1.27) разве что перестановкой чисел α_i, имеющих разные индексы, одинаковые значения и стоящих в разных строках системы. Но все такие перестановки также учитываются в ходе построения решений. Следовательно, в их числе окажется и система (1.27) вместе с отвечающим ей решением $p_1, \ldots, p_s$. Итак, всякое решение (1.23) будет найдено описанным выше способом.

Остается лишь заметить, что все построенные решения различны. Очевидно, что различными будут решения, отвечающие разным разбиениям $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, так как в противном случае им отвечала бы одна и та же система (1.24)) и, следовательно, одно и то же разбиение. Далее, решения, которые отвечают одному и тому же разбиению $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ и получаются перестановкой множителей q_i^α, q_j^α, также различны, поскольку всякая такая перестановка означает перестановку различных по значению компонент в наборе $p_1, \ldots, p_s$.

Таким образом, для числа решений уравнения (1.23) имеем формулу

$$\mathcal{N}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \sum_{\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} \mathcal{N}_1(\pi)\mathcal{N}_2(\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} \prod_{\alpha} \frac{(k_1 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{\beta} \frac{(m_1 + \dots + m_l)!}{m_1! \cdots m_l!}\,.$$

Пример 1.7. Найдем число решений уравнения

$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^3 p_5^3 p_6^4 = 729\,000\,000 = 5^4 \cdot 3^6 \cdot 2^6.$$

Положим $\overline{\alpha} = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$, $\overline{\beta} = (4, 6, 6)$. В примерах 1.5, 1.6 мы нашли, что множество $\mathcal{Q}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ состоит из двух разбиений

$$\pi_1\colon\quad \begin{cases} 4 = 4, \\ 6 = 3 + 3, \\ 6 = 2 + 2 + 2, \end{cases} \qquad \pi_2\colon\quad \begin{cases} 4 = 2 + 2, \\ 6 = 2 + 4, \\ 6 = 3 + 3 \end{cases}$$

и что $\mathcal{N}_1(\pi_1) = \mathcal{N}_1(\pi_2) = 2$. Рассмотрим разбиение π_1. Перебирая различные компоненты α вектора $\overline{\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} &\alpha = 2, && k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = 3, \\ &\alpha = 3, && k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 0, \\ &\alpha = 4, && k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\mathcal{N}_2(\pi_1) = \frac{(0+3+0)!}{0!\,3!\,0!} \frac{(0+0+2)!}{0!\,0!\,2!} \frac{(1+0+0)!}{1!\,0!\,0!} = 1.$$

Переходя к разбиению π_2, будем иметь

$$\begin{aligned} &\alpha = 2, && k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0, \\ &\alpha = 3, && k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = 2, \\ &\alpha = 4, && k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathcal{N}_2(\pi_2) = \frac{(2+1+0)!}{2!\,1!\,0!} \frac{(0+0+2)!}{0!\,0!\,2!} \frac{(0+1+0)!}{0!\,1!\,0!} = 3.$$

Таким образом,

$$\mathcal{N}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \mathcal{N}_1(\pi_1)\mathcal{N}_2(\pi_1) + \mathcal{N}_1(\pi_2)\mathcal{N}_2(\pi_2) = 8.$$

Итак, исходное уравнение имеет восемь решений.

На этом завершается описание алгоритма вычисления Φ_n. Описание способов отыскания всех возможных разбиений $\pi \in \mathcal{P}(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ вектора $\overline{\beta}$ выходит за рамки настоящей работы. Для сравнительно небольших значений величины

$$n = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_j$$

эта задача успешно решается «ручным» перебором.

Пример 1.8. Применяя этот алгоритм к вычислению коэффициентов Φ_n для $n = 9, 10$, последовательно получим

$$\begin{aligned} Q_{2,3,4} &= \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 - \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7 - \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6 - \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5 + 2\mathfrak{S}_9, \\ Q_{2,2,2,3} &= \mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_3 - 3\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_5 - 3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 + 3\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5 + 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6 + 6\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7 - 6\mathfrak{S}_9 \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned}
\Phi_9 &= \varpi_9 Q_9 + \varpi_2\varpi_7 Q_{2,7} + \varpi_3\varpi_6 Q_{3,6} + \varpi_4\varpi_5 Q_{4,5} + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_5 Q_{2,2,5} + \varpi_2\varpi_3\varpi_4 Q_{2,3,4} \\
&\quad + \frac{1}{6}\,\varpi_3^3 Q_{3,3,3} + \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\varpi_3 Q_{2,2,2,3} \\
&= \mathfrak{S}_9\left(\varpi_9 - \varpi_2\varpi_7 - \varpi_3\varpi_6 - \varpi_4\varpi_5 + \varpi_2^2\varpi_5 + 2\varpi_2\varpi_3\varpi_4 + \frac{1}{3}\,\varpi_3^3 - \varpi_2^3\varpi_3\right) \\
&\quad + \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7(\varpi_2\varpi_7 - \varpi_2^2\varpi_5 - \varpi_2\varpi_3\varpi_4 + \varpi_2^3\varpi_3) \\
&\quad + \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6\left(\varpi_3\varpi_6 - \varpi_2\varpi_3\varpi_4 - \frac{1}{2}\,\varpi_3^3 + \frac{1}{3}\,\varpi_2^3\varpi_3\right) \\
&\quad + \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5\left(\varpi_4\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_5 - \varpi_2\varpi_3\varpi_4 + \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\varpi_3\right) \\
&\quad + \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_5\left(\frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\varpi_3\right) + \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4\left(\varpi_2\varpi_3\varpi_4 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\varpi_3\right) + \frac{1}{6}\,\varpi_3^3\mathfrak{S}_3^3 + \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\varpi_3\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_3 \\
&= \frac{19\cdot 31\cdot 1607}{2^{10}\cdot 3^8\cdot 5\cdot 7}\,\mathfrak{S}_9 - \frac{229}{2^6\cdot 3^3\cdot 7^2}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_7 - \frac{11\cdot 43}{2^6\cdot 3^6\cdot 5}\,\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_6 - \frac{11\cdot 19}{2^9\cdot 3^2\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_5 \\
&\quad + \frac{19}{2^8\cdot 3\cdot 5^2}\,\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_5 + \frac{11}{2^8\cdot 3^3}\,\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4 + \frac{1}{2\cdot 3^7}\,\mathfrak{S}_3^3 - \frac{1}{2^7\cdot 3^3}\,\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_3.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
Q_{2,2,6} &= \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 - 2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 - \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 2\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{2,3,5} &= \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 - \mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 - \mathfrak{S}_5^2 + 2\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{2,4,4} &= \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 - \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 - 2\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 2\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{3,3,4} &= \mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_4 - 2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 - \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 2\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{2,2,2,4} &= \mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_4 - 3\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 - 3\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 + 6\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 + 5\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 - 6\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{2,2,3,3} &= \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3^2 - \mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 - 4\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_4 + 4\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 + 4\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 + \mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 2\mathfrak{S}_5^2 - 6\mathfrak{S}_{10}, \\
Q_{2,2,2,2,2} &= \mathfrak{S}_2^5 - 10\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_4 + 20\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 + 15\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 - 30\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 - 20\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + 24\mathfrak{S}_{10}
\end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned}
\Phi_{10} &= \varpi_{10} Q_{10} + \varpi_2\varpi_8 Q_{2,8} + \varpi_3\varpi_7 Q_{3,7} + \varpi_4\varpi_6 Q_{4,6} + \frac{1}{2}\,\varpi_5^2 Q_{5,5} \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_6 Q_{2,2,6} + \varpi_2\varpi_3\varpi_5 Q_{2,3,5} + \frac{1}{2}\,\varpi_2\varpi_4^2 Q_{2,4,4} + \frac{1}{2}\,\varpi_3^2\varpi_4 Q_{3,3,4} \\
&\quad + \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\varpi_4 Q_{2,2,2,4} + \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 Q_{2,2,3,3} + \frac{1}{120}\,\varpi_2^5 Q_{2,2,2,2,2} \\
&= A_{10}\mathfrak{S}_{10} + A_{2,8}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_8 + A_{3,7}\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_7 + A_{4,6}\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_6 + A_{5,5}\mathfrak{S}_5^2 \\
&\quad + A_{2,2,6}\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_6 + A_{2,3,5}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_5 + A_{2,4,4}\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_4^2 + A_{3,3,4}\mathfrak{S}_3^2\mathfrak{S}_4 \\
&\quad + A_{2,2,2,4}\mathfrak{S}_2^3\mathfrak{S}_4 + A_{2,2,3,3}\mathfrak{S}_2^2\mathfrak{S}_3^2 + A_{2,2,2,2,2}\mathfrak{S}_2^5,
\end{aligned}$$

где коэффициенты A задаются равенствами

$$\begin{aligned}
A_{10} &= \varpi_{10} - \varpi_2\varpi_8 - \varpi_3\varpi_7 - \varpi_4\varpi_6 - \frac{1}{2}\,\varpi_5^2 + \varpi_2^2\varpi_6 + 2\varpi_2\varpi_3\varpi_5 \\
&\quad + \varpi_2\varpi_4^2 + \varpi_3^2\varpi_4 - \varpi_2^3\varpi_4 - \frac{3}{2}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 + \frac{1}{5}\,\varpi_2^5 = -\frac{199\cdot 329\,981}{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}, \\
A_{2,8} &= \varpi_2\varpi_8 - \varpi_2^2\varpi_6 - \varpi_2\varpi_3\varpi_5 - \frac{1}{2}\,\varpi_2\varpi_4^2 + \varpi_2^3\varpi_4 + \varpi_2^2\varpi_3^2 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^5 = \frac{167\cdot 607}{2^{16}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{3,7} &= \varpi_3\varpi_7 - \varpi_2\varpi_3\varpi_5 - \varpi_3^2\varpi_4 + \varpi_2^2\varpi_3^2 = \frac{229}{2^4\cdot 3^5\cdot 7^2}\,,\\
A_{4,6} &= \varpi_4\varpi_6 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_6 - \varpi_2\varpi_4^2 - \frac{1}{2}\,\varpi_3^2\varpi_4 + \frac{5}{6}\,\varpi_2^3\varpi_4 + \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 - \frac{1}{6}\,\varpi_2^5 = \frac{11^2\cdot 43}{2^{12}\cdot 3^5\cdot 5}\,,\\
A_{5,5} &= \frac{1}{2}\,\varpi_5^2 - \varpi_2\varpi_3\varpi_5 + \frac{1}{2}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 = \frac{19^2}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^4}\,,\\
A_{2,2,6} &= \frac{1}{2}\varpi_2^2\varpi_6 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\varpi_4 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 + \frac{1}{6}\,\varpi_2^5 = -\frac{11\cdot 43}{2^{11}\cdot 3^4\cdot 5}\,,\\
A_{2,3,5} &= \varpi_2\varpi_3\varpi_5 - \varpi_2^2\varpi_3^2 = -\frac{19}{2^5\cdot 3^3\cdot 5^2}\,,\\
A_{2,4,4} &= \frac{1}{2}\,\varpi_2\varpi_4^2 - \frac{1}{2}\,\varpi_2^3\varpi_4 + \frac{1}{8}\,\varpi_2^5 = -\frac{11^2}{2^{15}\cdot 3^2}\,,\\
A_{3,3,4} &= \frac{1}{2}\,\varpi_3^2\varpi_4 - \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 = -\frac{11}{2^7\cdot 3^5}\,,\\
A_{2,2,2,4} &= \frac{1}{6}\,\varpi_2^3\varpi_4 - \frac{1}{12}\,\varpi_2^5 = \frac{11}{2^{13}\cdot 3^2}\,,\\
A_{2,2,3,3} &= \frac{1}{4}\,\varpi_2^2\varpi_3^2 = \frac{1}{2^6\cdot 3^4}\,,\\
A_{2,2,2,2,2} &= \frac{1}{120}\,\varpi_2^5 = -\frac{1}{2^{13}\cdot 3\cdot 5}\,.
\end{aligned}
$$

1.3. Порядок роста коэффициентов Φ_n при $n \to +\infty$

Главный член (1.1) формулы дробного момента V_a получается формальным интегрированием ряда для функции $H(-u^2/\mathfrak{S}_1)$ по лучу $0 \leqslant u < +\infty$.

Чтобы доказать сходимость (1.1) и свойство этого ряда быть асимптотическим, нам потребуется ряд утверждений о порядке роста коэффициентов Φ_n при неограниченном возрастании n.

Одно из таких утверждений (лемма 1.11) опирается на неравенство для коэффициентов разложения в ряд функции

$$
\varphi(v) = e^{-v}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{v^m}{m!} = e^{-v}J_0(2i\sqrt{v}).
$$

Лемма 1.10. *При любом $n \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$
|\varpi_n| < \frac{1}{n!}\,.
$$

Доказательство. Из определения $\varphi(z)$ следует, что $(-1)^n\varpi_n$ совпадает с коэффициентом при v^{2n} в разложении в ряд функции $\varphi(-v^2)$. Замечая, что

$$
J_0(z) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m},
$$

находим

$$
\varphi(-v^2) = e^{v^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\,v^{2m} = e^{v^2}J_0(2v).
$$

Следовательно,

$$
(-1)^n\varpi_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{v^2}J_0(2v)}{v^{2n+1}}\,dv,
$$

где интегрирование ведется по произвольной окружности радиуса r с центром в начале координат. Пользуясь четностью функции $J_0(2v)$ и полагая $v = re^{i\vartheta}$, будем иметь

$$(-1)^n \varpi_n = \frac{r^{-2n}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r^2 e^{2i\vartheta}} J_0(2re^{i\vartheta}) e^{-2in\vartheta}\, d\vartheta,$$

откуда

$$|\varpi_n| \leqslant \frac{r^{-2n}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r^2 \cos 2\vartheta} |J_0(2re^{i\vartheta})|\, d\vartheta.$$

Положим теперь $r = \sqrt{n}$ и воспользуемся формулой Стирлинга. Получим

$$r^{-2n} = n^{-n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\, e^{-n+\theta/12n} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\, e^{-n+1/12n}$$

и, следовательно,

$$|\varpi_n| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\, e^{1/12n} \int_0^{\pi/2} e^{-n+n\cos 2\vartheta} |J_0(2\sqrt{n} e^{i\vartheta})|\, d\vartheta.$$

Применив оценку леммы I.2, приходим к неравенству

$$n!|\varpi_n| \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt[4]{n}\, e^{1/12} \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2n}}\right) j(n),$$

в котором

$$j(n) = \int_0^{\pi/2} e^{-n+n\cos 2\vartheta + 2\sqrt{n}\sin\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} e^{f(\sin\vartheta)}\, d\vartheta, \qquad f(u) = -2nu^2 + 2u\sqrt{n}.$$

Так как $f(u)$ монотонно убывает при $u \geqslant 1/2\sqrt{n}$, то при любом ϑ с условием $\pi/6 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ величина $f(\sin\vartheta)$ не превосходит $-n/2 + \sqrt{n}$. Следовательно, интеграл по соответствующему промежутку оценивается сверху величиной

$$\frac{\pi}{3} \exp\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{n}\right).$$

Далее, поскольку $\cos\vartheta \geqslant \sqrt{3}/2$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/6$, то, положив $u = 2\sqrt{n}\sin\vartheta$, будем иметь

$$\int_0^{\pi/6} e^{f(\sin\vartheta)}\, d\vartheta = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2+u} \frac{du}{\cos\vartheta} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2+u}\, du = \sqrt{\frac{2\pi e}{3n}}\, G(1),$$

где

$$G(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Таким образом, имеем неравенство $n!\,|\varpi_n| \leqslant F(n)$, в котором

$$F(n) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{2n}}\right) \frac{e^{1/12n}}{\sqrt[4]{n}} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi e}{3}}\, G(1) + \frac{\pi\sqrt{n}}{3}\, e^{-n/2+\sqrt{n}} \right\}.$$

Подсчет, произведенный с помощью программного пакета Wolfram Mathematica 7.0.0, показывает, что $0 < F(n) < 1$ при всех $n \geqslant 16$. Для $0 \leqslant n \leqslant 15$ искомое неравенство проверяется непосредственно (таблица 3).

Лемма доказана.

Таблица 3

n	$n!\,\varpi_n$	n	$n!\,\varpi_n$
0	1	8	0.153 993
1	0	9	−0.309 744
2	−0.5	10	0.418 946
3	0.666 667	11	−0.480 134
4	−0.625	12	0.496 212
5	0.466 667	13	−0.472 883
6	−0.256 944	14	0.417 443
7	0.040 476	15	−0.337 870

Замечание 1.1. Величина $\Omega_n = (-1)^n n!\,\varpi_n$ является значением вырожденной гипергеометрической функции Куммера

$$F(a,c;z) = 1 + \frac{a}{c}\cdot\frac{z}{1} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

при $a = -n$, $c = 1$ в точке $z = 1$.

Частным случаем утверждения, доказанного в статье [31], является разложение

$$\Omega_n = \frac{c}{\sqrt{4n}}\cos\left(2\sqrt{n} - \frac{\pi}{4}\right) + O(n^{-3/4}), \qquad c = \sqrt{\frac{e}{\pi}}.$$

Указанием на это обстоятельство автор обязан Ю. А. Неретину.

Первое из необходимых неравенств для величины Φ_n дается следующей леммой.

Лемма 1.11. *При любом n справедлива оценка*

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\mathfrak{S}_1^n}{n!}.$$

Доказательство. Пусть $n \geqslant 2$. Пользуясь формулой (1.17) и оценкой леммы 1.10, получим

$$|\Phi_n| \leqslant \sum_{1\leqslant s\leqslant n}\ \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\geqslant 0}} |\varpi_{\alpha_1}\cdots\varpi_{\alpha_s}| \sum_{p_1<\cdots<p_s\leqslant x}(p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s})^{-1}$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\sum_{1\leqslant s\leqslant n}\ \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_s=n\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_s\geqslant 0}} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!}\sum_{p_1<\cdots<p_s\leqslant x}(p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s})^{-1} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^n = \frac{\mathfrak{S}_1^n}{n!}.$$

В случаях $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно. Лемма доказана.

Лемма 1.12. *Для любого n с условием $2 \leqslant n \leqslant x$ справедливо неравенство*

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}(\log\log n + 1)^n.$$

Доказательство. Из определения $\varphi(z)$ и $H(z)$ следует, что $(-1)^n\Phi_n$ совпадает с коэффициентом при v^{2n} в разложении в ряд функции $\Psi(v) = \Phi(-v^2)$. Следовательно,

$$(-1)^n\Phi_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\Psi(v)}{v^{2n+1}}\,dv,$$

где в качестве контура интегрирования берется произвольная окружность радиуса $r>0$ с центром в начале координат. Положим $r=\Delta\sqrt{n}$, причем величину Δ, точное значение которой будет выбрано ниже, будем считать удовлетворяющей условию $0<\Delta\leqslant 4/5$. Итак, имеем

$$|\Phi_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\Delta\sqrt{n})^{2n}}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi(\Delta\sqrt{n}e^{i\vartheta})|\,d\vartheta\leqslant\frac{\Psi}{(\Delta\sqrt{n})^{2n}},$$

где

$$\Psi=\max_{0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2}|\Psi(\Delta\sqrt{n}e^{i\vartheta})|.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, запишем последнее неравенство в виде

$$|\Phi_n|\leqslant\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\exp\left\{-n+\frac{1}{12n}\right\}\Delta^{-2n}\Psi=\frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\exp\left\{-n+\frac{\log n}{2}+\frac{1}{12n}+2n\log\frac{1}{\Delta}\right\}\Psi.$$

Чтобы оценить сверху величину Ψ, представим функцию $\Psi(v)$ в виде

$$\begin{aligned}\Psi(v)=\Phi(-v^2)&=\prod_{p\leqslant x}\varphi\left(-\frac{v^2}{p}\right)=\prod_{p\leqslant x}e^{v^2/p}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{v}{\sqrt{p}}\right)^{2m}\right\}\\&=\prod_{p\leqslant x}e^{v^2/p}J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right)=\left\{\prod_{p\leqslant n}\cdot\prod_{n<p\leqslant x}\right\}e^{v^2/p}J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right)=\Psi_1(v)\cdot\Psi_2(v).\end{aligned}$$

Полагая $R=2\Delta\sqrt{n/p}$ в лемме I.2, будем иметь

$$\left|J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi\Delta}}\left(1+\frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\sqrt[4]{\frac{p}{n}}\exp\left\{2\Delta\sqrt{\frac{n}{p}}\sin\vartheta\right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}|\Psi_1(v)|\leqslant&\left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{\pi\Delta}}\left(1+\frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\right\}\\&\times\exp\left\{\Delta^2n\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\right)\cos 2\vartheta+2\Delta\sqrt{n}\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\sin\vartheta\right\}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Применяя соотношения (I.2) и (I.3) леммы I.3 и замечая, что

$$A\cos 2\vartheta+2B\sin\vartheta\leqslant A+\frac{B^2}{2A}\tag{1.29}$$

при любом $A>0$, убеждаемся, что для всех рассматриваемых ϑ показатель экспоненты в (1.28) не превосходит

$$\Delta^2n\left(L_n+\frac{\theta}{(\log n)^2}\right)\cos 2\vartheta+\frac{2a\Delta n}{\log n}\sin\vartheta\leqslant\Delta^2nL_n+\frac{a^2}{2}\frac{n}{(\log n)^2L_n}+\frac{\Delta^2n}{(\log n)^2},$$

где $L_n=\log\log n+c$ (a, c – постоянные леммы I.3).

Поскольку при $0<\Delta\leqslant 4/5$ сомножитель произведения по $p\leqslant n$ в (1.28) не превосходит

$$\frac{\Delta^{-3/2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\sqrt[4]{\frac{p}{n}}\leqslant d\Delta^{-3/2}\sqrt[4]{\frac{p}{n}},$$

где

$$d=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),$$

то окончательно находим

$$|\Psi_1(v)| \leqslant (d\Delta^{-3/2})^{\pi(n)} \left\{ \prod_{p \leqslant n} \frac{p}{n} \right\}^{1/4} \exp\left\{ \Delta^2 n L_n + \frac{a^2}{2} \frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\Delta^2 n}{(\log n)^2} \right\}. \tag{1.30}$$

Оценим теперь величину $|\Psi_2(v)|$. Для этого положим

$$r = r_p(v) = \frac{1}{(3!)^2}\frac{v^6}{p^3} - \frac{1}{(4!)^2}\frac{v^8}{p^4} + \frac{1}{(5!)^2}\frac{v^{10}}{p^5} - \cdots ,$$
$$q = q_p(v) = \frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + r_p(v),$$

так что

$$J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = 1 - q_p(v).$$

При любом $p > n$ имеем, очевидно,

$$\left|\frac{v}{\sqrt{p}}\right| = \Delta\sqrt{\frac{n}{p}} < \Delta.$$

Следовательно,

$$|r| \leqslant \frac{1}{36}\frac{|v|^6}{p^3}\left(1 + \frac{1}{4^2}\frac{|v|^2}{p} + \frac{1}{(4\cdot 5)^2}\frac{|v|^4}{p^2} + \cdots\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{36}\frac{|v|^6}{p^3}\left(1 + \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{4}\right)^4 + \cdots\right) = \lambda_1 \frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda_1 = \lambda_1(\Delta) = \frac{4}{9(16-\Delta^2)},$$

и вместе с тем

$$|q| \leqslant \frac{|v|^2}{p} + \frac{|v|^4}{4p^2} + |r| \leqslant \lambda_2\frac{|v|^2}{p} \leqslant \lambda_3,$$
$$\lambda_2 = \lambda_2(\Delta) = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \lambda_1\Delta^4, \qquad \lambda_3 = \lambda_3(\Delta) = \lambda_2\Delta^2.$$

Далее, поскольку

$$\left|-\frac{v^4}{4p^2} + r\right| \leqslant \frac{|v|^4}{4p^2} + \lambda_1\frac{|v|^6}{p^3} \leqslant \lambda_4\frac{|v|^4}{p^2}, \qquad \lambda_4 = \lambda_4(\Delta) = \frac{1}{4} + \lambda_1\Delta^2,$$

то

$$q^2 = \left(\frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + r\right)^2 = \left(\frac{v^2}{p} + \lambda_4\theta\frac{|v|^4}{p^2}\right)^2 = \frac{v^4}{p^2} + \lambda_5\theta_1\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda_5 = \lambda_5(\Delta) = 2\lambda_4 + (\lambda_4\Delta)^2.$$

Наконец, для рассматриваемых v имеем неравенства

$$\left|\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{q^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{3}|q|^3 + \frac{1}{4}|q|^4 + \frac{1}{5}\sum_{k=5}^{+\infty}|q|^k$$
$$\leqslant |q|^3\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_3^2}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_3^k\right) = |q|^3\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_3^2}{5(1-\lambda_3)}\right) \leqslant \lambda_6\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda_6 = \lambda_6(\Delta) = \lambda_2^3\left(\frac{1}{3} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_3^2}{5(1-\lambda_3)}\right).$$

Таким образом,

$$\log J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = \log(1-q) = -q - \frac{1}{2}q^2 - \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{q^k}{k}$$
$$= -\frac{v^2}{p} + \frac{v^4}{4p^2} - r - \frac{1}{2}\left(\frac{v^4}{p^2} + \lambda_5\theta_1\frac{|v|^6}{p^3}\right) + \lambda_6\theta_2\frac{|v|^6}{p^3} = -\frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + \lambda\theta\frac{|v|^6}{p^3},$$

где

$$\lambda = \lambda(\Delta) = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_5 + \lambda_6 = \sum_{k=0}^{2}\frac{P_k}{Q_k}(16-\Delta^2)^{-k},$$

а через P_k, Q_k, $k = 0, 1, 2$, обозначены следующие многочлены:

$$P_0(\Delta) \equiv 2^2, \qquad Q_0(\Delta) \equiv 3^2,$$
$$P_1(\Delta) = 2^{11}\cdot 3^4 + 2^{11}\cdot 3^2\Delta^2 + 2^3\cdot 3^3\cdot 7\Delta^4 + 7^2\Delta^6, \qquad Q_1(\Delta) \equiv 2^5\cdot 3^4,$$
$$P_2(\Delta) = (2^6\cdot 3^2 + 2^2\cdot 3^3\Delta^2 + 7\Delta^4)^3$$
$$\times\bigl(-2^{14}\cdot 3^3\cdot 5 + 2^{11}\cdot 3^4\cdot 5\Delta^2 + 2^6\cdot 3^3\cdot 227\Delta^4 + 2^4\cdot 3\cdot 7^2\cdot 53\Delta^6$$
$$+ 2^2\cdot 3\cdot 1609\Delta^8 + 2^3\cdot 3^3\cdot 7\Delta^{10} + 7^2\Delta^{12}\bigr),$$
$$Q_2(\Delta) = -2^6\cdot 3^2 + 2^2\cdot 3^2\cdot 17\Delta^2 + 2^2\cdot 3^3\Delta^4 + 7\Delta^6.$$

Таким образом,

$$e^{v^2/p}J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right) = \exp\left\{\frac{v^2}{p} - \frac{v^2}{p} - \frac{v^4}{4p^2} + \lambda\theta\frac{|v|^6}{p^3}\right\} = \exp\left\{-\frac{v^4}{4p^2} + \lambda\theta\frac{|v|^6}{p^3}\right\},$$

откуда

$$|\Psi_2(v)| \leqslant \exp\left\{\frac{|v|^4}{4}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \lambda|v|^6\sum_{p>n}\frac{1}{p^3}\right\} = \exp\left\{\frac{\Delta^4 n^2}{4}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \lambda\Delta^6 n^3\sum_{p>n}\frac{1}{p^3}\right\}. \tag{1.31}$$

Перемножив оценки (1.30) и (1.31), находим

$$\Psi \leqslant (d\Delta^{-3/2})^{\pi(n)}\left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\right\}^{1/4}$$
$$\times\exp\left\{\Delta^2 nL_n + \frac{\Delta^4 n^2}{4}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \lambda\Delta^6 n^3\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} + \frac{a^2}{2}\frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\Delta^2 n}{(\log n)^2}\right\}. \tag{1.32}$$

Положим, наконец, $\Delta = 1/\sqrt{L_n}$ (условие $\Delta \leqslant 4/5$ выполнено, как несложно проверить, при всех $n \geqslant 40$). Будем иметь

$$\Psi \leqslant \left\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\right\}^{1/4}$$
$$\times\exp\left\{n + \pi(n)\left(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\right) + \frac{n^2}{4L_n^2}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \frac{\lambda n^3}{L_n^3}\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} + \left(\frac{a^2}{2}+1\right)\frac{n}{(\log n)^2 L_n}\right\}$$

и

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\biggl\{\prod_{p\leqslant n}\frac{p}{n}\biggr\}^{1/4}\exp\biggl\{n\log L_n + \pi(n)\biggl(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\biggr) + \frac{n^2}{4L_n^2}\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} + \frac{\lambda n^3}{L_n^3}\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} + \biggl(\frac{a^2}{2}+1\biggr)\frac{n}{(\log n)^2 L_n} + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{12n}\biggr\}. \tag{1.33}$$

Пусть сначала $n \geqslant n_1 = 1143$. Несложно проверить, что для таких n выражение $(3/4)\log L_n + \log d$ положительно и для величины $\pi(n)$, входящей в показатель экспоненты (1.33), можно воспользоваться оценкой (I.4) леммы I.3. Кроме того, применяя то же неравенство, находим

$$\sum_{p>n}\frac{1}{p^2} = 2\int_n^{+\infty}(\pi(u)-\pi(n))\,\frac{du}{u^3} \leqslant 2b\int_n^{+\infty}\frac{du}{u^2\log u} \leqslant \frac{2b}{\log n}\int_n^{+\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{2b}{n\log n},$$
$$\sum_{p>n}\frac{1}{p^3} \leqslant \frac{3b}{2n^2\log n}.$$

Наконец, произведение по $p \leqslant n$ оценим сверху единицей. Тогда неравенство (1.33) принимает вид

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}\exp\bigl\{n(\log L_n + Q(n))\bigr\}, \tag{1.34}$$

где

$$Q(n) = \frac{b}{\log n}\biggl(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\biggr) + \frac{b}{2}\frac{1}{(\log n)L_n^2} + \frac{3\lambda_0 b}{2}\frac{1}{(\log n)L_n^3} + \biggl(\frac{a^2}{2}+1\biggr)\frac{1}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\log n}{2n} + \frac{1}{12n^2},$$

а через λ_0 обозначено наибольшее при $n \geqslant n_1$ из значений $\lambda(\Delta)$, т.е.

$$\lambda_0 = \max_{n\geqslant n_1}\lambda\biggl(\frac{1}{\sqrt{L_n}}\biggr) = \lambda\biggl(\frac{1}{\sqrt{L_{n_1}}}\biggr) = 1.09559\ldots.$$

Функция $f(n) = L_n(e^{Q(n)}-1)+c$ имеет порядок $L_n\log L_n/\log n$ и монотонно убывает с ростом n на рассматриваемом промежутке. Следовательно, для всех таких n имеем

$$f(n) \leqslant f(n_1) = 0.47652\ldots < 1, \qquad L_n e^{Q(n)} < L_n - c + 1 = \log\log n + 1$$

и, наконец,

$$|\Phi_n| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}(L_n e^{Q(n)})^n < \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}(\log\log n + 1)^n.$$

Пусть теперь $43 \leqslant n \leqslant 1142$. Запишем (1.33) в виде (1.34), где роль $Q(n)$ играет функция

$$\frac{\pi(n)}{n}\biggl(\frac{3}{4}\log L_n + \log d\biggr) + \frac{1}{4n}\biggl(\sum_{p\leqslant n}\log p - \pi(n)\log n\biggr) + \frac{n}{4L_n^2}\biggl(\zeta_P(2) - \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^2}\biggr) + \frac{\lambda n^3}{L_n^3}\biggl(\zeta_P(3) - \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^3}\biggr) + \biggl(\frac{a^2}{2}+1\biggr)\frac{1}{(\log n)^2 L_n} + \frac{\log n}{2n} + \frac{1}{12n^2},$$

$$\zeta_P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}, \qquad \lambda = \lambda\biggl(\frac{1}{\sqrt{L_n}}\biggr).$$

Вычисление значений $Q(n)$, произведенное с помощью программного пакета «Wolfram Mathematica 7.0.0», показывает, что для всех n с условием $43 \leqslant n \leqslant 1142$ выполняется неравенство

$$f(n) = L_n(e^{Q(n)} - 1) + c \leqslant f(43) = 0.999\,985 < 1,$$

из которого следует искомая оценка $|\Phi_n|$. В случае $6 \leqslant n \leqslant 42$ из неравенств (1.28), (1.29) при любом $0 < \Delta \leqslant 4/5$ получаем оценку

$$|\Psi_1(v)| \leqslant \exp\biggl\{\Delta^2 n\biggl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\biggr) + \frac{1}{2}\biggl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}}\biggr)^2\biggl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\biggr)^{-1} + \frac{\pi(n)}{2}\log\frac{1}{\pi\Delta} + \frac{1}{4}\biggl(\sum_{p\leqslant n}\log p - \pi(n)\log n\biggr) + \sum_{p\leqslant n}\log\biggl(1 + \frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\biggr)\biggr\},$$

из которой с помощью (1.31) получаем неравенство (1.34) с

$$Q(n) = -\log L_n - 1 + 2\log\frac{1}{\Delta} + \Delta^2\biggl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\biggr) + \frac{1}{2n}\biggl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{p}}\biggr)^2\biggl(\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\biggr)^{-1} + \frac{\pi(n)}{2n}\log\frac{1}{\pi\Delta} + \frac{1}{4n}\biggl(\sum_{p\leqslant n}\log p - \pi(n)\log n\biggr) + \frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\log\biggl(1 + \frac{1}{4\Delta\sqrt{2}}\sqrt{\frac{p}{n}}\biggr) + \frac{n}{4L_n^2}\biggl(\zeta_P(2) - \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^2}\biggr) + \frac{\lambda n^2}{L_n^3}\biggl(\zeta_P(3) - \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p^3}\biggr) + \frac{\log n}{2n} + \frac{1}{12n^2}, \qquad \lambda = \lambda(\Delta).$$

Положив $\Delta = 4/5$, для всех n из промежутка $6 \leqslant n \leqslant 42$ будем иметь

$$L_n(e^{Q(n)} - 1) + c \leqslant 0.923\,714 < 1,$$

что и доказывает искомое неравенство.

Наконец, из явных формул леммы 1.7 для величин Φ_n, $2 \leqslant n \leqslant 5$, следуют неравенства

$$|\Phi_2| \leqslant \frac{1}{4}\,\zeta_P(2), \qquad |\Phi_3| \leqslant \frac{1}{9}\,\zeta_P(3),$$
$$-\frac{11}{192}\,\zeta_P(4) < \Phi_4 < \frac{1}{32}\,\zeta_P^2(2), \qquad -\frac{1}{36}\,\zeta_P(2)\zeta_P(3) < \Phi_5 < \frac{19}{600}\,\zeta_P(5),$$

из которых в свою очередь получаются оценки вида $|\Phi_n| < \phi_n$, где

$$\phi_2 = \frac{1}{4}\,\zeta_P(2) = 0.113\,061\,855\ldots, \qquad \phi_3 = \frac{1}{9}\,\zeta_P(3) = 0.019\,418\,071\ldots,$$
$$\phi_4 = \frac{1}{32}\,\zeta_P^2(2) = 0.006\,391\,491\ldots, \qquad \phi_5 = \frac{1}{36}\,\zeta_P(2)\zeta_P(3) = 0.001\,132\,242\ldots.$$

Полагая

$$\psi_n = \biggl(\frac{n!\,\phi_n}{\sqrt{2\pi}}\biggr)^{1/n} - \log\log n,$$

получим

$$\psi_2 = 0.666\,863\,230\,3\ldots, \qquad \psi_3 = 0.265\,499\,281\,0\ldots,$$
$$\psi_4 = 0.170\,737\,224\,5\ldots, \qquad \psi_5 = 0.161\,383\,869\,7\ldots.$$

Итак, $\psi_n < 1$ для рассматриваемых n, откуда

$$|\Phi_n| < \phi_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}(\log\log n + \psi_n)^n < \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}(\log\log n + 1)^n.$$

Лемма доказана.

1.4. Дробные моменты величины $V(t_n)$

В ряде случаев дробная степень $|z|^a$ некоторой величины z может быть достаточно хорошо приближена линейной комбинацией ее четных степеней z^{2k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Именно это обстоятельство, впервые отмеченное, по-видимому, Гошем в [32], [33], и позволяет получить асимптотические формулы для дробных моментов величин $V(t_n)$ и в конечном итоге величин Δ_n. Построение указанного приближения опирается на следующие три леммы. (Отметим, что первое применение тождества леммы 1.13 в общем виде, т.е. при произвольных допустимых значениях параметров a и s, к задаче нахождения дробных моментов принадлежит Бояринову; см. [34].)

Лемма 1.13. *Пусть $a > 0$, s – целое число с условием $2s > a$. Тогда при любом z имеет место тождество*

$$|z|^a = \kappa^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin u|z|)^{2s}}{u^{1+a}}\, du,$$

где

$$\kappa = \kappa(a; s) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^{2s}}{u^{1+a}}\, du.$$

Лемма 1.14. *При любом целом $s \geqslant 1$ имеем*

$$(\sin y)^{2s} = 2^{1-2s} \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} \cos(2my) + 2^{-2s} \binom{2s}{s}.$$

Лемма 1.15. *Для целого $s \geqslant 1$ и неотрицательного a определим числа $B(a; s)$ равенствами*

$$B(a; s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dbinom{2s}{s} + \displaystyle\sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m}, & \text{если } a = 0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} m^a, & \text{если } a > 0. \end{cases}$$

Тогда:
1) $|B(a; s)| \leqslant 2^{2s-1} s^a$;
2) $B(2k; s) = 0$ *при целом* k, $0 \leqslant k < s$;
3) *при любых целых* s *и* K *справедливо равенство*

$$(\sin y)^{2s} = 2^{1-2s} \sum_{k=s}^{K} \frac{(-1)^k B(2k; s)(2y)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\theta(2ys)^{2K+2}}{(2K+2)!}.$$

Лемма 1.13 устанавливается заменой переменной в интеграле. Лемма 1.14 является следствием формул Эйлера

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}, \qquad \cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}.$$

Утверждение 1) леммы 1.15 получается из равенства

$$\sum_{m=1}^{s} \binom{2s}{s-m} = 2^{2s-1};$$

утверждения 2), 3) леммы 1.15 получаются из леммы 1.14 и формулы Тейлора для функции $\cos(2my)$ с остаточным членом в форме Лагранжа при подсчете коэффициентов при степенях y^{2k}, $k = 0, 1, \ldots, s-1$, в разложении $(\sin y)^{2s}$.

Замечание 1.2. Имеют место равенства

$$\begin{aligned}
B(a;1) &= -1,\\
B(a;2) &= 2^a - 4,\\
B(a;3) &= -15 + 6\cdot 2^a - 3^a,\\
B(a;4) &= -56 + 28\cdot 2^a - 8\cdot 3^a + 4^a,\\
B(a;5) &= -210 + 120\cdot 2^a - 45\cdot 3^a + 10\cdot 4^a - 5^a.
\end{aligned}$$

Лемма 1.16. *Пусть $s \geqslant 1$ целое, и пусть a – произвольное число с условием $0 < a < 2s$, $a \neq 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда для интеграла $\varkappa(a;s)$ справедлива следующая формула:*

$$\varkappa(a;s) = -\frac{2^{a-2s}\pi B(a;s)}{\Gamma(a+1)\sin(\pi a/2)}\,.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\varkappa(a;s) \geqslant \frac{1}{2s-a}\left(\frac{2}{\pi}\right)^a.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $0 < a < 2$. Тогда, пользуясь формулой леммы 1.14, с помощью интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned}
\varkappa(a;s) &= -2^{1-2s}\int_0^{+\infty}\left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\cos(2mu) + \frac{1}{2}\binom{2s}{s}\right\}d\frac{u^{-a}}{a}\\
&= -\frac{2^{1-2s}}{a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^a}\left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}2m\sin(2mu)\right\}du. \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

Ввиду того, что $0 < a < 2$, сумму по m можно проинтегрировать почленно:

$$\begin{aligned}
\varkappa(a;s) &= -\frac{2^{1-2s}}{a}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2mu)}{u^a}\,du\\
&= \frac{2^{1-2s}}{a}j(a)\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^a = -\frac{2^{a+1-2s}}{a}j(a)B(a;s),
\end{aligned}$$

где обозначено

$$j(a) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^a}\,du.$$

Если $2 < a < 4$, то двукратным интегрированием по частям из (1.35) получаем

$$\begin{aligned}
\varkappa(a;s) &= -\frac{2^{1-2s}}{a(a-1)}\int_0^{+\infty}\left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^2\cos(2mu)\right\}\frac{du}{u^{a-1}}\\
&= \frac{2^{1-2s}}{a(a-1)(a-2)}\int_0^{+\infty}\left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^3\sin(2mu)\right\}\frac{du}{u^{a-2}}\,. \qquad (1.36)
\end{aligned}$$

Вновь интегрируя почленно (что допустимо, так как $0 < a-2 < 2$), из (1.36) находим

$$\varkappa(a;s) = \frac{2^{1-2s}}{a(a-1)(a-2)}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}(2m)^3\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2mu)}{u^{a-2}}\,du$$

$$= \frac{2^{1-2s}}{a(a-1)(a-2)}\, j(a-2) \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} (2m)^3 \cdot (2m)^{a-3} = \frac{2^{a+1-2s} j(a-2) B(a;s)}{a(a-1)(a-2)}\,.$$

Вообще, если $2k < a < 2(k+1)$, где $k \geqslant 0$ – некоторое целое число, то из (1.35) путем $2(k+1)$-кратного интегрирования по частям получаем

$$\kappa(a;s) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{a+1-2s} j(a-2k) B(a;s)}{a(a-1)(a-2)\cdots(a-2k+1)(a-2k)}\,.$$

Наконец, замечая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin u)^2}{u^{1+a}}\, du = \frac{2^a j(a)}{2a}\,,$$

и пользуясь формулой п. 3.823 книги [35], находим

$$j(a) = \frac{\pi}{4\Gamma(a+1)\sin(\pi a/2)}\,.$$

Следовательно,

$$\kappa(a;s) = \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{a+1-2s} (-1)^k \pi B(a;s)}{2a(a-1)\cdots(a-2k)\Gamma(a-2k)\sin(\pi a/2)} = -\frac{2^{a-2s}\pi B(a;s)}{\Gamma(a+1)\sin(\pi a/2)}\,.$$

Нижняя оценка $\kappa(a;s)$ получается из неравенств

$$\kappa(a;s) > \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin u)^{2s}}{u^{1+a}}\, du \geqslant \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2u}{\pi}\right)^{2s} \frac{du}{u^{1+a}} = \frac{1}{2s-a}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{a}.$$

Лемма доказана.

Для доказательства основного утверждения этого параграфа нам понадобится следующая лемма, которая устанавливает простейшие свойства функции $H(z)$, определенной в параграфе 1.1.

Лемма 1.17. *Имеют место следующие соотношения*:
1) $H(0) = 1$;
2) $0 < H^{(k)}(0) \leqslant \mathfrak{S}_1^k$;
3) $|H(-u)| \leqslant 1$ *при любом* $u \geqslant 0$.

Доказательство. Соотношение 1) следует из равенства $H(0) = \Phi(0)$ и определения функции $\Phi(z)$. Для доказательства соотношения 2) воспользуемся равенством

$$H^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k \\ p_1,\ldots,p_k \leqslant x}} (p_1\cdots p_k)^{-1},$$

установленным леммой 1.5. При фиксированных $p_1,\ldots,p_k$ число решений уравнения $p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k$ в простых числах $q_1,\ldots,q_k$ не превосходит $k!$. Следовательно,

$$0 < H^{(k)}(0) \leqslant \frac{1}{k!}\, k! \sum_{p_1,\ldots,p_k \leqslant x} (p_1\cdots p_k)^{-1} = \left(\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p}\right)^k = \mathfrak{S}_1^k.$$

Чтобы доказать неравенство 3) леммы, положим $u = v^2$. Тогда

$$H(-u) = H(-v^2) = \prod_{p\leqslant x} J_0\left(2i\sqrt{-\frac{v^2}{p}}\right) = \prod_{p\leqslant x} J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right).$$

Применяя равенство

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(z\sin t)\,dt$$

(см., например, [36; II, § 17.23]), для вещественных z получаем $|J_0(z)| \leqslant 1$. Таким образом,

$$|H(-u)| = \prod_{p\leqslant x}\left|J_0\left(\frac{2v}{\sqrt{p}}\right)\right| \leqslant 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.18. *Пусть* $x_0 < x \leqslant N^{\delta}$, $400\delta = 1$, $V(t) = V_x(t)$, a – *произвольное вещественное число, отличное от четного целого и удовлетворяющее условиям*

$$0 < a < \frac{1}{3e}\sqrt{\frac{\log N}{\log x}}\,.$$

Пусть, наконец, $s = [(a+1)/2]+1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sum_n |V(t_n)|^a = \frac{M\mathfrak{S}_1^{a/2}}{\kappa(a;s)}(I(a)+r(a)),$$

в котором

$$I(a) = 2^{1-2s}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(u)}{u^{1+a}}\,du,$$

$$\psi(u) = \psi(u;x,s) = \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}H\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) + \frac{1}{2}\binom{2s}{s},$$

$$|r(a)| \leqslant 2.006a^{-1}\left(5es\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\right)^a.$$

Доказательство. Положим $v_n = V(t_n)/\sqrt{\mathfrak{S}_1}$ и определим величины λ и K равенствами

$$\lambda = \frac{1}{5es}\sqrt{\frac{\log N}{\log x}}\,, \qquad K = \left[\frac{1}{22}\,\frac{\log N}{\log x}\right].$$

Тогда несложно убедиться, что при $x \leqslant N^{\delta}$ выполнены следующие соотношения:

$$K \geqslant s, \qquad \lambda > 1, \qquad \frac{e(\lambda s)^2}{K} < \frac{1}{e}\,, \qquad 1 < 2s-a \leqslant 3. \tag{1.37}$$

Далее, в силу леммы 1.13 справедливо равенство

$$|v_n|^a = \kappa^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin\,(uv_n))^{2s}}{u^{1+a}}\,du, \qquad \kappa = \kappa(a;s).$$

Суммируя обе его части по n, находим

$$\sum_n |v_n|^a = \kappa^{-1}\sum_n\left(\int_0^{\lambda} + \int_{\lambda}^{+\infty}\right)\frac{(\sin\,(uv_n))^{2s}}{u^{1+a}}\,du = W_1 + R_1,$$

где

$$|R_1| \leqslant \kappa^{-1}\sum_n\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{du}{u^{1+a}} = \frac{M\kappa^{-1}}{a\lambda^a}\,, \qquad W_1 = \kappa^{-1}\sum_n\int_0^{\lambda}\frac{(\sin\,(uv_n))^{2s}}{u^{1+a}}\,du.$$

Преобразуем сумму W_1 с помощью равенства леммы 1.15; получим

$$W_1 = \kappa^{-1}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^{1+a}}\biggl\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{K}\frac{(-1)^k B(2k;s)}{(2k)!}(2u)^{2k}\sum_n v_n^{2k} + \theta_1\frac{(2us)^{2K+2}}{(2K+2)!}\sum_n v_n^{2K+2}\biggr\}\,du.$$

Параметры x, M, N и K таковы, что $x_0 < x \leqslant M^{1/(2k)}$ при $1\leqslant k\leqslant K+1$. Поэтому, применив к суммам по n формулы лемм 1.4 и 1.5, будем иметь

$$\sum_n v_n^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{2^{2k}}\,\frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} + \theta_k\frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\log N, \qquad k = s,\ldots,K+1,$$

и

$$\begin{aligned}W_1 &= \kappa^{-1}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^{1+a}}\biggl\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{K}\frac{(-1)^k B(2k;s)}{(2k)!}(2u)^{2k}\biggl(\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{2^{2k}}\,\frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} + \theta_k\frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\biggr)\\ &\qquad + \theta_{K+1}\frac{(2us)^{2K+2}}{(2K+2)!}\biggl(\frac{(2K+2)!}{(K+1)!}\,\frac{M}{2^{2K+2)}}\,\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} + \frac{x^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\biggr)\biggr\}\,du\\ &= W_2 + R_2,\end{aligned}$$

где R_2 – вклад от слагаемых вида $x^{2k}\mathfrak{S}_1^{-k}\log N$, $s\leqslant k\leqslant K+1$. Пользуясь первым неравенством леммы 1.15, находим

$$\begin{aligned}|R_2| &\leqslant \kappa^{-1}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^{1+a}}\biggl\{\sum_{k=s}^{K}\frac{2^{1-2s}|B(2k;s)|}{(2k)!}(2u)^{2k}\frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\log N + \frac{(2us)^{2K+2}}{(2K+2)!}\,\frac{x^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\log N\biggr\}\,du\\ &\leqslant \kappa^{-1}x^{2K+2}(\log N)\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^{1+a}}\sum_{k=s}^{K+1}\frac{(2us)^{2k}}{(2k)!}\mathfrak{S}_1^{-k}\,du\\ &= \kappa^{-1}x^{2K+2}(\log N)\sum_{k=s}^{K+1}\frac{1}{(2k)!}\biggl(\frac{2s}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\biggr)^{2k}\frac{\lambda^{2k-a}}{2k-a} \leqslant \frac{\kappa^{-1}x^{2K+2}(\log N)}{\lambda^a(2s-a)}\sum_{k=s}^{K+1}\frac{1}{(2k)!}\biggl(\frac{2s\lambda}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\biggr)^{2k}\\ &< \kappa^{-1}x^{2K+2}(\log N)\lambda^{-a}\exp\biggl\{\frac{2s\lambda}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\biggr\}.\end{aligned}$$

Из определения величин λ, K, s и неравенства $x\leqslant N^{\delta}$ заключаем, что

$$\begin{aligned}|R_2| &\leqslant \kappa^{-1}\lambda^{-a}\exp\biggl\{3\biggl(\frac{1}{22}\,\frac{\log N}{\log x}+1\biggr)\log x + \frac{2}{5e}\sqrt{\frac{\log N}{\mathfrak{S}_1\log x}} + \log\log N\biggr\}\\ &< \kappa^{-1}\lambda^{-a}\exp\biggl\{\frac{5}{33}\log N\biggr\} < \kappa^{-1}\lambda^{-a}MN^{-1/6-\varepsilon} \leqslant \kappa^{-1}\frac{MN^{-1/6}}{a\lambda^a}.\end{aligned}$$

Преобразуем теперь величину

$$W_2 = M\kappa^{-1}\int_0^{\lambda}\biggl\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{K}\frac{B(2k;s)}{k!}\biggl(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\biggr)^k H^{(k)}(0) + \theta\frac{(us)^{2K+2}}{(K+1)!}\,\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\biggr\}\frac{du}{u^{1+a}}.$$

Для этого сумму по k, $s\leqslant k\leqslant K$, заменим бесконечной, воспользовавшись явным выражением и оценкой чисел $B(2k;s)$ из леммы 1.15. Получим

$$W_2 = M\kappa^{-1}\int_0^{\lambda}\biggl\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{+\infty}\frac{B(2k;s)}{k!}\biggl(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\biggr)^k H^{(k)}(0)$$

$$- 2^{1-2s}\sum_{k>K}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) + \theta\frac{(us)^{2K+2}}{(K+1)!}\frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\Bigg\}\frac{du}{u^{1+a}}$$

$$= M\varkappa^{-1}\int_0^\lambda\left\{2^{1-2s}\sum_{k=s}^{+\infty}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) + 2\theta\sum_{k>K}\frac{(us)^k}{k!}\frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k}\right\}\frac{du}{u^{1+a}}$$

$$= W_3 + R_3,$$

причем

$$|R_3| \leqslant 2M\varkappa^{-1}\int_0^\lambda\sum_{k>K}\frac{(us)^{2k}}{k!}\frac{du}{u^{1+a}} = \frac{2M\varkappa^{-1}}{\lambda^a}\sum_{k>K}\frac{(\lambda s)^{2k}}{k!}\frac{1}{2k-a} \leqslant \frac{2M\varkappa^{-1}}{\lambda^a(2K+2-a)}\sum_{k>K}\frac{(\lambda s)^{2k}}{k!}.$$

В силу формулы Стирлинга при $k > K$ имеем

$$\frac{(\lambda s)^{2k}}{k!} = \frac{(\lambda s)^{2k}}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e}{2k}\right)^k e^{-\theta/12k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e(\lambda s)^2}{k}\right)^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\frac{e(\lambda s)^2}{K}\right)^k.$$

Воспользовавшись третьим из неравенств (1.37), найдем

$$|R_3| \leqslant \frac{2M\varkappa^{-1}}{\lambda^a K}\sum_{k>K}\frac{e^{-k}}{\sqrt{2\pi K}} < \frac{3}{2}\frac{M\varkappa^{-1}}{\lambda^a K\sqrt{K}}e^{-(K+1)}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\log N}{\log x} > (3ea)^2, \qquad K+1 \geqslant \frac{1}{22}\frac{\log N}{\log x} > \beta a^2,$$

где $\beta = (3e)^2/22$. Поэтому, применяя при $u > 0$ очевидное неравенство $e^{-u} < 1/(u+1)$, будем иметь

$$e^{-(K+1)} < e^{-\beta a^2} < \frac{1}{1+\beta a^2} = \frac{1}{a}\frac{a}{1+\beta a^2} \leqslant \frac{1}{a}\max_{z\geqslant 0}\frac{z}{1+\beta z^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{1}{a}\frac{\sqrt{22}}{6e}.$$

Наконец, принимая во внимание неравенство $K \geqslant 18$, получим

$$|R_3| \leqslant \frac{3}{2}\frac{M\varkappa^{-1}}{a\lambda^a}\frac{\sqrt{22}}{6e}\frac{1}{K\sqrt{K}} \leqslant \frac{\sqrt{11}}{216e}\frac{M\varkappa^{-1}}{a\lambda^a} < \frac{1}{177}\frac{M\varkappa^{-1}}{a\lambda^a}.$$

Далее, согласно лемме 1.15 выполнено $B(2k;s) = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant s-1$. Поэтому при замене в сумме W_3 области изменения k промежутком $k \geqslant 1$ ее значение не изменится:

$$W_3 = M\varkappa^{-1}\int_0^\lambda\left\{2^{1-2s}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{B(2k;s)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0)\right\}\frac{du}{u^{1+a}}$$

$$= 2^{1-2s}M\varkappa^{-1}\int_0^\lambda\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2k}\right\}\frac{du}{u^{1+a}}$$

$$= 2^{1-2s}M\varkappa^{-1}\int_0^\lambda\left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\right\}\frac{du}{u^{1+a}}$$

$$= 2^{1-2s}M\varkappa^{-1}\int_0^\lambda\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\left\{H\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) - H(0)\right\}\frac{du}{u^{1+a}}.$$

Применяя равенство 1) леммы 1.17 и тождество

$$B(0;s)=\frac{1}{2}\binom{2s}{s}+\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}=0$$

из леммы 1.15, находим

$$W_3=M\kappa^{-1}\cdot 2^{1-2s}\int_0^{\lambda}\frac{\psi(u)}{u^{1+a}}\,du,$$

где

$$\psi(u)=\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}H\Bigl(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\Bigr)+\frac{1}{2}\binom{2s}{s}.$$

В силу последнего соотношения леммы 1.17 имеем оценку

$$|\psi(u)|\leqslant\sum_{m=1}^{s}\binom{2s}{s-m}+\frac{1}{2}\binom{2s}{s}=2^{2s-1}.$$

Поэтому, заменяя в выражении для W_3 интеграл по u несобственным, получим

$$W_3=M\kappa^{-1}\,2^{1-2s}\biggl(\int_0^{+\infty}-\int_{\lambda}^{+\infty}\biggr)\frac{\psi(u)}{u^{1+a}}\,du=M\kappa^{-1}\Bigl(I(a)+\frac{\theta}{a\lambda^a}\Bigr).$$

Сложив найденные выше оценки величин R_k, $k=1,2,3$, придем к равенству

$$\sum_n|v_n|^a=M\kappa^{-1}(I(a)+r(a)),$$

в котором

$$|r(a)|\leqslant\frac{2}{a\lambda^a}+\frac{N^{-1/6}}{a\lambda^a}+\frac{1}{177}\frac{1}{a\lambda^a}<\frac{2.006}{a\lambda^a}=2.006a^{-1}\biggl(5es\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\biggr)^a.$$

Лемма доказана.

Трудности в работе с $I(a)$ объясняются следующим. Функции $H(-m^2u^2/\mathfrak{S}_1)$, $m=1,2,\ldots,s$, линейной комбинацией которых является подынтегральное выражение $\psi(u)$ в $I(a)$, разлагаются в бесконечные ряды по степеням $\mathfrak{S}_1^{-1}$. Эти ряды являются сходящимися равномерно на всяком конечном отрезке $0\leqslant u\leqslant U$, но не являются таковыми на всей полупрямой $u\geqslant 0$. Допустимо ли почленное интегрирование выражений, которые получаются при подстановке этих рядов в $I(a)$?

Примеры показывают, что в некоторых случаях такой прием приводит к правильному результату. Известно, например, следующее утверждение Харди (см. [37], а также [38; п. 1.79]), согласно которому степенной ряд $\sum_n a_nu^n$, сходящийся при $u>0$, можно умножить на e^{-u} и интегрировать почленно в интервале $(0,+\infty)$, если только полученный в результате ряд сходится.

Кроме того, замена в выражении

$$0=\int_0^{+\infty}\frac{1-1}{u^{1+a}}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}e^{u}}{u^{1+a}}\,du,\qquad 0<a<1,$$

величины e^u рядом и его дальнейшее почленное интегрирование приводят к верному тождеству

$$0=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u}}{u^{1+a}}\,du-\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u^{n-1-a}e^{-u}\,du=\frac{1}{a}\Gamma(1-a)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(n-a)}{n!}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n-a)}{n!}.$$

Приводимые ниже леммы 1.19 и 1.20 обосновывают законность почленного интегрирования в $I(a)$.

Лемма 1.19. *Пусть*

$$r_N(u) = \sum_{n>N} \frac{u^n}{n!}, \qquad R_N(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} r_N(u)}{u^{1+a}}\, du,$$

где $0 < a < N$. *Тогда*

$$0 \leqslant R_N(a) \leqslant \frac{\Gamma(N+1-a)}{a\, N!}.$$

Доказательство. Воспользуемся следующим вариантом формулы Тейлора (см. [36; т. I, § 5.41]): если функция $f(u)$ ν раз непрерывно дифференцируема на отрезке $a \leqslant u \leqslant a+h$, то

$$f(a+h) = \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{h^\nu}{(\nu-1)!} \int_0^h (1-t)^{\nu-1} f^{(\nu)}(a+th)\, dt.$$

Полагая $f(u) = e^u$, $a = 0$, $h = u$, $\nu = N+1$, получим

$$r_N(u) = e^u - \sum_{m=0}^{N} \frac{u^m}{m!} = \frac{u^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N e^{tu}\, dt.$$

Предполагая, что $N > a$, будем, следовательно, иметь

$$R_N(a) = \lim_{Y \to +\infty} R_N(a; Y),$$

где

$$R_N(a;Y) = \int_0^Y \frac{e^{-u} r_N(u)}{u^{1+a}}\, du = \frac{1}{N!} \int_0^Y u^{N-a} e^{-u} \int_0^1 (1-t)^N e^{tu}\, dt\, du. \tag{1.38}$$

Так как функция двух переменных $u^{N-a} e^{-u} \cdot (1-t)^N e^{tu}$ интегрируема по Риману в прямоугольнике $0 \leqslant u \leqslant Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то по теореме Фубини в (1.38) можно изменить порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} R_N(a;Y) &= \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^N \int_0^Y e^{-(1-t)u} u^{N-a}\, du\, dt \\ &= \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-t)^{-1+a} \left(\int_0^{(1-t)Y} e^{-y} y^{N-a}\, dy \right) dt. \end{aligned}$$

Так как при любых t и Y внутренний интеграл не превосходит $\Gamma(N+1-a)$, то

$$0 \leqslant R_N(a;Y) \leqslant \frac{\Gamma(N+1-a)}{N!} \int_0^1 (1-t)^{-1+a}\, dt = \frac{\Gamma(N+1-a)}{a\, N!}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant R_N(a) \leqslant \frac{\Gamma(N+1-a)}{a\, N!}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.20. *Пусть* $a > 0$, $a \neq 2, 4, 6, \ldots$, *и пусть* $s = [(a+1)/2] + 1$. *Тогда для интеграла* $I(a)$ *справедливо равенство*

$$I(a) = 2^{-2s} B(a; s) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n} \Gamma\left(n - \frac{a}{2}\right).$$

Доказательство. Пусть N – достаточно большое целое число, $N \geqslant 2s$. Представим $\Phi(z)$ в виде суммы:

$$\Phi(z) = \left\{\sum_{n=0}^{N} + \sum_{n>N}\right\}\Phi_n z^n = \Phi_N(z) + \varphi_N(z).$$

Тогда при любом m с условием $1 \leqslant m \leqslant s$ имеем

$$H\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) = e^{-m^2u^2}\left\{\Phi_N\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) + \varphi_N\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)\right\}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для $\psi(u)$, получим

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{1}{2}\binom{2s}{s} + \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}e^{-m^2u^2}\left\{\Phi_N\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right) + \varphi_N\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)\right\}\\ &= \Psi_N(u) + \psi_N(u),\end{aligned}$$

где смысл обозначений $\Psi_N(u)$ и $\psi_N(u)$ очевиден. Так интеграл $I(a)$ представляется суммой

$$2^{1-2s}\int_0^{+\infty}\frac{\Psi_N(u)+\psi_N(u)}{u^{1+a}}\,du = J_N(a) + j_N(a).$$

Оценим сверху величину $|j_N(a)|$. Имеем, прежде всего,

$$j_N(a) = 2^{1-2s}\int_0^{+\infty}\frac{\psi_N(u)}{u^{1+a}}\,du = 2^{1-2s}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-m^2u^2}}{u^{1+a}}\,\varphi_N\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)du.$$

Полагая в интеграле $v = (mu)^2$, приводим его к виду

$$\frac{m^a}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v^{1+a/2}}\,\varphi_N\left(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\right)dv.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}j_N(a) &= 2^{2s}\left\{\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^a\right\}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v^{1+a/2}}\,\varphi_N\left(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\right)dv\\ &= 2^{-2s}B(a;s)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v^{1+a/2}}\,\varphi_N\left(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\right)dv.\end{aligned}$$

В силу леммы 1.11 имеют место следующие неравенства:

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v^{1+a/2}}\,\varphi_N\left(-\frac{v}{\mathfrak{S}_1}\right)dv\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}r_N(v)}{v^{1+a/2}}\,dv = R_N\left(\frac{a}{2}\right) \leqslant \frac{2\Gamma(N+1-a/2)}{a\,N!}.$$

Займемся теперь вычислением интеграла $J_N(a)$. Для этого представим подынтегральную функцию $\Psi_N(u)$ в виде

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\binom{2s}{s} + \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}e^{-m^2u^2}\,\Phi_N\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)\\ &\quad= \frac{1}{2}\binom{2s}{s} + \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}e^{-m^2u^2}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Phi_n\left(-\frac{m^2u^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,A_n(u)u^{2n},\end{aligned}$$

где

$$A_n(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dbinom{2s}{s} + \displaystyle\sum_{m=1}^{s}(-1)^m \binom{2s}{s-m} e^{-m^2u^2}, & \text{если } n=0, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{s}(-1)^m \binom{2s}{s-m} m^{2n} e^{-m^2u^2}, & \text{если } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $J_N(a)$ представится суммой

$$2^{1-2s}\int_0^{+\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n} A_n(u)u^{2n}\right\}\frac{du}{u^{1+a}} = 2^{1-2s}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n} I_n,$$

где через I_n обозначен интеграл

$$\int_0^{+\infty} A_n(u)u^{2n}\frac{du}{u^{1+a}}.$$

Все интегралы I_n сходятся. Действительно, сходимость на всяком бесконечном промежутке вида $(\delta;+\infty)$, $\delta>0$, следует из оценки

$$|A_n(u)| \leqslant e^{-u^2}s^{2n}\sum_{m=1}^{s}\binom{2s}{s-m} = 2^{2s-1}s^{2n}e^{-u^2},$$

а сходимость на промежутке $(0;\delta)$ следует из того, что подынтегральная функция $A_n(u)\times u^{2n-1-a}$ не имеет особенностей в точке $u=0$. Если $n \geqslant s$, то это легко заключить из неравенств

$$2n-1-a \geqslant 2s-1-a = 2\left(1-\left\{\frac{a+1}{2}\right\}\right) = \gamma > 0.$$

Если же $0 \leqslant n \leqslant s-1$, то, обозначая через $a_k^{(n)}$ коэффициент при u^{2k} в разложении $A_n(u)$ в ряд по степеням u, найдем

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{2}\binom{2s}{s} + \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m} = B(0;s),$$

$$a_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}\frac{(-m^2)^k}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}B(2(n+k);s), \qquad \text{если} \quad (k,n)\neq(0,0).$$

Из леммы 1.15 следует, что разложение $A_n(u)$ начинается с члена, содержащего $u^{2(s-n)}$. Поэтому вблизи точки $u=0$ подынтегральная функция имеет порядок $u^{2(s-n)}\cdot u^{2n}u^{-1-a} = u^{\gamma}$, где, как и выше,

$$\gamma = 2\left(1-\left\{\frac{a+1}{2}\right\}\right).$$

Отсюда следует сходимость I_n.

Вычислим теперь каждый из интегралов I_n. Пусть сначала $n \geqslant s$. Выше мы нашли, что $2n-1-a \geqslant \gamma > 0$. Поэтому I_n допускает почленное интегрирование:

$$I_n = \int_0^{+\infty} A_n(u)u^{2n}\frac{du}{u^{1+a}} = \int_0^{+\infty}\sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}e^{-m^2u^2}u^{2n-1-a}\,du$$

$$= \sum_{m=1}^{s}(-1)^m\binom{2s}{s-m}m^{2n}\int_0^{+\infty}e^{-m^2u^2}u^{2n-1-a}\,du$$

$$= \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} m^{2n} \frac{m^a}{2m^{2n}} \Gamma\Bigl(n - \frac{a}{2}\Bigr) = \frac{1}{2} B(a;s)\Gamma\Bigl(n - \frac{a}{2}\Bigr). \tag{1.39}$$

Пусть теперь $0 \leqslant n \leqslant s-1$. Поскольку $a/2$ не является целым числом, проинтегрируем в I_n по частям; получим

$$I_n = \int_0^{+\infty} A_n(u)\, \frac{du^{2n-a}}{2n-a} = \frac{1}{2n-a}\Bigl(A_n(u)u^{2n-a}\big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} A_n'(u)u^{2n-a}\, du \Bigr).$$

Выше было установлено, что $A_n(u) = O(u^{2(s-n)})$ для рассматриваемых n. Поэтому

$$A_n(u)u^{2n-a}\big|_{u=0} = 0$$

и, следовательно,

$$I_n = -\frac{1}{2n-a} \int_0^{+\infty} A_n'(u)u^{2n-a}\, du.$$

Замечая теперь, что

$$\begin{aligned} A_n'(u) &= \frac{d}{du} \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} m^{2n} e^{-m^2u^2} = \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} m^{2n} (-2m^2u) e^{-m^2u^2} \\ &= -2u \sum_{m=1}^{s} (-1)^m \binom{2s}{s-m} m^{2(n+1)} e^{-m^2u^2} = -2uA_{n+1}(u), \end{aligned}$$

приходим к следующей рекуррентной формуле:

$$I_n = \frac{2}{2n-a} \int_0^{+\infty} A_{n+1}(u)u^{2(n+1)} \frac{du}{u^{1+a}} = \frac{I_{n+1}}{n-a/2}. \tag{1.40}$$

Если $n+1 \geqslant s$, то в силу (1.39) имеем равенства

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{2} B(a;s)\Gamma\Bigl(n+1-\frac{a}{2}\Bigr) = \frac{1}{2} B(a;s)\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr), \\ I_n &= \frac{1}{2} B(a;s)\Gamma\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr). \end{aligned}$$

Если же $n+1 < s$, то для получения искомого равенства соотношение (1.40) необходимо применить несколько раз. Именно, пусть $s-k \leqslant n < s+1-k$, где $2 \leqslant k \leqslant s$ – некоторое целое число. Тогда, воспользовавшись (1.39) и (1.40), получим $n+k \geqslant s$, так что

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n-a/2}\,\frac{1}{n+1-a/2} \cdots \frac{1}{n+k-1-a/2}\, I_{n+k} \\ &= \frac{1}{2} B(a;s) \frac{\Gamma(n+k-a/2)}{\prod_{\nu=0}^{k-1}(n+\nu-a/2)} = \frac{1}{2} B(a;s)\Gamma\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Возвращаясь к вычислению $J_N(a)$ и собирая полученные результаты, найдем

$$\begin{aligned} J_N(a) &= \sum_{n=0}^{N} 2^{1-2s}(-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{1}{2} B(a;s)\Gamma\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr) = \frac{1}{2} B(a;s)2^{1-2s} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\Gamma\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr), \\ I(a) &= 2^{-2s}B(a;s)\Bigl\{ \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\Gamma\Bigl(n-\frac{a}{2}\Bigr) + \frac{2\theta}{a}\frac{\Gamma(N+1-a/2)}{\Gamma(N+1)} \Bigr\}. \end{aligned}$$

Устремляя N к бесконечности, получим требуемое.

Замечание 1.3. Отметим некоторые частные случаи леммы 1.20. Пользуясь равенством

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2\nu)!}{\nu!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu}},$$

несложно получить следующие разложения:

$$\begin{aligned} I(1)&=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left\{1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}\frac{\Phi_{n+1}}{\mathfrak{S}_1^{n+1}}\right\}\\ &=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{\Phi_2}{\mathfrak{S}_1^2}+\frac{3}{8}\frac{\Phi_3}{\mathfrak{S}_1^3}-\frac{15}{16}\frac{\Phi_4}{\mathfrak{S}_1^4}+\frac{105}{32}\frac{\Phi_5}{\mathfrak{S}_1^5}-\frac{945}{64}\frac{\Phi_6}{\mathfrak{S}_1^6}+\cdots\right\},\\ I(3)&=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\left\{1+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}\frac{\Phi_{n+2}}{\mathfrak{S}_1^{n+2}}\right\}\\ &=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\left\{1+\frac{3}{4}\frac{\Phi_2}{\mathfrak{S}_1^2}-\frac{3}{8}\frac{\Phi_3}{\mathfrak{S}_1^3}+\frac{9}{16}\frac{\Phi_4}{\mathfrak{S}_1^4}-\frac{45}{32}\frac{\Phi_5}{\mathfrak{S}_1^5}+\frac{315}{64}\frac{\Phi_6}{\mathfrak{S}_1^6}-\frac{2\,835}{128}\frac{\Phi_7}{\mathfrak{S}_1^7}+\frac{31\,185}{256}\frac{\Phi_8}{\mathfrak{S}_1^8}-\cdots\right\}. \end{aligned}\tag{1.41}$$

Замечание 1.4. Пользуясь формулой дополнения в виде

$$\Gamma\left(n-\frac{a}{2}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\sin(\pi a/2)}\frac{1}{\Gamma(1-n+a/2)},$$

выражению для $I(a)$ можно придать следующий вид:

$$I(a)=2^{2s-a-1}\pi\kappa(a;s)\Gamma(a+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Phi_n\mathfrak{S}_1^{-n}}{\Gamma(1-n+a/2)}=-\frac{\pi}{2}B(a;s)\left(\sin\frac{\pi a}{2}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Phi_n\mathfrak{S}_1^{-n}}{\Gamma(1-n+a/2)}.$$

Теорема 1.2. *Пусть $x_0<x\leqslant N^{0.0001}$, a – произвольное вещественное число, отличное от четного целого и удовлетворяющее условиям*

$$0<a<\frac{1}{3e}\sqrt{\frac{\log N}{\log x}}.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\sum_n|V(t_n)|^a=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^{n-a/2}}\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)}+\theta b\left(5ec\sqrt{\frac{\log x}{\log N}\cdot\frac{\max(a,1)}{\mathfrak{S}_1}}\right)^a\right\},$$

где

$$b=\begin{cases}4.01, & \text{если } 0<a<1,\\ 10.67, & \text{если } a\geqslant 1,\end{cases}\qquad c=\begin{cases}1, & \text{если } 0<a<1,\\ \pi, & \text{если } a\geqslant 1.\end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.18 имеет место равенство

$$\sum_n|V(t_n)|^a=M\mathfrak{S}_1^{a/2}\left\{\frac{I(a)}{\kappa(a;s)}+\theta\frac{r(a)}{\kappa(a;s)}\right\},$$

в котором

$$s=\left[\frac{a+1}{2}\right]+1,\qquad \kappa(a;s)=\int_0^{+\infty}\frac{(\sin u)^{2s}}{u^{1+a}}\,du,\qquad r(a)=2.006a^{-1}\left(5es\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\right)^a,$$

а $I(a)$ – некоторый интеграл, для которого в лемме 1.20 было найдено следующее выражение:

$$I(a) = 2^{-2s}B(a;s)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr).$$

В силу леммы 1.16 имеем

$$\frac{B(a;s)}{\kappa(a;s)} = -\frac{2^{2s-a}}{\pi}\,\Gamma(a+1)\sin\frac{\pi a}{2}\,.$$

Далее, воспользовавшись формулами удвоения и дополнения для гамма-функции, получим

$$\Gamma(a+1) = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)\Gamma\biggl(\frac{a}{2}+1\biggr), \qquad \Gamma\biggl(\frac{a}{2}+1\biggr) = -\frac{\pi}{\Gamma(-a/2)}\biggl(\sin\frac{\pi a}{2}\biggr)^{-1},$$

откуда

$$\frac{1}{\pi}\,\Gamma(a+1)\sin\frac{\pi a}{2} = -\frac{2^a}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((a+1)/2)}{\Gamma(-a/2)}\,.$$

Таким образом,

$$2^{-2s}\,\frac{B(a;s)}{\kappa(a;s)} = 2^{-2s}\cdot(-2^{2s-a})\cdot\frac{(-2^a)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((a+1)/2)}{\Gamma(-a/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((a+1)/2)}{\Gamma(-a/2)}$$

и, следовательно,

$$\sum_n |V(t_n)|^a = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)\biggl\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^{n-a/2}}\,\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)} + \theta R(a)\biggr\},$$

где

$$R(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((a+1)/2)}\,\frac{\mathfrak{S}_1^{-a/2}r(a)}{\kappa(a;s)}\,.$$

Пусть сначала $0 < a < 1$. Тогда

$$s = 1, \qquad B(a;s) = -1, \qquad \kappa(a;s) = \frac{2^a\pi}{4\Gamma(a+1)\sin(\pi a/2)}\,,$$

так что

$$\begin{aligned}R(a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((a+1/2)}\cdot\frac{4\Gamma(a+1)\sin\pi a/2}{2^a\pi}\cdot\mathfrak{S}_1^{-a/2}\cdot\frac{2.006}{a}\biggl(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\,\biggr)^a \\ &= 1.003\cdot\frac{\sin\pi a/2}{\pi a/2}\cdot\frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(a+1)}{\Gamma((a+1)/2)}\biggl(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\biggr)^a.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma((a+1)/2)} = -\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(-a/2)}\biggl(\sin\frac{\pi a}{2}\biggr)^{-1} = \frac{a}{2}\,\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-a/2)}\biggl(\sin\frac{\pi a}{2}\biggr)^{-1},$$

то окончательно находим

$$\begin{aligned}R(a) &= 1.003\cdot\frac{\sin(\pi a/2)}{\pi a/2}\cdot 4\sqrt{\pi}\cdot\frac{a}{2}\,\frac{2^a\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-a/2)}\biggl(\sin\frac{\pi a}{2}\biggr)^{-1}\biggl(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\biggr)^a \\ &= \frac{4.012}{\Gamma(1-a/2)}\biggl(\frac{5e}{2}\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\biggr)^a < 4.012\biggl(5e\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1\log N}}\,\biggr)^a.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $a \geqslant 1$. Пользуясь нижней оценкой величин $\kappa(a;s)$, установленной в лемме 1.16, будем иметь

$$|R(a)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((a+1)/2)} \cdot 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{a} \cdot \frac{2.006}{a}\left(5es\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1 \log N}}\right)^{a}$$
$$= \frac{6.018\sqrt{\pi}}{\Gamma((a+1)/2)}\left\{\frac{5\pi e}{2}\,s\sqrt{\frac{\log x}{\mathfrak{S}_1 \log N}}\right\}^{a} \leqslant \frac{10.67}{a}\left\{\frac{5\pi e}{2}\,\varrho(a)\sqrt{\frac{a\log x}{\mathfrak{S}_1 \log N}}\right\}^{a},$$

где

$$\varrho(a) = \frac{1+[(a+1)/2]}{\sqrt{a}\{\Gamma((a+1)/2)\}^{1/a}}.$$

Несложно проверить, что $\varrho(a) \leqslant \varrho(1) = 2$ при $a \geqslant 1$. Поэтому окончательно получаем

$$|R(a)| \leqslant \frac{10.67}{a}\left\{5\pi e\sqrt{\frac{a\log x}{\mathfrak{S}_1 \log N}}\right\}^{a}.$$

Теорема доказана.

В завершение параграфа покажем, что бесконечный ряд, фигурирующий в формуле теоремы 1.2, является асимптотическим. Доказательство этого факта мы предварим следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 1.21. *Пусть x настолько велико, что $\mathfrak{S}_1 = \sum_{p\leqslant x} p^{-1} \geqslant 5$. Тогда последовательность чисел*

$$g(n) = \left(\frac{\log\log n + 1}{\mathfrak{S}_1}\right)^{n}, \qquad n = 2,3,4,\ldots,$$

убывает на промежутке $2 \leqslant n \leqslant x^{2/5}$.

Доказательство. Из неравенств

$$g(2) > \frac{0.40}{\mathfrak{S}_1^2}, \qquad \frac{1.30}{\mathfrak{S}_1^3} < g(3) < \frac{1.31}{\mathfrak{S}_1^3}, \qquad \frac{3.09}{\mathfrak{S}_1^4} < g(3) < \frac{3.10}{\mathfrak{S}_1^4},$$
$$\frac{7.00}{\mathfrak{S}_1^5} < g(5) < \frac{7.01}{\mathfrak{S}_1^5}, \qquad \frac{15.74}{\mathfrak{S}_1^6} < g(6) < \frac{15.75}{\mathfrak{S}_1^6}$$

следует, что каждое из неравенств $g(n) \geqslant g(n+1)$, $n = 2,3,4,5$, выполняется уже при $\mathfrak{S}_1 > 1.31/0.40 = 3.275$. Поэтому утверждение леммы получим, если докажем, что функция $f(u) = \log g(u)$ монотонно убывает на промежутке $6 \leqslant u \leqslant x^{2/5}$. В свою очередь, для этого достаточно показать, что производная

$$f'(u) = \log(\log\log u + 1) + \frac{1}{(\log u)(\log\log u + 1)} - \mathfrak{S}_1$$

отрицательна для указанных значений u. Запишем ее в виде $h(\log\log u + 1)$, где

$$h(v) = \log v + \frac{e}{ve^{v}} - \log\mathfrak{S}_1,$$

и покажем, что $h(v) < 0$ при $w_1 < v < w_2$, где

$$w_1 = \log\log 6 + 1, \qquad w_2 = \log\log(x^{2/5}) + 1.$$

Функция $e^{v-1}-1-v^{-1}$ монотонно возрастает при положительных v. Обозначая через v_0 ее единственный нуль, приближенное значение которого равно $1.508\,55\ldots$, заключаем, что при $v>v_0$ производная

$$h'(v)=\frac{e}{ve^{v}}\left(e^{v-1}-1-\frac{1}{v}\right)$$

положительна, а сама функция $h(v)$ монотонно возрастает.

Положим теперь $v_1=\mathfrak{S}_1-3e^{-\mathfrak{S}_1}$, $v_2=\mathfrak{S}_1$. Тогда

$$h(v_2)=\frac{3}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}>0.$$

Вместе с тем

$$h(v_1)=\log\frac{v_1}{\mathfrak{S}_1}+\frac{e}{v_1e^{v_1}}=\log\left(1-\frac{3}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}\right)+\frac{e}{v_1e^{v_1}}<-\frac{3}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}+\frac{e}{v_1e^{v_1}}\,.$$

Пользуясь неравенством $e^{-u}>1-u$, получим

$$\begin{aligned}v_1e^{v_1}&=\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}\left(1-\frac{3}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}\right)\exp\left\{-\frac{3}{e^{\mathfrak{S}_1}}\right\}\\&>\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}\left(1-\frac{3}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}\right)^2>\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}\left(1-\frac{3}{e^{5}}\right)^2>0.95\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1},\end{aligned}$$

откуда

$$h(v_1)<\left(-3+\frac{e}{0.95}\right)\frac{1}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}<-\frac{0.1}{\mathfrak{S}_1e^{\mathfrak{S}_1}}<0.$$

В силу сказанного выше функция $h(v)$ имеет между v_1 и v_2 единственный нуль. Поэтому $h(v)<0$ при всех v, $v_0<v<v_1$.

Заметим теперь, что из условия $\mathfrak{S}_1\geqslant 5$ следует, что $\log\log x\geqslant 4.5$ и $\log x\geqslant e^{4.5}$. Но тогда в силу формулы (I.2) леммы I.3

$$\begin{aligned}v_1&=\mathfrak{S}_1-3e^{-\mathfrak{S}_1}\geqslant\mathfrak{S}_1-3e^{-5}>\log\log x+0.2614-\frac{0.5}{\log^2 x}-\frac{3}{e^5}\geqslant\log\log x+0.2614-\frac{0.5}{4.5^2}-\frac{3}{e^5}\\&>\log\log x+0.2>\log\log x+1-\log\frac{5}{2}=\log\log\left(x^{2/5}\right)+1=w_2.\end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, что $w_1=\log\log 6+1=1.583\,198\ldots>v_0$. Таким образом, интервал (w_1,w_2) целиком содержится в интервале (v_0,v_1), на котором $h(v)$ отрицательна. Следовательно, $f'(u)<0$ при $6\leqslant u\leqslant x^{2/5}$. Лемма доказана.

Лемма 1.22. *Пусть a – положительное число, отличное от целого четного, $m\geqslant 0$ – целое число, не превосходящее наименьшего из чисел $\sqrt[3]{x}$ и $(a/30)\log x/\log\mathfrak{S}_1-1$. Тогда имеет место оценка*

$$\left|\sum_{n>m}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-a/2}{\Gamma(-a/2)}\right|<c\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)g(m+d+1),$$

где, как и выше,

$$g(u)=\left(\frac{\log\log u+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^u,$$

а величины c и d определяются равенствами

$$c=\begin{cases}0.32, & \text{если } m=0 \text{ или } m=1,\\ 4.56, & \text{если } m\geqslant 2,\end{cases}\qquad d=\begin{cases}1, & \text{если } m=0,\\ 0, & \text{если } m\geqslant 1.\end{cases}$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость утверждения леммы для всех $m \geqslant 2$. Положим

$$S_m = \sum_{n>m} (-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n} \Gamma\left(n - \frac{a}{2}\right)$$

и рассмотрим два случая.

Случай 1: $m > 1 + a/2$. Воспользовавшись формулой Стирлинга, при любом $n > m$ получим

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n - \frac{a}{2}\right) &= \frac{\Gamma(n - a/2)}{n - a/2} = \frac{\sqrt{2\pi(n-(1/2)a)}}{n-(1/2)a} \cdot \left(\frac{n-(1/2)a}{e}\right)^{n-a/2} \exp\left\{\frac{\theta}{12(n-(1/2)a)}\right\} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n-(1/2)a}} \left(\frac{e}{n-(1/2)a}\right)^{a/2} \left(\frac{n-(1/2)a}{e}\right)^n e^{1/12} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{1/12}}{\left(n-(1/2)a\right)^{(1+a)/2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{a/2}\left(1 - \frac{a}{2n}\right)^n < \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{1/12}}{(n-(1/2)a)^{(1+a)/2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\end{aligned}$$

Замечая, что при $n \geqslant m+1 > 2 + a/2$ справедливы оценки

$$n - \frac{a}{2} = n\left(1 - \frac{a}{2n}\right) > n\left(1 - \frac{a}{a+4}\right) = \frac{4n}{a+4},$$

окончательно найдем

$$\Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) < \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{1/12}}{((n/(a+4))a)^{(1+a)/2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{1/12}}{n^{(1+a)/2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{(1+a)/2},$$

$$\frac{1}{n!}\Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) < \frac{e^{1/12}}{n^{1+a/2}} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{(1+a)/2}. \tag{1.42}$$

Представим S_m суммой

$$\left\{\sum_{m<n\leqslant x^{2/5}} + \sum_{n>x^{2/5}}\right\} (-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n} \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) = S_m^{(1)} + S_m^{(2)}.$$

Тогда, воспользовавшись оценкой леммы 1.12, будем иметь

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \sqrt{2\pi} \sum_{m<n\leqslant x^{2/5}} \frac{g(n)}{n!} \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right), \qquad g(n) = \left(\frac{\log\log n + 1}{\mathfrak{S}_1}\right)^n.$$

Согласно лемме 1.21 наибольшее значение дроби $g(n)$ на рассматриваемом промежутке отвечает $n = m+1$. Применив (1.42), будем, следовательно, иметь

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \sqrt{2\pi}\, g(m+1) e^{1/12} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{(1+a)/2} \sum_{n>m} n^{-1-a/2} < 2\sqrt{2\pi}\, e^{1/12} \frac{g(m+1)}{am^{a/2}} \left(1 + \frac{a}{4}\right)^{(1+a)/2}.$$

Так как $m > 1 + a/2$, то величина $m^{-a/2}(1 + a/4)^{(1+a)/2}$ не превосходит максимума функции

$$\frac{(1 + a/4)^{(1+a)/2}}{(1 + a/2)^{a/2}} = \sqrt{1 + \frac{a}{4}} \left(\frac{1 + (1/4)a}{1 + (1/2)a}\right)^{a/2}$$

на промежутке $a \geqslant 0$, который равен $b_0 = 1.033\,68\ldots$. Следовательно,

$$|S_m^{(2)}| < \frac{b_1}{a} g(m+1), \qquad b_1 = 2b_0\sqrt{2\pi}\, e^{1/12} = 5.63245\ldots.$$

Далее, пользуясь леммой 1.11 и неравенством (1.42), находим

$$|S_m^{(2)}| < \sum_{n>x^{2/5}} \frac{1}{n!}\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr) < e^{1/12}\biggl(1+\frac{a}{4}\biggr)^{(1+a)/2} \sum_{n>x^{2/5}} n^{-1-a/2}$$
$$< \frac{2e^{1/12}}{a}\biggl(1+\frac{a}{4}\biggr)^{(1+a)/2} x^{-a/2}.$$

Так как $m+1 < (a/30)\log x/\log \mathfrak{S}_1$, то

$$\frac{1}{g(m+1)} = \biggl(\frac{\mathfrak{S}_1}{\log\log(m+1)+1}\biggr)^{m+1} < \mathfrak{S}_1^{m+1} < x^{a/30}.$$

Поскольку $m \leqslant \sqrt[3]{x}$, то $x^{a/30} = x^{a/5}\cdot x^{-a/6} \leqslant x^{a/5}\cdot m^{-a/2}$, так что окончательно имеем

$$\frac{1}{g(m+1)} < \frac{x^{a/5}}{m^{a/2}}, \qquad x^{-a/5} < \frac{g(m+1)}{m^{a/2}}.$$

Таким образом,

$$|S_m^{(2)}| < \frac{2e^{1/12}}{a}\biggl(1+\frac{a}{4}\biggr)^{(1+a)/2} \frac{g(m+1)}{m^{a/2}} < \frac{b_2}{a}\,g(m+1), \qquad b_2 = 2e^{1/12}b_0 = 2.247\,02\ldots,$$

поэтому в случае $m > 1+a/2$ имеем

$$|S_m| < |S_m^{(1)}| + |S_m^{(2)}| < \frac{(b_1+b_2)}{a}\,g(m+1). \tag{1.43}$$

Случай 2: $m < 1+a/2$ (одновременное выполнение условия $m \geqslant 2$ возможно, очевидно, лишь при $a > 2$). Полагая $\nu = [a/2]+2$, представим S_m в виде

$$\biggl\{\sum_{m<n\leqslant\nu} + \sum_{n>\nu}\biggr\}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr) = S_1^{(1)} + S_1^{(2)}.$$

В силу (1.43) имеем

$$|S_m^{(2)}| < \frac{(b_1+b_2)}{a}\,g(\nu+1) \leqslant \frac{(b_1+b_2)}{a}\,g(m+1). \tag{1.44}$$

Далее, вновь применяя леммы 1.12 и 1.21, находим

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \sqrt{2\pi}\sum_{m<n\leqslant\nu}\frac{g(n)}{n!}\biggl|\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr)\biggr| \leqslant \sqrt{2\pi}\,g(m+1)\max_{m<n\leqslant\nu}\biggl|\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr)\biggr|\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$
$$\leqslant \sqrt{2\pi}\biggl(e-\frac{5}{2}\biggr)g(m+1)\max_{2\leqslant n\leqslant a/2+2}\biggl|\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr)\biggr|.$$

Согласно формуле дополнения

$$\biggl|\Gamma\biggl(n-\frac{a}{2}\biggr)\biggr| = \frac{\pi}{|\sin(\pi a/2)|}\biggl|\Gamma\biggl(1+\frac{a}{2}-n\biggr)\biggr|^{-1}.$$

Так как наибольшее значение дроби $|\Gamma((1+a/2-n)|^{-1}$ на промежутке $1 \leqslant n \leqslant a/2+2$ не превосходит Γ_0^{-1}, где

$$\Gamma_0 = \min_{u>0}\Gamma(u) = 0.885\,603\ldots,$$

то окончательно находим

$$|S_m^{(1)}| \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e - \frac{5}{2}\right)g(m+1)\pi\left|\sin\frac{\pi a}{2}\right|^{-1}. \tag{1.45}$$

Сложив (1.44) и (1.45), получим

$$|S_m| < \left\{\frac{b_1+b_2}{a} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right)\pi\left|\sin\frac{\pi a}{2}\right|^{-1}\right\}g(m+1). \tag{1.46}$$

Очевидно, оценка (1.46) остается справедливой и в случае $m \geqslant 1 + a/2$. Огрубляя (1.46), для всех $m \geqslant 2$ будем, следовательно, иметь

$$|S_m| < \frac{\pi g(m+1)}{|\sin(\pi a/2)|}\left\{\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}(b_1+b_2)\frac{|\sin(\pi a/2)|}{\pi a/2}\right\} \leqslant \frac{\pi b g(m+1)}{|\sin(\pi a/2)|},$$

где

$$b = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma_0}\left(e-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2}(b_1+b_2) < 4.56.$$

Таким образом, сумма из условия леммы не превосходит по абсолютной величине числа

$$\frac{|S_m|}{|\Gamma(-a/2)|} < \frac{\pi b g(m+1)}{|\Gamma(-a/2)\sin(\pi a/2)|} = bg(m+1)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right),$$

что и требовалось.

Докажем теперь утверждение леммы для $m = 0, 1$. Если $m = 1$, то в силу доказанного выше имеем

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n>1}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)}\right| &\leqslant \frac{|\Phi_2|}{\mathfrak{S}_1^2}\frac{|\Gamma(2-a/2)|}{|\Gamma(-a/2)|} + bg(3)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\\ &\leqslant \frac{\zeta_P(2)}{4\mathfrak{S}_1^2}\frac{a}{2}\left|1-\frac{a}{2}\right| + bg(3)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\\ &= g(2)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\left\{b\frac{g(3)}{g(2)} + \frac{\zeta_P(2)}{4(\log\log 2+1)^2}\frac{(a/2)|1-a/2|}{\Gamma(1+a/2)}\right\}. \end{aligned}\tag{1.47}$$

Замечая, что максимум функции

$$\frac{(a/2)|1-a/2|}{\Gamma(1+a/2)} = \frac{|1-a/2|}{\Gamma(a/2)}$$

при $a \geqslant 0$ не превосходит $1.129\,18\ldots$, заключаем, что правая часть (1.47) ограничена величиной

$$g(2)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{15}{\mathfrak{S}_1} + 0.319\right) < 0.32g(2)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}\right). \tag{1.48}$$

Так как $\Phi_1 = 0$, то оценка (1.48) справедлива и в случае $m = 0$. Лемма доказана.

Следствие 1.1. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)}\,\mathfrak{S}_1^{a/2-n}$$

является асимптотическим. Иначе говоря, при любом фиксированном целом $m \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)}\,\mathfrak{S}_1^{a/2-n} = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\Phi_n\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(-a/2)}\,\mathfrak{S}_1^{a/2-n} + O_{m,a}(\mathfrak{S}_1^{a/2-(m+1)}).$$

Пример 1.9. Выше было отмечено, что большинство результатов настоящей главы практически без изменения переносится на «непрерывный» случай, т.е. на случай, когда суммирование по дискретному множеству точек Грама заменяется интегрированием по непрерывному параметру t. В частности, для интегрального первого момента полинома $V(t)$ имеют место следующие соотношения:

$$I(T) = \int_0^T \left|\sum_{p\leqslant x} \frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right| dt = I^*(T) + O\left(T\sqrt{\frac{\log x}{\log T}}\right),$$

$$I^*(T) = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Phi_n \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)} \mathfrak{S}_1^{1/2-n} = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \left\{\mathfrak{S}_1^{1/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \Phi_{n+1} \mathfrak{S}_1^{-1/2-n}\right\}$$

$$= \frac{T}{\sqrt{\pi}} \left\{\mathfrak{S}_1^{1/2} - \frac{1}{4}\Phi_2\mathfrak{S}_1^{-3/2} + \frac{3}{8}\Phi_3\mathfrak{S}_1^{-5/2} - \frac{15}{16}\Phi_4\mathfrak{S}_1^{-7/2} + \frac{105}{32}\Phi_5\mathfrak{S}_1^{-9/2} - \frac{945}{64}\Phi_6\mathfrak{S}_1^{-11/2} + \cdots\right\}.$$

Полагая $T = 10^4, x = 10^2$, с помощью программного пакета Wolfram Mathematica 7.0.0 с точностью до 10^{-9} находим

$$I = 7645.924\,933\,515.$$

Вклад первых семи членов асимптотического ряда I^* равен

$$\begin{array}{r} 7575.318\,726\,470 \\ +65.615\,082\,789 \\ +9.413\,648\,855 \\ -1.296\,960\,483 \\ -1.376\,016\,060 \\ -0.442\,231\,162 \\ -0.004\,219\,519 \\ \hline 7647.228\,030\,890 \end{array}$$

и отличается от истинного не более чем на 1.456, т.е. менее чем на 0.02%. Также отметим, что дальнейшее увеличение числа слагаемых, принимаемых в расчет, не приведет к увеличению точности приближения к величине I. Слагаемые ряда достаточно быстро убывают, и его сумма не более чем на 10^{-6} отличается от величины

$$7647.368\,143\,7.$$

Значение того же интеграла, отвечающего параметрам $T = 10^5$ и $x = 10^2$, равно

$$76\,463.353\,421\,946\ldots,$$

в то время как первые девять членов ряда в сумме дают

$$\begin{array}{r} 75\,753.187\,264\,698 \\ +656.150\,827\,892 \\ +94.136\,485\,470 \\ -12.969\,604\,826 \\ -13.760\,160\,599 \\ -4.422\,311\,6184 \\ -0.042\,195\,191 \\ +0.822\,280\,202 \\ +0.167\,703\,383 \\ -0.015\,333\,537 \\ \hline 76\,473.786\,823\,421 \end{array}$$

Разность между полученными двумя значениями не превышает 10.434, т.е. менее 0.014%.

1.5. Уточнение оценки остатка в формуле для первого момента

Тождество

$$|z| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin|z|u}{u}\right)^2 du \tag{1.49}$$

позволяет приблизить первую степень величины $|z|$ линейной комбинацией ее четных степеней $|z|^2, |z|^4, |z|^6, \ldots$. Именно это обстоятельство вместе с явными формулами теоремы 1.1 и позволяет в конечном итоге получить асимптотику первого момента величин $V(t_n)$, т.е. суммы

$$\sum_n |V(t_n)|. \tag{1.50}$$

Между тем формула (1.49) обладает следующим недостатком. Погрешность, возникающая при замене в (1.49) луча интегрирования конечным промежутком $0 \leqslant u \leqslant \lambda$, совпадает с

$$\frac{2}{\pi}\int_\lambda^{+\infty}\left(\frac{\sin|z|u}{u}\right)^2 du. \tag{1.51}$$

Ввиду того что в роли z выступает величина $V(t_n)/\sqrt{\mathfrak{S}_1}$, функция $\sin^2|z|u$ может, вообще говоря, для сколь угодно больших u принимать значения, равные единице. Поэтому мы не имеем возможности дать оценку интеграла (1.51) лучше тривиальной, а именно

$$\frac{2}{\pi}\int_\lambda^{+\infty}\left(\frac{\sin|z|u}{u}\right)^2 du \leqslant \frac{2}{\pi}\int_\lambda^{+\infty}\frac{du}{u^2} = \frac{2}{\pi\lambda}.$$

Это обстоятельство объясняет тот факт, что остаточный член в формуле для первого момента $V(t_n)$ имеет порядок

$$\lambda^{-1} \asymp \sqrt{\frac{\log x}{\log N}}. \tag{1.52}$$

Между тем, в работах Бояринова (см. [39], [40; гл. 2]) были приведены новые формулы, сводящие, как и (1.49), вычисление первого (и вообще любого положительного) момента заданной величины к вычислению ее четных моментов, а также был предложен метод, позволяющий преодолеть перечисленные выше трудности.

Соединение метода Бояринова с техникой параграфов 1.1–1.4 настоящей работы позволяет существенно уточнить остаточный член в асимптотической формуле дробного момента теоремы 1.2. В частности, в случае первого момента мы оцениваем остаток величиной порядка

$$\frac{\log x}{\log N}\log\left(\frac{\log N}{\log x}\right),$$

что превосходит по точности оценку (1.52) при $\log x/\log N \to 0$.

Сразу отметим, что применение уточненной таким образом асимптотической формулы для суммы (1.50) к вопросам, связанным с законом Грама и, в частности, с задачей вычисления дробных моментов величин $\Delta(n)$ и Δ_n, не приводит к принципиальному уточнению тех результатов, которые получаются с использованием менее точных формул теоремы 1.2.

Тем не менее асимптотические разложения дробных моментов тригонометрических полиномов могут представлять и самостоятельный интерес. По этой причине мы сочли возможным уделить этому вопросу дополнительный параграф.

Ввиду того, что метод Бояринова требует большего числа выкладок, здесь мы ограничиваемся частным случаем и рассматриваем лишь первый момент. В общем случае все вычисления проводятся аналогично, без внесения принципиальных изменений.

Подобно теоремам 1.1 и 1.2 все результаты предыдущих параграфов практически без изменений переносятся на «непрерывный» случай моментов

$$\int_T^{T+H} |V(t)|\,dt, \qquad H = T^{\,\alpha+\varepsilon}.$$

Как и выше, доказательство основного результата (теоремы 1.3) мы предварим леммой технического характера.

Лемма 1.23. *Пусть $n \geqslant 0$ – целое число, Λ, $V > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$. Тогда для интеграла*

$$j_n(\Lambda) = \int_0^V e^{-(\Lambda t)^2} t^{2n}\,dt \tag{1.53}$$

справедливы неравенства

$$j_0(\Lambda) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}, \qquad j_n(\Lambda) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\,\frac{1}{\Lambda^{2n}}\,\frac{n!}{\sqrt{n}}\min\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{\Lambda V}{\sqrt{n}}\right)^{2\beta}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Доказательство. Прежде всего, при любом $n \geqslant 0$ имеем

$$j_n(\Lambda) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(\Lambda t)^2} t^{2n}\,dt = \frac{\Gamma(n+1/2)}{2\Lambda^{2n+1}}.$$

Далее, если $n \geqslant 1$, то множитель t^{2n} в (1.53) не превосходит на всем промежутке интегрирования величины $V^{2\beta} t^{2(n-\beta)}$. Поэтому

$$j_n(\Lambda) \leqslant V^{2\beta}\int_0^{+\infty} e^{-(\Lambda t)^2} t^{2(n-\beta)}\,dt = \frac{(\Lambda V)^{2\beta}}{2\Lambda^{2n+1}}\,\Gamma\left(n + \frac{1}{2} - \beta\right).$$

Утверждение леммы теперь получим, воспользовавшись оценками

$$\frac{n^{1/2+\beta}}{n!}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-\beta\right) \leqslant \sqrt{\pi}, \qquad \frac{\sqrt{n}}{n!}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

которые справедливы при любых $n \geqslant 1$ и $0 < \beta \leqslant 1$. Лемма доказана.

Теорема 1.3. *Пусть $x_0 < x \leqslant N^{\delta}$, где $0 < \delta < 0.01$ – достаточно маленькая абсолютная постоянная. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_n |V(t_n)| = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\mathfrak{S}_1}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)} + \theta R\right\}, \tag{1.54}$$

где

$$R = c(\log r)\left(\frac{1}{r} + \frac{x^{-0.1}}{20\sqrt[4]{r}}\right), \qquad r = \frac{\log N}{\log x}, \qquad c = 5.5\cdot 10^3.$$

В частности, при $(\log N)^{7.5} \leqslant x \leqslant N^{\delta}$ величина R удовлетворяет неравенству

$$R \leqslant c_1 \frac{\log r}{r}, \qquad c_1 = 5765.$$

Ряд по отрицательным степеням $\mathfrak{S}_1$, стоящий в правой части (1.54), является асимптотическим.

Доказательство. Вывод формулы (1.54) проводится в три этапа.

Этап 1: выделение главного члена асимптотики. Как и выше, положим $v_n = V(t_n)/\sqrt{\mathfrak{S}_1}$ и определим числа K, λ и V равенствами

$$K = \left[\frac{r}{22}\right], \qquad \lambda = \frac{1}{10e}\sqrt{\frac{r}{\log r}}\,, \qquad V = \sqrt{8\log r}\,,$$

в которых $r = \log N/\log x$. Далее, в тождестве

$$|z| = \kappa^{-1}\int_0^{+\infty} e^{-(zu)^2}(1-e^{-(zu)^2})\,\frac{du}{u^2}\,, \qquad \kappa = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}(1-e^{-u^2})\,\frac{du}{u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}+1}\,,$$

из работы [39] положим $z = v_n$. Получим

$$S = \sum_n |v_n| = \kappa^{-1}\sum_n\biggl(\int_0^{\lambda} + \int_{\lambda}^{+\infty}\biggr)(e^{-(uv_n)^2} - e^{-2(uv_n)^2})\,\frac{du}{u^2} = S_1 + R_1.$$

Вновь следуя работе Бояринова [39] и применяя тождество

$$e^{-v^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/4}\cos{(vt)}\,dt, \tag{1.55}$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
S_1 &= \kappa^{-1}\sum_n\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\biggl\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/4}\cos{(utv_n)}\,dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/4}\cos{(utv_n\sqrt{2})}\,dt\biggr\}\,du \\
&= \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\sum_n\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/4}\{\cos{(utv_n)} - \cos{(utv_n\sqrt{2}\,)}\}\,dt\,du \\
&= \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\sum_n\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\biggl(\int_0^{V} + \int_V^{+\infty}\biggr)e^{-t^2/4}\{\cos{(utv_n)} - \cos{(utv_n\sqrt{2}\,)}\}\,dt\,du = S_2 + R_2.
\end{aligned}$$

Далее, разлагая косинусы в ряды Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, найдем

$$\begin{aligned}
S_2 = \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\sum_n\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^{V} e^{-t^2/4}\biggl\{&\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(uv_nt)^{2k} + \theta_1\frac{(uv_nt)^{2(K+1)}}{(2K+2)!} \\
&- \sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(uv_nt\sqrt{2})^{2k} + \theta_1\frac{(uv_nt\sqrt{2})^{2(K+1)}}{(2K+2)!}\biggr\}\,dt\,du \\
= \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^{V} e^{-t^2/4}\biggl\{&\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}(2^k-1)\,(ut)^k\,\sum_n v_n^{2k} \\
&+ \theta_3\frac{(2^{K+1}+1)}{(2K+2)!}(ut)^{2K+2}\sum_n v_n^{2(K+1)}\biggr\}\,dt\,du.
\end{aligned}$$

Заменяя суммы по n по формулам лемм 1.4 и 1.5, получим

$$\begin{aligned}
S_2 = \frac{\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^{V} e^{-t^2/4}\biggl\{&\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}(2^k-1)\frac{(ut)^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\biggl(M\frac{(2k)!}{k!}\frac{H^{(k)}(0)}{2^{2k}} + \theta x^{2k}\log N\biggr) \\
&+ \theta_4\frac{(2^{K+1}+1)}{(2K+2)!}\frac{(ut)^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}\biggl(M\frac{(2K+2)!}{(K+1)!}\frac{H^{(K+1)}(0)}{2^{2(K+1)}} + x^{2(K+1)}\log N\biggr)\biggr\}\,dt\,du.
\end{aligned}$$

Обозначим через R_3 вклад в S_2 от слагаемых, содержащих множитель x^{2k}. Преобразуя S_2 далее, будем иметь

$$S_2 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int_0^{V} e^{-t^2/4} \biggl\{ \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \frac{(2^k-1)}{2^{2k}} (ut)^{2k} \frac{(2k)!}{k!} \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} + \theta_5 \frac{(ut)^{2K+2}}{(2K+2)!} \frac{(2^{K+1}+1)}{2^{2(K+1)}} \frac{(2K+2)!}{(K+1)!} \frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \biggr\} dt\,du + R_3$$

$$= S_3 + R_3.$$

Далее, сумму по k в выражении для S_3 заменим бесконечной:

$$S_3 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int_0^{V} e^{-t^2/4} \biggl\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{(2^k-1)}{2^{2k}} \left(\frac{ut}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{2k} H^{(k)}(0) + \frac{\theta_6}{(K+1)!} \frac{(2^{K+1}+1)}{2^{2(K+1)}} \left(\frac{ut}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{2(K+1)} H^{(K+1)}(0) - \sum_{k>K} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{(2^k-1)}{2^{2k}} \left(\frac{ut}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{2k} H^{(k)}(0) \biggr\} dt\,du$$

$$= S_4 + R_4,$$

где S_4 обозначает вклад в S_3 от суммы по всем $k \geqslant 0$. Замечая, что эта сумма по k является разностью двух рядов Тейлора, находим

$$S_4 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int_0^{V} e^{-t^2/4} \biggl\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{(ut)^2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) \biggr\} dt\,du$$
$$= \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} \frac{1}{u^2} \int_0^{V} e^{-t^2/4} \biggl\{ H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right) - H\left(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\right) \biggr\} dt\,du.$$

Заменив интеграл по u несобственным, получим

$$S_4 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{V} e^{-t^2/4} \left(\int_0^{+\infty} - \int_{\lambda}^{+\infty} \right) \frac{1}{u^2} \biggl\{ H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right) - H\left(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\right) \biggr\} dt\,du = S_5 - R_5.$$

Наконец, положим $u = 2v/t$ в интеграле по u; будем иметь

$$S_5 = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{V} e^{-t^2/4} \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} \biggl\{ H\left(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\right) - H\left(-\frac{2v^2}{\mathfrak{S}_1}\right) \biggr\} \frac{du}{u^2}\,dt$$
$$= \frac{Mj\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{V} \frac{t}{2} e^{-t^2/4}\,dt = \frac{Mj\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-V^2/4}),$$

где

$$j = \int_0^{+\infty} \biggl\{ H\left(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\right) - H\left(-\frac{2v^2}{\mathfrak{S}_1}\right) \biggr\} \frac{dv}{v^2}.$$

Этап 2: вычисление интеграла j. Представим этот интеграл в виде разности

$$\int_0^{+\infty} \biggl\{ 1 - H\left(-\frac{2v^2}{\mathfrak{S}_1}\right) \biggr\} \frac{dv}{v^2} - \int_0^{+\infty} \biggl\{ 1 - H\left(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\right) \biggr\} \frac{dv}{v^2} = j_1 - j_2.$$

Замечая, что

$$j_1 = \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\left\{1 - H\left(-\frac{v^2}{\mathfrak{S}_1}\right)\right\}\frac{dv}{v^2} = \sqrt{2}j_2,$$

находим $j = (\sqrt{2}-1)j_2$. Интегрируя j_2 почленно (законность этого приема обоснована в леммах 1.19 и 1.20) и замечая, что $\Phi_1 = 0$, приходим к следующим равенствам:

$$j_2 = \int_0^{+\infty}\left(1 - e^{-v^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}v^{2n}\right)\frac{dv}{v^2} = \int_0^{+\infty}(1-e^{-v^2})\frac{dv}{v^2} - \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\int_0^{+\infty}e^{-v^2}v^{2n}\,dv$$
$$= \sqrt{\pi} - \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{1}{2}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\left(1 - \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-1/2)}{2\sqrt{\pi}}\right).$$

Поскольку $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, окончательно находим

$$j_2 = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)},$$
$$j = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)} = \kappa\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)}.$$

Все эти ряды, как было установлено в лемме 1.22, являются асимптотическими.

Этап 3: оценка величин R_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$. Докажем сначала одно вспомогательное неравенство для интеграла

$$j(u) = \int_0^V e^{-t^2/4}H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)dt, \qquad u \geqslant \lambda.$$

Интегрируя почленно ряд, который получается при замене H выражением

$$e^{-u^2t^2/4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\left(\frac{u^2t^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^n,$$

находим

$$j(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Phi_n\left(\frac{u^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^n j_n(\Lambda),$$

где

$$j_n(\Lambda) = \int_0^V e^{-(\Lambda t)^2}t^{2n}\,dt, \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}\,.$$

Получившуюся сумму разобьем на три части, отвечающие соответственно значениям $n = 0$, $2 \leqslant n \leqslant x^{2/5}$ и $n > x^{2/5}$. Применив оценки лемм 1.12 (для $2 \leqslant n \leqslant x^{2/5}$) и 1.11 (для $n > x^{2/5}$), будем иметь

$$|j(u)| \leqslant j_0(\Lambda) + \sqrt{2\pi}\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}}g(n)\left(\frac{u}{2}\right)^{2n}\frac{|j_n(\Lambda)|}{n!} + \sum_{n>x^{2/5}}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n}\frac{|j_n(\Lambda)|}{n!},$$

где, как и выше,

$$g(n) = \left(\frac{\log\log n + 1}{\mathfrak{S}_1}\right)^n.$$

Для оценки интегралов $j_n(\Lambda)$ воспользуемся леммой 1.23 с $\beta = 3/4$; получим

$$|j(u)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda} + \sqrt{2\pi}\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}}g(n)\left(\frac{u}{2\Lambda}\right)^{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\frac{1}{2\sqrt{n}} + \sum_{n>x^{2/5}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Lambda^{1/2}V^{3/2}}{n^{5/4}}\left(\frac{u}{2\Lambda}\right)^{2n}.$$

Принимая во внимание неравенство $2\Lambda > u$, находим

$$|j(u)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\left\{1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}}\frac{g(n)}{\sqrt{n}}\right\}+\frac{5\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Lambda^{1/2}V^{3/2}}{x^{1/10}}.$$

Сумму по n в последнем выражении разобьем на три части, отвечающие соответственно промежуткам $2\leqslant n\leqslant \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1 < n \leqslant e^{\mathfrak{S}_1}$ и $e^{\mathfrak{S}_1} < n \leqslant x^{2/5}$. По лемме 1.21 функция $g(n)$ монотонно убывает на каждом из этих промежутков, так что

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leqslant n\leqslant x^{2/5}}\frac{g(n)}{\sqrt{n}} &\leqslant g(2)\sum_{2\leqslant n\leqslant \mathfrak{S}_1}\frac{1}{\sqrt{n}}+g(\mathfrak{S}_1)\sum_{\mathfrak{S}_1\leqslant n\leqslant e^{\mathfrak{S}_1}}\frac{1}{\sqrt{n}}+g(e^{\mathfrak{S}_1})\sum_{e^{\mathfrak{S}_1}\leqslant n\leqslant x^{2/5}}\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\leqslant \left(\frac{\log\log 2+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^2\cdot 2\sqrt{\mathfrak{S}_1}+\left(\frac{\log\log \mathfrak{S}_1+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^{\mathfrak{S}_1}\cdot 2e^{\mathfrak{S}_1/2}+\left(\frac{\log \mathfrak{S}_1+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^{e^{\mathfrak{S}_1}}\cdot x^{1/5}\\
&< \frac{0.9}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}}+\frac{2}{\mathfrak{S}_1^2}+2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{\mathfrak{S}_1}+2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^{e^{\mathfrak{S}_1}}x^{1/5}\\
&< \frac{0.9}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}}+\frac{2}{\mathfrak{S}_1^2}+2\exp\left\{\frac{1}{5}\log x-\frac{1}{2}(\log x)\log\log x\right\} < \frac{1}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\,.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|j(u)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\Lambda}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mathfrak{S}_1\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)+\frac{5\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Lambda^{1/2}V^{3/2}}{x^{1/10}}\,. \tag{1.56}$$

Оценка R_1. Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned}
0\leqslant R_1 &= \kappa^{-1}\sum_n\int_\lambda^{+\infty}e^{-(uv_n)^2}\bigl(1-e^{-(uv_n)^2}\bigr)\frac{du}{u^2}\\
&\leqslant \kappa^{-1}\sum_n\int_\lambda^{+\infty}e^{-(uv_n)^2}\frac{du}{u^2}\leqslant \kappa^{-1}\sum_n e^{-(\lambda v_n)^2}\int_\lambda^{+\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{\kappa^{-1}}{\lambda}\sum_n e^{-(\lambda v_n)^2}.
\end{aligned}$$

Преобразуем последнюю сумму, вновь применяя тождество (1.55). Получим

$$\begin{aligned}
0\leqslant R_1 &\leqslant \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\sum_n\int_0^{+\infty}e^{-t^2/4}\cos(\lambda v_n t)\,dt\\
&= \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\sum_n\left(\int_0^V+\int_V^{+\infty}\right)e^{-t^2/4}\cos(\lambda v_n t)\,dt = R_1^{(2)}+R_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое оценим тривиально:

$$|R_1^{(1)}| \leqslant \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\sum_n\int_V^{+\infty}e^{-t^2/4}\,dt=\frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_{V^2/4}^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\,dv\leqslant\frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda V\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{V^2}{4}\right).$$

Пользуясь обозначением $r=\log N/\log x$, окончательно находим

$$|R_1^{(1)}| \leqslant 20e\frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\log r}}{r^2\sqrt{r}}\,.$$

Для оценки $R_1^{(2)}$ косинус в подынтегральном выражении заменим конечным рядом Тейлора:

$$R_1^{(2)}=\frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\sum_n\int_0^V e^{-t^2/4}\left\{\sum_{k=0}^K\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\lambda t)^{2k}v_n^{2k}+\theta_1\frac{(\lambda t)^{2K+2}}{(2K+2)!}v_n^{2K+2}\right\}dt$$

$$= \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^V e^{-t^2/4} \left\{ \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\lambda t)^{2k} \sum_n v_n^{2k} + \theta_2 \frac{(\lambda t)^{2K+2}}{(2K+2)!} \sum_n v_n^{2K+2} \right\} dt.$$

Воспользовавшись формулами лемм 1.4 и 1.5, преобразуем последнее выражение к следующему виду:

$$R_1^{(2)} = \frac{\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^V e^{-t^2/4} \left\{ \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\lambda t)^{2k} \left(\frac{(2k)!}{k!} \frac{M}{2^{2k}} \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} + \theta_3 \frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k} \log N \right) \right.$$
$$\left. + \theta_4 \frac{(\lambda t)^{2K+2}}{(2K+2)!} \left(\frac{(2K+2)!}{(K+1)!} \frac{M}{2^{2K+2}} \frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} + \frac{x^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \log N \right) \right\} dt$$
$$= \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^V e^{-t^2/4} \left\{ \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda t}{2} \right)^{2k} \frac{H^{(k)}(0)}{\mathfrak{S}_1^k} + \frac{\theta_5}{(K+1)!} \left(\frac{\lambda t}{2} \right)^{2K+2} \frac{H^{(K+1)}(0)}{\mathfrak{S}_1^{K+1}} \right\} dt$$
$$+ \frac{\theta_6 \kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^V e^{-t^2/4} \left\{ \sum_{k=0}^{K+1} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} \frac{x^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k} \log N \right\}.$$

Заменяя в первом интеграле сумму по k бесконечной, обозначим получившееся при этом слагаемое через $R_1^{(3)}$; ошибку, возникающую в ходе такой замены, обозначим через $R_1^{(4)}$; наконец, вклад от слагаемых, содержащих множитель x^{2k}, обозначим через $R_1^{(5)}$. Получим

$$R_1^{(2)} = R_1^{(3)} + R_1^{(4)} + R_1^{(5)}.$$

Оценим сначала величину $R_1^{(5)}$. Имеем

$$|R_1^{(5)}| \leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} (\log N) \int_0^V e^{-t^2/4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right)^{2k} dt$$
$$\leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} (\log N) \int_0^V \exp\left\{ -\frac{t^2}{4} + \frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right\} dt$$
$$\leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}} (\log N) \exp\left\{ \frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right\} \int_0^V e^{-t^2/4}\, dt \leqslant \frac{x^{2(K+1)}\kappa^{-1}}{\lambda} (\log N) \exp\left\{ \frac{\lambda t}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}} \right\}.$$

Пользуясь определением величин K, λ и V, находим

$$|R_1^{(5)}| \leqslant 10e\kappa^{-1} \sqrt{\frac{\log r}{r}} \exp\left\{ 3\left(\frac{1}{22} \frac{\log N}{\log x} + 1 \right) \log x + \log\log N + \frac{1}{5e} \sqrt{\frac{2\log N}{\mathfrak{S}_1 \log x}} \right\}.$$

Поскольку

$$\frac{3}{22} = \left(\frac{27}{82} + \varepsilon \right) - \frac{147}{451} - \varepsilon < \left(\frac{27}{82} + \varepsilon \right) - \frac{5}{13} - \varepsilon,$$

то

$$|R_1^{(5)}| \leqslant \sqrt{\frac{\log r}{r}} \exp\left\{ \left(\frac{27}{82} + \varepsilon \right) \log N - \left(\frac{5}{13} + \varepsilon \right) \log N + 3\log x + \log\log N + \sqrt{\log N} \right\}$$
$$< M \sqrt{\frac{\log r}{r}} \exp\left\{ -\frac{5}{13} \log N + 3\log x \right\}.$$

Замечая, наконец, что $x \leqslant N^{1/60}$, окончательно получим

$$|R_1^{(5)}| \leqslant M \sqrt{\frac{\log r}{r}} \exp\left\{ -\frac{1}{3} \log N \right\} = M \sqrt{\frac{\log r}{r}}\, N^{-1/3}.$$

Переходя к оценке $R_1^{(4)}$, заметим следующее: при $0 \leqslant t \leqslant V$ и $k > K$ второе соотношение леммы 1.17 дает

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^k H^{(k)}(0) \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2k} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda V}{2}\right)^{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\frac{e}{k}\frac{(\lambda V)^2}{4}\right)^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\frac{e(\lambda V)^2}{4K}\right)^k.$$

Но несложно видеть, что

$$\frac{e(\lambda V)^2}{4K} = \frac{r}{50eK} \leqslant \frac{r}{50e}\frac{25}{r} = \frac{1}{2e}.$$

Следовательно,

$$|R_1^{(4)}| \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}\sum_{k>K}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\left(\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^k dt \leqslant \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\sum_{k>K}(2e)^{-k}\right)\int_0^V e^{-t^2/4}\,dt$$
$$< \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\frac{e^{-(K+1)}}{\sqrt{2K}} < \frac{2M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}20e\sqrt{3}\frac{\sqrt{\log r}}{r}e^{-r/22} < \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\frac{190\sqrt{\log r}}{r}e^{-r/22}.$$

Оценим, наконец, величину $R_1^{(3)}$:

$$R_1^{(3)} = \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\left(-\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)^k\right\}dt = \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}H\left(-\frac{(\lambda t)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right)dt.$$

Полагая $u = \lambda$ в неравенстве (1.56) и замечая, что

$$2\Lambda = \sqrt{\lambda^2+1} > \lambda, \qquad \sqrt{\Lambda} = \frac{\sqrt[4]{\lambda^2+1}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt[4]{2}},$$

найдем

$$|R_1^{(3)}| \leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\frac{\lambda^{1/2}V^{3/2}}{x^{0.1}}\right\}$$
$$\leqslant \frac{M\kappa^{-1}}{\lambda^2}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{5M\kappa^{-1}}{2\sqrt[4]{2}}\frac{V^{3/2}}{\lambda^{1/2}x^{0.1}}$$
$$\leqslant (10e)^2 M\kappa^{-1}\frac{\log r}{r}\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + 5\sqrt{10e}\frac{M\kappa^{-1}}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}.$$

Теперь искомая оценка величины $R_1^{(2)}$ принимает вид

$$|R_1^{(2)}| \leqslant M\kappa^{-1}\frac{\log r}{r}\left\{(10e)^2\left(1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\right) + \frac{190}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-q/22}}{\sqrt{\log q}} + \kappa N^{-1/3}\right\}$$
$$+ M\kappa^{-1}\frac{5\sqrt{10e}}{x^{0.1}}\frac{\log q}{\sqrt[4]{q}} < M\kappa^{-1}\left(739.9\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right).$$

Таким образом,

$$|R_1| \leqslant |R_1^{(1)}| + |R_1^{(2)}| \leqslant M\kappa^{-1}\left(\frac{20e}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\log r}}{r^2\sqrt{r}} + 739.9\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right)$$
$$< M\kappa^{-1}\left(740\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\right).$$

Оценка R_2. Полагая при фиксированном t

$$f_n(u) = \cos(utv_n) - \cos(utv_n\sqrt{2}),$$

представим R_2 в виде
$$\frac{\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_V^{+\infty} e^{-t^2/4}\biggl\{\sum_n \int_0^\lambda \frac{f_n(u)}{u^2}\,du\biggr\}dt. \tag{1.57}$$
Зададимся произвольным числом $t \geqslant V$ и разобьем сумму по n в (1.57) на две, относя к первой те слагаемые, для которых выполнено неравенство $|v_n| > (\lambda t)^{-1}$, а ко второй – все остальные. Обозначим вклады от этих сумм в R_2 через $R_2^{(1)}$ и $R_2^{(2)}$ соответственно.

Рассмотрим теперь произвольное число n, для которого справедливо неравенство $|v_n| > (\lambda t)^{-1}$. В этом случае $\lambda > (t|v_n|)^{-1}$, так что промежуток интегрирования по u можно разбить на два:
$$\int_0^\lambda \frac{f_n(u)}{u^2}\,du = \biggl\{\int_0^{(t|v_n|)^{-1}} + \int_{(t|v_n|)^{-1}}^\lambda\biggr\}\frac{f_n(u)}{u^2}\,du. \tag{1.58}$$
Так как, очевидно, $|f_n(u)| \leqslant 2$ при всех u, то второй интеграл в (1.58) не превосходит по абсолютной величине
$$2\int_{(t|v_n|)^{-1}}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 2t|v_n|.$$
С другой стороны, пользуясь неравенством $|\sin w| \leqslant |w|$, находим
$$|f_n(u)| \leqslant 2\biggl|\sin\biggl(uv_nt\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}\biggr)\sin\biggl(uv_nt\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2}\biggr)\biggr| \leqslant \frac{1}{2}(uv_nt)^2.$$
Следовательно, модуль первого интеграла в правой части (1.58) не превосходит
$$\int_0^{(t|v_n|)^{-1}} \frac{1}{2}(uv_nt)^2\,du = \frac{1}{2}\,t|v_n|.$$
Таким образом,
$$\biggl|\int_0^\lambda \frac{f_n(u)}{u^2}\,du\biggr| \leqslant \frac{5}{2}\,t|v_n|,$$
$$|R_2^{(1)}| \leqslant \frac{\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_V^{+\infty} e^{-t^2/4}\,\frac{5t}{2}\biggl(\sum_n |v_n|\biggr)dt = \frac{5\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\exp\biggl\{-\frac{V^2}{4}\biggr\}\biggl(\sum_n |v_n|\biggr).$$
Применяя к последней сумме неравенство Коши и используя формулу теоремы 1.1, находим
$$\sum_n |v_n| \leqslant \biggl(M\sum_n v_n^2\biggr)^{1/2} < \biggl(M\biggl\{\frac{M}{2\mathfrak{S}_1} + \frac{x^2}{\mathfrak{S}_1}\log N\biggr\}\biggr)^{1/2} < M,$$
$$|R_2^{(1)}| \leqslant \frac{5M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\exp\biggl\{-\frac{V^2}{4}\biggr\} = \frac{5M\varkappa^{-1}}{r^2\sqrt{\pi}}\,.$$
Рассмотрим теперь те n, для которых $0 < |v_n| \leqslant (\lambda t)^{-1}$. Для них $\lambda \leqslant (t|v_n|)^{-1}$, так что
$$\biggl|\int_0^\lambda \frac{f_n(u)}{u^2}\,du\biggr| \leqslant \int_0^\lambda \frac{1}{2}(uv_nt)^2\,\frac{du}{u^2} = \frac{\lambda}{2}(v_nt)^2 \leqslant \frac{1}{2\lambda}\,.$$
Таким образом,
$$|R_2^{(2)}| \leqslant \frac{\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_V^{+\infty} e^{-t^2/4}\sum_n (2\lambda)^{-1}\,dt \leqslant \frac{M\varkappa^{-1}}{2\lambda\sqrt{\pi}}\int_V^{+\infty} e^{-t^2/4}\,dt$$
$$\leqslant \frac{M\varkappa^{-1}}{2\lambda\sqrt{\pi}}\,\frac{2}{V}\exp\biggl\{-\frac{V^2}{4}\biggr\} \leqslant \frac{5eM\varkappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{r^2\sqrt{r}}\,.$$

Следовательно,

$$|R_2| \leqslant |R_2^{(1)}| + |R_2^{(2)}| \leqslant \frac{5M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2} + \frac{5eM\varkappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{r^2\sqrt{r}} < \frac{10M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2}.$$

Оценка R_3 и R_4. Замечая, что

$$|R_3| \leqslant \frac{M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^V e^{-t^2/4}\frac{(2^{K+1}+1)}{(K+1)!\,2^{2K+2}}\frac{(ut)^{2K+2}}{\mathfrak{S}_1^{K+1}}H^{(K+1)}(0)\,dt\,du,$$

$$R_4 \leqslant \frac{M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^V e^{-t^2/4}\sum_{k>K}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\frac{2^k-1}{2^{2k}}\frac{(ut)^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\,dt\,du,$$

находим

$$\begin{aligned}
|R_3| + |R_4| &\leqslant \frac{2M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^V e^{-t^2/4}\sum_{k>K}\frac{\mathfrak{S}_1^k}{k!}\frac{2^k+1}{2^{2k}}\frac{(ut)^{2k}}{\mathfrak{S}_1^k}\,dt\,du \\
&\leqslant \frac{3M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}\frac{1}{u^2}\int_0^V e^{-t^2/4}\sum_{k>K}\frac{1}{k!}\left(\frac{ut}{\sqrt{2}}\right)^{2k}dt\,du \\
&= \frac{3M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}\sum_{k>K}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2k}\frac{\lambda^{2k-1}}{2k-1}\,dt < \frac{3M\varkappa^{-1}}{\lambda K\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}\sum_{k>K}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{2}}\right)^{2k}dt.
\end{aligned}$$

При любом t с условиями $0 \leqslant t \leqslant V$ сумма под знаком интеграла не превосходит

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\sum_{k>K}\left(\frac{e}{k}\right)^k\left(\frac{\lambda V}{\sqrt{2}}\right)^{2k} < \frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\sum_{k>K}\left(\frac{e(\lambda V)^2}{2K}\right)^k.$$

Поскольку $e(\lambda V)^2/2K \leqslant 1/e$, то окончательно находим

$$\begin{aligned}
|R_3| + |R_4| &\leqslant \frac{3M\varkappa^{-1}}{\lambda K\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi K}}\left(\sum_{k>K}e^{-k}\right)\int_0^V e^{-t^2/4}\,dt \\
&\leqslant \frac{3M\varkappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\lambda K\sqrt{K}}\frac{e^{-K}}{e-1} \leqslant \frac{6(25e)^2}{e-1}\frac{M\varkappa^{-1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\log r}}{r^2}e^{-r/22} < 6434M\varkappa^{-1}\frac{\sqrt{\log r}}{r^2}e^{-r/22}.
\end{aligned}$$

Оценка R_5. Разобьем в выражении

$$R_5 = \frac{M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{u^2}\left\{H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right) - H\left(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\right)\right\}du\,dt$$

интеграл по u на два, отвечающих промежуткам $\lambda \leqslant u \leqslant \lambda^2$ и $u > \lambda^2$. Соответственно величина R_5 представится суммой $R_5^{(1)} + R_5^{(2)}$, где смысл обозначений очевиден. Тогда, пользуясь леммой 1.17, приходим к неравенствам

$$|R_5^{(2)}| \leqslant \frac{2M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^V e^{-t^2/4}\int_{\lambda^2}^{+\infty}\frac{du\,dt}{u^2} \leqslant \frac{2M\varkappa^{-1}}{\lambda^2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2/4}\,dt = \frac{2M\varkappa^{-1}}{\lambda^2}.$$

Для оценки $R_5^{(1)}$ вновь воспользуемся полученным выше неравенством для интеграла $j(u)$. Имеем

$$R_5^{(1)} = \frac{M\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda}^{\lambda^2}\frac{1}{u^2}\int_0^V e^{-t^2/4}\left\{H\left(-\frac{(ut)^2}{4\mathfrak{S}_1}\right) - H\left(-\frac{(ut)^2}{2\mathfrak{S}_1}\right)\right\}dt\,du$$

$$= \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda}^{\lambda^2} \frac{1}{u^2}\bigl(j(u) - j(u\sqrt{2})\bigr)\,\frac{du}{u^2} = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \biggl\{ \int_{\lambda}^{\lambda^2} \frac{j(u)}{u^2}\,du - \sqrt{2}\int_{\lambda\sqrt{2}}^{\lambda^2\sqrt{2}} \frac{j(u)}{u^2}\,du \biggr\}.$$

Применяя оценку (1.56) и используя неравенства $2\Lambda > u$, $\sqrt{\Lambda} \leqslant \sqrt{u}/\sqrt[4]{2}$, находим

$$\biggl|\int_{\lambda}^{\lambda^2} \frac{j(u)}{u^2}\,du\biggr| \leqslant \int_{\lambda}^{\lambda^2} \biggl\{ \frac{\sqrt{\pi}}{u}\biggl(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\biggr) + \frac{5\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{2}}\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}} \biggr\}\frac{du}{u^2}$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^2}\biggl(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\biggr) + \frac{5\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{2}}\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}$$

и, аналогично,

$$\biggl|\int_{\lambda\sqrt{2}}^{\lambda^2\sqrt{2}} \frac{j(u)}{u^2}\,du\biggr| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda^2}\biggl(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\biggr) + \frac{5\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}\,.$$

Сложив полученные оценки, приходим к следующим неравенствам:

$$|R_5^{(1)}| \leqslant M\kappa^{-1}\biggl(\frac{3}{4\lambda^2}\biggl(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\biggr) + \frac{5}{\sqrt[4]{2}}\biggl(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\biggr)\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}\biggr),$$
$$|R_5| \leqslant |R_5^{(1)}| + |R_5^{(2)}| \leqslant M\kappa^{-1}\biggl(\frac{11}{4\lambda^2}\biggl(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathfrak{S}_1^{-3/2}\biggr) + \frac{5}{\sqrt[4]{2}}\biggl(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\biggr)\frac{V^{3/2}}{x^{0.1}\sqrt{\lambda}}\biggr)$$
$$< M\kappa^{-1}\biggl(2032\frac{\log r}{r} + 84.1\frac{\log r}{x^{0.1}\sqrt[4]{r}}\biggr).$$

Складывая полученные выше оценки величин R_j, $1 \leqslant j \leqslant 5$, находим

$$\sum_{j=1}^{5}|R_5| \leqslant M\kappa^{-1}\biggl\{740\frac{\log r}{r} + \frac{26.1}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}} + \frac{10}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2} + 6434\frac{\sqrt{\log r}}{r^2}e^{-r/22} + 2032\frac{\log r}{r} + \frac{84.1}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\biggr\}$$
$$< M\kappa^{-1}\biggl\{2273\frac{\log r}{r} + \frac{110.2}{x^{0.1}}\frac{\log r}{\sqrt[4]{r}}\biggr\}.$$

Следовательно,

$$\sum_n |v_n| = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,j(1 - e^{-V^2/4}) + \theta\sum_{j=1}^{5}|R_j| = \frac{M\kappa^{-1}}{\sqrt{\pi}}\,j + M\theta\kappa^{-1}\biggl(\frac{a\log r}{r} + \frac{b\log r}{x^{0.1}\sqrt[4]{r}}\biggr)$$
$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}}\biggl\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)} + \theta c(\log r)\biggl(\frac{1}{r} + \frac{x^{-0.1}}{20\sqrt[4]{r}}\biggr)\biggr\},$$

где $a = 2274$, $b = 110.2$, $c = 2274(\sqrt{2} + 1) < 5.49\cdot 10^3$. Теперь несложно заметить, что при $x \geqslant (\log N)^{7.5}$ будут выполнены неравенства

$$x \geqslant r^{7.5}, \qquad \frac{x^{-0.1}}{\sqrt[4]{r}} \leqslant \frac{1}{r}\,.$$

Поэтому для таких x остаточный член в полученной формуле не превзойдет по модулю

$$\frac{21}{20}\,c\frac{\log r}{r} < 5765\frac{\log r}{r}\,.$$

Теорема доказана.

Глава 2. Поведение аргумента дзета-функции Римана в точках Грама

Как уже отмечалось, основные задачи, связанные с числами Δ_n, т.е. вычисление моментов Δ_n и построение для них функции распределения, сводятся к аналогичным задачам для последовательности чисел $\Delta(n) = S(t_n + 0)$. По этой причине доказательство формул Сельберга мы предваряем исследованием свойств величин $\Delta(n)$, которому и посвящена настоящая глава.

Вполне удовлетворительные, хотя и не самые точные результаты в указанных задачах получаются прямым применением методов работ [41], [32]: переход от «непрерывного» параметра t, $T < t \leqslant T + H$, к «дискретному» параметру t_n, $N < n \leqslant N + M$, не представляет затруднений. Перечислим эти результаты, чтобы иметь в дальнейшем возможность сравнить их с теми, которые будут получены ниже.

Прежде всего, в случае целого $k \geqslant 1$ может быть установлена асимптотика вида

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = \frac{(2k)!}{k!}\,\frac{M}{(2\pi)^{2k}}(\log\log N)^k(1 + r_{2k}), \tag{2.1}$$

где

$$|r_{2k}| \leqslant \frac{4^k\sqrt{k}}{\sqrt{\log\log N}}\,. \tag{2.2}$$

Несложно видеть, что формула (2.1) будет содержательной лишь при

$$1 \leqslant k \leqslant (b_1 - \delta)\log\log\log N,$$

где $4b_1\log 2 = 1$.

Далее, при нецелом a с условием $0 < a < b_2\log\log\log N$ восходящая к Гошу [32] техника работы с дробными моментами приводит к равенству

$$\sum_n |\Delta(n)|^{2a} = \frac{\Gamma(a + 1/2)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{M}{\pi^{2a}}(\log\log N)^a(1 + r_{2a}), \tag{2.3}$$

в котором

$$|r_{2a}| \leqslant (\log\log\log N)^{-b_3}, \qquad b_3 = b_3(a) > 0 \tag{2.4}$$

(ср. с [42; гл. II, § 3, теорема 2]). Принципиальное усовершенствование этой техники, принадлежащее Бояринову (см. [39], [40]), позволяет в ряде случаев заменить оценку r_{2a} следующей, более точной:

$$|r_{2a}| \leqslant \exp\{-b_4\sqrt{\log\log\log N}\}, \qquad b_4 = b_4(a) > 0. \tag{2.5}$$

Стандартная схема получения асимптотики для функции распределения основана на хорошем приближении характеристической функции исследуемой случайной величины и дальнейшем применении неравенства Берри–Эссеена. Ее первое применение к задаче распределения значений $S(t)$ и связанных с ней функций также принадлежит Гошу.

Метод Гоша, будучи применен к функции

$$\Phi(u) = \frac{1}{M}\,\#\Big\{n\;\Big|\;N < n \leqslant N + M,\, \Delta(n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\,\Big\},$$

приводит к равенству
$$\Phi(u) = M(G(u) + r(u)), \tag{2.6}$$
в котором
$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2}\, dv, \qquad |r(u)| \leqslant \frac{b_5}{\sqrt{\log\log\log N}}, \quad b_5 > 0, \tag{2.7}$$
и которое в силу соотношений
$$G(-u) = 1 - G(u) \asymp (ue^{u^2/2})^{-1}, \qquad u \to +\infty,$$
является содержательным лишь при
$$|u| \leqslant \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \log\log\log\log N.$$
Более совершенный метод нахождения функций распределения, созданный Сельбергом и реализованный (применительно к «непрерывному» случаю) в работе Тсанга [43] (см. также теорему 5 из работы [44]), позволяет заменить оценку $r(u)$ в (2.7) неравенством
$$|r(u)| \leqslant \frac{b_6 \log\log\log N}{\sqrt{\log\log N}};$$
соответственно диапазон применимости такой формулы для $\Phi(u)$ расширяется до области
$$|u| \leqslant \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \log\log\log N.$$

В настоящей главе мы, используя технику работ [41], [32], [33] вместе с некоторыми дополнительными соображениями (включающими теоремы гл. 1), получаем ряд новых результатов, уточняющих перечисленные выше.

Во-первых, оценка (2.2) заменяется неравенством
$$|r_{2k}| \leqslant \frac{b_7 k\sqrt{k}}{\sqrt{\log\log N}}. \tag{2.8}$$
Соответственно область применения формулы (2.1) расширяется до промежутка
$$1 \leqslant k \leqslant b_8 \sqrt[3]{\log\log N}.$$

Далее, оценки (2.4), (2.5) остаточного члена r_{2a} заменяются общим неравенством
$$|r_{2a}| \leqslant \frac{b_9(a\sqrt{a} + a\log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$
справедливым при $1 \leqslant a \leqslant b_{10} \sqrt[3]{\log\log N}$. Таким образом, практически ликвидируется «разрыв» в точности оценок r_{2a} в случаях целого и нецелого a.

Наконец, при некотором ограничении на величину u (именно, при выполнении неравенства $u \geqslant 3/2$) формулу (2.7) удается заменить равенствами
$$\frac{\Phi(-u)}{G(-u)} = 1 + O(r(u)), \qquad \frac{1 - \Phi(u)}{1 - G(u)} = 1 + O(r(u)),$$
где величина
$$r(u) = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}}$$
остается бесконечно малой при $u = o(\sqrt[6]{\log\log N})$.

Приведем теперь основные соображения, которые легли в основу перечисленных уточненных результатов.

Появление множителя 4^k в (2.2) объясняется применением неравенства Гёльдера. Именно, если u и v – произвольные вещественные числа, то это неравенство вместе с формулой конечных приращений Лагранжа приводят к оценкам

$$|(u+v)^{2k} - u^{2k}| = 2k|v| \cdot |u+\theta v|^{2k-1} \leqslant 2k|v| \cdot 2^{2k-2}(|u|^{2k-1} + |v|^{2k-1}) \leqslant 4^k k(|u|^{2k-1}|v| + v^{2k}).$$

Если число $|v|$ слишком мало по сравнению с $|u|$, то такие оценки являются слишком грубыми, и их целесообразно заменить более точным неравенством

$$|(u+v)^{2k} - u^{2k}| \leqslant \sum_{\nu=1}^{2k} \binom{2k}{\nu} |u|^{2k-\nu}|v|^{\nu}.$$

Именно это соображение лежит в основе доказательства неравенства (2.8).

Далее, в методе Гоша дробный момент исследуемой функции приближается линейной комбинацией очень большого числа ее четных моментов. Соответственно, остаточный член r_{2a} оказывается линейной комбинацией очень большого количества остаточных членов r_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$. Такое накопление ошибки и служит главной причиной снижения точности в оценке r_{2a} (по сравнению с r_{2k}).

В настоящей работе мы придерживаемся иного порядка действий. Так, в методе Гоша функция $S(t)$ сначала приближалась тригонометрическим полиномом вида

$$W_x(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p \leqslant x} \frac{\sin{(t \log p)}}{\sqrt{p}},$$

потом вычислялись четные моменты $S(t)$, которые использовались в дальнейшем для отыскания дробного момента $S(t)$. Теперь же мы сначала вычисляем дробный момент $W_x(t)$ (что и было сделано в гл. 1), а затем оцениваем разность между ним и дробным моментом $S(t)$. Таким образом, мы избегаем того накопления ошибки, о котором говорилось выше.

Поясним сказанное на примере вычисления первого момента. Представляя $S(t)$ в виде

$$W_y(t) + (W_x(t) - W_y(t)) + R(t),$$

где $R(t) = S(t) - W_x(t)$, $y < x$, несложно заключить, что суммы

$$\sum_n |S(t_n+0)| = \sum_n |\Delta(n)| \qquad \text{и} \qquad \sum_n |W_y(t_n)|$$

отличаются друг от друга не более чем на

$$\sum_n |W_x(t_n) - W_y(t_n)| + \sum_n |R(t_n+0)| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Восходящая к Сельбергу оценка $\Sigma_1 \ll M$ и цепочка очевидных неравенств

$$\Sigma_2^2 \leqslant M \sum_n \biggl| \sum_{y<p\leqslant x} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \biggr|^2 \ll M \sum_{y<p\leqslant x} \frac{1}{p} \ll M \log\left(\frac{\log x}{\log y}\right)$$

при выборе $y = \exp{(c \log x/\log\log N)}$ дают

$$\sum_n |\Delta(n)| = \sum_n |W_y(t_n)| + O(M\sqrt{\log\log\log N}).$$

Теоремы гл. 1 позволяют вычислить сумму по n в правой части, грубо говоря, с любой степенью точности. Ограничиваясь первыми двумя членами асимптотического разложения теоремы 1.2, находим

$$\sum_n |W_y(t_n)| = \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log N} + O\left(\frac{M}{(\log\log N)^{3/2}}\right),$$

$$\sum_n |\Delta(n)| = \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log N}\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log\log\log N}{\log\log N}}\right)\right).$$

Наконец, получение асимптотики функции распределения $\Phi(u)$ для достаточно больших значений u сделалось возможным благодаря недавней работе Радзивилла [30], который применил к $S(t)$ вероятностные методы, позволяющие исследовать так называемые большие уклонения для распределений, близких к нормальному.

Поясним сказанное. Рассмотрим для простоты классическую схему Бернулли. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – независимые случайные величины, принимающие с одинаковыми вероятностями (равными $1/2$) значения 0 и 1. Центральная предельная теорема утверждает, что при любом фиксированном x функция

$$F(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_N - N/2}{\sqrt{N}/2} \leqslant x\right\}$$

стремится к $G(x)$ при неограниченном возрастании N, или, что то же,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{F(x)}{G(x)} = 1. \tag{2.9}$$

В 1930-е годы появился ряд работ, в которых исследовался вопрос о том, насколько большим может быть x (как функция N), чтобы соотношение (2.9) по-прежнему имело место (см. [47] и перечисленные в этой работе статьи). В 1938 г. Крамер [47] создал общий метод, который, будучи применен к указанному частному случаю схемы Бернулли, позволил доказать, что (2.9) выполняется вплоть до $x = O(\sqrt{N}/\log N)$. Этот результат Крамера впоследствии неоднократно обобщался и уточнялся многими авторами. Одно из таких обобщений, принадлежащее Хвангу [48] и примененное к исследованию функции $S(t)$ Радзивиллом [30], используется и в настоящей работе.

С помощью теоремы Хванга удается доказать, что большие уклонения $\Delta(n)$ от среднего значения тоже подчинены нормальному закону, а также установить наличие очень большого числа номеров n, для которых $\Delta(n)$ составляет величину порядка $(\log\log n)^{1-\varepsilon}$ (что отвечает превышению среднего значения $\Delta(n)$, имеющего порядок $\sqrt{\log\log n}$, в $(\log\log n)^{0.5-\varepsilon}$ раз).

Параграф 2.1 посвящен оценке среднего значения разности между функцией $S(t)$ и приближающим ее полиномом $W_x(t)$. Все утверждения этого параграфа восходят к работе Сельберга [41]. Их доказательства приводятся здесь для того, чтобы, во-первых, учесть некоторые особенности, присущие дискретному случаю и короткому промежутку суммирования и, во-вторых, вычислить значения постоянных в каждом из используемых неравенств. Основным утверждением параграфа является лемма 2.7.

В параграфе 2.2 устанавливается связь между числами $\Delta(n)$ и функцией $S(t)$, выводится асимптотика четного и оценка нечетного моментов этих величин (теоремы 2.1 и 2.2).

Параграф 2.3 содержит доказательство асимптотики дробного момента $\Delta(n)$ (теорема 2.3), которое опирается на оценку точности приближения суммы $|x+y|^a$ величиной $|x|^a$ при нецелом a (лемма 2.11).

В параграфе 2.4 приведены две теоремы о функции распределения $\Phi(u)$. Первая опирается на метод Гоша и охватывает область малых $|u|$ (теорема 2.4), вторая использует упомянутый выше результат Хванга о больших уклонениях от нормального закона (теорема 2.5).

2.1. Приближение функции $S(t)$ специальными тригонометрическими полиномами

Цель настоящего параграфа – получить верхнюю оценку среднего значения разности между величиной $\Delta(n)$ и приближающим ее полиномом

$$W_x(t_n) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}}.$$

Все приведенные здесь утверждения являются дискретными аналогами лемм 12, 13 и теорем 2, 4 из работы Сельберга [41], которому принадлежат и методы их доказательства.

Лемма 2.1. *Пусть p пробегает простые числа промежутка $(1,x]$, $2\leqslant x\leqslant (N/\log N)^{1/(4k)}$, и пусть a_p – произвольная последовательность вещественных чисел. Пусть, далее,*

$$U_0(t)=\sum_{p\leqslant x}a_p p^{it},\qquad U_1(t)=\operatorname{Re}U_0(t),\qquad U_2(t)=\operatorname{Im}U_0(t).$$

Тогда, полагая

$$S_j=S_{j,k}=\sum_n |U_j(t_n)|^{2k},$$

при любом целом $k\geqslant 1$ будем иметь

$$S_0\leqslant k!M\mathfrak{s}_2^k + x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N,\qquad S_1,S_2\leqslant\frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{2^{2k}}\,\mathfrak{s}_2^k + x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N,$$

где

$$\mathfrak{s}_r=\sum_{p\leqslant x}|a_p|^r.$$

Доказательство. Оценивая S_0, получим

$$S_0=\sum_n\sum_{p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}a_{p_1}\cdots a_{p_k}a_{q_1}\cdots a_{q_k}\left(\frac{p_1\cdots p_k}{q_1\cdots q_k}\right)^{it_n}=M\Sigma_1+\Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1=\sum_{\substack{p_1\cdots p_k=q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}}a_{p_1}\cdots a_{p_k}a_{q_1}\cdots a_{q_k}=\sum_{\substack{p_1\cdots p_k=q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}}a_{p_1}^2\cdots a_{p_k}^2,$$

$$\Sigma_2=\sum_{\substack{p_1\cdots p_k\neq q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}}a_{p_1}\cdots a_{p_k}a_{q_1}\cdots a_{q_k}\sum_n\left(\frac{p_1\cdots p_k}{q_1\cdots q_k}\right)^{it_n}.$$

При фиксированных простых $p_1,\ldots,p_k$ число решений уравнения $p_1\cdots p_k=q_1\cdots q_k$ не превосходит $k!$. Следовательно,

$$\Sigma_1\leqslant k!\sum_{p_1,\ldots,p_k\leqslant x}a_{p_1}^2\cdots a_{p_k}^2=k!\,\mathfrak{s}_2^k.$$

Далее, применив к оценке Σ_2 лемму 1.2, будем иметь

$$|\Sigma_2|\leqslant\sum_{p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}|a_{p_1}\cdots a_{p_k}a_{q_1}\cdots a_{q_k}|\sqrt{p_1\cdots p_kq_1\cdots q_k}\,\log N\leqslant x^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N,$$

что и требовалось.

Пользуясь равенством $U_1 = (U_0 + \overline{U}_0)/2$, находим

$$S_1 = 2^{-2k} \sum_n (U_0(t_n) + \overline{U}_0(t_n))^{2k} = 2^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} u_\nu,$$

где

$$u_\nu = \sum_n U_0^\nu \overline{U}_0^{\,2k-\nu}(t_n) = \sum_n \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_\nu \leqslant x \\ q_1,\ldots,q_{2k-\nu} \leqslant x}} a_{p_1} \cdots a_{p_\nu} a_{q_1} \cdots a_{q_{2k-\nu}} \left(\frac{p_1 \cdots p_\nu}{q_1 \cdots q_{2k-\nu}} \right)^{it_n}.$$

Пользуясь леммой 1.2, в случае $\nu \neq k$ приходим к неравенствам

$$|u_\nu| \leqslant \log N \sum_{p_1,\ldots,p_\nu,q_1,\ldots,q_{2k-\nu} \leqslant x} |a_{p_1} \cdots a_{p_\nu} a_{q_1} \cdots a_{q_{2k-\nu}}| \sqrt{p_1 \cdots p_\nu q_1 \cdots q_{2k-\nu}} \leqslant x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N.$$

Точно так же оценивается и вклад в u_k от слагаемых, отвечающих условию $p_1 \cdots p_k \neq q_1 \cdots q_k$. Следовательно,

$$S_1 \leqslant 2^{-2k} \binom{2k}{k} M \Sigma_1 + 2^{-2k} \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} x^k \mathfrak{s}_1^k \log N \leqslant \frac{(2k)!}{k!} \frac{M}{2^{2k}} \mathfrak{s}_2^k + x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N.$$

Аналогично доказывается и оценка S_2. Лемма доказана.

Замечание 2.1. В частном случае $a_p = p^{-0.5}$ при $k \geqslant 2$ оценки сумм S_0, S_1 и S_2 можно несколько уточнить, опустив в неравенствах леммы слагаемые $x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N$.

Действительно, сумма Σ_1 имеет вид

$$\sum_{p_1,\ldots,p_k \leqslant x} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_s!} (p_1 \cdots p_k)^{-1},$$

где s – количество различных чисел в наборе $p_1, \ldots, p_k$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ – их кратности.

Пусть $q \leqslant x$ – простое число. Слагаемое, отвечающее набору $p_1 = \cdots = p_k = q$, входит в Σ_1 с коэффициентом $k!/k! = 1$. В то же время в выражении $k!\,s_2^k$ всякое такое слагаемое учитывается с коэффициентом $k!$. Следовательно,

$$\Sigma_1 \leqslant k!\,s_2^k - (k! - 1) \sum_{2 \leqslant q \leqslant x} \frac{1}{q^k} \leqslant k!\,s_2^k - \frac{k! - 1}{2^k}.$$

Для завершения доказательства осталось проверить, что

$$M \frac{k! - 1}{2^k} > x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N, \qquad 2^{-2k} \binom{2k}{k} M \frac{k! - 1}{2^k} > x^k \mathfrak{s}_1^{2k} \log N.$$

Но эти неравенства следуют из оценок

$$\binom{2k}{k}^{-1} 8^k x^k \mathfrak{s}_1^{2k} < (8x\mathfrak{s}_1^2)^k \leqslant \left(8x \frac{a^2 x}{(\log x)^2} \right)^k = \left(\frac{2ax\sqrt{2}}{\log x} \right)^{2k} < \frac{M}{\log N} \leqslant (k! - 1) \frac{M}{\log N},$$

в которых $a = 2.784$ – постоянная леммы I.3.

Замечание 2.2. Утверждение леммы остается в силе, если $U_0(t)$ заменить суммой вида

$$\sum_{p \leqslant x} a_p p^{2it},$$

суммы $U_1(t)$ и $U_2(t)$ – ее вещественной и мнимой частями, а величину x в условии леммы заменить величиной x^2.

Лемма 2.2. *Пусть $c > 0$, k – целое число, $1 \leqslant k \leqslant 0.1 \log M$, $18 \leqslant y \leqslant (0.2M/\log N)^{1/(3k)}$, и пусть последовательности вещественных чисел $a_1(p)$ и $a_2(p)$ подчинены условиям*

$$|a_1(p)| \leqslant c\frac{\log p}{\log y}, \qquad |a_2(p)| \leqslant c,$$

когда p пробегает простые числа промежутка $(2, y]$. Тогда для сумм S_1 и S_2,

$$S_1 = \sum_n \biggl|\sum_{p\leqslant y} \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}} p^{it_n}\biggr|^{2k}, \qquad S_2 = \sum_n \biggl|\sum_{p\leqslant y} \frac{a_2(p)}{p} p^{2it_n}\biggr|^{2k},$$

справедливы следующие оценки:

$$S_1 \leqslant 1.1(kc^2)^k M, \qquad S_2 \leqslant 1.1(0.5kc^2)^k M.$$

Доказательство. Замечая, что $y \leqslant (M/\log N)^{1/(3k)}$ и полагая $a_p = a(p)/\sqrt{p}$ в лемме 2.1, будем иметь:

$$S_1 \leqslant k!\, M\mathfrak{s}_2^k + y^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N.$$

Применяя неравенства (I.5) и (I.3) леммы I.3, находим

$$\mathfrak{s}_2 = \sum_{p\leqslant y}\frac{a_1^2(p)}{p} \leqslant \frac{c^2}{(\log y)^2}\sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{p} \leqslant \frac{c^2}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p} < c^2,$$
$$\mathfrak{s}_1 = \sum_{p\leqslant y}\frac{|a_1(p)|}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{c}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{\sqrt{p}} \leqslant c\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{ac\sqrt{y}}{\log y} \leqslant c\sqrt{y}$$

и, наконец,

$$y^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N < (cy)^{2k}\log N < 0.1c^{2k}M.$$

Таким образом,

$$S_1 \leqslant k!\, Mc^{2k} + 0.1c^{2k}M \leqslant 1.1(kc^2)^k M.$$

Далее, в силу той же леммы I.3, примененной ко второй сумме, получаем неравенство

$$S_2 \leqslant k!\, M\mathfrak{s}_2^k + y^k\mathfrak{s}_1^{2k}\log N,$$

в котором

$$\mathfrak{s}_2 = \sum_{p\leqslant y}\frac{a_2^2(p)}{p^2} \leqslant c^2\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^2} < 0.5c^2,$$
$$\mathfrak{s}_1 = \sum_{p\leqslant y}\frac{|a_2(p)|}{p} \leqslant c\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p} \leqslant c(\log\log y + 1) < c\sqrt{\frac{y}{2}}\,.$$

Следовательно,

$$S_2 \leqslant k!(0.5c^2)^k M + \left(c\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^{2k}\log N \leqslant k!(0.5c^2)^k M + 0.1(0.5c^2)^k M \leqslant 1.1(0.5c^2k)^k M.$$

Лемма доказана.

Пусть $2 \leqslant x \leqslant t^2$. Следуя Сельбергу [41], положим

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2\max\left(\left|\beta - \frac{1}{2}\right|, \frac{1}{\log x}\right),$$

где максимум берется по всем нулям $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, удовлетворяющим условию

$$|t - \gamma| \leqslant \frac{x^{3|\beta-1/2|}}{\log x}.$$

Положим, наконец, $X = N^{0.1\varepsilon}$.

Лемма 2.3. *Пусть $\nu \geqslant 0$ – целое число, $x \geqslant 2$, $y \geqslant 1$, $x^3y^2 \leqslant X$. Тогда имеет место оценка*

$$\sum_n \left(\sigma_{x,t_n} - \frac{1}{2}\right)^\nu y^{\sigma_{x,t_n}-1/2} < \left(\frac{2}{\log x}\right)^\nu M\left(e^{2\log y/\log x} + 52.1\nu!\,\frac{\log N}{\log x}\left(\frac{\log x}{\log X}\right)^\nu\right).$$

Доказательство. Все числа n, $N < n \leqslant N + M$, разобьем на два класса, относя к первому из них те, для которых любой нуль $\beta + i\gamma$, удовлетворяющий условию

$$|t_n - \gamma| \leqslant \frac{x^{3|\beta-1/2|}}{\log x},$$

удовлетворяет также и неравенству $|\beta - 1/2| \leqslant 1/\log x$. Все остальные числа n отнесем ко второму классу. Тогда сумма V_1 по всем n из первого класса не превзойдет величины

$$\left(\frac{2}{\log x}\right)^\nu y^{2/\log x} M = \left(\frac{2}{\log x}\right)^\nu M e^{2\log y/\log x}.$$

Далее, для всякой точки t_n, отвечающей значению n из второго класса, найдется нуль $\beta_0 + i\gamma_0$, удовлетворяющий условию

$$\gamma_0 - \delta_0 \leqslant t_n \leqslant \gamma_0 + \delta_0, \qquad \delta_0 = \frac{x^{3|\beta_0-1/2|}}{\log x} < \sqrt{X},$$

и такой, что $|\beta_0 - 1/2| > 1/\log x$. Следовательно, все такие точки Грама t_n будут покрыты, если каждую из ординат γ промежутка

$$(T - \sqrt{X}, T + H + \sqrt{X}], \qquad T = t_N, \quad H = t_{N+M} - t_N,$$

окружить окрестностью $(\gamma - \delta, \gamma + \delta)$, где $\delta = x^{3|\beta-1/2|}/\log x$. Так, для суммы V_2 по числам n из второго класса получим неравенство

$$V_2 \leqslant 2 \sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{X} \\ \beta>1/2}} \ \sum_{\gamma-\delta\leqslant t_n\leqslant\gamma+\delta} 2^\nu \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^\nu y^{2(\beta-1/2)}$$

(множитель 2 позволяет учесть симметрию нулей $\zeta(s)$ относительно критической прямой).

Пусть $t_{k+1}, \ldots, t_{k+r}$ – все точки Грама, попавшие на отрезок $[\gamma - \delta, \gamma + \delta]$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа при некотором η, $\gamma - \delta < \eta < \gamma + \delta$, имеем

$$r = \pi^{-1}(\vartheta(t_{k+r}) - \vartheta(t_{k+1})) + 1 = \pi^{-1}(t_{k+r} - t_{k+1})\vartheta'(\eta) + 1 < \frac{\delta}{\pi}\log N = \frac{\log N}{\pi\log x}\,x^{3(\beta-1/2)}.$$

Следовательно,

$$V_2 < \frac{2^{\nu+1}}{\pi}\frac{\log N}{\log x} \sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+\sqrt{X}+H \\ \beta>1/2}} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^\nu (x^3y^2)^{\beta-1/2}.$$

Пользуясь тождеством

$$\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^{\nu} z^{\beta-1/2} = \int_0^{\beta-1/2} (u^{\nu}\log z + \nu u^{\nu-1}) z^u\,du$$

и оценкой $x^3y^2 \leqslant X$, получим

$$V_2 < \frac{2^{\nu+1}}{\pi}\frac{\log N}{\log x}\sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{X}\\ \beta>1/2}}\int_0^{\beta-1/2}(u^{\nu}\log X + \nu u^{\nu-1})X^u\,du$$
$$= \frac{2^{\nu+1}}{\pi}\frac{\log N}{\log x}\int_0^{1/2}(u^{\nu}\log X + \nu u^{\nu-1})X^u \sum_{\substack{T-\sqrt{X}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{X}\\ \beta>1/2}} g(\beta+i\gamma;u)\,du,$$

где

$$g(\beta+i\gamma;u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0\leqslant u\leqslant \beta-\dfrac{1}{2},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Но сумма по γ под знаком интеграла совпадает с величиной

$$N\left(\frac{1}{2}+u, T+H+\sqrt{X}\right) - N\left(\frac{1}{2}+u, T-\sqrt{X}\right),$$

которая в силу леммы I.4 и формулы Римана–Мангольдта не превосходит суммы

$$\left\{N\left(\frac{1}{2}+u, T+H\right) - N\left(\frac{1}{2}+u, T\right)\right\}$$
$$+ \{N(T+H+\sqrt{X}\,) - N(T+H)\} + \{N(T) - N(T-\sqrt{X}\,)\}$$
$$\leqslant \frac{13}{2}HX^{-2u}\log(T+0.5H) + \frac{1}{3}\sqrt{X}\log N$$
$$< 13\pi MX^{-2u}(1+o(1)) + \frac{1}{3}\sqrt{X}\log N < 13\pi MX^{-2u}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$V_2 < \frac{2^{\nu+1}}{\pi}\frac{\log N}{\log x}13\pi M(1+o(1))\int_0^{+\infty}(u^{\nu}\log X + \nu u^{\nu-1})X^u\cdot X^{-2u}\,du$$
$$= 26(1+o(1))2\nu!\cdot M\frac{\log N}{\log x}\left(\frac{2}{\log X}\right)^{\nu} < 52.01M\nu!\left(\frac{2}{\log X}\right)^{\nu}\frac{\log N}{\log x}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $n\geqslant 2$ – целое число, $x\geqslant 2$. Положим

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1\leqslant n\leqslant x,\\ \Lambda(n)\dfrac{\log^2(x^3/n) - 2\log^2(x^2/n)}{2\log^2 x}, & \text{если } x<n\leqslant x^2,\\ \Lambda(n)\dfrac{\log^2(x^3/n)}{2\log^2 x}, & \text{если } x^2<n\leqslant x^3.\end{cases}$$

Лемма 2.4. *Пусть* $e^{16} \leqslant x \leqslant t^{\delta}$, $250\delta = 1$. *Тогда*

$$S(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\sin(t \log m)}{\log m} + \theta\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)\left(a_1 \log t + a_2 \left| \sum_{p \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}} \right|\right), \tag{2.10}$$

где $a_1 = 4.5$, $a_2 = 8.54$.

Доказательство. Пусть $R(t)$ – разность между $S(t)$ и суммой по m в правой части (2.10). Согласно лемме I.6 имеем

$$\pi|R(t)| \leqslant \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)\left(a_1^{(1)} \log t + a_2^{(1)}|r(x,t)| + a_3^{(1)} + \sum_{\varrho} \frac{\kappa(\varrho)}{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2 + (t-\gamma)^2}\right),$$

где

$$a_1^{(1)} = \frac{13}{6e} + 1.8, \qquad a_2^{(1)} = \frac{13}{3e} + 2.6, \qquad a_3^{(1)} = \frac{52}{3e} + 10.82,$$

$$r(x,t) = \sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}, \qquad \kappa(\varrho) = \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t-\gamma| \cdot |\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta|}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2}\, d\sigma.$$

В силу той же леммы I.6 в случае $|\beta - 1/2| > (1/2)(\sigma_{x,t} - 1/2)$ интеграл $\kappa(\varrho)$ удовлетворяет неравенству

$$\kappa(\varrho) < 2\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right).$$

Пусть $|\beta - 1/2| \leqslant (1/2)(\sigma_{x,t} - 1/2)$. Тогда, замечая, что $|\sigma_{x,t} - \beta| \leqslant (3/2)(\sigma_{x,t} - 1/2)$, получим

$$\begin{aligned}
\kappa(\varrho) &\leqslant \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t-\gamma|(|\sigma_{x,t} - \beta| + |\sigma - \beta|)}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2}\, d\sigma \\
&\leqslant \frac{3}{2}\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t-\gamma|\, d\sigma}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} + \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t-\gamma| \cdot |\sigma - \beta|}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2}\, d\sigma \\
&\leqslant \frac{3\pi}{2}\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой I.5, будем иметь

$$\pi|R(t)| \leqslant \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)(a_1^{(2)} \log t + a_2^{(2)}|r(x,t)| + a_3^{(2)}),$$

где

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + \frac{13}{12}(3\pi + 1), \qquad a_2^{(2)} = a_2^{(1)} + \frac{13}{6}(3\pi + 1), \qquad a_3^{(2)} = a_3^{(1)} + \frac{13}{2}(3\pi + 1).$$

Из определения величины $\Lambda_x(m)$ и асимптотического закона распределения простых чисел находим

$$|r(x,t)| \leqslant \left| \sum_{p \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}} \right| + \sum_{p^2 \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p^2)}{p} + \sum_{r \geqslant 3} \sum_{p^r \leqslant x^3} \frac{\log p}{p^{r/2}} \leqslant \left| \sum_{p \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}} \right| + 2 \log x.$$

Замечая, наконец, что

$$a_1^{(2)} \log t + 2a_2^{(2)} \log x + a_3^{(2)} < 4.5\pi \log t \qquad \text{при} \quad x \leqslant t^{\delta}, \quad t \geqslant e^{16/\delta},$$

приходим к утверждению леммы.

Лемма 2.5. *Пусть k – целое число, $1\leqslant k\leqslant c\log X$, где c – достаточно малая абсолютная постоянная, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_n\biggl|S(t_n+0)+\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\biggr|^{2k} < \frac{100.4}{\varepsilon}\biggl(\frac{1440k}{\varepsilon}\biggr)^{2k}M.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 2.4 и неравенством $\log t_N<\log N$, заключаем, что исходная сумма не превосходит величины

$$2^{2k-1}((a_1\log N)^{2k}\Sigma_1 + a_2^{2k}\Sigma_2),$$

где

$$\Sigma_2 = \sum_n\biggl(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\biggr)^{2k},\qquad \Sigma_1 = \sum_n\biggl(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\biggr)^{2k}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t_n}+it_n}}\biggr|^{2k}.$$

Согласно лемме 2.3

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \biggl(\frac{2}{\log x}\biggr)^{2k}M\biggl(1+\frac{521\varepsilon^{-1}(2k)!}{(8k+3)^{2k-1}}\biggr) < \frac{94.8}{\varepsilon}\biggl(\frac{2}{\log x}\biggr)^{2k}M\\ &= \frac{94.8}{\varepsilon}\biggl(\frac{160k}{\varepsilon}\biggr)^{2k}\frac{(1+3/8k)^{2k}}{(\log N)^{2k}}M < \frac{94.8e^{3/4}}{\varepsilon}\biggl(\frac{160k}{\varepsilon\log N}\biggr)^{2k}M < \frac{200.7}{\varepsilon}\biggl(\frac{160k}{\varepsilon\log N}\biggr)^{2k}M.\end{aligned}$$

Преобразуя далее сумму по $p\leqslant x^3$ и следуя при этом рассуждениям Сельберга из [41], получим

$$\begin{aligned}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\biggr| &\leqslant \biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}p^{it}\biggr| + \biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}(1-p^{1/2-\sigma_{x,t}})p^{it}\biggr|\\ &\leqslant \biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}p^{it}\biggr| + \frac{x^{\sigma_{x,t}-1/2}}{\log x}\int_0^{+\infty}x^{-v}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{1/2+v+it}}\biggr|\,dv.\end{aligned}$$

Далее, дважды применяя неравенство Гёльдера, находим

$$\begin{aligned}&\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\biggr|^{2k}\\ &\quad\leqslant 2^{2k-1}\Biggl(\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}p^{it}\biggr|^{2k}\\ &\qquad+\frac{x^{2k(\sigma_{x,t}-1/2)}}{(\log x)^{2k}}\biggl(\int_0^{+\infty}x^{-v}\,dv\biggr)^{2k-1}\int_0^{+\infty}x^{-v}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{1/2+v+it}}\biggr|^{2k}dv\Biggr).\end{aligned}$$

Переходя к оценке суммы Σ_2, получим

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &< 2^{2k-1}\Biggl(\sum_n\biggl(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\biggr)^{2k}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p}}p^{it_n}\biggr|^{2k}\\ &\quad+\frac{1}{(\log x)^{4k-1}}\int_0^{+\infty}x^{-v}\sum_n\biggl(\sigma_{x,t_n}-\frac{1}{2}\biggr)^{2k}x^{2k(\sigma_{x,t_n}-1/2)}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{1/2+v+it_n}}\biggr|^{2k}dv\Biggr).\end{aligned}$$

Положим теперь

$$a_1(p)=\frac{\Lambda_x(p)}{\log x},\qquad a_2(p)=\frac{\Lambda_x(p)(\log p)(\log xp)}{p^{v_0}(\log x)^3},$$

где v_0 – то значение $v \geqslant 0$, при котором сумма по n, стоящая в последнем неравенстве под знаком интеграла, достигает наибольшего значения. Тогда

$$\Sigma_2 < \frac{1}{2}(2\log x)^{2k}(\Sigma_3 + \Sigma_4),$$

где

$$\Sigma_3 = \sum_n \left(\sigma_{x,t_n} - \frac{1}{2}\right)^{2k} \left|\sum_{p \leqslant x^3} \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it_n}\right|^{2k},$$

$$\Sigma_4 = \sum_n \left(\sigma_{x,t_n} - \frac{1}{2}\right)^{2k} x^{2k(\sigma_{x,t_n}-1/2)} \left|\sum_{p \leqslant x^3} \frac{a_2(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it_n}\right|^{2k}.$$

Применив к каждой из сумм Σ_3, Σ_4 неравенство Коши, будем иметь

$$\Sigma_3 \leqslant (\Sigma_5\Sigma_7)^{1/2}, \qquad \Sigma_4 \leqslant (\Sigma_6\Sigma_8)^{1/2},$$

где

$$\Sigma_5 = \sum_n \left(\sigma_{x,t_n} - \frac{1}{2}\right)^{4k}, \qquad \Sigma_6 = \sum_n \left(\sigma_{x,t_n} - \frac{1}{2}\right)^{4k} x^{2k(\sigma_{x,t_n}-1/2)},$$

$$\Sigma_7,\ \Sigma_8 = \sum_n \left|\sum_{p \leqslant x^3} \frac{a_j(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it_n}\right|^{4k}, \qquad j = 1, 2.$$

Оценивая суммы Σ_5, Σ_6 с помощью леммы 2.3, находим

$$\Sigma_5 < \left(\frac{2}{\log x}\right)^{4k} M\left(1 + \frac{521\varepsilon^{-1}(4k)!}{(8k+3)^{4k-1}}\right) < \frac{9.4M}{\varepsilon}\left(\frac{2}{\log x}\right)^{4k},$$

$$\Sigma_6 < \left(\frac{2}{\log x}\right)^{4k} M\left(e^{8k} + \frac{521\varepsilon^{-1}(4k)!}{(8k+3)^{4k-1}}\right) < \frac{M}{240\varepsilon}\left(\frac{2e^2}{\log x}\right)^{4k}.$$

Далее, полагая $p = x^\lambda$, будем иметь

$$a_1(p) = \varphi_1(\lambda)\frac{\log p}{\log(x^3)}, \qquad a_2(p) = \varphi_2(\lambda)\frac{\log p}{\log(x^3)},$$

где

$$\varphi_1(\lambda) = \begin{cases} 3, & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ \dfrac{3}{2}(1 + 2\lambda - \lambda^2), & \text{если } 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, \\ \dfrac{3}{2}(\lambda - 3)^2, & \text{если } 2 \leqslant \lambda \leqslant 3, \end{cases} \qquad \varphi_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1)\varphi_1(\lambda).$$

Несложно теперь проверить, что

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 3} \varphi_1(\lambda) = \varphi_1(1) = 3, \qquad \max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 3} \varphi_2(\lambda) = \varphi_2(\lambda_0) = 3a,$$

где $a = 3.446\,088\,218\ldots$, $\lambda_0 = 1.711\,668\,606\ldots$. Поэтому, применяя к суммам Σ_7, Σ_8 лемму 2.2, получим

$$\Sigma_7 \leqslant 1.1(3^2 \cdot 2k)^{2k} M, \qquad \Sigma_8 \leqslant 1.1(9a^2 \cdot 2k)^{2k} M.$$

Таким образом,

$$\Sigma_3 \leqslant \frac{3.3}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{M}{(\log x)^{2k}}(72k)^k, \qquad \Sigma_4 \leqslant \frac{0.07}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{M}{(\log x)^{2k}}(72e^4a^2k)^k, \qquad \Sigma_2 \leqslant \frac{M}{25\sqrt{\varepsilon}}(288e^4a^2k)^k.$$

Следовательно, исходная сумма не превосходит

$$\frac{M}{2}\left(\frac{200.7}{\varepsilon}\left(\frac{2a_1\cdot 160k}{\varepsilon}\right)^{2k}+\frac{1}{25\sqrt{\varepsilon}}(a_2^2\cdot 288e^4a^2k)^k\right)$$
$$<\frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{320a_1k}{\varepsilon}\right)^{2k}M=\frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k}M.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Если выполнены условия леммы 2.5, то имеет место неравенств*

$$\sum_n\left|\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}-\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}<\frac{M}{8\varepsilon}(1152e^4k)^k. \tag{2.11}$$

Доказательство. Обозначим через $R(t)$ величину, которая получается из разности, стоящей в (2.11) под знаком модуля, заменой t_n на t. Тогда имеет место тождество

$$R(t)=\sum_{x<p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\log p}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}+\frac{1}{2}\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}\frac{\sin(2t\log p)}{p}$$
$$-\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\log p}(1-p^{1/2-\sigma_{x,t}})\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}-\frac{1}{2}\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}(1-p^{1-2\sigma_{x,t}})\frac{\sin(2t\log p)}{p}$$
$$+\sum_{r\geqslant 3}\sum_{p^r\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^r)}{p^{r\sigma_{x,t}}}\frac{\sin(rt\log p)}{r\log p}.$$

Из неравенств $0\leqslant 1-p^{1-2\sigma_{x,t}}\leqslant 2(\sigma_{x,t}-1/2)\log p$ следует, что вклад в $R(t)$ двух последних сумм не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{1}{2}\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}2\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\frac{\log p}{p}+\sum_p\sum_{r\geqslant 3}\frac{1}{rp^{r/2}}$$
$$\leqslant\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\sum_{p^2\leqslant x^3}\frac{\log p}{p}+\frac{3}{5}<2\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x.$$

Таким образом,

$$|R(t)|\leqslant\sum_{j=1}^4 R_j(t),$$

где

$$R_1(t)=\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}p^{it}\right|,\qquad R_2(t)=\frac{1}{2}\left|\sum_{p\leqslant x^{3/2}}\frac{a_2(p)}{p}p^{2it}\right|,$$
$$R_3(t)=\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{\log p}\left(1-p^{1/2-\sigma_{x,t}}\right)\frac{p^{it}}{\sqrt{p}}\right|,\qquad R_4(t)=2\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x$$

и

$$a_1(p)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad p\leqslant x,\\ \dfrac{\Lambda_x(p)}{\log p}, & \text{если } x<p\leqslant x^3,\end{cases}\qquad a_2(p)=\frac{\Lambda_x(p^2)}{\log p}.$$

Согласно неравенству Гёльдера сумма из условия леммы не превзойдет

$$4^{2k-1}(\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4),\qquad \Sigma_j=\sum_n R_j^{2k}(t_n).$$

Оценим каждую из сумм Σ_j. Прежде всего, замечая, что

$$|a_1(p)| \leqslant \frac{3\log p}{\log{(x^3)}}\,, \qquad |a_2(p)| \leqslant 1,$$

и пользуясь леммой 2.2, найдем

$$\Sigma_1 < 1.1M(3^2k)^k, \qquad \Sigma_2 < 1.1M(0.5k)^k.$$

Далее, пользуясь оценкой

$$|R_3(t)| \leqslant \frac{x^{\sigma_{x,t}-1/2}}{\log x}\int_0^{\infty} x^{-v}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log xp)}{p^{1/2+v}}\,p^{it}\biggr|\,dv$$

из работы Сельберга [41] с учетом неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &\leqslant \frac{1}{(\log x)^{4k-1}}\int_0^{+\infty} x^{-v}\sum_n x^{2k(\sigma_{x,t_n}-1/2)}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)(\log xp)}{p^{1/2+v}}\,p^{it_n}\biggr|^{2k}dv\\ &\leqslant \sum_n x^{2k(\sigma_{x,t_n}-1/2)}\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it_n}\biggr|^{2k},\end{aligned}$$

где

$$a_3(p) = \frac{\Lambda_x(p)(\log xp)}{p^{v_0}(\log x)^2}\,,$$

а v_0 – то значение $v \geqslant 0$, при котором сумма по n под знаком интеграла принимает наибольшее значение. Применив неравенство Коши, найдем

$$\Sigma_3 \leqslant (\Sigma_5\,\Sigma_6)^{1/2}, \qquad \Sigma_5 = \sum_n x^{4k(\sigma_{x,t_n}-1/2)}, \qquad \Sigma_6 = \sum_n\biggl|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it_n}\biggr|^{4k}.$$

В силу леммы 2.3 имеем

$$\Sigma_5 < M\biggl(e^{8k} + 52.1\,\frac{\log N}{\log x}\biggr) < \frac{2M}{\varepsilon}\,e^{8k}.$$

Далее, замечая, что

$$|a_3(p)| \leqslant \frac{\Lambda_x(p)\log xp}{(\log x)^2} \leqslant \frac{6\log p}{\log{(x^3)}}\,,$$

с помощью леммы 2.2 получаем оценку $\Sigma_6 < 1.1M(6^2\cdot 2k)^{2k}$. Следовательно,

$$\Sigma_3 < \frac{1.5}{\sqrt{\varepsilon}}(72e^4k)^kM.$$

Наконец, применив лемму 2.3 к оценке Σ_4, найдем

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &< (2\log x)^{2k}\biggl(\frac{2}{\log x}\biggr)^{2k}M\biggl(1 + 52.1(2k)!\,\frac{\log N}{\log x}\biggl(\frac{\log x}{\log X}\biggr)^{2k}\biggr)\\ &< 4^{2k}M\biggl(1 + \frac{521\varepsilon^{-1}\,(2k)!}{(8k+3)^{2k-1}}\biggr) < \frac{94.8M}{\varepsilon}\,16^k.\end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке исходной суммы, будем иметь

$$\begin{aligned}&4^{2k-1}(\Sigma_1 + \cdots + \Sigma_4)\\ &\quad< 4^{2k-1}M\biggl(1.1(9k)^k + 1.1(0.5k)^k + \frac{1.5}{\sqrt{\varepsilon}}(72e^4k)^k + 16^k\cdot\frac{94.8}{\varepsilon}\biggr) < \frac{M}{8\varepsilon}(1152e^4k)^k.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Если выполнены условия леммы 2.5, то имеет место неравенство*

$$\sum_n \left| S(t_n+0) + \frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k} < \frac{c_0}{57}(c_0k)^{2k}M,$$

где $c_0 = 2880\varepsilon^{-1}$.

Доказательство. Воспользовавшись оценками лемм 2.4 и 2.5 и неравенством Гёльдера, заключаем, что исходная сумма не превосходит

$$\sum_n \Bigg| S(t_n+0) + \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}$$
$$- \frac{1}{\pi}\Bigg(\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}} - \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\Bigg)\Bigg|^{2k}$$
$$\leqslant 2^{2k-1}\Bigg(\sum_n\Bigg| S(t_n+0) + \frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\Bigg|^{2k}$$
$$+ \pi^{-2k}\sum_n\Bigg|\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t_n\log p)}{\sqrt{p}} - \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}}\frac{\sin(t_n\log m)}{\log m}\Bigg|^{2k}\Bigg)$$
$$\leqslant 2^{2k-1}M\left(\frac{100.4}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k} + \frac{1}{8\varepsilon}\left(\frac{1152e^4k}{\pi^2}\right)^k\right) < \frac{50.3}{\varepsilon}\left(\frac{2880k}{\varepsilon}\right)^{2k}M.$$

Лемма доказана.

2.2. Моменты величин $\Delta(n)$ с целым показателем

В этом параграфе вычисляется четный момент и оценивается сверху модуль нечетного момента величин $\Delta(n)$. Особенностью приводимых ниже рассуждений является то, что отказ от использования неравенства Гёльдера при работе с суммой

$$\sum_n |R(t_n+0)|(|\Delta(n)| + |R(t_n+0)|)^{2k-1}$$

приводит к более точной (по параметру k) ее оценке.

Лемма 2.8. *При любом n имеет место равенство* $\Delta(n) = S(t_n+0)$.

Доказательство. Согласно формуле Римана–Мангольдта

$$N(t) = \frac{1}{\pi}\vartheta(t) + 1 + S(t).$$

Беря $t = t_n + h$ и предполагая, что $\gamma_m \leqslant t_n < \gamma_{m+1}$, при $h \to +0$ получим

$$m = N(t_n+0) = \frac{1}{\pi}\vartheta(t_n) + 1 + S(t_n+0) = n + S(t_n+0),$$

откуда $S(t_n+0) = m - n = \Delta(n)$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *При любом $k \geqslant 1$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{C}_k = \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k\\ p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x}} (p_1\cdots p_kq_1\cdots q_k)^{-1} = k!\left(\mathfrak{S}_1^k - \frac{\theta}{4}k^2\mathfrak{S}_1^{k-2}\right),$$

где $\theta = 0$ при $k = 1$ и $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ при $k \geqslant 2$.

Доказательство. Если $k=1$, то утверждение очевидно. При $k \geqslant 2$ искомое соотношение будет следовать из неравенств

$$k!\left(\mathfrak{S}_1^k - \frac{k^2}{4}\mathfrak{S}_1^{k-2}\right) \leqslant \mathfrak{C}_k \leqslant k!\,\mathfrak{S}_1^k.$$

Верхняя оценка $\mathfrak{C}_k$ получается из утверждения 2) леммы 1.17 и равенства леммы 1.15. Чтобы доказать нижнюю оценку, заметим, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_k &\geqslant \sum_{\substack{p_1\cdots p_k = q_1\cdots q_k\\ \text{все числа } p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k\leqslant x \text{ различны}}} (p_1\cdots p_k q_1\cdots q_k)^{-1}\\ &= k!\sum_{\text{все числа } p_1,\ldots,p_k\leqslant x \text{ различны}} (p_1\cdots p_k)^{-1}\\ &= k!\left\{\sum_{p_1,\ldots,p_k\leqslant x}(p_1\cdots p_k)^{-1} - {\sum_{p_1,\ldots,p_k\leqslant x}}'(p_1\cdots p_k)^{-1}\right\},\end{aligned}$$

где штрих означает суммирование по всем наборам $(p_1,\ldots,p_k)$, которые содержат по крайней мере два одинаковых числа. Зафиксируем теперь произвольный набор $(p_1,\ldots,p_{k-2})$ и простое число $p \leqslant x$. Количество наборов длины k, которые получаются из $(p_1,\ldots,p_{k-2})$ двукратным приписыванием числа p, равно $\binom{k}{2} < k^2/2$. Следовательно,

$${\sum_{p_1,\ldots,p_k\leqslant x}}'(p_1\cdots p_k)^{-1} < \frac{k^2}{2}\sum_{p_1,\ldots,p_{k-2}\leqslant x}(p_1\cdots p_{k-2})^{-1}\sum_{p\leqslant x}p^{-2} < \frac{k^2}{4}\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^{k-2} = \frac{k^2}{4}\mathfrak{S}_1^{k-2}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{C}_k \geqslant k!\left(\mathfrak{S}_1^k - \frac{k^2}{4}\mathfrak{S}_1^{k-2}\right).$$

Лемма доказана.

Для упрощения записи некоторых формул будем использовать обозначение $L = \log\log N$.

Наряду с разложением теоремы 2.1 для четного момента $W(t_n)$ нам потребуется упрощенный вариант этой формулы, более удобный для верхней оценки.

Лемма 2.10. *Пусть k – целое число, $1 \leqslant k \leqslant L/\log L$, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_n W^{2k}(t_n) = \frac{(2k)!}{k!}\frac{ML^k}{2^{2k}}\left(1 - 1.9\theta\frac{k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon}\right),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Доказательство. В силу леммы 1.4 исходная сумма равна

$$\binom{2k}{k}\frac{M}{2^{2k}}\mathfrak{C}_k + x^{2k}\theta\log N.$$

Согласно лемме 2.9

$$\mathfrak{C}_k = k!\left(\mathfrak{S}_1^k - \frac{k^2}{4}\theta\mathfrak{S}_1^{k-2}\right).$$

Воспользуемся теперь формулой (I.2) леммы I.3; получим

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = L + c - \log\frac{10(8k+3)}{\varepsilon} + \frac{\theta_1}{(\log x)^2},$$

где $c = 0.261497\ldots$, $-0.5 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$. Поскольку $0 < \varepsilon < 10^{-3}$, несложно проверить, что

$$11.28 < \log\frac{80k}{\varepsilon} < \log\frac{10(8k+3)}{\varepsilon} < \log\frac{110k}{\varepsilon} < 1.7\log\frac{k}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{S}_1 < L + 0.27 - 11.28 + \frac{1}{(\log x)^2} < L,$$
$$\mathfrak{S}_1 > L + 0.26 - \log\frac{110k}{\varepsilon} - \frac{0.5}{(\log x)^2} > L - 1.7\log\frac{k}{\varepsilon},$$

откуда

$$\mathfrak{S}_1 = L - 1.7\theta_2\log\frac{k}{\varepsilon}$$

(здесь и ниже $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$). Далее, в силу формулы конечных приращений имеем

$$\mathfrak{S}_1^k = L^k - 1.7\theta_3 k\left(\log\frac{k}{\varepsilon}\right)L^{k-1},$$

так что

$$\mathfrak{S}_1^k - \theta_4\frac{k^2}{4}\mathfrak{S}_1^{k-2} = L^k\left\{1 - \theta_5\left(\frac{1.7k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon} + \frac{k^2}{4L^2}\right)\right\} = L^k\left\{1 - \frac{1.7\theta_6 k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon}\right\}.$$

Утверждение леммы следует теперь из последнего равенства.

Следствие 2.1. *При любом целом k, $1 \leqslant k \leqslant L/\log L$, имеет место оценка*

$$\sum_n W^{2k}(t_n) \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\frac{ML^k}{2^{2k}}.$$

Теорема 2.1. *Пусть k – целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$, где $c_1 = (1/c_0)(7\pi^2/4)^{1/3}$. Тогда имеет место формула*

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = \frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi)^{2k}}(\log\log N)^k\left(1 + \frac{2.4\theta(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\log\log N}}\right). \tag{2.12}$$

Доказательство. Положим

$$x = X^{1/(8k+3)}, \qquad W(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \qquad U(t) = -\sum_{p\leqslant x}\frac{p^{it}}{\sqrt{p}},$$

так что

$$W(t) = \frac{1}{2\pi i}(U(t) - \overline{U}(t)), \qquad R(t) = S(t) + R(t).$$

В силу леммы 2.8 сумма из условия может быть записана в виде

$$\sum_n (W(t_n) - R(t_n+0))^{2k} = \sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}v_\nu, \qquad v_\nu = \sum_n W^{2k-\nu}(t_n)R^\nu(t_n+0).$$

Согласно лемме 2.10

$$v_0 = \sum_n W^{2k}(t_n) = \mathcal{L}_k\left(1 - 1.9\theta_1\frac{k}{L}\log\frac{k}{\varepsilon}\right),$$

где для краткости положено

$$\mathcal{L}_k = \frac{(2k)!}{k!} \frac{ML^k}{(2\pi)^{2k}}.$$

Воспользовавшись оценкой $v_0 < \mathcal{L}_k$ из следствия леммы 2.10 и неравенством Гёльдера, при любом ν, $1 \leqslant \nu \leqslant 2k$, получаем

$$|v_\nu| \leqslant \left(\sum_n W^{2k}(t_n)\right)^{1-\nu/2k} \left(\sum_n R^{2k}(t_n+0)\right)^{\nu/2k} < \mathcal{L}_k^{1-\nu/2k} \left(\frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k} M\right)^{\nu/2k} = \mathcal{L}_k \delta_\nu,$$

где

$$\delta_\nu = \left\{\frac{(2\pi)^{2k} k!}{(2k)!} \frac{c_0}{18} (c_0k)^{2k}\right\}^{\nu/2k} L^{-\nu/2} < \left\{(2\pi)^{2k} \frac{2}{e} \left(\frac{e}{4k}\right)^k \frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k}\right\}^{\nu/2k} L^{-\nu/2}$$
$$\leqslant \left\{\left(\frac{c_0}{28e}\right)^{1/k} \frac{\pi^2 e c_0^2 k}{L}\right\}^{\nu/2} \leqslant \left\{\frac{\pi^2}{28} \frac{c_0^3 k}{L}\right\}^{\nu/2}.$$

Следовательно,

$$\binom{2k}{\nu} \delta_\nu \leqslant (2k)^\nu \delta_\nu \leqslant \left\{\frac{\pi^2}{7} \frac{(c_0k)^3}{L}\right\}^{\nu/2}.$$

Замечая, что выражение в фигурных скобках не превосходит $1/4$, находим

$$\left|\sum_{\nu=1}^{2k} (-1)^\nu \binom{2k}{\nu} v_\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{2k} \mathcal{L}_k \binom{2k}{\nu} \delta_\nu < 2\mathcal{L}_k \left\{\frac{4\pi^2}{7} \frac{(c_0k)^3}{L}\right\}^{1/2} = \mathcal{L}_k \frac{2\pi}{\sqrt{7}} \frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}},$$

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = v_0 + \theta \mathcal{L}_k \frac{2\pi}{\sqrt{7}} \frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}}.$$

Заменяя v_0 выражением (2.12), получим

$$\sum_n \Delta^{2k}(n) = \mathcal{L}_k (1 + \theta\delta),$$

где

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{7}} \frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}} + \frac{1.9k}{L} \log\frac{k}{\varepsilon} < \frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{7}} + \frac{1.9 \cdot 2880^{-1.5}\varepsilon}{\sqrt{kL}} \frac{\log(k/\varepsilon)}{\sqrt{k/\varepsilon}}\right)$$
$$< \frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{7}} + \frac{10^{-8}}{\sqrt{L}}\right) < 2.4 \frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть k – целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\sum_n \Delta^{2k-1}(n)\right| < \frac{c_0^{3/2}}{3} \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{M}{(2\pi)^{2k-2}} (\log\log N)^{k-1}.$$

Доказательство. Пользуясь обозначениями теоремы 2.1, находим

$$\left|\sum_n \Delta^{2k-1}(n)\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{\nu} |w_\nu|, \qquad w_\nu = \sum_n W^{2k-\nu-1}(t_n) R^\nu(t_n+0).$$

В силу леммы 1.3 имеем

$$w_0 = \sum_n W^{2k-1}(t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{2k-1}} \sum_n (\overline{U}(t_n) - U(t_n))^{2k-1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{2k-1}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}(-1)^{\nu-1}\binom{2k-1}{\nu}\sum_n \overline{U}^{\,\nu}(t_n)U^{2k-\nu-1}(t_n)$$
$$= \frac{\theta}{(2\pi)^{2k-1}}\sum_{\nu=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}\sqrt[4]{X} = \frac{\theta_1\sqrt[4]{X}}{\pi^{2k-1}}\,.$$

Далее, в случае $1 \leqslant \nu \leqslant 2k-1$, дважды применив неравенство Гёльдера, оценку следствия 2.1 и лемму 2.7, получим

$$|w_\nu| \leqslant \sum_n |W(t_n)|^{2k-\nu-1}|R(t_n+0)|^\nu \leqslant v_0^{1-\nu+1/2k}\biggl(\sum_n |R(t_n+0)|^{2k\nu\nu+1}\biggr)^{\nu+1/2k}$$
$$\leqslant v_0^{1-\nu+1/2k}\Bigl(v_{2k}^{\nu/\nu+1}M^{1/\nu+1}\Bigr)^{\nu+1/2k} \leqslant \mathcal{L}_k^{1-\nu+1/2k}\Bigl(\frac{c_0}{18}(c_0k)^{2k}M\Bigr)^{\nu/2k}M^{1/2k} = \mathcal{L}_k\delta_\nu,$$

где

$$\delta_\nu = \mathcal{L}_k^{-(\nu+1)/2k}\Bigl(\frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k}M\Bigr)^{\nu/2k}M^{1/2k} = \biggl\{\frac{(2\pi)^{2k}\,k!}{(2k)!}\biggr\}^{(\nu+1)/2k}\Bigl(\frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k}\Bigr)^{\nu/2k}L^{-\nu+1/2}$$
$$\leqslant \biggl\{\frac{c_0}{28e}\Bigl(\frac{e}{4k}\cdot 4\pi^2c_0^2k^2\Bigr)^k\biggr\}^{\nu/2k}\biggl\{\frac{2}{e}\Bigl(\frac{e}{4k}\cdot 4\pi^2\Bigr)^k\biggr\}^{1/2k}L^{-\nu+1/2}$$
$$= \biggl\{\Bigl(\frac{c_0}{28e}\Bigr)^{1/k}\cdot\frac{\pi^2ec_0^2k}{L}\biggr\}^{\nu/2}\biggl\{\Bigl(\frac{2}{e}\Bigr)^{1/k}\frac{\pi^2e}{kL}\biggr\}^{1/2}$$
$$\leqslant \biggl\{\frac{c_0}{28e}\,\frac{\pi^2ec_0^2k}{L}\biggr\}^{\nu/2}\biggl\{\frac{\pi^2e}{kL}\biggr\}^{1/2} = \frac{\pi\sqrt{e}}{\sqrt{kL}}\biggl\{\frac{\pi^2}{28}\,\frac{c_0^3k}{L}\biggr\}^{\nu/2}.$$

Таким образом,

$$\binom{2k-1}{\nu}\delta_\nu < (2k)^\nu\delta_\nu \leqslant \frac{\pi\sqrt{e}}{\sqrt{kL}}\biggl\{\frac{\pi^2}{7}\,\frac{(c_0k)^3}{L}\biggr\}^{\nu/2},$$
$$\sum_{\nu=1}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}\delta_\nu < \frac{2\pi\sqrt{e}}{\sqrt{kL}}\biggl\{\frac{\pi^2}{7}\,\frac{(c_0k)^3}{L}\biggr\}^{1/2} = 2\pi^2\sqrt{\frac{e}{7}\,\frac{c_0^{3/2}k}{L}}\,,$$

откуда

$$\sum_{\nu=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}|w_\nu| < \frac{\sqrt[4]{X}}{\pi^{2k-1}} + 2\mathcal{L}_k\pi^2\sqrt{\frac{e}{7}\,\frac{c_0^{3/2}k}{L}}$$
$$= \frac{\sqrt{X}}{\pi^{2k-1}} + c_0^{3/2}\sqrt{\frac{e}{28}}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} < \frac{c_0^{3/2}}{3}\,\frac{(2k)!}{(k-1)!}\,\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\,.$$

Теорема доказана.

2.3. Моменты величин $\Delta(n)$ с дробным показателем

В настоящем параграфе мы вычисляем дробный момент величин $|\Delta(n)|$, предварительно приблизив его дробным моментом величин $|W_x(t_n)|$. Чтобы избежать применения неравенства Гёльдера при оценке точности такого приближения, мы предваряем теорему 2.3 доказательством леммы 2.11, дающей оценку разности $|x+y|^a - |x|^a$ при нецелом a.

Лемма 2.11. *Пусть $a>0$. Тогда для любых вещественных x и y разность $|x+y|^a-|x|^a$ при $0<a\leqslant 1$ не превосходит по абсолютной величине $|y|^a$, а при $a>1$ – суммы $t_1+3t_2+9t_3$, где*

$$t_1=\begin{cases}0, & \text{если } k=0,\\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu}|y|^{\nu}, & \text{если } k\geqslant 1,\end{cases}$$

$$t_2=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu-1}|y|^{\nu+1},\qquad t_3=\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu-b}|y|^{\nu+b},$$

а k и b – произвольные числа, подчиненные следующим условиям: $a=k+b$, $k\geqslant 0$ целое, $1\leqslant b\leqslant 2$.

Доказательство. В случае $0<a\leqslant 1$ утверждение очевидно. Пусть $a=k+b>1$. Заметим, что при любом λ с условием $|\lambda|\leqslant 1/2$ справедливо равенство

$$(1+\lambda)^b=1+3\theta_1|\lambda|.$$

Следовательно, при $1\leqslant |y|\leqslant |x|/2$, $x\neq 0$ имеем

$$|x+y|^b=|x|^b\left|1+\frac{y}{x}\right|^b=|x|^b\left(1+3\theta_2\left|\frac{y}{x}\right|\right)=|x|^b+3\theta_2|x|^{b-1}|y|. \tag{2.13}$$

Если же $0\leqslant |x|/2<y$, то

$$|x+y|^b=|x|^b+(|x+y|^b-|x|^b)=|x|^b+\theta_3(3|y|)^b=|x|^b+9\theta_4|y|^b. \tag{2.14}$$

Объединяя (2.13) и (2.14), получим

$$|x+y|^b=|x|^b+\theta_5(3|x|^{b-1}|y|+9|y|^b). \tag{2.15}$$

Далее,

$$\begin{aligned}|x+y|^a&=|(x+y)^k|\cdot|x+y|^b=\left|\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}x^{k-\nu}y^{\nu}\right|\cdot|x+y|^b\\&=\left(|x|^k+\theta_6\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-b-\nu}|y|^{\nu}\right)\cdot|x+y|^b.\end{aligned}$$

Используя (2.15), окончательно находим

$$\begin{aligned}|x+y|^a&=\left(|x|^{a-b}+\theta_6\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-b-\nu}|y|^{\nu}\right)\cdot(|x|^b+\theta_5(3|x|^{b-1}|y|+9|y|^b))\\&=|x|^a+\theta_6\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-\nu}|y|^{\nu}+\theta_7(|x|^b+3|x|^{b-1}|y|+9|y|^b)\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}|x|^{a-b-\nu}|y|^{\nu}.\end{aligned}$$

Из последнего соотношения и следует утверждение леммы.

Теорема 2.3. *Пусть a – произвольное вещественное число, $0<a\leqslant c_2\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_2=(11^{2/3}c_0)^{-1}$, отличное от четного натурального числа. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{n}|\Delta(n)|^a=\frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)(\log\log N)^{a/2}(1+\theta r(a)),$$

где

$$r(a) = \begin{cases} 14\left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{a/2}, & \text{*если* } 0 < a \leqslant 1, \\ \dfrac{781a}{\sqrt{\log\log N}}\left(\sqrt{\log\log\log N} + 2.2c_0^{3/2}\sqrt{a}\right), & \text{*если* } a > 1. \end{cases}$$

Замечание 2.3. В случае $a = 1$ более точная оценка остаточного члена была получена в 2011 г. Бояриновым по методу Сельберга и Тсанга (см. теорему 6 из [44]). Дальнейшее уточнение оценок величины $r(a)$ при $0 < a < 1$ может быть получено с использованием результатов работ [39], [40].

Доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим сначала случай $0 < a \leqslant 1$. Полагая

$$y = X^{1/11}, \qquad W(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \qquad R(t) = S(t) - W(t), \tag{2.16}$$

из лемм 2.8 и 2.11 получим

$$|\Delta(n)|^a = |W(t_n) - R(t_n+0)|^a = |W(t_n)|^a + \theta_1|R(t_n+0)|^a,$$

откуда

$$\sum_n |\Delta(n)|^a = W_a + \theta_2 R_a,$$

где

$$W_a = \sum_n |W(t_n)|^a, \qquad R_a = \sum_n |R(t_n+0)|^a.$$

В силу неравенства Гёльдера и леммы 2.7 имеем

$$R_a \leqslant M^{1-a/2}R_2^{a/2} \leqslant M^{1-a/2}\left\{\frac{c_0^3}{57}M\right\}^{a/2} < c_0^{3a/2}M.$$

Пусть, далее,

$$x = \exp\left(\frac{\log N}{L^3}\right), \qquad U(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{x<p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \qquad V(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}. \tag{2.17}$$

Тогда $W_a = V_a + \theta_3 U_a$, где

$$V_a = \sum_n |V(t_n)|^a, \qquad U_a = \sum_n |U(t_n)|^a.$$

Вновь применяя неравенство Гёльдера, найдем, что

$$U_a \leqslant M^{1-a/2}U_2^{a/2}.$$

Воспользовавшись леммой I.3 и оценкой леммы 1.2, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$U_2 = \frac{1}{\pi^2}\sum_n\left|\operatorname{Im}\sum_{x<p\leqslant y}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}\sum_n\left|\sum_{x<p\leqslant y}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^2 = \frac{1}{\pi^2}\left(M\sum_{x<p\leqslant y}\frac{1}{p} + \sum_{\substack{p,q\leqslant x\\ p\neq q}}\frac{1}{\sqrt{pq}}\sum_n\left(\frac{p}{q}\right)^{it_n}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi^2}\left(M\left(\log\log y - \log\log x + \frac{1.5}{(\log x)^2}\right) + (\log N)\sum_{p,q\leqslant x}\frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{pq}\right) < \frac{3M}{\pi^2}\log L.$$

Следовательно,

$$U_a < \frac{M}{\pi^a}(3\log L)^{a/2}.$$

Из теоремы 1.2 для суммы V_a получаем разложение

$$V_a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{a/2}(1+r_1(a)),$$

$$r_1(a) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(a/2)} + 10.67\theta\left(5\pi e\sqrt{\frac{\log x}{\log N}}\right)^a.$$

Положив $m=1$ в лемме 1.22, заключаем, что сумма по n не превосходит по модулю величины

$$0.32\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)g(2) = 0.16\sqrt{\pi}\left(\frac{\log\log 2+1}{\mathfrak{S}_1}\right)^2 < \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2},$$

откуда

$$|r_1(a)| < \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} + 10.67\left(\frac{5\pi e}{L^{3/2}}\right)^a < \frac{10.8}{L^a}.$$

Переходя к W_a, будем иметь

$$W_a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{a/2}(1+r_2(a)),$$

где

$$|r_2(a)| \leqslant \frac{10.8}{L^a} + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((a+1)/2)}\left(\frac{\log L}{\mathfrak{S}_1}\right)^{a/2} < 12\left(\frac{\log L}{\mathfrak{S}_1}\right)^{a/2}.$$

Наконец, возвращаясь к исходной сумме, получаем равенство

$$\sum_n |\Delta(n)|^a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)L^{a/2}(1+r(a)),$$

в котором

$$|r(a)| < \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{L}\right)^{a/2}\left\{12\left(\frac{\log L}{\mathfrak{S}_1}\right)^{a/2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma((a+1)/2)}\left(\frac{\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\right)^a\right\}$$
$$\leqslant \frac{12+\sqrt{\pi}}{L^a}((\log L)^{a/2} + (\pi c_0^{3/2})^a) < 14\left(\frac{\log L}{L}\right)^{a/2}.$$

Пусть теперь $a>1$. Представим a суммой $k+b$, в которой $k\geqslant 0$ – целое число, причем $1\leqslant b<2$ при $k=2m$ и $1<b<2$ при $k=2m-1$. Положим

$$y = X^{1/\mu}, \qquad \mu = 8(m+1)^2+3,$$

и определим $W(t)$ и $R(t)$ равенствами (2.17). Применив к исходной сумме лемму 2.11, получим

$$\sum_n |\Delta(n)|^a = \sum_n |W(t_n)+R(t_n+0)|^a = W_a + \theta(u+3v+9w),$$

где

$$u = \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}u_\nu, \qquad v = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}v_\nu, \qquad w = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}w_\nu, \tag{2.18}$$

а каждая из сумм u_ν, v_ν, w_ν имеет вид

$$t_{\nu,\delta} = \sum_n |W(t_n)|^{a-\nu-\delta}|R(t_n+0)|^{\nu+\delta},$$

где δ принимает соответственно значения 0, 1 и b.

Из определения чисел m и y следует, что

$$\frac{\log N}{\log y} = \frac{10\mu}{\varepsilon} > \frac{10}{\varepsilon} 8\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{20a^2}{\varepsilon},$$

откуда

$$a < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\sqrt{\frac{\log N}{\log y}} < \frac{1}{3e}\sqrt{\frac{\log N}{\log y}}.$$

Следовательно, для суммы W_a справедлива формула теоремы 1.2. Применяя лемму 1.22 с $m=1$, будем иметь

$$W_a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{a/2}(1+r_1(a)),$$

где

$$\begin{aligned} |r_1(a)| &\leqslant \left|\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\,\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(a/2)}\right| + 10.67\theta\left(5\pi e\sqrt{\frac{a\log x}{\log N}}\right)^a \\ &< \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} + 10.67\left\{\frac{\pi e}{2}\sqrt{\frac{5\varepsilon}{a}}\right\}^a < \frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} + 10.67\cdot\frac{\pi e}{2}\sqrt{5\varepsilon} < \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W_a < I_a, \qquad I_a = \frac{17}{4}\frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{a/2}. \tag{2.19}$$

Далее, из неравенства Гёльдера, леммы 2.7 и оценки $m+1 < a/2+1$ находим

$$R_a \leqslant M^{1-a/2(m+1)}R_{2(m+1)}^{a/2(m+1)} \leqslant M^{1-a/2(m+1)}\{c_0(c_0(m+1))^{2(m+1)}\}^{a/2(m+1)} < J_a, \tag{2.20}$$
$$J_a = \left\{c_0^{3/2}\left(\frac{a}{2}+1\right)\right\}^a M.$$

Вновь применяя неравенство Гёльдера вместе с оценками (2.19), (2.20), находим

$$\begin{aligned} t_{\nu,\delta} &\leqslant \left\{\sum_n |W(t_n)|^{(a-\nu-\delta)a/(a-\nu-\delta)}\right\}^{1-(\nu+\delta)/a}\left\{\sum_n |R(t_n+0)|^{(\nu+\delta)a/(\nu+\delta)}\right\}^{(\nu+\delta)/a} \\ &\leqslant I_a^{1-(\nu+\delta)/a}J_a^{(\nu+\delta)/a} = I_a q^{\nu+\delta}, \end{aligned}$$

где $q = (J_a/I_a)^{1/a}$. Поскольку $\Gamma((a+1)/2) > 2(a/2e)^{a/2}$ для всех $a \geqslant 1$, то для величины q имеем неравенства

$$q^a = \frac{4\sqrt{\pi}}{17}\left\{\frac{\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\left(\frac{a}{2}+1\right)\right\}^a\Gamma^{-1}\left(\frac{a+1}{2}\right) < \frac{2\sqrt{\pi}}{17}\left\{\frac{\pi\sqrt{e}c_0^{3/2}}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\right\}^a < \left(11c_0^{3/2}\sqrt{\frac{a}{L}}\right)^a,$$
$$q < 11c_0^{3/2}\sqrt{\frac{a}{L}}.$$

Так как $a < (11^{2/3}c_0)^{-1}\sqrt[3]{L}$, то несложно проверить, что $q < a^{-1}$. Следовательно,

$$u \leqslant \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}I_a q^\nu = I_a\{(1+q)^k - 1\} < I_a kq(1+q)^{k-1} < I_a aq\left(1+\frac{1}{a}\right)^a < I_a aeq,$$

$$v, w \leqslant \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} I_a q^{\nu+1} = I_a q(1+q)^k < I_a eq,$$

откуда

$$u + 3v + 3w < I_a(a+12)eq < 13 I_a aeq < \frac{1652.1M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\mathfrak{S}_1^{a/2}\,\frac{(ac_0)^{3/2}}{\sqrt{L}}\,. \tag{2.21}$$

Определяя величины $x, U(t)$ и $V(t)$ по формулам (2.17) и вновь применяя лемму 2.11, приходим к равенству

$$W_a = \sum_n |V(t_n) + U(t_n)|^a = V_a + \theta(U + 3V + 9W),$$

в котором U, V и W определяются подобно величинам u, v и w в (2.18), причем в роли u_ν, v_ν и w_ν выступают суммы вида

$$T_{\nu,\delta} = \sum_n |V(t_n)|^{a-\nu-\delta}|W(t_n)|^{\nu+\delta}, \qquad \delta = 0, 1, b.$$

Практически дословно повторяя доказательство полученной выше оценки U_2, при любом целом $r \geqslant 1$ с условием $x^{2r}\log N < \sqrt{M}$ получим неравенства

$$\begin{aligned} U_{2r} &= \sum_n U^{2r}(t_n) \leqslant \frac{1}{\pi^{2r}}\sum_n\left|\sum_{x<p\leqslant y}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^{2r} \\ &\leqslant \frac{1}{\pi^{2r}}\left\{r!\,M\left(\sum_{x<p\leqslant y}\frac{1}{p}\right)^r + x^{2r}\log N\right\} \leqslant \frac{1}{\pi^{2r}}(r!\,M(3\log L)^r + \sqrt{M}\,) < 3\sqrt{r}\left(\frac{3r}{\pi^2 e}\log L\right)^r M, \end{aligned}$$

из которых в свою очередь следует оценка

$$U_{2r}^{1/2r} \leqslant \frac{3}{\pi\sqrt{e}}\,M^{1/2r}\sqrt{r\log L}\,. \tag{2.22}$$

Применяя (2.22) в случае $r = m+1 \leqslant a/2+1$, находим

$$U_a \leqslant M^{1-a/2(m+1)}U_{2(m+1)}^{a/2(m+1)} \leqslant M\left\{\frac{3}{\pi\sqrt{e}}\sqrt{(m+1)\log L}\right\}^a \leqslant \frac{M}{\pi^a}\left\{\frac{9}{e}\left(\frac{a}{2}+1\right)\log L\right\}^{a/2} = K_a.$$

Оценивая $T_{\nu,\delta}$ подобно тому, как это делалось выше, получаем

$$U < I_a aeQ, \qquad V, W < I_a eQ,$$

где

$$Q = \left(\frac{K_a}{I_a}\right)^{1/a}.$$

Далее, из определения величин I_a и K_a находим

$$\begin{aligned} Q^a = \frac{K_a}{I_a} &= \frac{4\sqrt{\pi}}{17}\left\{\frac{9}{e}\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{\log L}{L}\right\}^{a/2}\frac{1}{\Gamma((a+1)/2)} \\ &< \frac{2\sqrt{\pi}}{17}\left\{\frac{9}{e}\left(\frac{a}{2}+1\right)\frac{2e}{a}\frac{\log L}{L}\right\}^{a/2} < \left(\frac{27\log L}{L}\right)^{a/2}, \end{aligned}$$

откуда

$$Q < 3\sqrt{\frac{3\log L}{L}}\,.$$

Следовательно,

$$U + 3V + 9W < I_a(a+12)eQ < \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)\mathfrak{S}_1^{a/2} r_3(a),$$

где

$$r_3(a) = \frac{221}{4}\,aeQ < \frac{663e}{4}\,a\sqrt{\frac{3\log L}{L}} < 780.4a\sqrt{\frac{\log L}{L}}\,. \tag{2.23}$$

Вновь пользуясь теоремой 1.2 и применяя неравенства (2.21) и (2.23), получим

$$\sum_n |\Delta(n)|^a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)L^{a/2}(1 + r(a)),$$

где

$$\begin{aligned}
|r(a)| &\leqslant \biggl|\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Phi_n}{\mathfrak{S}_1^n}\frac{\Gamma(n-a/2)}{\Gamma(a/2)}\biggr| + 10.67\theta\biggl(5\pi e\sqrt{\frac{a\log x}{\log N}}\biggr)^a \\
&\quad + \biggl(\frac{L}{\mathfrak{S}_1}\biggr)^{a/2}\biggl\{780.4a\sqrt{\frac{\log L}{L}} + 1652.1\frac{(ac_0)^{3/2}}{\sqrt{L}}\biggr\} \\
&< \biggl(\frac{L}{\mathfrak{S}_1}\biggr)^{a/2}\biggl\{\frac{1}{8\mathfrak{S}_1^2} + 10.67\biggl(5\pi e\sqrt{\frac{c_1\sqrt[3]{L}}{L^3}}\biggr)^a + 780.4a\sqrt{\frac{\log L}{L}} + 1652.1\frac{(ac_0)^{3/2}}{\sqrt{L}}\biggr\} \\
&< \frac{781a}{\sqrt{L}}(\sqrt{\log L} + 2.2\sqrt{a}\,c_0^{3/3}).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.4. Распределение величин $\Delta(n)$

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, P), где $\Omega = \{n \mid N < n \leqslant N + M\}$ – множество всех целых чисел промежутка $(N, N+M]$, а мера P для всякого подмножества $\mathcal{A} \subset \Omega$ определяется равенством $\mathsf{P}(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}|/M$. Пусть $\delta\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ – случайная величина со значениями $\delta(n) = \pi\Delta(n)\sqrt{2/L}$, $N < n \leqslant N + M$, и пусть

$$\Phi(u) = P(\{n : n \in \Omega,\ \delta(n) \leqslant u\})$$

– ее функция распределения. Тогда число $\nu(u)$ номеров n, удовлетворяющих условию $\delta(n) \leqslant u$, выражается произведением $M\Phi(u)$.

Ниже мы докажем две теоремы о функции распределения величины δ, в которых $\Phi(u)$ приближается гауссовским распределением

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2}\,dv.$$

Теорема 2.4. *При любом и имеет место равенство*

$$\nu(u) = M\biggl(G(u) + \frac{1.78\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}\biggr).$$

Замечание 2.4. После публикации автором теоремы 2.4 появилась работа Бояринова [44] (также см. [40; гл. 3]) с гораздо более точной оценкой остаточного члена в формуле для $\nu(u)$:

$$O\biggl(\frac{\log\log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\biggr) \qquad \text{вместо} \qquad O\biggl(\frac{1}{\sqrt{\log\log\log N}}\biggr).$$

Доказательство теоремы 2.4. Характеристическая функция $f(t)$ распределения $\Phi(u)$ имеет вид

$$f(t) = \mathsf{E}(e^{it\delta}) = \frac{1}{M}\sum_{n} e^{it\delta(n)}. \tag{2.24}$$

Выберем теперь целое число P с условием $P \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда, преобразуя последнее выражение и пользуясь утверждениями теорем 2.1 и 2.2, последовательно получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{M}\sum_{n}\biggl\{\sum_{k=0}^{P}(-1)^k\frac{(t\delta(n))^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{P}(-1)^k\frac{(t\delta(n))^{2k+1}}{(2k+1)!} + 2\theta_1\frac{(t\delta(n))^{2P+2}}{(2P+2)!}\biggr\} \\ &= \sum_{k=0}^{P}\frac{(-1)^k}{k!}\Bigl(\frac{t^2}{2}\Bigr)^k\Bigl(1 + 2.4\theta_2\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}}\Bigr) + \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{\theta_3 c_0}{\sqrt{L}}\sum_{k=0}^{P}\frac{2(k+1)}{k!}\frac{|t|^{2k+1}}{2^k} \\ &\quad + \frac{2\theta_4}{(P+1)!}\Bigl(\frac{t^2}{2}\Bigr)^{P+1}\Bigl(1 + 2.4\frac{(c_0(P+1))^{3/2}}{\sqrt{L}}\Bigr). \end{aligned}$$

Обозначим через $f_1(t)$ вклад от нечетных моментов, а через $f_2(t)$ – вклад от остаточных членов соответствующих асимптотических формул; получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{P}\frac{1}{k!}\Bigl(-\frac{t^2}{2}\Bigr)^k + \frac{2\theta_5}{(P+1)!}\Bigl(\frac{t^2}{2}\Bigr)^{P+1} + f_1(t) + f_2(t) \\ &= g(t) + \frac{3\theta_6}{(P+1)!}\Bigl(\frac{t^2}{2}\Bigr)^{P+1} + f_1(t) + f_2(t), \end{aligned}$$

где $g(t) = e^{-t^2/2}$ – характеристическая функция гауссовского распределения. Имеем

$$|f_1(t)| \leqslant \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{L}}c_0^{3/2}\sum_{k=0}^{P}\frac{(k+1)}{k!\,2^k}|t|^{2k+1}, \qquad |f_2(t)| \leqslant \frac{4.8}{\sqrt{L}}c_0^{3/2}\sum_{k=1}^{P+1}\frac{k^{3/2}}{k!}\Bigl(\frac{t^2}{2}\Bigr)^k.$$

Положим теперь $\delta = 10^{-3}$, $\lambda = (1-\delta)\sqrt{\log L}$, $P = [e\lambda^2] + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_0^{\lambda}\Bigl|\frac{f(t)-g(t)}{t}\Bigr|\,dt \\ &\leqslant \frac{3}{(P+1)!}\frac{\lambda^{2P+2}}{2^{P+1}(2P+2)} + \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{L}}c_0^{3/2}\sum_{k=0}^{P+1}\frac{k+1}{2k+1}\frac{\lambda^{2k+1}}{2^k\,k!} + \frac{4.8}{\sqrt{L}}c_0^{3/2}\sum_{k=1}^{P}\frac{k^{3/2}}{k!}\frac{\lambda^{2k}}{2k\cdot 2^k} \\ &< \frac{1.5}{P^2}\frac{1}{P!}\Bigl(\frac{\lambda^2}{2}\Bigr)^{P+1} + \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{L}}c_0^{3/2}\lambda\sum_{k=0}^{P}\frac{1}{k!}\Bigl(\frac{\lambda^2}{2}\Bigr)^k + \frac{2.4}{\sqrt{L}}c_0^{3/2}\sum_{k=1}^{P+1}\frac{\sqrt{k}}{k!}\Bigl(\frac{\lambda^2}{2}\Bigr)^k \\ &< \frac{3\lambda^2}{4\sqrt{2\pi}\,P^2\sqrt{P}}\Bigl(\frac{e\lambda^2}{2P}\Bigr)^P + \frac{3c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}(\lambda + \sqrt{P+1})\sum_{k=0}^{P+1}\frac{1}{k!}\Bigl(\frac{\lambda^2}{2}\Bigr)^k \\ &< \frac{2^{-P}}{40\lambda^2} + 8c_0^{3/2}\sqrt{\frac{\log L}{L}}\cdot L^{0.5(1-\delta)^2} < L^{-0.5\delta}. \end{aligned}$$

Взяв

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2}\,dv, \qquad B = \sup_u|G'(u)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad g(t) = e^{-t^2/2}$$

в лемме I.7, получим

$$\sup_u|\Phi(u) - G(u)| \leqslant 1.771\lambda^{-1} + 0.298I(\lambda) < \frac{1.78}{\sqrt{\log L}}, \qquad \Phi(u) = G(u) + \frac{1.78\theta}{\sqrt{\log L}}.$$

Теорема доказана.

Положим
$$y = \exp\left(\frac{\log N}{220L}\right), \qquad \mathfrak{S} = \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p} = L - \log L + O(1).$$

Чтобы аппроксимировать $\Phi(u)$ при больших $|u|$ нормальным распределением, поступим следующим образом. Пусть $\xi\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ – дискретная случайная величина, принимающая значения $W_y(t_n)$, $N < n \leqslant N + M$, и пусть

$$F(u) = \frac{1}{M}\#\left\{n \;\middle|\; N < n \leqslant N+M,\, W_y(t_n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\,\right\}$$

– ее функция распределения. Оказывается, что при подходящем y функция $F(u)$ достаточно близка к $\Phi(u)$. Далее распределение $F(u)$ заменяется близкой к ней функцией распределения $F_{\mathcal{A}}(u)$ случайной величины $\eta\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ со значениями $W_y(t_n)$, $n \in \mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}$ получается исключением из Ω всех тех номеров n, для которых величина $|W_y(t_n)|$ аномально велика. Ограничение $n \in \mathcal{A}$ позволяет построить для η производящую функцию моментов

$$K(\eta; s) = \mathbf{E}(e^{s\eta})$$

и воспользоваться леммой I.8. Последующие переходы от $F_{\mathcal{A}}(u)$ к $F(u)$ и от $F(u)$ к $\Phi(u)$ не представляют затруднений.

Лемма 2.12. *Для всех n, $N < n \leqslant N + M$, за исключением не более $M\delta_1$ номеров, $\delta_1 = 4e^{-\pi^2\mathfrak{S}}$, справедливо неравенство*
$$|W_y(t_n)| \leqslant \mathfrak{S}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}_1$ множество тех n, для которых $|W_y(t_n)| > \mathfrak{S}$. Полагая $k_1 = [\pi^2\mathfrak{S}]$ и принимая во внимание первое замечание к лемме 2.1, будем иметь

$$|\mathcal{A}_1|\mathfrak{S}^{2k_1} \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_1} W^{2k_1}(t_n) \leqslant \sum_{n} W^{2k_1}(t_n) \leqslant \frac{(2k_1)!}{k_1!}\frac{M}{(2\pi)^{2k_1}}\left(\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\right)^{k_1} \leqslant M\sqrt{2}\left(\frac{4k_1}{e}\,\frac{\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right)^{k_1},$$

откуда
$$|\mathcal{A}_1| \leqslant M\sqrt{2}\left(\frac{k_1}{\pi^2\mathfrak{S}e}\right)^{k_1} < M\sqrt{2}\,e^{-k_1} < 4Me^{-\pi^2\mathfrak{S}},$$

что и требовалось.

Лемма 2.13. *При любом $u \geqslant 1$ справедливы равенства*

$$F(-u) = G(-u)\left(1 + O\left(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) + 2\theta_1\delta_1,$$
$$1 - F(u) = (1 - G(u))\left(1 + O\left(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) + 2\theta_2\delta_1,$$

где постоянные в знаках O абсолютные.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ дополнение ко множеству $\mathcal{A}_1$ из леммы 2.12 до множества всех целых чисел промежутка $N < n \leqslant N + M$. Пусть, далее, $K(\eta; s)$ – производящая функция моментов случайной величины $\eta = \eta_N$ со значениями $W_y(t_n)$, $n \in \mathcal{A}$, т.е.

$$K(\eta; s) = \mathbf{E}(e^{s\eta}) = |\mathcal{A}|^{-1}\sum_{n\in\mathcal{A}}\exp\{sW_y(t_n)\} = |\mathcal{A}|^{-1}K_0(s).$$

Тогда для всех s, $|s| \leqslant 1$, и $K = [e^2\mathfrak{S}] + 1$ имеем

$$K_0(s) = \sum_{n\in\mathcal{A}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} W_y^k(t_n) = \left(\sum_{k=0}^{K} + \sum_{k>K}\right) \frac{s^k}{k!} \sum_{n\in\mathcal{A}} W_y^k(t_n) = K_1(s) + R_1(s),$$

причем

$$|R_1(s)| \leqslant \sum_{k>K} \frac{|s|^k}{k!} M\mathfrak{S}^k < \frac{M}{\sqrt{2\pi K}} \sum_{k>K} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^k < \frac{M}{\sqrt{2\pi K}} \sum_{k>K} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{K}\right)^k$$
$$\leqslant \frac{M}{e\sqrt{2\pi\mathfrak{S}}} \sum_{k>K} e^{-k} < \frac{M}{e\sqrt{\mathfrak{S}}} e^{-e^2\mathfrak{S}} < Me^{-9\mathfrak{S}}.$$

Далее, представляя $K_1(s)$ разностью

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{n} W_y^k(t_n) - \sum_{n\in\mathcal{A}} W_y^k(t_n)\right) = K_2(s) - R_2(s),$$

будем иметь

$$|R_2(s)| \leqslant |\mathcal{A}_1| + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \sum_{n\in\mathcal{A}_1} |W_y(t_n)|^k.$$

Применяя неравенство Коши и учитывая первое замечание к лемме 2.1, получим

$$|R_2(s)| \leqslant M\delta_1 + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \left(M\delta_1 \sum_{n} W^{2k}(t_n)\right)^{1/2} \leqslant M\delta_1 + \sqrt{M\delta_1} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \left(\frac{(2k)!}{k!} \frac{M\mathfrak{S}^k}{2^{2k}}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant M\delta_1 + \sqrt{M\delta_1} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \left(M\sqrt{2}\left(\frac{k\mathfrak{S}}{e}\right)^k\right)^{1/2} \leqslant M\delta_1 + \frac{M\sqrt{\delta_1}}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^{k/2}.$$

Поскольку наибольшее значение дроби $(e\mathfrak{S}/k)^{k/2}$ на промежутке $1 \leqslant k \leqslant K$ не превосходит $e^{0.5\mathfrak{S}}$, то

$$|R_2(s)| \leqslant M\delta_1 + M\sqrt{\delta_1} \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\pi}} < 1.5M\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-4\mathfrak{S}}.$$

Чтобы вычислить $K_2(s)$, положим

$$w_k = \sum_{n} W_y^k(t_n), \qquad U(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{p\leqslant y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}.$$

Тогда при нечетном k из леммы 1.3 получаем оценку $|w_k| \leqslant y^k \log N < M^{1/3}$. В случае четного $k = 2m$ с помощью леммы 1.4 приходим к равенству

$$w_k = (2\pi)^{-2m} \binom{2m}{m} M\mathfrak{C}_m + \theta M^{1/3}, \qquad \mathfrak{C}_m = \sum_{\substack{p_1\cdots p_m = q_1\cdots q_m \\ p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_m \leqslant y}} (p_1\cdots p_m)^{-1}.$$

Далее, согласно лемме 1.5 выполнено $\mathfrak{C}_m = m!\, H_y^{(m)}(0)$, где

$$H_y(z) = \prod_{p\leqslant y} J_0\left(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\right).$$

Таким образом,

$$K_2(s) = M \sum_{0\leqslant m\leqslant 0.5K} \frac{s^{2m}}{(2m)!}(2\pi)^{-2m}\binom{2m}{m} m!\, H_y^{(m)}(0) + \theta_1 M^{1/3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$
$$= M \sum_{0\leqslant m\leqslant 0.5K} \frac{1}{m!}\left(\frac{s}{2\pi}\right)^{2m} H_y^{(m)}(0) + 2\theta_2 M^{1/3}.$$

Заменим сумму по m бесконечной; получим

$$K_2(s) = MH_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right) - R_3(s) + 2\theta_2 M^{1/3},$$

где в силу леммы 1.17

$$|R_3(s)| \leqslant M \sum_{m>0.5K} \frac{1}{m!}\left(\frac{\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right)^m < \frac{M}{\sqrt{\pi K}} \sum_{m>0.5K}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{4\pi^2 m}\right)^m$$
$$< \frac{M}{\sqrt{\pi K}} \sum_{m>0.5K}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{2\mathfrak{S}e^2\pi^2}\right)^m < \frac{M}{\sqrt{K}}(2\pi^2 e)^{-0.5K} < Me^{-14\mathfrak{S}}.$$

Складывая найденные оценки, приходим к равенствам

$$K_0(s) = MH_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right) + \theta M(4e^{-\pi^2\mathfrak{S}} + 1.5\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-4\mathfrak{S}} + 2M^{-2/3} + e^{-14\mathfrak{S}})$$
$$= M\left\{H_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right) + 2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-4\mathfrak{S}}\right\}.$$

Оценим теперь величину $H_y(s^2/4\pi^2)$ снизу. Для этого представим ее в виде

$$\prod_{p\leqslant y} \exp\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right)\cdot \exp\left(-\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right) J_0\left(\frac{is}{\pi\sqrt{p}}\right) = \exp\left\{\frac{s^2\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right\}\Phi_y(s),$$

где функция $\Phi_y(s)$ в силу лемм 1.11 и 1.12 при любом комплексном s разлагается в ряд вида

$$\Phi_y(s) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\Phi_n\left(\frac{s}{2\pi}\right)^{2n},$$

причем

$$|\Phi_n| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{n!}(\log\log n + 1)^n, & \text{если } 2\leqslant n\leqslant y,\\[2mm] \dfrac{\mathfrak{S}^n}{n!}, & \text{если } n > y.\end{cases}$$

Следовательно, всюду в круге $|s|\leqslant 1$ имеем

$$|\Phi_y(s) - 1| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|\Phi_n|}{(2\pi)^{2n}}\sqrt{2\pi}\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\frac{1}{n!}\left(\frac{\log\log n + 1}{4\pi^2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\sum_{n>y}\left(\frac{e\mathfrak{S}}{4\pi^2 n}\right)^n$$
$$< \sqrt{2\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\log\log n + 1}{4\pi^2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\sum_{n>y}e^{-n} < 0.01.$$

Таким образом,

$$\min_{|s|\leqslant 1}\left|H_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\right| \geqslant (1-0.01)\min_{|s|\leqslant 1}\left|\exp\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\right| > 0.99\exp\left(-\frac{\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right).$$

Возвращаясь к выражению для функции $K_0(s)$, получим

$$K_0(s) = MH_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left\{1+2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}H_y^{-1}\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)e^{-4\mathfrak{S}}\right\} = MH_y\left(\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\{1+2.2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-3.97\mathfrak{S}}\}.$$

Приблизим теперь $\Phi_y(s)$ функцией $\Psi(s)$, не зависящей от y. Для этого запишем $\Phi_y(s)$ в виде $\Psi(s)\Psi_y^{-1}(s)$, где

$$\Psi(s) = \prod_p \varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right), \qquad \Psi_y(s) = \prod_{p>y}\varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right),$$

а $\varphi(v)$ – функция, введенная в лемме 1.6. Пользуясь неравенством леммы 1.10, для $|s|\leqslant 1$ будем иметь

$$\left|\varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right)-1\right| \leqslant \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{|\varpi_m|}{(4\pi^2 p)^m} < \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{(4\pi^2 p)^m} < \frac{1}{194p^2},$$

откуда

$$\log\varphi\left(\frac{s^2}{4\pi^2 p}\right) = \log\left(1+\frac{\theta_1}{194p^2}\right) = \frac{\theta_2}{192p^2},$$

$$\Psi_y(s) = \exp\left\{\frac{\theta_3}{192}\sum_{p>y}\frac{1}{p^2}\right\} = \exp\left\{\frac{\theta_4}{191y}\right\} = 1+\frac{\theta_5}{190y},$$

$$K_0(s) = M\exp\left\{\frac{s^2\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right\}\Psi(s)\left(1+\frac{\theta_5}{190y}\right)(1+2.2\theta\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-3.97\mathfrak{S}}).$$

В силу леммы 2.12 и определения $K_0(s)$ получаем

$$K(\eta\,;s) = \exp\left\{\frac{s^2\mathfrak{S}}{4\pi^2}\right\}\Psi(s)(1+\theta(\log N)^{-3}).$$

Пусть теперь $F_{\mathcal{A}}(u)$ – функция распределения случайной величины $\pi\eta\sqrt{2/\mathfrak{S}}$, так что

$$|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u) = \#\left\{n \;\middle|\; n\in A,\, W_y(t_n)\leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\}.$$

Тогда, полагая $\phi(N)=\mathfrak{S}/\pi^2$, $\kappa(N)=(\log N)^3$ в лемме I.8, при любом $u\geqslant 1$ получаем

$$F_{\mathcal{A}}(-u) = G(-u)\left(1+O\left(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right), \quad 1-F_{\mathcal{A}}(u) = (1-G(u))\left(1+O\left(\frac{u}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right),$$

где постоянные в знаках O абсолютные. Из определения $F_{\mathcal{A}}(u)$, $F(u)$ и леммы 2.12 следует, что величины

$$MF(u) = \#\left\{n \;\middle|\; N<n\leqslant N+M,\, W_y(t_n)\leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\}$$

и $|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u)$ отличаются друг от друга не более чем на $M\delta_1$:

$$|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u) - MF(u) = \theta_1 M\delta_1.$$

Замечая, что $|\mathcal{A}| = M-\theta_2 M\delta_1$, находим

$$F(u) = F_{\mathcal{A}}(u) + 2\theta_3\delta_1. \tag{2.25}$$

Теперь утверждение леммы следует из (2.24) и (2.25). Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Пусть* $1 \leqslant |u| \leqslant \sqrt{L}$. *Тогда для всех* n, $N < n \leqslant N+M$, *за исключением не более* $M\delta_2$ *номеров*,

$$\delta_2 = (c_0+2)e^2 e^{-u^2/2} L^{-1},$$

выполняются неравенства

$$W_y(t_n) - 2\tau \leqslant \Delta(n) \leqslant W_y(t_n) + 2\tau, \tag{2.26}$$

где $\tau = (ec_0/4)(u^2 + 2\log L)$.

Доказательство. Положим $k_1 = [\tau/(ec_0)]$, $x = X^{1/(8k_1+3)}$ и обозначим через $\mathcal{A}_1$ множество тех n, $N < n \leqslant N+M$, для которых величина

$$R(t) = S(t) - W_x(t) = S(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{p \leqslant x} \frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}$$

удовлетворяет неравенству $|R(t_n+0)| > \tau$. Тогда в силу леммы 2.7 имеем

$$\tau^{2k_1}|\mathcal{A}_1| \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_1} R^{2k_1}(t_n+0) \leqslant \sum_n R^{2k_1}(t_n+0) < c_0(c_0k_1)^{2k_1}M,$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| \leqslant c_0\left(\frac{c_0k_1}{\tau}\right)^{2k_1} M \leqslant c_0 e^{-2k_1}M.$$

Далее, пусть $\mathcal{A}_2$ – множество тех n, для которых разность

$$W_x(t) - W_y(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}$$

удовлетворяет условию $|W_x(t_n) - W_y(t_n)| > \tau$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau^{2k_1}|\mathcal{A}_2| &\leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_2}(W_x(t_n)-W_y(t_n))^{2k_1} \leqslant \sum_n (W_x(t_n)-W_y(t_n))^{2k_1} \leqslant \sum_n \left|\sum_{y<p\leqslant x}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^{2k_1} \\ &= k_1!\,M\left(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^{k_1} + x^{2k_1}\log N < k_1!\,M(\log L)^{k_1} + X^{1/4} < 5M\sqrt{k_1}\left(\frac{k_1\log L}{e}\right)^{k_1},\end{aligned}$$

откуда

$$|\mathcal{A}_2| < 5M\sqrt{k_1}\left(\frac{k_1\log L}{e\tau^2}\right)^{k_1} < 5M\sqrt{k_1}e^{-3k_1} < 2Me^{-2k_1}.$$

Следовательно, исключив из рассмотрения не более $(c_0+2)Me^{-2k_1} \leqslant M\delta_2$ номеров n, принадлежащих объединению $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, для оставшихся будем иметь

$$|R(t_n+0)| + |W_x(t_n) - W_y(t_n)| \leqslant 2\tau$$

и

$$\begin{aligned}\Delta(n) + S(t_n+0) &= W_x(t_n) + R(t_n+0) \\ &= W_y(t_n) + R(t_n+0) + (W_x(t_n) - W_y(t_n)) = W_y(t_n) + 2\theta\tau,\end{aligned}$$

где $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Положим*

$$\Phi_0(u) = \frac{1}{M}\#\left\{n \;\middle|\; N < n \leqslant N+M,\ \Delta(n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\},$$

так что

$$\Phi(u) = \Phi_0\left(u\sqrt{\frac{L}{\mathfrak{S}}}\right).$$

Тогда при любом u, $1 \leqslant |u| \leqslant \sqrt{L}$, *справедливы неравенства*

$$F(u_1) - 3\delta_2 \leqslant \Phi_0(u) \leqslant F(u_2) + 3\delta_2,$$

где $u_1 = u - 2\pi\tau\sqrt{2/\mathfrak{S}}$, $u_2 = u + 2\pi\tau\sqrt{2/\mathfrak{S}}$, $\tau = (ec_0/4)(u^2 + 2\log L)$.

Доказательство. Обозначим множество тех n, $N < n \leqslant N+M$, для которых выполнены неравенства (2.26), через $\mathcal{A}$, а его дополнение – через $\mathcal{B}$ и положим

$$\Phi_{\mathcal{A}}(u) = |\mathcal{A}|^{-1}\#\left\{n \;\middle|\; n \in A,\ \Delta(n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\},$$

$$F_{\mathcal{A}}(u) = |\mathcal{A}|^{-1}\#\left\{n \;\middle|\; n \in A,\ W_y(t_n) \leqslant \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\right\}.$$

Рассмотрим номер $n \in \mathcal{A}$, для которого

$$W_y(t_n) \leqslant \frac{u_1}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} = \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} - 2\tau. \tag{2.27}$$

Согласно (2.26) имеем

$$\Delta(n) \leqslant W_y(t_n) + 2\tau = \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\,.$$

Следовательно, число тех $n \in \mathcal{A}$, для которых $\Delta(n) \leqslant (u/\pi)\sqrt{\mathfrak{S}/2}$, не меньше числа тех $n \in \mathcal{A}$, для которых имеет место (2.27), или, что то же, $|\mathcal{A}|\Phi_{\mathcal{A}}(u) \geqslant |\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u_1)$. Но так как левая часть неравенства не превосходит $M\Phi(u)$, то $M\Phi(u) \geqslant |\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(u_1)$. Замечая, что $|\mathcal{A}| = M - |\mathcal{B}|$ и пользуясь оценкой леммы 2.14, находим

$$\Phi_0(u) \geqslant (1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_1). \tag{2.28}$$

Пусть, далее, $n \in \mathcal{A}$ – произвольный номер, удовлетворяющий условию

$$W_y(t_n) > \frac{u_2}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} = \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} + 2\tau. \tag{2.29}$$

Тогда из (2.26) заключаем, что

$$\Delta(n) \geqslant W_y(t_n) - 2\tau > \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\,.$$

Таким образом, число тех $n \in \mathcal{A}$, которые подчинены условию $\Delta(n) > (u/\pi)\sqrt{\mathfrak{S}/2}$, не меньше числа тех $n \in \mathcal{A}$, для которых имеет место (2.29), или, что то же,

$$|\mathcal{A}|(1 - \Phi_{\mathcal{A}}(u)) \geqslant |\mathcal{A}|(1 - F_{\mathcal{A}}(u_2)).$$

Поскольку левая часть этого неравенства не больше величины $M(1-\Phi_0(u))$, отсюда заключаем, что

$$M(1-\Phi(u)) \geqslant M(1-\delta_2)(1-F_{\mathcal{A}}(u_2)),$$

или, иначе,

$$\Phi_0(u) \leqslant (1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_2)+\delta_2. \tag{2.30}$$

Объединив (2.28) и (2.30), находим

$$(1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_1) \leqslant \Phi_0(u) \leqslant (1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_2)+\delta_2.$$

Заметим теперь, что при любом v величина $|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(v)$ не может отличаться от $MF(v)$ на величину, большую числа элементов множества $\mathcal{B}$. Следовательно,

$$|\mathcal{A}|F_{\mathcal{A}}(v) = MF(v)+\theta_1 M\delta_2,$$

откуда

$$(1-\theta_2\delta_2)F_{\mathcal{A}}(v) = F(v)+\theta_1\delta_2, \qquad F_{\mathcal{A}}(v) = F(v)+2\theta_3\delta_2.$$

Оценки

$$(1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_1) \geqslant (1-\delta_2)(F(u_1)-2\delta_2) > F(u_1)-3\delta_2,$$
$$(1-\delta_2)F_{\mathcal{A}}(u_2)+\delta_2 \leqslant (1-\delta_2)(F(u_2)+2\delta_2)+\delta_2 < F(u_2)+3\delta_2$$

и завершают доказательство леммы.

Теорема 2.5. *Пусть* $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$. *Тогда функция*

$$\Phi(v) = \frac{1}{M}\#\left\{n \;\middle|\; N < n \leqslant N+M,\ \Delta(n) \leqslant \frac{v}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}\right\}$$

удовлетворяет равенствам

$$\frac{\Phi(-u)}{G(-u)} = 1+O(R), \qquad \frac{1-\Phi(u)}{1-G(u)} = 1+O(R),$$

в которых

$$R = \frac{u(u^2+\log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят от ε.

Доказательство. Докажем первое соотношение. В силу леммы 2.15 имеем неравенства

$$F(-v_1)-3\delta_2 \leqslant \Phi_0(-u) \leqslant F(-v_2)+3\delta_2, \tag{2.31}$$

в которых

$$v_1 = u+h, \qquad v_2 = u-h, \qquad h = 2\pi\tau\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}}},$$
$$\tau = \frac{ec_0}{4}(u^2+2\log L), \qquad \delta_2 = (c_0+2)e^2\cdot e^{-u^2/2}L^{-1}.$$

Поскольку

$$h = \frac{\pi e c_0}{\sqrt{2\mathfrak{S}}}(u^2+2\log L) \leqslant \frac{\pi e c_0}{\sqrt{L}}(\sqrt[3]{L}+2\log L) < 0.5,$$

то то $v_1 > v_2 > u-0.5 \geqslant 1.5-0.5 = 1$. Поэтому из леммы 2.13 и очевидных неравенств $2\delta_1 < \delta_2$, $v_j/\sqrt{\mathfrak{S}} < R$ получаем

$$\Phi_0(-u) \geqslant G(-v_1)\left(1+O\left(\frac{v_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right)-2\delta_1-3\delta_2 > G(-v_1)(1+O(R))-4\delta_2,$$
$$\Phi_0(-u) < G(-v_2)(1+O(R))+4\delta_2.$$

Далее, по формуле конечных приращений

$$G(-v_j) = G(-u) - hG'(-u-\theta_1 h), \qquad j=1,2, \quad |\theta|\leqslant 1.$$

Поскольку

$$G'(-u-\theta_1 h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u+\theta_1 h)^2\right\} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2+u|h|},$$

$$G(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-u^2/2}}{u} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{u^2/2}^{+\infty} e^{-w}\frac{dw}{w^{3/2}}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-u^2/2}}{u} - \frac{e^{-u^2/2}}{u^3}\right) > \frac{e^{-u^2/2}}{5u}$$

при $u\geqslant 1.5$, то

$$|h|\frac{G'(-u-\theta_1 h)}{G(-u)} \leqslant \frac{5r}{\sqrt{2\pi}}e^r, \qquad \text{где} \quad r = \frac{\pi e c_0 u}{\sqrt{L}}(u^2+2\log L) \asymp R.$$

В силу оценок

$$r\leqslant \frac{\pi e c_0}{\sqrt{L}}(\sqrt{L}+2\sqrt[6]{L}\log L) < 9c_0, \qquad \frac{\delta_2}{G(-u)} < 5(c_0+2)e^2\frac{u}{L} < r$$

получаем

$$\Phi_0(-u) = G(-u)(1+O(R))^2 + 4\theta\delta_2 = G(-u)(1+O(R)).$$

Наконец, замечая, что

$$u\sqrt{\frac{L}{\mathfrak{S}}} = u + h_1, \qquad \text{где} \quad |h_1|\leqslant \frac{u\log L}{L},$$

находим

$$G(-u-h_1) = G(-u)\left(1 - h_1\frac{G'(-u-\theta h1)}{G(-u)}\right) = G(-u)(1+O(R)),$$

$$\Phi(-u) = \Phi_0\left(-u\sqrt{\frac{L}{\mathfrak{S}}}\right) = \Phi_0(-u-h_1) = G(-u-h_1)(1+O(R)) = G(-u)(1+O(R)).$$

Второе соотношение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2.6. *Пусть $f(x)$ – произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x\to+\infty$ функция, удовлетворяющая при $N\leqslant x\leqslant N+M$ условиям $a\leqslant f(x)\leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b – абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \qquad \delta = \exp\left\{-(ec_0)^2\frac{\log\log N}{\mathcal{F}^2}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N\leqslant n\leqslant N+M$ найдется не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию $\Delta(n)\leqslant -(\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$, и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию $\Delta(n) > (\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$.

Доказательство. Положим $u_0 = \sqrt{L/\mathcal{F}}$ и определим $\mathcal{A}_1$ как множество тех n, для которых

$$\Delta(n)\leqslant W_y(t_n) + 2\tau,$$

где

$$y = \exp\left\{\frac{\log N}{220L}\right\}, \qquad \tau = \frac{ec_0}{4}(u^2+2\log L).$$

Тогда в силу леммы 2.14 дополнение $\mathcal{B}_1$ к $\mathcal{A}_1$ состоит из не более чем $M\delta_2$ номеров, где

$$\delta_2 = (c_0+2)e^2 e^{-u_0^2/2} L^{-1} < \frac{9c_0}{L} \exp\left\{-\frac{L}{2\mathcal{F}}\right\}.$$

Далее, положим

$$u = \frac{L}{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}}}, \qquad u = u_1 + 2\pi\tau\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{S}}}$$

и рассмотрим множество $\mathcal{A}_2$ тех n, для которых $W_y(t_n) \leqslant -(u_1/\pi)\sqrt{\mathfrak{S}/2}$. В силу леммы 2.13 число таких n с условием $N < n \leqslant N+M$ дается формулой

$$MF(u_1) = MG(-u_1)\left(1 + O\left(\frac{u_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) + 2\theta M\delta_1,$$

где $\delta_1 = 4e^{-\pi^2\mathfrak{S}} < 0.5(\log N)^{-9}$. Несложно заключить теперь, что номер n, принадлежащий одновременно множествам $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, будет удовлетворять и условию

$$\Delta(n) \leqslant -\frac{u_1}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} + 2\tau = -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}} - 2\tau + 2\tau = -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\,.$$

Итак, искомое число ν номеров n, подчиненных условию $\Delta(n) \leqslant -(u_1/\pi)\sqrt{\mathfrak{S}/2}$, не меньше числа номеров, которые содержатся в пересечении $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. В свою очередь, это пересечение состоит не менее чем из $|\mathcal{A}_2| - |\mathcal{B}_1|$ номеров. Следовательно,

$$\nu \geqslant MF(-u_1) - 3M\delta_2 \geqslant M\left\{G(-u_1)\left(1 + O\left(\frac{u_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right)\right) - 2\delta_1\right\} - 3M\delta_2.$$

Считая постоянную a из условия настолько большой, чтобы выполнялось неравенство

$$1 + O\left(\frac{u_1}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и пользуясь оценкой

$$G(-u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_1}^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv > \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{e^{-u_1^2/2}}{u_1}\,,$$

получаем

$$\begin{aligned}\nu &\geqslant M\left(\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-u_1^2/2}}{u_1} - (\log N)^{-9} - \frac{9c_0}{L}\exp\left\{-\frac{L}{2\mathcal{F}}\right\}\right) \\ &> \frac{M}{2\pi}\frac{e^{-u_1^2/2}}{u_1}\left(1 - \frac{20\pi c_0 u_1}{L}\exp\left\{\frac{u_1^2}{2} - \frac{L}{2\mathcal{F}}\right\}\right).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}u_1^2 - \frac{L}{\mathcal{F}} &< 2\left(u^2 + \frac{8\tau^2}{\mathfrak{S}}\right) - \frac{L}{\mathcal{F}} < 2\left(u^2 + \left(\frac{ec_0}{2}\right)^2\frac{u_0^4}{\mathfrak{S}}\right) - \frac{L}{\mathcal{F}} \\ &< 2\left\{\frac{2L^2}{\mathcal{F}^2\mathfrak{S}} + \left(\frac{ec_0}{2}\right)^2\frac{L^2}{\mathcal{F}^2\mathfrak{S}}\right\} - \frac{L}{\mathcal{F}} < (ec_0)^2\frac{L}{\mathcal{F}^2} - \frac{L}{\mathcal{F}} < -\frac{L}{2\mathcal{F}}\,,\end{aligned}$$

то окончательно имеем

$$\nu > \frac{M}{2\pi}\frac{e^{-u_1^2/2}}{u_1}\left(1 - \frac{20\pi c_0 u_1}{L}\exp\left\{-\frac{L}{4\mathcal{F}}\right\}\right) > M\exp\left\{-(ec_0)^2\frac{L}{\mathcal{F}^2}\right\} = M\delta,$$

что и требовалось.

Неравенство для числа тех n, которые отвечают условию

$$\Delta(n) \geqslant \frac{L}{\pi\mathcal{F}} = \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{2}}\,,$$

доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 2.5. В случае непрерывного изменения параметра t ряд верхних и нижних оценок меры множества значений t промежутка $T \leqslant t \leqslant T + H$, в которых функция $S(t)$ велика по модулю, как условных, так и безусловных, получен в [45], [46]. В частности, в последней работе доказано, что при любом $\lambda > \log\log T$ мера множества $E_\lambda(T, H)$ точек t промежутка $(T, T + H]$, удовлетворяющих условию $|S(t)| \geqslant \lambda$, не превосходит $e^2He^{-\kappa\lambda}$, где $\kappa = \pi\varepsilon^{1.5}e^{-19.5}$. Если же верна гипотеза Римана, то для меры множества E_j, $j = 0, 1$, точек t промежутка $(T, 2T]$, отвечающих условию

$$(-1)^j S(t) > \frac{1}{300}\sqrt{\frac{\log T}{(\log\log T)\log\log\log T}}\,,$$

верна оценка

$$\operatorname{mes}(E_j) \geqslant \frac{2}{5}\frac{T}{\sqrt{\log T}(\log\log T)}\exp\left(-\frac{\log T}{\log\log T}\right), \qquad j = 0, 1.$$

Глава 3. Формулы Сельберга и их следствия

Насколько известно, доказательство формул Сельберга (7) и (8) так и не было опубликовано. Однако в 1976 г. появилась статья Фуджи [49], содержавшая вывод подобных формул для величин $\Delta_n(\chi_1, \chi_2)$, где χ_1 и χ_2 – различные примитивные характеры по модулю $q \geqslant 5$,

$$0 \leqslant \gamma_1(\chi_r) \leqslant \gamma_2(\chi_r) \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n(\chi_r) \leqslant \gamma_{n+1}(\chi_r) \leqslant \cdots$$

– упорядоченные по возрастанию ординаты нулей функций $L(s, \chi_r)$, $r = 1, 2$, лежащих в критической полосе. Величина $\Delta_n(\chi_1, \chi_2)$ определялась для заданного n как разность $m - n$, где целое число $m = m(n)$ единственным образом находится из неравенств

$$\gamma_m(\chi_1) < \gamma_n(\chi_2) \leqslant \gamma_{m+1}(\chi_1).$$

В доказательстве Фуджи формул

$$\sum_{n \leqslant N} \Delta_n^{2k}(\chi_1, \chi_2) = \frac{(2k)!}{k!} \frac{N}{(2\pi)^{2k}} (\log\log N)^k + O((Ak)^{4k} N (\log\log N)^{k-1/2}) + O\biggl(\frac{(\log N)^{2k+1}}{2k+1}\biggr),$$

$$\sum_{n \leqslant N} \Delta_n^{2k-1}(\chi_1, \chi_2) = O((Ak)^{3k} N (\log\log N)^{k-1}) + O\biggl(\frac{(\log N)^{2k}}{2k}\biggr)$$

использовалась оценка интеграла

$$\mathcal{J} = \int_T^{T+H} (S(t, \chi_1) - S(t, \chi_2))^l \, dS(t, \chi_2) = O\biggl(\frac{(\log N)^{l+1}}{l+1}\biggr). \tag{3.1}$$

Здесь $S(t, \chi) = \pi^{-1} \arg(L(1/2 + it, \chi))$ – аргумент функции Дирихле $L(s, \chi)$, который определяется подобно функции $S(t)$. Вывод оценки (3.1) в [49] отсутствует.

Такое доказательство нельзя признать удовлетворительным ввиду того, что интеграл $\mathcal{J}$ как интеграл Стилтьеса не определен. Последнее объясняется тем, что точки разрыва кусочно-гладкой функции $S(t, \chi_2)$, по которой ведется интегрирование, совпадают с ординатами $\gamma_n(\chi_2)$. В этих же точках терпит разрывы и интегрируемая функция $(S(t, \chi_1) - S(t, \chi_2))^{2k}$. В такой ситуации несложно построить две последовательности интегральных сумм для $\mathcal{J}$, сходящиеся к различным пределам (см., например, [50; п. 584]). Поэтому манипулирование с интегралом $\mathcal{J}$ (во всяком случае, без каких-либо пояснений) недопустимо.

Рассуждения Фуджи, формально примененные к задаче вычисления четных моментов Δ_n, приводят к интегралам вида

$$\int_T^{T+H} S^{2k}(t) \, dS(t), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

к которым в полной мере относится все сказанное выше относительно интеграла $\mathcal{J}$.

Настоящая глава посвящена доказательству формул Сельберга (7) и (8), их обобщений (на случаи короткого промежутка изменения n; нецелых показателей k; k, растущих с ростом N) и следствий (моменты величин $S(\gamma_n \pm 0)$, $t_n - \gamma_n$). Ключевым обстоятельством, которое позволяет получить формулы Сельберга, является то, что между последовательностью разностей Δ_n, рассмотренной Сельбергом, и последовательностью величин $\Delta(n) = S(t_n + 0)$, изученных в гл. 2, имеется тесная связь. Эта связь находит отражение в леммах 3.3, 3.5 и 3.6. Наличие этой связи позволяет легко перейти от асимптотических формул и оценок теорем 2.1–2.3 к асимптотикам для соответствующих моментов величин Δ_n.

Отметим, что указанный переход может быть совершен различными способами, три из которых приводятся в настоящей работе (параграфы 3.1–3.3 соответственно). Включение всех этих способов в работу обусловлено тем, что каждый из них приводит к новым результатам, представляющим самостоятельный интерес.

Пусть число γ является ординатой r различных нулей дзета-функции Римана, кратности которых равны $k_1, \ldots, k_r$ соответственно. *Кратностью ординаты* γ будем называть величину $\kappa = \kappa(\gamma)$, равную сумме этих кратностей:

$$\kappa = k_1 + \cdots + k_r.$$

Тогда из свойств функции $S(t)$ (см., например, [6; теорема 2]) следует, что

$$\kappa(\gamma) = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0). \tag{3.2}$$

Если $\gamma = \gamma_l$, то вместо $\kappa(\gamma)$ будем писать κ_l. Таким образом, в случае

$$\gamma_{l-1} < \gamma_l = \gamma_{l+1} = \cdots = \gamma_{l+p-1} < \gamma_{l+p} \tag{3.3}$$

имеем

$$\kappa_l = \kappa_{l+1} = \cdots = \kappa_{l+p-1} = p.$$

Лемма 3.1. *Для всех достаточно больших n справедливы неравенства*

$$|\Delta(n)| < 0.14 \log n, \qquad |\Delta_n| < 0.42 \log n. \tag{3.4}$$

Доказательство. Первое неравенство сразу следует из лемм 1.19 и I.9. Пусть, далее, $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$. Тогда, пользуясь определением функции $N(t)$, находим

$$N(t_{m-1} + 0) < N(\gamma_n + 0) \leqslant N(t_m + 0). \tag{3.5}$$

Заметим теперь, что

$$N(\gamma_n + 0) = n + \theta_n(\kappa_n - 1),$$

где $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$. В случае $\kappa_n = 1$ это очевидно. Пусть теперь при некотором $p \geqslant 2$ выполняются неравенства (3.5). Тогда если $n = l + s$, $0 \leqslant s \leqslant p - 1$, то имеем $\kappa_n = p$, так что

$$N(\gamma_n + 0) = l + p - 1 = n + (p - s - 1) = n + \kappa_n - s - 1 = n + \theta_n(\kappa_n - 1), \tag{3.6}$$

где

$$0 \leqslant \theta_n = \frac{\kappa_n - s - 1}{\kappa_n - 1} \leqslant 1.$$

Преобразуя левую и правую части (3.5) с помощью формулы Римана–Мангольдта, получим

$$m - 1 + S(t_{m-1} + 0) < n + \theta_n(\kappa_n - 1) \leqslant m + S(t_m + 0),$$

откуда

$$\theta_n(\kappa_n - 1) - S(t_m + 0) \leqslant m - n < \theta_n(\kappa_n - 1) + 1 - S(t_{m-1} + 0).$$

Пользуясь теперь равенством (3.2) и оценкой леммы I.9, находим

$$|\Delta_n| \leqslant \kappa_n + 0.14 \log t_m < 0.28 \log \gamma_n + 0.14 \log t_m < 0.42 \log n.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.1. Постоянная в правой части второго из неравенств (3.4) не является наилучшей. Несколько более точная оценка приведена в гл. 4, где собраны основные утверждения о порядке роста величин Δ_n.

3.1. Первое доказательство формул Сельберга

Пусть a, b – произвольные вещественные числа, $a < b$. Обозначим через $e(a,b)$ число решений неравенства $a < \Delta_n \leqslant b$ с условием $N < n \leqslant N + M$. Через $f(a,b)$ будем обозначать число решений неравенства $a < \Delta(n) \leqslant b$, подчиненных тому же условию.

Следующее утверждение является ключевым для первого доказательства формул Сельберга.

Лемма 3.2. *Для целых чисел a и b, $a < b$, справедливо равенство*

$$e(a,b) = f(-(b+1), -(a+1)) + \theta(|a| + |b|).$$

Доказательство. Имеем, прежде всего

$$e(a,b) = M - e_1 - e_2,$$

где e_1 и e_2 обозначают соответственно числа решений неравенств

$$\Delta_n \leqslant a, \qquad \Delta_n > b \tag{3.7}$$

с условием $N < n \leqslant N + M$. Первое из неравенств (3.7) эквивалентно следующему:

$$\gamma_n \leqslant t_{n+a}. \tag{3.8}$$

Действительно, если $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$ и $\Delta_n = m - n \leqslant a$, то $m \leqslant n + a$ и $\gamma_n \leqslant t_m \leqslant t_{n+a}$. Обратно, если выполняется условие (3.8), то для определенного выше числа m будем иметь $\gamma_n \leqslant t_m \leqslant t_{n+a}$, откуда $m \leqslant n + a$ и $\Delta_n \leqslant a$.

Полагая $\nu = n + a$ в (3.8), убеждаемся, что e_1 совпадает с числом решений неравенства

$$\gamma_{\nu-a} \leqslant t_\nu \tag{3.9}$$

с условием $N + a < \nu \leqslant N + M + a$ и, таким образом, не более чем на $|a|$ отличается от f_1 – числа решений (3.9) с условием $N < \nu \leqslant N + M$:

$$e_1 = f_1 + \theta_1|a|.$$

Точно так же доказывается, что неравенство $\Delta_n > b$ эквивалентно неравенству $\gamma_n > t_{n+b}$, а число e_2 совпадает с числом номеров ν с условием $N + b < \nu \leqslant N + M + b$, удовлетворяющих неравенству

$$\gamma_{\nu-b} > t_\nu. \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$e_2 = f_2 + \theta_2|b|,$$

где f_2 – число решений (3.10) с условием $N < \nu \leqslant N + M$.

Но если точка Грама t_ν не удовлетворяет ни одному из неравенств (3.9), (3.10), то

$$\gamma_{\nu-b} \leqslant t_\nu < \gamma_{\nu-a}. \tag{3.11}$$

Покажем, что (3.11) эквивалентно двойному неравенству

$$-(b+1) < \Delta(\nu) \leqslant -(a+1). \tag{3.12}$$

Действительно, определяя число m из неравенств $\gamma_m \leqslant t_\nu < \gamma_{m+1}$, из (3.11) заключаем, что $\nu - b \leqslant m \leqslant \nu - a - 1$, откуда следует (3.12). Обратно, из (3.12) для определенного выше числа m будем иметь $\nu - b \leqslant m \leqslant \nu - a - 1$, поэтому

$$\gamma_{\nu-b} \leqslant \gamma_m \leqslant t_\nu < \gamma_{m+1} \leqslant \gamma_{\nu-a}.$$

Таким образом, число решений (3.11), отвечающих промежутку $N<\nu\leqslant N+M$, совпадает с $f(-(b+1),-(a+1))$, откуда

$$e(a,b)=M-e_1-e_2=M-f_1-f_2-\theta_1|a|-\theta_2|b|=f(-(b+1),-(a+1))+\theta(|a|+|b|).$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству формул Сельберга.

Теорема 3.1. *Пусть k – целое число, $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_1=c_0^{-1}(1.75\pi^2)^{1/3}$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_n \Delta_n^{2k}=\frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi)^{2k}}(\log\log N)^k\left(1+\frac{2.5\theta(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$
$$\left|\sum_n \Delta_n^{2k-1}\right|<0.5c_0^{3/2}\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{M}{(2\pi)^{2k-2}}(\log\log N)^{k-1}.$$

Теорема 3.2. *Пусть a – произвольное число, отличное от четного натурального числа и удовлетворяющее условию $0<a\leqslant c_2\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_2=(11^{2/3}c_0)^{-1}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n|\Delta_n|^a=\frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)(\log\log N)^{a/2}(1+\theta r(a)),$$

где[1]

$$r(a)=\begin{cases}14.1\left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{a/2}, & \text{\textit{если} } 0<a\leqslant 1,\\ \dfrac{782a}{\sqrt{\log\log N}}(\sqrt{\log\log\log N}+2.2c_0^{3/2}\sqrt{a}), & \text{\textit{если} } a>1.\end{cases}$$

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 проводятся единообразно. Пользуясь тем, что числа Δ_n – целые, при любом $a>0$ будем иметь

$$\sum_n|\Delta_n|^a=\sum_{\nu=1}^{l}\nu^a(e(\nu-1,\nu)+e(-(\nu+1),-\nu)),$$

где $l=[0.45\log N]$ выбрано так, чтобы величины Δ_n, $\Delta(n)$ при $N<n\leqslant N+M$ не превосходили l по абсолютной величине. Пользуясь леммой 3.2, при $\nu\geqslant 2$ будем иметь

$$e(\nu-1,\nu)=f(-(\nu+1),-\nu)+\theta_1(2\nu-1),\qquad e(-(\nu+1),-\nu))=f(\nu-1,\nu)+\theta_2(2\nu+1).$$

Следовательно,

$$\sum_n|\Delta_n|^a=\sum_{\nu=1}^{l}\nu^a(f(\nu-1,\nu)+f(-(\nu+1),-\nu)+4\theta_3\nu)=\sum_n|\Delta(n)|^a+4\theta_4\sum_{\nu=1}^{l}\nu^{a+1}.$$

Теперь первое утверждение теоремы 3.1 и теорема 3.2 следуют из теорем 2.1 и 2.3 и оценки

$$4\sum_{\nu=1}^{l}\nu^{a+1}<\frac{4(l+1)^{a+2}}{a+2}<(\log N)^{a+2}.$$

[1]По поводу уточнения оценки $r(a)$ при $0<a\leqslant 1$ см. замечение 2.3.

Далее, при целом $k \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_n \Delta_n^{2k-1} &= \sum_{\nu=1}^{l} (\nu^{2k-1} e(\nu-1,\nu) + (-\nu)^{2k-1} e(-(\nu+1),-\nu)) \\ &= \sum_{\nu=1}^{l} \nu^{2k-1}(e(\nu-1,\nu) - e(-(\nu+1),-\nu)) \\ &= \sum_{\nu=1}^{l} \nu^{2k-1}(f(-(\nu+1),-\nu) - f(\nu-1,\nu) + 4\theta_1\nu) \\ &= -\sum_{\nu=1}^{l} (\nu^{2k-1} f(\nu-1,\nu) + (-\nu)^{2k-1} f(-(\nu+1),-\nu)) + \theta_2(\log N)^{a+2} \\ &= -\sum_n \Delta^{2k-1}(n) + \theta_2(\log N)^{a+2}.\end{aligned}$$

Таким образом, второе утверждение теоремы 3.1 есть следствие оценки теоремы 2.2.

Теорема 3.3. *Пусть $\Psi(v)$ – функция распределения величин Δ_n, т.е.*

$$\Psi(v) = \frac{1}{M}\#\left\{n \,\Big|\, N < n \leqslant N+M,\ \Delta_n \leqslant \frac{v}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}\right\}.$$

Тогда при любом u имеет место равенство

$$\Psi(u) = G(u) + \frac{1.79\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}.$$

Кроме того, если $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$, то эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\Psi(-u)}{G(-u)} = 1 + O(R), \qquad \frac{1-\Psi(u)}{1-G(u)} = 1 + O(R),$$

в которых

$$R = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят[2] *от ε.*

Доказательство. Докажем сперва первую часть утверждения теоремы. Согласно лемме 3.1 при

$$|u| \geqslant \frac{\pi\log N}{\sqrt{2\log\log N}}$$

оно тривиально. В противном случае, пользуясь обозначениями и утверждениями леммы 3.2 и теоремы 2.4, будем иметь

$$\begin{aligned}M\Psi(u) &= e\left(-\infty, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right)e\left(-\frac{1}{2}\log N, \frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) = f\left(-\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}} - 1, \frac{1}{2}\log N + 1\right) + \theta_1\log N \\ &= f\left(-\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}} - 1, +\infty\right) + \theta_1\log N = M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2}\,dv + \theta\Delta\right),\end{aligned}$$

где $\Delta = 1.79(\log\log\log N)^{-0.5}$.

[2] Остаточный член в первой формуле для $\Psi(u)$ может быть уточнен. См. замечание 2.4.

Докажем вторую часть утверждения. Применяя леммы 3.1, 3.2, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} M\Psi(-u) &= e\left(-\infty, -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) = e\left(-\frac{1}{2}\log N, -\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right) \\ &= f\left(\frac{u}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}} - 1, \frac{1}{2}\log N + 1\right) + \theta\log N = f\left(\frac{u_1}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}, +\infty\right) + \theta\log N \\ &= M(1-\Phi(u_1)) + \theta\log N, \end{aligned}$$

где $u_1 = u - h$, $h = \pi\sqrt{2/L}$. В силу теоремы 2.4 имеем

$$1-\Phi(u_1) = (1-G(u_1))(1+O(R)) = G(-u_1)(1+O(R)) = G(-u)(1+O(R)),$$

откуда следует искомое равенство для $\Psi(-u)/G(-u)$. Соотношение для $(1-\Psi(u))/(1-G(u))$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $f(x)$ – монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при $x \to +\infty$. Тогда для почти всех n из промежутка $N < n \leqslant N+M$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{f(n)}\sqrt{\log\log n} < |\Delta_n| \leqslant f(n)\sqrt{\log\log n}.$$

Иными словами, гипотеза Сельберга верна и в случае короткого промежутка изменения n.

Теорема 3.4. *Пусть $f(x)$ – произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x \to +\infty$ функция, удовлетворяющая при $N \leqslant x \leqslant N+M$ условиям $a \leqslant f(x) \leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b – абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \qquad \delta = 0.5\exp\left\{-(ec_0)^2\frac{\log\log N}{\mathcal{F}^2}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N \leqslant n \leqslant N+M$ найдется не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию $\Delta_n \leqslant -(\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$, и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию $\Delta_n > (\pi\mathcal{F})^{-1}\log\log N$.

Доказательство сразу следует из теоремы 2.5 и леммы 3.2.

3.2. Второе доказательство формул Сельберга

Опишем еще один способ вывода формул Сельберга из теорем 2.1 и 2.2, который приводит к несколько менее точным результатам (по сравнению с теоремой 3.1) и не позволяет вывести асимптотическую формулу для моментов дробных степеней непосредственно из теоремы 2.3 (во всяком случае, без применения всех тех приемов, которые были использованы при ее доказательстве). Тем не менее, применение этого способа кажется более естественным, так как что он не использует никакой информации о распределении чисел $\Delta(n)$ и Δ_n (типа свойств величин $e(a,b)$ и $f(a,b)$) и опирается лишь на вычисление сумм, содержащих значения $S(t_n+0)$. Кроме того, возникающие при таком подходе суммы

$$T_k = \sum_n S^k(t_n+0)(S(t_n+0) - S(t_{n-1}+0))$$

оказываются полезными при решении некоторых других задач, связанных с распределением нулей $\zeta(s)$ (см. параграфы 3.6, 3.7).

Пусть, как и выше, $X = N^{0.1\varepsilon}$. Кроме того, положим

$$r(n) = S(t_n+0) - S(t_{n-1}+0) = \Delta(n) - \Delta(n-1).$$

Для второго доказательства формул Сельберга нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Теорема 3.5. *Пусть k – целое число с условием $1 \leqslant k \leqslant c\log X$, где c – достаточно малая абсолютная постоянная. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_n r^{2k}(n) < c_0(2c_0k)^{2k}M.$$

Доказательство. Положим, как и выше,

$$x = X^{1/(8k+3)}, \qquad W(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \qquad R(t) = S(t) + W(t)$$

и обозначим

$$w_n = W(t_{n+1}) - W(t_n), \qquad u_n = R(t_{n+1}+0) - R(t_n+0).$$

В силу леммы 1.1 при $N < n \leqslant N+M$ имеем равенство $t_{n+1} - t_n = 2h + \varepsilon_n$, в котором

$$h = \frac{\pi}{2\vartheta'(t_N)}, \qquad |\varepsilon_n| < MN^{-1}.$$

Замечая, что

$$|W'(t)| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{\sqrt{p}} < \sqrt{x},$$

найдем

$$\begin{aligned} w_n &= W(t_n + 2h + \varepsilon_n) - W(t_n) = W(t_n+2h) - W(t_n) + \theta_1 MN^{-1}\sqrt{x} \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\sqrt{p}}(\sin((t_n+2h)\log p) - \sin(t_n\log p)) + \theta_1 MN^{-1}\sqrt{x} \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x} a_p\, p^{it_n} + \theta_1 MN^{-1}\sqrt{x}, \end{aligned}$$

где $a_p = p^{-0.5+ih}\sin(h\log p)$. Согласно лемме 2.1 имеем оценку

$$\sum_n w_n^{2k} \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{2^{2k}}\mathfrak{s}^k + \sqrt{X}, \qquad \text{где} \quad \mathfrak{s} = \sum_{p\leqslant x}|a_p|^2 = \sum_{p\leqslant x}\frac{\sin^2(h\log p)}{p}.$$

Согласно лемме I.2 сумма $\mathfrak{s}$ не превосходит

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{(h\log p)^2}{p} < (h\log x)^2 < \left(\frac{\varepsilon}{80k}\right)^2.$$

Поэтому

$$\sum_n w_n^{2k} \leqslant \frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{2^{2k}}\left(\frac{\varepsilon}{80k}\right)^{2k} + \sqrt{X} < \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}M. \tag{3.13}$$

Возвращаясь к сумме из условия теоремы и применяя неравенство леммы I.9, получим

$$\begin{aligned} \sum_{N\leqslant n<N+M}(S(t_n+0) - S(t_{n-1}+0))^{2k} &= \sum_n (u_n - w_n)^{2k} + 2\theta_1(0.5\log N)^{2k} \\ &= \sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}\sum_n u_n^\nu w_n^{2k-\nu} + 2\theta_1(0.5\log N)^{2k} \leqslant \sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}2^{\nu-1}(W'_\nu + W''_\nu), \end{aligned}$$

где
$$W_\nu^{(j)} = \sum_n |R(t_{n+j-1}+0)|^\nu v_\nu^{2k-\nu}, \qquad j=1,2.$$
Применяя неравенство Гёльдера (3.13) и оценку леммы 2.7, будем иметь
$$\begin{aligned} W_\nu' &\leqslant \left(\sum_n v_n^{2k}\right)^{1-\nu/2k}\left(\sum_n R^{2k}(t_n+0)\right)^{\nu/2k} \\ &\leqslant M\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}\right\}^{1-\nu/2k}\left\{\frac{c_0}{18}(c_0k)^{2k}\right\}^{\nu/2k} < \frac{3}{2}M\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}\left\{\frac{80c_0k}{\varepsilon}\left(\frac{c_0}{27}\right)^{1/2k}\right\}^\nu \end{aligned}$$
(эта же оценка верна и для W_ν''). Следовательно,
$$\begin{aligned} \sum_n r^{2k}(n) &< \frac{3}{2}M\left(\frac{\varepsilon}{80}\right)^{2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}\left\{\frac{80c_0k}{\varepsilon}\left(\frac{c_0}{27}\right)^{1/2k}\right\}^\nu + 2(0.5\log N)^{2k} \\ &= \frac{3}{2}M\left\{\frac{\varepsilon}{80}\cdot\frac{160c_0k}{\varepsilon}\left(\frac{c_0}{27}\right)^{1/2k}\right\}^{2k}\left(1+\frac{\varepsilon}{160c_0k}\right)^{2k} + 2(0.5\log N)^{2k} < c_0(2c_0k)^{2k}M. \end{aligned}$$
Теорема доказана.

Теорема 3.6. *Пусть k – целое число с условием $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда имеют место оценки*
$$|T_{2k-1}| < 1.5c_0^3k4^k\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{M}{(2\pi)^{2(k-1)}}(\log\log N)^{k-1},$$
$$|T_{2k}| < 42(c_0k)^{5/2}4^k\frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi)^{2k}}(\log\log N)^{k-1/2}.$$

Доказательство. Оценим сначала сумму T_{2k-1}. Полагая $a=\Delta(n)$, $b=r(n)$ в легко проверяемом тождестве
$$(a-b)^{2k} = a^{2k} - 2ka^{2k-1}b + \theta_1k^22^{2k-2}(a^{2k-2}b^2+b^{2k}),$$
после несложных преобразований получим
$$2k\Delta^{2k-1}(n)r(n) = \Delta^{2k}(n) - \Delta^{2k}(n-1) + \theta_2k^22^{2k-2}(r^{2k}(n)+\Delta^{2k-2}(n)r^2(n)).$$
Суммируя по n, приходим к равенству
$$2kT_{2k-1} = \Delta^{2k}(N+M) - \Delta^{2k}(N) + \theta_3k^22^{2k-2}(W_1+W_2),$$
где
$$W_1 = \sum_n r^{2k}(n), \qquad W_2 = \sum_n \Delta^{2k-2}(n)r^2(n).$$
Согласно теореме 3.5 имеем $W_1 < c_0(2c_0k)^{2k}M$. Пользуясь неравенством Гёльдера вместе с обозначениями и утверждением теоремы 2.1, будем иметь
$$\begin{aligned} W_2 &\leqslant \left(\sum_n \Delta^{2k}(n)\right)^{1-1/k} W_1^{1/k} < (2.01\mathcal{L}_k)^{1-1/k}(c_0(2c_0k)^{2k}M)^{1/k} \\ &< 2.01\frac{\mathcal{L}_k}{L}\left\{\frac{k!}{(2k)!}c_0(4\pi c_0k)^{2k}\right\}^{1/k} < 10.95c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\,. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}W_1 + W_2 &< c_0(2c_0k)^{2k}M + 10.95c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\\ &< 10.95c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\left(1+\frac{L}{40(\pi c_0)^2}\frac{(k-1)!}{(2k)!}\left(\frac{4\pi c_0 k}{\sqrt{L}}\right)^k\right)\\ &< 11c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\,,\end{aligned}$$

откуда

$$|T_{2k-1}| < (0.5\log N)^{2k} + \frac{4^k k}{8}\,11c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} < 1.5c_0^3k4^k\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}\,.$$

Оценим теперь сумму T_{2k}. Полагая $a = \Delta(n)$, $b = r(n)$ в тождестве

$$(a-b)^{2k+1} = a^{2k+1} - (2k+1)a^{2k}b + \theta_1 k(2k+1)2^{2k-2}(|b|^{2k+1} + |a|^{2k-1}b^2),$$

после преобразований получим

$$(2k+1)T_{2k+1} = \Delta^{2k}(N+M) - \Delta^{2k+1}(N) + \theta_2 k(2k+1)2^{2k-2}(W_3+W_4),$$

где

$$W_3 = \sum_n |r(n)|^{2k+1}, \qquad W_4 = \sum_n |\Delta(n)|^{2k-1}r^2(n).$$

В силу неравенства Гёльдера и теоремы 3.5 имеем

$$W_3 = \sum_n |r(n)|^{2k-1}r^2(n) \leqslant W_1^{1-1/2k}\left(\sum_n r^{4k}(n)\right)^{1/2k} < 4c_0(2c_0k)^{2k+1}M.$$

Далее,

$$\begin{aligned}W_4 &\leqslant \left(\sum_n \Delta^{2k}(n)\right)^{1-1/2k}\left(\sum_n r^{4k}(n)\right)^{1/2k}\\ &< 2\frac{\mathcal{L}_k}{\sqrt{L}}\left\{\frac{k!}{(2k)!}c_0(2\pi)^{2k}(4c_0k)^{4k}\right\}^{1/2k} < 165.8\frac{c_0^{5/2}k^{3/2}}{\sqrt{L}}\mathcal{L}_k.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$W_3 + W_4 < 165.8\frac{c_0^{5/2}k^{3/2}}{\sqrt{L}}\mathcal{L}_k\left(1+\frac{1}{48}\sqrt{\frac{L}{c_0k}}\left(\frac{(2\pi c_0)^2ek}{L}\right)^k\right) < 166\frac{c_0^{5/2}k^{3/2}}{\sqrt{L}}\mathcal{L}_k,$$

$$|T_{2k}| < 41.5k\cdot 4^k\frac{c_0^{5/2}k^{3/2}}{\sqrt{L}}\mathcal{L}_k < 42(c_0k)^{5/2}4^k\frac{\mathcal{L}_k}{\sqrt{L}}\,.$$

Теорема доказана.

Следующая лемма раскрывает геометрический смысл величины $r(n)$.

Лемма 3.3. *Величина $r(n)+1$ равна числу ординат нулей $\zeta(s)$, попавших на промежуток Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$, или, что то же,*

$$r(n) = N(t_n+0) - N(t_{n-1}+0) - 1.$$

В частности, $r(n) \geqslant -1$ при любом n.

Доказательство. Воспользовавшись формулой Римана–Мангольдта, будем иметь

$$N(t_n+0)-N(t_{n-1}+0)=(\pi^{-1}\vartheta(t_n)+1+S(t_n+0))-(\pi^{-1}\vartheta(t_{n-1})+1+S(t_{n-1}+0))$$
$$=1+\Delta(n)-\Delta(n-1)=1+r(n).$$

Лемма доказана.

Второе доказательство формул Сельберга опирается на следующую лемму, которая устанавливает связь между суммой величин Δ_m^k, распространенной на все ординаты γ_m из n-го промежутка Грама G_n, с величиной $\Delta^k(n)$.

Лемма 3.4. *Пусть k и n – произвольные натуральные числа, и пусть промежуток Грама $G_n=(t_{n-1},t_n]$ содержит $r+1$ ординат нулей $\zeta(s)$, где $r=r(n)\geqslant -1$. Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^{2k}=(r+1)\Delta^{2k}(n)+\theta_1k2^{2k}(|\Delta(n)|^{2k-1}r^2+|r|^{2k+1}), \tag{3.14}$$

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^{2k-1}=-(r+1)\Delta^{2k-1}(n)+\theta_2k2^{2k}(\Delta^{2k-2}(n)r^2+r^{2k}). \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $r=-1$, когда G_n не содержит ни одной ординаты. Тогда суммы в левых частях (3.14), (3.15) пусты, и утверждение леммы будет выполнено, если положить $\theta_1=\theta_2=0$.

Пусть теперь $r\geqslant 0$, и пусть при некотором $s\geqslant 1$ выполнены неравенства

$$\gamma_{s-1}\leqslant t_{n-1}<\gamma_s\leqslant\gamma_{s+1}\leqslant\dots\leqslant\gamma_{s+r}\leqslant t_n<\gamma_{s+r+1}.$$

Тогда

$$\Delta(n)=S(t_n+0)=N(t_n+0)-\pi^{-1}\vartheta(t_n)-1=s+r-n$$

и, следовательно,

$$\Delta_s=n-s=r-\Delta(n),$$
$$\Delta_{s+1}=n-s-1=r-1-\Delta(n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_{s+r}=n-s-r=-\Delta(n).$$

Таким образом,

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^{2k}=\sum_{m=s}^{s+r}\Delta_m^{2k}=\sum_{j=0}^{r}(j-\Delta(n))^{2k}=\sum_{j=0}^{r}(\Delta^{2k}(n)+\theta_12kj2^{2k-2}(|\Delta(n)|^{2k-1}+j^{2k-1}))$$
$$=(r+1)\Delta^{2k}(n)+\theta_2k2^{2k}(|\Delta(n)|^{2k-1}r^2+r^{2k+1}).$$

Равенство (3.15) выводится аналогично. Лемма доказана.

Второе доказательство формул Сельберга. Определим целые числа μ и ν из неравенств

$$\gamma_\mu\leqslant t_N<\gamma_{\mu+1},\quad \gamma_\nu\leqslant t_{N+M}<\gamma_{\nu+1}$$

и рассмотрим сумму

$$V_{2k-1}=\sum_{m=\mu+1}^{\nu}\Delta_m^{2k-1}.$$

Из определения величин $\Delta(n)$ и леммы 3.1 имеем

$$|\mu-N|=|N(t_N+0)-N|=|\pi^{-1}\vartheta(t_N)+1+S(t_N+0)-N|=|\Delta(N)|<0.15\log N$$

и, аналогично,

$$|\nu - (N + M)| < 0.15 \log N.$$

Таким образом, сумма V_{2k-1} отличается от суммы $\sum_m \Delta_m^{2k-1}$ не более чем $2 \cdot 0.15 \log N$ слагаемыми, каждое из которых в силу леммы 3.1 не превосходит по модулю $(0.15 \log N)^{2k-1}$, т.е.

$$V_{2k-1} = \sum_m \Delta_m^{2k-1} + 2\theta_1 (0.15 \log N)^{2k}.$$

С другой стороны, из леммы 3.4 следуют равенства

$$\begin{aligned} V_{2k-1} &= \sum_n \sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^{2k} \\ &= -\sum_n ((r(n)+1)\Delta^{2k-1}(n) + \theta_2 k 2^{2k} (\Delta^{2k-2}(n) r^2(n) + r^{2k}(n))) \\ &= -\sum_n \Delta^{2k-1}(n) - T_{2k-1} + \theta_3 k 2^{2k} (W_1 + W_2), \end{aligned}$$

где через W_1 и W_2 обозначены те же суммы, которые встречались при доказательстве теоремы 3.6. Воспользовавшись их оценками и утверждениями теорем 1.2 и 3.6, найдем

$$\begin{aligned} |V_{2k-1}| &< \frac{c_0^{3/2}}{2} \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} + c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} + 6c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} \\ &< 7.1 c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\left| \sum_m \Delta_m^{2k-1} \right| < 7.2 c_0^3 k 4^k \frac{(2k)!}{(k-1)!} \frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Подобные рассуждения приводят в случае четных моментов к равенству

$$\sum_{m=\mu+1}^{\nu} \Delta_m^{2k} = \sum_n \Delta^{2k}(n) + T_{2k} + \theta_3\, k 2^{2k} (W_3 + W_4),$$

где W_3, W_4 сохраняют тот же смысл, что и в теореме 3.6. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_m \Delta_m^{2k} &= \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{2.4\theta_4 (c_0 k)^{3/2}}{\sqrt{L}} \right) + 41.5\theta_5 \mathcal{L}_k \cdot \frac{(c_0 k)^{5/2}}{\sqrt{L}} \\ &\quad + 166\theta_6 \mathcal{L}_k \cdot \frac{(c_0 k)^{5/2}}{\sqrt{L}} + 2\theta_7 (0.15 \log N)^{2k+1} \\ &= \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{208\theta_8 (c_0 k)^{5/2} 4^k}{\sqrt{L}} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В отличие от теорем 2.1, 2.2 полученные выше утверждения менее точны. Несложно заметить, например, что формулы для четных моментов будут асимптотическими лишь при

$$k \leqslant ((4 \log 2)^{-1} - \delta) \log\log\log N.$$

Тем не менее и они позволяют доказать первое утверждение теоремы 3.3 о распределении величин Δ_n и, в частности, предположение Сельберга о «нормальном» порядке этих величин.

Отметим следующее обстоятельство. Тривиальная оценка суммы T_k типа

$$|T_k| = \left|\sum_n \Delta^k(n) r(n)\right| \leqslant \left(\sum_n \Delta^{2k}(n) \sum_n r^2(n)\right)^{1/2} \leqslant c(k) M (\log\log N)^{k/2}$$

является слишком грубой и недостаточна для вывода формул Сельберга. Причина, по которой происходит потеря точности, состоит в том, что при таком подходе теряется информация о знаках слагаемых, в частности о знаках целых чисел $r(n)$. Согласно лемме 3.3 имеем $r(n) \geqslant -1$ при любом n. Оказывается (это будет доказано ниже), что в положительной доле случаев величина $r(n)$ принимает значение (-1), и в положительной же доле случаев является строго положительной. Это означает, что суммы T_k (во всяком случае, при четных k) являются знакопеременными. Прием же, использованный при доказательстве теоремы 3.6, позволяет уловить взаимное погашение слагаемых, имеющих разные знаки.

3.3. Третье доказательство формул Сельберга

Несмотря на то, что оценка знакопеременной суммы T_k не представляет значительных трудностей, рассмотрение явного вида остаточных членов формул (3.14) и (3.15) позволяет и вовсе избежать применения таких оценок и вывести формулы Сельберга с теми же остаточными членами, что были получены в теореме 3.1, не опираясь при этом на какие-либо утверждения о распределении чисел Δ_n. Это и составляет цель настоящего параграфа.

Пусть, как и выше, $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$. Для неотрицательных целых p и q положим

$$T_{p,q} = \sum_n r^p(n) \Delta^q(n),$$

так что

$$\sum_n \Delta^k(n) = T_{0,k}, \qquad T_k = \sum_n \Delta^k(n) r(n) = T_{1,k}.$$

Пусть, наконец, B_ν – числа Бернулли.

Лемма 3.5. *При любых целых $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ справедливо тождество*

$$\sum_{t_{n-1} < \gamma_m \leqslant t_n} \Delta_m^k = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \Delta^q(n) (r^{k-q} + F_{k+1-q}(r)), \tag{3.16}$$

где $r = r(n)$,

$$F_p(x) = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{p}{\nu} B_\nu x^{p-\nu}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда промежуток Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$ содержит по меньшей мере одну ординату нуля $\zeta(s)$. Именно, пусть

$$\gamma_{s-1} \leqslant t_{n-1} < \gamma_s \leqslant \gamma_{s+1} \leqslant \cdots \leqslant \gamma_{s+r} \leqslant t_n < \gamma_{s+r-1},$$

где в силу леммы 3.3 имеем $r = r(n) \geqslant 0$. Тогда

$$\Delta(n) = s + r - n$$

и

$$\Delta_s = n - s = r - \Delta(n),$$

$$\Delta_{s+1} = n - s - 1 = r - 1 - \Delta(n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_{s+r} = n - s - r = -\Delta(n),$$

откуда

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n} \Delta_m^k = \sum_{m=s}^{s+r} \Delta_m^k = \sum_{j=0}^{r} (j-\Delta(n))^k$$
$$= \sum_{j=0}^{r}\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\Delta^q(n)j^{k-q} = \sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\Delta^q(n)\sum_{j=0}^{r} j^{k-q}.$$

Пользуясь известным свойством чисел Бернулли (см., например, [51; §1 гл. IV]), при $r \geqslant 1$ находим

$$\sum_{j=0}^{r} j^{k-q} = r^{k-q} + \sum_{j=0}^{r-1} j^{k-q} = r^{k-q} + \frac{1}{k-q+1}\sum_{\nu=0}^{k-q}\binom{k-q+1}{\nu}B_\nu r^{k-q+1-\nu} = r^{k-q} + F_{k-q+1}(r).$$

Последнее равенство остается в силе и при $r = 0$, поскольку $F_{k-q+1}(0) = 0$ для любого q, $0 \leqslant q \leqslant k$. Таким образом,

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n} \Delta_m^k = \sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}\Delta^q(n)(r^{k-q} + F_{k-q+1}(r)).$$

Рассмотрим теперь случай, когда промежуток $(t_{n-1}, t_n]$ не содержит ни одной ординаты. В этом случае согласно лемме 3.3 имеем

$$r(n) = N(t_n + 0) - N(t_{n-1} + 0) - 1 = -1.$$

Сумма по $t_{n-1} < \gamma_m \leqslant t_n$ из условия леммы оказывается пустой. Таким образом, достаточно проверить, что правая часть (3.16) обращается в нуль при подстановке $r = -1$. Но это сразу следует из соотношений

$$F_{p+1}(x+1) - F_{p+1}(x) = x^p, \qquad F_{p+1}(0) = 0.$$

Лемма доказана.

Пример 3.1. Пусть $k = 2$. Тогда при $r = r(n) \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n} \Delta_m^2 = \sum_{j=0}^{r}(j-\Delta(n))^2 = \sum_{j=0}^{r}(j^2 - 2j\Delta(n) + \Delta^2(n))$$
$$= \frac{1}{6}r(r+1)(2r+1) - r(r+1)\Delta(n) + (r+1)\Delta^2(n).$$

Правая часть равенства обращается в нуль при $r = -1$, совпадая, таким образом, с левой частью.

Теорема 3.7. *При любом $k \geqslant 1$ имеет место тождество*

$$\sum_{t_N<\gamma_m\leqslant t_{N+M}} \Delta_m^k = (-1)^k T_{0,k} + \alpha^k - \beta^k + F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta), \tag{3.17}$$

где $\alpha = -\Delta(N)$, $\beta = -\Delta(N+M)$.

Доказательство. Согласно лемме 3.5

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^k=\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}r^{k-q}(n)\Delta^q(n)+\sum_{q=0}^{k}\frac{(-1)^q}{k+1-q}\binom{k}{q}\sum_{p=1}^{k-q+1}\binom{k+1-q}{p}B_{k+1-q-p}r^p(n)\Delta^q(n).$$

Суммируя обе части этого равенства по n и обозначая левую часть (3.17) через V_k, находим

$$\begin{aligned}V_k&=\sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}T_{k-q,q}+\sum_{q=0}^{k}\frac{(-1)^q}{k+1-q}\binom{k}{q}\sum_{p=1}^{k-q+1}\binom{k+1-q}{p}B_{k+1-q-p}T_{p,q}\\&=\frac{1}{k+1}T_{k+1,0}+\frac{1}{2}T_{k,0}+\frac{1}{k+1}\sum_{p=1}^{k-1}\binom{k+1}{p}B_{k+1-p}T_{p,0}\\&\quad+\sum_{q=1}^{k}(-1)^q\binom{k}{q}T_{k-q,q}+\sum_{q=1}^{k}\frac{(-1)^q}{k+1-q}\binom{k}{q}\sum_{p=1}^{k-q+1}\binom{k+1-q}{p}B_{k+1-q-p}T_{p,q}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Выразим теперь каждую из сумм $T_{p,0}$, $1\leqslant p\leqslant k+1$, через суммы $T_{p-q,q}$, $1\leqslant q\leqslant p-1$. Для этого воспользуемся тождеством

$$\Delta^p(n)-\Delta^p(n-1)=\Delta^p(n)-(\Delta(n)-r(n))^p=\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{p-q-1}\binom{p}{q}r^{p-q}(n)\Delta^q(n).$$

Суммируя обе его части по n и полагая $D_p=\Delta^p(N+M)-\Delta^p(N)$, будем иметь

$$D_p=\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{p-q-1}\binom{p}{q}T_{p-q,q},$$

$$T_{p,0}=(-1)^{p-1}D_p+\sum_{q=1}^{p-1}(-1)^{q-1}\binom{p}{q}T_{p-q,q}.\tag{3.19}$$

Заменяя в (3.18) величины $T_{p,0}$ их выражениями (3.19), заметим следующее. Так как слагаемое, содержащее $T_{0,k}$, в формулах (3.19) не встречается ни при каком p, то коэффициент, с которым $T_{0,k}$ входит в (3.18), равен $(-1)^k\binom{k}{k}=(-1)^k$.

Далее, при подстановке в (3.18) выражения для $T_{p,0}$, $p\neq k$, возникает слагаемое

$$\frac{(-1)^{p-1}D_p}{k+1}\binom{k+1}{p}B_{k+1-p}=\binom{k+1}{p}\frac{B_{k+1-p}}{k+1}(\alpha^p-\beta^p);$$

коэффициент, с которым в получившееся выражение будет входить сумма $T_{p-q,q}$, $1\leqslant q\leqslant p-1$, равен

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{q-1}}{k+1}\binom{k+1}{p}\binom{p}{q}B_{k+1-p}+\frac{(-1)^q}{k+1-q}\binom{k}{q}\binom{k+1-q}{p-q}B_{k+1-p}\\&\quad=(-1)^{q-1}B_{k+1-p}\left(\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{p}\binom{p}{q}-\frac{1}{k+1-q}\binom{k}{q}\binom{k+1-q}{p-q}\right)=0.\end{aligned}$$

Наконец, при подстановке в (3.18) выражения для $T_{k,0}$ возникает слагаемое

$$\frac{1}{2}(-1)^{k-1}D_k=\frac{1}{2}(\alpha^k-\beta^k);$$

коэффициент при сумме $T_{k-q,q}$, $1 \leqslant q \leqslant k-1$, окажется равным

$$\frac{1}{2}(-1)^{q-1}\binom{k}{q} + (-1)^q\binom{k}{q} + \frac{(-1)^q B_1}{k+1-q}\binom{k}{q}\binom{k+1-q}{k-q} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
V_k &= (-1)^k T_{0,k} + \frac{1}{2}(\alpha^k - \beta^k) + \sum_{p=1,\, p\neq k}^{k+1}\binom{k+1}{p}\frac{B_{k+1-p}}{k+1}(\alpha^p - \beta^p) \\
&= (-1)^k T_{0,k} + \alpha^k - \beta^k + \frac{1}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\binom{k+1}{q}B_q(\alpha^{k+1-q} - \beta^{k+1-q}) \\
&= (-1)^k T_{0,k} + \alpha^k - \beta^k + F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример 3.2. Пусть $k = 2$. Суммируя по n обе части равенства

$$\sum_{t_{n-1}<\gamma_m\leqslant t_n}\Delta_m^2 = \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r - r^2\Delta(n) - r\Delta(n) + r\Delta^2(n) + \Delta^2(n)$$

из примера 3.1, находим

$$V_2 = \frac{1}{3}T_{3,0} + \frac{1}{2}T_{2,0} + \frac{1}{6}T_{1,0} - T_{2,1} - T_{1,1} + T_{1,2} + T_{0,2}. \tag{3.20}$$

Далее, из тождеств

$$\begin{aligned}
\Delta^3(n) - \Delta^3(n-1) &= \Delta^3(n) - (\Delta(n) - r)^3 = 3r\Delta^2(n) - 3r^2\Delta(n) + r^3, \\
\Delta^2(n) - \Delta^2(n-1) &= 2r\Delta(n) - r^2, \\
\Delta(n) - \Delta(n-1) &= r
\end{aligned}$$

суммированием по n находим

$$D_3 = 3T_{1,2} - 3T_{2,1} + T_{3,0}, \qquad D_2 = 2T_{1,1} - T_{2,0}, \qquad D_1 = T_{1,0},$$

откуда

$$T_{3,0} = D_3 - 3T_{1,2} + 3T_{2,1}, \qquad T_{2,0} = -D_2 + 2T_{1,1}, \qquad T_{1,0} = D_1.$$

Подставляя эти выражения в (3.20), будем иметь

$$\begin{aligned}
V_2 &= \left(\frac{1}{3}D_3 - T_{1,2} + T_{2,1}\right) + \left(-\frac{1}{2}D_2 + T_{1,1}\right) + \frac{1}{6}D_1 - T_{2,1} - T_{1,1} + T_{1,2} + T_{0,2} \\
&= T_{0,2} + \frac{1}{3}D_3 - \frac{1}{2}D_2 + \frac{1}{6}D_1.
\end{aligned}$$

Следствие 3.2. *При любом целом $k \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\left|\sum_n \Delta_n^k - (-1)^k\sum_n \Delta^k(n)\right| \leqslant 16k!(0.15\log N)^{k+1}.$$

Доказательство. Прежде всего, пользуясь оценкой леммы I.9, находим

$$|D_p| \leqslant 2H^p,$$

где $H = 0.15\log N$. Далее, замечая, что

$$|B_{2s}| = \frac{2(2s)!}{(2\pi)^{2s}}\,\zeta(2s) < \frac{4(2s)!}{(2\pi)^{2s}},$$

находим

$$|B_q| < 4q!\,(2\pi)^{-q}$$

при любом $q \geqslant 1$, так что

$$\begin{aligned}|V_k - (-1)^k T_{0,k}| &\leqslant 2H^k + |F_{k+1}(\alpha) - F_{k+1}(\beta)| \leqslant 2H^k + \frac{1}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\binom{k+1}{q}|B_q|2H^{k+1-q} \\ &\leqslant 2H^k + \frac{2}{k+1}\sum_{q=0}^{k}\frac{(k+1)!}{(k+1-q)!\,q!}\,\frac{4q!}{(2\pi H)^q}\,H^{k+1} \\ &\leqslant 2H^k + 8k!\,H^{k+1}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(k+1-q)!} < 2H^k + 8(e-1)k!\,H^{k+1} < 14k!\,H^{k+1}.\end{aligned}$$

Из равенств

$$N(t_N + 0) = N + \Delta(N), \qquad N(t_{N+M} + 0) = N + M + \Delta(N+M)$$

следует, что сумма V_k отличается от суммы $\sum_n \Delta_n^k$ не более чем $|\Delta(N)| + |\Delta(N+M)|$ слагаемыми, каждое из которых не превосходит H^k по абсолютной величине. Замечая, что

$$2H\cdot H^k + 14k!\,H^{k+1} \leqslant 16k!\,H^{k+1},$$

приходим к искомому утверждению.

Третье доказательство формул Сельберга (в форме, приведенной в теореме 3.1) получается из следствия теоремы 3.7 и утверждений теорем 2.1 и 2.2.

Замечание 3.2. Отметим и еще одну особенность приведенного доказательства, сближающего его с первым способом вывода формул Сельберга.

Доказательства леммы 3.5, теоремы 3.7 и ее следствия по сути не используют специфику последовательностей $\{\gamma_n\}$, $\{t_n\}$. В действительности аналоги перечисленных утверждений имеют место и в более общей ситуации.

Именно, пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – неубывающие неограниченные последовательности с условием $\beta_1 < \alpha_1 \leqslant \beta_2$. Для фиксированного $n \geqslant 1$ определим номер $m = m(n)$ из неравенств $\beta_{m-1} < \alpha_n \leqslant \beta_m$ и положим $\Delta_n = m - n$. Аналогично, при фиксированном $\nu \geqslant 2$ определим $\mu = \mu(\nu)$ из условий $\alpha_\mu \leqslant \beta_\nu < \alpha_{\mu+1}$ и положим $\Delta(\nu) = \mu - \nu$. Пусть, наконец, $D = D(N)$ обозначает максимум из величин $|\Delta_n|$, $|\Delta(n)|$ по всем $n \leqslant 2N$. Тогда при любом целом $k \geqslant 1$ имеет место оценка

$$\left|\sum_n \Delta_n^k - (-1)^k \sum_n \Delta^k(n)\right| \leqslant 16k!\,D^{k+1}.$$

Не использует специфику последовательностей точек Грама и ординат нулей $\zeta(s)$ и лемма 3.2, на которой построено первое доказательство формул Сельберга. Ее аналог имеет место и в той ситуации, когда точки γ_n и t_n заменяются членами последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям.

3.4. Поведение разностей $t_n - \gamma_n$

Формулы Сельберга показывают, что для почти всех n номер ординаты γ_n отличается от номера m промежутка Грама, ее содержащего, на величину порядка $\sqrt{\log\log n}$.

Утверждения настоящего параграфа выражают тот же факт в терминах разностей $\gamma_n - t_n$. Оказывается, что «в среднем» ордината γ_n отстоит от точки Грама t_n, имеющей тот же номер, на расстояние, в $\sqrt{\log\log n}$ раз превышающее длину промежутка Грама $G_n = (t_{n-1}, t_n]$.

Здесь же доказываются теоремы о дробных моментах и распределении разностей $\gamma_n - t_n$, подобные теоремам 3.2–3.4.

Теорема 3.8. *Пусть k – целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда имеют место формулы*

$$\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}M\left(\frac{\sqrt{\log\log N}}{2\log N}\right)^{2k}\left(1 + \frac{2.4\theta(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\log\log N}}\right),$$

$$\left|\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k-1}\right| < 4c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{M}{\sqrt{\log\log N}}\left(\frac{\sqrt{\log\log N}}{\log N}\right)^{2k-1}.$$

Доказательство. Пусть $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$ для заданного n, так что $\Delta_n = m - n$. Тогда

$$t_{m-1} - t_n < \gamma_n - t_n \leqslant t_m - t_n.$$

В силу леммы 1.1 справедливы равенства

$$t_m - t_n = \frac{\pi\Delta_n}{\vartheta'(t_N)} + \frac{2\pi\theta_1|\Delta_n|M}{N(\log N)^2} = \frac{\pi\Delta_n}{\vartheta'(t_N)}\left(1 + \frac{\pi\theta_2 M}{N\log N}\right),$$

$$t_{m-1} - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - 1)}{\vartheta'(t_N)}\left(1 + \frac{\pi\theta_3 M}{N\log N}\right),$$

из которых следует, что

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta_4)}{\vartheta'(t_N)}\left(1 + \frac{\pi\theta_5 M}{N\log N}\right),$$

где θ_4, θ_5 зависят от n.

Докажем первое соотношение. В силу сказанного выше разность величин

$$\sum_n (\gamma_n - t_n)^{2k} \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k}\sum_n \Delta_n^{2k}$$

не превосходит по модулю суммы

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k}\left\{\frac{M}{N}\sum_n \Delta_n^{2k} + \left(1 + \frac{M}{N}\right)\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}\sum_n |\Delta_n|^{2k-\nu}\right\}. \tag{3.21}$$

Согласно лемме 3.1 первое слагаемое в фигурных скобках не превосходит

$$\frac{M}{N}\cdot M(0.15\log N)^{2k} < N^{-1/3}.$$

Далее, сумму по ν в (3.21) разобьем на три части, обозначая через Σ_1, Σ_2 и Σ_3 вклад от слагаемых, отвечающих соответственно $\nu = 1$, четным ν и нечетным ν. Применяя теорему 3.1, будем иметь

$$\Sigma_1 = 2k\sum_n |\Delta_n|^{2k-1} \leqslant 2kM^{1/2k}\left(\sum_n \Delta_n^{2k}\right)^{1-1/2k} \leqslant 2kM^{1/2k}\{2.03\mathcal{L}_k\}^{1-1/2k}$$

$$\leqslant 2k\cdot 2.03\mathcal{L}_k\left(\frac{k!}{(2k)!}(2\pi)^{2k}\right)^{1/2k} < 21.1\sqrt{\frac{k}{L}}\,\mathcal{L}_k.$$

Аналогично,

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{k} \binom{2k}{2\mu} \cdot 2.03 \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}}$$
$$= 2.03\mathcal{L}_k \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\mu!}{(2\mu)!} \binom{k}{\mu} \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^{\mu} \leqslant 1.02 L_k \left(\left\{1+\frac{4\pi^2}{L}\right\}^k - 1\right) < \frac{9k}{L}\,\mathcal{L}_k.$$

Наконец, пользуясь тем, что числа Δ_n целые, получаем

$$\Sigma_3 = \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k}{2\mu+1} \sum_n |\Delta_n|^{2k-2\mu-1}$$
$$\leqslant \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k}{2\mu+1} \sum_n \Delta_n^{2k-2\mu} \leqslant 2.03 \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k}{2\mu+1} \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}}$$
$$= 4.06\mathcal{L}_k \sum_{\mu=1}^{k-1} \frac{(\mu+1)!}{(2\mu+1)!} \binom{k}{\mu+1} \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^{\mu} < 4.06\mathcal{L}_k \frac{L}{6\pi^2} \sum_{\mu=2}^{k} \binom{k}{\mu} \left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^{\mu}$$
$$< 2.71\mathcal{L}_k \frac{L}{4\pi^2} \left(\left\{1+\frac{4\pi^2}{L}\right\}^k - 1 - \frac{4\pi^2}{L}\right) < \frac{54k^2}{L}\,\mathcal{L}_k.$$

Сложив полученные оценки, убеждаемся, что (3.21) не превосходит

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \left\{N^{-1/3} + \left(1+\frac{M}{N}\right)\mathcal{L}_k \left(21\sqrt{\frac{k}{L}} + \frac{9k}{L} + \frac{54k^2}{L}\right)\right\} < 22\sqrt{\frac{k}{L}} \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k.$$

Так, выражение для исходной суммы принимает вид

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{4.3\theta_1 (c_0 k)^{3/2}}{\sqrt{L}}\right) + 22\theta_2 \sqrt{k} L \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k$$
$$= \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k} \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{4.35\theta_1 (c_0 k)^{3/2}}{\sqrt{L}}\right) = \left(\frac{2\pi}{\log N}\right)^{2k} \mathcal{L}_k \left(1 + \frac{4.4\theta_3 (c_0 k)^{3/2}}{\sqrt{L}}\right).$$

Докажем второе соотношение. Практически дословно повторяя вышеприведенные рассуждения, заключаем, что абсолютное значение момента степени $2k-1$ не превосходит

$$\left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k-1} \left\{\left|\sum_n \Delta_n^{2k-1}\right| + \frac{M}{N} \sum_n |\Delta_n|^{2k-1} + \left(1+\frac{M}{N}\right) \sum_{\nu=1}^{2k-1} \binom{2k-1}{\nu} |\Delta_n|^{2k-\nu-1}\right\}.$$

Обозначим вклад в последнюю сумму от нечетных ν через Σ_1, а от четных ν – через Σ_2; получим

$$\Sigma_1 \leqslant \sum_{\mu=1}^{k} \binom{2k-1}{2\mu-1} \sum_n \Delta_n^{2k-2\mu} \leqslant 2.03 \sum_{\mu=1}^{k} \binom{2k-1}{2\mu-1} \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}} < \frac{40k}{L}\,\mathcal{L}_k,$$

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2\mu} \sum_n |\Delta_n|^{2k-2\mu-1} \leqslant \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2\mu} \sum_n \Delta_n^{2k-2\mu}$$
$$\leqslant 2.03 \sum_{\mu=1}^{k-1} \binom{2k-1}{2\mu} \frac{(2k-2\mu)!}{(k-\mu)!} \frac{ML^{k-\mu}}{(2\pi)^{2(k-\mu)}} < \frac{40k}{L}\,\mathcal{L}_k.$$

Воспользовавшись теоремой 3.1, окончательно находим

$$\begin{aligned}\Big|\sum_n(\gamma_n - t_n)^{2k-1}\Big| &< \left(\frac{\pi}{\vartheta'(t_N)}\right)^{2k-1}\left\{\frac{c_0^{3/2}}{2}\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} + N^{-1/3} + \frac{80k}{L}\mathcal{L}_k\right\} \\ &< \frac{3}{5}c_0^3\left(\frac{2\pi}{\log N}\right)^{2k-1}\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}} \\ &< 4c_0^3\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{M}{\sqrt{\log\log N}}\left(\frac{\sqrt{\log\log N}}{\log N}\right)^{2k-1}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3.9. *Пусть a – произвольное число, отличное от четного натурального числа и удовлетворяющее условию $0 < a \leqslant c_2\sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n |\gamma_n - t_n|^a = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{\log\log N}}{\log N}\right)^a(1+\theta r(a)),$$

где

$$r(a) = \begin{cases} 14.2\left(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{0.5a}, & \text{если } 0 < a \leqslant 1, \\ \dfrac{783a}{\sqrt{\log\log N}}\left(\sqrt{\log\log\log N} + 2.2c_0^{3/2}\sqrt{a}\right), & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 3.2.

Теорема 3.10. *Пусть $\Xi(v)$ – функция распределения величин $\gamma_n - t_n$, т.е.*

$$\Xi(v) = \frac{1}{M}\#\left\{n \;\Big|\; N < n \leqslant N+M,\ \gamma_n - t_n \leqslant v\frac{\sqrt{2\log\log N}}{\log N}\right\}.$$

Тогда при любом u имеет место равенство[3]

$$\Xi(u) = G(u) + \frac{1.79\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}.$$

Кроме того, если $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$, то эта функция удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\Xi(-u)}{G(-u)} = 1 + O(R), \qquad \frac{1-\Xi(u)}{1-G(u)} = 1 + O(R),$$

в которых

$$R = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}},$$

а постоянные в знаках O зависят от ε.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательствам теорем 2.5 и 3.3.

Следствие 3.3. *Пусть $f(x)$ – монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при $x \to +\infty$. Тогда неравенства*

$$\frac{1}{f(n)}\frac{\sqrt{\log\log n}}{\log n} < |\gamma_n - t_n| < f(n)\frac{\sqrt{\log\log n}}{\log n}$$

имеют место для почти всех n.

[3] Остаточный член в формуле для $\Xi(u)$ может быть уточнен. См. замечание 2.4.

Теорема 3.11. *Пусть $f(x)$ – произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при $x \to +\infty$ функция, удовлетворяющая при $N \leqslant x \leqslant N+M$ условиям $a \leqslant f(x) \leqslant b\sqrt{\log\log x}$, где a и b – абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \qquad \delta = 0.5\exp\left\{-(ec_0)^2\frac{\log\log N}{\mathcal{F}^2}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N \leqslant n \leqslant N+M$ найдется не менее $M\delta$ номеров n, удовлетворяющих условию

$$\gamma_n - t_n \leqslant -\frac{\log\log N}{\mathcal{F}\log N},$$

и не менее $M\delta$ номеров, удовлетворяющих условию

$$\gamma_n - t_n > \frac{\log\log N}{\mathcal{F}\log N}.$$

Доказательство этих утверждений почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.6.

3.5. Поведение аргумента дзета-функции Римана в точках разрыва

Функция $S(t)$ кусочно гладкая, имеет разрывы в точках, совпадающих с ординатами нулей $\zeta(s)$, и является монотонно убывающей на всяком промежутке непрерывности (γ_n, γ_{n+1}). Таким образом, правый и левый пределы $S(t)$ в точках разрыва, т.е. величины $S(\gamma_n \pm 0)$, имеют наглядный геометрический смысл: они являются пиками пилообразного графика функции $S(t)$ (см. рис. 2).

Подобно тому, как величины $\Delta(n)$ связаны со значениями функции $S(t)$ в точках Грама (лемма 2.8), величины Δ_n оказываются связанными со значениями $S(t)$ в точках $t = \gamma_n \pm 0$, хотя такая связь имеет более сложный вид (леммы 3.6 и 3.7).

Положим

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Лемма 3.6. *Имеет место равенство*

$$q_n = \Delta_n - \theta_1 + \frac{\theta_2\log N}{4N},$$

где $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m$. Тогда

$$\frac{t_{m-1} - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q_n \leqslant \frac{t_m - t_n}{t_{n+1} - t_n}. \tag{3.22}$$

Пользуясь леммой 1.1, находим

$$\begin{aligned}\frac{t_m - t_n}{t_{n+1} - t_n} &= \left(\frac{\pi(m-n)}{\vartheta'(t_n)} + \frac{\theta_1|m-n|}{n\log n}\right)\left\{\frac{\pi}{\vartheta'(t_n)}\left(1 + \frac{\theta_2}{n\log n}\right)\right\}^{-1} \\ &= \Delta_n\left(1 + (1+o(1))\frac{\theta_3(|\Delta_n|+1)}{n\log n}\right) = \Delta_n\left(1 + \frac{\theta_4}{2N}\right)\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\frac{t_{m-1} - t_n}{t_{n+1} - t_n} = (\Delta_n - 1)\left(1 + \frac{\theta_5}{2N}\right).$$

Воспользовавшись найденными соотношениями и леммой 3.1, из (3.22) получаем

$$q_n = (\Delta_n - \theta_6)\left(1 + \frac{\theta_7}{2N}\right) = \Delta_n - \theta_6 + \frac{\theta_7 \log N}{4N},$$

где $0 \leqslant \theta_6 \leqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *При любом* n, $N < n \leqslant N + M$, *имеют место равенства*

$$S(\gamma_n + 0) = -\Delta_n + \theta\kappa_n + \frac{\theta_1(\log N)^2}{80N}, \qquad S(\gamma_n - 0) = -\Delta_n - (1-\theta)\kappa_n + \frac{\theta_2(\log N)^2}{80N},$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Доказательство. Согласно формуле Римана–Мангольдта и равенству (3.6) имеем

$$S(\gamma_n + 0) = N(\gamma_n + 0) - \frac{1}{\pi}\vartheta(\gamma_n) - 1 = n - 1 - \frac{1}{\pi}\vartheta(\gamma_n) + \theta_1(\kappa_n - 1).$$

Из определения дробей q_n получаем

$$\gamma_n = t_n + h_n, \qquad h_n = q_n(t_{n+1} - t_n), \qquad \vartheta(\gamma_n) = \vartheta(t_n) + h_n\vartheta'(t_n) + \frac{h_n^2}{2}\vartheta''(\xi), \qquad \xi = t_n + \theta_2 h_n.$$

Далее, в силу лемм 1.1 и 3.6 имеем

$$h_n\vartheta'(t_n) = \pi q_n,$$

$$\frac{1}{2}h_n^2\vartheta''(\xi) \leqslant \frac{1}{2}h_n^2\vartheta''(t_n) = \frac{\pi q_n^2}{2N}\left(1 + (1 + o(1))\frac{\log\log N}{\log N}\right) < \frac{2\pi|q_n|}{25}\frac{\log N}{N},$$

откуда

$$\frac{\vartheta(\gamma_n)}{\pi} = n - 1 + q_n + \frac{2\theta_2|q_n|}{25}\frac{\log N}{N}.$$

Таким образом,

$$S(\gamma_n + 0) = -q_n + \theta_1(\kappa_n - 1) + \frac{2\theta_2|q_n|}{25}\frac{\log N}{N} = -\Delta_n + \theta_3\kappa_n + \frac{\theta_4(\log N)^2}{80N},$$

где $0 \leqslant \theta_3 \leqslant 1$. Второе утверждение леммы следует из равенства $S(\gamma_n + 0) - S(\gamma_n - 0) = \kappa_n$. Лемма доказана.

Формулы леммы 3.7 показывают, что для вычисления моментов величин $S(\gamma_n \pm 0)$ необходимы оценки моментов кратностей κ_n.

Цель приведенных ниже утверждений – показать, что в среднем эти кратности ведут себя как постоянные величины. Доказательство этого факта основано на том, что вблизи ординат большой кратности разность

$$S(t + 2h) - S(t), \qquad h \asymp \left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{-1}, \tag{3.23}$$

оказывается достаточно большой и положительной (лемма 3.16). Вместе с тем, верхняя оценка среднего значения функции (3.23) (лемма 3.14) показывает, что мера множества тех точек t, в которых разность (3.23) велика по модулю, является очень маленькой (лемма 3.15). Сопоставление перечисленных утверждений приводит к верхней оценке для числа ординат очень большой кратности и искомой оценке моментов κ_n (леммы 3.17 и 3.18).

Леммы 3.8–3.13 носят вспомогательный характер и необходимы для оценки среднего значения разности (3.23). Они представляют собой интегральные аналоги лемм 2.2, 2.3, 1.3, 2.5, 2.6 и 2.7. Как и выше, мы предполагаем, что

$$T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0, \qquad T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}, \qquad \alpha = \frac{27}{82}, \qquad \varepsilon_1 = 0.9\varepsilon.$$

Кроме того, положим

$$Y = T^{0.1\varepsilon}.$$

Лемма 3.8. *Пусть $c > 0$, m – целое число,*

$$1 \leqslant m \leqslant 0.1 \log M, \qquad 18 \leqslant z \leqslant \left(\frac{M}{5\log N}\right)^{1/(3m)},$$

и пусть последовательности вещественных чисел $a_1(p)$ и $a_2(p)$ подчинены условиям $|a_1(p)| \leqslant c\log p/\log z$, $|a_2(p)| \leqslant c$, когда p пробегает простые числа промежутка $(1, z]$. Тогда для интегралов

$$I_1 = \int_T^{T+H} \left|\sum_{p\leqslant z} \frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it}\right|^{2m} dt, \qquad I_2 = \int_T^{T+H} \left|\sum_{p\leqslant z} \frac{a_2(p)}{p}\, p^{2it}\right|^{2m} dt$$

справедливы следующие оценки:

$$I_1 < 1.1H(c^2m)^m, \qquad I_2 < 1.1H(0.5c^2m)^m.$$

Доказательство. Первое утверждение получим, если воспользуемся леммой I.9, предварительно положив в ней

$$a_n = \sum_{\substack{p_1\ldots p_m = n\\ p_1,\ldots,p_m\leqslant z}} a_1(p_1)\cdots a_1(p_m),$$

и заметим, что $|a_n| \leqslant m!\,c^m$. Подобным образом получается и вторая оценка. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть $\nu \geqslant 0$ – целое число, $y \geqslant 2$, $z \geqslant 1$, $y^3z^2 \leqslant Y$. Тогда имеет место оценка*

$$\int_T^{T+H} \left(\sigma_{y,t} - \frac{1}{2}\right)^{\nu} z^{\sigma_{y,t}-1/2}\, dt < \left(\frac{2}{\log y}\right)^{\nu} H\left(e^{2\log z/\log y} + 52.1\nu!\,\frac{\log T}{\log y}\left(\frac{\log y}{\log Y}\right)^{\nu}\right).$$

Доказательство. Все точки t промежутка $(T, T+H]$ разобьем на два класса, относя к первому те, для которых любой нуль $\beta + i\gamma$ с условием

$$|t-\gamma| \leqslant \frac{y^{3|\beta-1/2|}}{\log y} = \delta(\varrho) = \delta$$

удовлетворяет также и неравенству

$$\left|\beta - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{\log y}.$$

Все остальные точки отнесем ко второму классу. Тогда интеграл I_1 по всем точкам первого класса не превзойдет величину

$$\left(\frac{2}{\log y}\right)^{\nu} z^{2/\log y} H = \left(\frac{2}{\log y}\right)^{\nu} He^{2\log z/\log y}.$$

Далее, рассуждая точно так же, как и при доказательстве леммы 1.9, заключаем, что интеграл I_2 по точкам второго класса не превосходит

$$2 \sum_{\substack{T-\sqrt{Y}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{Y}\\ \beta>0.5}} \int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} 2^{\nu}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^{\nu} z^{2(\beta-1/2)}\,dt$$
$$= \frac{2^{\nu+2}}{\log y} \sum_{\substack{T-\sqrt{Y}<\gamma\leqslant T+H+\sqrt{Y}\\ \beta>0.5}} \left(\beta-\frac{1}{2}\right)^{\nu} (y^3z^2)^{\beta-1/2}.$$

Как было установлено при доказательстве леммы 2.3, последняя сумма ограничена сверху величиной

$$(1+o(1))\cdot 6.5H(\log T)\frac{2\nu!}{(\log Y)^{\nu}}\,.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3.10. *Пусть k, m, r – целые числа, $m\geqslant 0$, $r\geqslant 0$, $m+r=k$, $e^2\leqslant y\leqslant T^{1/(3k)}$. Пусть, далее, $p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_r$ пробегают значения простых чисел из промежутка $(1,y]$, удовлетворяющие условию $p_1\cdots p_m\neq q_1\cdots q_r$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p\leqslant y$ подчинены условию $|a(p)|\leqslant\delta$. Тогда для интеграла*

$$I=\int_T^{T+H}\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_m\\ q_1,\ldots,q_r}}\frac{a(p_1)\cdots a(p_m)\overline{a}(q_1)\cdots\overline{a}(q_r)}{(p_1\cdots p_m\,q_1\cdots q_r)^{0.5}}\left(\frac{q_1\ldots q_r}{p_1\cdots p_m}\right)^{it}dt$$

имеет место оценка

$$|I|<(\delta y)^k.$$

Доказательство. Пусть μ и ν – целые числа, причем $\mu>\nu\geqslant 1$. Тогда имеем, очевидно,

$$\left|\int_T^{T+H}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{it}dt\right|\leqslant 2\left(\log\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1}\leqslant\frac{2\nu}{\log 2}<3\sqrt{\mu\nu}.$$

Интегрируя в I почленно и пользуясь последним неравенством в случае, когда μ и ν обозначают соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $p_1\cdots p_m$ и $q_1\cdots q_r$, получим

$$|I|<\delta^k\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_m\\ q_1,\ldots,q_r}}(p_1\cdots q_r)^{-0.5}\cdot 3(p_1\cdots q_r)^{0.5}\leqslant 3\delta^k(\pi(y))^k<(\delta y)^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Пусть k – целое число, $1\leqslant k\leqslant c\log Y$, где c – достаточно малая абсолютная постоянная, $y=Y^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_T^{T+H}\left|S(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin{(t\log m)}}{\log m}\right|^{2k}dt<\frac{101}{\varepsilon}\left(\frac{1440}{\varepsilon}\right)^{2k}H.$$

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что исходный интеграл не превосходит величину

$$2^{2k-1}((a_1\log{(T+H)})^{2k}j_1+a_2^{2k}j_2),$$

где

$$j_1=\int_T^{T+H}\left(\sigma_{y,t}-\frac{1}{2}\right)^{2k}dt,\qquad j_2=\int_T^{T+H}\left(\sigma_{y,t}-\frac{1}{2}\right)^{2k}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(p)}{p^{\sigma_{y,t}+it}}\right|^{2k}dt.$$

Практически дословно повторяя доказательство леммы 2.5 и пользуясь в соответствующих местах леммой 3.9 вместо леммы 2.3, последовательно получим

$$j_1 < \frac{201}{\varepsilon} H\left(\frac{160k}{\varepsilon\log T}\right)^{2k}, \qquad j_2 < \frac{1}{2}(2\log y)^{2k}(\sqrt{j_3j_5} + \sqrt{j_4j_6}),$$

где

$$j_3 = \int_T^{T+H}\left(\sigma_{y,t} - \frac{1}{2}\right)^{4k} dt < \frac{9.5H}{\varepsilon}\left(\frac{2}{\log y}\right)^{4k},$$

$$j_4 = \int_T^{T+H}\left(\sigma_{y,t} - \frac{1}{2}\right)^{4k} y^{4k(\sigma_{y,t}-1/2)} < \frac{H}{240\varepsilon}\left(\frac{2e^2}{\log y}\right)^{4k},$$

$$j_5,\, j_6 = \int_T^{T+H}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_j(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it}\right|^{4k} dt, \qquad j=1,2, \quad a_1(p) = \frac{\Lambda_y(p)}{\log y}, \quad |a_2(p)| \leqslant \frac{\Lambda_y(p)(\log p)\log yp}{(\log y)^3}.$$

Оценивая интегралы j_5 и j_6 с помощью леммы 3.8 подобно тому, как это делалось при оценке сумм Σ_7, Σ_8 из леммы 2.5, получим

$$j_5 < 1.1H(18k)^{2k}, \qquad j_6 < 1.1H(18a^2k)^{2k}, \quad a = 3.446\,088\,218\ldots,$$

откуда

$$\sqrt{j_3j_5} < \frac{4H}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{(72k)^k}{(\log y)^{2k}}, \qquad \sqrt{j_4j_6} < \frac{H}{14\sqrt{\varepsilon}}\frac{(72e^4a^2k)^k}{(\log y)^{2k}}$$

и, наконец,

$$j_1 < \frac{H}{2\sqrt{\varepsilon}}\left(4(288k)^k + \frac{1}{14}(288e^4a^2k)^k\right) < \frac{H}{25\sqrt{\varepsilon}}(288e^4a^2k)^k.$$

Таким образом, исходный интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2}\left((4a_1^2)^k\frac{201H}{\varepsilon}\left(\frac{160k}{\varepsilon}\right)^{2k}\left(\frac{\log(T+H)}{\log T}\right)^{2k} + (4a_2^2)^k\frac{H}{25\sqrt{\varepsilon}}(288e^4a^2k)^k\right) < \frac{101}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k} H.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.12. *Если выполнены условия леммы 3.11, то имеет место неравенство*

$$\int_T^{T+H}\left|\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin(t\log m)}{\log m} - \sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k} dt < \frac{H}{2\varepsilon}(1552e^4k)^k.$$

Доказательство. Практически дословно повторяя доказательство леммы 2.6 и пользуясь соответствующими обозначениями, заключаем, что интеграл из условия леммы не превосходит

$$4^{2k-1}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4), \qquad I_\nu = \int_T^{T+H} R_\nu(t)\,dt,$$

где

$$R_1(t) = \left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_1(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it}\right|, \qquad R_2(t) = \frac{1}{2}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{a_2(p)}{p}\, p^{2it}\right|,$$

$$R_3(t) = \frac{y^{\sigma_{y,t}-1/2}}{\log y}\int_0^{+\infty} y^{-v}\left|\sum_{p\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(p)\log(py)}{p^{1/2+v}}\, p^{it}\right| dv, \qquad R_4(t) = 2\left(\sigma_{y,t} - \frac{1}{2}\right)\log y,$$

причем

$$|a_1(p)| \leqslant \frac{3\log p}{\log{(y^3)}}, \qquad |a_2(p)| \leqslant 1$$

при $p \leqslant y^3$.

Оценивая интегралы I_1, I_2 по лемме 3.8, находим

$$I_1 < 1.1H(9k)^k, \qquad I_2 < 1.1Hk^k.$$

Далее, применив к $R_3(t)$ неравенство Гёльдера, будем иметь

$$I_3 \leqslant \frac{1}{(\log y)^{4k-1}} \int_0^{+\infty} y^{-v} \int_T^{T+H} y^{2k(\sigma_{y,t}-1/2)} \Bigl| \sum_{p \leqslant y^3} \frac{\Lambda_y(p)\log{(py)}}{p^{1/2+v}}\, p^{it} \Bigr|^{2k} dt\, dv$$
$$\leqslant \int_T^{T+H} y^{2k(\sigma_{y,t}-1/2)} \Bigl| \sum_{p \leqslant y^3} \frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it} \Bigr|^{2k} dt \leqslant \sqrt{I_5}\sqrt{I_6},$$

где

$$|a_3(p)| \leqslant \frac{\Lambda_y(p)\log{(py)}}{(\log y)^2} \leqslant \frac{6\log p}{\log{(y^3)}}\,,$$
$$I_5 = \int_T^{T+H} y^{4k(\sigma_{y,t}-1/2)}\, dt, \qquad I_6 = \int_T^{T+H} \Bigl| \sum_{p \leqslant y^3} \frac{a_3(p)}{\sqrt{p}}\, p^{it} \Bigr|^{4k} dt.$$

Оценивая последние интегралы с помощью лемм 3.9 и 3.8, получим

$$I_5 < H\left(e^{8k} + 52.1\frac{\log T}{\log y}\right) < \frac{2H}{\varepsilon}\, e^{8k}, \quad I_6 < 1.1H(72k)^{2k},$$

откуда

$$I_3 < \frac{3H}{2\sqrt{\varepsilon}}(72e^4k)^k.$$

Наконец, в силу леммы 3.9 имеем

$$I_4 < (2\log y)^{2k}\left(\frac{2}{\log y}\right)^{2k} H\left(1 + 52.1\frac{\log T}{\log y}(2k)!\left(\frac{\log y}{\log Y}\right)^{2k}\right)$$
$$= 16^k H\left(1 + \frac{521}{\varepsilon}\frac{(2k)!}{(8k+3)^{2k-1}}\right) < 16^k\frac{95H}{\varepsilon}\,.$$

Сложив полученные оценки, находим

$$4^{2k-1}\sum_{\nu=1}^{4} I_\nu < \frac{H}{4\varepsilon}(16\cdot 72e^4k)^k\left\{1.1\varepsilon\left(\frac{1}{8e^4}\right)^k + 1.1\varepsilon\left(\frac{1}{144e^4}\right)^k + \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{2} + 95\varepsilon\left(\frac{2}{9e^4k}\right)^k\right\}$$
$$< \frac{H}{4\varepsilon}(1152e^4k)^k.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.13. *Если выполнены условия леммы 3.11, то имеет место неравенство*

$$\int_T^{T+H} \Bigl| S(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{p \leqslant y} \frac{\sin{(t\log p)}}{\sqrt{p}} \Bigr|^{2k} dt < \frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k} H.$$

Доказательство. Воспользовавшись оценками лемм 3.11 и 3.12 и неравенством Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
&\int_T^{T+H}\left|S(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}dt\\
&\quad\leqslant 2^{2k-1}\biggl\{\int_T^{T+H}\left|S(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin(t\log m)}{\log m}\right|^{2k}dt\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\pi^{2k}}\int_T^{T+H}\left|\sum_{m\leqslant y^3}\frac{\Lambda_y(m)}{m^{\sigma_{y,t}}}\frac{\sin(t\log m)}{\log m}-\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k}dt\biggr\}\\
&\quad\leqslant 2^{2k-1}H\left\{\frac{101}{\varepsilon}\left(\frac{1440k}{\varepsilon}\right)^{2k}+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{1152e^4k}{\pi^2}\right)^{k}\right\}<\frac{51H}{\varepsilon}\left(\frac{2880k}{\varepsilon}\right)^{2k}<\frac{c_0}{56}(c_0k)^{2k}H.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.14. *Пусть k – целое число, $1\leqslant k\leqslant c\log Y$, где c – достаточно малая абсолютная постоянная, и пусть $h=\pi v(\log T)^{-1}$, где $0<v<\log T$ – произвольное число. Тогда для интеграла*

$$I_{2k}=\int_T^{T+H}(S(t+2h)-S(t))^{2k}\,dt$$

имеет место оценка

$$I_{2k}<\exp\left\{\frac{v\varepsilon}{40c_0\sqrt{ke}}\right\}\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}H,$$

где $c_0=2880\varepsilon^{-1}$.

Доказательство. Полагая $y=Y^{1/(8k+3)}$, находим

$$S(t+2h)-S(t)=-V(t)+W(t),$$

где

$$V(t)=\frac{1}{\pi}(U(t)+\overline{U}(t)),\qquad U(t)=\sum_{p\leqslant y}\frac{a(p)}{\sqrt{p}}\,p^{it},\qquad a(p)=p^{ih}\sin(h\log p),$$

$$W(t)=R(t+2h)-R(t),\qquad R(t)=S(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant y}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}.$$

Следовательно,

$$I_{2k}=\sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^{\nu}\binom{2k}{\nu}I(\nu),\qquad I(\nu)=\int_T^{T+H}V^{\nu}(t)W^{2k-\nu}(t)\,dt.$$

В силу неравенства Гёльдера имеем оценку

$$|I(\nu)|\leqslant\left(\int_T^{T+H}V^{2k}(t)\,dt\right)^{\nu/2k}\left(\int_T^{T+H}W^{2k}(t)\,dt\right)^{1-\nu/2k}=(I(2k))^{\nu/2k}(I(0))^{1-\nu/2k},$$

откуда

$$I_{2k}\leqslant\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}|I(\nu)|\leqslant\left\{(I(2k))^{1/2k}+(I(0))^{1/2k}\right\}^{2k}.$$

Согласно лемме 3.10 имеем

$$I(2k) = \pi^{-2k}\int_T^{T+H}(U(t)+\overline{U}(t))^{2k}\,dt = \pi^{-2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}\int_T^{T+H}U^{\nu}(t)\overline{U}^{\,2k-\nu}(t)\,dt$$
$$< \pi^{-2k}\left\{\binom{2k}{k}k!\,H\left(\sum_{p\leqslant y}\frac{|a(p)|^2}{p}\right)^k + \sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}\left(y\max_{p\leqslant y}|a(p)|\right)^{2k}\right\}.$$

Поскольку

$$|a(p)|\leqslant h\log p\leqslant h\log y,\qquad y^{2k} = Y^{2k/(8k+3)} < Y^{1/4},$$

из леммы I.2 получаем оценку

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{|a(p)|^2}{p}\leqslant h^2(\log y)\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p} < (h\log y)^2.$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$\frac{(2k)!}{k!} < \sqrt{2}\left(\frac{4k}{e}\right)^k,$$

находим

$$I(2k)\leqslant \pi^{-2k}\left\{\sqrt{2}\left(\frac{4k}{e}\right)^k H(\log y)^{2k} + 3Y^{3/8}(2h\log y)^{2k}\right\}$$
$$< \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k}{e}}\,h\log y\right)^{2k}H = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{k}{e}}\,\frac{\pi v}{\log T}\,\frac{0.1\varepsilon\log T}{8k+3}\right)^{2k}H\leqslant\frac{3}{2}\left(\frac{v\varepsilon}{40\sqrt{ek}}\right)^{2k}H.$$

В силу леммы 3.14

$$I(0)\leqslant 2^{2k-1}\int_T^{T+H}(R^{2k}(t+2h)+R^{2k}(t))\,dt < \frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}H.$$

Поэтому, возвращаясь к оценке I_{2k}, будем иметь

$$I_{2k}\leqslant H\left\{\left(\frac{c_0}{56}\right)^{1/2k}2c_0k + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2k}\frac{v\varepsilon}{40\sqrt{ek}}\right\}^{2k}$$
$$= \frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}H\left\{1+\left(\frac{84}{c_0}\right)^{1/2k}\frac{v\varepsilon}{40c_0\sqrt{ke}}\frac{1}{2k}\right\}^{2k}\leqslant\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}\exp\left\{\frac{v\varepsilon}{40c_0\sqrt{ke}}\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.15. *Пусть h удовлетворяет условиям леммы 3.14, и пусть $D(\lambda)$ – множество тех t из промежутка $T\leqslant t\leqslant T+H$, для которых*

$$|S(t+2h)-S(t)|\geqslant\lambda.$$

Тогда при любом $\lambda>0$ справедлива оценка

$$\operatorname{mes} D(\lambda)\leqslant\frac{c_0e^2}{56}\exp\left\{\frac{v\varepsilon}{20\sqrt{c_0\lambda}}\right\}H\exp\left\{-\frac{\lambda}{ec_0}\right\}.$$

Доказательство. Если $\lambda > 0.3\log T$, то $\operatorname{mes} D(\lambda) = 0$ в силу леммы I.9. Если $0 < \lambda \leqslant 4ec_0$, то искомая оценка следует из тривиальной:

$$\operatorname{mes} D(\lambda) \leqslant H \leqslant e^{4-\lambda/(ec_0)} H < \frac{c_0 e^2}{56} H \exp\left\{-\frac{\lambda}{ec_0}\right\}.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $4ec_0 < \lambda \leqslant 0.3\log T$. Положим $k = [\lambda/(2ec_0)]$, так что

$$2 \leqslant k \leqslant \frac{\log Y}{1980e} \leqslant c\log Y.$$

Интегрируя обе части неравенства

$$(S(t+2h) - S(t))^{2k} \geqslant \lambda^{2k}$$

по множеству $D(\lambda)$, в силу леммы 3.14 получим

$$\lambda^{2k} \cdot \operatorname{mes} D(\lambda) \leqslant \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2k}\, dt \leqslant \frac{c_0}{56} \exp\left\{\frac{v\varepsilon}{40c_0\sqrt{ek}}\right\}(2c_0k)^{2k} H,$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{mes} D(\lambda) &\leqslant \frac{c_0}{56} \exp\left\{\frac{v\varepsilon}{40c_0\sqrt{ek}}\right\}\left(\frac{2c_0k}{e\lambda}\right)^{2k} H \\ &\leqslant \frac{c_0}{56} \exp\left\{\frac{v\varepsilon}{40c_0\sqrt{e}}\sqrt{\frac{4ec_0}{\lambda}}\right\} e^{-2k} H \leqslant \frac{c_0e^2}{56} \exp\left\{\frac{v\varepsilon}{20\sqrt{c_0\lambda}}\right\} H \exp\left\{-\frac{\lambda}{ec_0}\right\}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.16. *Пусть h удовлетворяет условиям леммы 3.14, и пусть γ – ордината нуля $\zeta(s)$ с условием $T \leqslant \gamma - h < \gamma \leqslant T + H$. Пусть, наконец, промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ содержит ровно m ординат нулей $\zeta(s)$, кратность каждой из которых равна j. Тогда при любом t из промежутка $(\gamma - 2h, \gamma - h]$ справедливо неравенство*

$$S(t+2h) - S(t) \geqslant mj - v.$$

Доказательство. Возьмем произвольное число t, $\gamma - 2h < t \leqslant \gamma - h$. Пусть $\gamma^{(1)} < \cdots < \gamma^{(l)}$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие в промежуток $(t, t+2h]$, и пусть $\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(l)}$ – их кратности.

Пусть, далее, (a, b) – промежуток, целиком лежащий в $(t, t+2h]$ и не содержащий точек разрыва $S(t)$. Записывая разность значений $S(t)$ на концах этого промежутка с помощью формулы конечных приращений, получим

$$S(b) - S(a) = (b-a)S'(\xi) = -(b-a)\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{\xi}{2\pi} + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)\right),$$

где $a < \xi < b$. Так как $\log\xi = \log T + O(HT^{-1})$, то

$$S(b) - S(a) = -(b-a)\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{H}{T}\right)\right) = -(b-a)\left(\frac{v}{2h} - \frac{\log 2\pi}{2\pi} + O\left(\frac{H}{T}\right)\right).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем тождество

$$\begin{aligned}S(t+2h) - S(t) = \{S(t+2h) - S(\gamma^{(l)}+0)\} + \sum_{r=1}^{l}(S(\gamma^{(r)}+0) - S(\gamma^{(r)}-0)) \\ + \sum_{r=2}^{l}(S(\gamma^{(r)}-0) - S(\gamma^{(r-1)}+0)) + (S(\gamma^{(1)}-0) - S(t)).\end{aligned}$$

Замечая, что $S(\gamma^{(r)}+0)-S(\gamma^{(r)}-0)=\kappa^{(r)}$, получим

$$\begin{aligned}
&S(t+2h)-S(t)\\
&\quad=\kappa^{(1)}+\cdots+\kappa^{(l)}-\left(\frac{v}{2h}-\frac{\log 2\pi}{2\pi}+O\left(\frac{H}{T}\right)\right)\\
&\qquad\qquad\times\{(t+2h-\gamma^{(l)})+(\gamma^{(l)}-\gamma^{(l-1)})+\cdots+(\gamma^{(2)}-\gamma^{(1)})+(\gamma^{(1)}-t)\}\\
&\quad=\kappa^{(1)}+\cdots+\kappa^{(l)}-2h\left(\frac{v}{2h}-\frac{\log 2\pi}{2\pi}+O\left(\frac{H}{T}\right)\right).
\end{aligned}$$

Поскольку $\gamma-h\geqslant t$ и $\gamma\leqslant t+2h$, то промежуток $(\gamma-h,\gamma]$ целиком содержится в промежутке $(t,t+2h]$. Но тогда из условия леммы следует, что в ряде $\kappa^{(1)},\dots,\kappa^{(l)}$ найдется не менее m чисел, бо́льших или равных j. Следовательно,

$$S(t+2h)-S(t)\geqslant mj-2h\left(\frac{v}{2h}-\frac{\log 2\pi}{2\pi}+O\left(\frac{H}{T}\right)\right)>mj-v.$$

Лемма доказана.

Пусть $N_j(T)$ обозначает количество ординат нулей $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике $0<\operatorname{Re}s<1$, $0<\operatorname{Im}s\leqslant T$, кратность которых равна j.

Лемма 3.17. *При любом $j\geqslant ec_0+1$ имеет место оценка*

$$N_j(T+H)-N_j(T)<0.832\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}.$$

Доказательство. Положим $h=\pi v(\log T)^{-1}$, где $v=ec_0$. Пусть $\gamma^{(1)}$ – наибольшая из ординат кратности j на промежутке $(T,T+H]$. Положим $E_1=(\gamma^{(1)}-h,\gamma^{(1)}]$ и обозначим через $\gamma^{(2)}$ наибольшую из ординат кратности j на промежутке $(T,\gamma^{(1)}-h]$. Полагая $E_2=(\gamma^{(2)}-h,\gamma^{(2)}]$, через $\gamma^{(3)}$ обозначим наибольшую из ординат кратности j на промежутке $(T,\gamma^{(2)}-h]$ и т.д.

Продолжим это построение до тех пор, пока не отыщем ординату $\gamma^{(r)}$ кратности j такую, что $\gamma^{(r)}-h<T\leqslant\gamma^{(r)}$, или же такую, что промежуток $(T,\gamma^{(r)}-h]$ не будет содержать ни одной ординаты кратности j. В каждом из случаев положим $E_r=(\gamma^{(r)}-h,\gamma^{(r)}]$.

Промежутки $E_1,E_2,\dots,E_r$ попарно не пересекаются, имеют одинаковую длину h и в их объединении содержатся все ординаты кратности j, попавшие в промежуток $(T,T+H]$. Разобьем множество $E_1,E_2,\dots,E_r$ на классы $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\dots$, относя к классу $\mathcal{E}_m$ те из промежутков, которые содержат ровно m ординат кратности j. Если k_m – число элементов в $\mathcal{E}_m$, то

$$N_j(T+H)-N_j(T)\leqslant 1\cdot k_1+2\cdot k_2+\cdots+m\cdot k_m+\cdots\,. \tag{3.24}$$

Оценим сверху каждую из величин k_m. Допустим, что промежуток $E=(\gamma-h,\gamma]$ принадлежит $\mathcal{E}_m$. Обозначим $E'=E-h=(\gamma-2h,\gamma-h]$. Согласно лемме 3.16 при любом $t\in E'$ имеем неравенство

$$S(t+2h)-S(t)\geqslant mj-v.$$

Так как E' содержится в $(T-2h,T+H]$, то, обозначая через $D(\lambda)$ множество точек $t\in(T-2h,T+H]$, для которых $|S(t+2h)-S(t)|\geqslant\lambda$, заключаем, что E' целиком содержится в $D(mj-v)$.

Проведя подобные рассуждения для каждого промежутка E из $\mathcal{E}_m$, убеждаемся, что все k_m промежутков лежат в $D(mj-v)$. Так как все они имеют одну и ту же длину h и попарно не пересекаются, то их общая длина не превосходит меру множества $D(mj-v)$, т.е. $k_mh\leqslant\operatorname{mes}D(mj-v)$. Согласно лемме 3.15 имеем оценки

$$\operatorname{mes}D(mj-v)\leqslant\frac{c_0e^2}{56}\exp\left\{\frac{v\varepsilon}{20\sqrt{c_0}}\frac{1}{\sqrt{mj-v}}\right\}H\exp\left\{-\frac{mj-v}{ec_0}\right\}$$

$$\leqslant \frac{c_0e^3}{56}\exp\left\{\frac{e}{20}\sqrt{c_0}\varepsilon\right\}H\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\},$$

откуда

$$k_m \leqslant \frac{c_0e^3}{56h}\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}H\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\} = \frac{e^2}{28}\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\}.$$

Возвращаясь к неравенству (3.24), получим

$$\begin{aligned}N_j(T+H)-N_j(T) &< \frac{e^2}{28}\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\sum_{m=1}^{+\infty} m\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\} \\ &\leqslant \frac{e^2}{28}\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}(1-e^{-j/ec_0})^{-2}\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\} \\ &< \frac{e^2}{28}\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-2}\exp\left\{6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right\}\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{mj}{ec_0}\right\}.\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $\varepsilon < 10^{-3}$, окончательно находим

$$N_j(T+H)-N_j(T) < 0.832\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}.$$

Лемма доказана.

Пусть $a > 0$. Под суммой

$$K_0(a) = K_0(a;N,M) = \sum_n \kappa_n^a$$

будем понимать сумму величин κ_n^a по всем подряд идущим ординатам γ_n, $N < n \leqslant N+N$. Через

$$K_1(a) = K_1(a;N,M) = {\sum_n}' \kappa_n^a$$

будем обозначать сумму лишь по различным ординатам γ_n, $N < n \leqslant N+M$.

Так, если выполнены соотношения (3.3), то в $K_0(a)$ войдут все слагаемые $\kappa_l^a,\ldots,\kappa_{l+p-1}^a$, в то время как в $K_1(a)$ из всех перечисленных войдет лишь слагаемое κ_l^a.

Несложно заметить, что так определенные суммы K_0 и K_1 при любом $a \geqslant 0$ связаны соотношением

$$K_0(a) = {\sum_n}' \kappa_n\cdot\kappa_n^a = K_1(a+1).$$

Лемма 3.18. *Для любого $a \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$K_1(a) < 2.3c_0(ec_0)^a\Gamma(a+1)M.$$

Доказательство. Положим $T = \gamma_N$, $H = \gamma_{N+M}-\gamma_N$. Замечая, что

$$N(T+H)-N(T) = (1+o(1))\frac{H}{2\pi}(\log T) = (1+o(1))M,$$

с помощью леммы 3.17 находим

$$K_1(a) = \left(\sum_{n:\ \kappa_n<ec_0+1} + \sum_{n:\ \kappa_n\geqslant ec_0+1}\right)\kappa_n^a$$

$$\leqslant (ec_0+1)^a(N(T+H)-N(T)) + 0.832\frac{H}{2\pi}(\log T)\sum_{j\geqslant ec_0+1} j^a \exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}$$
$$= (1+o(1))M\biggl((ec_0+1)^a + 0.832\sum_{j\geqslant ec_0+1} j^a \exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\}\biggr). \tag{3.25}$$

Функция $f(u) = u^a\exp\left(-u/(ec_0)\right)$ возрастает на промежутке $1\leqslant u\leqslant u_a$, где $u_a = aec_0$, достигает в точке u_a максимума, равного

$$u_a^a e^{-a} = (ac_0)^a, \tag{3.26}$$

после чего монотонно убывает. Определяя целое число m из условий $m < u_a \leqslant m+1$ и оценивая слагаемые суммы в правой части (3.25), отвечающие $j = m, m+1$, величиной (3.26), а сумму всех прочих – интегралами от функции $f(u)$, находим

$$\sum_{j\geqslant ec_0+1} j^a\exp\left\{-\frac{j}{ec_0}\right\} \leqslant \biggl(\int_0^m + \int_{m+1}^{+\infty}\biggr)u^a\exp\left\{-\frac{u}{ec_0}\right\}du + 2(ac_0)a$$
$$< \int_0^{+\infty} u^a\exp\left\{-\frac{u}{ec_0}\right\}du + 2(ac_0)a = (ac_0)^{a+1}\Gamma(a+1) + 2(ac_0)a$$
$$< (ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1)\biggl(1+\frac{2}{ec_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\biggr) \leqslant \biggl(1+\frac{1}{ec_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\biggr)(ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1).$$

Таким образом,

$$K_1(a) < (1+o(1))M\biggl((ec_0+1)^a + 0.832\biggl(1+\frac{1}{ec_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\biggr)(ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1)\biggr)$$
$$< (ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1)\biggl(\frac{b}{ec_0}+0.833\biggr),$$

где

$$b = \biggl(1+\frac{1}{ec_0}\biggr)^a\frac{1}{\Gamma(a+1)}.$$

Если $1\leqslant a\leqslant e$, то

$$b \leqslant \biggl(1+\frac{1}{ec_0}\biggr)^e < \exp\left\{\frac{1}{c_0}\right\};$$

если же $a > e$, то в силу формулы Стирлинга

$$b < \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\biggl(\frac{e}{a}\biggr)^a\biggl(1+\frac{1}{ec_0}\biggr)^a < \biggl(\frac{e}{a}+\frac{1}{ac_0}\biggr)^a < \biggl(1+\frac{1}{ac_0}\biggr)^a < \exp\left\{\frac{1}{c_0}\right\}.$$

Следовательно, $b(ec_0)^{-1} < 10^{-3}$ и

$$K_1(a) < 0.834(ec_0)^{a+1}\Gamma(a+1) < 2.3c_0(ec_0)^a\Gamma(a+1).$$

Лемма доказана.

Теперь в нашем распоряжении имеются все средства, необходимые для доказательства теорем о моментах величин $S(\gamma_n\pm 0)$.

Теорема 3.12. *Пусть k – целое число, $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{\log\log N}$. Тогда имеют место соотношения*

$$\sum_n S^{2k}(\gamma_n\pm 0) = \frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi)^{2k}}(\log\log N)^k\biggl(1+\frac{215\theta_1\sqrt{c_0}(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\log\log N}}\biggr),$$

$$\left|\sum_n S^{2k-1}(\gamma_n \pm 0)\right| < 28.2c_0^2\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{M(\log\log N)^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение, выбрав для определенности знак “+” в выражении $S(\gamma_n \pm 0)$. Если $|\theta| \leqslant 1$, то из леммы I.9 и формулы конечных приращений следует, что

$$\left(S(\gamma_n+0)+\frac{\theta(\log N)^2}{80N}\right)^{2k} = S^{2k}(\gamma_n+0)+\frac{2\theta_1 k}{N}(0.15\log N)^{2k+1}.$$

Отсюда и из леммы 3.7 несложно теперь заключить, что суммы

$$\sum_n S^{2k}(\gamma_n+0) \qquad \text{и} \qquad \sum_n \Delta_n^{2k}$$

различаются по модулю на величину, не превосходящую

$$\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}w_\nu+\frac{2kM}{N}(0.15\log N)^{2k+1},$$

где

$$w_\nu = \sum_n |\Delta_n|^{2k-\nu}\kappa_n^\nu.$$

Пользуясь оценкой леммы 3.18, утверждением теоремы 3.1 и обозначениями теоремы 2.1, находим

$$\begin{aligned} w_\nu &\leqslant \left(\sum_n \Delta_n^{2k}\right)^{1-\nu/2k}\left(\sum_n \kappa_n^{2k}\right)^{\nu/2k} = \left(\sum_n \Delta_n^{2k}\right)^{1-\nu/2k}\left({\sum_n}' \kappa_n^{2k+1}\right)^{\nu/2k} \\ &\leqslant (2.03\mathcal{L}_k)^{1-\nu/2k}(2.3ec_0^2(ec_0)^{2k}(2k+1)!M)^{\nu/2k} \leqslant 2.03\mathcal{L}_k q^\nu, \end{aligned}$$

где

$$q = \left\{\frac{2.3c_0(ec_0)^{2k+1}(2k+1)!M}{2.03\mathcal{L}_k}\right\}^{1/2k} < \frac{2\pi ec_0}{\sqrt{L}}(3.08c_0^2(2k+1)k!)^{1/2k} < \frac{6.08\pi e\sqrt{k}c_0^{1+1/k}}{\sqrt{L}}. \quad (3.27)$$

Несложно проверить, что $q < 1/116k$ при любом k. Действительно, если $1 \leqslant k \leqslant 100$, то

$$q < \frac{60.8\pi ec_0^2}{\sqrt{L}} < \frac{1}{116k};$$

если же $100 < k \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$, то

$$q \leqslant \frac{6.08\pi e}{k}\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}}c_0^{1/k-1/2} \leqslant \frac{6.08\pi e}{k}\frac{3}{4\pi}c_0^{-0.49} < \frac{1}{116k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}w_\nu &< 2.03\mathcal{L}_k\sum_{\nu=1}^{2k}\binom{2k}{\nu}q^\nu = 2.03\mathcal{L}_k((1+q)^{2k}-1) < 4.06kq(1+q)^{2k}\mathcal{L}_k \\ &< 4.06\left(1+\frac{1}{116k}\right)^{2k}6.08\pi e\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}}c_0^{1/k-1/2}\mathcal{L}_k < 214.5\sqrt{c_0}\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{L}}\mathcal{L}_k. \end{aligned}$$

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, найдем, что модуль разности между суммами

$$\sum_n S^{2k-1}(\gamma_n+0) \qquad \text{и} \qquad \sum_n \Delta_n^{2k-1}$$

не превосходит

$$\sum_{\nu=1}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}w_\nu + \frac{kM}{N}(0.15\log N)^{2k}, \qquad w_\nu = \sum_n |\Delta_n|^{2k-\nu-1}\varkappa_n^\nu.$$

Дважды применим к w_ν неравенство Гёльдера, получим

$$w_\nu \leqslant \biggl(\sum_n \Delta_n^{2k}\biggr)^{1-\nu+1/2k}\biggl(\sum_n \varkappa_n^{2k\nu/\nu+1}\biggr)^{\nu+1/2k} \leqslant \biggl(\sum_n \Delta_n^{2k}\biggr)^{1-\nu+1/2k}\biggl(\sum_n \varkappa_n^{2k}\biggr)^{\nu/2k} M^{1/2k}.$$

Далее, воспользовавшись теоремой 3.1 и леммой 3.18, будем иметь

$$\begin{aligned} w_\nu &\leqslant M^{1/2k}(2.03\mathcal{L}_k)^{1-\nu+1/2k}(2.3c_0(ec_0)^{2k+1}(2k+1)!\,M)^{\nu/2k} \\ &\leqslant \frac{2.03\mathcal{L}_k}{\sqrt{L}}\,2\pi\biggl(\frac{k!}{(2k)!}\biggr)^{1/2k} q^\nu < \frac{4.06\pi\mathcal{L}_k}{\sqrt{kL}}\frac{\sqrt{e}}{2}\,q^\nu < \frac{10.52\mathcal{L}_k}{kL}\,q^\nu, \end{aligned}$$

где q определено равенством (3.27). Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{2k-1}\binom{2k-1}{\nu}w_\nu &< \frac{10.52\mathcal{L}_k}{\sqrt{kL}}((1+q)^{2k-1}-1) < \frac{10.52\mathcal{L}_k}{\sqrt{kL}}\,2kq(1+q)^{2k} \\ &< 1092.5\frac{kc_0^{1+1/k}}{L}\biggl(1+\frac{1}{116k}\biggr)^{2k}\mathcal{L}_k < 1111.5\frac{kc_0^2}{L}\,\mathcal{L}_k < 28.16c_0^2\frac{(2k)!}{(k-1)!}\frac{ML^{k-1}}{(2\pi)^{2(k-1)}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3.13. *Пусть a – произвольное число, отличное от четного натурального числа и удовлетворяющее условию $0<a\leqslant c_3\sqrt[3]{\log\log N}$, $c_3=(6c_0)^{-2}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n |S(\gamma_n\pm 0)|^a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)(\log\log N)^{a/2}(1+\theta r(a)),$$

где

$$r(a) = \begin{cases} 22.2c_0^2\biggl(\dfrac{\log\log\log N}{\log\log N}\biggr)^{0.5a}, & \text{если } 0<a\leqslant 1, \\ \dfrac{782a}{\sqrt{\log\log N}}(\sqrt{\log\log\log N}+8.6c_0^3\sqrt{a}), & \text{если } a>1. \end{cases}$$

Доказательство. Положив

$$\delta_n = \varkappa_n + \frac{(\log N)^2}{80N},$$

в силу леммы 3.7 получим $|S(\gamma_n\pm 0)| = |\Delta_n| + \theta\,\delta_n$. В случае, когда $0<a\leqslant 1$, пользуясь утверждениями теоремы 3.2 и леммы 3.18, находим

$$\begin{aligned} \sum_n |S(\gamma_n\pm 0)|^a &= \sum_n |\Delta_n|^a + \theta\biggl(\sum_n \varkappa_n + \biggl(\frac{(\log N)^2}{80N}\biggr)^a\biggr) \\ &= \sum_n |\Delta_n|^a + \theta_1(2.3c_0(ec_0)^{1+a}\Gamma(a+2)+1)M = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\,\Gamma\biggl(\frac{a+1}{2}\biggr)L^{a/2}(1+\theta_2 R_a), \end{aligned}$$

где
$$R_a = 14.1\left(\frac{\log L}{L}\right)^{a/2} + 2.31e\sqrt{\pi}c_0^2\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma((a+1)/2)}\left\{\frac{\pi e c_0}{\sqrt{L}}\right\}^a < 22.2c_0^2\left(\frac{\log L}{L}\right)^{a/2}.$$
В случае $a > 1$ применим рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2.3. Получим
$$\sum_n |S(\gamma_n \pm 0)|^a = \sum_n |\Delta_n|^a + \theta(u + 3v + 9w),$$
где
$$u = \sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}u_\nu, \qquad v = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}v_\nu, \qquad w = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}w_\nu,$$
а u_ν, v_ν, w_ν – суммы вида
$$\tau_{\nu,c} = \sum_n |\Delta_n|^{a-\nu-c}\delta_n^{\nu+c}.$$
Здесь, как и выше, a представлено в виде $k+b$, где $k \geqslant 0$ целое, $1 \leqslant b \leqslant 2$, а c принимает значения $0, 1$ и b соответственно.

Далее, при $1 \leqslant a \leqslant c_3\sqrt[3]{L}$ из теоремы 3.2 получаем оценку
$$\sum_n |\Delta_n|^a \leqslant \mathcal{L}_a\left(1 + 782\left(c_3\frac{\sqrt{\log L}}{\sqrt[6]{L}} + \frac{6.6}{\pi}\sqrt{\frac{2}{e}}\,c_0^{-1.5}\right)\right) < 1.00025\mathcal{L}_a = I_a,$$
где обозначено
$$\mathcal{L}_a = \frac{M}{\pi^a\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)L^{a/2}.$$
В силу леммы 3.18
$$\sum_n \delta_n^a < 1.001\sum_n \kappa_n^a < 2.301c_0(ec_0)^{1+a}\Gamma(a+2)M = J_a.$$
Следовательно,
$$\tau_{\nu,c} \leqslant I_a q^{\nu+c}, \qquad q = \left(\frac{J_a}{I_a}\right)^{1/a}.$$
Заметим теперь, что
$$\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma((a+1)/2)} = \frac{2^a(a+1)}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right) \leqslant \sqrt{2e}\,a^{3/2}\left(\frac{2a}{e}\right)^{a/2}.$$
Поэтому
$$q^a = \frac{J_a}{I_a} < 25.85a^{3/2}\left(\pi c_0\sqrt{\frac{2ae}{L}}\right)^a, \qquad q < 190c_0^3\sqrt{\frac{a}{L}} < \frac{1}{a},$$
откуда $u < I_a a e q$, $v, w < I_a e q$, так что
$$u + 3v + 9w < I_a(a+12)eq < 6716\frac{a^{3/2}c_0^3}{\sqrt{L}}.$$
Таким образом,
$$\sum_n |S(\gamma_n \pm 0)|^a = \mathcal{L}_a(1 + \theta R_a),$$
где
$$R_a \leqslant \frac{782a}{\sqrt{L}}(\sqrt{\log L} + 2.2c_0^{1.5}\sqrt{a}) + 6716\frac{a^{3/2}c_0^3}{\sqrt{L}} < \frac{782a}{\sqrt{L}}(\sqrt{\log L} + 8.6c_0^3\sqrt{a}).$$
Теорема доказана.

Теорема 3.14. *Пусть* $\Theta(v) = \Theta_{\pm}(v)$ *– функция распределения величин* $S(\gamma_n + 0)$ *(соответственно* $S(\gamma_n - 0)$*), т.е.*

$$\Theta_{\pm}(v) = \frac{1}{M}\,\#\left\{n \;\middle|\; N < n \leqslant N + M,\, S(\gamma_n \pm 0) \leqslant \frac{v}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}\right\}.$$

Тогда при любом u *имеет место равенство*[4]

$$\Theta(u) = G(u) + \frac{1.79\theta}{\sqrt{\log\log\log N}}\,.$$

Кроме того, если $1.5 \leqslant u \leqslant \sqrt[6]{\log\log N}$*, то эта функция удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\Theta(-u)}{G(-u)} = 1 + O(R), \qquad \frac{1-\Theta(u)}{1-G(u)} = 1 + O(R),$$

в которых

$$R = \frac{u(u^2 + \log\log\log N)}{\sqrt{\log\log N}}\,,$$

а постоянные в знаках O *зависят от* ε.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теорем 2.5 и 3.3.

Следствие 3.4. *Пусть* $f(x)$ *– монотонная положительная функция, неограниченно возрастающая при* $x \to +\infty$*. Тогда неравенства*

$$\frac{1}{f(n)}\sqrt{\log\log n} < |S(\gamma_n \pm 0)| \leqslant f(n)\sqrt{\log\log n}$$

имеют место для почти всех n.

Теорема 3.15. *Пусть* $f(x)$ *– произвольная монотонно возрастающая и неограниченная при* $x \to +\infty$ *функция, удовлетворяющая при* $N \leqslant x \leqslant N + M$ *условиям* $a \leqslant f(x) \leqslant b\sqrt{\log\log x}$*, где* a *и* b *– абсолютные постоянные. Пусть, далее,*

$$\mathcal{F} = f(N), \qquad \delta = 0.5\exp\left\{-(ec_0)^2\frac{\log\log N}{\mathcal{F}^2}\right\}.$$

Тогда на промежутке $N \leqslant n \leqslant N + M$ *найдется не менее* $M\delta$ *номеров* n*, удовлетворяющих условию*

$$S(\gamma_n \pm 0) \leqslant -\frac{1}{\mathcal{F}}\log\log N,$$

и не менее $M\delta$ *номеров, удовлетворяющих условию*

$$S(\gamma_n \pm 0) > \frac{1}{\mathcal{F}}\log\log N.$$

Доказательство этих утверждений почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.6.

[4] Остаточный член в формуле для $\Theta(u)$ может быть уточнен. См. замечание 2.4.

3.6. Промежутки Грама с аномальным числом ординат нулей $\zeta(s)$

Пусть $m \geqslant 2$ – целое число. Рассмотрим m прилегающих друг ко другу промежутков Грама $G_{n+1}, G_{n+2}, \ldots, G_{n+m}$, или, что то же, промежуток $(t_n, t_{n+m}]$. Согласно формуле Римана–Мангольдта, количество попавших в него ординат нулей $\zeta(s)$ выражается числом

$$\begin{aligned} N(t_{n+m}+0) - N(t_n+0) &= \frac{1}{\pi}(\vartheta(t_{n+m}) - \vartheta(t_n)) + S(t_{n+m}+0) - S(t_n+0) \\ &= m + \Delta(n+m) - \Delta(n). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Поскольку в среднем на один промежуток Грама приходится одна ордината нуля $\zeta(s)$, естественно считать m средним, нормальным числом ординат в промежутке $(t_n, t_{n+m}]$. Следовательно, разность

$$S(t_{n+m}+0) - S(t_n+0) = \Delta(n+m) - \Delta(n) \tag{3.29}$$

равна отклонению количества ординат, попавших на промежуток $(t_n, t_{n+m}]$, от нормального значения. Если $\Delta(n+m) - \Delta(n) \neq 0$, то такой промежуток будем считать аномальным, т.е. содержащим аномальное число ординат.

Настоящий параграф посвящен нижней оценке числа аномальных промежутков Грама G_n. Именно, мы докажем, что положительная доля промежутков Грама не содержит ни одной ординаты и вместе с тем положительная доля промежутков Грама содержит не менее двух ординат нулей $\zeta(s)$ (теорема 3.18).

Этот результат является усилением теоремы Труджиана [11] о том, что положительная доля промежутков Грама является аномальной. Следует, впрочем, отметить, что аналог теоремы 3.18 для длинного промежутка суммирования типа $1 \leqslant n \leqslant N$ приведен без доказательства в работе Фуджи [52].

Коротко поясним идею, которая лежит в основе приводимых ниже рассуждений. Теорема 3.18 означает, что для положительной доли случаев имеет место равенство

$$\Delta(n+1) - \Delta(n) = -1$$

и в то же время в положительной доле случаев выполнено следующее соотношение:

$$\Delta(n+1) - \Delta(n) \geqslant 1.$$

Эти факты могут быть выведены, например, из оценки вида

$$\sum_n |\Delta(n+1) - \Delta(n)|^k = \sum_n |S(t_{n+1}+0) - S(t_n+0)|^k \geqslant cM, \tag{3.30}$$

где $c > 0$ – постоянное число, зависящее разве что от k. Однако непосредственное применение формул Сельберга (леммы 2.4–2.7) к исследованию разностей (3.29) при $m = 1$ ничего не дает. Близость точек t_{n+1} и t_n приводит к грубой оценке предполагаемого остаточного члена в (3.30) и, как следствие, к верхней оценке суммы (3.30), которая сама по себе недостаточна для доказательства теоремы 3.18.

Однако замена в подобных рассуждениях точки t_{n+1} точкой t_{n+m}, где m – очень большое, но фиксированное число, приводит к содержательной формуле для суммы, подобной (3.29), которая позволяет получить для нее правильную по порядку нижнюю оценку (теорема 3.16 и следствие 3.5).

Еще одно несложное соображение, в основе которого лежит неравенство Гёльдера, позволяет перейти от моментов величин $\Delta(n+m) - \Delta(n)$ к суммам (3.29) и получить для них правильные по порядку нижние оценки (теорема 3.17).

Отметим еще, что аналог теоремы 3.17 для случаев длинного промежутка суммирования и параметра m, растущего вместе с N, содержится в работе Фуджи [52]. Ее доказательство приводится здесь по той причине, что при выводе теоремы 3.18 мы существенно пользуемся тем, что величина m может быть постоянным (хотя и очень большим) числом.

Для вывода формул теоремы 3.16 нам потребуется одна вспомогательная формула.

Лемма 3.19. *Пусть* $0 < h_0 < 0.5$ – *достаточно малая постоянная*, $0 < h < h_0$, $h \log x > 2$, *и пусть*

$$V(x;h) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right).$$

Тогда справедливо равенство

$$V(x;h) = \frac{1}{2}\log(h\log x) + 1.05\theta.$$

Доказательство. Положив $y = e^{\lambda/h}$, где $1 < \lambda < 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} V(x;h) &= \left(\sum_{p\leqslant y} + \sum_{y<p\leqslant x}\right)\frac{1}{p}\sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right) \\ &= \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}\sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right) + \frac{1}{2}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1-\cos(h\log p)}{p} = V_1 + \frac{1}{2}(V_2 - V_3). \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценками леммы 1.5, получаем

$$V_1 \leqslant \left(\frac{h}{2}\right)^2 \sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{p} \leqslant \left(\frac{h}{2}\right)^2(\log y)\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p} < \left(\frac{h}{2}\log y\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4},$$

$$V_2 = \left(\sum_{p\leqslant x} - \sum_{p\leqslant y}\right)\frac{1}{p} = \log(h\log x) - \log\lambda + 2\theta\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2.$$

Чтобы оценить V_3, разобьем область изменения p точками вида $a = 2^k y$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, на промежутки вида $a < p \leqslant b$, где $y \leqslant a < x$, $b \leqslant 2a$. Находим

$$V_3 = \operatorname{Re}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{p^{ih}}{p} = \operatorname{Re}\sum_a V_3(a), \qquad V_3(a) = \sum_{a<p\leqslant b}\frac{p^{ih}}{p}.$$

Полагая

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{a<p\leqslant u}\frac{1}{p} = \log\log u - \log\log a + \frac{2\theta}{\log^2 a}$$

и применяя к $V_3(a)$ преобразование Абеля, будем иметь

$$V_3(a) = \mathbb{C}(b)b^{ih} - \int_a^b \mathbb{C}(u)\,du^{ih} = \int_a^b \frac{u^{ih}\,du}{u\log u} + \frac{3\theta_1}{\log^2 a},$$

откуда

$$V_3 = \operatorname{Re}(j) + 3\theta_2\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k\log 2 + \log y)^2}, \qquad j = \int_y^x \frac{u^{ih}\,du}{u\log u}.$$

Интегрирование по частям дает

$$j = \frac{1}{ih}\left(\frac{x^{ih}}{\log x} - \frac{y^{ih}}{\log y} - \int_y^x u^{ih}\,d\frac{1}{\log u}\right), \qquad |j| \leqslant \frac{2}{h\log y} = \frac{2}{\lambda}.$$

Окончательно находим

$$|V_3| \leqslant \frac{2}{\lambda} + \frac{9}{\log y} = \frac{2+9h}{\lambda}, \qquad V(x;h) = \frac{1}{2}\log(h\log x) + v(x;h),$$

где

$$|v(x;h)| \leqslant \frac{\lambda^2}{4} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{9h}{\lambda} + \frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Полагая $\lambda = 1.5$, приходим к утверждению леммы.

Теорема 3.16. *Пусть k и m – целые числа, $k \geqslant 1$, $k\varepsilon^{-1}\exp\{(4c_0k)^3\} < m \leqslant c\log N$, где c – достаточно малая абсолютная постоянная. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_n (\Delta(n+m) - \Delta(n))^{2k} = \frac{(2k)!}{k!}\frac{M}{(2\pi^2)^k}\left(\log\frac{m\varepsilon}{k}\right)^k\left(1 + \frac{5.4\theta(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\log(m\varepsilon/k)}}\right).$$

Доказательство. Положим, как и выше,

$$x = X^{1/(8k+3)}, \qquad W(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{p\leqslant x}\frac{\sin(t\log p)}{\sqrt{p}}, \qquad R(t) = S(t) - W(t),$$

так что

$$\Delta(n) = R(t_n + 0) + W(t_n). \tag{3.31}$$

Для рассматриваемых значений n, m из леммы 1.1 получаем

$$t_{n+m} - t_n = h + \varepsilon_n, \qquad h = \frac{\pi m}{\vartheta'(t_N)}, \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \frac{2\pi m M}{N(\log N)^2},$$

откуда

$$W(t_{n+m}) = W(t_n + h) + \frac{2\pi\theta_1 mM\sqrt{x}}{N(\log N)^2},$$

$$W(t_{n+m}) - W(t_n) = -\frac{1}{\pi}(U(t_n) + \overline{U}(t_n)) + \frac{2\pi\theta_1 mM\sqrt{x}}{N(\log N)^2},$$

где

$$U(t) = \sum_{p\leqslant x}\frac{a(p)}{\sqrt{p}}p^{it}, \qquad a(p) = p^{ih/2}\sin\left(\frac{h}{2}\log p\right).$$

Согласно лемме 2.1 имеем

$$W = \sum_n (W(t_{n+m}) - W(t_n))^{2k} = \pi^{-2k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}\sum_n U^\nu(t_n)\overline{U}^{\,2k-\nu}(t_n) + \theta_2 N^{-1/3}$$
$$= \pi^{-2k}\binom{2k}{k}M\mathfrak{S} + \theta_3\sqrt{X},$$

где

$$\mathfrak{S} = k!(\mathfrak{S}_1^k + \theta_4 k^2\mathfrak{S}_1^{k-2}\mathfrak{S}_2), \qquad \mathfrak{S}_1 = \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\sin^2\left(\frac{h}{2}\log p\right), \qquad \mathfrak{S}_2 \leqslant \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}.$$

Воспользовавшись леммой 3.19 и равенствами

$$h\log x = \frac{\pi m\log x}{\vartheta'(t_N)} = \frac{\pi m\varepsilon}{10(8k+3)}\frac{\log N}{\vartheta'(t_N)} = (1+o(1))\frac{\pi m\varepsilon}{40k}\left(1 + \frac{3}{8k}\right)^{-1},$$

получим
$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{2}\log\frac{\pi m\log x}{40k} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{3}{8k}\right) + 1.05\theta_5 + o(1) = \frac{\Lambda}{2} + 2.52\theta_6,$$
где $\Lambda = \log(m\varepsilon/k)$. Из условия на k и m следует, что $\Lambda \geqslant (4c_0k)^3$. Поэтому
$$\mathfrak{S}_1^k = \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k\left(1+\frac{5.04\theta_6}{\Lambda}\right)^k = \left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k\left(1+\frac{5.05\theta_6 k}{\Lambda}\right), \qquad \mathfrak{S}_1^{k-2} < 1.001\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k$$
и, наконец,
$$S = k!\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^k\left(1+\frac{5.06\theta_8 k}{\Lambda}\right).$$
Таким образом,
$$W = \frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\left(1+\frac{5.07\theta_9 k}{L}\right).$$
В частности, для рассматриваемых k имеем оценку
$$W < 1.001\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\,. \tag{3.32}$$
Обозначая через V сумму из условия леммы и пользуясь равенством (3.31), находим
$$V = W + \sum_{\nu=1}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}V_\nu,$$
где
$$V_\nu = \sum_n (W(t_{n+m}) - W(t_n))^{2k-\nu}(R(t_{n+m}+0) - R(t_n+0))^\nu.$$
Воспользовавшись неравенством Гёльдера, утверждением леммы 2.7 и оценкой (3.32), получим
$$|V_\nu| \leqslant V^{1-\nu/2k}\left\{\sum_n (R(t_{n+m}+0) - R(t_n+0))^{2k}\right\}^{\nu/2k}$$
$$\leqslant \left\{1.001\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\right\}^{1-\nu/2k}\left\{\frac{c_0}{56}(2c_0k)^{2k}M\right\}^{\nu/2k} < 1.001\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\,q^\nu,$$
где
$$q = \left(\frac{c_0}{56}\right)^{1/2k}\pi c_0\sqrt{\frac{2ke}{\Lambda}} \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{7}}\,c_0^{3/2}\sqrt{\frac{k}{\Lambda}}\,.$$
Заметим, что
$$q \leqslant \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{7}}\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\Lambda}} < \frac{1}{8k}\,.$$
Поэтому, переходя к оценке суммы по ν в (3.32), будем иметь
$$\left|\sum_{\nu=1}^{2k}(-1)^\nu\binom{2k}{\nu}V_\nu\right| < 1.001\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}\{(1+q)^{2k}-1\} < 1.001\cdot 2kq(1+q)^{2k-1}\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}$$
$$< 1.001\cdot 2k\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{7}}\,c_0^{3/2}\sqrt{\frac{k}{L}}\left(1+\frac{1}{8k}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}$$

$$< 1.001\frac{\pi e^{3/4}}{\sqrt{7}}\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\Lambda}}\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k} < 2.12\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\Lambda}}\frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}.$$

Возвращаясь к исходной сумме, находим

$$V = \frac{(2k)!}{k!}\frac{M\Lambda^k}{(2\pi^2)^k}(1+\theta\delta), \qquad \delta = \frac{5.07k}{\Lambda} + 2.12\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\Lambda}} < 2.2\frac{(c_0k)^{3/2}}{\sqrt{\Lambda}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.5. *Пусть $m = [\mu]+1$, где $\mu = \varepsilon^{-1}\exp\{(4c_0)^3\}$. Тогда*

$$\sum_n (\Delta(n+m)-\Delta(n))^2 > 2c_0^3 M.$$

Теорема 3.17. *Справедлива оценка*

$$\sum_n |\Delta(n+1)-\Delta(n)| > K_1 M,$$

где

$$K_1 = \frac{c_0^2\varepsilon^3}{4}\exp\{-192c_0^3\}.$$

Доказательство. Положим, как и выше, $r(n) = \Delta(n)-\Delta(n-1)$ и обозначим сумму k-х степеней величин $|r(n)|$ через V_k. Пусть, далее, $m = [\mu]+1$, где $\mu = \varepsilon^{-1}\exp\{(4c_0)^3\}$. Из тождества

$$\Delta(n+m)-\Delta(n) = r(n+1)+r(n+2)+\cdots+r(n+m)$$

с помощью неравенства Коши получаем

$$(\Delta(n+m)-\Delta(n))^2 \leqslant m\sum_{\nu=1}^{m} r^2(n+\nu).$$

Суммируя обе части этого соотношения по n, находим

$$\sum_n (\Delta(n+m)-\Delta(n))^2 \leqslant m\sum_{\nu=1}^{m}\sum_n r^2(n+\nu)$$
$$\leqslant m\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{N<n\leqslant N+M+m} r^2(n) \leqslant m^2\sum_{N<n\leqslant N+M+m} r^2(n).$$

Воспользовавшись следствием теоремы 3.16 и оценкой леммы 3.1, будем иметь

$$\sum_{N<n\leqslant N+M+m} r^2(n) \geqslant \frac{1}{m^2}\sum_n (\Delta(n+m)-\Delta(n))^2 \geqslant \frac{2c_0^3}{m^2}M > 1.5c_0^3\varepsilon^2\exp\{-128c_0^3\}M,$$

$$V_2 = \sum_n r^2(n) > 1.5c_0^3\varepsilon^2\exp\{-128c_0^3\}M - m(0.3\log N)^2 > c_0^3\varepsilon^2\exp\{-128c_0^3\}M = K_2M.$$

С другой стороны, применяя к V_2 неравенство Гёльдера, будем иметь

$$V_2 = \sum_n |r(n)|^{2/3}\cdot|r(n)|^{4/3} \leqslant \left(\sum_n |r(n)|\right)^{2/3}\left(\sum_n r^4(n)\right)^{1/3} = V_1^{2/3}V_4^{1/3},$$

откуда $V_1 \geqslant V_2^{3/2} V_4^{-1/2}$. Пользуясь найденной выше оценкой суммы V_2 и неравенством теоремы 3.5 с $k = 2$, получим

$$V_4 \leqslant K_4 M, \qquad K_4 = \frac{256}{17}\, c_0^5, \qquad V_1 = \sum_n |r(n)| \geqslant \frac{(K_2 M)^{3/2}}{(K_1 M)^{1/2}} = K_1 M,$$

где

$$K_1 = K_2^{3/2} K_4^{-1/2} > \frac{c_0^2 \varepsilon^3}{4} \exp\{-192 c_0^3\}.$$

Теорема доказана.

Пусть $\nu_k(N)$ обозначает число промежутков Грама G_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, каждый из которых содержит в точности k ординат нулей $\zeta(s)$. Имеет место

Теорема 3.18. *Существуют положительные постоянные $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ такие, что среди промежутков Грама G_n, $N < n \leqslant N + M$, найдется по крайней мере $\varkappa_1 M$ таких, которые не содержат ни одной ординаты нулей $\zeta(s)$, и по крайней мере $\varkappa_2 M$ таких, которые содержат две и более ординат нулей дзета-функции Римана. Иначе говоря, имеют место следующие неравенства*:

$$\nu_0(N+M) - \nu_0(N) \geqslant \varkappa_1 M, \qquad \sum_{k \geqslant 2} (\nu_k(N+M) - \nu_k(N)) \geqslant \varkappa_2 M.$$

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что число M_1 пустых промежутков Грама совпадает с числом тех n, для которых величина

$$r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1) = S(t_n + 0) - S(t_{n-1} + 0)$$

отрицательна, а число M_2 промежутков Грама с более чем одной ординатой совпадает с числом тех n, для которых величина $r(n)$ строго положительна.

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{2}(|r(n)| - r(n)) = \begin{cases} 1, & \text{если } r(n) < 0, \\ 0, & \text{если } r(n) > 0 \end{cases}$$

и оценкой теоремы 3.17, находим

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_n \frac{1}{2}(|r(n)| - r(n)) = \frac{1}{2}\sum_n |r(n)| - \frac{1}{2}\sum_n (\Delta(n) - \Delta(n-1)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_n |r(n)| - \frac{1}{2}(\Delta(N+M) - \Delta(N)) > 0.5 K_1 M - 0.15 \log N > \varkappa_1 M, \qquad \varkappa_1 = 0.4 K_1. \end{aligned}$$

Далее, M_2 совпадает с числом ненулевых слагаемых в сумме

$$W = \sum_n \frac{1}{2}(|r(n)| + r(n)).$$

Применяя к W неравенство Коши и оценку леммы 3.3, будем иметь

$$W \leqslant \Big(M_2 \sum_n r^2(n)\Big)^{1/2} \leqslant \Big(M_2 \cdot \frac{4c_0^3}{17}\, M\Big)^{1/2}.$$

С другой стороны, $W > \varkappa_1 M$ в силу теоремы 3.17. Таким образом,

$$M_2 \geqslant \frac{17}{4}\,\frac{\varkappa_1^2 M^2}{c_0^3 M} > 4 c_0^{-3} \varkappa_1^2 M = \varkappa_2 M.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.3. Значения постоянных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ в теореме 3.18 чрезвычайно малы. Так, даже в случае $\varepsilon = 10^{-3}$ они не превосходят $\exp\{-4.5 \cdot 10^{21}\}$ и $\exp\{-9 \cdot 10^{21}\}$ соответственно. В то же время приближенное вычисление нулей $\zeta(s)$ позволяет предположить, что $\varkappa_1 > 0.1$, $\varkappa_2 > 0.1$. В связи с этим было бы интересно получить аналог теоремы 3.18 с более-менее разумными значениями этих постоянных (скажем, порядка 0.001–0.01).

3.7. Новый эквивалент «почти гипотезы Римана»

В настоящем параграфе рассматривается следующий вопрос: что именно подразумевал Сельберг под величинами γ_n в докладе [12] при формулировке своих результатов и предположений относительно величин Δ_n – положительные ординаты нулей дзета-функции, лежащих на критической прямой (в наших обозначениях $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n, \ldots$), или же ординаты всех вообще комплексных нулей $\zeta(s)$, лежащих в верхней полуплоскости?

Этот, на первый взгляд искусственный, вопрос имеет, между тем, принципиальное значение. Постановка его объясняется следующими причинами.

В начале упомянутого доклада Сельберг оговаривает, что величина $\beta + i\gamma$ будет служить ему для обозначения нулей $\zeta(s)$, лежащих в критической полосе выше вещественной оси (в наших обозначениях $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$). Вместе с тем при определении величин Δ_n Сельберг цитирует результат Титчмарша [9] о неограниченности дробей

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}$$

и указывает на его непосредственную связь с неограниченностью величин Δ_n.

Если нуль $\mathfrak{c}_n$ функции $\zeta(1/2 + it)$ удовлетворяет условию

$$t_{m-1} < \mathfrak{c}_n \leqslant t_m, \tag{3.33}$$

то несложно показать (см., например, лемму 3.6), что

$$\frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} = m - n + O(1).$$

Итак, неограниченность дробей Титчмарша влечет и неограниченность разностей $m - n$, определенных соотношением (3.33). Но такие разности, вообще говоря, могут и не совпадать с определенными во введении величинами Δ_n. Этому может препятствовать наличие у дзета-функции нулей вне критической прямой.

Таким образом, имеются две исключающие друг друга возможности:

1) Сельберг обозначил через Δ_n именно те разности, которые определяются соотношением (3.33), и доказывал для них формулы (7) и (8);
2) Сельберг не вполне корректно процитировал результат Титчмарша, неявно заменив $\mathfrak{c}_n$ на γ_n в определении дробей τ_n.

Нам предстоит определить, какая из этих альтернатив в действительности имела место.

Так, реализация первой возможности обесценивает большинство результатов настоящей работы, поскольку в этом случае формулы, доказанные в параграфах 3.1–3.3, не являются формулами Сельберга и их следствиями. Таким образом, одна из целей работы – строгое обоснование формул Сельберга – остается недостигнутой.

Напротив, реализация второй возможности означала бы, например, ликвидацию пробела, который возник благодаря тому, что бóльшая часть исследований Сельберга, касающихся закона Грама, осталась неопубликованной.

Ниже приводятся аргументы в пользу того, что на самом деле имела место вторая из перечисленных выше альтернатив. Суть их сводится к следующему.

Допустив первую возможность, мы выведем из формул Сельберга утверждение, эквивалентное «почти гипотезе Римана», т.е. гипотезе, согласно которой «почти все» комплексные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N_0(T)}{N(T)}=1$$

(здесь и далее $N_0(T)$ – число нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой, ординаты которых положительны и не превосходят T). Без сомнения, такой эквивалент должен был быть известен Сельбергу. Доказав его, он не преминул бы в той или иной форме упомянуть о столь значительном результате[5]. Поскольку ни Сельбергом, ни кем-либо другим подобных заявлений сделано не было, естественно заключить, что первая альтернатива не могла иметь место[6].

Во избежание путаницы в обозначениях в случае, когда имеют место неравенства (3.33), разность $m-n$ будем обозначать через D_n. Разумеется, если гипотеза Римана верна, то $\mathfrak{c}_n=\gamma_n$ и $D_n=\Delta_n$ для любого n.

Теорема 3.19. *Необходимым и достаточным условием для справедливости «почти гипотезы Римана» является выполнение при $N\to+\infty$ условия*

$$\sum_{n\leqslant N}|D_n|=o(N^2). \tag{3.34}$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$N_0(\mathfrak{c}_n+0)=n+O(\log n). \tag{3.35}$$

Действительно, обозначая через κ кратность нуля $1/2+i\mathfrak{c}_n$, из леммы I.9 получим

$$\kappa\leqslant S(\mathfrak{c}_n+0)-S(\mathfrak{c}_n-0)<0.3\log\mathfrak{c}_n.$$

Таким образом,

$$N_0(\mathfrak{c}_n+0)=n+\theta_1\kappa=n+0.3\theta_2\log\mathfrak{c}_n. \tag{3.36}$$

Полагая $t=\mathfrak{c}_n+0$ в неравенствах $0.4N(t)<N_0(t)\leqslant N(t)$, которые следуют из леммы I.11 и определения $N_0(t)$, и учитывая (3.36), получим

$$(1+o(1))\frac{\mathfrak{c}_n}{5\pi}\log\frac{\mathfrak{c}_n}{2\pi}<n\leqslant(1+o(1))\frac{\mathfrak{c}_n}{2\pi}\log\frac{\mathfrak{c}_n}{2\pi},$$

откуда $\log\mathfrak{c}_n=\log n+O(\log\log n)$. Так приходим к равенству (3.35).

Предположим теперь, что «почти гипотеза Римана» верна. Тогда, пользуясь (3.35), будем иметь

$$N(\mathfrak{c}_n+0)=(1+o(1))N_0(\mathfrak{c}_n+0)=(1+o(1))(n+O(\log n))=n+o(n).$$

С другой стороны, из (3.33) находим

$$m-1+S(t_{m-1}+0)<N(\mathfrak{c}_n+0)\leqslant m+S(t_m+0),$$

откуда

$$D_n=m-n=o(n)+O(\log m)=o(n) \tag{3.37}$$

[5] Очевидно, такой результат явился бы сенсацией. В частности, его доказательство свело бы на нет непрекращающуюся и по сей день бурную деятельность, связанную с уточнением постоянной κ в неравенстве Сельберга $N_0(T)\geqslant\kappa\cdot N(T)$.

[6] См. также замечание 4.1 (ч. 2 настоящей работы).

и, следовательно,
$$\sum_{n\leqslant N}|D_n| = o(N^2).$$
Обратно, пусть выполняется условие (3.34). Замечая, что $N(\mathfrak{c}_n+0)\geqslant n+\varepsilon(n)$, где $\varepsilon(n)$ – число нулей $\zeta(s)$ с условием $0<\operatorname{Im}s\leqslant\mathfrak{c}_n$, $\operatorname{Re}s\neq 1/2$, получим
$$n+\varepsilon(n)\leqslant N(t_m+0) = m+S(t_m+0),$$
откуда $0\leqslant\varepsilon(n)\leqslant|D_n|+|S(t_m+0)|$. Суммируя эту оценку по $n\leqslant 2N$ и применяя неравенство Коши, будем иметь
$$\sum_{n\leqslant 2N}\varepsilon(n)\leqslant\sum_{n\leqslant 2N}|D_n| + \sum_{\substack{n\leqslant 2N\\ m=m(n)}}|S(t_m+0)|\leqslant\sqrt{2N}\sqrt{W}+o(N^2),$$
где
$$W = \sum_{\substack{n\leqslant 2N\\ m=m(n)}} S^2(t_m+0).$$
Пусть μ – наибольшее значение, которое принимает величина $m(n)$ при $n\leqslant 2N$. Тогда $t_{\mu-1}<\mathfrak{c}_{2N}\leqslant t_\mu$, откуда
$$N(\mathfrak{c}_{2N})\geqslant N(t_{\mu-1}) = \mu+O(\log\mu).$$
С другой стороны, из леммы I.11 при $t=\mathfrak{c}_{2N}$ получаем
$$N(\mathfrak{c}_{2N})\leqslant\left(\frac{5}{2}-10^{-3}\right)N_0(\mathfrak{c}_{2N}) = \left(\frac{5}{2}-10^{-3}\right)(2N+O(\log N)),$$
откуда $\mu<5N$. Меняя в сумме W порядок суммирования, будем иметь
$$W\leqslant\sum_{l\leqslant 5N}S^2(t_l+0)\sum_{\substack{n\leqslant 2N\\ m(n)=l}}1.$$
Если l фиксировано, то количество чисел n, удовлетворяющих условиям $n\leqslant 2N$, $m(n)=l$, не превосходит числа всех ординат нулей $\zeta(s)$, попавших в промежуток $(t_{l-1},t_l]$, т.е. величины
$$N(t_l+0)-N(t_{l-1}+0) = 1+S(t_l+0)-S(t_{l-1}+0) = 1+r(l).$$
Поэтому
$$W\leqslant\sum_{l\leqslant 5N}S^2(t_l+0)(1+r(l)).$$
Пользуясь равенством теоремы 2.1 вместе со второй оценкой теоремы 3.6, последовательно находим
$$W\leqslant\frac{5N}{2\pi^2}\log\log N + O(N\sqrt{\log\log N}\,) < \frac{1}{3}N\log\log N,$$
$$\sum_{n\leqslant 2N}\varepsilon(n) < N\sqrt{\log\log N}+o(N^2) = o(N^2).$$
Замечая теперь, что
$$\varepsilon(N+1)+\varepsilon(N+2)+\dots+\varepsilon(2N)\geqslant N\varepsilon(N),$$
получим
$$N\varepsilon(N) = o(N^2),\qquad \varepsilon(N) = o(N).$$

Если число t достаточно велико, то, определяя N из неравенств $\mathfrak{c}_{N-1} < t \leqslant \mathfrak{c}_N$ и пользуясь доказанным выше соотношением, будем иметь

$$N(t) \geqslant N-1, \qquad N(t) - N_0(t) \leqslant \varepsilon(N) = o(N) = o(N(t)),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие 3.6. *Выполнение хотя бы при одном фиксированном $k \geqslant 1$ оценки*

$$\sum_{n \leqslant N} |D_n|^k = o(N^{k+1})$$

при $N \to +\infty$ является необходимым и достаточным условием для выполнения «почти гипотезы Римана».

Доказательство аналогично приведенному выше с той лишь разницей, что при установлении достаточности необходимо воспользоваться неравенствами

$$N\varepsilon(N) \leqslant \sum_{n \leqslant 2N} |D_n| + N\sqrt{\log\log N} \leqslant (2N)^{1-1/k} \biggl(\sum_{n \leqslant 2N} |D_n|^k\biggr)^{1/k} + N\sqrt{\log\log N}.$$

Это утверждение, в частности, показывает, что если бы формулы Сельберга (7), (8) оставались верны и при замене Δ_n величинами D_n, то из них следовала бы «почти гипотеза Римана».

Следствие 3.7. *Соотношение $D_n = o(n)$ при $n \to +\infty$ является необходимым и достаточным условием для справедливости «почти гипотезы Римана».*

Доказательство. Необходимость следует из (3.37), а достаточность – из следствия 3.6 при $k = 1$.

Список литературы

[1] Б. Риман, “О числе простых чисел, не превышающих данной величины”, *Сочинения*, ОГИЗ, М.–Л., 1949, 216–224.

[2] C. L. Siegel, “Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie”, *Quell. Stud. Gesch. Math. B*, **2** (1932), 45–80; C. L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, B. I, Springer-Verlag, Berlin, 1966, 275–310.

[3] J.-P. Gram, “Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann”, *Oversigt Kong. Dansk. Vid. Selsk. Forh.*, 1895, 303–308.

[4] J.-P. Gram, “Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann”, *Acta Math.*, **27** (1903), 289–304.

[5] C. L. Siegel, “Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions”, *Ann. of Math.* (2), **44**:2 (1943), 143–172; C. L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen*, B. II, Springer-Verlag, Berlin, 1966, 360–389.

[6] А. А. Карацуба, М. А. Королев, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96.

[7] J. E. Littlewood, “On the zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **22**:3 (1924), 295–318.

[8] J. I. Hutchinson, “On the roots of the Riemann zeta-function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27** (1925), 49–60.

[9] E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **151** (1935), 234–255.

[10] E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **157** (1936), 261–263.

[11] T. S. Trudgian, “On the success and failure of Gram’s Law and the Rosser Rule”, *Acta Arith.*, **148**:3 (2011), 225–256; T. S. Trudgian, *Further results on Gram’s law*, Ph.D. Thesis, University of Oxford, 2009.

[12] A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 341–355.

[13] X. Gourdon, *Computation of Zeros of the Zeta Function*, `http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html`.

[14] A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[15] J. E. Littlewood, “Two notes on the Riemann zeta-function”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22** (1924), 234–242.

[16] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications*, Dover Publ., New York, 2003.

[17] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Contribution to the theory of Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes”, *Acta Math.*, **41**:1 (1918), 119–196.

[18] Я. Мозер, “Арифметический аналог одной формулы Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана”, *Acta Math. Univ. Comenian.*, **37** (1980), 109–120.

[19] A. E. Ingham, “Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1926), 273–300.

[20] Я. Мозер, “О порядке одной суммы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана”, *Czechoslovak Math. J.*, **41 (116)**:4 (1991), 663–684.

[21] А. А. Лаврик, “Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана”, *Теория чисел и анализ*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 197–230.

[22] K. Soundararajan, “Moments of the Riemann zeta-function”, *Ann. of Math.* (2), **170**:2 (2009), 981–993.

[23] A. J. Harper, *Sharp Conditional Bounds for Moments of the Riemann Zeta Function*, arXiv: math.NT/1305.4618v1.

[24] T. Christ, J. Kalpokas, “Upper bounds of discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line”, *Lith. Math. J.*, **52**:3 (2012), 233–248.

[25] T. Christ, J. Kalpokas, “Lower bounds of discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line” (to appear).

[26] J. Kalpokas, *Discrete Moments of the Riemann Zeta Function and Dirichlet L-Functions*, Doctoral Dissertation, Vilnius University, 2012.

[27] R. Balasubramanian, "On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$. VI", *Hardy-Ramanujan J.*, **9** (1986), 1–10.

[28] K. Soundararajan, "Extreme values of zeta and L-functions", *Math. Ann.*, **342** (2008), 467–486.

[29] J. Kalpokas, M. A. Korolev, J. Steuding, "Negative values of the Riemann zeta function on the critical line", *Mathematika*, **59**:2 (2013), 443–462.

[30] M. Radziwill, *Large Deviations in Selberg's Central Limit Theorem*, arXiv: math.NT/1108.5092v1.

[31] F. Tricomi, "Sulle funzioni ipergeometriche confluenti", *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **26**:1 (1947), 141–175.

[32] A. Ghosh, "On Riemann's zeta-function – sign-changes of $S(T)$", *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1981, 25–46.

[33] A. Ghosh, "On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$", *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.

[34] R. N. Boyarinov, V. N. Chubarikov, I. S. Ngongo, "Asymptotic formulas for fractional moments of special sums", *Чебышевский сб.*, **4**:4 (2003), 173–183.

[35] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, М., 1963.

[36] Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Ч. 1. Основные операции анализа, ГТТИ, М.–Л., 1933; *Курс современного анализа*, Ч. 2. Трансцендентные функции, ГТТИ, М.–Л., 1934.

[37] G. H. Hardy, "On differentiation and integration of divergent series", *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **19**:3 (1904), 297–321.

[38] Е. Титчмарш, *Теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1951.

[39] Р. Н. Бояринов, "О дробных моментах случайных величин", *Докл. РАН*, **436**:3 (2011), 299–301.

[40] Р. Н. Бояринов, *Вероятностные методы в теории чисел и приложения в теории аргумента дзета-функции Римана*, Дис. … докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2012.

[41] A. Selberg, "Contributions to the theory of the Riemann zeta-function", *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 214–280.

[42] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, "Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой", *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92.

[43] K.-M. Tsang, *The Distribution of the Values of the Riemann Zeta-Function*, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., 1984.

[44] Р. Н. Бояринов, "О распределении значений дзета-функции Римана", *Докл. РАН*, **438**:1 (2011), 14–16.

[45] М. А. Королёв, "О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 115–124.

[46] Р. Н. Бояринов, "О распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 6, 55–58.

[47] H. Cramer, "Sur une nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités", *Actualités Sci. Indust.*, **736** (1938), 5–23; Г. Крамер, "Об одной новой предельной теореме теории вероятностей", *УМН*, 1944, № 10, 166–178.

[48] H.-K. Hwang, "Large deviations for combinatoril distributions. I: Central limit theorems", *Ann. Appl. Probab.*, **6**:1 (1996), 297–319.

[49] A. Fujii, "On the zeros of Dirichlet L-functions. V", *Acta Arith.*, **28**:4 (1976), 395–403.

[50] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. III, Наука, М., 1966.

[51] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, ГИФМЛ, М., 1959.

[52] A. Fujii, "Gram's law for the zeta zeros and the eigenvalues of Gaussian unitary ensembles", *Proc. Japan Acad. Ser. A*, **63**:10 (1987), 392–395.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 20

Максим Александрович Королёв

Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Часть 1

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 25.11.2015. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mathnet.ru/spm/ e-mail: pupyrev@mi.ras.ru