

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 24

Издание выходит с 2006 года

Ю. Г. Прохоров

Рациональные поверхности



Москва
2015

УДК 512.7
ББК 22.15
Л43

Редакционный совет:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов, С. В. Болотин, И. В. Волович,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь), В. В. Козлов,
С. Ю. Немировский (главный редактор), С. П. Новиков, Д. О. Орлов,
В. П. Павлов (заместитель главного редактора), А. Н. Паршин,
Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев, А. А. Славнов, Д. В. Трещев, Е. М. Чирка*

Прохоров Ю. Г.

Л43 Рациональные поверхности – М.: МИАН, 2015. – 76 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 24).

ISBN 978-5-98419-063-3

В основу настоящего издания положен материал курса, читавшегося автором в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук осенью 2013 г.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 15-01-02164, 15-01-02158), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2998.2014.1) и Правительства РФ в рамках реализации «Дорожной карты» Программы 5/100 Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

DOI: 10.4213/lkn24

DOI: 10.4213/book1590

ISBN 978-5-98419-063-3

© Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, 2015

© Прохоров Ю. Г., 2015

Оглавление

Введение	5
1. Предварительные сведения	6
2. Конус кривых	8
3. Рациональные и линейчатые поверхности	11
4. Теорема о конусе	17
5. Рациональные кривые	21
6. Поверхности дель Пеццо	27
7. G -поверхности	41
8. Минимальность и относительная минимальность	45
9. Рациональность и \mathbb{k} -точки	49
10. Особенности линейных систем и бирациональная жесткость	54
11. Программа Саркисова	60
12. Группа Кремоны	65
13. Алгебраическое дополнение	72
Список литературы	75

Введение

Пусть X – n -мерное алгебраическое многообразие над полем \mathbb{k} . Оно называется \mathbb{k} -рациональным (соответственно, \mathbb{k} -унирациональным), если существует бирациональное (соответственно, доминантное рациональное) \mathbb{k} -отображение $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n \dashrightarrow X$. Многообразие X называется (геометрически) рациональным, если многообразие $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{k}}$, полученное заменой базы, рационально, где $\bar{\mathbb{k}}$ – алгебраическое замыкание поля \mathbb{k} .

В размерности 1 строение рациональных многообразий очень просто: каждая полная неособая рациональная кривая изоморфна плоской конике, которая является \mathbb{k} -рациональным тогда и только тогда, когда имеет \mathbb{k} -точку. Уже в размерности 2 ситуация становится существенно более сложной: даже над алгебраически замкнутым полем существует бесконечно много, различных с точностью до изоморфизма, типов рациональных поверхностей.

Теория алгебраических поверхностей справедливо считается наиболее изящной частью алгебраической геометрии. Она была начата в классических работах Нётера, Пикара, Пуанкаре, Кастельнуово, Энриквеса, Севери и др. В этих работах была заложена основа теории, введены понятия минимальных моделей и их классификация. Систематическое изучение бирациональных свойств рациональных поверхностей над незамкнутыми полями было начато Ю. И. Маниным [1] и продолжено В. А. Исковских и их учениками. Была создана очень красивая теория, которая стала также начальной точкой в развитии многомерной бирациональной геометрии [2], [3]. К настоящему времени полноценного многомерного аналога теории рациональных поверхностей так и не создано, хотя в этом направлении ведется активная работа (см., например, [4], [5]).

В настоящих записках, следуя, основном, работам [1], [6]–[11], мы сконцентрируемся на вопросах бирациональной классификации рациональных поверхностей. В частности, будут обсуждаться следующие три классических проблемы:

- При каких условиях рациональная поверхность, определенная над \mathbb{k} , будет \mathbb{k} -рациональной?
- Является ли \mathbb{k} -унирациональная поверхность \mathbb{k} -рациональной (проблема Люрота)?
- Классифицировать конечные подгруппы в группе бирациональных автоморфизмов проективной плоскости с точностью до сопряженности.

От читателя требуется знание основ алгебраической геометрии [12], [13, гл. I–III]. Желательно также знакомство с основами теории поверхностей [13, гл. V] (см. также [14]–[17]). Все остальные используемые сведения и факты будут снабжены подробными ссылками.

Безусловно, настоящие записки не претендуют на полноту. Интересующегося читателя мы отсылаем к более полным источникам [6], [11], [18], из которых автор много позаимствовал. Читателю, интересующегося арифметическими аспектами теории, следует порекомендовать обзор [19], который снабжен многочисленными литературными указаниями.

В основу настоящего издания положен материал курса, читавшегося автором в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук осенью 2013 г. По сравнению с оригинальным курсом в настоящий текст внесены значительные изменения и дополнения. Автор благодарен слушателям лекций за внимание, многочисленные вопросы и комментарии. Замечания, сделанные Е. Шиндером, С. Галкиным и Е. Горинным, позволили устранить ошибки и улучшить рукопись. Автор также благодарен И. Долгачеву за внимательное прочтение рукописи и замечания к параграфу 6, которые были учтены в окончательном варианте.

1. Предварительные сведения

1.1. Обозначения. Далее используются следующие обозначения:

- $p_a(C) := (-1)^{\dim C} (\chi(\mathcal{O}_C) - 1)^{\dim C}$ – арифметический род C ;
- $\bar{\mathbb{k}}$ – алгебраическое замыкание поля \mathbb{k} ;
- Для многообразия X над полем \mathbb{k} через \bar{X} мы будем обозначать многообразие $X \otimes \bar{\mathbb{k}}$, полученное заменой базы;
- $\text{Div}(X)$ – группа дивизоров Картье на многообразии X ;
- $\text{Pic}(X)$ обозначает, как обычно, группу Пикара, т.е. группу обратимых пучков на X с точностью до изоморфизма; она естественно отождествляется с группой классов дивизоров Картье $\text{Div}(X)$ по модулю линейной эквивалентности;
- $\text{NS}(X) := \text{Pic}(X) / \text{Pic}^0(X)$ – группа Нерона–Севери;
- $\rho(X) := \text{rk NS}(X)$ – число Пикара;
- ω_X – дуализирующий пучок схемы X ;
- K_X обозначает канонический класс многообразия X ;
- \mathcal{T}_X – касательное расслоение к многообразию X ;
- Ω_X^p – пучок регулярных дифференциальных p -форм на X ;
- $h^{p,q}(X) := \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ – числа Ходжа;
- $q(X) := h^{0,1}(X) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ – иррегулярность;
- $p_g(X) := h^{\dim X, 0}(X) := \dim H^0(X, K_X)$ – геометрический род;

Всюду основное поле \mathbb{k} считается *совершенным*.

1.2. Теорема Римана–Роха и формула Нётера. Пусть X – неособая проективная поверхность над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} . Мы постоянно будем пользоваться теоремой Римана–Роха [13, гл. 5, §1]: для дивизора D на X имеет место формула

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \dim H^0(X, D) - \dim H^1(X, D) + \dim H^2(X, D) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K_X) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

По двойственности Серра [13, гл. 3, §7]

$$\dim H^2(X, D) = \dim H^0(X, K_X - D).$$

Частью теоремы Римана–Роха считается также *формула Нётера* [13, гл. А, 4.1.2]

$$12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + c_2(X), \tag{1.2.1}$$

где $c_2(X) := c_2(\mathcal{T}_X)$ – второй класс Чженя касательного расслоения \mathcal{T}_X . В случае, когда $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел $c_2(X)$ совпадает с топологической эйлеровой характеристикой X и поэтому

$$c_2(X) = \sum_{r=0}^4 (-1)^r b_r(X),$$

где $b_r(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^r(X, \mathbb{C}) - r$ -ое число Бетти. В случае, когда \mathbb{k} – произвольное поле мы можем воспользоваться l -адическим вариантом [20, гл. 5, теорема 3.12] последней формулы:

$$c_2(X) = \sum_{r=0}^4 (-1)^r b_r(X, l), \quad b_r(X, l) := \dim_{\mathbb{Q}_l} H^r(X_{\text{et}}, \mathbb{Q}_l),$$

где l отлично от характеристики поля \mathbb{k} . Напомним также, что по двойственности Пуанкаре $b_r(X, l) = b_{4-r}(X, l)$ (см. [20, гл. 6, §11]). Следовательно,

$$12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + 2 - 2b_1(X, l) + b_2(X, l). \tag{1.2.2}$$

1.2.3. Более того, имеют место следующие утверждения:

- $b_1(X, l) = 2 \dim \text{Alb}(X) = 2 \dim \text{Pic}^0(X)_{\text{red}}$, где $\text{Alb}(X)$ – многообразие Альбанезе (абелево многообразие, см. [21]), а $\text{Pic}^0(X)$ – компонента единицы схемы Пикара, которая является (необязательно приведенной) групповой схемой;
- касательное пространство в 0 к $\text{Pic}^0(X)$ естественно отождествляется с $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, в частности, $b_1(X, l) \leq 2q(X)$, где равенство имеет место тогда и только тогда, когда схема $\text{Pic}^0(X)$ приведена;
- если $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то схема $\text{Pic}^0(X)$ приведена [22, лекция 27];
- $b_2(X, l) \geq \rho(X)$.

1.3. Теорема Ходжа об индексе [13, гл. V, § 1, теорема 1.9]. *Пусть A – обильный дивизор на неособой проективной поверхности X . Предположим, что $A \cdot D = 0$ для некоторого дивизора D . Если D не является численно эквивалентным 0, то $D^2 < 0$.*

2. Конус кривых

Пусть X – нормальное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} (произвольной характеристики). Мы будем придерживаться следующих стандартных обозначений:

- $Z_1(X)$ – группа 1-мерных циклов на X , свободная абелева группа порожденная полными приведенными неприводимыми кривыми $C \subset X$.

Для дивизора Картье $D \in \text{Div}(X)$ и неприводимой приведенной кривой C пересечение $D \cdot C$ определяется следующим образом:

$$D \cdot C := \deg \nu^*(\mathcal{O}_X(D)),$$

где $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ – нормализация C ; по линейности это пересечение продолжается до билинейной формы $\text{Div}(X) \times Z_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Говорят, что циклы $Z, Z' \in Z_1(X)$ численно эквивалентны (это обозначается $Z \equiv Z'$), если $L \cdot Z = L \cdot Z'$ для всех $L \in \text{Div}(X)$; по двойственности определена численная эквивалентность на $\text{Div}(X)$. Таким образом, билинейная форма $\text{Div}(X) \times Z_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ – индуцирует невырожденную билинейную форму

$$N^1(X) \times N_1(X) \rightarrow \mathbb{R},$$

где

$$\begin{aligned} N^1(X) &:= (\text{Div}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R} = (\text{Pic}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R}, \\ N_1(X) &:= (Z_1(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Согласно теореме Нерона–Севери [20, гл. 5, теорема 3.25] пространство $N^1(X)$ конечномерно. Его размерность равна $\rho(X)$ – числу Пикара многообразия X .

2.1. Пример. Если X – неособая проективная поверхность, то $Z_1(X) = \text{Div}(X)$ и $N^1(X) = N_1(X)$. Поэтому на пространстве $N^1(X) = N_1(X) \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)}$ имеется невырожденная билинейная форма пересечения. По теореме Ходжа об индексе ее сигнатура равна $(1, \rho(X) - 1)$.

В пространстве $N_1(X)$ рассмотрим выпуклый конус $\text{NE}(X)$, порожденный всеми эффективными 1-циклами. Обозначим через $\overline{\text{NE}}(X)$ его замыкание. Таким образом, $\overline{\text{NE}}(X)$ – замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном пространстве $N_1(X)$. Он называется *конусом Мори*. Более того, $\overline{\text{NE}}(X)$ порождает $N_1(X)$. Отметим однако, что элементы $\overline{\text{NE}}(X)$ необязательно представляются эффективными 1-циклами и необязательно имеют рациональные коэффициенты. Каждый дивизор Картье определяет линейную функцию на $N_1(X)$.

2.2. Критерий обильности Клеймана. Дивизор Картье D обилен тогда и только тогда, когда он определяет строго положительную функцию на $\overline{\text{NE}}(X) \setminus \{0\}$.

2.2.1. Следствие. Конус $\overline{\text{NE}}(X)$ не содержит прямых.

Отметим, что для обильности дивизора D недостаточно условия положительности $D \cdot C$ для всех кривых $C \subset X$. Это связано с тем, что элементы границы конуса Мори $\overline{\text{NE}}(X)$ необязательно эффективны (т.е. являются выпуклыми линейными комбинациями кривых).

Дивизор Картье D называется *численно эффективным*, если $D \cdot C \geq 0$ для любой кривой $C \subset X$. Таким образом, D численно эффективен, если он задает линейную функцию на $N_1(X)$, которая принимает неотрицательные значения на конусе Мори $\overline{\text{NE}}(X)$.

Луч $R = \mathbb{R}_+[z] \subset \overline{\text{NE}}(X)$ называется *экстремальным*, если из того, что $z_1 + z_2 \in R$, для некоторых элементов $z_1, z_2 \in \overline{\text{NE}}(X)$, следует, что $z_1, z_2 \in R$.

2.3. Пример. Если $\rho(X) = 2$, то конус $\overline{\text{NE}}(X)$ – это угол на плоскости $N_1(X) \simeq \mathbb{R}^2$. В этом случае имеются ровно два экстремальных луча.

2.3.1. Лемма. Конус $\overline{\text{NE}}(X)$ порождается экстремальными лучами.

Доказательство. Действительно, утверждение следует из общего факта выпуклой геометрии: любой замкнутый выпуклый конус $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, не содержащий прямых, порождается своими экстремальными лучами. Этот факт доказывается индукцией по размерности линейной оболочки конуса.

2.4. Замечание. В общем случае неверно, что конус $\overline{NE}(X)$ полиэдрален и содержит конечное число экстремальных лучей, см. упражнения 7 на с. 10 и 1 на с. 70, однако отрицательная часть $\overline{NE}(X)$ локально полиэдральна (теорема о конусе 4.5).

2.4.1. Следствие. Дивизор Картье H обильен тогда и только тогда, когда $H \cdot R > 0$ для любого экстремального луча $R \subset \overline{NE}(X)$.

Следующее утверждение верно в существенно большей общности в любой размерности (см., например, [3]). Однако, в высших размерностях известные в настоящий момент доказательства используют теоремы о занулении когомологий и поэтому работают только в нулевой характеристике.

2.4.2. Предложение. Пусть X – неособая проективная поверхность.

(i) Пусть $\mathbf{z} \in N_1(X)$ – ненулевой элемент. Если $\mathbf{z}^2 > 0$ и $\mathbf{z} \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H , то \mathbf{z} принадлежит внутренности конуса $\overline{NE}(X)$.

(ii) Пусть $C \subset X$ – неприводимая кривая. Если $C^2 \leq 0$, то класс $[C]$ лежит на границе $\overline{NE}(X)$. Если $C^2 < 0$, то $[C]$ порождает экстремальный луч.

(iii) Пусть $R \subset \overline{NE}(X)$ – экстремальный луч. Следующие условия эквивалентны:

(a) $R^2 < 0$,

(b) $R \cdot C < 0$ для некоторой кривой C ,

(c) $R^2 < 0$ и R порожден классом (неприводимой) кривой.

Доказательство. (i) Условия $\mathbf{z}^2 > 0$ и $\mathbf{z} \cdot H > 0$ открыты, поэтому они выполнены в некоторой окрестности $U_{\varepsilon, \mathbf{z}} \subset N_1(X)$. Возьмем рациональный элемент $\mathbf{z}' \in U_{\varepsilon, \mathbf{z}}$ (т.е. $\mathbf{z}' = [Z']$, где Z' – элемент с рациональными коэффициентами). Тогда nZ' – целый дивизор Картье для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно нашим условиям имеем $Z'^2 > 0$ и $H \cdot Z' > 0$. По теореме Римана–Роха для $m \gg 0$ имеем $H^0(\mathcal{O}_X(mnZ')) \neq 0$. Таким образом, класс \mathbf{z}' представляется эффективным циклом. Это доказывает утверждение.

(ii) Каждый численно эффективный дивизор, не являющийся обильным, высекает на выпуклом конусе $\overline{NE}(X)$ некоторую грань F . Если $C^2 = 0$, то поскольку C – неприводимая кривая, то ее класс $[C]$ численно эффективен и лежит в грани F . Пусть $C^2 < 0$. Рассмотрим конус

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} \cdot C \geq 0\} \cap \overline{NE}(X).$$

Этот конус содержит классы всех неприводимых кривых $L \neq C$. Поэтому $\overline{NE}(X)$ порождается \mathcal{K} и $\mathbb{R}_+[C]$. Это доказывает, что $\mathbb{R}_+[C]$ – экстремальный луч.

(iii) Возьмем ненулевой элемент $\mathbf{z} \in R$ и рассмотрим последовательность эффективных циклов $Z^{(i)}$ такую, что $\lim[Z^{(i)}] = \mathbf{z}$.

(a) \Rightarrow (b) Пусть $R^2 < 0$. Запишем $Z^{(i)} = \sum_j a_{ij} C_j$, где C_j – неприводимые кривые, а $a_{ij} \geq 0$. Так как $0 > \mathbf{z}^2 = \lim \mathbf{z} \cdot Z^{(i)}$, то существует неприводимая кривая $C = C_j$ такая, что $C \cdot \mathbf{z} < 0$.

(b) \Rightarrow (c) Пусть $R \cdot C < 0$. Мы можем считать кривую C неприводимой. Для $i \gg 0$ имеем $C \cdot Z^{(i)} < 0$. Поэтому $C^2 < 0$. Запишем $Z^{(i)} = \alpha_i C + Z'^{(i)}$, где $\alpha_i \geq 0$, цикл $Z'^{(i)}$ эффективен и C не является компонентой $Z'^{(i)}$. Для любого обильного дивизора H имеем $Z^{(i)} \cdot H \leq \text{Const}$ и $Z^{(i)} \cdot H \geq 0$. Поэтому все α_i ограничены сверху. Переходя к подпоследовательности можно считать, что α_i сходится: $\lim \alpha_i = \alpha$. Положим $\mathbf{z}' := \mathbf{z} - \alpha[C]$. Тогда элемент $\mathbf{z}' = \lim Z'^{(i)}$ принадлежит $\overline{NE}(X)$. Так как $C \cdot Z'^{(i)} \geq 0$, то $C \cdot \mathbf{z}' \geq 0$. Отсюда $\alpha > 0$. По определению экстремального луча $[C] \in R$.

2.4.3. Следствие. Пусть X – неособая проективная поверхность. Если на X существует экстремальный луч R такой, что $R^2 > 0$, то $\rho(X) = 1$.

2.4.4. Следствие. Пусть X – неособая проективная поверхность. Если на X существует экстремальный луч R , который не порождается классом кривой, то $R^2 = 0$.

Задачи

1. Пусть D_1, D_2 – численно эффективные дивизоры на проективной поверхности. Докажите, что $D_1 \cdot D_2 \geq 0$.
2. ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$) Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что $\rho(X) = 2$ и $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Докажите, что экстремальные лучи порождаются классами целых дивизоров (не утверждается, что они эффективны). Указание. Воспользуйтесь двойственностью Пуанкаре для $H^2(X, \mathbb{Z})$.

3. Выведите критерий Клеймана из критерия Накаи-Мойшезона [13, гл. 5, § 1] (в случае поверхностей).
4. Пусть X – проективное торическое многообразие докажите, что конус $\overline{NE}(X)$ порождается инвариантными торическими кривыми.
5. Пусть X – поверхность, полученная из \mathbb{P}^2 раздутием двух точек. Опишите конус Мори $\overline{NE}(X)$.
Указание. Следует рассмотреть два случая: когда эти точки различны и когда являются бесконечно близкими.
6. Пусть X – поверхность, полученная из \mathbb{P}^2 раздутием трех различных точек. Опишите конус Мори $\overline{NE}(X)$.
7. Пусть E – эллиптическая кривая без комплексного умножения и пусть $X := E \times E$ (таким образом, $\rho(X) = 3$). Опишите конус Мори $\overline{NE}(X)$ и его экстремальные лучи. В каких случаях экстремальный луч порождается классом кривой? Покажите, что естественное действие $SL_2(\mathbb{Z})$ на $E \times E$ индуцирует транзитивное действие на множестве таких экстремальных лучей.
8. Пусть E – эллиптическая кривая и пусть τ – элемент порядка n в E . Рассмотрим действие группы $G = \langle \tau \rangle$ сдвигами на E и умножениями на первообразный корень степени n из 1 на \mathbb{P}^1 . Докажите, что факторповерхность $(E \times \mathbb{P}^1)/G$ линейчатая и не изоморфна произведению эллиптической кривой и \mathbb{P}^1 .

3. Рациональные и линейчатые поверхности

В этом параграфе мы считаем, что поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто (произвольной характеристики).

3.1. Предложение (см. [12, гл. 3, § 6]). Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение неособых проективных многообразий. Тогда имеется естественный гомоморфизм

$$f^*: H^0(Y, \Omega_Y^p) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^p).$$

Если отображение f сепарабельно, то f^* инъективен. Если f – бирациональный изоморфизм, то и f^* является изоморфизмом. В частности, если X рационально, то $h^{p,0}(X) = 0$ для любого $p > 0$.

Набросок доказательства. Пространство $H^0(X, \Omega_X^p)$ можно интерпретировать как \mathbb{k} -подпространство в векторном $\mathbb{k}(X)$ -пространстве рациональных p -форм $\Omega^p(X)$ (и аналогично для $H^0(X, \Omega_Y^p)$). Отображение f индуцирует отображение

$$f^*: \Omega^p(Y) \rightarrow \Omega^p(X),$$

которое является вложением если расширение $\mathbb{k}(X)/\mathbb{k}(Y)$ сепарабельно.

Далее пусть $U \subset X$ – максимальное подмножество, на котором f – морфизм. По основной теореме Зарисского $U = X \setminus Z$, где $Z \subset X$ – замкнутое подмножество коразмерности ≥ 2 . Поскольку прообраз регулярной дифференциальной формы при доминантном морфизме является регулярной дифференциальной формой, то f^* индуцирует вложение $H^0(Y, \Omega_Y^p) \subset H^0(U, \Omega_X^p)$. По принципу Хартогса формы продолжаются с U на X . Следовательно,

$$H^0(Y, \Omega_Y^p) \subset H^0(X, \Omega_X^p).$$

Если отображение f бирационально, то отображение f^{-1} дает обратное включение. Наконец, если f бирационально и $Y \simeq \mathbb{P}^n$, то все группы $H^0(Y, \Omega_Y^p)$ – нулевые.

3.1.1. Замечание. Утверждение предложения 3.1 остается верным с заменой пучков Ω^p на произвольные тензорные степени $(\Omega^1)^{\otimes p}$.

3.2. Предложение (см. [13, гл. 5, § 2]). Пусть X – (неособая проективная) рациональная поверхность. Тогда

- (i) $q(X) = 0$,
- (ii) группа $\text{Pic}(X)$ конечно порождена и не имеет кручений,
- (iii) форма пересечения на $\text{Pic}(X)$ унимодулярна,
- (iv) $\rho(X) + K_X^2 = 10$ (вариант формулы Нётера).

Идея доказательства. Свойства (ii), (iii), а также значения $q(X)$ и $\rho(X) + K_X^2$ не меняются при раздутиях точек.

Линейчатые поверхности. Для более подробного знакомства с линейчатыми поверхностями мы советуем изучить [13, гл. 5, § 2].

3.3. Определение. Мы говорим, что неособая проективная поверхность X является (геометрически) *линейчатой*, если существует доминантный гладкий морфизм $\pi: X \rightarrow B$ на кривую B такой, что *каждый* слой X_b является кривой арифметического рода 0. Сечением линейчатой поверхности называется морфизм $\sigma: B \rightarrow X$ такой, что $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$, а также образ $\Sigma = \sigma(B)$ этого морфизма.

3.4. Теорема. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – линейчатая поверхность. Тогда X является проективизацией векторного расслоения \mathcal{E} ранга 2 на B . В частности, поверхность X бирационально эквивалентна произведению $B \times \mathbb{P}^1$.

Доказательство. Общий слой X_η , где $\eta = \text{Spec } \mathbb{k}(B)$, является кривой арифметического рода 0. Антиканическая линейная система очень обильна и задает вложение $X_\eta \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}(B)}^2$ как невырожденной коники. По теореме Тзена (см. теорему 13.5) эта коника X_η имеет $\mathbb{k}(B)$ -точку. Ей соответствует рациональное отображение, $\lambda: B \rightarrow X$, сечение морфизма π . Следовательно, \mathbb{P}^1 -расслоение π локально тривиально в топологии Зарисского. Это означает, что $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E})$.

3.4.1. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – линейчатая поверхность. Тогда $\text{Pic}(X) = \pi^* \text{Pic}(B) \oplus \mathbb{Z} \cdot [\Sigma]$, где Σ – любое сечение π .

Доказательство. Следует из точной последовательности вырезания (см. также [13, гл. 5, § 2, предложение 2.3]).

3.4.2. Над полем \mathbb{C} , можно также воспользоваться следующим соображением. Расслоения со слоем \mathbb{P}^{N-1} над B классифицируются множеством $H^1(B, \mathcal{PGL}_N)$, а векторные расслоения ранга N – множеством $H^1(B, \mathcal{GL}_N)$. Имеем точную последовательность

$$\longrightarrow H^1(B, \mathcal{GL}_N) \xrightarrow{\alpha} H^1(B, \mathcal{PGL}_N) \longrightarrow H^2(B, \mathcal{O}_B^*)$$

где $H^2(B, \mathcal{O}_B^*) = 0$ поскольку

$$H^2(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(B, \mathcal{O}_B) \longrightarrow H^2(B, \mathcal{O}_B^*) \longrightarrow H^3(B, \mathbb{Z}) = 0.$$

Следовательно, гомоморфизм α сюръективен. С небольшими изменениями это рассуждение обобщается на случай произвольного поля (в этальной топологии).

3.4.3. Замечание. В общем случае (для произвольной базы) расслоение $\pi: X \rightarrow B$ со слоем \mathbb{P}^{N-1} не обязательно представляться в виде $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ для некоторого векторного расслоения на B . Соображения, приведенные выше, показывают, что препятствием является существование элемента порядка N в $H^2(B, \mathcal{O}_B^*)$, т.е. в группе Брауэра многообразия B .

3.4.4. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – линейчатая поверхность. Тогда $q(X) \simeq p_a(B)$. Линейчатая поверхность X рациональна тогда и только тогда, когда $q(X) = 0$.

3.4.5. Следствие-определение (см. [13, гл. 5, § 2]). Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – линейчатая поверхность над проективной прямой. Тогда X является проективизацией векторного расслоения $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ для некоторого $n \geq 0$. Такая поверхность называется рациональной линейчатой поверхностью¹ и обозначается \mathbb{F}_n .

Доказательство. Следует из того, что любое векторное расслоение на проективной прямой разложимо [13, гл. 5, § 2].

3.5. Конструкция. Рассмотрим поверхность $X \subset \mathbb{P}_{u,v}^1 \times \mathbb{P}_{x,y,z}^2$, заданную уравнением

$$u^n y = v^n x.$$

Проекция

$$\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad (u : v; x : y : z) \mapsto (u : v)$$

является \mathbb{P}^1 -расслоением, т.е. линейчатой поверхностью (в частности, X неособа). В аффинной карте $U = \{y \neq 0, v \neq 0\}$ поверхность X задается уравнением $u^n = x$. Следовательно, $X \cap U \simeq \mathbb{A}^2$ и X рациональна. Несложно показать (проделайте самостоятельно), что $X \simeq \mathbb{F}_n$. При $n = 0$ поверхность \mathbb{F}_0 изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. При $n = 1$ проекция на второй множитель $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}_{x,y,z}^2$ является бирациональным морфизмом – раздутием точки.

Дополнение $X \setminus U$ состоит из двух компонент: $F := \{y = v = 0\}$, $\Sigma := \{x = y = 0\}$. Ясно, что F – слой, а Σ – сечение расслоения π . При $n > 0$ кривая Σ называется *исключительным* (или *отрицательным*) *сечением* линейчатой поверхности X . Точная последовательность вырезания имеет вид

$$\mathbb{Z} \cdot [F] \oplus \mathbb{Z} \cdot [\Sigma] \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{A}^2) = 0.$$

Следовательно, классы F и Σ порождают $\text{Pic}(X)$. С другой стороны, $F^2 = 0$, $F \cdot \Sigma = 1$. Поэтому F и Σ линейно независимы в $\text{Pic}(X)$ и $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot [F] \oplus \mathbb{Z} \cdot [\Sigma]$. Рассмотрим кривую $C_t := \{y = x + tz\}$, где t – параметр. При $t \neq 0$, C_t – неприводимое сечение расслоения π и $C_t \cap \Sigma = 0$. С другой стороны, $C_0 = \Sigma + \{u^n = v^n\}$. Таким образом, $C_t \sim C_0 \sim \Sigma + nF$. Отсюда,

$$0 = C_t \cdot \Sigma = C_0 \cdot \Sigma = \Sigma^2 + nF \cdot \Sigma = \Sigma^2 + n, \quad \Sigma^2 = -n.$$

¹В англоязычной литературе принят термин *поверхность Хирцебруха*.

Пусть $L \subset X$ – неприводимая кривая, отличная от слоя и сечения Σ . Мы можем записать $L \sim a\Sigma + bF$. Тогда $a = L \cdot F > 0$ и $-an + b = L \cdot \Sigma \geq 0$. В частности, $L^2 = a(-na + 2b) \geq 0$. Далее, по формуле для рода имеем

$$-2 = 2p_a(F) - 2 = F \cdot K_X, \quad -2 = 2p_a(\Sigma) - 2 = \Sigma^2 + \Sigma \cdot K_X = \Sigma \cdot K_X - n.$$

Отсюда $K_X = -2\Sigma - (2 + n)F$. Мы доказали следующее

3.5.1. Утверждение. *Группа $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ порождается классами слоя F и сечения Σ , а теория пересечений имеет вид*

$$F^2 = 0, \quad F \cdot \Sigma = 1, \quad \Sigma^2 = -n.$$

Неприводимая кривая L на \mathbb{F}_n или является слоем, или совпадает с Σ (при $n > 0$, линейно эквивалентна Σ при $n = 0$), или имеет вид

$$L \sim a\Sigma + bF, \quad a > 0, \quad b \geq an.$$

В частности, единственная кривая с отрицательным индексом самопересечения – это исключительное сечение (при $n > 0$). Канонический класс имеет вид

$$K_{\mathbb{F}_n} = -2\Sigma - (2 + n)F.$$

3.5.2. Следствие. *Конус $\overline{\text{NE}}(\mathbb{F}_n)$ порождается двумя экстремальными лучами: $\mathbb{R}_+[F]$ и $\mathbb{R}_+[\Sigma]$.*

Доказательство. См. предложение 2.4.2 (ii).

3.5.3. Следствие. *Поверхности \mathbb{F}_n и \mathbb{F}_m изоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$.*

3.5.4. Следствие. *Поверхность \mathbb{F}_n не содержит (-1) -кривых при $n \neq 1$.*

3.6. Расслоения на коники.

3.6.1. Предложение-определение. *Пусть X – неособая поверхность и пусть $\pi: X \rightarrow B$ – доминантный проективный морфизм на неособую кривую такой, что $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_B$ (т.е. слои π связны [13, гл. 3, § 11, следствие 11.3]). Морфизм π называется расслоением на коники, если выполнены следующие эквивалентные условия:*

- (i) *каждый (схемный) слой $X_b = \pi^{-1}(b)$ изоморфен плоской конике;*
- (ii) *антиканонический дивизор $-K_X$ является π -обильным.*

Доказательство. Заметим, что поле $\mathbb{k}(B)$ алгебраически замкнуто в $\mathbb{k}(X)$ поскольку $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_B$.

Импликация (i) \Rightarrow (ii). Условие (ii) означает, что $-K_X$ обилен на слоях, т.е. пучок $\mathcal{O}_{X_b}(-K_X) \simeq \omega_{X_b}^\vee$ обилен. Это, очевидно, выполнено для плоских коник по формуле присоединения.

Импликация (ii) \Rightarrow (i). Каждый слой X_b над замкнутой точкой $b \in B$ является одномерной подсхемой в X без вложенных компонент. Более того, для некоторого непустого открытого подмножества $B_0 \subset B$ слои над точками $b \in B_0$ приведены и неприводимы. В случае $\text{char } \mathbb{k} = 0$ это следует из “гладкости почти всюду” (см. [13, гл. III, § 10, следствие 10.7]), в общем случае см. следствие 3.6.7 ниже.

Пусть слой X_b над замкнутой точкой $b \in B$ приведен и неприводим. По формуле для рода

$$2p_a(X_b) - 2 = (K_X + X_b) \cdot X_b = K_X \cdot X_b < 0.$$

Следовательно, $p_a(X_b) = 0$, т.е. X_b – неособая рациональная кривая, и $K_X \cdot X_b = -2$.

Пусть теперь X_b – вырожденный слой над замкнутой точкой $b \in B$. Так как слои алгебраически эквивалентны, то $K_X \cdot X_b$ не зависит от $b \in B$ и поэтому $K_X \cdot X_b = -2$. Запишем $X_b = \sum m_i F_i$, где F_i – неприводимые компоненты и $\sum m_i > 1$. Тогда

$$2 = -K_X \cdot X_b = \sum m_i (-K_X \cdot F_i).$$

Так как $-K_X \cdot F_i > 0$, то $K_X \cdot F_i = -1$ и имеются две возможности: $X_b = 2F_1$ и $X_b = F_1 + F_2$. В первом случае, $F_1^2 = 0$ и $2p_a(F_1) - 2 = -1$, т.е. арифметический род F_1 – дробное число, что невозможно. Следовательно, $X_b = F_1 + F_2$. Имеем

$$2p_a(F_1) - 2 = (K_X + F_1) \cdot F_1 = (K_X + X_b - F_2) \cdot F_1 = K_X \cdot F_1 - F_1 \cdot F_2 < 0.$$

Отсюда $p_a(F_1) = 0$ и $F_1 \cdot F_2 = 1$. Аналогично $p_a(F_2) = 0$. Таким образом, $X_b = F_1 + F_2$, где F_1 и F_2 – неособые рациональные кривые, пересекающие друг друга трансверсально в одной точке, т.е. X_b изоморфна плоской конике коранга 1.

3.6.2. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – расслоение на коники, и пусть X_b – его слой над замкнутой точкой. Тогда X_b приведен и имеет место одна из следующих возможностей (см. рис. 1):

- (i) X_b – неприводимая неособая рациональная кривая;
- (ii) X_b – объединение двух (-1) -кривых, пересекающихся трансверсально в одной точке; имеется не более чем конечное число таких вырожденных слоев.

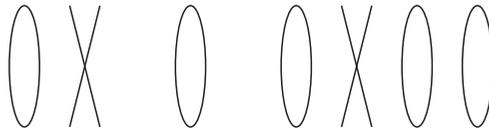


Рис. 1. Слои расслоения на коники

Заметим, что если каждый слой X_b , $b \in B$ расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$ неприводим, то, очевидно, X/B – линейчатая поверхность.

3.6.3. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – расслоение на коники. Тогда существует разложение $\pi: X \xrightarrow{\sigma} X' \xrightarrow{\pi'} B$, где $\pi': X' \rightarrow B$ – линейчатая поверхность, а $\sigma: X \rightarrow X'$ – бирациональный морфизм (композиция раздутий точек в различных слоях π'). В частности, поверхность X бирационально эквивалентна $B \times \mathbb{P}^1$.

Доказательство. Морфизм σ – стягивание одной компоненты в каждом вырожденном слое. Отображение $\pi' = \pi \circ \sigma^{-1}$ является регулярным по основной теореме Зарисского [13, гл. V, § 5, теорема 5.2].

3.6.4. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – расслоение на коники над полной кривой B рода g . Тогда число вырожденных слоев равно

$$4(1 - g) - K_X^2.$$

Доказательство. Пусть r – число вырожденных слоев. Тогда, в обозначениях предыдущего следствия, $\sigma: X \rightarrow X'$ – композиция раздутий r точек и поэтому $K_X^2 = K_{X'}^2 - r$. С другой стороны, для линейчатой поверхности X' имеем $K_{X'}^2 = 4(1 - g)$ [13, гл. V, § 2, следствие 2.11].

Как и в случае линейчатых поверхностей, сечением расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$ называется образ $\Sigma = \sigma(B)$ морфизма $\sigma: B \rightarrow X$ такого, что $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$.

3.6.5. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – расслоение на коники над $B \simeq \mathbb{P}^1$. Тогда $\rho(X) = 10 - K_X^2$ и группа $\text{Pic}(X)$ порождается классом сечения и компонентами слоев.

Следующий технический факт использовался в доказательстве 3.6.1.

3.6.6. Лемма. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – доминантный морфизм неприводимых неособых алгебраических многообразий такой, что расширение полей $\pi^*: \mathbb{k}(B) \rightarrow \mathbb{k}(X)$ сепарабельно и $\mathbb{k}(B)$ алгебраически замкнуто в $\mathbb{k}(X)$. Тогда существует непустое открытое подмножество $B_0 \subset B$ такое, что для любого $b \in B_0$ слой $X_b = \pi^{-1}(b)$ геометрически приведен и неприводим над полем вычетов $\mathbb{k}(b)$ (т.е. для любого расширения полей $\mathbb{k}(b) \subset \mathbb{K}$, схема $X_b \otimes \mathbb{K}$ также приведена и неприводима).

Доказательство. Пусть η – общая точка B . Ясно, что слой $X_\eta = \pi^{-1}(\eta)$ содержит общую точку X (потому что π является доминантным). Схема X_η неприводима, потому что ее замыкание равно X и она приведена поскольку для каждой точки $P \in X$ ее локальное кольцо \mathcal{O}_{P, X_η} совпадает с $\mathcal{O}_{P, X}$. Таким образом, слой X_η над общей точкой приведен и неприводим над $\mathbb{k}(B)$.

Из наших предположений следует, что слой X_η является даже геометрически приведенным и неприводимым (см. [23, предложения 4.5.9, 4.6.1]). Множество $Z \subset B$ точек $b \in B$, слой $X_b = \pi^{-1}(b)$ над которыми геометрически приведен и неприводим, является конструктивным (см. [24, теорема 9.7.7]). Поскольку общая точка η лежит Z , то существует непустое открытое подмножество $B_0 \subset Z$ (см. [13, гл. II, § 3, упражнение 3.18]).

Если, в условиях теоремы, B является алгебраической кривой, то расширение $\mathbb{k}(X)/\mathbb{k}(B)$ сепарабельно по предложению 13.6.3:

3.6.7. Следствие. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ доминантный морфизм из неприводимого неособого многообразия X размерности ≥ 2 на (неприводимую) кривую B такой, что $\mathbb{k}(B)$ алгебраически замкнуто в $\mathbb{k}(X)$. Тогда слой $X_b = \pi^{-1}(b)$ геометрически приведен и неприводим для всех, кроме конечного числа замкнутых точек.

В случае $\text{char } \mathbb{k} = 0$ по теореме Бертини слой X_b также неособ для всех, кроме конечного числа замкнутых точек. В положительной характеристике это неверно:

3.6.8. Пример. Рассмотрим поверхность

$$X := \{y^2z = x^3 + tz^3\} \subset \mathbb{P}_{x,y,z}^2 \times \mathbb{A}_t^1$$

над полем характеристики 3. Несложно проверить, что X неособа, а каждый слой проекции $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ особ в точке $(0 : 0 : 1)$.

Следующее утверждение объясняет термин “расслоение на коники”, однако этот факт не будет использоваться в дальнейшем.

3.7. Теорема. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – расслоение на коники.

- (i) Пучок $\mathcal{E} := \pi_* \omega_X^\vee$ локально свободен и имеет ранг 3.
- (ii) Естественное отображение $X \rightarrow \mathbb{P}_B(\mathcal{E})$ заданное линейной системой $|-K_X|$ является вложением и отображает каждый слой X_b на приведенную конику в $\mathbb{P}_{\mathbb{k}(b)}^2$.

Доказательство. Морфизм π является плоским. Для любого слоя X_b имеем $\omega_{X_b} = \omega_X \otimes \mathcal{O}_{X_b}$. Отсюда

$$H^1(X_b, \omega_X^\vee \otimes \mathcal{O}_{X_b}) = H^1(X_b, \omega_{X_b}^\vee) = H^0(X_b, \omega_{X_b}^{\otimes 2}) = 0.$$

По теореме Римана–Роха на X_b

$$\dim H^0(X_b, \omega_X^\vee \otimes \mathcal{O}_{X_b}) = 3.$$

По теореме Грауэрта (см., например, [13, гл. 3, § 12, следствие 12.9]) пучок $\pi_* \omega_X^\vee$ локально свободен и имеет ранг 3.

Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что пучок ω_X^\vee очень обилен на слоях. Но согласно следствию 3.6.2 каждый слой допускает вложение $X_b \subset \mathbb{P}^2$ как плоская коника и $\omega_{X_b}^\vee = \mathcal{O}_{X_b}(1)$ по формуле присоединения.

Конструкция теоремы 3.7 выглядит очень простой в случае, когда расслоение \mathcal{E} тривиально:

3.7.1. Пример. Рассмотрим гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2 \times \mathbb{P}_{y_0, y_1}^1$ заданную уравнением

$$\sum_{0 \leq i, j \leq 2} \phi_{i,j} x_i x_j = 0,$$

где $\phi_{i,j} = \phi_{i,j}(y_0, y_1)$ – однородные многочлены одной степени d . Если X неособа, то проекция $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_{y_0, y_1}^1$ является расслоением на коники. Вырожденные слои задаются обращением в нуль определителя $\|\phi_{i,j}\|$.

3.7.2. Пример. Пусть $\pi': Y \rightarrow B$ – линейчатая поверхность. Рассмотрим раздутие $\sigma: X \rightarrow Y$ точек $P_1, \dots, P_m \in Y$ таких, что никакие две из них не лежат на одном слое π . Тогда X с естественной проекцией на B является расслоением на коники. Из последнего замечания следует, что любое расслоение на коники (неоднозначно) получается таким способом.

Рассмотрим более конкретный пример.

3.7.3. Пример. На $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ зафиксируем одну из проекций $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Возьмем два различных (непересекающихся) сечения Σ, Σ' и различные точки $P_1, \dots, P_n \in \Sigma, P'_1, \dots, P'_n \in \Sigma'$ такие, что никакие две из них не лежат на одном слое. Рассмотрим раздутие $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ точек $P_1, \dots, P_n, P'_1, \dots, P'_n$. Тогда X с естественной проекцией на \mathbb{P}^1 является расслоением на коники. Собственные прообразы сечений Σ, Σ' являются кривыми с индексом самопересечения $-n$ (см. рис. 2).

Такое расслоение на коники называется *исключительным* (см. [25]).

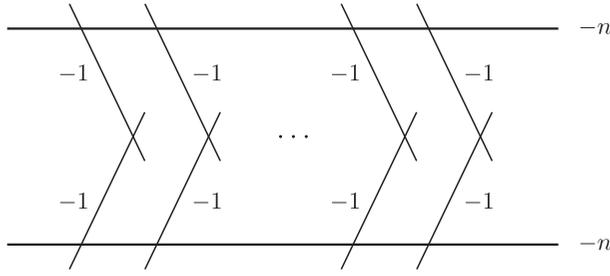


Рис. 2. Исключительное расслоение на коники

3.8. Элементарные преобразования. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – расслоение на коники. Возьмем точку P на гладком слое $F \subset X$. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие P , $E := \sigma^{-1}(P)$ – исключительный дивизор и пусть $\tilde{F} \subset Y$ – собственный прообраз F . Таким образом, $Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники и $\sigma^*F = \tilde{F} + E$ – его вырожденный слой. Согласно следствию 3.6.2 \tilde{F} – (-1) -кривая. Пусть $\varphi: Y \rightarrow X'$ – ее стягивание. Получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 \sigma \swarrow & & \searrow \varphi \\
 X & & X' \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\
 & B &
 \end{array} \tag{3.8.1}$$

Здесь π' – также расслоение на коники.

Предположим теперь, что $B \simeq \mathbb{P}^1$ и π не имеет вырожденных слоев, т.е. $X \simeq \mathbb{F}_n$. Пусть $\Sigma \subset X$ – минимальное сечение. Обозначим через $\tilde{\Sigma} \subset Y$ собственный прообраз $\Sigma \subset \mathbb{F}_n$. Имеются два случая:

(i) $P \notin \Sigma$. Тогда $\tilde{\Sigma}^2 = \Sigma^2 = -n$ и $\tilde{\Sigma}$ пересекает \tilde{F} трансверсально в одной точке. Следовательно, $\varphi(\tilde{\Sigma})^2 = -n + 1$ и $X' \simeq \mathbb{F}_{n-1}$.

(ii) $P \in \Sigma$. Тогда $\tilde{\Sigma}^2 = \Sigma^2 - 1 = -n - 1$ и $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{F} = \emptyset$. Следовательно, $\varphi(\tilde{\Sigma})^2 = -n - 1$ и $X' \simeq \mathbb{F}_{n+1}$.

Преобразования (i) и (ii) обратны друг другу.

Задачи

1. Докажите, что поверхности \mathbb{F}_n и \mathbb{F}_m над \mathbb{C} гомеоморфны в классической хаусдорфовой топологии тогда и только тогда, когда $n \equiv m \pmod{2}$. *Указание.* Если n и m одной четности, то поверхности \mathbb{F}_n и \mathbb{F}_m включаются в одно деформационное семейство.
2. В обозначениях 3.5 задайте явными формулами морфизм $\varphi: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$, стягивающий минимальное сечение $\Sigma \subset \mathbb{F}_n$ в точку. Докажите, что при $n > 1$ образ $\varphi(\mathbb{F}_n)$ является особой поверхностью – конусом над рациональной нормальной кривой, а морфизм φ бирационален на свой образ.
3. ($\text{char } \mathbb{k} = 0$) Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – линейчатая поверхность над кривой рода g и пусть R – экстремальный луч на X такой, что $R^2 < 0$. Докажите, что R порождается классом некоторого сечения. *Указание.* См. [13, гл. 5, предложение 2.21].
4. Пусть $\pi: X \rightarrow B \simeq \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники. Рассмотрим два сечения $C, C' \subset X$. Докажите, что $C^2 + C'^2 + 8 = 2C \cdot C' + K_X^2 + r$, где r – число компонент вырожденных слоев, которые пересекают как C , так и C' [25].
5. Докажите, что на рациональной поверхности локальное кольцо *каждой* точки изоморфно кольцу $\mathbb{k}[x_1, x_2]_{(x_1, x_2)}$.
6. Докажите, что на рациональной поверхности у *каждой* точки имеется окрестность изоморфная \mathbb{A}^2 . *Указание.* Это свойство сохраняется при раздутиях.
7. Пусть X – проективная рациональная поверхность. Предположим, что антиканонический класс X представляется эффективным дивизором: $-K_X \sim D$. Докажите, что носитель D связан.
8. Проверьте формулу 3.6.4 для расслоения на коники из примера 3.7.1

4. Теорема о конусе

В этом параграфе мы предполагаем, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Наиболее важный результат этого параграфа – теорема о конусе 4.5. На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто.

4.1. Определение. Многообразию X размерности n называется *унилинейчатый*, если существует многообразие Z размерности $n - 1$ и доминантное рациональное отображение $Z \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$. Иначе говоря, на унилинейчатом многообразии через общую точку проходит рациональная кривая из некоторого алгебраического семейства [18].

4.1.1. Теорема. Пусть X – неособое проективное многообразие. Предположим одно из двух:

- (i) X рационально или
- (ii) X унилинейчато и $\text{char } \mathbb{k} = 0$.

Тогда канонический дивизор K_X не является численно эффективным.

Доказательство. Докажем (ii). Доказательство (i) аналогично и оставляется читателю. Пусть $n := \dim X$. Существует доминантное рациональное отображение $\psi: Z \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$, где $\dim Z = n - 1$. По основной теореме Зарисского множество неопределенности ψ имеет коразмерность ≥ 2 (см., например, [13, гл. V, лемма 5.1]). Поэтому, ограничивая ψ на открытое плотное подмножество $U \subset Z$, мы получим конечный в общей точке морфизм $\psi: U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$. Обозначим через $\pi: U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U$ проекцию. Общий геометрический слой $C := \pi^{-1}(u)$, $u \in U$ (и его окрестность) морфизмом ψ сюръективно отображается на свой образ. Поэтому дифференциал $d\psi: \mathcal{T}_{U \times \mathbb{P}^1} \rightarrow \psi^* \mathcal{T}_X$ сюръективен в общей точке C . Так как $\mathcal{T}_{U \times \mathbb{P}^1}|_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(n-1)}$, то

$$-K_X \cdot \psi(C) = \det(\psi^* \mathcal{T}_X) \cdot C \geq \deg \mathcal{T}_{U \times \mathbb{P}^1}|_C > 0.$$

4.1.2. Замечание. Отметим, что вместо (i) или (ii) достаточно потребовать сепарабельной унилинейчатости, т.е. существования конечного в общей точке сепарабельного отображения $Z \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$. Условие сепарабельности здесь необходимо (см. упражнение 14 на с. 26).

Следующий факт – один из основополагающих в доказательстве теоремы о конусе 4.5. Мы приведем, следуя [17], простое доказательство верное только для поверхностей. Его преимущество состоит в том, что оно работает в произвольной характеристике.

4.2. Лемма о рациональности. Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что дивизор K_X не является численно эффективным и пусть H – обильный дивизор на X . Положим

$$t_0 := \sup\{t \mid H + tK_X \text{ численно эффективен}\}.$$

Тогда t_0 – рациональное число.

Доказательство. Ясно, что $t_0 > 0$. Предположим, что $t_0 \notin \mathbb{Q}$. Для любого целого положительного q существует целое p такое, что $p/q < t_0 < (p+1)/q$. Таким образом, $t_0 = p/q + \epsilon/q$, где $0 < \epsilon < 1$. Тогда дивизор $qH + pK_X$ обилён, а дивизор $qH + (p+1)K_X$ не является численно эффективным.

4.2.1. Лемма. Имеем $|qH + (p+1)K_X| \neq \emptyset$.

Доказательство. По двойственности Серра

$$\dim H^2(X, qH + (p+1)K_X) = \dim H^0(X, -pK_X - qH) = 0.$$

Следовательно, по теореме Римана–Роха

$$\dim |qH + (p+1)K_X| \geq \frac{1}{2}(qH + (p+1)K_X) \cdot (qH + pK_X) + \chi(\mathcal{O}_X) - 1. \quad (4.2.2)$$

Положим $D := H + t_0 K_X$. Тогда D – численно эффективный элемент $N^1(X)$. В частности, $D^2 \geq 0$. Последнее неравенство (4.2.2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dim |qH + (p+1)K_X| &\geq \frac{1}{2}(qD + (1-\epsilon)K_X) \cdot (qD - \epsilon K_X) + \chi(\mathcal{O}_X) - 1 \\ &= \frac{1}{2}q^2 D^2 + \frac{1}{2}q(1-2\epsilon)D \cdot K_X - \frac{1}{2}\epsilon(1-\epsilon)K_X^2 + \chi(\mathcal{O}_X) - 1. \end{aligned}$$

Если $D^2 > 0$, то $|qH + (p+1)K_X| \neq \emptyset$ при $q \gg 0$. Пусть $D^2 = 0$, тогда $D \cdot K_X = -(1/t_0)D \cdot H \leq 0$. Более того, $D \cdot K_X \neq 0$ (иначе по теореме Ходжа об индексе $D \equiv 0$, $H \equiv t_0 K_X$ и $t_0 = H^2/(K_X \cdot H)$ – рациональное число). Согласно классическим аргументам Дирихле о приближениях, множество дробных частей чисел $\{qt_0 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ всюду плотно в единичном интервале. Поэтому мы можем выбрать q и p так, что $1/2 < \epsilon < 1$. Тогда снова $|qH + (p+1)K_X| \neq \emptyset$ при $q \gg 0$. Лемма 4.2.1 доказана.

Продолжая доказательство леммы о рациональности, возьмем эффективный дивизор

$$B = \sum b_i B_i \in |qH + (p+1)K_X|.$$

Для любого $0 < t < (p+1)/q$ \mathbb{R} -дивизор $H + tK_X$ является выпуклой линейной комбинацией H и B . Так как $t_0 < (p+1)/q$, то

$$t_0 = \min_{B_i} \{t \mid (H + tK_X) \cdot B_i \geq 0\}.$$

(для того, чтобы эффективный \mathbb{R} -дивизор N был численно эффективным необходимо и достаточно, чтобы пересечения N с его компонентами были неотрицательными). Очевидно, что последнее выражение – рациональное число.

4.3. Теорема. Пусть X – неособая проективная поверхность и пусть R – экстремальный луч на X такой, что $K_X \cdot R < 0$. Возможны следующие случаи:

- (i) $R^2 > 0$, тогда $\rho(X) = 1$ и дивизор $-K_X$ обильен²;
- (ii) $R^2 < 0$, тогда $R = \mathbb{R}_+[C]$, где C – (-1) -кривая;
- (iii) $R^2 = 0$, тогда X – линейчатая поверхность и R порождается классом слоя.

Доказательство. (i) См. следствие 2.4.3.

(ii) Согласно предложению 2.4.2 (iii) луч R порождается классом (неприводимой) кривой C . Так как $C^2 < 0$ и $C \cdot K_X < 0$, то $C \simeq \mathbb{P}^1$ и $C^2 = -1$.

(iii) Основная проблема в доказательстве – показать, что R порождается рациональным классом. Зафиксируем обильный дивизор A и элемент $\mathbf{r} \in R$ такой, что $\mathbf{r} \cdot A = 1$. Пусть $L \in N^1(X)$ – элемент, порождающий опорную функцию для R , т.е. L численно эффективен и $L \cdot \mathbf{z} = 0$ для $\mathbf{z} \in \overline{NE}(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{z} \in R$. Существует последовательность обильных \mathbb{Q} -дивизоров L_i , сходящихся к L . Для каждого L_i мы выберем t_i как в лемме о рациональности 4.2. Таким образом, дивизоры $M_i := L_i + t_i K_X$ численно эффективны, но не обильны и $t_i \in \mathbb{Q}$. Так как $0 \leq -t_i K_X \cdot \mathbf{r} \leq L_i \cdot \mathbf{r}$, то последовательность t_i сходится к 0. Для каждого M_i существует экстремальный луч R_i такой, что $M_i \cdot R_i = 0$. Ясно, что $K_X \cdot R_i < 0$. Как и выше, возьмем $\mathbf{r}_i \in R_i$ так, что $\mathbf{r}_i \cdot A = 1$. Тогда \mathbf{r}_i лежат в компактном множестве $\overline{NE}(X) \cap \{\mathbf{z} \mid A \cdot \mathbf{z} = 1\}$. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что \mathbf{r}_i сходится и знак R_i^2 постоянен (т.е. или $R_i^2 = 0$ или $R_i^2 < 0$ для всех i). В частности, последовательность $-K_X \cdot \mathbf{r}_i$ ограничена: существуют константы δ_1, δ_2 такие, что $\delta_1 < -K_X \cdot \mathbf{r}_i < \delta_2$. Пусть $\mathbf{r}' := \lim \mathbf{r}_i$. Тогда $A \cdot \mathbf{r}' = 1$ и

$$0 = \lim M_i \cdot \mathbf{r}_i = \lim L_i \cdot \mathbf{r}_i + \lim t_i K_X \cdot \mathbf{r}_i = L \cdot \mathbf{r}'.$$

Следовательно, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Так как $-K_X \cdot \mathbf{r} > 0$, то мы можем считать, что $\delta_1 > 0$.

Если $R_i^2 < 0$ (для всех i), то согласно пункту (ii) каждый луч R_i порождается классом (-1) -кривой C_i . Для некоторого $\lambda_i > 0$ имеем $C_i \equiv \lambda_i \mathbf{r}_i$. Тогда $-K_X \cdot \mathbf{r}_i = 1/\lambda_i$ и $\lambda_i \leq 1/\delta_1$. Но в этом случае $A \cdot C_i \leq 1/\delta_1$, т.е. степени кривых C_i ограничены. Поэтому имеется лишь конечное число возможностей для многочленов Гильберта C_i . Так как (-1) -кривая не может варьироваться в семействе, то существует лишь конечное число таких (-1) -кривых на X . Это означает, что $R_i = R$ при $i \gg 0$ и $R^2 < 0$. Противоречие.

²Позднее мы докажем, что $X \simeq \mathbb{P}^2$ в этом случае (см. лемму 6.10.2).

Пусть $R_i^2 = 0$. По теореме Ходжа об индексе $M_i^2 = 0$. Так как дивизор $M_i - \epsilon K_X$ обилен при $0 < \epsilon \ll 1$, то $(M_i - \epsilon K_X) \cdot M_i > 0$ и поэтому $-K_X \cdot M_i > 0$. Для некоторого $\alpha > 0$ имеем $(M_i - \epsilon K_X) \cdot (r_i - \alpha M_i) = 0$ и снова по теореме Ходжа об индексе $r_i \equiv \alpha M_i$. По теореме Римана–Роха линейная система $|n_i M_i|$ непуста для некоторого $n_i > 0$. Таким образом, R_i порождается классом (неприводимой приведенной) кривой C_i такой, что $C_i^2 = M_i \cdot C_i = 0$. По формуле для рода $\rho_a(C_i) = 0$, т.е. $C_i \simeq \mathbb{P}^1$ и тогда $K_X \cdot C_i = -2$. Как и выше, количество семейств таких кривых конечно и поэтому $R_i = R$ при $i \gg 0$.

Следовательно, луч R порождается классом неособой рациональной кривой $C = C_i$ такой, что $C^2 = 0$ и $K_X \cdot C = -2$. Мы можем считать кривую C неприводимой и минимальной степени относительно некоторого обильного дивизора. По лемме 4.3.1 линейная система $|C|$ задает морфизм $\pi: X \rightarrow B$ на кривую. При этом C является слоем морфизма π . Так как $R = \mathbb{R}_+[C]$ – экстремальный луч, то любой слой π неприводим. Следовательно, $\pi: X \rightarrow B$ – линейчатая поверхность.

4.3.1. Лемма. Пусть X – неособая проективная поверхность и пусть $C \subset X$ – неприводимая кривая такая, что $C^2 = 0$ и $K_X \cdot C < 0$. Тогда линейная система $|nC|$ (при некотором $n > 0$) не имеет базисных точек и задает морфизм $\pi: X \rightarrow B \subset \mathbb{P}^N$ на кривую.

Доказательство. По теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(X, nC) + \dim H^0(X, K_X - nC) \gg 0$$

при $n \gg 0$. Так как дивизор C эффективен, то $|K_X - nC| = \emptyset$ и $\dim |nC| \gg 0$ при $n \gg 0$. Так как $C^2 = 0$, то линейная система $|nC|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $\pi: X \rightarrow B \subset \mathbb{P}^N$ на кривую.

Стягиванием мы будем называть любой проективный доминантный морфизм нормальных многообразий со связными слоями. Следующая факт – непосредственное следствие теоремы 4.3.

4.4. Теорема о стягивании. Пусть X – поверхность и пусть $R \subset \overline{\text{NE}}(X)$ – экстремальный луч такой, что $K_X \cdot R < 0$. Тогда существует стягивание луча R , т.е. морфизм $f: X \rightarrow Z$ со связными слоями на нормальное многообразие Z такой, что образ неприводимой кривой $C \subset X$ является точкой тогда и только тогда, когда $[C] \in R$. Имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Pic}(Z) \xrightarrow{f^*} \text{Pic}(X) \xrightarrow{(\cdot, l)} \mathbb{Z}, \quad (4.4.1)$$

где l – любая кривая, класс которой принадлежит R . В частности $\rho(Z) = \rho(X) - 1$.

Доказательство. Почти все утверждения содержатся в 4.3. Для доказательства (4.4.1) нужно рассмотреть точную последовательность вырезания [13, гл. II, § 6, предложение 6.5].

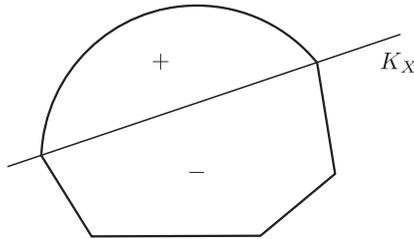


Рис. 3. Конус Мори

4.5. Теорема о конусе. Пусть X – неособая проективная поверхность, и пусть H – обильный дивизор Картье на X . Для любого $\epsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{\text{NE}}(X)$ таких, что $(K_X + \epsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч R_i порождается классом неприводимой кривой C_i . Конус $\overline{\text{NE}}_\epsilon(X)$ порождается конусом

$$\overline{\text{NE}}_\epsilon(X) := \overline{\text{NE}}(X) \cap \{z \mid (K_X + \epsilon H) \cdot z \geq 0\}$$

и лучами R_i .

Таким образом, теорема о конусе утверждает, что конус Мори $\overline{\text{NE}}(X)$ локально полиэдрален в отрицательной части (см. рис. 3).

Доказательство. Если $R_i^2 = 0$, то согласно теореме 4.3 (iii) $\rho(X) = 2$. В этом случае $\overline{\text{NE}}(X)$ – угол на плоскости и утверждение теоремы очевидно. Поэтому мы можем считать, что $R_i^2 < 0$ всех i . Тогда по предложению 2.4.2 (iii) каждый луч R_i порождается классом неприводимой кривой C_i , которая является (-1) -кривой. Имеем

$$H \cdot C_i \leq -\frac{1}{\epsilon} K_X \cdot C_i = \frac{1}{\epsilon},$$

т.е. кривые C_i имеют ограниченную степень. Имеется лишь конечное число таких кривых. Последнее утверждение непосредственно следует из леммы 2.3.1.

Теорема о конусе 4.5 может быть доказана также методами, обсуждаемыми в следующем параграфе (см. [2]).

5. Рациональные кривые

В этом параграфе мы предполагаем, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто.

Далее нам понадобятся технические результаты о деформациях кривых на многообразиях. Мы будем формулировать их в той общности, которая нам необходима. За полными доказательствами мы отсылаем к замечательной книге [18].

5.1. Пусть X и C – проективные алгебраические многообразия над \mathbb{k} . Рассмотрим контравариантный функтор $\text{Hom}(C, X)$ из категории Sch/\mathbb{k} локально нетеровых схем над \mathbb{k} в категорию множеств Sets : для $T \in \text{Sch}/\mathbb{k}$ полагаем

$$\text{Hom}(C, X)(T) = \{f : C \times T \rightarrow X \times T \mid f - T\text{-морфизм}\}.$$

5.1.1. Предложение. *Функтор $\text{Hom}(C, X)$ представляется открытой подсхемой схемы Гильберта $\text{Hilb}(C \times X)$.*

5.1.2. Пример. Пусть $C = \mathbb{P}^1$, $X = \mathbb{P}^n$. Морфизмы $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ задаются набором однородных многочленов $f_0(u_0, u_1), \dots, f_n(u_0, u_1)$ одной степени без общих множителей. Таким образом, компонента $\text{Hom}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$, соответствующая многочленам степени d , представляется открытым подмножеством в $\mathbb{P}^{(n+1)(d+1)-1}$.

5.1.3. Пусть теперь $\Xi \subset C$ – замкнутая подсхема и пусть $\tau : \Xi \rightarrow X$ – некоторый морфизм. Как и выше рассмотрим функтор $\text{Hom}(C, X; \tau) : \text{Sch}/\mathbb{k} \rightarrow \text{Sets}$:

$$\text{Hom}(C, X; \tau)(T) = \{f : C_T \rightarrow X_T \mid f - T\text{-морфизм и } f|_{\Xi_T} = \tau_T\}.$$

где $C_T := C \times T$, $X_T := X \times T$ и т.д.

5.1.4. Предложение. *Функтор $\text{Hom}(C, X; \tau)$ представим замкнутой подсхемой схемы $\text{Hom}(C, X)$.*

5.1.5. Предложение. *В обозначениях выше предположим, что многообразие X неособо. Зафиксируем некоторый морфизм $\nu : C \rightarrow X$ такой, что $\nu|_{\Xi} = \tau$ и пусть $[\nu]$ – соответствующая точка схемы $\text{Hom}(C, X; \tau)$. Тогда для касательного пространства в $[\nu]$ к $\text{Hom}(C, X; \tau)$ имеет место естественный изоморфизм*

$$T_{[\nu], \text{Hom}(C, X; \tau)} \simeq H^0(C, \nu^* \mathcal{T}_X \otimes I_{\Xi}),$$

где \mathcal{T}_X – касательное расслоение на X , а $I_{\Xi} \subset \mathcal{O}_C$ – пучок идеалов Ξ . Более того,

$$\dim_{[\nu]} \text{Hom}(C, X; \tau) \geq \dim H^0(C, \nu^* \mathcal{T}_X \otimes I_{\Xi}) - \dim H^1(C, \nu^* \mathcal{T}_X \otimes I_{\Xi}).$$

Грубо говоря, пространство $H^0(C, \nu^* \mathcal{T}_X \otimes I_{\Xi})$ интерпретируется как пространство параметров в которое вложена схема $\text{Hom}(C, X; \tau)$, а размерность $H^1(C, \nu^* \mathcal{T}_X \otimes I_{\Xi})$ – как число уравнений, задающих $\text{Hom}(C, X; \tau)$ в этом пространстве. Эти описания становятся корректными, если мы перейдем к пополнениям.

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(C, \Xi)$ естественно действуют на $\text{Hom}(C, X; \tau)$.

5.1.6. Пример. Пусть $\nu : \mathbb{P}^1 \simeq C \hookrightarrow X$ – вложение (-1) -кривой в неособую поверхность. Тогда имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_C \longrightarrow \mathcal{T}_X|_C \longrightarrow \mathcal{N}_{C/X} \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{N}_{C/X} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Отсюда $H^1(C, \mathcal{T}_X|_C) = 0$ и $\dim H^0(C, \mathcal{T}_X|_C) = 3$. Следовательно, схема $\text{Hom}(C, X)$ неособа в точке $[\nu]$ и имеет размерность 3. Очевидно, что действие $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ на $\text{Hom}(C, X)$ транзитивно.

5.1.7. В дальнейшем C будет полной неособой кривой рода g , а X – неособым проективным многообразием размерности n . Подсхема Ξ будет конечным набором точек в C . По теореме Римана–Роха на кривой имеем.

5.1.8. Лемма. *В обозначениях выше пусть $\nu : C \rightarrow X$ – непостоянный морфизм такой, что $\nu|_{\Xi} = \tau$. Тогда*

$$\dim_{[\nu]} \text{Hom}(C, X; \tau) \geq \deg \nu^*(-K_X) + n(1 - g) - n \deg \Xi. \quad (5.1.9)$$

5.2. Теорема. Пусть X неособое n -мерное проективное многообразие и пусть $Z \subset X$ – полная (возможно особая) рациональная кривая. Тогда имеется разложение $Z \equiv \sum a_i Z_i$, где a_i – целые положительные числа, а Z_i – рациональные кривые такие, что $-K_X \cdot Z_i \leq n + 1$.

Доказательство. Пусть $\nu: \mathbb{P}^1 = C \rightarrow Z$ – нормализация. Мы можем считать, что $\deg \nu^*(-K_X) = -K_X \cdot Z \geq n + 2$. Зафиксируем обильный дивизор H на X и неособые точки $Q_1, Q_2 \in Z$. Положим $P_i := \nu^{-1}(Q_i)$. Морфизм τ зададим как $\tau(P_i) = Q_i$. Из (5.1.9) получаем $\dim_{[\nu]} \text{Hom}(C, X; \tau) \geq 2$. Заметим, что группа автоморфизмов $C = \mathbb{P}^1$, сохраняющих точки P_1 и P_2 , одномерна (ее связная компонента изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{G}_m = \mathbb{k}^*$). Следовательно, существует (необязательно полная) кривая $D_0 \subset \text{Hom}(C, X; \tau)$ такая, что $D_0 \ni [\nu]$ и D_0 не содержится в одной \mathbb{G}_m -орбите точки $[\nu]$. Рассмотрим индуцированный морфизм

$$\phi_0: C \times D_0 \rightarrow X.$$

По нашему построению $\phi_0|_{C \times \{[\nu]\}} = \nu$ и $\phi_0(\{P_i\} \times D_0) = Q_i$. Если $\dim \phi_0(C \times D_0) \leq 1$, то $\phi_0(C \times D_0) = Z$. Но в этом случае \mathbb{G}_m должно действовать на D_0 должно быть нетривиально, а, значит, почти транзитивно. Это противоречит нашему выбору D_0 . Значит $\phi_0(C \times D_0)$ – поверхность и морфизм ϕ_0 конечен в общей точке. Заменяя D_0 на ее нормализацию, мы можем считать, что кривая D_0 неособа. Пусть $D \supset D_0$ – проективная неособая компактификация. Морфизм ϕ_0 индуцирует рациональное отображение

$$\phi: C \times D \dashrightarrow X$$

(мы не исключаем возможности, когда ϕ – морфизм). Так как $\phi(\{P_i\} \times D) = Q_i$, то никакой слой $C \times \{\text{pt}\}$ не отображается в точку на X . Пусть W – нормализация замыкания графика $\Gamma_\phi \subset (C \times D) \times X$. Можно составить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \sigma \swarrow & \downarrow \pi & \searrow \mu \\ C \times D & \xrightarrow{\phi} & X \\ & \searrow & \downarrow \\ & & D \end{array} \quad (5.2.1)$$

Здесь σ , π и μ – проекции. Причем σ – бирациональное отображение, являющееся изоморфизмом над $C \times D_0$. Так как $\dim D = 1$, то π – плоский морфизм. При этом все компоненты слоев π – рациональные кривые. По построению, никакой σ -исключительный дивизор не отображается в точку морфизмом μ . Пусть r – число σ -исключительных дивизоров. Тогда $\rho(W) = 2 + r$ (поскольку σ -исключительные дивизоры линейно независимы в $\text{NS}(W)$).

Мы утверждаем, что существует слой над замкнутой точкой $F := \pi^{-1}(\text{pt})$ такой, что $\mu(F)$ – приводимая кривая. Предположим противное: для любого слоя $F := \pi^{-1}(\text{pt})$ кривая $\mu(F)$ неприводима. Рассмотрим факторизацию Штейна $\mu: W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} \mu(W)$ (см. [13, гл. 3, § 11]). Морфизм φ бирационален и стягивает не более одной компоненты каждого вырожденного слоя (той, которая не является σ -исключительной). По сказанному выше и нашему предположению каждый вырожденный слой имеет ровно две неприводимые компоненты и одна из них стягивается морфизмом φ . В частности, число вырожденных слоев равно r . Напомним, что $\phi_0(\{P_i\} \times D_0)$ – точка для $i = 1$ и 2 . Пусть $\Gamma_i \subset W$ – замыкание прообраза $\{P_i\} \times D_0$. Тогда кривые Γ_1 и Γ_2 также стягиваются морфизмом φ . Отсюда получаем, что $\rho(V) \leq \rho(W) - r - 2 = 0$. Противоречие.

Таким образом, существует слой $F := \pi^{-1}(\text{pt}) = \sum a_i F_i$ такой, что $\mu(F)$ – приводимая кривая. Так как Z – образ некоторого слоя $F' = \pi^{-1}(d)$, $d \in D$, то $Z = \mu_* F' \equiv \sum a_i \mu_* F_i$. Продолжаем индукцией по $H \cdot Z$.

5.3. Предложение. Пусть C – полная неособая кривая рода $g > 0$, и пусть $\nu: C \rightarrow X$ – непостоянный морфизм в неособое n -мерное проективное многообразие X . Предположим, что выполнено следующее условие

$$\deg \nu^*(-K_X) \geq ng + 1.$$

Тогда имеется морфизм $\nu': C \rightarrow X$ и разложение $\nu_* C \equiv \nu'_* C + \sum a_i Z_i$, где $a_i > 0$, а Z_i – рациональные кривые такие, что

$$-K_X \cdot Z_i \leq n + 1, \quad \deg \nu'^*(-K_X) \leq ng.$$

Доказательство. Зафиксируем обильный дивизор H на X и точки $P \in C$ и $Q = \nu(P)$. Морфизм τ зададим как $\tau(P) = Q$. Из (5.1.9) получаем $\dim \text{Hom}_{[\nu]}(C, X; \tau) \geq 1$. Заметим, что группа автоморфизмов кривой C , сохраняющих точку P , нульмерна. Следовательно, существует неособая кривая $D_0 \ni 0$ и морфизм

$$\phi_0: C \times D_0 \rightarrow X, \quad (c, \delta) \mapsto \delta(c).$$

такой, что $\phi_0|_{C \times \{0\}} = \nu$ и $\phi_0(\{P\} \times D_0) = Q$. Как и в доказательстве теоремы 5.2 морфизм ϕ_0 продолжается до рационального отображения $\phi: C \times D \dashrightarrow X$, где D – неособая компактификация D_0 . Отображение ϕ не может быть морфизмом поскольку образ слоя $\{P\} \times D$ проекции $C \times D \rightarrow C$ – точка. Как и в доказательстве теоремы 5.2 рассмотрим диаграмму (5.2.1). Так как σ – композиция раздутий (-1) -кривых, то любой вырожденный слой W_Q над точкой $Q \in D$ содержит σ -исключительные рациональные кривые. С другой стороны, никакой σ -исключительный дивизор не отображается в точку морфизмом μ . Так как слой π алгебраически эквивалентны, то мы получим разложение $\nu_*C \equiv \mu_*W_Q = \nu'_*C + \sum a_i Z_i$, где Z_i – рациональные кривые. Далее применяем теорему 5.2.

5.4. Теорема. Пусть X – неособое проективное многообразие размерности n такое, что $-K_X$ обилен (т.е. X – многообразие Фано). Тогда на X существует рациональная кривая C такая, что $-K_X \cdot C \leq n + 1$.

Доказательство. Применяем последовательно теорему 5.2 и предложение 5.3. Однако в теореме 5.2 требуется, что антиканоническая степень кривой достаточно большая, что не всегда выполнено. Чтобы преодолеть эту трудность используется знаменитый трюк С. Мори [2] редукции к положительной характеристике.

5.4.1. Условие $\deg \nu^*(-K_X) \geq ng + 1$.

Наводящее соображение. Предположим, что $g = 1$, т.е. C – эллиптическая кривая. Пусть $v: C \rightarrow C$ – умножение на $m \gg 0$, и пусть $\nu' := \nu \circ v$. Тогда

$$\deg \nu'^*(-K_X) = m^2 \deg \nu^*(-K_X) \gg 0.$$

Этот аргумент не работает при $g > 1$ в нулевой характеристике, поскольку в этом случае конечный морфизм увеличивает род кривой. Поэтому вместо морфизма умножения на эллиптической кривой мы воспользуемся морфизмом Фробениуса.

Случай $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$. Рассмотрим морфизм Фробениуса $v: C \rightarrow C$, и пусть $\nu' := \nu \circ v^m$. Тогда

$$\deg \nu'^*(-K_X) = p^m \deg \nu^*(-K_X) \gg 0.$$

Заменяем ν на ν' . Теперь мы можем применить теорему 5.2 и предложение 5.3. Получаем, что утверждение теоремы 5.4 верно для полей характеристики $p > 0$.

5.4.2. Подъем в характеристику 0. Предположим теперь, что поле \mathbb{k} имеет характеристику 0. Вложим X в некоторое проективное пространство $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^N$ (где оно задано конечным числом уравнений) и пусть \mathfrak{R} – подкольцо \mathbb{k} , порожденное коэффициентами всех этих уравнений. Это кольцо, очевидно, конечно порождено над \mathbb{Z} .

Существует проективная схема $\mathfrak{X}/\text{Spec } \mathfrak{R}$ с \mathfrak{R} -точкой $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}}$, так что X получается заменой базы \mathfrak{R} на \mathbb{k} :

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \mathfrak{X} & \longleftarrow & \mathfrak{X}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{m}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{k} & \longrightarrow & \text{Spec } \mathfrak{R} & \longleftarrow & \text{Spec } \mathfrak{R}/\mathfrak{m} \end{array}$$

Здесь $\mathfrak{X}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{m}}$ – слой над замкнутой точкой. Говоря неформально, \mathfrak{X} задается теми же уравнениями, что и X , но рассматривается как схема не над \mathbb{k} , а над \mathfrak{R} .

Существует плотное открытое подмножество $\mathfrak{U} \subset \text{Spec } \mathfrak{R}$, над которым \mathfrak{X} является плоским ([23, теорема 6.9.1]), и даже гладкой размерности n ([24, теорема 12.2.4 (iii)]). Обильность является открытым свойством ([24, следствие 9.6.4]). Поэтому уменьшая \mathfrak{U} , если нужно, мы можем считать, что антидуализующий пучок $\omega_{\mathfrak{X}}^{\vee}$ обилен на каждом слое. Отсюда следует, что для каждого максимального идеала

в $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}$ в \mathcal{U} , (геометрический) слой $X_{\mathfrak{R}/\mathfrak{m}}$ является n -мерным многообразием Фано. Иначе говоря, \mathcal{U} получается из $\text{Срес } \mathfrak{R}$ удалением всех точек, слои над которыми являются “плохими” (размерности большей n , особыми или с необильным антиканоническим дивизором).

Согласно предложению 5.1.1 существует квазипроективная схема $\alpha: \mathfrak{H} \rightarrow \text{Срес } \mathfrak{R}$, параметризующая непостоянные морфизмы $f: \mathbb{P}_{\mathfrak{R}}^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ с условием $\deg f^* \omega_{\mathfrak{X}}^{\vee} \leq n + 1$. (т.е. с образом антиканонической степени не выше $n + 1$). Достаточно доказать, что слой \mathfrak{H}_{η} над общей точкой $\eta \in \text{Срес } \mathfrak{R}$ непуст (тогда он содержит геометрическую точку, которая соответствует рациональной кривой на X , степени не выше $n + 1$, определенной над алгебраическим замыканием \mathbb{k}_0 поля частных \mathfrak{R} , а следовательно, и над \mathbb{k}). Неформально, это можно пояснить, рассматривая систему однородных уравнений, задающую \mathfrak{H} (с коэффициентами в \mathfrak{R}). Существование ненулевых решений этой системы зависит от обращения в нуль некоторых результатов. Так как система совместна по модулю \mathfrak{m} для почти всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}$, то она должна быть совместна над \mathbb{k}_0 . Отметим, что в этом рассуждении “универсальная” оценка на степень рациональной кривой очень важна. Ниже мы приведем строгое обоснование.

По теореме Шевалле ([13, гл. II, упражнение 3.19]) образ $\alpha(\mathfrak{H})$ является конструктивным подмножеством в $\text{Срес } \mathfrak{R}$, т.е. конечным объединением локально замкнутых подмножеств. Пусть $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{R}$ – максимальный идеал. По следствию 13.1.2 поле $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ конечно. В частности, оно имеет положительную характеристику и, как мы видели выше, (геометрический) слой $\mathfrak{H}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{m}}$ над замкнутой точкой $\text{Срес } \mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ плотного открытого подмножества $\mathcal{U} \subset \text{Срес } \mathfrak{R}$ непуст, т.е. образ $\alpha(\mathfrak{H})$ содержит все замкнутые точки из \mathcal{U} .

5.4.3. Лемма. *Множество замкнутых точек плотно в $\text{Срес } \mathfrak{R}$.*

Доказательство. Это эквивалентно тому, что пересечение всех максимальных идеалов в \mathfrak{R} – нулевое. Пусть $a \in \mathfrak{R}$ – ненулевой элемент, содержащийся во всех максимальных идеалах, и пусть \mathfrak{p} – максимальный идеал локализации \mathfrak{R}_a . Поле $\mathfrak{R}_a/\mathfrak{p}$ конечно по следствию 13.1.2, поэтому его подкольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}$ конечно и не имеет делителей нуля. Следовательно, $\mathfrak{R}/\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}$ – поле. Таким образом, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}$ – максимальный идеал \mathfrak{R} , не содержащий a . Противоречие.

По лемме 5.4.3 образ α плотен в $\text{Срес } \mathfrak{R}$, следовательно, он содержит и общую точку η схемы $\text{Срес } \mathfrak{R}$ (см. [13, гл. II, упражнение 3.18 (b)]). Это означает, что общий слой непуст. Он содержит, следовательно, геометрическую точку, которая соответствует рациональной кривой на X , степени не выше $n + 1$, определенной над алгебраическим замыканием \mathbb{k}_0 поля частных \mathfrak{R} , а, следовательно, и над \mathbb{k} . Это завершает доказательство теоремы 5.4.

Теперь мы можем дополнить теорему о конусе 4.5.

5.5. Следствие. *Пусть X – неособая проективная поверхность и пусть $R \subset \overline{\text{NE}}(X)$ – экстремальный луч такой, что $K_X \cdot R < 0$. Пусть $\text{sgn}_R \in \{-1, 0, 1\}$ – знак R^2 . Тогда R порождается классом рациональной кривой C такой, что $-K_X \cdot C \leq 2 + \text{sgn}_R$.*

Доказательство. Если $R^2 \leq 0$, то утверждение следует из теоремы 4.3. Если же $R^2 > 0$, то $\rho(X) = 1$ и на X существует рациональная кривая по теореме 5.4.

В общем случае верна следующая

5.6. Теорема [2]. *Пусть X – неособое проективное многообразие размерности n , и пусть $R \subset \overline{\text{NE}}(X)$ – экстремальный луч такой, что $K_X \cdot R < 0$. Тогда R порождается классом рациональной кривой C такой, что $-K_X \cdot C \leq n + 1$.*

Критерий рациональности Кастельнуово.

5.7. Предложение. *Пусть X – неособая проективная поверхность такая, что $H^0(X, 2K_X) = 0$ и $q(X) = 0$. Тогда X бирационально эквивалентна поверхности X' такой, что $\rho(X') = 1$ и дивизор $-K_{X'}$ обильен.*

Доказательство. Мы можем считать, что X не содержит (-1) -кривых. Так как $H^0(X, 2K_X) = 0$, то $H^0(X, K_X) = 0$. По теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(X, -K_X) \geq K_X^2 + \chi(\mathcal{O}_X),$$

где по двойственности Серра и нашим условиям

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 1 + \dim H^0(X, K_X) = 1.$$

Если K_X численно эффективен, то $K_X^2 \geq 0$ (см. упражнение 1 на с. 9). Тогда $|-K_X| \neq \emptyset$. Это возможно только если $K_X \sim 0$ и $H^0(X, K_X) \neq 0$. Противоречие. Следовательно, K_X не является численно эффективным. По теореме о конусе 4.5 существует экстремальный луч R на X такой, что $K_X \cdot R < 0$. По теореме 4.3 и нашему предположению $R^2 \geq 0$. Если $R^2 = 0$, то снова по теореме 4.3 поверхность X линейчатая над некоторой кривой B рода $g = q(X) = 0$. Следовательно, X бирационально эквивалентна \mathbb{P}^2 . Если же $R^2 > 0$, то $\rho(X) = 1$ и дивизор $-K_X$ обилен.

5.8. Теорема (критерий рациональности Кастельнуово). Пусть X – неособая проективная поверхность (над алгебраически замкнутым полем). Следующие условия эквивалентны:

- (i) $H^0(X, 2K_X) = 0$ и $q(X) = 0$;
- (ii) X рациональна.

Доказательство. Импликация (ii) \Rightarrow (i) очевидна, поскольку $H^0(X, 2K_X)$ и $q(X)$ являются бирациональными инвариантами. Докажем (i) \Rightarrow (ii). Согласно предложению 5.7 поверхность X бирационально эквивалентна поверхности X' такой, что $\rho(X') = 1$ и дивизор $-K_{X'}$ обилен, а по лемме 6.10.2 (ниже) $X' \simeq \mathbb{P}^2$.

Другое простое доказательство критерия Кастельнуово см. в [10].

5.8.1. Замечание. В формулировке критерия рациональности условие $H^0(X, 2K_X) = 0$ нельзя ослабить, заменив на $\rho_g(X) = 0$. Контрпримером являются, например, поверхности Энриквеса.

5.8.2. Следствие. Пусть X – алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики 0. Если X унирациональна, то она рациональна.

Доказательство. Пусть X унирациональная поверхность, т.е. существует доминантное отображение $\psi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$. Мы можем считать, что X проективна и неособа. Поскольку $\text{char } \mathbb{k} = 0$, то ψ сепарабельно. По предложению 3.1 и замечанию 3.1.1 имеем $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$ и $H^0(X, mK_X) = 0$ при $m > 0$. Мы можем считать, что основное поле \mathbb{k} – поле комплексных чисел и тогда по теории Ходжа $q(X) = h^{1,0}(X) = 0$. Далее применяем критерий Кастельнуово.

5.8.3. Следствие (аналог теоремы Люрота). Пусть \mathbb{k} – алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и пусть $\mathbb{k}(t_1, t_2)$ – его чисто трансцендентное расширение степени трансцендентности 2. Тогда любое промежуточное поле $\mathbb{k} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{k}(t_1, t_2)$ является чисто трансцендентным расширением \mathbb{k} .

5.8.4. Замечание. Следствия 5.8.2, 5.8.3 неверны в положительной характеристике (см. упражнения 14, 15). Это происходит потому, что при $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$ прообраз $f^*\eta$ ненулевой регулярной дифференциальной формы η может зануляться. Например, для морфизма $f: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^p$ имеем $f^*dt = dt^p = pt^{p-1}dt = 0$. Однако 5.8.2, 5.8.3 становятся верными и в положительной характеристике при замене условия унирациональности на сепарабельную унирациональность.

5.8.5. О проблеме Люрота. Классическая проблема Люрота звучит следующим образом:

Пусть \mathbb{k} – поле и пусть $\mathbb{k}(t_1, \dots, t_n)$ – его чисто трансцендентное расширение. Верно ли, что любое промежуточное поле $\mathbb{k} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{k}(t_1, \dots, t_n)$ является чисто трансцендентным расширением \mathbb{k} ?

Иначе говоря, верно ли что любое \mathbb{k} -унирациональное многообразие над \mathbb{k} является \mathbb{k} -рациональным?

В размерности 1 проблема – утверждение классической теоремы Ж. Люрота (Jacob Lüroth). Она может быть доказана как алгебраическими, так и геометрическими методами. Как мы видели выше, двумерный аналог верен для алгебраически замкнутого поля характеристики 0 и неверен в положительной характеристике. Мы увидим ниже (см. 11.7.2), что двумерный аналог неверен также и для алгебраически незамкнутых полей в нулевой характеристике. В размерности 3 проблема имеет отрицательное решение даже для поля комплексных чисел $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Задачи

1. Пусть $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие двух различных точек. Опишите конус Мори $\overline{NE}(X)$.
2. Пусть X рациональная поверхность с $K_X^2 > 0$. Докажите, что X может содержать не более конечного числа кривых с отрицательным индексом самопересечения. *Указание.* Покажите, что для некоторого $n \gg 0$ имеет место представление $-nK_X = H + E$, где дивизор H обилен, а E эффективен. Тогда для любой кривой, которая не содержится в $\text{Supp}(E)$, выполнено $(K_X + (1/n)H) \cdot C \leq 0$.

3. Пусть X рациональная поверхность с $K_X^2 > 0$. Докажите, что конус $\overline{NE}(X)$ имеет лишь конечное число экстремальных лучей.
4. Пусть X рациональная поверхность с $\rho(X) \geq 3$. Докажите, что X содержит по крайней мере $\rho(X)$ кривых с отрицательным индексом самопересечения.
5. Пусть X – любая (неособая, проективная) поверхность и пусть $C \subset X$ – неособая рациональная кривая такая, что пучок $\mathcal{O}_X(C)$ обилен. Какие имеются возможности для (X, C) ? *Указание.* Рассмотрите экстремальный луч R такой, что $(K_X + C) \cdot R < 0$.
6. Пусть X – любая (неособая, проективная) поверхность и пусть $C \subset X$ – неособая эллиптическая кривая такая, что пучок $\mathcal{O}_X(C)$ обилен. Какие имеются возможности для (X, C) ? *Указание.* Если $K_X + C \not\equiv 0$, то по теореме Ходжа об индексе $(K_X + C)^2 < 0$. Следовательно, $K_X + C$ не является численно эффективным. Рассмотрите экстремальный луч R такой, что $(K_X + C) \cdot R < 0$.
7. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неособая поверхность степени $n + 1$, не лежащая в гиперплоскости. Найдите все возможности. *Указание.* Воспользуйтесь упражнением 5.
8. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неособая поверхность степени n , не лежащая в гиперплоскости. Найдите все возможности. *Указание.* Воспользуйтесь упражнением 6.
9. Пусть X – проективная поверхность такая, что ее антиканонический класс представляется эффективным несвязным дивизором: $-K_X \sim D_1 + D_2$, $D_1, D_2 > 0$, $\text{Supp}(D_1) \cap \text{Supp}(D_2) = \emptyset$. Докажите, что X – бирационально линейчатая поверхность над эллиптической кривой.
10. Пусть E – эллиптическая кривая и пусть \mathcal{E} – векторное расслоение ранга 2 на E , являющееся нетривиальным расширением

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0.$$

(см. [13, гл. V, § 2]). Рассмотрим линейчатую поверхность $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Пусть F – ее слой, а C – сечение, соответствующее точной последовательности выше. Докажите, что конус Мори порождается двумя лучами $R_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}[F]$ и $R_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$, но для луча R_2 не существует стягивания.

11. Пусть X – поверхность такая, что $-K_X \cdot C > 0$ для любой кривой C . Докажите, что $-K_X$ обилен (т.е. X – поверхность дель Пеццо). *Указание.* Нетривиальный случай – когда $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – линейчатая поверхность над эллиптической кривой, соответствующая неразложимому векторному расслоению \mathcal{E} с $c_1(\mathcal{E}) = 1$ (см. [13, гл. V, § 2]). В этом случае нужно показать, что $H^0(S^2\mathcal{E}(-\text{pt})) \neq 0$.
12. Пусть X – проективная поверхность такая, что $-K_X \sim C$, где C – связная приведенная кривая. Докажите, что поверхность X – рациональна. *Указание.* В случае, когда X – линейчатая поверхность над эллиптической кривой E , рассмотрите замену базы $X \times_E C$.
13. Докажите, что поверхность X с обильным атиканоническим дивизором $-K_X$ и $\rho(X) = 1$ (см. предложение 5.7) рациональна в случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. *Указание.* Воспользуйтесь обращением в нуль Кодаиры и экспоненциальной последовательностью и покажите, что $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Далее воспользуйтесь формулой Нётера и двойственностью Пуанкара и покажите, что $-K_X \equiv 3A$ для некоторого обильного дивизора A . Наконец, покажите, что линейная система $|A|$ содержит пучок рациональных кривых, т.е. бирациональна линейчатой поверхности.
14. Докажите, что над полем характеристики $p > 0$ поверхность в \mathbb{P}^3 , заданная уравнением

$$x_1^p x_2 + x_1 x_2^p + x_3^p x_4 + x_3 x_4^p = 0$$

унирациональна. Эта поверхность нерациональна при $p > 2$. *Указание.* Рассмотрите накрытие $x_1 = x_1'^p$.

15. Докажите, что над полем характеристики $p > 0$ поверхность в \mathbb{A}^3 , заданная уравнением

$$x_3^p = \varphi(x_1, x_2)$$

унирациональна. Приведите примеры нерациональных поверхностей этого типа. *Указание.* Обычно эти поверхности особые, но особенности – простейшие.

6. Поверхности дель Пеццо

6.1. Неособая проективная поверхность X называется *поверхностью дель Пеццо*, если ее антиканонический класс $-K_X$ обилен. Классификация поверхностей дель Пеццо может быть найдена во многих источниках (см., например, [6], [26]). Здесь мы воспроизведем эту классификацию для полей произвольной характеристики.

Многообразия произвольной размерности с обильным антиканоническим дивизором называются *многообразиями Фано* (см. [27]). Такие многообразия естественным образом появляются в теории минимальных моделей при бирациональной классификации многообразий отрицательной кодаировой размерности (см., например, [3]).

Всюду ниже (до конца параграфа) X – поверхность дель Пеццо, а основное поле предполагается \mathbb{k} алгебраически замкнутым.

Из теоремы о конусе 4.5 и следствия 5.5 немедленно получаем

6.1.1. Следствие. *Конус Морри $\overline{NE}(X)$ полиэдрален, т.е. порождается конечным числом экстремальных лучей R_i . Каждый луч R_i порождается классом рациональной кривой такой, что $-K_X \cdot C_i \leq 2 + \text{sgn}(R)$. В частности, поверхность X содержит не более конечного числа (-1) -кривых.*

Приведем простейшие свойства поверхностей дель Пеццо.

6.1.2. Предложение. (i) *Имеем $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ для $i > 0$.*

(ii) *Выполнено $\dim |-K_X| \geq K_X^2 > 0$.*

(iii) *Для любого элемента $D \in |-K_X|$ имеем $p_a(D) = 1$. Любая неприводимая компонента $C \subset \text{Supp}(D)$ является неособой рациональной кривой.*

(iv) *Любая неприводимая кривая с отрицательным индексом самопересечения на X является (-1) -кривой.*

(v) *Группа $\text{Pic}(X)$ конечно порождена и не имеет кручений.*

Доказательство. (i) В характеристике 0 утверждение следует из теоремы Кодаиры о занулении когомологий [28, гл. 1, §2].

Набросок доказательства (i) для случая $\text{char } \mathbb{k} > 0$. Из двойственности Серра имеем $H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, K_X)^\vee = 0$. Докажем, что $q(X) = 0$ от противного: пусть $q(X) > 0$. Так как $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то схема Пикара $\text{Pic}^0(X)$ приведена и $\dim \text{Pic}^0(X) = q(X)$ (см. [22, лекция 27] и 1.2.3). Рассмотрим отображение Альбанезе $\alpha : X \rightarrow \text{Alb}(X)$. Возьмем любую кривую $D \subset X$ (например, гиперплоское сечение). По теореме о конусе 4.5 на X существует только конечное число экстремальных лучей R_1, \dots, R_n . Более того, каждый луч R_i порожден классом рациональной кривой C_i (см. следствие 6.1.1). Таким образом, $D \equiv \sum a_i C_i$ для некоторых $a_i \geq 0$. Отображение Альбанезе стягивает все рациональные кривые. Следовательно, $\alpha(D) = \text{точка}$. Тогда $\alpha(X) = \alpha(D) = \text{точка}$ и поэтому $q(X) = 0$.

Альтернативно, можно воспользоваться l -адическим вариантом формулы Нётера (1.2.2) и 1.2.3. Так как $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то $b_1(X, l) = 2q(X)$ и $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X)$. Тогда (1.2.2) запишется в виде

$$K_X^2 + \rho(X) \leq K_X^2 + b_2(X, l) = 10 - 8q(X).$$

Если $q(X) > 0$, то имеется единственное решение:

$$K_X^2 = \rho(X) = b_2(X, l) = q(X) = 1.$$

Но в этом случае $\text{Alb}(X)$ – (эллиптическая) кривая. Тогда слои отображения Альбанезе одномерны и не пересекают друг друга. Противоречие с $\rho(X) = 1$.

(ii) Теорема Римана–Роха.

(iii) По формуле для рода

$$2p_a(D) - 2 = (K_X + D) \cdot D = 0, \quad p_a(D) = 1.$$

Пусть $C \subsetneq D$ – неприводимая компонента. Запишем $D = nC + D'$, где C не содержится в $\text{Supp}(D')$ (и $D' \geq 0$). Снова по формуле для рода

$$2p_a(C) - 2 = (K_X + C) \cdot C = \left(\frac{n-1}{n} K_X + \frac{1}{n} D' \right) \cdot C < 0$$

Следовательно, $p_a(C) = 0$.

(iv) Следует из формулы для рода.

(v) В случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ из (i) и экспоненциальной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

мы немедленно получаем $\text{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$.

В общем случае $\text{Pic}^0(X) = 0$ поскольку $q(X) = 0$. Тогда конечная порождённость $\text{Pic}(X)$ следует из теоремы Нерона–Севери.

Докажем, что $\text{Pic}(X)$ не имеет кручений. Пусть дивизор D представляет нетривиальный элемент конечного порядка в $\text{Pic}(X)$, т.е. $D \not\sim 0$, $nD \sim 0$ для некоторого $n \neq 0$. Применим теорему Римана–Роха:

$$\dim H^0(X, D) + \dim H^0(X, K_X - D) \geq \frac{1}{2} D \cdot (D - K_X) + \chi(\mathcal{O}_X) = 1.$$

Следовательно, $H^0(X, D) \neq 0$ и мы можем считать дивизор D эффективным. Поскольку $nD \sim 0$, то $D = 0$. Противоречие.

6.2. Определение. Индексом Фано $\iota(X)$ поверхности дель Пеццо X называется наибольшее целое, на которое делится K_X в $\text{Pic}(X)$.

6.2.1. Предложение. $\iota(X) \leq 3$. Более того,

- (i) $\iota(X) = 3$ тогда и только тогда, когда $X \simeq \mathbb{P}^2$;
- (ii) $\iota(X) = 2$ тогда и только тогда, когда $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Доказательство. Предположим, что $\iota := \iota(X) > 1$. Запишем $-K_X = \iota A$. Пусть R – экстремальный луч на X . Так как X – поверхность дель Пеццо, то $R \cdot K_X < 0$. По теореме о конусе 4.5 луч R порождается некоторой кривой C . Возьмем C так, что $-K_X \cdot C$ минимально. Ясно, что $-K_X \cdot C \geq \iota \geq 2$. Согласно следствию 5.5 стягивание луча R не бирационально и $\rho(X) \leq 2$.

Предположим, что $\rho(X) = 2$. Тогда X – линейчатая поверхность над кривой B и C – ее слой. В этом случае $\iota = -K_X \cdot C = 2$. Так как $q(X) = p_a(B) = 0$, то $B \simeq \mathbb{P}^1$. Тогда $X \simeq \mathbb{F}_n$. По предложению 6.11.1 $n \leq 1$, а так как $-K_X$ делится на 2, то $n = 0$.

Далее мы предположим, что $\rho(X) = 1$. Тогда $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot [A]$. По теореме 4.3 имеем $\iota \leq -K_X \cdot C \leq 3$. Положим $d := A^2$. По теореме Римана–Роха $\dim |A| \geq d(\iota + 1)/2$. Отсюда $\dim |A| \geq 2$. Так как $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot [A]$, то любой дивизор $A \in |A|$ приведен и неприводим. По предложению 6.1.2 (iii) кривая A неособа и рациональна. По формуле присоединения

$$-2 = \deg K_A = (K_X + A) \cdot A = -(\iota - 1)d.$$

Отсюда $d \leq 2$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(A) \longrightarrow \mathcal{O}_A(A) \longrightarrow 0.$$

Так как $q(X) = 0$, то отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(A)) \longrightarrow H^0(A, \mathcal{O}_A(A))$$

сюръективно. Поскольку на проективной прямой все дивизоры положительной степени очень обильны, то отсюда получаем, что линейная система $|A|$ не имеет базисных точек и задает морфизм

$$\Phi = \Phi_{|A|}: X \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad N \geq \frac{d(\iota + 1)}{2}.$$

Так как A обилен, то морфизм Φ конечен. Так как

$$2 \geq \frac{2}{\iota - 1} = d = A^2 = (\deg \Phi) \cdot (\deg \Phi(X)),$$

то $\deg \Phi(X) \leq 2$. Если $\deg \Phi(X) = 1$, то $\Phi(X) = \mathbb{P}^2$ и Φ – изоморфизм. Если же $\deg \Phi(X) = 2$, то $\deg \Phi = 1$, т.е. морфизм Φ бирационален на свой образ. Так как неприводимое многообразие степени 2 нормально [13, гл. II, § 6, упражнение 6.5], то Φ – изоморфизм и, таким образом, $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

6.3. Предложение. *Общий элемент линейной системы $|-K_X|$ – приведенная неприводимая кривая.*

Доказательство. Пусть $d := K_X^2$. Предположим, что общий элемент линейной системы $|-K_X|$ записывается в виде $\sum n_i C_i$, где $\sum n_i > 1$, а C_i – неприводимые кривые. Согласно предложению 6.1.2 (iii) все кривые C_i неособы и рациональны. Далее, по теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(C_i)) \geq \frac{1}{2}(C_i^2 - K_X \cdot C_i) + 1 = -K_X \cdot C_i.$$

Следовательно,

$$d + 1 = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \leq \sum \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(C_i)) \leq -\sum K_X \cdot C_i \leq d.$$

Противоречие.

6.3.1. Предложение. $H^1(X, -mK_X) = 0$ для $m \geq 0$.

Доказательство. Доказываем индукцией по m . Случай $m = 0$ следует из предложения 6.1.2 (i). Пусть $C \in |-K_X|$ – общий элемент. Тогда C – неприводимая кривая арифметического рода 1. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-(m-1)K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-mK_X) \longrightarrow \mathcal{O}_C(-mK_X) \longrightarrow 0.$$

Так как по двойственности Серра

$$H^1(C, \mathcal{O}_C(-mK_X)) = H^0(C, \mathcal{O}_C(mK_X))^\vee = 0$$

и $H^1(X, \mathcal{O}_X(-(m-1)K_X)) = 0$ (по предположению индукции), то $H^1(X, \mathcal{O}_X(-mK_X)) = 0$.

6.4. Теорема. *Линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек при $K_X^2 \geq 2$. При $K_X^2 = 1$ линейная система $|-K_X|$ имеет единственную базисную точку.*

Доказательство. Положим $d := K_X^2$. Если $d = 1$, то общие элементы $C_1, C_2 \in |-K_X|$ порождают пучок и $\text{Bs } |-K_X| = C_1 \cap C_2$. С другой стороны, $C_1 \cdot C_2 = 1$. Поэтому $C_1 \cap C_2$ – единственная точка P . Более того, C_1 и C_2 трансверсально пересекаются в P (в частности неособы в этой точке).

Далее предположим, что $d > 1$. Возьмем общий (неприводимый) элемент $C \in |-K_X|$. Тогда C – кривая арифметического рода 1. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(-K_X) \longrightarrow \mathcal{O}_C(-K_X) \longrightarrow 0.$$

Так как $q(X) = 0$, то отображение ограничения

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-K_X)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(-K_X))$$

сюръективно. Далее $\deg \mathcal{O}_C(-K_X) = d$. Обратимый пучок степени $d \geq 2$ на кривой арифметического рода 1 порождается глобальными сечениями (см., например, [13, гл. 4, следствие 3.2 и упражнение 1.9]). Следовательно, пучок $\mathcal{O}_X(-K_X)$ также порождается глобальными сечениями.

6.5. Для описания проективных моделей поверхностей дель Пеццо удобно рассмотреть градуированную антиканоническую алгебру

$$R(X, -K_X) := \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, -nK_X).$$

Так как $-K_X$ обилен, то эта алгебра конечно порождена и $X = \text{Proj } R(X, -K_X)$.

6.6. Теорема. *Линейная система $| -K_X |$ является очень обильной при $d := K_X^2 \geq 3$ и задает вложение $\Phi_{|-K_X|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^d$. Более того, антиканоническая алгебра $R(X, -K_X)$ порождается своими однородными компонентами степени 1.*

Доказательство. Рассмотрим векторные пространства

$$R(k) := \bigoplus_{i=0}^k H^0(X, -iK_X).$$

Индукцией по m докажем, что $R(1)$ порождает $H^0(X, -mK_X)$ при любом $m \geq 1$. База индукции очевидна. Пусть $m > 1$, и пусть $C \in |-K_X|$ – неприводимая кривая. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^0(X, -mK_X) \longrightarrow H^0(X, -(m+1)K_X) \longrightarrow H^0(C, -(m+1)K_X) \longrightarrow 0. \quad (6.6.1)$$

По лемме 6.6.2 (ниже) образ пространства $R(1)$ в алгебре

$$R(C, -K_X) := \bigoplus_{i \geq 0} H^0(C, -iK_X).$$

порождает последний член в точной последовательности, а по предположению индукции $R(1)$ порождает и первый член. Следовательно, $R(1)$ порождает $H^0(X, -(m+1)K_X)$.

6.6.2. Лемма. *Пусть C – неприводимая кривая арифметического рода 1 и пусть L – обратимый пучок степени $d \geq 3$ на C . Тогда градуированная алгебра*

$$R(C, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, nL)$$

порождается своими однородными компонентами степени 1.

Доказательство. Индукция по степени, как и выше.

6.6.3. Следствие. *Поверхность дель Пеццо степени 3 изоморфна кубической поверхности $X_3 \subset \mathbb{P}^3$.*

6.6.4. Следствие. *Поверхность дель Пеццо степени 4 изоморфна пересечению двух квадрик $X_4 \subset \mathbb{P}^4$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2K_X) \longrightarrow 0.$$

где $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_X$ – пучок идеалов X . Так как

$$\dim H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)) = 15, \quad \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(-2K_X)) = 13,$$

то $\dim H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{I}_X(2)) \geq 2$. Следовательно, имеются две различные квадрики $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ такие, что $X \subset Q_1 \cap Q_2$. Так как $\deg X = \deg Q_1 \cap Q_2$, то $X = Q_1 \cap Q_2$.

6.7. Напомним, что *взвешенное проективное пространство* $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – это проективный спектр $\text{Proj } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ кольца многочленов с градуировкой $\deg x_i = a_i$. Непосредственно из определения следует, что $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ покрывается аффинными картами

$$\{x_k \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n / \mu_{a_k}(a_1, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_n).$$

В частности, многообразие $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ нормально и имеет лишь факторособенности.

Гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – это проективное многообразие

$$\text{Proj } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/(f),$$

где $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ – ненулевой квазиоднородный многочлен степени d . Группа классов дивизоров Вейля $\text{Cl}(\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n))$ порождается одним элементом – дивизором A , соответствующим пучку $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)}(1)$. Предположим, что набор весов (a_1, \dots, a_n) *хорошо сформирован*, т.е. $\gcd(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) = 1$ для любого i . В этом случае можно доказать, что канонический класс пространства $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ (как дивизор Вейля) представляется в виде

$$K_{\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)} = -(\sum a_i)A. \quad (6.7.1)$$

6.7.2. Пример. Взвешенное проективное плоскость $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ изоморфна квадратичному конусу в \mathbb{P}^3 , взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ изоморфно конусу над поверхностью Веронезе $S_4 \subset \mathbb{P}^5$.

6.8. Теорема. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1. Тогда

(i) линейная система $| -2K_X |$ задает конечный сепарабельный морфизм степени 2

$$\phi = \Phi_{|-2K_X|} : X \rightarrow Q' \subset \mathbb{P}^3$$

образ которого – квадратичный конус. Если $\ell \subset Q'$ – прямая-образующая конуса, то $\phi^*\ell = -K_X$.

- (ii) Градуированная антиканоническая алгебра $R(X, -K_X)$ порождается своими однородными компонентами степени ≤ 3 .
- (iii) Поверхность X изоморфна гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ и обратно, каждая неособая гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ является поверхностью дель Пеццо степени 1.

Доказательство. (i) По предложению 6.3.1 и теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(X, -mK_X) = \frac{1}{2}m(m+1) + 1.$$

Как и в доказательстве теоремы 6.4 показываем, что линейная система $| -2K_X |$ не имеет базисных точек. Следовательно, она задает морфизм $\phi : X \rightarrow Q' \subset \mathbb{P}^3$, где $Q' := \phi(X)$. Так как дивизор $-2K_X$ обилен, то морфизм ϕ конечен. Более того, так как для общей эллиптической кривой $C \in |-K_X|$ отображение

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-2K_X)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(-2K_X))$$

сюръективно, то ограничение $\phi|_C : C \rightarrow \phi(C)$ двулистно и $\phi(C) \subset \mathbb{P}^3$ – прямая. С другой стороны,

$$(\deg \phi)(\deg Q') = (-2K_X)^2 = 4.$$

Следовательно, $\deg \phi = \deg Q' = 2$. Далее квадратика Q' содержит пучок прямых $\phi(C)$, проходящих через точку $\phi(P)$, где $\{P\} = \text{Bs } |-K_X|$. Поэтому Q' – конус.

Последнее утверждение очевидно, поскольку $\mathcal{O}_{Q'}(2\ell) = \mathcal{O}_{Q'}(1)$. Доказательство сепарабельности морфизма ϕ будет дано ниже.

(ii) Воспользуемся обозначениями доказательства теоремы 6.6. Индукцией по m докажем, что $R(3)$ порождает $H^0(X, -mK_X)$ при любом $m \geq 3$. Утверждение верно при $m = 3$.

Пусть $m > 3$. Для неприводимой кривой $C \in |-K_X|$ имеем точную последовательность ограничения (6.6.1). Аналогично доказательству теоремы 6.6, по следующей лемме образ пространства $R(3)$ в алгебре $R(C, -K_X)$ порождает последний член в точной последовательности (6.6.1), а по предположению индукции $R(3)$ порождает и первый член. Следовательно, $R(3)$ порождает $H^0(X, -(m+1)K_X)$.

6.8.1. Лемма. Пусть C – неприводимая кривая арифметического рода 1 и пусть L – обратимый пучок степени 1 на C . Тогда градуированная алгебра

$$R(C, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, nL)$$

порождается своими однородными компонентами степени ≤ 3 .

Доказательство. Индукция по степени, как и выше.

(iii) Пусть x_1, x_2 – базис $H^0(X, -K_X)$. Ясно, что x_1^2, x_1x_2, x_2^2 линейно независимы в $H^0(X, -2K_X)$ (иначе в кольце $R(X, -K_X)$ имеются делители нуля). Пусть x_1^2, x_1x_2, x_2^2, y – базис $H^0(X, -2K_X)$. Так как $\dim H^0(X, -3K_X) = 7$, то существует элемент $z \in H^0(X, -3K_X)$, который не выражается линейно через

$$x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, yx_1, yx_2.$$

Так как $\Phi_{|-2K_X|}$ – конечный морфизм, то x_1, x_2, y алгебраически независимы в $R(X, -K_X)$. Таким образом,

$$x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, yx_1, yx_2, z$$

– базис $H^0(X, -3K_X)$ и по пункту (ii) $R(X, -K_X)$ – порождается элементами x_1, x_2, y, z . Так как $\dim H^0(X, -6K_X) = 22$, то между x_1, x_2, y, z имеется соотношение $f(x_1, x_2, y, z) = 0$ степени $d \leq 6$. Следовательно,

$$X = \text{Proj } \mathbb{k}[x_1, x_2, y, z]/(f)$$

– гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ степени $d \leq 6$. Так как X неособо, то оно не проходит через особые точки $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. По формуле присоединения

$$K_X = (K_{\mathbb{P}(1,1,2,3)} + X)|_X = (d - 7)A. \quad (6.8.2)$$

Так как X – поверхность дель Пеццо с $\iota(X) = 1$, то $d = 6$. Обратное, используя 6.7, несложно проверить, что любая неособая гиперповерхность $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ является поверхностью дель Пеццо степени 1 и общая гиперповерхность $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ неособа. Последнее утверждение следует из (6.8.2).

Возвращаясь к доказательству (i), заметим, что квадрика Q' может быть отождествлена с $\mathbb{P}(1, 1, 2) \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, а двулистное накрытие – с проекцией. Уравнение X записывается в виде

$$h(x_1, x_2, y, z) = z^2 + y^3 + z y f_1 + z f_3 + y^2 f_2 + y f_4 + f_6 = 0, \quad (6.8.3)$$

где $f_i = f_i(x_1, x_2)$ – однородные формы степени i . Действительно, иначе $\text{char } \mathbb{k} = 2$ и $\partial h / \partial z = y f_1 + f_3 = 0$ и уравнение принимает вид

$$h = z^2 + y^3 + y^2 f_2 + y f_4 + f_6 = 0,$$

Но тогда X особа над точками

$$3y^2 + f_4 = y^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + y \frac{\partial f_4}{\partial x_i} + \frac{\partial f_6}{\partial x_i} = 0.$$

6.8.4. Замечание. Из (6.8.3) несложно видеть, что при $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ дивизор ветвления двойного накрытия $\phi: X \rightarrow Q' = \mathbb{P}(1, 1, 2)$ задается уравнением

$$(y f_1 + f_3)^2 = 4(y^3 + y^2 f_2 + y f_4 + f_6),$$

т.е. он высекается кубикой на $Q' \subset \mathbb{P}^3$. При $\text{char } \mathbb{k} = 2$ поведение накрытия ϕ довольно необычно (см. [29]). Дивизор ветвления в этом случае задается

$$y f_1 + f_3 = 0$$

и ветвление ϕ является *сильным* [13, гл. IV, § 2].

6.8.5. Следствие-Определение. (i) На любой поверхности дель Пеццо X степени 1 имеется (бигулярный) автоморфизм $\beta: X \rightarrow X$ порядка 2 – инволюция Галуа двойного накрытия $\phi: X \rightarrow Q'$. Этот автоморфизм называется инволюцией Бертини.

(ii) Инвариантная подгруппа $\text{Pic}(X)^\beta$ группы Пикара порождается каноническим классом. В частности, для любой прямой $L \subset X$ имеет место соотношение $L + \beta(L) \sim -2K_X$.

Доказательство. Имеет смысл пояснить только (ii). Так как $\rho(X)^\beta = \rho(Q') = 1$, то $\text{Pic}(X)^\beta$ – циклическая группа. Ясно, что $K_X \in \text{Pic}(X)^\beta$. Так как $\iota(X) = 1$, то K_X – примитивный элемент.

6.9. Теорема. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 2. Тогда

(i) линейная система $|-K_X|$ задает конечный сепарабельный морфизм степени 2

$$\phi = \Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^2,$$

дивизор ветвления $V \subset \mathbb{P}^2$ которого является неособой кватрикой при $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ и коникой при $\text{char } \mathbb{k} = 2$.

(ii) Градуированная антиканоническая алгебра $R(X, -K_X)$ порождается своими однородными компонентами степени ≤ 2 .

(iii) Поверхность X изоморфна гиперповерхности степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ и обратно, каждая неособая гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ является поверхностью дель Пеццо степени 2.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.9.

6.9.1. Следствие-Определение. (i) На любой поверхности дель Пеццо X степени 2 имеется (бирегулярный) автоморфизм $\gamma: X \rightarrow X$ порядка 2 – инволюция Галуа двойного накрытия $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Этот автоморфизм называется инволюцией Гейзера.

(ii) Инвариантная подгруппа $\text{Pic}(X)^\gamma$ группы Пикара порождается каноническим классом. В частности, для любой прямой $L \subset X$ имеет место соотношение $L + \gamma(L) \sim -K_X$.

6.10. Определение. Пусть X – поверхность дель Пеццо с $\iota(X) = 1$. Прямой на X называется (-1) -кривая. Коникой на X называется (возможно приводимая) кривая такая, что $-K_X \cdot C = 2$ и $C^2 = 0$.

Это определение оправдано тем, что для поверхностей дель Пеццо с очень обильным антиканоническим дивизором прямые (соответственно, коники) в нашем определении – это в точности проективные прямые (соответственно, коники) при антиканоническом вложении. Если $C \subset X$ – коника, то она имеет не более двух компонент. По формуле для рода $\rho_a(C) = 0$ и C приведена. Следовательно, или $C \simeq \mathbb{P}^1$ или C – объединение двух прямых, пересекающихся трансверсально в одной точке. По теореме Римана–Роха каждая коника $C \subset X$ порождает пучок $|C|$ без базисных точек.

Отметим, что на поверхностях дель Пеццо степени ≤ 2 обычное представление о прямых и кониках как объектах проективной геометрии нарушается. Например, на поверхности дель Пеццо степени 2 пара прямых переставляемых инволюцией Гейзера пересекаются в двух точках (или касаются). Аналогично, на поверхности дель Пеццо степени 1 пара прямых переставляемых инволюцией Бертини пересекаются в трех точках (с учетом кратностей).

6.10.1. Лемма. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени ≤ 3 . Тогда X содержит прямую.

В случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ этот факт может быть доказан аналогично теореме 6.11. В случае положительной характеристики мы вынуждены воспользоваться классификационными результатами 6.6.3, 6.8, 6.9.

Доказательство. Пусть $d := K_X^2$ и $n := 12/(d+1)$. Тогда X является гиперповерхностью степени n в \mathbb{P} , где

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}(1, 1, 2, 3), \mathbb{P}(1, 1, 1, 2), \mathbb{P}^3$$

в случаях $d = 1, 2$ и 3 , соответственно. Рассмотрим семейство \mathcal{F} всех гиперповерхностей степени n в \mathbb{P} . Ясно, что \mathcal{F} – проективизация векторного пространства всех квазиоднородных многочленов степени n с соответствующей градуировкой. Далее рассмотрим универсальное семейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \times \mathbb{P}$,

$$\mathcal{U} := \{(X, P) \in \mathcal{F} \times \mathbb{P} \mid P \in X\}.$$

Пусть \mathcal{H} – относительная схема Гильберта прямых в слоях \mathcal{U}/\mathcal{F} , схема, параметризующая прямые в слоях \mathcal{U}/\mathcal{F} , т.е. кривые C такие, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \cdot C = 1$ и $\chi(\mathcal{O}_C) = 1$. Поскольку $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ обилен, то такие кривые должны быть неприводимы. Несложное вычисление показывает, что $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{F}$. С другой стороны, несложно предъявить пример конкретной неособой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}$ степени n , содержащей прямую. Но число прямых на (неособой) поверхности дель Пеццо не более чем конечно. Так как проекция $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ – собственный морфизм, то он конечен в общей точке и поэтому он сюръективен. Это означает, что любая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}$ содержит прямую.

6.10.2. Лемма. Если $\rho(X) = 1$, то $X \simeq \mathbb{P}^2$.

Доказательство. Согласно предложению 6.1.2(v) имеем $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$, а согласно предложению 6.2.1 мы можем считать, что $\iota(X) = 1$, т.е. $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$ (иначе $X \simeq \mathbb{P}^2$). В случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ можно воспользоваться упражнением 13, с. 26. В общем случае, по теореме о конусе 4.5, теореме 4.3 и следствию 5.5 на X существует рациональная кривая C такая, что $-K_X \cdot C \leq 3$. Так как $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$, то $C \sim -aK_X$ для некоторого целого положительного a . Так как $-K_X \cdot C \leq 3$, то $K_X^2 \leq 3$. По лемме 6.10.1 имеем $\rho(X) > 1$. Противоречие.

Таким образом, начиная с этого места мы можем пользоваться критерием Кастельнуово, который теперь доказан благодаря лемме 6.10.2.

6.10.3. Следствие. Все поверхности дель Пеццо рациональны.

Доказательство. Следует из критерия Кастельнуово 5.8, поскольку $H^0(X, 2K_X) = 0$ и $q(X) = 0$ (см. предложение 6.1.2 (i)).

6.10.4. Следствие. Решетка $\text{Pic}(X)$ унимодулярна и

$$\rho(X) + K_X^2 = 10. \quad (6.10.5)$$

В частности, $K_X^2 \leq 9$.

Доказательство. См. предложение 3.2.

6.10.6. Следствие. Любая поверхность дель Пецо степени 9 изоморфна проективной плоскости \mathbb{P}^2 . Поверхность дель Пецо степени 8 изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или \mathbb{F}_1 .

Доказательство. Первое утверждение вытекает из (6.10.5) и леммы 6.10.2. Пусть $K_X^2 = 8$. Тогда $\rho(X) = 2$. Если X содержит (-1) -кривую, то X является раздутием точки на \mathbb{P}^2 и $X \simeq \mathbb{F}_1$. Если же X не содержит (-1) -кривых, то по теореме 4.3 X имеет структуру линейчатой поверхности $\pi: X \rightarrow B$, где $\rho_a(B) = q(X) = 0$ (см. следствие 3.4.4). Следовательно, $B \simeq \mathbb{P}^1$ и $X \simeq \mathbb{F}_n$. Для минимального сечения $\Sigma \subset \mathbb{F}_n$ имеем $\Sigma^2 = -n$ и согласно предложению 6.1.2 (iv) $n \leq 1$. По нашему предположению $n \neq 1$. Поэтому $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

6.11. Теорема. Пусть X – поверхность дель Пецо с $\iota(X) = 1$. Тогда X содержит (-1) -кривую.

Теорема немедленно вытекает из (6.10.5) и теоремы 4.3. Дадим также альтернативное доказательство:

Доказательство. Предположим, что X не содержит (-1) -кривых. Тогда по формуле для рода X не содержит кривых с отрицательным индексом самопересечения. Решетка $\text{Pic}(X)$ унимодулярна и имеет сигнатуру $(1, n)$. Согласно известному факту из арифметики [30, гл. V] она представляет 0, т.е. существует дивизор D такой, что $D^2 = 0$, но $D \not\sim 0$. Снова по теореме Ходжа об индексе $-K_X \cdot D \neq 0$. Поэтому мы можем также считать, что $-K_X \cdot D > 0$. Возьмем D таким образом, что $D^2 = 0$ и $-K_X \cdot D$ – наименьшее положительное. По теореме Римана–Роха

$$\dim |D| \geq -\frac{1}{2}K_X \cdot D > 0.$$

В частности, мы можем считать дивизор D эффективным. Запишем $D = \sum d_i D_i$. Если $\sum d_i > 1$, то по нашим предположениям $D_i^2 > 0$ для всех i . Противоречие. Следовательно, любой дивизор $D \in |D|$ приведен и неприводим.

Так как $D^2 = 0$, то по лемме 4.3.1 линейная система $|D|$ задает морфизм $\pi: X \rightarrow B$ на кривую. При этом все слои членами являются членами $|D|$ и поэтому неприводимы. По формуле для рода

$$2\rho_a(D) - 2 = (K_X + D) \cdot D = K_X \cdot D < 0, \quad \rho_a(D) = 0.$$

Таким образом, все слои π – неособые рациональные кривые и X – линейчатая поверхность. Так как $q(X) = 0$, то $B \simeq \mathbb{P}^1$ и $X \simeq \mathbb{F}_n$. Так как $\iota(X) = 1$, то $X \not\sim \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и поэтому $X \simeq \mathbb{F}_1$.

6.11.1. Предложение. Пусть X – поверхность дель Пецо.

(i) Если $f: X \rightarrow Y$ – бирациональный морфизм, то Y – также поверхность дель Пецо.

(ii) Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие точки $O \in X$. Если $K_{\tilde{X}}^2 \geq 2$, то антиканонический дивизор $-K_{\tilde{X}}$ численно эффективен. Если, кроме того, O не лежит на (-1) -кривой и при $K_X^2 = 2$ не лежит на дивизоре ветвления двулистного накрытия $\Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, то \tilde{X} – также поверхность дель Пецо.

Доказательство. (i) Применим критерий обильности Накай–Мойшезона [13, гл. 5, § 1]. Предположим, что $K_Y \cdot C \leq 0$ для некоторой неприводимой кривой $C \subset Y$. Тогда

$$0 < K_X \cdot f^*C = f_*K_X \cdot C = K_Y \cdot C \leq 0.$$

Противоречие. С другой стороны, $K_X = f^*K_Y + E$, где $E = \sum a_i E_i$ – линейная комбинация исключительных дивизоров. Отсюда

$$K_Y^2 = K_X^2 - E^2 > K_X^2 > 0$$

поскольку матрица пересечений $\|E_i \cdot E_j\|$ отрицательно определена (см., например, [31, гл. 2, § 7]).

(ii) Пусть E – исключительный дивизор. Тогда $K_{\tilde{X}} = \sigma^*K_X + E$ и $K_{\tilde{X}}^2 = K_X^2 - 1 > 0$. По теореме Римана–Роха $\dim | -K_{\tilde{X}} | \geq K_{\tilde{X}}^2 > 0$. Предположим, что $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} \geq 0$ для некоторой неприводимой кривой \tilde{C} . Ясно, что $\tilde{C} \neq E$. Положим $C := \sigma(\tilde{C})$.

Если C неособа в точке O , то $\tilde{C} = \sigma^*C - E$ и

$$K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = K_X \cdot C + 1 \leq 0.$$

Это возможно только если $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = 0$, $K_X \cdot C = -1$. По теореме Ходжа об индексе $\tilde{C}^2 < 0$, а по формуле для рода $\tilde{C}^2 = -2$ и $\tilde{C} \simeq \mathbb{P}^1$. Следовательно, $C - (-1)$ -кривая.

Пусть теперь C особа в O . Ясно, что C – компонента антиканонического дивизора $\sigma_*\tilde{L}$, где $\tilde{L} \in |-K_{\tilde{X}}|$. Тогда согласно предложению 6.1.2 (iii) кривая C должна совпадать с $\sigma_*\tilde{L}$. Поэтому $r_a(C) = 1$ и особенность $O \in C$ – простейшая (обыкновенная двойная или простой касп). В этом случае

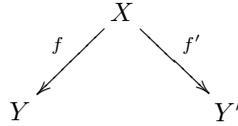
$$\tilde{C} = \sigma^*C - 2E \sim \sigma^*(-K_X) - 2E = -K_{\tilde{X}} - E, \quad -K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = K_X^2 - 1 \geq 0.$$

Это возможно только если $K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} = 0$ и $K_X^2 = 1$, т.е. $K_X^2 = 2$. В этом случае образ C при двулистом накрытии $\Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – прямая, которая должна касаться дивизора ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ в точке $\Phi_{|-K_X|}(O)$.

6.12. Теорема. Пусть X – поверхность дель Пеццо с $\iota(X) = 1$. Тогда X является раздутием $N = 9 - K_X^2$ точек на \mathbb{P}^2 таких, что выполнены следующие условия.

- (i) Все точки различны (не являются бесконечно близкими).
- (ii) Никакие три точки не лежат на одной прямой.
- (iii) Никакие пять точек не лежат на одной конике.

Доказательство. Первое утверждение теоремы верно для $K_X^2 = 8$ по предложению 6.10.6. Для $K_X^2 < 8$ это утверждение доказывается по индукции с применением теоремы 6.11. Поэтому достаточно рассмотреть случай $K_X^2 = 7$. По теореме 6.11 имеется стягивание $f: X \rightarrow Y$ (-1) -кривой E . Здесь Y – дель Пеццо степени $K_Y^2 = K_X^2 + 1 = 8$. Таким образом, $X \simeq \mathbb{F}_1$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Если $X \simeq \mathbb{F}_1$, то мы применяем индукцию. Пусть $Y \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Применим элементарное преобразование с центром $f(E)$:



Здесь $Y' \simeq \mathbb{F}_1$ и мы снова можем применить индукцию.

Таким образом, имеется цепочка раздутий точек $P_i \in X_i$

$$X = X_N \xrightarrow{\varphi_N} X_{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_0 = \mathbb{P}^2, \quad N = 9 - K_X^2.$$

Мы утверждаем, что на каждом шаге центр раздутия не лежит на кривой с отрицательным индексом самопересечения. Действительно, если P_i лежит на кривой $C_i \subset X_i$ с $C_i^2 < 0$, то для ее собственного прообраза $\tilde{C}_i \subset X_{i+1}$ имеем

$$\tilde{C}_i \sim \varphi_{i+1}^*C_i - mE_{i+1},$$

где $E_{i+1} = \varphi_{i+1}^{-1}(P_i)$ – исключительный дивизор, а $m > 0$. Следовательно,

$$\tilde{C}_i^2 = C_i^2 - m^2 \leq -2.$$

Это противоречит предложению 6.1.2 (iv).

Отсюда немедленно вытекает (i). Для доказательства (ii) и (iii) заметим, что собственный прообраз прямой, проходящей через две точки P_i (соответственно коники, проходящей через пять точек P_i) является (-1) -кривой.

6.12.1. Замечание. При $N \leq 7$ условия (i)–(iii) являются достаточными для того, чтобы раздутие N точек на \mathbb{P}^2 было поверхностью дель Пеццо. Для $N = 8$ нужно наложить еще одно условие:

- (iv) Все восемь точек не лежат на одной кубике, для которой одна из точек – особая.

Эти условия (i)–(iv) называются условиями общности положения.

6.12.2. Следствие. Поверхность дель Пеццо степени $d \geq 5$ с $\iota(X) = 1$ единственна с точностью до изоморфизма.

6.12.3. Следствие. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 6. Тогда X изоморфна дивизору третьей степени $(1, 1, 1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Она изоморфна также пересечению двух дивизоров бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

6.12.4. Следствие. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 5. Тогда X изоморфна сечению грассманиана $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ (вложение Плюккера) подпространством коразмерности 4.

6.13. Предложение. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $4 \leq d \leq 6$. Тогда ее антиканонический образ является пересечением квадрик.

Доказательство. Следует из явных описаний антиканонического образа 6.6.4, 6.12.3, 6.12.4 (см. [28, гл. 1, § 5] для случая $d = 5$). См. также упражнения 7 и 9.

6.14. (-1) -кривые на поверхности дель Пеццо X называются также *прямыми*. Это оправдано тем, что при $K_X^2 \geq 3$, (-1) -кривые являются проективными прямыми при антиканоническом вложении $X \subset \mathbb{P}^d$ (и наоборот). Однако следует быть осторожным: при $K_X^2 < 3$ различные прямые необязательно пересекаются в одной точке. Например, при $K_X^2 = 2$, антиканоническое двулистное накрытие $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ также отображает (-1) -кривые в прямые – бикасательные к дивизору ветвления $B \subset \mathbb{P}^2$ и прообраз бикасательной состоит из двух (-1) -кривых, которые пересекают друг друга в двух точках (или касаются).

Число прямых N на поверхности дель Пеццо степени $d = K_X^2$ задается следующей таблицей:

d	1	2	3	4	5	6	7
N	240	56	27	16	10	6	3

При $d \geq 3$ мы можем попытаться нарисовать *двойственный граф* $\Gamma(X)$ прямых на X . Его вершины соответствуют прямым и две вершины соединяются ребром, если они пересекаются. Например, при $d = 7$ имеется ровно три прямые и их двойственный граф $\Gamma(X)$ изображен на рис. 4. Здесь вершины E_1 и E_2 соответствуют исключительным дивизорам раздутия $X \rightarrow \mathbb{P}^2$, а L_0 соответствует собственному прообразу прямой, соединяющей точки раздутия (см. упражнение 5, с. 10).

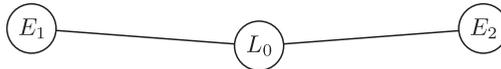


Рис. 4. Прямые на поверхности дель Пеццо степени 7

Аналогично, при $d = 6$ двойственный $\Gamma(X)$ – шестиугольник (рис. 5, см. также упражнение 6, с. 10).

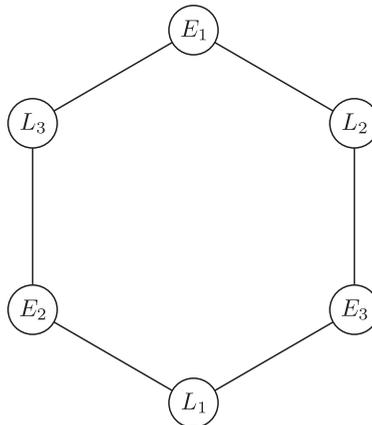


Рис. 5. Прямые на поверхности дель Пеццо степени 6

При $d = 5$ граф прямых $\Gamma(X)$ – так называемый *граф Петерсена* (рис. 6).

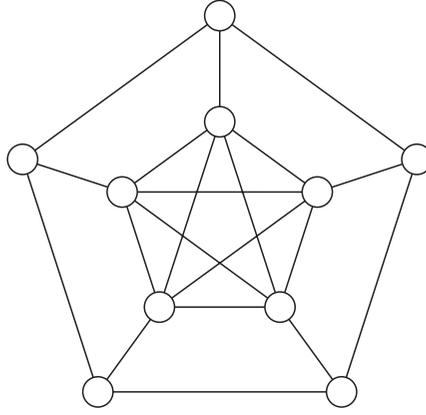


Рис. 6. Прямые на поверхности дель Педро степени 5

6.15. Пусть X – поверхность дель Педро степени $d \leq 6$. Рассмотрим множество

$$\Delta := \{\alpha \in \text{Pic}(X) \mid K_X \cdot \alpha = 0, \alpha^2 = -2\}.$$

Ясно, что Δ можно отождествить с подмножеством в ортогональном дополнении $(K_X)^\perp$ к K_X в пространстве $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$. По теореме Ходжа об индексе ограничение формы пересечения на это пространство отрицательно определено. Поэтому Δ – конечное множество. На самом деле, несложно показать, что Δ является системой корней (см., например, [6, гл. IV, предложение 3.3]). Обозначим через $W = W(\Delta)$ соответствующую группу Вейля, подгруппу в линейной группе пространства $(K_X)^\perp$, порожденную отражениями относительно гиперплоскостей ортогональных корням $\alpha \in \Delta$.

В зависимости от степени d тип системы корней Δ и порядок W задаются следующей таблицей:

d	1	2	3	4	5	6
Δ	E_8	E_7	E_6	D_5	A_4	$A_1 \times A_2$
$ W $	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^7 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3$

Группа W (как и группа $\text{Aut}(X)$) действует на решетке $\text{Pic}(X)$ ортогональными (относительно формы пересечения) преобразованиями и при этих преобразованиях элемент K_X и конус эффективных кривых $\overline{\text{NE}}(X) \subset \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ сохраняются. Последнее следует из того, что конус $\overline{\text{NE}}(X)$ порожден элементами $\mathbf{x} \in \text{Pic}(X)$ такими, что $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$, $(\mathbf{x}, K_X) = -1$.

6.15.1. Поверхность X (неоднозначно) представляется в виде раздутия $N := 9 - K_X^2$ точек на \mathbb{P}^2 . Зафиксируем такое представление $X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Тогда имеется естественный ортогональный базис $\mathbf{h}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$, где \mathbf{h} – класс полного прообраза прямой, а \mathbf{e}_i – классы исключительных дивизоров. При $d \leq 4$ корни $\alpha \in \Delta$ имеют вид

$$\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j, \quad i \neq j, \quad \pm(\mathbf{h} - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k), \quad i \neq j \neq k \neq i$$

(при $d \leq 3$ имеется больше возможностей, см. [6, гл. IV, 3.7], [26, предложение 8.2.7]).

6.15.2. Пример. Пусть $d = 1$. Тогда инволюция Бертини действует на Δ умножением на -1 . Отображение

$$\Delta \rightarrow \text{Pic}(X), \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - K_X$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством корней Δ типа E_8 и множеством прямых на X . Отсюда немедленно получается, что X содержит ровно 240 прямых [32].

6.15.3. Пример. Пусть $d = 2$. Как и выше, инволюция Гейзера действует на Δ умножением на -1 . Отображение

$$\Delta \rightarrow \text{Pic}(X), \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - K_X$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством корней Δ типа E_7 и множеством классов линейной эквивалентности коник на X . Отсюда немедленно получается, что X содержит ровно 126 различных пучков коник [32].

6.15.4. Замечание. Хорошо известно [32], что имеются следующие изоморфизмы:

$$W(A_1 \times A_2) \simeq \{\pm 1\} \times \mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{D}_6, \quad W(A_4) \simeq \mathfrak{S}_4, \quad W(D_5) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_5$$

(здесь \mathfrak{D}_n обозначает группу диэдра порядка $2n$, а \mathfrak{S}_n – симметрическую группу порядка $n!$). В общем случае для $W = W(\Delta)$ имеется сюръективный гомоморфизм взятия определителя $\det: W \rightarrow \{\pm 1\}$. Ядро $W^+ \subset W$ этого гомоморфизма допускает следующее описание в терминах классических матричных групп над конечными полями:

$$\begin{aligned} W^+(E_8) &\simeq O_8(\mathbf{F}_2)^+, \\ W^+(E_7) &\simeq Sp_6(\mathbf{F}_2), \\ W^+(E_6) &\simeq U_4(\mathbf{F}_4) \simeq PSp_4(\mathbf{F}_3). \end{aligned}$$

6.15.5. Замечание. Группа автоморфизмов $\text{Aut}_{\mathbb{k}}(X)$ имеет естественное представление в автоморфизмах решетки $\text{Pic}(X)$. Ядро этого представления оставляет на месте все (-1) -кривые. Отсюда следует, что при $d \leq 5$ это представление точное. При $d = 6$ ядро этого представления – двумерный тор.

6.15.6. Замечание. Группа Вейля $W(\Delta)$ действует на решетке $\text{Pic}(X)$ ортогональными (относительно формы пересечения) преобразованиями и сохраняет канонический класс. Отсюда следует, что $W(\Delta)$ сохраняет также конус Мори $\overline{NE}(X) \subset N_1(X) = \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ (см. упражнение 1).

6.15.7. Теорема. Пусть Γ – образ в $\text{Aut}(\text{Pic}(X))$ группы автоморфизмов поверхности дель Пеццо X степени ≤ 6 . Тогда Γ содержится в группе Вейля W .

6.15.8. Замечание. Утверждение теоремы останется верным, если заменить группу Γ на образ группы Галуа $\text{Gal}(\mathbb{k}/\overline{\mathbb{k}})$ в $\text{Pic}(X \otimes \overline{\mathbb{k}})$ (здесь поле \mathbb{k} не является алгебраически замкнутым и $\overline{\mathbb{k}}$ – его замыкание, см. п. 7.1).

Доказательство. Будем разлагать произвольный элемент $\varphi \in \Gamma$ в композицию отражений. Положим $\mathbf{h}' := \varphi(\mathbf{h})$. Ясно, что

$$\mathbf{h}' = a\mathbf{h} - \sum b_i \mathbf{e}_i, \quad a, b_i \in \mathbb{Z}.$$

Так как \mathbf{h}' содержится во внутренней конуса $\overline{NE}(X)$, то $a = (\mathbf{h}', \mathbf{h}) > 0$ и $b_i = (\mathbf{h}', \mathbf{e}_i) > 0$. Пусть $b_l \geq b_k \geq b_j \geq \dots$ (в частности, b_l – максимальное среди всех b_i). Так как φ – ортогональное преобразование решетки $\text{Pic}(X)$, то

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}', \mathbf{h}') &= 1 = a^2 - \sum_i b_i^2, \\ (-K_X, \mathbf{h}') &= 3 = 3a - \sum_i b_i. \end{aligned} \tag{6.15.9}$$

Мы предположим, что $a > 1$ (иначе $\mathbf{h}' = \mathbf{h}$). Перепишем (6.15.9) в виде

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= \sum_i b_i^2, \\ 3ab_j - 3b_j &= \sum_i b_j b_i. \end{aligned}$$

Вычитая, получим

$$(a-1)(a+1-3b_j) = \sum_i b_i(b_i - b_j) \leq b_l(b_l - b_j) + b_k(b_k - b_j).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (a-1)(a+1-b_l-b_k-b_j) &\leq (a-1)(2b_j-b_l-b_k) + b_l(b_l-b_j) + b_k(b_k-b_j) \\ &= (b_l-a+1)(b_l-b_j) + (b_k-a+1)(b_k-b_j). \end{aligned}$$

Правая часть неположительна поскольку $a > b_l \geq b_k$ (из первого неравенства в (6.15.9)). Следовательно,

$$a < b_l + b_k + b_j.$$

Применим к \mathbf{h}' отражение относительно $\alpha = \mathbf{h} - \mathbf{e}_l - \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j \in \Delta$:

$$s_\alpha : \mathbf{h}' \mapsto \mathbf{h}' - 2 \frac{(\mathbf{h}', \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \mathbf{h}' + (a - b_l - b_k - b_j)\alpha.$$

Таким образом, коэффициент $s_\alpha(\mathbf{h}') = s_\alpha \circ \varphi(\mathbf{h})$ при \mathbf{h} уменьшается (по сравнению с коэффициентом \mathbf{h}') и этот коэффициент остается неотрицательным поскольку $s_\alpha(\mathbf{h}')$ содержится во внутренности конуса $\overline{\text{NE}}(X)$. Продолжая процесс, добьемся того, что $s_n \circ \dots \circ s_1 \circ \varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$, где s_i – некоторые отражения. Положим $\psi := s_n \circ \dots \circ s_1 \circ \varphi$. Так как $\psi(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$, то $\psi(\mathbf{e}_i) = \sum c_{i,j} \mathbf{e}_j$, где $c_{i,j} \in \mathbb{Z}$ и $-1 = (\psi(\mathbf{e}_i), \psi(\mathbf{e}_i)) = -\sum c_{i,j}^2$. Отсюда $\psi(\mathbf{e}_i) = \pm \mathbf{e}_j$. Так как $\psi(K_X) = K_X$, то $\psi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j$. Перестановка двух элементов базиса \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j – отражение относительно корневого вектора $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$. Поэтому, с точностью до перестановок мы можем считать, что $\psi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ для всех i и тогда ψ – тождественное отображение.

Задачи

1. Докажите, что конус Мори $\overline{\text{NE}}(X)$ поверхности дель Педро X степени < 8 порождается элементами $\mathbf{e} \in N_1(X)$ такими, что $\mathbf{e}^2 = K_X \cdot \mathbf{e} = -1$. Выведите отсюда, что конус Мори инвариантен относительно всей ортогональной группы автоморфизмов решетки $\text{Pic}(X)$, сохраняющих канонический класс.
2. Докажите, что поверхности дель Педро степени $d \neq 8$ описываются неприводимым семейством. Найдите размерность этого семейства.
3. Пусть $f: X \rightarrow X'$ – бирациональный морфизм поверхности дель Педро X на нормальную поверхность X' . Докажите, что X' неособа (и является поверхностью дель Педро).
4. Опишите группу автоморфизмов поверхности дель Педро степени 7.
5. Пусть X – поверхность дель Педро X степени 6. Докажите, что существует вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, эквивариантное относительно полной группы автоморфизмов $\text{Aut}(X)$. Задайте образ X в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ уравнением и найдите все прямые на X . Какой смысл имеют проекции X на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$?
6. Пусть X – поверхность дель Педро X степени 6. Докажите, что существует вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, эквивариантное относительно полной группы автоморфизмов $\text{Aut}(X)$. Задайте образ X в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ уравнениями и найдите все прямые на X . Какой смысл имеют проекции X на множители?
7. Докажите, что антиканонически вложенная поверхность дель Педро $X \subset \mathbb{P}^6$ степени 6 может быть задана квадратичными уравнениями

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_0 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Указание. Используйте задачу 6.

8. Как устроены образ и ядро представления $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(\text{Pic}(X))$ в случае поверхности дель Педро степени 6? Опишите группу $\text{Aut}(X)$ в этом случае. *Указание.* Используя теорему 6.15.7 и замечание 6.15.5, покажите, что $\text{Aut}(X) \simeq (\mathbb{k}^*)^2 \rtimes \mathfrak{D}_6$.
9. Докажите, что антиканонически вложенная поверхность дель Педро $X \subset \mathbb{P}^5$ степени 5 может быть задана обращением в нуль пфаффианов главных (4×4) -миноров кососимметрической матрицы $(l_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 5}$ общих линейных форм $l_{i,j}(x_0, \dots, x_5)$.
10. Докажите, что группа автоморфизмов поверхности дель Педро степени 5 изоморфна симметрической группе \mathfrak{S}_5 . *Указание.* Используйте представление 6.12.4, для того, чтобы показать, что \mathfrak{S}_5 действует на X . Далее воспользуйтесь теоремой 6.15.7.
11. Докажите, что поверхность дель Педро степени 5 может быть реализована как дивизор бистепени $(1, 2)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Каков смысл проекции X на второй множитель?
12. Пусть X – гладкий дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Докажите, что X – поверхность дель Педро. Каков ее тип?
13. Докажите, что на поверхности дель Педро степени $2 \leq d \leq 7$ любой эффективный дивизор является целочисленной линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами классов прямых. Когда это нарушается на поверхности дель Педро степени 1?
14. Найдите число различных пучков коник поверхности дель Педро степени d (число прямых считается известным).

15. Покажите, что любая поверхность дель Пеццо $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 (неоднозначно) представляется в виде двулистного накрытия $X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Каков дивизор ветвления этого накрытия? Как интерпретируются прямые на X в таком представлении?
16. Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – поверхность дель Пеццо степени 4. Как описываются пучки коник на X в терминах квадратичных уравнений, задающих X ?
17. Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ – различные квадрики. Докажите, что многообразие $Q_1 \cap Q_2$ неособо (и является поверхностью дель Пеццо степени 4) тогда и только тогда, когда пучок $\langle Q_1, Q_2 \rangle$ содержит ровно 5 вырожденных квадрик (предположите, что $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$).
18. ($\text{char } \mathbb{k} \neq 2$) Покажите, что любую поверхность дель Пеццо $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 можно задать уравнениями

$$x_0^2 + \cdots + x_4^2 = \lambda_0 x_0^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2 = 0$$

для некоторых (различных) $\lambda_i \in \mathbb{k}$.

19. Докажите, что группа автоморфизмов любой поверхности дель Пеццо степени 4 содержит нормальную подгруппу изоморфную $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Докажите, что эта подгруппа нормальна также и в группе Вейля $W(D_5) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_5$. *Указание.* Каждый пучок коник \mathcal{C} на X задается в $\text{Pic}(X)$ условиями $\mathcal{C}^2 = 0$, $-K_X \cdot \mathcal{C} = 2$. Все пучки разбиваются на пары \mathcal{C} и $\mathcal{C}' = -K_X - \mathcal{C}$. Каждая такая пара задает двулистное накрытие $X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а, следовательно, и инволюцию в $\text{Aut}(X)$. См. также предыдущие задачи 14–18.
20. Пусть X – (неособая) кубическая поверхность. Перечислите все возможности для сечения $X \cap T_{P,X}$ касательной гиперплоскостью. *Указание.* Кривая $X \cap T_{P,X}$ приведена.
21. Докажите, что через каждую точку на поверхности дель Пеццо степени ≥ 4 проходит не более двух прямых.
22. Пусть X – (неособая) кубическая поверхность. *Точкой Эккарда* называется точка $P \in X$, через которую проходят три прямые. Докажите, что общая кубика не имеет точек Эккарда.
23. Какое максимальное число точек Эккарда может содержать кубическая поверхность? *Указание.* Оцените количество точек Эккарда, лежащих на одной прямой L . Для этого рассмотрите проекцию из L . Максимальное количество достигается для кубики Ферма.
24. Приведите примеры (особых) гиперповерхностей степени 4 в $X \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, для которых проекция (двулистный антиканонический морфизм $X \rightarrow \mathbb{P}^2$) не является сепарабельным.
25. ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1. Предположим, что антиканонический пучок не содержит каспидальных кривых. Вычислите количество особых элементов $D \in |-K_X|$.
26. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени ≤ 2 и пусть $L, L' \subset X$ – прямые. Какие значения может принимать индекс пересечения $L \cdot L'$? *Указание.* Воспользуйтесь 6.8.5 (ii) и 6.9.1 (ii).
27. Докажите, что группа Вейля $W(E_6)$ является расширением группы $U_4(\mathbf{F}_4)$ при помощи $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Указание.* Покажите, что группа автоморфизмов кубической поверхности Ферма над полем характеристики 2 изоморфна $U_4(\mathbf{F}_4)$. Используйте теорему 6.15.7 и соображение о порядках групп. *Замечание.* Группа $U_4(\mathbf{F}_4)$ является простой группой порядка 25920.

7. G -поверхности

7.1. Алгебраическую схему V над полем \mathbb{k} вместе с группой G , действующей на $\bar{V} := V \otimes \bar{\mathbb{k}}$, мы будем называть, G – *схемой*. В дальнейшем мы будем рассматривать G -схемы размерностей 0, 1, 2 следующих двух типов.

- *Арифметический случай.* Поле \mathbb{k} совершенно, $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ – группа Галуа, действующая на $V \otimes \bar{\mathbb{k}}$ через второй множитель. Действие G на V тривиально.
- *Геометрический случай.* Поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, G – произвольная конечная группа. Действие G на V задается гомоморфизмом $G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

В арифметическом случае во многих утверждениях можно отказаться от условия совершенности поля \mathbb{k} (см. [2]). Поскольку это приводит к усложнению многих рассуждений, мы в наших записках предполагаем \mathbb{k} совершенным.

Каждая подсхема $V' \subset V$ в арифметическом случае и каждая G -инвариантная – в геометрическом случае, естественным образом снабжены структурой G -схем. G -схема V называется G -*неприводимой*, если G действует транзитивно на множестве неприводимых компонент \bar{V} . Почти всюду мы будем считать, что G -многообразие проективно и геометрически неприводимо.

7.2. Предложение. Пусть V – G -многообразие над незамкнутым полем \mathbb{k} (арифметический случай) и $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$. Пусть $\bar{C} \subset \bar{V}$ – G -инвариантная подсхема. Тогда существует подсхема $C \subset V$ такая, что $\bar{C} = C \otimes \bar{\mathbb{k}}$.

Следующий пример показывает, что отказ от условия совершенности поля \mathbb{k} приводит к определенным трудностям.

7.2.1. Пример. Пусть поле \mathbb{k} несовершенно (характеристики $p > 0$), и пусть $\theta \in \bar{\mathbb{k}} \setminus \mathbb{k}$ – чисто несепарабельный элемент такой, что $\theta^p \in \mathbb{k}$. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{k}(\theta)/\mathbb{k})$ тривиальна. Поэтому определенная над $\mathbb{k}(\theta)$ гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^n$, заданная уравнением $x_2 = \theta x_1$, является инвариантной относительно $\text{Aut}(\mathbb{k}(\theta)/\mathbb{k})$. Однако, эта гиперповерхность не определена над \mathbb{k} .

Напомним стандартное обозначение: если группа G действует на множестве M , то M^G обозначает множество неподвижных элементов. Если V – G -многообразие, то G естественным образом действует на $\text{Div}(\bar{V})$, $Z_1(\bar{V})$, $N_1(\bar{V})$, $\text{Pic}(\bar{V})$ и т.д. Поэтому определены инвариантные версии этих объектов: $\text{Div}(V)^G$, $Z_1(V)^G$, $N_1(V)^G$, $\text{Pic}(V)^G$. Через $\rho(\bar{V})^G$ мы будем обозначать $\text{rk NS}(\bar{V})^G$. В частности, определен инвариантный конус Мори

$$\overline{\text{NE}}(V)^G = \overline{\text{NE}}(V) \cap N_1(V)^G.$$

Из предложения 7.2 получаем.

7.3. Следствие. Пусть V – неособое проективное G -многообразие над (совершенным) полем \mathbb{k} и $G = \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$. Тогда $Z_1(V) = Z_1(\bar{V})^G$ и $\text{Div}(V) = \text{Div}(\bar{V})^G$. Следовательно,

$$N_1(V) = N_1(\bar{V})^G, \quad N^1(V) = N^1(\bar{V})^G, \quad \text{Pic}(V) \otimes \mathbb{Q} = (\text{Pic}(\bar{V}) \otimes \mathbb{Q})^G.$$

В частности, $\rho(V) = \rho(\bar{V})^G$.

Доказательство НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Естественные отображения

$$Z_1(V) \longrightarrow Z_1(\bar{V})^G, \quad \text{Div}(V) \longrightarrow \text{Div}(\bar{V})^G$$

сюръективны по предложению 7.2.

7.3.1. Замечание. В общем случае неверно, что $\text{Pic}(V) = \text{Pic}(\bar{V})^G$. Это неверно даже для многообразий *Севери–Брауэра*, т.е. для многообразий V над \mathbb{k} таких, что $V \times \bar{\mathbb{k}} \simeq \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^n$. Например, если V – плоская коника $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ над $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, то $\bar{V} \simeq \mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^1$, $\text{Pic}(\bar{V})$ – циклическая группа, порожденная дивизорами степени 1 и поэтому действие $\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ на $\text{Pic}(\bar{V})$ тривиально. С другой стороны, $\text{Pic}(V)$ – циклическая группа, порожденная дивизорами степени 2 (если бы на V имелся класс дивизоров степени 1, определенный над \mathbb{k} , то по теореме Римана–Роха этот класс содержал бы эффективный дивизор – точку, определенную над \mathbb{k}).

Двумерное G -многообразие называется G -поверхностью. Далее, если не оговаривается противное, все поверхности считаются неособыми.

7.4. Определение. G -поверхность X называется G -минимальной, если любой бирациональный морфизм $X \rightarrow X'$ является изоморфизмом.

Пусть имеется G -морфизм $\pi: X \rightarrow B$ на кривую. Он называется *относительно G -минимальным*, если для любого разложения

$$\pi: X \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} B$$

в композицию G -морфизмов с бирациональным g этот морфизм g является изоморфизмом. Допуская некоторую неточность, мы будем говорить, что поверхность X *относительно минимальна*.

7.4.1. Замечание. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – G -расслоение на коники. Следующие условия эквивалентны:

- (i) морфизм π относительно G -минимален,
- (ii) $\rho(X)^G = 2$,
- (iii) для любого вырожденного слоя X_b , $b \in \bar{B}$ его геометрические компоненты переставляются группой G .

7.5. Образ G_\bullet группы G в группах автоморфизмов $\text{NS}(X)$, $N^1(X)$, $N_1(X)$, $\overline{\text{NE}}(X)$ конечен. Поэтому можно определить линейное отображение

$$\text{Tr}: N_1(X) \rightarrow N_1(X)^G, \quad \mathbf{z} \mapsto \frac{1}{|G_\bullet|} \sum_{g \in G_\bullet} g(\mathbf{z}).$$

Это отображение является проектором: композиция с естественным вложением $N_1(X)^G \hookrightarrow N_1(X)$ является тождественным отображением на $N_1(X)^G$. Ясно также, что Tr сохраняет эффективность циклов и поэтому отображает $\overline{\text{NE}}(X)$ сюръективно на $\overline{\text{NE}}(X)^G$. Для $\overline{\text{NE}}(X)^G$ определено понятие экстремального луча. Как и в случае обычного конуса Мори (см. лемму 2.3.1), инвариантный конус $\overline{\text{NE}}(X)^G$ порождается своими экстремальными лучами.

7.5.1. Утверждение. Если $R \subset \overline{\text{NE}}(X)^G$ – экстремальный луч, то существует экстремальный луч $Q \subset \overline{\text{NE}}(X)$ такой, что $R = \text{Tr}(Q)$.

Доказательство. Возьмем ненулевой элемент $\mathbf{z} \in R$. Так как $\mathbf{z} \in \overline{\text{NE}}(X)$, то имеет место разложение $\mathbf{z} = \sum \mathbf{z}_i$, где элемент \mathbf{z}_i принадлежит экстремальному лучу $Q_i \subset \overline{\text{NE}}(X)$ (см. лемму 2.3.1). Тогда

$$\mathbf{z} = \text{Tr}(\mathbf{z}) = \sum \text{Tr}(\mathbf{z}_i),$$

где $\text{Tr}(\mathbf{z}_i) \in \overline{\text{NE}}(X)^G$. По определению экстремального луча $\text{Tr}(\mathbf{z}_i) \in R$.

7.6. Теорема (G -инвариантная теорема о конусе). Пусть X – G -поверхность и пусть H – численно эффективный обильный G -инвариантный дивизор на X . Для любого $\varepsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{\text{NE}}(X)^G$ таких, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч R_i порождается классом G -неприводимой кривой C_i . Конус $\overline{\text{NE}}(X)^G$ порождается конусом

$$\overline{\text{NE}}(X)^G \cap \{\mathbf{z} \mid (K_X + \varepsilon H) \cdot \mathbf{z} \geq 0\}$$

и лучами R_i .

Доказательство. Пусть R_i – экстремальные лучи конуса $\overline{\text{NE}}(X)^G$ такие, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Согласно 7.5.1 имеем $R_i = \text{Tr}(Q_i)$, для некоторых экстремальных лучей Q_i конуса $\overline{\text{NE}}(X)$. Ясно, что

$$(K_X + \varepsilon H) \cdot Q_i = (K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0.$$

Поэтому число лучей R_i конечно. Остальное читателю предлагается доказать самостоятельно.

7.7. G -инвариантная теорема о стягивании. Пусть X – G -поверхность и пусть $R \subset \overline{\text{NE}}(X)^G$ – экстремальный луч такой, что $K_X \cdot R < 0$. Тогда существует стягивание $f: X \rightarrow Z$ луча R , т.е. G -морфизм со связными слоями на нормальное многообразие Z такой, что образ G -неприводимой кривой $C \subset X$ является точкой тогда и только тогда, когда $[C] \in R$. Имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Pic}(Z)^G \xrightarrow{f^*} \text{Pic}(X)^G \xrightarrow{(\cdot)_l} \mathbb{Z}, \quad (7.7.1)$$

где l – любая G -кривая, класс которой принадлежит R . В частности $\rho(Z)^G = \rho(X)^G - 1$.

Возможны следующие случаи:

- (i) $R^2 > 0$. Тогда Z – точка, $\rho(X)^G = 1$ и X – поверхность дель Пеццо.
- (ii) $R^2 = 0$. Тогда Z – кривая, f – относительно G -минимальное расслоение на коники.
- (iii) $R^2 < 0$. Тогда f – бирациональный морфизм. Его исключительный дивизор E является G -неприводимым и \bar{E} состоит из несвязного объединения (-1) -кривых.

Доказательство. (i) Аналогично доказательству (i) предложения 2.4.2 можно показать, что R лежит во внутренности конуса $\overline{NE}(X)^G$. Следовательно, $R = \overline{NE}(X)^G$ и $\rho(X)^G = 1$. Так как $K_X \cdot R < 0$, то $-K_X$ обилен.

(ii) По 7.5.1 имеем $R = \text{Tr}(Q)$ для некоторого экстремального луча $Q \subset \overline{NE}(\bar{X})$. Ясно, что $K_X \cdot Q < 0$ и $Q^2 \leq 0$. Согласно теореме о конусе 4.5 луч Q порождается классом неприводимой кривой C . Пусть C_1, \dots, C_n – компонента связности G -орбиты C . Тогда $[\sum C_i] \in R$ и поэтому $(\sum C_i)^2 = 0$. Аналогично лемме 4.3.1 получаем, что линейная система $|n(\sum C_i)|$, $n \gg 0$ определяет G -морфизм со связными слоями $f: X \rightarrow Z$ на кривую. Пусть D – слой над точкой $z \in Z$ и пусть $\bar{D} = \sum d_i \bar{D}_i$. Тогда класс D лежит в R и класс любой G -орбиты $D' \subset \bar{D}$ также лежит в R . Поэтому $K_X \cdot D_i < 0$ для всех i . Это означает, что дивизор $-K_X$ относительно обилен. По определению f – расслоение на коники (см. 3.6.1). Так как R – экстремальный луч, то оно относительно G -минимально (см. 7.4.1).

(iii) Как и в доказательстве (ii) возьмем экстремальный луч $Q \subset \overline{NE}(\bar{X})$ так, что $R = \text{Tr}(Q)$. Ясно, что $K_X \cdot Q < 0$ и $Q^2 < 0$. Следовательно, Q порождается классом (-1) -кривой C . Пусть $C_1 = C, \dots, C_n$ – G -орбита кривой C . Тогда $[\sum C_i] \in R$ и поэтому $(\sum C_i)^2 < 0$. Это возможно только если $C_i \cdot C_j = 0$ для всех $i \neq j$.

Сказанное выше в (i)–(iii) доказывает существование стягивания $f: X \rightarrow Z$. Точность последовательности (7.7.1) устанавливается как и в теореме 4.4.

7.7.2. Ясно, что $\rho(Z)^G = \rho(X)^G - 1$. Поэтому последовательность G -стягиваний типа 7.7 (iii) должна оборваться.

7.8. Пусть X – G -поверхность такая, что ее канонический класс не является численно эффективным. По теореме 7.7 и замечанию 7.7.2 существует последовательность

$$X = X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_n$$

бirationальных G -морфизмов типа 7.7 (iii) такая, что для X_n или выполняются возможности (i)–(ii) теоремы 7.7 или канонический класс K_{X_n} не является численно эффективным. По теореме 4.1.1 последнее не может иметь место если поверхность X рациональна.

Последовательность стягиваний $X_i \rightarrow X_{i+1}$ мы будем называть G -эквивариантной программой минимальных моделей (или просто G -программой минимальных моделей). В случае, когда G -поверхность X снабжена структурным G -морфизмом $X \rightarrow B$ можно определить относительные версии всех объектов $N_1(X/B)^G$, $\text{Pic}(X/B)^G$, $\overline{NE}(X/B)^G$ и т.д. Тогда соответствующие версии теорем 7.6 и 7.7 также имеют место. В этом случае мы говорим об относительной G -программе минимальных моделей.

7.8.1. Следствие. Пусть X – G -минимальная рациональная поверхность. Тогда имеет место одно из следующих:

- (i) X – поверхность дель Пеццо с $\text{Pic}(X)^G \simeq \mathbb{Z}$;
- (ii) X имеет структуру относительно G -минимального расслоения на коники над кривой рода 0.

Доказательство. Так как поверхность X рациональна, то K_X не может быть численно эффективным по теореме 4.1.1. По G -инвариантной теореме о конусе 7.6 существует экстремальный луч $R \subset \overline{NE}(X)^G$ такой, что $K_X \cdot R < 0$. Мы можем считать, что $R^2 \geq 0$ и тогда утверждение следует из теоремы 7.7.

7.8.2. Следствие. Пусть Y – G -поверхность и пусть $\pi': Y \dashrightarrow C$ – рациональное G -отображение на кривую C такое, что общий слой Y_η является геометрически приведенной неприводимой рациональной кривой над полем вычетов $\mathbb{k}(\eta)$ общей точки $\eta \in C$. Тогда существует эквивариантная коммутативная диаграмма G -отображений

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ C & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

где π – G -минимальное расслоение на коники, а отображения φ и ψ бирациональны.

Доказательство. Пусть B – полная нормальная модель C . Ясно, что B является G -многообразием и имеется G -отображение $\psi: C \dashrightarrow B$. Мы можем также считать, что поверхность Y проективна (но необязательно неособа). Для этого нужно лишь рассмотреть G -вложение $Y \subset \mathbb{P}^N$ и замкнуть образ в топологии Зарисского. Рассмотрим замыкание графика $V \subset Y \times B$ отображения $Y \dashrightarrow B$ и его минимальное разрешение $W \rightarrow V$. Тогда V, W являются G -многообразиями и имеются G -морфизмы $W \rightarrow Y$ и $W \rightarrow B$, причем $W \rightarrow Y$ бирационален. Применим G -программу минимальных моделей к W над B . Получим требуемую поверхность X .

7.9. Предложение. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – относительно G -минимальное расслоение на коники над кривой арифметического рода 0. Предположим, что $K_X^2 < 8$. Тогда

$$\mathrm{Pic}(\overline{X})^G = \mathbb{Z} \cdot K_{\overline{X}} \oplus \pi^* \mathrm{Pic}(\overline{B}).$$

Доказательство. Пусть $\overline{F} \subset \overline{X}$ – типичный слой, а $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_r \subset \overline{X}$ – вырожденные слои $\overline{\pi}$. По нашему предположению $K_X^2 < 8$ имеем $r > 0$. Запишем $\overline{F}_i = \overline{C}_i + \overline{C}'_i$, где \overline{C}_i и \overline{C}'_i – (-1) -кривые. Как и в 7.5 определим линейное отображение

$$\mathrm{Tr}: \mathrm{Pic}(\overline{X}) \rightarrow \mathrm{Pic}(\overline{X})^G, \quad \mathbf{z} \mapsto \sum_{g \in G} g(\mathbf{z}).$$

Тогда образ Tr – подрешетка конечного индекса в $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G$. Напомним (следствие 3.6.5), что $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ порождается некоторым сечением и компонентами слоев. Так как расслоение на коники G -минимально, то для каждого \overline{C}_i существует $\delta_i \in G$ такой, что $\overline{C}_i \cap \delta_i \overline{C}_i \neq \emptyset$ и $\overline{C}_i \neq \delta_i \overline{C}_i$. Это означает, что $\delta_i \overline{C}_i = \overline{C}'_i$ и $\overline{C}_i + \delta_i \overline{C}_i = \overline{F}_i \sim \overline{F}$. Тогда элемент $\mathrm{Tr}(\overline{C}_i)$ пропорционален \overline{F} в $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G$, и поэтому $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(\overline{X})^G = 2$. Следовательно, элементы \overline{F} и $K_{\overline{X}}$ порождают подрешетку конечного индекса в $\mathrm{Pic}(\overline{X})^G$.

Рассмотрим элемент $\Theta \in \mathrm{Pic}(\overline{X})^G$. Мы можем записать $\Theta \equiv \alpha(-K_{\overline{X}}) + \beta \overline{F}$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Предположим, что Θ не представляется в виде целочисленной линейной комбинации \overline{F} и $K_{\overline{X}}$. Так как $K_{\overline{X}} \cdot \overline{F} = -2$, то заменяя Θ на $\Theta + aK_{\overline{X}}$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$ мы можем считать, что $\Theta \cdot \overline{F} = 0$ или 1. Если $\Theta \cdot \overline{F} = 1$, то $\Theta \cdot \overline{C}_i + \Theta \cdot \overline{C}'_i = 1$ и, заменяя \overline{C}_i на \overline{C}'_i , мы можем считать, что $\Theta \cdot \overline{C}_i \geq 1$ и $\Theta \cdot \overline{C}'_i \leq 0$. В этом случае элементы G не могут переставлять \overline{C}_i и \overline{C}'_i . Противоречие. Таким образом, $\Theta \cdot \overline{F} = 0$ и $\Theta \equiv \beta \overline{F}$, $\beta \in \mathbb{Q}$. В частности, $\Theta^2 = 0$ и по теореме Римана–Роха $\Theta \cdot K_{\overline{X}} = -2\beta$ должно быть четным. Отсюда $\beta \in \mathbb{Z}$. Так как на \overline{X} численная эквивалентность совпадает с линейной, то $\Theta \sim \beta \overline{F}$. Противоречие.

Задачи

1. Переформулируйте и докажите версию критерия Клеймана 2.2 для инвариантных дивизоров на G -многообразиях. Выведите отсюда, что G -поверхность с $\rho(X)^G = 1$ является поверхностью дель Пеццо тогда и только тогда, когда она рациональна (над $\overline{\mathbb{k}}$).
2. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники. Докажите, что инвариантный конус Мори порождается двумя лучами $R_1 = \mathbb{R}_+[F]$, $R_2 = \mathbb{R}_+[C]$, где F – слой π , а C – эффективный дивизор такой, что $C^2 \leq 0$.
3. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – G -расслоение на коники над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} (группа G действует \mathbb{k} -автоморфизмами). Докажите, что π относительно минимально тогда и только тогда, когда для любого вырожденного слоя $X_b = X'_b + X''_b$ существует элемент $a \in G$, переставляющий компоненты X'_b и X''_b между собой.

8. Минимальность и относительная минимальность

В этом параграфе мы изучим вопрос о минимальности рациональных G -поверхностей.

8.1. Пусть X – рациональная G -поверхность. По формуле Нётера $K_X^2 \leq 9$. Более того, если $K_X^2 = 9$, то $\rho(\overline{X})^G = \rho(\overline{X}) = 1$ и $\overline{X} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ (т.е. X – многообразие Севери–Брауэра, см. §9).

Рассмотрим случай $K_X^2 = 8$.

8.2. Предложение. Пусть X – рациональная G -поверхность. Если $K_X^2 = 8$, то X имеет место один из следующих случаев:

- (i) $\text{Pic}(\overline{X})^G \simeq \mathbb{Z}$ и X – поверхность дель Пеццо. В этом случае $\overline{X} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$.
- (ii) $\rho(\overline{X})^G = 2$ и X имеет структуру G -расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$ над рациональной кривой. В этом случае морфизм π гладкий (т.е. π не имеет вырожденных слоев) и $\overline{X} \simeq \mathbb{F}_n$ для некоторого n .

Доказательство. По формуле Нётера $\rho(\overline{X}) = 2$ и поэтому $\rho(\overline{X})^G \leq 2$.

Пусть $\rho(\overline{X})^G = 1$. Тогда X – минимальная поверхность дель Пеццо (см. упражнение 1, с. 44). Если $\overline{X} \simeq \mathbb{F}_1$, то \overline{X} содержит единственную (-1) -кривую. Эта кривая должна быть инвариантна. Противоречие с условием $\rho(\overline{X})^G = 1$. По следствию 6.10.6 имеем $\overline{X} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$.

Пусть теперь $\rho(\overline{X})^G = 2$. Если X G -минимальна, то по теореме о стягивании 7.7 имеется структура расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$. По 3.6.4 морфизм π гладкий. Если же X не является G -минимальной, то существует G -эквивариантное бирациональное стягивание $f: X \rightarrow X'$, где X' – рациональная G -поверхность с $K_{X'}^2 > 8$. По 8.1 имеем $\overline{X}' \simeq \mathbb{P}^2$ и f – раздутие точки. Следовательно, $\overline{X} \simeq \mathbb{F}^1$ и тогда X – поверхность дель Пеццо. В этом случае на X имеется другое стягивание $\pi: X \rightarrow B$, отличное от f .

8.2.1. Замечание. В условиях 8.2 предположим, что мы находимся в арифметической ситуации (т.е. поле \mathbb{k} не является алгебраически замкнутым.)

- (i) В случае 8.2 (i) поверхность X изоморфна квадрике $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3$ тогда и только тогда, когда класс дивизоров $(1/2)K_X$ определен над \mathbb{k} .
- (ii) В случае 8.2 (ii) поверхность X представляется в виде проективизации $\mathbb{P}_B(\mathcal{E})$ векторного расслоения ранга 2 на B тогда и только тогда, когда π имеет сечение $s: B \rightarrow X$. При этом $\mathcal{E} := \pi_* \mathcal{O}_X(s(B))$. Морфизм π не имеет сечений только если $X \simeq F \times B$, где F – рациональная кривая, не являющаяся \mathbb{k} -рациональной.
- (iii) Если в случае 8.2 (ii) n нечетно, то $B \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$.
- (iv) Рациональная G -поверхность X с $K_X^2 = 8$ не является минимальной тогда и только тогда, когда X – раздутие точки на $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ (случай 8.2 (ii) с $n = 1$).

Рассмотрим случай $K_X^2 = 7$.

8.3. Предложение. Пусть X – рациональная G -поверхность. Если $K_X^2 = 7$, то X не является минимальной и не является относительно минимальной.

Доказательство. Предположим, что X – поверхность дель Пеццо с $\rho(\overline{X})^G = 1$. В этом случае противоречие получается из явного описания конфигурации прямых (см. рис. 4, с. 36). Дадим другое доказательство. Пусть E_1 – прямая на \overline{X} , и пусть E_1, \dots, E_n – ее G -орбита. Так как $\iota(X) = 1$, то $\sum E_i \sim -aK_X$ для некоторого a и поэтому $n = 7a$. Следовательно, порядок G делится на 7, существует элемент $g \in G$ порядка 7^l и этот элемент нетривиально действует на множестве прямых. Следовательно, g нетривиально действует на решетке $\text{Pic}(\overline{X})$ ранга 3, что невозможно.

Предположим, что X имеет структуру относительно минимального расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$ над рациональной кривой. Тогда X имеет ровно один вырожденный слой F (и этот слой определен над основным полем в арифметической ситуации). Рассмотрим дивизор $D := -K_X - 2F$. По теореме Римана–Роха $\dim |D| \geq 1$, т.е. мы можем считать D эффективным. Пусть C – горизонтальная компонента D . Запишем $D = kC + L$, где $k \geq 1$, $L \geq 0$, а C не является компонентой L . Тогда

$$2 = D \cdot F = kC \cdot F + L \cdot F.$$

Если $k \geq 2$, то $k = 2$, $C \cdot F = 1$ и носитель L содержится в слоях π . В этом случае класс дивизора C является G -инвариантным. Это противоречит предложению 7.9. Следовательно, $k = 1$. Тогда

$$2p_a(C) - 2 = (K_X + C) \cdot C = (-D - 2F + C) \cdot C = -(L + 2F) \cdot C.$$

Отсюда $p_a(C) = 0$, $L \cdot C = 0$, $F \cdot C = 1$. Так как $L \cdot C = 0$, то L не имеет вертикальных компонент. Так как $D \cdot F = 2$, то L приведен и неприводим. Таким образом, $D = C + L$, где C и L – горизонтальные приведенные неприводимые кривые, причем $C \cap L = \emptyset$. С другой стороны, $-1 = D^2 = C^2 + L^2$. Поэтому $C^2 \neq L^2$. Как и выше, классы дивизоров C и L являются G -инвариантными. Противоречие.

Далее мы исследуем вопрос о том, когда минимальное расслоение на коники не является минимальной поверхностью.

8.4. Теорема [10]. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – относительно G -минимальное расслоение на коники над рациональной кривой B . Предположим, что $K_X^2 \leq 6$.

- (i) Если X не является минимальной G -поверхностью, то X – поверхность дель Пеццо ($c \rho(X)^G = 2$).
- (ii) Если $K_X^2 \notin \{3, 5, 6\}$, то X – минимальная G -поверхность.
- (iii) Если $K_X^2 \in \{3, 5, 6\}$, то поверхность X не является G -минимальной (и, следовательно, X – поверхность дель Пеццо). Существует бирациональное стягивание $\varphi: X \rightarrow X'$ на поверхность дель Пеццо X' .
 - (a) Если $K_X^2 = 3$, то $X' = X'_4 \subset \mathbb{P}^4$ – поверхность дель Пеццо степени 4, морфизм $\varphi: X \rightarrow X'$ задается линейной системой $|-2K_X - F|$ и стягивает геометрически неприводимую (-1) -кривую $C \sim -K_X - F$.
 - (b) Если $K_X^2 = 5$, то $X' \simeq \mathbb{P}^2$, морфизм $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ задается линейной системой $|-K_X - F|$ и стягивает G -инвариантную четверку (-1) -кривых $C = C_1 + \dots + C_4 \sim -2K_X - 3F$.
 - (c) Если $K_X^2 = 6$, то $X' = X'_8 \subset \mathbb{P}^8$ – поверхность дель Пеццо степени 8, морфизм $\varphi: X \rightarrow X'$ задается линейной системой $|-2K_X - F|$ и стягивает G -инвариантную пару (-1) -кривых $C = C_1 + C_2 \sim -K_X - 2F$.
- (iv) Если $K_X^2 \in \{1, 2, 4\}$, то X – поверхность дель Пеццо тогда и только тогда, когда она имеет две структуры G -расслоения на коники. Вторая структура задается линейной системой $|-4K_X - F|$, $|-2K_X - F|$ и $|-K_X - F|$ при $K_X^2 = 1, 2$ и 4 , соответственно.

8.4.1. Следствие. Пусть X – минимальная G -поверхность дель Пеццо. Предположим, что $\rho(X)^G > 1$. Тогда $\rho(X)^G = 2$, $K_X^2 = 2^r$, где $0 \leq r \leq 3$, и поверхность X имеет две структуры G -минимальных расслоений на коники $\pi_i: X \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$. Морфизм-произведение $\pi_1 \times \pi_2: X \rightarrow B_1 \times B_2$ конечен степени 2^{3-r} . Более того,

- (i) При $K_X^2 = 1$ и 2 две структуры π_i переставляются инволюцией Бертини и Гейзера, соответственно.
- (ii) При $K_X^2 = 4$ морфизм $\pi_1 \times \pi_2$ – двулистное накрытие с дивизором ветвления бистепени $(2, 2)$.
- (iii) При $K_X^2 = 8$ морфизм $\pi_1 \times \pi_2$ – изоморфизм.

8.4.2. Следствие. Пусть X – G -поверхность дель Пеццо степени 3, 5 или 6 с $\rho(X)^G \geq 2$. Тогда X не является G -минимальной и, следовательно, \bar{X} содержит несвязное G -инвариантное объединение прямых.

Доказательство теоремы 8.4. (i) следует из G -инвариантной теоремы о конусе 7.6.

(ii)–(iii) Мы считаем, что $d := K_X^2 > 0$. По теореме Римана–Роха $\dim |-K_X| = d > 0$. Возьмем любой дивизор $D \in |-K_X|$.

Предположим, что $-K_X$ не является обильным. Тогда существует G -неприводимая приведенная кривая L такая, что $D \cdot L \leq 0$. Мы можем взять D так, что $D \cap L \neq \emptyset$ и тогда L – компонента D , т.е. $D = L + D'$, где $D' \geq 0$. Так как

$$2 = -K_X \cdot F = L \cdot F + D' \cdot F,$$

то $L \cdot F \leq 2$. С другой стороны, $L \cdot F \neq 1$ (иначе L пересекает только одну компоненту каждого вырожденного слоя и π не может быть относительно минимальным). Следовательно, $L \cdot F = 2$, $D' \cdot F = 0$ и $D' \sim \alpha F$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}$ (см. предложение 7.9). Таким образом, $-K_X \sim L + \alpha F$, где

$$0 \geq -K_X \cdot L = -K_X \cdot (-K_X - \alpha F) = d - 2\alpha, \quad 2\alpha \geq d.$$

По формуле для рода $2p_a(L) - 2 = -2\alpha < 0$. Если кривая \bar{L} связна, то $p_a(L) \geq 0$. В этом случае $p_a(L) = 0$, $\alpha = 1$ и $d \leq 2$. В противном случае \bar{L} имеет ровно две компоненты связности \bar{L}_1 и \bar{L}_2 (поскольку $L \cdot F = 2$). Тогда $p_a(\bar{L}) = 1 - \chi(\mathcal{O}_{\bar{L}}) = -1$. Следовательно, $\alpha = 2$ и $d \leq 4$. С другой стороны, число $d = -K_X \cdot L + 2\alpha$ должно быть четным в этом случае, т.е. $d \neq 3$. Мы показали, что при $d = 3, 5, 6$ X – поверхность дель Пеццо.

Предположим, что поверхность X не является G -минимальной. Из G -инвариантной теоремы о конусе 7.6 и критерия обильности Клеймана 2.2 следует, что X – поверхность дель Пеццо (см. упражнение 1, с. 44). Пусть C – исключительная G -кривая и пусть m – число ее геометрических компонент. Согласно предложению 7.9 запишем $C \sim -pK_X + qF$, $p > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} -m &= C^2 = dp^2 + 4pq, \\ m &= -K_X \cdot C = dp + 2q. \end{aligned}$$

Исключая q , получим

$$q = \frac{m - dp}{2}, \quad dp^2 - 2mp - m = 0.$$

Отсюда $d > 0$ и $m = p^2 m'$, где $m' \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$d = (2p + 1)m'.$$

Так как $d \leq 6$, то мы получаем следующие возможности:

- (a) $p = 1, m' = 1, d = 3, m = 1, q = -1$;
- (b) $p = 1, m' = 2, d = 6, m = 2, q = -2$;
- (c) $p = 2, m' = 1, d = 5, m = 4, q = -3$.

Остается показать, что при $d = 3, 5, 6$ на X существует такая G -инвариантная исключительная кривая C . По G -инвариантной теореме о конусе 7.6 конус $\overline{\text{NE}}(X)^G$ имеет ровно два экстремальных луча и оба этих луча K_X -отрицательны. Один из них порождается слоями π . Пусть $\varphi: X \rightarrow X'$ – стягивание второго луча. Если это стягивание бирационально, то согласно вычислениям выше мы попадаем в один из случаев (a)–(c). Таким образом, мы можем считать, что φ – также расслоение на коники. В этом случае любой G -инвариантный дивизор C является выпуклой линейной комбинацией слоев π и φ . Поэтому C численно эффективен и $C^2 \geq 0$. Докажем, что это не так. Рассмотрим случаи $d = 3, 5, 6$ последовательно.

Пусть $d = 3$. По лемме 8.4.3 (ниже) $B \simeq \mathbb{P}^1$. Пусть F – слой расслоения π . По теореме Римана–Роха $H^0(X, -K_X - F) \neq 0$. Следовательно, существует эффективный дивизор $C \sim -K_X - F$. Тогда $C^2 = -1$. Противоречие. При $d = 5$, как и выше, существует эффективный дивизор $C \sim -2K_X - 3F$ и $C^2 = -4$. Противоречие. При $d = 6$ существует эффективный дивизор $C \in |-K_X - 2F|$ и $C^2 = -2$. Снова противоречие.

(vi) Следует из G -инвариантной теоремы о конусе 7.6.

8.4.3. Лемма. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники над кривой арифметического рода 0. Если K_X^2 нечетно, то $B \simeq \mathbb{P}^1$ и $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\bar{X})^G$.

Доказательство. Дискриминантное множество (образ вырожденных слоев) $\Delta \subset B$ имеет нечетную степень. Следовательно, $B \simeq \mathbb{P}^1$. Согласно предложению 7.9 имеем

$$\text{Pic}(X) \subset \text{Pic}(\bar{X})^G = \mathbb{Z} \cdot K_X \oplus \pi^* \text{Pic}(B) \subset \text{Pic}(X).$$

Задачи

1. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1 или 2 и пусть G – группа ее автоморфизмов, содержащая инволюцию Бертини β , если $K_X^2 = 1$, и инволюцию Гейзера γ , если $K_X^2 = 2$. Докажите, что тогда X является G -минимальной.
2. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники с $K_X^2 = 4$ над рациональной кривой. Докажите, что выполняется одно из следующих:
 - (a) $-K_X$ обильен и X имеет вторую структуру расслоения на коники,
 - (b) $-K_X$ численно эффективен и на \bar{X} имеются два непересекающихся геометрических сечения C_1, C_2 с $C_i^2 = -2$.

Указание. См. доказательство теоремы 8.4.

3. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники с $K_X^2 = 2$ над рациональной кривой. Докажите, что выполняется одно из следующих:
- $-K_X$ обилен и X имеет вторую структуру расслоения на коники,
 - $-K_X$ численно эффективен и имеется геометрически неприводимое 2-сечение $C \subset X$ такое, что $C^2 = -2$,
 - $-K_X$ численно эффективен и на \overline{X} имеются два пересекающихся геометрических сечения C_1, C_2 таких, что $C_i^2 = -2$ и $C_1 \cdot C_2 = 1$,
 - на \overline{X} имеются два непересекающихся геометрических сечения C_1, C_2 таких, что $K_X \cdot C_i = 1$ и $C_i^2 = -3$.

Указание. См. доказательство теоремы 8.4.

4. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники с $K_X^2 = 1$ над рациональной кривой. Докажите, что выполняется одно из следующих:
- $-K_X$ обилен и X имеет вторую структуру расслоения на коники,
 - имеется геометрически неприводимое 2-сечение $C \subset X$ такое, что $K_X \cdot C = 1$, $C^2 = -3$.

Указание. См. доказательство теоремы 8.4.

5. Пусть X – кубическая поверхность, заданная уравнением $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + ax_3^3 = 0$ над полем \mathbb{k} таким, что $\sqrt[3]{a} \notin \mathbb{k}$. Докажите, что $\rho(X) = 1$.
6. Является ли G -минимальной кубическая поверхность Ферма $x_0^3 + \dots + x_3^3 = 0$ (над алгебраически замкнутым полем характеристики 0), где G – полная группа автоморфизмов?
7. Рассмотрим кубическую поверхность X (кубику Клебша), заданную уравнениями

$$x_0^3 + \dots + x_4^3 = x_0 + \dots + x_4 = 0$$

над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Пусть G – ее полная группа автоморфизмов. Является ли поверхность X G -минимальной? Изоморфна ли она кубику Ферма?

8. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 2, заданная уравнением $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^2 = 0$ в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 и пусть G – ее полная группа автоморфизмов. Является ли X G -минимальной? *Замечание.* Группа $\text{Aut}(X)$ имеет порядок $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$ и является произведением $\text{SU}_3(\mathbf{F}_9)$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Она не может быть реализована как группа автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени 2 над полем характеристики 0 [33, 6.6].
9. Приведите примеры G -минимальных поверхностей дель Пеццо X степени 1, 2 и 4 с $\rho(X)^G = 2$.
10. Пусть X – рациональная поверхность над $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Предположим, что X относительно минимальна. Докажите, что имеет место одно из следующих:
- Имеется структура расслоения на коники $f: X \rightarrow B$. Если морфизм f не является гладким, то все вырожденные слои определены над \mathbb{R} и $B \simeq \mathbb{P}^1$.
 - X – поверхность дель Пеццо степени 1, 2, 8 или 9 с $\rho(X) = 1$. В случае $K_X^2 = 9$ имеем $X \simeq \mathbb{P}^2$. В случае $K_X^2 = 8$ X – квадрака в \mathbb{P}^3 , содержащая \mathbb{R} -точку.

9. Рациональность и \mathbb{k} -точки

9.1. Теорема. Пусть X – нормальное проективное многообразие над совершенным полем \mathbb{k} , и пусть $G := \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$. Если X имеет \mathbb{k} -точку P , то $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\bar{X})^G$.

Доказательство. Ясно, что $\text{Pic}(X) \subset \text{Pic}(\bar{X})^G$. Рассмотрим некоторый класс $\mathcal{C} \in \text{Pic}(\bar{X})^G$. Существует некоторое конечное расширение Галуа \mathbb{k}'/\mathbb{k} , для которого на $X' := X \otimes \mathbb{k}'$ класс \mathcal{C} реализуется как класс некоторого локально главного дивизора Вейля D' на X' . Ясно, что мы можем выбрать D' так, что его носитель не содержит P . Пусть $\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{k}'/\mathbb{k})$. Для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$ класс дивизора ${}^\gamma D'$ совпадает с \mathcal{C} . Следовательно, существует рациональная функция $\phi_\gamma \in \mathbb{k}'(X')$ такая, что ${}^\gamma D' - D' = \text{div}(\phi_\gamma)$. Таким образом, все функции ϕ_γ регуляры и обратимы в точке P . Заменяя ϕ_γ на $\phi_\gamma/\phi_\gamma(P)$, добьемся того, что $\phi_\gamma(P) = 1$. Поскольку

$$\gamma_1 \gamma_2 D' - D' = \gamma_1 (\gamma_2 D' - D') + \gamma_1 D' - D',$$

то

$$\text{div}(\phi_{\gamma_1 \gamma_2}) = \gamma_1 \text{div}(\phi_{\gamma_2}) + \text{div}(\phi_{\gamma_1}).$$

Отсюда

$$\phi_{\gamma_1 \gamma_2} = \gamma_1(\phi_{\gamma_2}) \cdot \phi_{\gamma_1} \quad \text{для всех } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

Таким образом, набор $\{\phi_\gamma\}$ определяет коцикл группы когомологий Галуа $H^1(\Gamma, \mathbb{k}'(X')^*)$. По теореме Гильберта 90 (см. теорему 13.2.1) имеем $H^1(\Gamma, \mathbb{k}'(X')^*) = 0$ и поэтому коцикл $\{\phi_\gamma\}$ является кограницей, т.е. существует функция $\psi \in \mathbb{k}'(X')^*$ такая, что $\phi_\gamma = {}^\gamma \psi / \psi$. Иначе говоря, ${}^\gamma D' - D' = \text{div}({}^\gamma \psi / \psi)$. Полагая $D = D' - \text{div}(\psi)$, получим, что ${}^\gamma D = D$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, дивизор D определен над \mathbb{k} .

Заметим, что в арифметическом случае наличие \mathbb{k} -точки – бирациональный инвариант:

9.1.1. Лемма Нишимуры. Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ – рациональное отображение многообразий над полем \mathbb{k} , где многообразие X неособо, а Y – проективно. Если X имеет \mathbb{k} -точку, то и Y имеет \mathbb{k} -точку.

Доказательство. Гиперплоскими сечениями сводим проблему к случаю, когда X – неособая кривая. В этом случае f – морфизм.

9.2. Теорема. Пусть X – рациональная поверхность с $K_X^2 \geq 5$ над полем \mathbb{k} . Предположим, что она имеет \mathbb{k} -точку. Тогда X является \mathbb{k} -рациональной.

В геометрическом случае аналог этого утверждения верен лишь для абелевых групп (см. упражнение 7). Циклическая же группа, действующая на рациональной поверхности, (над алгебраически замкнутым полем) обязательно имеет неподвижную точку по голоморфной формуле Лефшеца [28, гл. 3, § 4].

9.2.1. Замечание. Позднее (в теореме 10.1) мы докажем и обратное утверждение.

9.3. Теорема. Пусть X – рациональная G -поверхность с геометрическим действием G (поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто). Предположим, что $K_X^2 \geq 5$ и X имеет G -инвариантную точку. Тогда пара (X, G) G -бирационально эквивалентна паре (X', G) , где выполнено одно из следующих:

- (i) $X' \simeq \mathbb{P}^2$ (возможно, что $X'^G = \emptyset$);
- (ii) $X' \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\rho(X')^G = 1$, G неабелева и $X'^G = \emptyset$.

Мы докажем 9.2. Доказательство 9.3 аналогично и оставляется читателю.

Доказательство теоремы 9.2. Предположим, что поверхность X не является \mathbb{k} -рациональной. Мы можем считать, что она \mathbb{k} -минимальна.

Рассмотрим сначала случай, когда X имеет структуру расслоения на коники. Тогда по теореме 8.4 имеем $K_X^2 \neq 5, 6, 7$. Следовательно, $K_X^2 = 8$ и $\bar{X} \simeq \mathbb{F}_n$. Пусть $n > 0$. Если \mathbb{k} -точка P лежит на отрицательном сечении Σ , то слой F , проходящий через P , содержит другую \mathbb{k} -точку $P' \neq P$. Таким образом, всегда есть \mathbb{k} -точка Q , которая не лежит на Σ . Делая элементарные преобразования в Q , уменьшаем n и добиваемся того, что $n = 0$. В этом случае X изоморфна квадрике в \mathbb{P}^3 и проекция из \mathbb{k} -точки является бирациональным отображением.

Таким образом, мы можем считать, что X – поверхность дель Пеццо с $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Пусть $d = K_X^2$. Если $d = 9$, то X – схема Севери–Брауэра. По теореме 9.1 группа $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\bar{X})^G$ порождается классом $(1/3)K_X$. Пусть $H = (-1/3)K_X$ – обильная образующая группы $\text{Pic}(X)$. Тогда линейная система $|H|$ задает изоморфизм с \mathbb{P}^2 . В случае $d = 8$ аналогично доказывается, что X является квадрикой в \mathbb{P}^3 . Стереографическая проекция из \mathbb{k} -точки задает эквивариантную бирациональную перестройку в \mathbb{P}^2 .

Поэтому далее мы можем считать, что $d \leq 6$, $\iota(X) = 1$ и $\text{Pic}(X) = K_X \cdot \mathbb{Z}$. Мы утверждаем, что точка P не лежит на прямых поверхности \bar{X} . Действительно, пусть $E_1, \dots, E_k \subset \bar{X}$ – прямые, проходящие через P . Дивизор $\sum E_i$ определен над \mathbb{k} , т.е. класс $\sum E_i$ принадлежит $\text{Pic}(X)$. Поэтому $\sum E_i \sim -aK_X$, $a \in \mathbb{Z}$. Но тогда

$$k = -K_X \cdot \sum E_i = ad \geq 5.$$

С другой стороны, на поверхности дель Пеццо степени ≥ 4 через каждую точку проходит не более двух прямых. Противоречие. Таким образом, через P не проходят прямые. Тогда при раздутии $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ точки P мы получим поверхность дель Пеццо \tilde{X} степени $d - 1$ (см. предложение 6.11.1). Пусть $E_1, \dots, E_m \subset \tilde{X} \otimes \bar{\mathbb{k}}$ – прямые, пересекающие прямую $E = \sigma^{-1}(P)$. Тогда $m = 5$ при $d = 5$ и $m = 3$ при $d = 6$. Поскольку \tilde{X} не содержит “треугольников”, то прямые E_1, \dots, E_m не пересекаются между собой. Стягивание $\varphi: \tilde{X} \rightarrow Y$ кривых E_1, \dots, E_m является \mathbb{k} -морфизмом и Y – поверхность дель Пеццо степени $d - 1 + m$. По лемме Нишимуры Y имеет \mathbb{k} -точку и поэтому \mathbb{k} -рациональна.

Для любых рациональных поверхностей, согласно А. Вейлю (см. ссылки в [13, Добавление С]), имеем следующий общий факт [6, гл. IV, § 5]:

9.4. Теорема. Пусть X – рациональная поверхность над конечным полем $\mathbb{k} = \mathbb{F}_q$. Тогда число \mathbb{F}_q -точек вычисляется по формуле

$$\#X(\mathbb{F}_q) = q^2 + q \text{tr } \Phi^*|_{\text{Pic}(\bar{X})} + 1,$$

где Φ автоморфизм Фробениуса, а $\text{tr } \Phi^*|_{\text{Pic}(\bar{X})}$ – след индуцированного действия Φ на $\text{Pic}(\bar{X})$. В частности, $X(\mathbb{F}_q) \neq \emptyset$.

Таким образом, до конца этого параграфа мы считаем, что наше поле \mathbb{k} бесконечно.

9.5. Теорема (Ф. Энриквес). Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ – поверхность дель Пеццо степени 5 над любым полем \mathbb{k} . Тогда она \mathbb{k} -рациональна. В частности, X имеет \mathbb{k} -точку.

9.5.1. Лемма. Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ – поверхность дель Пеццо степени 5. Пусть $\sigma: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^5$ – раздутие X , E – исключительный дивизор и $H^* = \sigma^*H$ – полный прообраз класса гиперплоскости в \mathbb{P}^5 . Тогда линейная система $|2H^* - E|$ задает морфизм $\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^4$, который является \mathbb{P}^1 -расслоением. Слоями этого морфизма являются 2-секунции поверхности X , а дивизор E является его 2-сечением.

9.5.2. Следствие. Отображение φ индуцирует естественное бирациональное отображение $\nu: S^2X \rightarrow \mathbb{P}^4$, где S^2X – симметрический квадрат X .

Доказательство. Поверхность $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ (как схема) является пересечением 5 линейно независимых квадрик (см. предложение 6.13), поэтому линейная система, порожденная этими квадриками задает рациональное отображение $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$. Разрешение точек неопределенности этого отображения – это раздутие $X \subset \mathbb{P}^5$. Таким образом, линейная система $|2H^* - E|$ задает морфизм $\varphi: \tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^4$.

Пусть $\ell \subset \mathbb{P}^5$ – 2-секущая поверхности X , а $\tilde{\ell}$ – собственный прообраз ℓ на $\tilde{\mathbb{P}}$. Тогда $(2H^* - E) \cdot \tilde{\ell} = 0$. Следовательно, $\tilde{\ell}$ – слой морфизма φ .

Доказательство теоремы 9.5 (мы следуем [34]). Мы можем считать, что X не имеет \mathbb{k} -точек. По следствию 9.5.2 множество \mathbb{k} -точек плотно в S^2X . Возьмем общую \mathbb{k} -точку $(x, x') \in S^2X$. Она определяет \mathbb{k} -точку $O \in X$ степени 2. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие O . Ясно, что $K_Y^2 = 3$ и $\rho(Y) = 2$. По предложению 6.11.1 пары точек на \bar{X} , раздутие в которых не дает поверхность дель Пеццо, образуют собственное замкнутое по Зарисскому подмножество в $S^2\bar{X}$. Таким образом, мы можем считать, что Y – поверхность дель Пеццо. Но тогда Y – кубическая поверхность, содержащая пару сопряженных прямых $\sigma^{-1}(O)$. Хорошо известно, что тогда X \mathbb{k} -рациональна.

9.6. Теорема. Пусть X – рациональная поверхность над полем \mathbb{k} типа c_1 . Тогда X имеет \mathbb{k} -точку.

Мы постараемся дать замкнутое в себе доказательство этого факта (см. также [18, § IV.6]).

Доказательство. По лемме Нишимуры мы можем считать, что поверхность X минимальна. Пусть сначала X имеет структуру расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$. Тогда B – кривая арифметического рода 0. Следовательно, B изоморфна конике в \mathbb{P}^2 . Поскольку \mathbb{k} – поле типа c_1 , то B имеет \mathbb{k} -точку b . Если слой $X_b = \pi^{-1}(b)$ – вырожденная коника, то точка пересечения ее компонент определена над \mathbb{k} . Если же слой X_b невырожден, то снова он имеет \mathbb{k} -точку поскольку \mathbb{k} – поле типа c_1 . Таким образом, мы можем считать, что X – поверхность дель Педро. Рассмотрим случаи согласно значениям степени K_X^2 .

$K_X^2 = 1$. В этом случае базисная точка пучка $|-K_X|$ определена над \mathbb{k} при любом выборе поля \mathbb{k} .

$K_X^2 = 2$. По теореме 6.9 поверхность X вкладывается во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ как гиперповерхность степени 4. Это вложение – антиканоническое, поэтому оно определено над \mathbb{k} . Уравнение $X \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ может быть записано в виде

$$y^2 + l(x_1, x_2, x_3)y + \phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где x_i и y – координаты в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ степеней 1 и 2, соответственно, а l и ϕ – квазиоднородные многочлены степеней 2 и 4. Рассмотрим два случая:

- Существует однородная форма $\psi(z_1, z_2)$ степени 2, не представляющая 0. В этом случае многочлен

$$\psi(z_1, z_2)^2 + l(x_1, x_2, x_3)\psi(z_1, z_2) + \phi(x_1, x_2, x_3)$$

однороден и имеет степень 4. По определению полей типа c_1 он представляет 0. Следовательно, и $y^2 + ly + \phi$ представляет 0.

- Любая однородная форма степени 2 от двух переменных представляет 0. Придадим переменным x_i произвольные значения $x_i = a_i \in \mathbb{k}$. Пусть $b_1 := l(a_1, a_2, a_3)$ и $b_2 := \phi(a_1, a_2, a_3)$. Если $b_2 = 0$, то точка $(0, a_1, a_2, a_2)$ лежит на X . В противном случае форма $y^2 + b_1yz + b_2z^2$ представляет 0, т.е. $y_0^2 + b_1y_0z_0 + b_2z_0^2$ для $(y_0, b_0) \neq (0, 0)$. Тогда точка $(y_0/z_0, a_1, a_2, a_2)$ лежит на X .

См. также упражнение 4 на с. 74.

$K_X^2 = 3$. В этом случае $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность и существование \mathbb{k} -точки следует из определения свойства c_1 .

$K_X^2 = 4$. В этом случае $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – пересечение двух квадрик. Пусть $q_1(x_1, \dots, x_5) = 0$ и $q_2(x_1, \dots, x_5) = 0$ – уравнения этих квадрик. Существует однородная форма $f(y_1, \dots, y_d)$ степени $d > 5$, не представляющая нуль (см. упражнение 2, с. 74). Рассмотрим новую форму $f(q_1, q_2, q_1, q_2, \dots)$, где каждое вхождение q_1 и q_2 зависит от новой группы неизвестных $x_{1,i}, \dots, x_{5,i}$ (если d нечетно, то вместо y_d мы подставляем 0). Эта форма имеет степень $2d$ и зависит от $5\lfloor d/2 \rfloor$ переменных. При $d \geq 6$ мы имеем $5\lfloor d/2 \rfloor > 2d$. Поэтому $f(x_{j,i})$ представляет 0.

$K_X^2 = 5$. Следует из теоремы 9.5.

$K_X^2 = 6$. Предположим, что X не имеет \mathbb{k} -точек. Поверхность \bar{X} содержит шесть прямых L_1, \dots, L_6 , которые образуют шестиугольник (см. рис. 7).

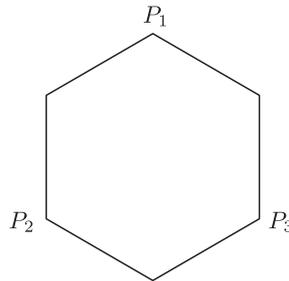


Рис. 7.

Группа автоморфизмов этой конфигурации изоморфна группе диэдра \mathfrak{D}_6 порядка 12. Таким образом, имеется естественный гомоморфизм $\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k}) \rightarrow \mathfrak{D}_6$. Отсюда видно, что существует подгруппа $\Gamma \subset \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ индекса 2, которая сохраняет тройку вершин P_1, P_2, P_3 нашего шестиугольника.

Рассмотрим квадратичное расширение \mathbb{k}'/\mathbb{k} , соответствующее подгруппе Γ . Мы утверждаем, что X имеет \mathbb{k}' -точку R не лежащую на прямых. Пусть $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X \otimes \mathbb{k}'$ – раздутие P_1, P_2, P_3 , и пусть E_1, E_2 ,

E_3 – соответствующие исключительные дивизоры. Так как тройка P_1, P_2, P_3 высекается ее линейной оболочкой, то базисное множество линейной системы гиперплоских сечений X , проходящих через P_1, P_2, P_3 , совпадает с P_1, P_2, P_3 (как схема). Поэтому линейная система

$$|-K_{\widehat{X}}| = |\sigma^* \mathcal{O}_X(1) - E_1 - E_2 - E_3|$$

не имеет базисных точек и задает морфизм $\phi = \Phi_{|-K_{\widehat{X}}|} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}^3$. Так как $K_{\widehat{X}}^2 = 3$, то образ $Y := \phi(\widehat{X})$ – кубика над \mathbb{k}' и ϕ бирационален. Пусть $\widetilde{L}_i \subset \widehat{X}$ – собственные прообразы прямых L_i (сторон шестиугольника). Так как $K_{\widehat{X}} \cdot \widetilde{L}_i = 0$, то $\phi(\widetilde{L}_i)$ – точка, лежащая в особом множестве $\text{Sing}(Y)$ (морфизм $\Phi_{|-K_{\widehat{X}}|}$ не стягивает (-1) -кривых). Так как \mathbb{k}' – поле типа c_1 , то Y имеет \mathbb{k}' -точку Q . Если она особа, то поверхность Y является \mathbb{k}' -рациональной и множество \mathbb{k}' -точек плотно. Если же точка $Q \in Y$ неособа, то $R := \phi^{-1}(Q)$ – \mathbb{k}' -точка, лежащая вне прямых $L_i \otimes \mathbb{k}'$.

Согласно нашему предположению точка R' , сопряженная с R над \mathbb{k} , отлична от R . Как и выше, рассмотрим раздутие $\varphi: \widehat{X} \rightarrow X$ пары R, R' . Если \widehat{X} является поверхностью дель Пеццо, то \widehat{X} и X имеют \mathbb{k} -точки, согласно случаю $K_{\widehat{X}}^2 = 4$, рассмотренному выше. Предположим, что существует \mathbb{k} -неприводимая кривая $\widehat{C} \subset \widehat{X}$, такая, что $K_{\widehat{X}} \cdot \widehat{C} \geq 0$. По теореме Римана–Роха $\dim |-K_{\widehat{X}}| \geq 3$, и поэтому в $|-K_{\widehat{X}}|$ имеется линейная подсистема $\widehat{\mathcal{S}} \subset |-K_{\widehat{X}}|$ размерности ≥ 2 , у которой \widehat{C} является неподвижной компонентой. Запишем $\widehat{\mathcal{S}} = \widehat{F} + \widehat{\mathcal{M}}$, где \widehat{F} – неподвижная часть, а $\widehat{\mathcal{M}}$ – линейная система без неподвижных компонент. Таким образом, $\widehat{C} \leq \widehat{F}$. Положим $C := \sigma_* \widehat{C}$, $F := \sigma_* \widehat{F}$ и $\mathcal{M} := \sigma_* \widehat{\mathcal{M}}$. Тогда $F + \mathcal{M} \subset |-K_X|$ и $C \leq F$. Так как кривая \widehat{C} отлична от исключительного дивизора, то $C \neq 0$. Возьмем общий элемент $M \in \mathcal{M}$, определенный над \mathbb{k} . Согласно предложению 6.1.2 (iii) все геометрические компоненты F и M – рациональные кривые. Поэтому, если кривая C или M геометрически неприводима, то мы имеем \mathbb{k} -точку P на C или M . Так как $-K_X \cdot (F + M) = 6$ и среди геометрических компонент C и M нет прямых, мы получаем противоречие.

$K_X^2 = 7$. Оставляется в качестве упражнения (см. задачу 3).

$K_X^2 = 8$. В этом случае $\overline{X} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$. По теореме Римана–Роха для векторных расслоений (см., например, [35, 15.2.2]) имеем $\chi(X, \mathcal{T}_X) \geq 6$. По двойственности Серра

$$H^2(X, \mathcal{T}_X) = H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_X)^\vee,$$

Для рациональной поверхности $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \omega_X)$ обращается в нуль (см. предложение 3.1). Поэтому $H^0(X, \mathcal{T}_X) \neq 0$, т.е. на X имеется ненулевое векторное поле $v \in H^0(X, \mathcal{T}_X)$. Выберем его достаточно общим. Тогда v обращается в нуль на \overline{X} в $c_2(\mathcal{T}_X) = 4$ точках $P_1, \dots, P_4 \in \overline{X}$ и эта четверка определена над \mathbb{k} . Мы можем считать, что точки P_i различны и никакие три из них не лежат на одной образующей $\overline{X} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$. Рассмотрим раздутие $\varphi: \widehat{X} \rightarrow X$ этой четверки. Как и в случае $K_X^2 = 6$ четверка P_1, \dots, P_4 как схема высекается антиканоническими дивизорами. Следовательно, линейная система $|-K_{\widehat{X}}|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $\psi = \Phi_{|-K_{\widehat{X}}|} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}^4$. Далее полностью аналогично случаю $K_X^2 = 6$.

$K_X^2 = 9$. В этом случае $\overline{X} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$. Достаточно доказать, что класс дивизоров $(1/3)K_X$ определен над \mathbb{k} . Как и выше, по теореме Римана–Роха имеем $\dim H^0(X, \mathcal{T}_X) \geq \chi(X, \mathcal{T}_X) > 0$, т.е. на X имеется ненулевое векторное поле. Общее векторное поле обращается в нуль в $c_2(\mathcal{T}_X) = 3$ точках. Таким образом, на X имеется \mathbb{k} -точка O степени $t \leq 3$. Мы можем считать, что $t = 3$ и геометрические компоненты \overline{O} находятся в общем положении. Тогда раздутие $O \in X$ дает нам поверхность дель Пеццо Y степени 6.

9.7. Унирациональность.

9.7.1. Теорема [6]. Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность над полем \mathbb{k} . Если X содержит \mathbb{k} -точку, то X \mathbb{k} -унирациональна.

Доказательство НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $P \in X$ – \mathbb{k} -точка. Предположим, что \overline{X} не содержит прямых, проходящих через P . Тогда пересечение $C_P := X \cap T_{P,X}$ поверхности X с касательным пространством в точке P – геометрически неприводимая кривая арифметического рода 1, особая в P . Проекция из P определяет бирациональное отображение $C_P \dashrightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(T_{P,X})$. Следовательно, C_P – \mathbb{k} -рациональная кривая.

Предположим теперь, что имеется две точки $P, Q \in X$ такие, что соответствующие кривые C_P, C_Q геометрически неприводимы. Определим отображение $\psi: C_P \times C_Q$

$$\psi: (u, v) \mapsto \text{третья точка пересечения прямой } \ell_{u,v} \text{ и } X.$$

Если прямая $\ell_{u,v}$ не содержится в X , то точка $\psi(u, v)$ корректно определена. За деталями мы отсылаем к работе [36].

9.7.2. Замечание. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени d над полем \mathbb{k} , содержащая \mathbb{k} -точку. Несложно показать, что при $d \geq 4$ X является \mathbb{k} -унирациональной (см. упражнение 16). То же самое верно (но доказывается сложнее) при $d = 2$ [6], [7]. Унирациональность поверхностей дель Пеццо степени 1 – открытый вопрос.

Задачи

1. Пусть X – гиперповерхность в \mathbb{P}^{p-2} над \mathbb{F}_p определенная уравнением $x_0^{p-1} + \dots + x_{p-2}^{p-1} = 0$. Докажите, что X неособа и не имеет \mathbb{F}_p -точек.
2. Двумерная невырожденная квадрика $X \subset \mathbb{P}^3$ имеет \mathbb{k} -точку. Следует ли отсюда, что $X \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$?
3. Докажите, что поверхность дель Пеццо степени 7 \mathbb{k} -рациональна для любого поля \mathbb{k} .
4. Докажите теорему 9.3.
5. Приведите примеры поверхностей дель Пеццо степени 2, 4, 8 над полем \mathbb{R} , не имеющих \mathbb{R} -точек.
6. Докажите, что квадрика $x_0^2 + \dots + x_3^2 = 0$ в \mathbb{P}^3 над полем \mathbb{R} не бирационально эквивалентна многообразию Севери–Брауэра.
7. Докажите геометрический аналог леммы Нишимуры: пусть поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто, пусть G – конечная абелева группа и пусть $f: X \dashrightarrow Y$ – эквивариантное относительно G рациональное отображение. Предположим, что X неособо, а Y проективно. Если X имеет G -точку, то и Y имеет G -точку.
8. Сколько неподвижных точек может иметь группа порядка 2 (порядка 3), действующая на рациональной поверхности? *Указание.* Примените голоморфную формулу Лефшеца для числа неподвижных точек.
9. Докажите теорему 9.3. Какие ограничения должны быть наложены на группу G в случае (ii)?
10. Пусть T – двумерный алгебраический тор (аффинная групповая схема над полем \mathbb{k} такая, что $T \otimes \bar{\mathbb{k}} \simeq \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{k}}} \times \mathbb{G}_{m, \bar{\mathbb{k}}}$). Докажите, что T является \mathbb{k} -рациональным. *Указание.* Рассмотрите эквивариантную компактификацию $V \supset T$ и примените к ней программу минимальных моделей. Теория алгебраических торов (произвольной размерности) над незамкнутыми полями хорошо изложена в книге [37].
11. Наоборот, пусть X – эквивариантная компактификация главного однородного пространства U двумерного алгебраического тора T . Докажите, что X бирационально изоморфно поверхности дель Пеццо степени 6, 8 или 9.
12. Рассмотрим алгебраический тор T , заданный уравнением $x_1 x_2 x_3 = 1$ в $\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^3$ и действие на нем группы $G = \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, где симметрическая группа \mathfrak{S}_3 действует на T перестановками координат, группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует отражением $x \rightarrow 1/x$ в торе T . Докажите, что действие (T, G) бирационально эквивалентно действию $(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1, G)$ без неподвижных точек (такому как в теореме 9.3 (ii)). На самом деле, (T, G) не сопряжено линейному действию G на \mathbb{P}^2 [38].
13. Пусть X – кубическая поверхность над полем \mathbb{k} типа c_1 с $\rho(X) \geq 4$. Докажите, что X \mathbb{k} -рациональна. Верно ли то же самое для $\rho(X) = 3$?
14. Может ли кубическая поверхность над \mathbb{Q} содержать ровно одну рациональную точку? *Указание.* Рассмотрите возможности для касательного гиперплоского сечения T_O в этой точке. Для общей прямой $L \subset \mathbb{P}^3$, проходящей через O и определенной над \mathbb{Q} , геометрические точки пересечения $P, Q \in \bar{X} \cap L = \{O, P, Q\}$ сопряжены над квадратичным расширением \mathbb{K}/\mathbb{Q} . Общая плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$, проходящая через $L \otimes \mathbb{K}$ высекает на T_P дивизор $2P + P'$, а сопряженная с Π – дивизор $2Q + Q'$. Точки P' и Q' также сопряжены.
15. Докажите, что все рациональные точки на кубике Ферма над полем \mathbb{F}_4 лежат на прямых. Для каких полей \mathbb{F}_{2^n} верно то же самое?
16. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени ≥ 4 над полем \mathbb{k} , содержащая \mathbb{k} -точку. Докажите, что X является \mathbb{k} -унирациональной. *Указание.* Сведите утверждение к теоремам 9.7.1, 9.5 и 9.2.
17. Докажите, что поверхность X над полем \mathbb{k} , имеющая структуру расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$, унирациональна тогда и только тогда, когда существует геометрически неприводимая \mathbb{k} -рациональная кривая $C \subset X$, которая сюръективно отображается на базу B .

10. Особенности линейных систем и бирациональная жесткость

В этом параграфе будет развита техника, позволяющая изучать бирациональные отображения между G -поверхностями. Техника является классической, восходящей к М. Нётеру и Б. Сегре. Здесь мы воспроизведем ее в современном варианте, который называется *программой Саркисова*. В двумерном случае этот вариант не дает больших преимуществ перед классическим подходом, однако он допускает многомерные обобщения [39]. В основном мы следуем [11]. Метод, излагаемый в этом и следующем параграфах, является наиболее гибким и универсальным: в двумерном случае он дает исчерпывающий ответ. Имеются другие бирациональные инварианты (например, $H^1(G, \text{Pic}(X))$), см. [6, гл. IV, § 7]), но они применимы лишь к отдельным классам рациональных G -поверхностей.

В этом и следующем параграфе будет доказана

10.1. Теорема. Пусть X – относительно минимальная рациональная G -поверхность. Если X является G -бирационально тривиальной, то $K_X^2 \geq 5$.

Из теоремы 9.2 получаем критерий рациональности минимальных поверхностей над незамкнутыми полями.

10.2. Теорема. Пусть X – относительно минимальная рациональная поверхность над полем \mathbb{k} . Предположим, что X имеет \mathbb{k} -точку. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) поверхность X является \mathbb{k} -рациональной;
- (ii) X имеет \mathbb{k} -точку и $K_X^2 \geq 5$.

В геометрическом случае наличие G -точки не следует из бирациональной тривиальности: даже группа, действующая на \mathbb{P}^2 не обязана иметь инвариантную точку.

10.3. Для удобства и единообразия введем понятие *категории Саркисова* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(2, G)$. Ее объектами являются относительно минимальные рациональные G -поверхности X/B . Таким образом, каждый объект \mathcal{S} – это или поверхность дель Пеццо X с $\rho(X)^G = 1$ (случай $B = \text{Spec } \mathbb{k}$) или расслоение на коники над кривой B с $\rho(X)^G = 2$. Морфизмы в этой категории – произвольные бирациональные отображения $X \dashrightarrow X^\sharp$ тотальных пространств, вообще говоря, не совместимые со структурами расслоений X/B и X^\sharp/B^\sharp . Морфизм $\chi: X/B \dashrightarrow X^\sharp/B^\sharp$ в категории \mathcal{S} называется *послойным* (или квадратом), если он достраивается до G -эквивариантного коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^{\chi} & X^\sharp \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi^\sharp \\ B & \dashrightarrow & B^\sharp \end{array}$$

причем, χ индуцирует бирациональное отображение на общем слое X_η . Отметим, что поскольку $\dim B \leq 1$, то отображение $B \dashrightarrow B^\sharp$ должно быть изоморфизмом.

Мы будем работать с линейными комбинациями дивизоров и линейных систем с рациональными коэффициентами. Допуская вольность речи, мы будем называть такие объекты *дивизорами*. Типичный пример: $K_X + c\mathcal{H}$, где \mathcal{H} – линейная система, а c – рациональное число.

10.4. Обозначения. На время предположим, что наше основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто. Пусть X – неособая поверхность, пусть \mathcal{H} – линейная система на X без неподвижных компонент и $c \in \mathbb{Q}_{>0}$. Пусть $f: \tilde{X} \rightarrow X$ – проективный бирациональный морфизм, и пусть $\tilde{\mathcal{H}}$ – собственный прообраз \mathcal{H} на \tilde{X} . Выберем представителя канонического класса $K_X = \text{div}(\omega)$, где ω – рациональная дифференциальная форма старшей степени, а представителя класса $K_{\tilde{X}}$ выберем следующим образом: $K_{\tilde{X}} = \text{div}(f^*\omega)$. Тогда $K_X = f_*K_{\tilde{X}}$ и можно записать

$$K_{\tilde{X}} + c\tilde{\mathcal{H}} = f^*(K_X + c\mathcal{H}) + \sum_E a(E, X, c\mathcal{H})E, \quad (10.4.1)$$

где суммирование ведется по простым f -исключительным дивизорам E и $a(E, X, c\mathcal{H})$ – некоторые рациональные числа. Несложно показать, эти числа однозначно определены (не зависят от выбора представителей $K_{\tilde{X}}$ и K_X в классах линейной эквивалентности, если только выполнено соотношение (10.4.1)). Числа $a(E, X, c\mathcal{H})$ называются *дискрепантностями* пары $(X, c\mathcal{H})$.

Заметим, что многие определения и факты этого параграфа могут быть даны в произвольной размерности. В этом случае мы должны отказаться от условия неособости X и предполагать только, что K_X – дивизор \mathbb{Q} -Картье и \mathcal{H} – линейная система дивизоров Вейля, являющихся \mathbb{Q} -Картье.

10.4.2. Замечание. Формула (10.4.1) может быть получена следующим образом. Сравнивая ω и $f^*\omega$ в локальных координатах получим, что

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \sum_E a(E)E, \quad a(E) \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Ясно также, что

$$\tilde{\mathcal{H}} = f^*\mathcal{H} - \sum_E m(E)E, \quad m(E) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Комбинируя эти два равенства получим (10.4.1) с

$$a(E, X, c\mathcal{H}) = a(E) - cm(E).$$

Отсюда, в частности, получается, что дискрепантности монотонны: $a(E, X, c\mathcal{H}) \leq a(E, X, c'\mathcal{H})$ если $c \geq c'$.

10.5. Определение. Говорят, что пара $(X, c\mathcal{H})$ имеет *канонические особенности*, если при любом выборе f мы имеем $a(E, X, c\mathcal{H}) \geq 0$ для всех E .

10.5.1. Лемма. Пусть $g: X' \rightarrow X$ – проективный бирациональный морфизм неособых поверхностей, пусть \mathcal{H}' – линейная система на X' без неподвижных компонент и пусть $\mathcal{H} := g_*\mathcal{H}'$. Пусть E – любой исключительный дивизор над X' .

- (i) Если дивизор $-(K_{X'} + c\mathcal{H}')$ g -численно эффективен, то $a(E, X, c\mathcal{H}) \geq a(E, X', c\mathcal{H}')$.
- (ii) Если дивизор $-(K_{X'} + c\mathcal{H}')$ g -обилен, то $a(E, X, c\mathcal{H}) > a(E, X', c\mathcal{H}')$.
- (iii) Если дивизор $K_{X'} + c\mathcal{H}'$ g -численно тривиален, то $a(E, X, c\mathcal{H}) = a(E, X', c\mathcal{H}')$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативный треугольник бирациональных морфизмов

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{h} & \tilde{X} \\ g \downarrow & \swarrow f & \\ X & & \end{array}$$

где h разрешение базисного множества \mathcal{H}' . Запишем

$$K_{X'} + c\mathcal{H}' = g^*(K_X + c\mathcal{H}) + \sum_F a(F, X, c\mathcal{H})F,$$

где суммирование берется по всем g -исключительным простым дивизорам $F \subset X'$. Здесь $a(F, X, c\mathcal{H}) \geq 0$ (соответственно, $a(F, X, c\mathcal{H}) > 0$, $a(F, X, c\mathcal{H}) = 0$) в случае (i) (соответственно, (ii), (iii)), см., например, [31, следствие 7.6]. Аналогично

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathcal{H}} = h^*(K_{X'} + c\mathcal{H}') + \sum_E a(E, X', c\mathcal{H}')E,$$

где сумма берется по всем h -исключительным простым дивизорам $F \subset X'$ $E \subset \tilde{X}$. Для каждого F мы можем записать

$$h^*F = \tilde{F} + \sum_E m(F, E)E, \quad m(F, E) \geq 0.$$

Отсюда

$$K_{\tilde{X}} + c\tilde{\mathcal{H}} = f^*(K_X + c\mathcal{H}) + \sum_{\tilde{F}} a(F, X, c\mathcal{H})\tilde{F} + \sum_E \left(\sum_F m(F, E)a(F, X, c\mathcal{H}) + a(E, X', c\mathcal{H}) \right) E.$$

Таким образом, для f -исключительного дивизора $E \subset \tilde{X}$ имеем

$$a(E, X, c\mathcal{H}) = m(F, E)a(F, X, c\mathcal{H}) + a(E, X', c\mathcal{H}).$$

Отсюда все следует.

10.5.2. Следствие. Если в обозначениях выше имеем.

- (i) Если дивизор $-(K_{X'} + c\mathcal{H}')$ g -численно эффективен и пара $(X', c\mathcal{H}')$ имеет канонические особенности, то и пара $(X, c\mathcal{H})$ имеет канонические особенности.
- (ii) Если дивизор $-(K_{X'} + c\mathcal{H}')$ g -обилен и пара $(X', c\mathcal{H}')$ имеет терминальные особенности, то и пара $(X, c\mathcal{H})$ имеет терминальные особенности.
- (iii) Если дивизор $K_{X'} + c\mathcal{H}'$ g -численно тривиален, то пара $(X', c\mathcal{H}')$ имеет канонические особенности тогда и только тогда, когда пара $(X, c\mathcal{H})$ имеет канонические особенности.

10.5.3. Лемма. Пусть X – неособая поверхность, пусть \mathcal{H} – линейная система на X без неподвижных компонент и $c \in \mathbb{Q}_{>0}$. Пара $(X, c\mathcal{H})$ имеет канонические особенности в точке P тогда и только тогда, когда $c \operatorname{mult}_P \mathcal{H} \leq 1$.

Доказательство. Пусть f – раздутие точки P , и пусть E_1 – исключительный дивизор. Тогда $a_1 = 1 - c \operatorname{mult}_P \mathcal{H}$. Для любой точки $P' \in E_1$ имеем $\operatorname{mult}_{P'} \mathcal{H}' \leq \operatorname{mult}_P \mathcal{H}$. Далее используется тот факт, что базисное множество \mathcal{H} разрешается конечным числом раздутий точек.

10.6. Определение. Каноническим порогом пары (X, \mathcal{H}) называется число

$$\operatorname{ct}(X, \mathcal{H}) = \sup\{t \mid (X, t\mathcal{H}) \text{ канонична}\}.$$

Ясно, что супремум достигается и $\operatorname{ct}(X, \mathcal{H})$ – рациональное число. Для поверхностей оно равно максимуму $1/\operatorname{mult}_P \mathcal{H}$ по всем точкам $P \in X$ по лемме 10.5.3.

10.7. Определение. Исключительный дивизор E над X называется *крепантным* для пары $(X, c\mathcal{H})$, если $a(E, X, c\mathcal{H}) = 0$. Обозначим через $e(X, c\mathcal{H})$ число крепантных дивизоров. Согласно лемме 10.5.1 это число не зависит от выбора разрешения, если пара $(X, c\mathcal{H})$ канонична. Если же пара $(X, c\mathcal{H})$ не является канонической, то мы положим $e(X, c\mathcal{H}) = \infty$. Ясно, что $e(X, c\mathcal{H}) = 0$ тогда и только тогда, когда пара $(X, c\mathcal{H})$ терминальна.

10.7.1. Замечание. В обозначениях леммы 10.5.1 предположим, что дивизор $K_{X'} + c\mathcal{H}'$ g -численно тривиален. Пусть N – число простых g -исключительных дивизоров. Тогда из леммы 10.5.1 имеем

$$e(X', c\mathcal{H}') = e(X, c\mathcal{H}) + N \geq e(X, c\mathcal{H}).$$

10.8. Обозначения. Теперь мы вернемся к терминологии G -поверхностей. Пусть $\pi : X \rightarrow B$ и $\pi^\sharp : X^\sharp \rightarrow B^\sharp$ – относительно минимальные рациональные G -поверхности, и пусть

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{-X} & X^\sharp \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi^\sharp \\ B & & B^\sharp \end{array} \quad (10.8.1)$$

– бирациональное отображение. Обозначим через F класс геометрического слоя в $\operatorname{Pic}(\overline{X})^G$ расслоения π , если B – кривая. Если B – точка, то мы положим F . Аналогично введем обозначение $F^\sharp \in \operatorname{Pic}(\overline{X}^\sharp)^G$.

Пусть \mathcal{H}^\sharp – инвариантная очень обильная линейная система на X^\sharp . Запишем

$$\mathcal{H}^\sharp \equiv -p^\sharp K_{X^\sharp} + q^\sharp F^\sharp,$$

где p^\sharp, q^\sharp – некоторые рациональные числа и $p^\sharp > 0$. Мы предполагаем, что $q^\sharp = 0$, если B^\sharp – точка. Более того, мы можем считать, что $q^\sharp > 0$. Пусть $\mathcal{H} := \chi_*^{-1}\mathcal{H}^\sharp$. Как и выше запишем

$$\mathcal{H} \equiv -pK_X + qF,$$

где $p, q \in \mathbb{Q}$ и $p > 0$ (мы также предполагаем, что $q = 0$, если B – точка). Обозначим через $c := \text{ct}(X, \mathcal{H})$ канонический порог пары (X, \mathcal{H}) .

10.9. Определение. Говорят, что отображение χ (или линейная система \mathcal{H}) имеет максимальную особенность, если $p < 1/c$.

10.10. Теорема (неравенство Нётера–Фано).

- (i) $p \geq p^\sharp$.
- (ii) Если имеет место равенство $p = p^\sharp$, то или χ – изоморфизм или π и π^\sharp – расслоения на коники и (10.8.1) замыкается до коммутативного квадрата с $B \simeq B^\sharp$.
- (iii) Если пара $(X, (1/p)\mathcal{H})$ канонична, т.е. \mathcal{H} не имеет максимальных особенностей и $q \geq 0$ (последнее выполнено автоматически, если B – точка), то $p = p^\sharp$.

Доказательство. Рассмотрим общее разрешение особенностей

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & X^\sharp \end{array} \quad (10.10.1)$$

Для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$ мы можем написать

$$K_{\tilde{X}} + \alpha\tilde{\mathcal{H}} = f^*(K_X + \alpha\mathcal{H}) + \sum a_i E_i = g^*(K_{X^\sharp} + \alpha\mathcal{H}^\sharp) + \sum a_i^\sharp E_i^\sharp, \quad (10.10.2)$$

где $a_i^\sharp > 0$ поскольку линейная система \mathcal{H}^\sharp свободна. Пусть L (соответственно L^\sharp) – кривая на X (соответственно X^\sharp). Мы возьмем $L \sim -K_X$, если X – поверхность дель Пеццо и $L \sim F$, где F – слой, если X – расслоение на коники. Аналогично для X^\sharp . Полагая $\alpha = 1/p^\sharp$ в (10.10.2), получим

$$\left(K_{\tilde{X}} + \frac{1}{p^\sharp}\tilde{\mathcal{H}}\right) \cdot f^*L = \left(\frac{q^\sharp}{p^\sharp}g^*F^\sharp + \sum a_i^\sharp E_i^\sharp\right) \cdot f^*L \geq 0 \quad (10.10.3)$$

(поскольку $p^\sharp > 0, q^\sharp \geq 0$). Далее

$$\left(K_X + \frac{1}{p}\mathcal{H}\right) \cdot L = \frac{q}{p}F \cdot L = 0,$$

поэтому

$$\left(K_{\tilde{X}} + \frac{1}{p}\tilde{\mathcal{H}}\right) \cdot f^*L = \sum a_i E_i \cdot f^*L = 0.$$

Отсюда $p^\sharp \leq p$. Предположим, что имеет место равенство $p^\sharp = p$. Тогда мы имеем также равенство в (10.10.3):

$$\left(\frac{q^\sharp}{p^\sharp}g^*F^\sharp + \sum a_i^\sharp E_i^\sharp\right) \cdot f^*L = 0 \quad \implies \quad q^\sharp g^*F^\sharp \cdot f^*L = E_i^\sharp \cdot f^*L = 0, \quad \forall i.$$

Если B – точка, то это равенство влечет $q^\sharp = 0$ и исключительность всех дивизоров E_i^\sharp для морфизма f . Но тогда B^\sharp – также точка и мы можем считать, что g – тождественное отображение и $f = \chi$. Так как

$$\rho(X)^G = \rho(X^\sharp)^G = 1,$$

то χ – изоморфизм.

Пусть теперь B – кривая, т.е. π – расслоение на коники. Тогда g^*F^\sharp и все дивизоры E_i^\sharp содержатся в слоях композиции $\pi \circ f$. Это означает, что (10.8.1) замыкается до коммутативного квадрата.

Докажем (iii). Пусть пара $(X, (1/p)\mathcal{H})$ канонична. Положим $\alpha = 1/p$ в (10.10.2). Тогда $a_i \geq 0$. Отсюда получим

$$\left(K_{\widetilde{X}} + \frac{1}{p}\widetilde{\mathcal{H}}\right) \cdot g^*L^\sharp = \left(\frac{q}{p}f^*F + \sum a_i E_i\right) \cdot g^*L^\sharp \geq 0.$$

С другой стороны, $(K_{\widetilde{X}} + (1/p^\sharp)\widetilde{\mathcal{H}}) \cdot g^*L^\sharp = 0$. Отсюда $p \leq p^\sharp$. Из пункта (i) получаем тогда, что $p = p^\sharp$ и χ не является изоморфизмом только если $\dim B = \dim B^\sharp = 1$ и нижняя часть диаграммы (10.10.1) замыкается до коммутативного квадрата. В последнем случае из (10.10.1) с $\alpha = 1/p = 1/p^\sharp$ имеем

$$\frac{q}{p}f^*F + \sum a_i E_i \equiv \frac{q^\sharp}{p}g^*F^\sharp + \sum a_j^\sharp E_j^\sharp.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\frac{q}{p}f^*F + \sum s_i E_i \equiv \frac{q^\sharp}{p}g^*F^\sharp + \sum s_j^\sharp E_j^\sharp,$$

где $\sum s_i E_i$ и $\sum s_j^\sharp E_j^\sharp$ – эффективные дивизоры без общих компонент. Отсюда

$$0 \leq \left(\frac{q}{p}f^*F + \sum s_i E_i\right) \cdot \sum s_j^\sharp E_j^\sharp = \left(\sum s_j^\sharp E_j^\sharp\right)^2.$$

Это возможно только если $\sum s_j^\sharp E_j^\sharp = 0$, т.е. все дивизоры E_j^\sharp являются исключительными для f . Так как

$$\rho(X)^G = \rho(X^\sharp)^G = 2,$$

то χ – изоморфизм.

10.11. Определение. Минимальная G -поверхность дель Пеццо X называется *бirationально сверхжесткой*, если любое G -бirationальное отображение $X \dashrightarrow X^\sharp$ на любую минимальную G -поверхность является изоморфизмом.

10.12. Теорема. Пусть X – минимальная G -поверхность дель Пеццо степени $K_X^2 = 1$. Тогда X является бirationально сверхжесткой.

Доказательство. По теореме 10.10 достаточно доказать, что пара $(X, (1/p)\mathcal{H})$ канонична. Предположим противное: пара $(X, (1/p)\mathcal{H})$ не канонична в некоторой G -точке O степени $t = \deg O$. Тогда $\text{mult}_O \mathcal{H} > p$. Напомним, что $\mathcal{H} \equiv -pK_X$. Линейная система \mathcal{H} не имеет неподвижных компонент. Поэтому

$$p^2 = (-pK_X)^2 = \mathcal{H}^2 \geq t(\text{mult}_O \mathcal{H})^2 > tp^2.$$

Противоречие.

10.13. Определение. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники. Говорят, что структура G -расслоения на коники на X *бirationально единственна*, если для любого G -бirationального отображения $X \dashrightarrow X^\sharp$ на относительно минимальную модель, эта модель также имеет структуру G -расслоения на коники над B и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X^\sharp \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

10.14. Теорема [8]. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники с $K_X^2 \leq 0$. Тогда структура расслоения $\pi: X \rightarrow B$ бirationально единственна.

Доказательство. Положим $d := -K_X^2 \geq 0$. Воспользуемся обозначениями 10.8. Имеем

$$\mathcal{H}^2 = (-pK_X + qF)^2 = 4pq - dp^2.$$

Так как $\mathcal{H}^2 \geq 0$, то $q \geq 0$. По теореме 10.10 (неравенство Нётера–Фано) достаточно доказать, что пара $(X, (1/p)\mathcal{H})$ канонична. Предположим противное: пара $(X, (1/p)\mathcal{H})$ не канонична в некоторой G -точке O степени $t = \deg O$. Тогда $m := \text{mult}_O \mathcal{H} > p$. Имеем

$$4pq - dp^2 = \mathcal{H}^2 \geq tm^2 \geq m^2. \quad (10.14.1)$$

Далее

$$2p_a(H) - 2 = \mathcal{H}^2 + K_X \cdot \mathcal{H} = 4pq - dp^2 + dp - 2q.$$

С другой стороны, раздутие точки кратности m на кривой уменьшает род этой кривой на $m(m-1)/2$ (см., например, [13, гл. 5, § 3, следствие 3.7]). Отсюда

$$2p_a(H) - 2 = 2q(2p-1) - dp^2 + dp \leq m(m-1) - 2. \quad (10.14.2)$$

Из (10.14.2) и (10.14.1) получаем

$$2q(2p-1) - dp^2 + dp \leq 4pq - dp^2 - m - 2, \quad dp + m + 2 \leq 2q.$$

Используя это, оценим $2q$ в (10.14.2):

$$(dp + m + 2)(2p-1) - dp^2 + dp \leq m(m-1) - 2, \quad 2pm < dp^2 + 2pm + 4p \leq m^2.$$

Для некоторой G -точки $Q \in B$ степени t кривая $C = \pi^*Q$ G -неприводима и проходит через O . Пересекая \mathcal{H} с C получим

$$2tp = \mathcal{H} \cdot C \geq tm, \quad 2p \geq m.$$

Учитывая это, имеем

$$m^2 \leq 2pm < m^2.$$

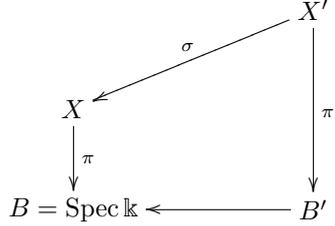
Противоречие.

11. Программа Саркисова

11.1. Определение. Относительно минимальная G -поверхность $(X/B, G) \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(2, G)$ называется *бirationально жесткой*, если для любого G -бирационального отображения $\chi: X/B \dashrightarrow X^\sharp/B^\sharp$ на любую минимальную G -поверхность существует G -бирациональное отображение $\delta: X \dashrightarrow X^\sharp$ такое, что композиция $\chi \circ \delta: X \dashrightarrow X^\sharp$ является (бигулярным) изоморфизмом.

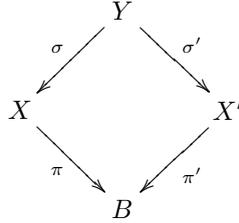
11.2. Элементарные преобразования (линки) Саркисова. Начнем с того, что определим некоторые специальные элементарные отображения в категории \mathcal{S} .

Тип I.



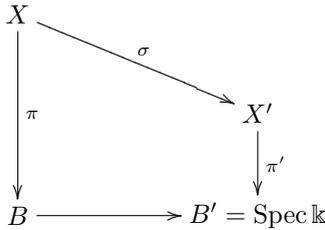
где X – минимальная G -поверхность дель Пеццо, σ – раздутие G -точки, а π' – минимальное G -расслоение на коники. В этом случае $\rho(Y)^G = 2$ и X' – (не минимальная) поверхность дель Пеццо.

Тип II.



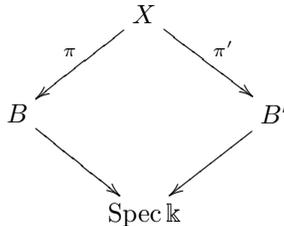
где σ – раздутие G -точки, σ' – стягивание G -неприводимого дивизора, а π и π' объекты \mathcal{S} . Если $B = \text{Spec } \mathbb{k}$, то X и X' являются G -минимальными поверхностями дель Пеццо, $\rho(Y)^G = 2$ и Y – (не минимальная) поверхность дель Пеццо. Если же B – кривая, то π и π' – минимальные G -расслоения на коники и $\rho(Y)^G = 3$.

Тип III.



где π – минимальное G -расслоение на коники, σ – стягивание G -неприводимого дивизора, а X' – минимальная G -поверхность дель Пеццо. Этот линк обратен линку типа I. Как в случае I здесь X – (не минимальная) поверхность дель Пеццо.

Тип IV.



где π и π' – две структуры G -минимальных расслоений на коники на одной поверхности X .

11.2.1. Замечание. В случаях I и II линк Саркисова однозначно определяется поверхностью X и G -точкой – центром раздутия σ . Это точка называется *центром* линка. В случаях III и IV линк Саркисова однозначно определяется поверхностью X .

11.2.2. Пример. Предположим, что поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто и группа G тривиальна. Тогда для линков Саркисова имеются следующие возможности:

Тип I. $X \simeq \mathbb{P}^2$, $Y \simeq \mathbb{F}_1$, σ – раздутие точки.

Тип II. $X \simeq \mathbb{F}_n$, $X' \simeq \mathbb{F}_{n\pm 1}$, $X \dashrightarrow X'$ – элементарное преобразование (3.8.1).

Тип III. Обратное преобразование к I.

Тип IV. $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, π, π' – проекции на сомножители.

11.2.3. Пример. Пусть X – минимальная G -поверхность дель Пеццо степени 2 и пусть $O \in X$ – G -точка степени 1, которая не лежит на прямой и на дивизоре ветвления двулистного накрытия $\Phi_{|-K_X|}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие O . По предложению 6.11.1 Y – поверхность дель Пеццо степени 1 с $\rho(Y)^G = 2$. Конус Мори $\overline{NE}(X)^G \subset \mathbb{R}^2$ двумерен и имеет ровно два экстремальных луча. Стягивание одного из них совпадает с σ . Пусть $\sigma': Y \rightarrow X'$ – стягивание другого луча. На поверхности Y действует инволюция Бертини $\beta: Y \rightarrow Y$, причем $\text{Pic}(Y)^\beta \simeq \mathbb{Z} \cdot K_Y$. Следовательно, β переставляет экстремальные лучи конуса $\overline{NE}(X)^G$ и $\sigma' = \sigma \circ \beta$. В частности, $X' \simeq X$ и отображение $X \dashrightarrow X'$ – линк типа II. Он называется *бirationальной инволюцией Бертини*. Несложно видеть, что это отображение имеет следующее простое описание. Система антиканонических кривых на X , проходящих через O – эллиптический пучок. Бирациональная инволюция Бертини – отражение этого эллиптического пучка относительно O .

11.2.4. Пример. Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – минимальная кубическая G -поверхность и пусть $O \in X$ – G -точка степени 1, которая не лежит на прямой. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие O . Как и выше, Y – поверхность дель Пеццо степени 2 и инволюция Гейзера $\gamma: Y \rightarrow Y$ “разворачивает” экстремальное стягивание $\sigma: Y \rightarrow X$ в другое экстремальное стягивание $\sigma' = \sigma \circ \gamma: Y \rightarrow X' = X$. Мы получаем линк типа II, который называется *бirationальной инволюцией Гейзера*. Он имеет следующее простое описание. Общая прямая $l \subset \mathbb{P}^3$, проходящая через O пересекает X в трех точках O, P, Q . Бирациональная инволюция Гейзера переставляет точки P и Q .

11.2.5. Пример. Пусть X – минимальная G -поверхность дель Пеццо степени d . Аналогично примерам выше можно построить следующие линки типа II:

а) Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие G -точки степени $d - 2$. При некоторых условиях общности Y является поверхностью дель Пеццо степени 1. Экстремальное стягивание $\sigma' = \sigma \circ \beta: Y \rightarrow X' = X$ задает линк типа II, который называется *бirationальной инволюцией Бертини*.

б) Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие G -точки степени $d - 1$. При некоторых условиях общности Y является поверхностью дель Пеццо степени 1. Экстремальное стягивание $\sigma' = \sigma \circ \gamma: Y \rightarrow X' = X$ задает линк типа II, который называется *бirationальной инволюцией Гейзера*.

11.2.6. Пример. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – относительно минимальное G -расслоение на коники, пусть $O \in X$ – G -точка степени t , и пусть $b := \pi(O)$. Предположим, что выполнены условия:

(i) слой $X_b := \pi^{-1}(b)$ невырожден;

(ii) каждый геометрический слой $\overline{X}_i \subset \overline{X}_b$ содержит только одну компоненту $\overline{O}_i \subset \overline{O}$.

Рассмотрим раздутие $\sigma: Y \rightarrow X$ точки O . Пусть $E \subset Y$ – исключительный дивизор, и пусть $L \subset Y$ – собственный прообраз X_b . Запишем $\overline{b} = \{\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_t\}$ и $\overline{O} = \{\overline{O}_1, \dots, \overline{O}_t\}$, где $\overline{b}_i \in \overline{B}$, $\overline{O}_i \in \overline{X}$ – геометрические точки и $\pi(\overline{O}_i) = \overline{b}_i$. Пусть $\overline{E}_i \subset \overline{E}$, $\overline{L}_i \subset \overline{L}$ – компоненты, соответствующие \overline{b}_i . Таким образом, для каждого i геометрический слой $Y_{\overline{b}_i} = \sigma^{-1}(\pi^{-1}(\overline{b}_i))$ состоит из двух компонент: исключительного дивизора \overline{E}_i и кривой \overline{L}_i . Несложно видеть, что \overline{L} – несвязное объединение (-1) -кривых. Поэтому кривая L может быть стянута и мы получим линк типа II. Вблизи каждого геометрического слоя над \overline{b}_i этот линк является элементарным преобразованием (3.8.1). Построенный линк сохраняет количество геометрических вырожденных слоев и $K_X^2 = K_{X'}^2$ (см. упражнение 1).

11.2.7. Пример. Три примера линков типа III уже обсуждались в (iii) (a)–(c) теоремы 8.4.

11.3. Теорема. Любое бирациональное отображение между рациональными минимальными G -поверхностями раскладывается в композицию конечного числа линков I–IV.

11.4. Определение. В обозначениях 10.8 зафиксируем G , $(X^\sharp/B^\sharp, G) \in \mathcal{S}$ и \mathcal{H}^\sharp и рассмотрим подкатеорию $\mathcal{S}^\sharp \subset \mathcal{S}$, состоящую из объектов $(X/B, G) \in \mathcal{S}$ вместе с отображениями $X/B \dashrightarrow X^\sharp/B^\sharp$ категории \mathcal{S} , удовлетворяющих свойствам коммутативности треугольников. Для $(X/B, G) \in \mathcal{S}^\sharp$ определим *степень Саркисова* бирационального отображения 10.8.1 следующим образом:

$$\deg^S(X, \pi) = \left(p, m = \frac{1}{c}, e \right)$$

где $c := \text{ct}(X, \mathcal{H})$ и $e := e(X, c\mathcal{H})$. Отношение порядка на множестве степеней определяется лексикографически.

Доказательство. Рассмотрим бирациональное отображение

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^{\chi} & X^\sharp \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi^\sharp \\ B & & B^\sharp \end{array}$$

Вспользуемся обозначениями 10.8. Мы предполагаем, что χ не является изоморфизмом.

Предположим сначала, что линейная система \mathcal{H} не имеет максимальных особенностей. Из неравенства Нётера-Фано 10.10 получаем, что π и π' – расслоения на коники и $q < 0$. В этом случае дивизор $K_X + (1/p)\mathcal{H} \equiv (q/p)F$ численно не эффективен. Следовательно, в конусе Мори $\overline{\text{NE}}(X/B)^G$ существует экстремальный луч $R \neq \mathbb{R}_+[F]$ такой, что $(K_X + (1/p)\mathcal{H}) \cdot R < 0$. Так как \mathcal{H} – подвижная линейная система, то $K_X \cdot R < 0$. Рассмотрим стягивание $\varphi: X \rightarrow X_1$ луча R . Имеются две возможности.

1) $\varphi: X \rightarrow X_1$ – расслоение на коники. Тогда мы имеем линк типа IV с $B' = X_1$, $\pi' = \varphi$. Запишем

$$\mathcal{H} \sim -pK_X + qF \sim -p'K_X + q'F',$$

где $2p' = \mathcal{H} \cdot F' = 2p + qF \cdot F' < 2p$. Таким образом,

$$\deg^S(X, \pi) > \deg^S(X, \pi').$$

2) $\varphi: X \rightarrow X_1$ – дивизориальное стягивание. Тогда мы имеем линк типа III с $X' = X_1$, $\sigma = \varphi$. В этом случае X' – поверхность дель Пеццо с $\rho(X')^G = 1$ и

$$-p'K_{X'} \sim \mathcal{H}_{X'} = \sigma_*\mathcal{H} = \sigma_*(-pK_X + qF) = -pK_{X'} + q\sigma_*F.$$

Отсюда $p' < p$ и снова $\deg^S(X, \pi) > \deg^S(X', \pi')$.

Рассмотрим теперь случай, когда линейная система \mathcal{H} имеет максимальную особенность кратности $m > p$, где $m = 1/c$. Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие этой максимальной особенности. Таким образом,

$$K_Y + c\mathcal{H}_Y \equiv \sigma^*(K_X + c\mathcal{H}) \equiv \left(1 - \frac{p}{m}\right)\sigma^*K_X + \frac{q}{m}\sigma^*F.$$

По лемме 10.5.2

$$c_Y := \text{ct}(Y, \mathcal{H}_Y) \geq \text{ct}(X, \mathcal{H}) = c.$$

Так как $1 - p/m > 0$, то дивизор $K_Y + c\mathcal{H}_Y$ не является численно эффективным над B . Поэтому в конусе Мори $\overline{\text{NE}}(Y/B)^G$ имеется экстремальный луч R такой, что $(K_Y + c\mathcal{H}_Y) \cdot R < 0$. Так как \mathcal{H}_Y – подвижная линейная система, то $K_Y \cdot R < 0$. Так как $1/p > c$, то

$$K_Y + \frac{1}{p}\mathcal{H}_Y \equiv \sigma^*\left(K_X + \frac{1}{p}\mathcal{H}\right) - \lambda E \equiv \frac{q}{p}\sigma^*F - \lambda E, \quad \lambda > 0. \quad (11.4.1)$$

Рассмотрим стягивание $\varphi: X \rightarrow X_1$ луча R . Снова имеются две возможности.

1) $\varphi: Y \rightarrow X_1$ – расслоение на коники. Положим $X' := Y$, $B' := X_1$, $\pi' := \varphi$. Таким образом, мы имеем линк типа I. Из (11.4.1) получаем, что

$$K_{X'} + \frac{1}{p}\mathcal{H}' \equiv -\lambda E < 0.$$

Следовательно, $p' < p$ и $\deg^S(X, \pi) > \deg^S(X', \pi')$.

2) $\varphi: Y \rightarrow X_1$ – дивизориальное стягивание. Положим $X' := X_1$ и $\sigma' := \varphi$. Мы имеем линк типа II. Если B – точка, то как и выше

$$K_{X'} + \frac{1}{p}\mathcal{H}' = \sigma'_* \left(K_Y + \frac{1}{p}\mathcal{H}_Y \right) \equiv -\lambda\sigma'_*E < 0$$

и поэтому $p' < p$. Пусть B – кривая. Снова из (11.4.1) видно, что $K_Y + (1/p)\mathcal{H}_Y$ численно эквивалентен дивизору, лежащему в слоях над B . Это же верно и для

$$\sigma'_* \left(K_Y + \frac{1}{p}\mathcal{H}_Y \right) = K_{X'} + \frac{1}{p}\mathcal{H}'.$$

Это означает, что $p' = p$. Далее

$$\text{ct}(X', \mathcal{H}') \geq \text{ct}(Y, \mathcal{H}_Y) \geq \text{ct}(X, \mathcal{H}).$$

Причем, если имеет место равенство, то $e(X', \mathcal{H}') > e(X, \mathcal{H})$. Таким образом, снова $\deg^S(X, \pi) > \deg^S(X', \pi')$.

Другое доказательство теоремы 10.14. Пусть $\chi: X \dashrightarrow X^\sharp/B^\sharp$ – любое бирациональное отображение в расслоенное пространство Мори. По теореме 11.3 существует линк Саркисова $X/B \dashrightarrow X'/B'$. Так как $K_X^2 \leq 0$, то дивизор $-K_X$ является обильным и поэтому линки типа I, III, IV невозможны. Следовательно, X'/B' – также расслоение на коники и $X/B \dashrightarrow X'/B'$ – линк типа II. Согласно упражнению 1 отображение $X \dashrightarrow X'$ является обобщенным элементарным преобразованием (см. пример 11.2.6), и поэтому $K_{X'}^2 = K_X^2$.

11.5. Теорема. Пусть X – G -поверхность дель Пеццо степени 2 с $\rho(X)^G = 1$, и пусть $\chi: X \dashrightarrow X^\sharp$ – любое бирациональное отображение в расслоенное пространство Мори X^\sharp/B^\sharp . Тогда $X^\sharp \simeq X$, B^\sharp – точка и χ является композицией бирациональных инволюций Бертини $\beta_i: X \dashrightarrow X$ и бирегулярных автоморфизмов.

Доказательство. По теореме 11.3 существует линк Саркисова $\sigma: Y \rightarrow X$ типа I или II (причем в случае II $B = \text{Spec } \mathbb{k}$). Тогда Y – поверхность дель Пеццо степени 1 с $\rho(Y)^G = 2$. Пусть $\beta: Y \rightarrow Y$ – инволюция Бертини. Дивизор $\sigma^*(-K_X)$ является G -инвариантным, численно эффективен, но не обилен. Этим же условиям удовлетворяет и дивизор $\beta^*\sigma^*(-K_X)$. Так как $\text{Pic}(Y)^\beta \simeq \mathbb{Z} \cdot K_Y$, то $\beta^*\sigma^*(-K_X) \not\sim \sigma^*(-K_X)$. Следовательно, $\beta^*\sigma^*(-K_X)$ высекает на двумерном конусе $\overline{\text{NE}}(X)^G \subset \mathbb{R}^2$ экстремальный луч, стягивание которого $\sigma': Y \rightarrow X'$ достраивает линк до диаграммы. В частности, наш линк имеет тип II и X' – поверхность дель Пеццо с $\rho(X')^G = 1$. Из конструкции легко видеть, что $X' \simeq X$. Продолжая процесс, по теореме 11.3 мы получим требуемое разложение χ .

11.6. Теорема Сегре–Манина [6]. Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – G -поверхность дель Пеццо степени 3 (кубическая поверхность) с $\rho(X)^G = 1$ и пусть $\chi: X \dashrightarrow X^\sharp$ – любое бирациональное отображение в расслоенное пространство Мори X^\sharp/B^\sharp . Тогда $X^\sharp \simeq X$, B^\sharp – точка и χ является композицией бирациональных инволюций Бертини, бирациональных инволюций Гейзера и бирегулярных автоморфизмов.

Доказательство. По теореме 11.3 существует линк Саркисова $\sigma: Y \rightarrow X$ типа I или II (причем в случае II $B = \text{Spec } \mathbb{k}$). Тогда Y – поверхность дель Пеццо степени 1 или 2 с $\rho(Y)^G = 2$. Пусть $\tau: Y \rightarrow Y$ – инволюция Бертини (соответственно Гейзера) при $K_Y^2 = 1$ (соответственно 2). Как и выше, $\sigma \circ \tau$ является экстремальным стягиванием и задает линк типа II, где $X' \simeq X$. Продолжая процесс, по теореме 11.3 мы получим требуемое разложение χ .

11.7. Предложение. Пусть X – относительно минимальная G -поверхность с $K_X^2 \leq 4$, и пусть $X \dashrightarrow X'$ – линк Саркисова. Тогда $K_{X'}^2 \leq 4$.

Доказательство. Для линков типа I и IV мы имеем $K_{X'}^2 \leq K_X^2$. Для линка типа III по теореме 8.4 мы имеем единственную возможность: $K_X^2 = 3$ и $K_{X'}^2 = 4$.

Рассмотрим случай линка типа II. Морфизм σ (соответственно σ') является раздутием G -точки O (соответственно O') степени t (соответственно t'). Во-первых, предположим, что B – кривая. Согласно упражнению 1 отображение $X \dashrightarrow X'$ является обобщенным элементарным преобразованием (см. пример 11.2.6), и поэтому $K_{X'}^2 = K_X^2$.

Наконец, рассмотрим случай линка типа II с $B = \text{Спек } \mathbb{k}$. Тогда X и X' – поверхности дель Пеццо с $\rho(X)^G = \rho(X')^G = 1$, а Y – поверхность дель Пеццо с $\rho(Y)^G = 2$. Тогда $K_Y^2 = K_X^2 - t = K_{X'}^2 - t'$. Если $K_Y^2 \leq 2$, то мы, как и в доказательствах теорем 11.5 и 11.6 имеем $X' \simeq X$. Таким образом, мы можем считать, что $K_Y^2 = 3$, $K_X^2 = 4$, $t = 1$, $t' \leq 6$. Пусть E (соответственно E') – исключительный дивизор σ (соответственно σ'). Запишем $E' \sim p\sigma^*(-K_X) - qE$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} -t' &= E'^2 = (p\sigma^*(-K_X) - qE)^2 = 4p^2 - q^2t, \\ -t' &= K_Y \cdot E' = (\sigma^*K_X + E) \cdot (p\sigma^*(-K_X) - qE) = -4p + qt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$q^2 - 4p^2 = 4p - q = t'.$$

Исключая q , получим

$$q = 4p - t', \quad 12p^2 - 8pt' + t'^2 - t' = 0.$$

Отсюда $t'^2 - t' \equiv 0 \pmod{4}$. Так как $t' \leq 6$, то $t' = 4$ или 5. Легко видеть, что последнее уравнение относительно p не имеет целых решений для $t' \in \{4, 5\}$

Предложение 11.7 завершает доказательство теоремы 10.1. В частности, мы имеем следующее

11.7.1. Следствие. Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $K_X^2 \leq 4$ над полем \mathbb{k} с $\rho(X) = 1$. Тогда X нерациональна.

Теперь из следствия 11.7.1 и теоремы 9.7.1 получаем (см. упражнение 5, с. 48):

11.7.2. Следствие. Проблема Люрота имеет отрицательное решение для поверхностей над алгебраически незамкнутыми полями (даже в нулевой характеристике).

Задачи

1. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники. Докажите, что на X любой линк Саркисова типа II сохраняет значение K_X^2 (ср. пример 11.2.6).
2. Пусть $\pi: X \rightarrow B$ – минимальное G -расслоение на коники. Предположим, что на X имеется линк Саркисова типа IV. Докажите, что $K_X^2 = 1, 2, 4$ или 8. Как устроены отображения π и π' в этих случаях?
3. Пусть X – минимальная G -поверхность дель Пеццо степени 5, 6 или 8, имеющая G -точку P степени 1. Предположим, что P не лежит на прямых при $K_X^2 = 5$ и 6. Докажите, что с P связан линк Саркисова и опишите этот линк. *Указание.* См. доказательство теоремы 9.2.
4. Пусть X – минимальная G -поверхность дель Пеццо степени 5, и пусть P – достаточно общая G -точка степени 2. Докажите, что с P связан линк Саркисова типа II и опишите этот линк. *Указание.* См. доказательство теоремы 9.5.
5. Пусть X – G -поверхность дель Пеццо степени 9, и пусть $P \in X$ – G -точка степени t . При каких условиях существует линк Саркисова с центром в P ? Опишите этот линк.
6. Рассмотрим действие группы $G = A_5$ на \mathbb{P}^2 как группы вращений икосаэдра. Прямым, соединяющим противоположные вершины, соответствуют 6 точек $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}^2$. Опишите линк Саркисова с центром в $\{P_1, \dots, P_6\}$.
7. Рассмотрим действие группы $G = S_4$ на \mathbb{P}^2 как группы вращений октаэдра. Прямым, соединяющим центры противоположных граней, соответствуют 4 точки $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{P}^2$. Опишите линк Саркисова в центром в $\{P_1, \dots, P_4\}$.
8. Пусть $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ – эллипсоид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$. Докажите, что с парой комплексно сопряженных точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$ связан линк Саркисова и опишите этот линк.

12. Группа Кремоны

12.1. В этом параграфе мы изучим группу бирациональных автоморфизмов плоскости \mathbb{P}^2 над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} . Эта группа обычно называется *группой Кремоны* ранга 2 и обозначается через $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$. Она изоморфна группе \mathbb{k} -автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{k}(x, y))$ поля рациональных функций от двух переменных $\mathbb{k}(x, y)$ над \mathbb{k} .

На протяжении всего параграфа мы считаем, что основное поле алгебраически замкнуто и все G -многообразия снабжаются геометрическим действием G . Основным результатом является описание образующих группы Кремоны $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$ над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} .

Вначале рассмотрим примеры некоторых специальных преобразований и подгрупп в $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$.

12.2. Пример (мономиальные преобразования). Пусть $\mathbb{T} = (\mathbb{k}^*)^2$ – двумерный алгебраический тор. Мы отождествим \mathbb{T} с открытым подмножеством в \mathbb{P}^2 – дополнением к координатным прямым. Тогда группа $\text{Aut}(\mathbb{T}) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ действует на \mathbb{P}^2 бирациональными автоморфизмами. Это определяет вложение $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \subset \text{Cr}_2(\mathbb{k})$. В координатах: матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$$

сопоставляется отображение

$$\chi: \mathbb{k}(x, y) \rightarrow \mathbb{k}(x, y), \quad \chi(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d).$$

В частности, групповое обращение

$$\tau: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad t \mapsto t^{-1}$$

задает бирациональную инволюцию \mathbb{P}^2 . В однородных координатах она записывается в виде

$$\tau: (x_0 : x_1 : x_2) \dashrightarrow (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1) = (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1}) \quad (12.2.1)$$

Эта инволюция называется *стандартным квадратичным преобразованием*. Она достраивается до коммутативного треугольника

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{P}^2 & \overset{\tau}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где W – поверхность дель Пеццо степени 6.

12.3. Пример (аффинные автоморфизмы). Очевидно, что группа полиномиальных автоморфизмов аффинного пространства $\text{Aut } \mathbb{A}^n$ (неканонически) вкладывается в группу Кремоны $\text{Cr}_n(\mathbb{k})$. Структура $\text{Aut } \mathbb{A}^2$ хорошо описана:

12.3.1. Теорема (Н. В. Е. Jung, W. van der Kulk [40]). *Группа $\text{Aut } \mathbb{A}^2$ порождена линейными автоморфизмами и автоморфизмами вида*

$$\varphi_f: (x, y) \mapsto (x, y + f(x)), \quad f \in \mathbb{k}[x],$$

которые называются *треугольными*.

12.4. Пример (группа Нагаты). Рассмотрим достаточно общий пучок $\mathcal{P} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(3)}|$, $\mathcal{P} \simeq \mathbb{P}^1$ плоских кубических кривых. Базисное множество \mathcal{P} состоит из девяти точек $P_0, \dots, P_8 \in \mathbb{P}^2$ в общем положении. Раздувая эти точки $X \rightarrow \mathbb{P}^2$, получим морфизм $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, который является эллиптическим расслоением (т.е. общий слой X_η – эллиптическая кривая над $\mathbb{k}(\mathbb{P}^1)$). Исключительные дивизоры $F_0, \dots, F_8 \subset X$ определяют девять точек $e_0, \dots, e_8 \in X_\eta$. Зафиксировав e_0 как нулевую точку, мы получим групповой закон на $(E, e_0) \simeq \text{Pic}^0(X_\eta)$, причем дивизоры e_1, \dots, e_8 независимы в $\text{Pic}^0(X_\eta)$. Сдвиги

$$X_\eta \rightarrow X_\eta, \quad x \mapsto x + e_j$$

определяют бирациональные отображения $X \dashrightarrow X$. Так как поверхность X рациональна, мы получаем вложение $\mathbb{Z}^8 \subset \text{Cr}_2(\mathbb{k})$.

Преобразования де Жонкьера.

12.5. Определение. Бирациональное отображение $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ называется преобразованием де Жонкьера (de Jonquières), если существует пучок прямых L_t на \mathbb{P}^2 такой, что $L'_t := \chi(L_t)$ – также пучок прямых.

12.5.1. Предложение. Бирациональное отображение $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является преобразованием де Жонкьера тогда и только тогда, когда оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F}_1 & \dashrightarrow & \mathbb{F}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1 \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \chi & \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

Доказательство. Обозначим через X и X^\sharp первую и вторую копии \mathbb{P}^2 , соответственно и рассмотрим общее разрешение особенностей

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{X} & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 \mathbb{P}^2 = X & \dashrightarrow \chi & X^\sharp = \mathbb{P}^2
 \end{array} \tag{12.5.2}$$

Мы можем считать, что f и g раздувают базисные точки пучков L_t^\sharp и L_t . Тогда на “первом этаже” раздутий мы имеем поверхности \mathbb{F}_1 и индуцированное бирациональное отображение сохраняет общий слой.

Пусть $\mathcal{H}^\sharp := |\mathcal{O}_{X^\sharp}(1)|$ и \mathcal{H} – собственный прообраз \mathcal{H}^\sharp на X . Ясно, что $\mathcal{H} := |\mathcal{O}_X(d)|$, где d – степень отображения χ . Запишем

$$\tilde{\mathcal{H}} = f^* \mathcal{H} - \sum m_i E_i^*, \quad K_{\tilde{X}} = f^* K_X + \sum E_i^*,$$

где $\tilde{\mathcal{H}} := g^* \mathcal{H}^\sharp$ и дивизоры E_i^* f -исключительны.

12.5.3. Замечание. Имеют место равенства:

$$1 = \tilde{\mathcal{H}}^2 = d^2 - \sum_i m_i^2, \quad 3 = -K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{\mathcal{H}} = 3d - \sum_i m_i.$$

Заметим, что $m_i \leq m_0 \leq d - 1$. Причем если $m_0 = d - 1$, то

$$\sum_{i \neq 0} m_i = 2d - 2 = \sum_{i \neq 0} m_i^2.$$

Поэтому в этом случае $m_1 = \dots = m_{2d-2} = 1$.

12.5.4. Предложение. Бирациональное отображение $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является преобразованием де Жонкьера тогда и только тогда, когда существует точка $O \in \mathbb{P}^2$ кратности $\text{mult}_O \mathcal{H} = d - 1$, где d – степень отображения.

Доказательство. Предположим, что χ – преобразование де Жонкьера. Пусть L_t^\sharp – пучок прямых на $X^\sharp = \mathbb{P}^2$. Пусть L_t и \tilde{L}_t – его собственные прообразы на $X = \mathbb{P}^2$ и \tilde{X} , соответственно. Запишем

$$\tilde{L}_t = f^* L_t - \sum_i k_i E_i^*,$$

По нашему предположению мы можем взять L_t^\sharp так, что L_t – также пучок прямых. Тогда

$$1 = g^* \mathcal{H}^\sharp \cdot \tilde{L}_t = \tilde{\mathcal{H}} \cdot \tilde{L}_t = d - \sum_i m_i k_i,$$

Так как L_t – пучок прямых, то каждое k_i равно 0 или 1, причем не более одного k_i отлично от нуля. Таким образом, $m_0 = d - 1$.

Предположим, что $m_0 = d - 1$. Пусть $O \in X = \mathbb{P}^2$ центр раздутия, соответствующего E_0^* , и пусть L_t – пучок прямых с базисной точкой O . Пусть L_t^\sharp и \tilde{L}_t – его собственные прообразы на $X^\sharp = \mathbb{P}^2$ и \tilde{X} , соответственно. Как и выше запишем

$$\tilde{L}_t = f^* L_t - \sum_i k_i E_i^*,$$

где $k_0 = 1$, $k_i = 0$ при $i > 0$. Отсюда

$$\deg L_t^\sharp = g^* \mathcal{H}^\sharp \cdot \tilde{L}_t = \tilde{\mathcal{H}} \cdot \tilde{L}_t = d - \sum_i m_i k_i = d - (d - 1) = 1,$$

т.е. L_t^\sharp – пучок прямых.

Уравнения преобразований де Жонкьера. Пусть χ – преобразование де Жонкьера, и пусть \mathcal{H} – такое как выше. Пусть O – точка с $\text{mult}_O(\mathcal{H}) = d - 1$. Выберем координаты так, что $O = [0 : 0 : 1]$. Пусть L – прямая, проходящая через O . Существует дивизор $C + L \in \mathcal{H}$, такой, что $\text{mult}_O(C) = d - 2$. Кривая C задается как

$$C = \{b(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

Пусть общий $H \in \mathcal{H}$ задается

$$H = \{a(x_0, x_1, x_2) = 0\},$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_d(x_1, x_2) + x_0 a_{d-1}(x_1, x_2), \\ b &= b_{d-1}(x_1, x_2) + x_0 b_{d-2}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Это означает, что χ задается

$$\chi: (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (a(x_0, x_1, x_2) : b(x_0, x_1, x_2)x_1 : b(x_0, x_1, x_2)x_2).$$

Перейдем к аффинным координатам x_2 и положим $x = x_0/x_2$, $y = x_1/x_2$. Тогда

$$\chi: (x, y) \mapsto \left(x, \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)} \right), \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0. \quad (12.5.5)$$

Инволюция де Жонкьера – это преобразование де Жонкьера, являющееся элементом второго порядка в $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$. Это выполнено если $\alpha + \delta = 0$ и $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$. Получаем

$$\chi(x, y) = \left(x, \frac{P(x)}{y} \right). \quad (12.5.6)$$

Более того, мы можем предполагать, что P – многочлен нечетной степени $2g + 1$ без кратных множителей (для этого сделаем аффинно-линейную замену вдоль оси y). Множество неподвижных точек преобразования χ – кривая

$$\text{Fix}(\chi) = \{(x, y) \mid y^2 = P(x)\},$$

которая является гиперэллиптической рода g при $g \geq 2$ (соответственно, эллиптической при $g = 1$).

12.5.7. Следствие. Для $g \geq 2$ (соответственно, для $g = 1$), мы имеем $2g - 1$ -мерное семейство инволюций, которые параметризуются гиперэллиптическими (соответственно, эллиптическими) кривыми рода g и попарно не сопряжены в $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$.

Доказательство. Так как множество неподвижных точек χ нерационально, то оно не может быть стянуто бирациональными отображениями.

12.6. Теорема. Любое преобразование Кремоны раскладывается в композицию преобразований де Жонкьера.

Доказательство. Пусть $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – преобразование Кремоны. Обозначим через X_0 первую копию \mathbb{P}^2 , а через X_n – вторую. По теореме 11.3 отображение χ раскладывается в композицию линков Саркисова

$$\chi: \mathbb{P}^2/\text{pt} = X_0/B_0 \xrightarrow{\chi_1} X_1/B_1 \dashrightarrow \cdots \xrightarrow{\chi_n} X_n/B_n = X^\sharp/B^\sharp = \mathbb{P}^2/\text{pt}.$$

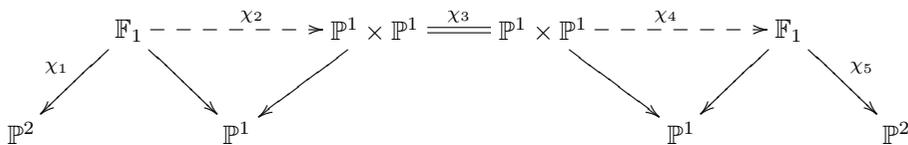
Мы будем считать, что наше разложение имеет минимально возможную длину $n(\chi) = n$. Тогда никакая промежуточная поверхность X_k , $0 < k < n$ не изоморфна \mathbb{P}^2 .

Предположим, что χ не раскладывается в композицию преобразований де Жонкьера. Выберем его так, что $n(\chi)$ минимально. Линк χ_1 должен иметь тип I. Поэтому он является раздутием точки и $X_1 \simeq \mathbb{F}_1$ (см. пример 11.2.2). Аналогично, χ_n должен иметь тип III и поэтому он является стягиванием (-1) -кривой и $X_{n-1} \simeq \mathbb{F}_1$. Если некоторая промежуточная поверхность X_k , $1 < k < n - 1$ изоморфна \mathbb{F}_1 , то мы можем разложить χ в композицию двух преобразований $\chi', \chi'' \in \text{Cr}_2(\mathbb{k})$

$$\begin{aligned} \chi': \mathbb{P}^2 = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_k = \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2, \\ \chi'': \mathbb{P}^2 \leftarrow X_k = \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_n = \mathbb{P}^2 \end{aligned}$$

так, что $n(\chi') < n(\chi)$ и $n(\chi'') < n(\chi)$. Это противоречит нашему предположению о минимальности. Таким образом, $X_k \not\simeq \mathbb{F}_1$ для $1 < k < n - 1$.

Все линки χ_k при $1 < k < n$ будут иметь тип II или IV. Если все они типа II, то χ – преобразование де Жонкьера. Предположим, что на некотором шаге k мы имеем линк IV, т.е. $X_k \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, χ_k осуществляет изоморфизм $X_k \simeq X_{k+1}$ и заменяет направления проекций π_k и π_{k+1} поверхности $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на сомножители. Тогда χ_{k-1} и χ_{k+1} элементарные преобразования и $X_{k-1} \simeq X_{k+1} \simeq \mathbb{F}_1$. Согласно сказанному выше, $k - 1 = 1$, $k + 1 = n - 1$ и $n = 5$, т.е. разложение ϕ в композицию линков имеет вид



Несложно видеть, что в этом случае отображения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ являются обычными стереографическими проекциями из точек. Следовательно, композиция $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ задается многочленами степени 2, т.е. квадратично. В этом случае χ – преобразование де Жонкьера (см. упражнение 3).

12.7. Теорема. Любое преобразование де Жонкьера $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ раскладывается в композицию квадратичных преобразований.

Доказательство. Мы можем считать, что χ задается формулой (12.5.5). Это преобразование может быть разложено в композицию преобразований

$$\begin{aligned} \chi_1: (x, y) &\mapsto (x, yp(x)), \\ \chi_2: (x, y) &\mapsto \left(x, \frac{y}{q(x)}\right), \\ \chi_3: (x, y) &\mapsto (x, y + r(x)), \\ \chi_4: (x, y) &\mapsto \left(x, \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ – некоторые многочлены. Ясно, что χ_4 является квадратичным, а преобразования χ_1 и χ_2 раскладываются в композиции квадратичных преобразований вида

$$(x, y) \mapsto (x, y(x - c)), \quad c \in \mathbb{k}$$

и обратных к ним. Для χ_3 мы запишем $r(x) = (x - c)r_1(x)$, где c – корень многочлена $r(x)$. Тогда χ_3 раскладывается в композицию преобразований

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (x, y(x - c)^{-1}), \\ (x, y) &\mapsto (x, y + r_1(x)), \\ (x, y) &\mapsto (x, y(x - c)). \end{aligned}$$

Далее – по индукции.

Теперь из теорем 12.6 и 12.7 и упражнений 4–5 получается описание образующих группы Кремоны:

12.8. Теорема (М. Нётер [14]). *Группа Кремоны $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$ порождается проективными преобразованиями плоскости $\text{PGL}_3(\mathbb{k})$ и стандартной квадратичной инволюцией (12.2.1).*

На самом деле, используя нашу технику, можно описать и все соотношения между образующими [41], [42]. Более того, аналогичные описания можно получить и для случая алгебраически незамкнутого поля [43], [44].

Рассмотрим еще одно приложение нашей техники.

12.9. Теорема. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – кривая степени d . Предположим, что пара $(\mathbb{P}^2, (3/d)C)$ имеет лишь канонические особенности. Тогда для любого преобразования Кремоны $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ кривая $\chi(C)$ имеет степень $\geq d$.*

Доказательство. Обозначим через X (соответственно, через X') первую (соответственно, вторую) копию \mathbb{P}^2 . Положим $C' := \chi(C)$, $\alpha := 3/d$, $\alpha' := 3/d'$. Тогда $K_X + \alpha C \equiv 0$ и $K_{X'} + \alpha' C' \equiv 0$. Рассмотрим общее разрешение

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & X' \end{array}$$

Пусть $\tilde{C} \subset \tilde{X}$ – собственный прообраз C . Мы можем записать

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}} + \alpha \tilde{C} &\equiv f^*(K_X + \alpha C) + \sum a_i E_i, \\ K_{\tilde{X}} + \alpha' \tilde{C} &\equiv g^*(K_{X'} + \alpha' C') + \sum b_j F_j, \end{aligned}$$

где E_i (соответственно, F_j) – f -исключительные (соответственно, g -исключительные) дивизоры (мы допускаем $E_i = F_j$). Следовательно,

$$(\alpha - \alpha') \tilde{C} \equiv \sum a_i E_i - \sum b_j F_j.$$

Применяя g_* к обеим частям, получаем

$$(\alpha - \alpha') C' \equiv \sum a_i g_* E_i \geq 0.$$

где $a_i \geq 0$ для всех i по нашему предположению. Следовательно, $\alpha \geq \alpha'$ и $d \leq d'$.

12.9.1. Следствие. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – кривая степени $d \geq 6$, имеющая лишь обыкновенные двойные точки. Тогда для любого преобразования Кремоны $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ образ $\chi(C)$ – кривая.*

Теория G -поверхностей идеально приспособлена к изучению конечных подгрупп в группе Кремоны $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$ (см. [25], [45]–[47]).

12.9.2. Предложение. *Пусть X – алгебраическая поверхность и $G \subset \text{Bir}(X)$ – конечная подгруппа. Тогда существует неособая проективная G -поверхность Y и бирациональное G -отображение $\chi: X \dashrightarrow Y$. Таким образом, вложение $G \subset \text{Bir}(X)$ индуцируется вложением $G \subset \text{Aut}(Y)$ при помощи отображения χ .*

Доказательство. Так как группа G конечна, то мы можем выбрать открытое аффинное подмножество $U \subset \mathbb{P}^2$, на котором G действует бигулярно. Рассмотрим фактор \bar{U}/G и его проективное замыкание \overline{U}/G . Пусть Z – нормализация \overline{U}/G в поле функций $\mathbb{k}(U)$. Это проективная поверхность с бигулярным действием группы G . Наконец, за Y мы возьмем минимальное разрешение Z .

12.9.3. Таким образом, задание вложения $G \hookrightarrow \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ эквивалентно заданию рационального G -многообразия Y и бирационального отображения $Y \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Два вложения $G \hookrightarrow \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ сопряжены тогда и только тогда, когда для соответствующих G -многообразий Y и Y' существует G -бirationальное отображение $Y' \dashrightarrow Y$, коммутирующее с $Y \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ и $Y' \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

12.9.4. Замечание. Согласно нашей теории мы можем заменить многообразие Y на его G -минимальную модель, т.е. мы можем считать, что Y или является поверхностью дель Пеццо с $\rho(Y)^G = 1$ или имеет структуру расслоения на коники над \mathbb{P}^1 с $\rho(Y)^G = 2$.

Проиллюстрируем применение развитой теории на простейшем примере: мы классифицируем элементы порядка 2 в $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$.

12.10. Теорема [45]. *Предположим, что характеристика \mathbb{k} отлична от 2. Пусть $\tau \in \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ – элемент второго порядка. Тогда τ сопряжен одному из следующих элементов:*

- (i) линейной инволюции на \mathbb{P}^2 ,
- (ii) инволюции де Жонкьера (12.5.6) с $g \geq 1$,
- (iii) инволюции Гейзера (см. 6.9.1),
- (iv) инволюции Бертини (см. 6.8.5).

12.10.1. Замечание. Из результатов предыдущего параграфа следует, что эти инволюции не сопряжены между собой. Однако, в нашем случае можно воспользоваться и более простым соображением 12.5.7: множество неподвижных точек τ является гиперэллиптической кривой рода g в случае (ii), неособой плоской кватрикой в случае (iii) и негиперэллиптической кривой рода 4 в случае (iv).

Доказательство. Мы можем предполагать, что $G = \langle \tau \rangle$ действует на G -минимальной рациональной поверхности X . Тогда рассмотрим два случая: расслоения на коники $\pi: X \rightarrow Z$ и поверхности дель Пеццо X с $\rho(X)^G = 1$.

Случай расслоения на коники. Предположим, что X имеет структуру G -минимального расслоения на коники $\pi: X \rightarrow B$.

Сначала рассмотрим случай, когда π не имеет вырожденных слоев, т.е. это \mathbb{P}^1 -расслоение. Тогда $X \simeq \mathbb{F}_n$ для некоторого n . Если $n = 0$, то X – квадрика в \mathbb{P}^3 и стереографическая проекция $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из неподвижной точки линеаризует τ . Пусть $n > 1$. Существует неподвижная точка P , не лежащая на отрицательном сечении. Применяя элементарное преобразование с центром в P , мы попадаем на $X' \simeq \mathbb{F}_{n-1}$. Продолжая процесс, мы попадем на \mathbb{F}_1 и тогда, стягивая отрицательное сечение, снова попадаем на \mathbb{P}^2 .

Пусть теперь π имеет r вырожденных слоев

$$C_1 = C'_1 + C''_1, \quad \dots, \quad C_r = C'_r + C''_r.$$

Тогда $r + K_X^2 = 8$ и $r \leq 2$ поскольку π минимально. Компоненты C'_i, C''_i должны переставляться инволюцией τ . Поэтому $\pi(C_i)$ неподвижны. Следовательно, действие τ на B тривиально. Поэтому множество неподвижных точек – неособая кривая $\Gamma \subset X$, которая двулистно накрывает базу B . Более того, $\Gamma \cap C_i = C'_i \cap C''_i$. Это означает, что морфизм $C \rightarrow B$ разветвлен в точности над точками $\pi(C_i)$. В частности, C связна. Ясно, что существует бирациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{F}_1$, сохраняющее общий слой. Это индуцирует послыное отображение τ на \mathbb{F}_1 . Стягивая отрицательное сечение, мы попадаем на \mathbb{P}^2 . Следовательно, τ – преобразование де Жонкьера. Если $g = 0$, то оно сопряжено линейному.

Случай поверхности дель Пеццо. Теперь рассмотрим случай, когда X – поверхность дель Пеццо с $\rho(X)^G = 1$. Если $K_X^2 = 8$, то как и выше X – квадрика в \mathbb{P}^3 и стереографическая проекция $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из неподвижной точки линеаризует τ . Поэтому мы можем считать, что $K_X^2 \leq 6$ и тогда канонический класс K_X порождает $\text{Pic}(X)^G$. Далее существует прямая $L \subset X$. Дивизор $L + \tau(L)$ инвариантен, и поэтому $L + \tau(L) \sim -aK_X$ для некоторого a . Отсюда

$$2 = -K_X \cdot (L + \tau(L)) = a(-K_X)^2, \quad K_X^2 \leq 2.$$

Положим, $d := K_X^2$. Тогда $a = 2/d$ и $\tau(L) \sim -(2/d)K_X - L$. Классы прямых порождают решетку $\text{Pic}(X)$. Пусть теперь, τ' – инволюция Гейзера (соответственно, Бертини) в случае $d = 2$ (соответственно, $d = 1$). Все вышесказанное применимо и к τ' . Поэтому действия τ и τ' на множестве прямых совпадают. Так как классы прямых порождают решетку $\text{Pic}(X)$, то $\tau \circ \tau'$ действует тривиально на $\text{Pic}(X)$. Следовательно, $\tau = \tau'$.

Задачи

- Докажите, что при общем выборе пучка \mathcal{P} в примере Нагаты 12.4 группа $\mathbb{Z}^8 \subset \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ бигулярно действует на поверхности X . Какие условия общности следует наложить? Покажите, что на X существует бесконечно много (-1) -кривых (и, таким образом, отрицательная часть конуса Мори не является полиэдральной).

2. Пусть E – эллиптическая кривая, имеющая автоморфизм τ порядка 4. Рассмотрим факторповерхность $X := (E \times E)/\langle \tau \rangle$. Докажите, что поверхность X рациональна и ее группа автоморфизмов содержит $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$. Это показывает, что $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$ может быть вложена в группу Кремоны.
3. Докажите, что любое квадратичное преобразование Кремоны является преобразованием де Жонкьера. *Указание.* Используйте 12.5.4.
4. Докажите, что любое квадратичное преобразование Кремоны в некоторых координатах может быть записано в одной из следующих форм:
 - (a) $(x, y) \mapsto (x^{-1}, y^{-1})$ (см. (12.2.1)),
 - (b) $(x, y) \mapsto (x, xy)$,
 - (c) $(x, y) \mapsto (x, y + x^2)$.
5. Разложите квадратичные преобразования Кремоны 4 (b) и (c) в композиции проективных преобразований и стандартных квадратичных инволюций 4 (a).
6. Рассмотрим композицию $\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ двух элементарных преобразований. Какое бирациональное отображение плоскости она индуцирует?
7. Обязательно ли кубическое отображение Кремоны $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ является преобразованием де Жонкьера? *Указание.* Используйте 12.5.4.
8. Приведите пример отображения Кремоны $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ степени 4, которое не является преобразованием де Жонкьера. *Указание.* См. 12.5.4.
9. Обязательно ли отображения χ и $\chi^{-1} \in \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ имеют одинаковую степень? *Указание.* Рассмотрите общее разрешение $f: V \rightarrow \mathbb{P}^2$, $g: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ и вычислите $g^* \mathcal{O}(1) \cdot f^* \mathcal{O}(1)$ двумя способами.
10. Обобщите теорему 12.9 на случай произвольной размерности.
11. Найдите размерности пространств, параметризующих инволюции Гейзера и Бертини.

13. Алгебраическое дополнение

13.1. Конечно порожденные расширения полей.

13.1.1. Лемма. Пусть \mathbb{K} – поле, которое конечно порождено как \mathbb{Z} -алгебра. Тогда \mathbb{K} конечно.

Доказательство. Если $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$, то поле \mathbb{K} конечно порождено как алгебра над своим простым подполем и утверждение – вариант теоремы Гильберта о нулях [48, гл. X, § 2].

Пусть $\text{char } \mathbb{K} = 0$. Снова по теореме Гильберта о нулях \mathbb{K} является конечным расширением поля \mathbb{Q} . Пусть $\theta_1, \dots, \theta_n$ – базис \mathbb{K} над \mathbb{Q} и пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ – система порождающих \mathbb{K} (как \mathbb{Z} -алгебры). Для некоторого целого r все элементы $r\gamma_i$ и $r\theta_j$ являются целочисленными линейными комбинациями $\theta_1, \dots, \theta_n$. Тогда

$$\mathbb{Q}\theta_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}\theta_n = \mathbb{K} \subset \mathbb{Z} \left[\frac{1}{r} \right] \theta_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \left[\frac{1}{r} \right] \theta_n$$

что невозможно.

13.1.2. Следствие. Пусть R – конечно порожденная \mathbb{Z} -алгебра и $\mathfrak{m} \subset R$ – максимальный идеал. Тогда поле R/\mathfrak{m} конечно.

13.2. Теорема Гильберта 90.

13.2.1. Теорема. Пусть \mathbb{K}/\mathbb{k} – расширение Галуа с группой G . Тогда $H^1(G, \mathbb{K}^*) = 0$.

Доказательство. Пусть элемент $a \in H^1(G, \mathbb{K}^*)$ представляется коциклом $\{a_\sigma\}$, $\sigma \in G$. Тогда $a_\sigma \cdot (\sigma a_\tau) = a_{\sigma\tau}$ для всех $\sigma, \tau \in G$. По лемме о линейной независимости характеров (ниже) существует элемент $c \in \mathbb{K}$ такой, что

$$b := \sum_{\tau \in G} a_\tau \cdot (\tau c) \neq 0.$$

Имеем

$$\sigma b = \sum_{\tau \in G} \sigma a_\tau \cdot (\sigma\tau c) = \sum_{\tau \in G} a_{\sigma\tau} a_\sigma^{-1} \cdot (\sigma\tau c) = a_\sigma^{-1} \sum_{\tau \in G} a_{\sigma\tau} \cdot (\sigma\tau c) = a_\sigma^{-1} \cdot b.$$

Следовательно, $a_\sigma = b \cdot (\sigma b^{-1})$, т.е. $\{a_\sigma\}$ – кограница.

13.2.2. Лемма (линейная независимость характеров). Пусть $\chi_i: G \rightarrow \mathbb{K}^*$ – различные гомоморфизмы. Тогда χ_i линейно независимы (как функции $G \rightarrow \mathbb{K}$).

Доказательство. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}. \tag{13.2.3}$$

Выберем n наименьшим. Существует элемент $a \in G$ такой, что $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_i(a) \chi_i = 0 \quad \implies \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\chi_i(a)}{\chi_1(a)} \chi_i = 0.$$

Вычитая последнее равенство из (13.2.3) получим

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(1 - \frac{\chi_i(a)}{\chi_1(a)} \right) \chi_i = 0.$$

Это противоречит нашему выбору n .

13.3. Поля типа c_1 .

13.3.1. Определение. Говорят, что поле \mathbb{k} удовлетворяет свойству c_1 , если любой однородный многочлен $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ степени $d < n$ представляет нуль, т.е. уравнение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ имеет нетривиальное решение в \mathbb{k}^n .

13.3.2. Примеры.

- (i) Очевидно, что алгебраически замкнутое поле является полем типа c_1 .
- (ii) Любое конечное поле имеет тип c_1 (теорема Шевалле, см., например, [48, гл. V, § 10]).
- (iii) Поле типа c_1 должно быть квадратично замкнуто. Поэтому \mathbb{R} и \mathbb{Q} не являются полями типа c_1 .

13.3.3. Теорема. *Если поле \mathbb{k} имеет тип c_1 , то и любое его алгебраическое расширение \mathbb{k}' также имеет тип c_1 .*

Доказательство. Мы можем считать, что \mathbb{k}'/\mathbb{k} конечно. Пусть $f'(\mathbf{x}) = f'(x_1, \dots, x_n)$ – однородная форма степени d над \mathbb{k}' , где $d < n$. Положим $f(\mathbf{x}) := N_{\mathbb{k}'/\mathbb{k}} f'(\mathbf{x})$, где $N_{\mathbb{k}'/\mathbb{k}}: \mathbb{k}' \rightarrow \mathbb{k}$ – нормированное отображение. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_m$ – базис \mathbb{k}' над \mathbb{k} . Запишем

$$x_i = \sum_{j=1}^m y_{i,j} \theta_j.$$

Тогда $f(\mathbf{x})$ будет однородной формой с коэффициентами в \mathbb{k} степени dm от nm переменных $y_{i,j}$. По нашему предположению она представляет 0.

13.4. Теорема Тзена.

13.5. Теорема. *Если \mathbb{k} – алгебраически замкнутое поле и $\mathbb{K} \supset \mathbb{k}$ – его расширение степени трансцендентности 1, то \mathbb{K} имеет тип c_1 .*

Доказательство. По предыдущей теореме мы можем считать, что \mathbb{K}/\mathbb{k} – чисто трансцендентное расширение степени трансцендентности 1. Тогда утверждение вытекает из следующего предложения.

13.5.1. Предложение. *Пусть \mathbb{k} – алгебраически замкнутое поле и $\mathbb{K} = \mathbb{k}(t)$, где t – независимая переменная. Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ – однородная форма степени d над \mathbb{K} , где $d < n$. Тогда f представляет 0 в \mathbb{K} .*

Доказательство. Положим $\mathbf{d} := (d_1, \dots, d_n)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{d}} := x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$. Тогда f запишется в виде

$$f = \sum_{\mathbf{d}} u_{\mathbf{d}} \mathbf{x}^{\mathbf{d}}, \quad \sum d_i = d < n, \quad u_{\mathbf{d}} \in \mathbb{k}(t).$$

Ясно, что мы можем считать коэффициенты $u_{\mathbf{d}} = u_{\mathbf{d}}(t)$ многочленами от t . Пусть $r := \max \deg u_{\mathbf{d}}(t)$. Решение уравнения $f = 0$ также можно искать среди многочленов $x_i = p_i(t) = \sum_{j=0}^l v_{i,j} t^j$. Подставляя в f получим

$$f = \sum_{\mathbf{d}} u_{\mathbf{d}}(t) \left(\sum_{j=0}^l v_{1,j} t^j \right)^{d_1} \cdots \left(\sum_{j=0}^l v_{n,j} t^j \right)^{d_n}.$$

Далее, раскрывая скобки и приравнивая к 0 коэффициенты при t^s , получим систему из $1 + r + l \sum d_i = 1 + r + ld$ однородных уравнений от $(l+1)n$ неизвестных $v_{i,j}$. При $l \gg 0$ число неизвестных больше чем число уравнений и система должна иметь ненулевое решение.

13.6. Трансцендентные сепарабельные расширения полей.

13.6.1. Предложение-определение. *Пусть \mathbb{k} – поле, а \mathbb{K}/\mathbb{k} и \mathbb{L}/\mathbb{k} – его расширения (мы считаем, что все поля содержатся в одном алгебраически замкнутом поле). Будем говорить, что \mathbb{K} и \mathbb{L} линейно отделены над \mathbb{k} , если выполняются следующие эквивалентные условия:*

- (i) любое конечное множество $\{a_i\} \subset \mathbb{K}$, линейно независимое над \mathbb{k} , является линейно независимым и над \mathbb{L} ;
- (ii) любое конечное множество $\{b_j\} \subset \mathbb{L}$, линейно независимое над \mathbb{k} , является линейно независимым и над \mathbb{K} ;
- (iii) если $\{a_i\} \subset \mathbb{K}$ и $\{b_j\} \subset \mathbb{L}$ – линейно независимые над \mathbb{k} конечные множества, то и множество $\{a_i b_j\} \subset \mathbb{KL}$ линейно независимо над \mathbb{k} ;
- (iv) естественный гомоморфизм $\varphi: \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{KL}$ инъективен.

Набросок доказательства. Импликация (i) \Rightarrow (iii) очевидна. Докажем (iii) \Rightarrow (i) от противного: пусть элементы a_1, \dots, a_n линейно независимы над \mathbb{k} , но зависимы над \mathbb{L} . Тогда $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ для некоторых $b_i \in \mathbb{L}$ (не всех равных нулю). Мы выберем a_i так, что n минимально. Согласно (iii) элементы b_i линейно зависимы над \mathbb{k} . Тогда с точностью до перестановки мы можем считать, что $b_n = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n-1} b_{n-1}$, $\lambda_j \in \mathbb{k}$. Подставляя, получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i a_n) b_i = 0.$$

По нашему предположению минимальности n имеем $a_i + \lambda_i a_n = 0$ для всех $i = 1, \dots, n-1$. Противоречие. Таким образом, (i) \Leftrightarrow (iii). Аналогично, (ii) \Leftrightarrow (iii).

Для доказательства (iii) \Leftrightarrow (iv) рассмотрим линейно независимые над \mathbb{k} множества $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{K}$ и $\{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathbb{L}$. Пусть $V \subset \mathbb{K}$ и $W \subset \mathbb{L}$ векторные подпространства над \mathbb{k} , порожденные элементами $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, соответственно. Ясно, что гомоморфизм $V \otimes_{\mathbb{k}} W \rightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{L}$ инъективен и $\{a_i \otimes b_j\}$ – базис $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ над \mathbb{k} . Таким образом, $\varphi|_{V \otimes_{\mathbb{k}} W}$ инъективен тогда и только тогда, когда $\{a_i b_j = \varphi(a_i \otimes b_j)\}$ – базис $VW \subset \mathbb{KL}$ над \mathbb{k} .

Напомним стандартное обозначение: для поля \mathbb{k} характеристики $p > 0$ через \mathbb{k}^{1/p^m} обозначается поле, полученное из \mathbb{k} присоединением корней степени p^m из всех элементов \mathbb{k} .

13.6.2. Предложение-определение [48, гл. X, § 6]. Пусть \mathbb{k} – поле характеристики $p > 0$. Будем говорить, что (необязательно алгебраическое) расширение \mathbb{K}/\mathbb{k} сепарабельно, если выполняются следующие эквивалентные условия:

- (i) \mathbb{K} и $\mathbb{k}^{1/p}$ линейно отделены над \mathbb{k} ;
- (ii) \mathbb{K} и \mathbb{k}^{1/p^m} линейно отделены над \mathbb{k} для некоторого m ;
- (iii) всякое промежуточное подполе $\mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{k}$, конечно порожденное над \mathbb{k} , имеет базис трансцендентности t_1, \dots, t_n над \mathbb{k} такой, что $\mathbb{L}/\mathbb{k}(t_1, \dots, t_n)$ – сепарабельное алгебраическое расширение.

Для полей характеристики 0 все расширения сепарабельны по определению.

13.6.3. Предложение. Пусть \mathbb{K}/\mathbb{k} – конечно порожденное расширение степени трансцендентности 1 над совершенным полем \mathbb{k} и пусть \mathbb{L}/\mathbb{K} – расширение такое, что \mathbb{K} алгебраически замкнуто в \mathbb{L} . Тогда \mathbb{L}/\mathbb{K} – сепарабельное расширение.

Доказательство. Пусть p – характеристика поля \mathbb{k} ($p > 0$). Так как поле \mathbb{k} совершенно, то \mathbb{K} и $\mathbb{k}^{1/p} = \mathbb{k}$ линейно отделены над \mathbb{k} . Согласно предложению 13.6.2 существует трансцендентный элемент $t \in \mathbb{K}$ такой, что расширение $\mathbb{K}/\mathbb{k}(t)$ конечно и сепарабельно.

Тогда $\mathbb{K}^{1/p} = \mathbb{K}(t^{1/p})$. В самом деле, так как $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}^{1/p}$, то включение $\mathbb{K}(t^{1/p}) \subset \mathbb{K}^{1/p}$ очевидно. С другой стороны, пусть $u \in \mathbb{K}$ – примитивный элемент конечного и сепарабельного расширения $\mathbb{K}/\mathbb{k}(t)$. Тогда $\mathbb{K}^{1/p} = \mathbb{K}(t^{1/p}, u^{1/p})$. Так как u сепарабелен над $\mathbb{k}(t)$, то $u^{1/p}$ сепарабелен над $\mathbb{k}(t^{1/p})$ и над $\mathbb{k}(t^{1/p}, u)$. Следовательно, $u^{1/p} \in \mathbb{k}(t^{1/p}, u)$ и $\mathbb{K}^{1/p} = \mathbb{k}(t^{1/p}, u) \subset \mathbb{K}(t^{1/p})$. Таким образом, $\mathbb{K}^{1/p} = \mathbb{K}(t^{1/p})$, что и требовалось.

Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что \mathbb{L} и $\mathbb{K}^{1/p} = \mathbb{K}(t^{1/p})$ линейно отделены над \mathbb{K} . По условию $t \in \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, но $t^{1/p} \notin \mathbb{L}$ (потому что \mathbb{K} алгебраически замкнуто в \mathbb{L}). Отсюда $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{1/p} = \mathbb{L}(t^{1/p})$. Это и доказывает предложение.

Задачи

1. Пусть \mathbb{K}/\mathbb{k} – расширение Галуа с группой G . Докажите, что $H^1(G, \mathbb{K}) = 0$.
2. Пусть поле \mathbb{k} имеет расширение степени n . Докажите, что существует однородная форма от n переменных степени n над \mathbb{k} , не представляющая нуль.
3. Докажите, что поле рациональных функций от двух переменных $\mathbb{k}(t_1, t_2)$ не является полем типа c_1 .
4. Обобщите предложение 13.5.1 на случай квазиоднородных многочленов: ненулевая квазиоднородная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ – степени $d < \sum \deg x_i$ над $\mathbb{k}(t)$, представляет 0.

Список литературы

- [1] Ju. I. Manin, “Рациональные поверхности над совершенными полями”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1966, № 30, 55–97.
- [2] S. Mori, “Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective”, *Ann. of Math. (2)*, **115** (1982), 133–176.
- [3] X. Клеменс, Я. Коллар, С. Мори, *Многомерная комплексная геометрия*, Мир, М., 1993.
- [4] Yu. Prokhorov, “ G -Fano threefolds. I”, *Adv. Geom.*, **13:3** (2013), 389–418.
- [5] Yu. Prokhorov, “ G -Fano threefolds. II”, *Adv. Geom.*, **13:3** (2013), 419–434.
- [6] Ю. И. Манин, *Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972.
- [7] C. Salgado, D. Testa, A. Várilly-Alvarado, Anthony, “On the unirationality of del Pezzo surfaces of degree 2”, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **90:1** (2014), 121–139.
- [8] В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых”, *Матем. сб.*, **74:4** (1967), 608–638.
- [9] В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса”, *Матем. сб.*, **83:1** (1970), 90–119.
- [10] В. А. Исковских, “Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43:1** (1979), 19–43.
- [11] В. А. Исковских, “Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори”, *УМН*, **51:4** (1996), 3–72.
- [12] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*. Т. 1. *Алгебраические многообразия в проективном пространстве*, Наука, М., 1988; *Основы алгебраической геометрии*. Т. 2. *Схемы. Комплексные многообразия*, Наука, М., 1988.
- [13] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [14] И. Р. Шафаревич, Б. Г. Авербух, Ю. Р. Вайнберг, А. Б. Жижченко, Ю. И. Манин, Б. Г. Мойшезон, Г. Н. Тюрин, А. Н. Тюрин, “Алгебраические поверхности”, Тр. МИАН СССР, **75**, Наука, М., 1965, 3–215.
- [15] В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич, “Алгебраические поверхности”, *Алгебраическая геометрия – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **35**, ВИНТИ, М., 1989, 131–263.
- [16] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque, **54**, Soc. Math. France, Paris, 1978.
- [17] M. Reid, “Chapters on algebraic surfaces”, *Complex Algebraic Geometry*, IAS/Park City Math. Ser., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 3–159.
- [18] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, **32**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [19] Ю. И. Манин, М. А. Цфасман, “Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика”, *УМН*, **41:2** (1986), 43–94.
- [20] Дж. Милн, *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983.
- [21] J.-P. Serre, “Morphismes universels et variétés d’Albanese”, *Variétés de Picard*, Sémin. C. Chevalley, **3**, 1958/59, 1960.
- [22] Д. Мамфорд, *Лекции о кривых на алгебраической поверхности*, Мир, М., 1968.
- [23] A. Grothendieck, “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1965, № 24, 1–231.
- [24] A. Grothendieck, “Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1966, № 28, 1–255.
- [25] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *Algebra, Arithmetic, and Geometry: in Honor of Yu. I. Manin*, Vol. I, *Progr. Math.*, **269**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009, 443–548.
- [26] I. V. Dolgachev, *Classical Algebraic Geometry. A Modern View*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [27] V. A. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Algebraic Geometry. V. Fano Varieties*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [28] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Т. 1, 2, Мир, М., 1982.
- [29] I. V. Dolgachev, “On Elements of Order p^s in the Plane Cremona Group over a Field of Characteristic p ”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **264**, МАИК, М., 2009, 55–62.
- [30] Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.
- [31] Ю. Г. Прохоров, *Особенности алгебраических многообразий*, МЦНМО, М., 2009.
- [32] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Гл. 4–6. *Группы Кокстера и системы Гитса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, *Элементы математики*, Мир, М., 1972.
- [33] I. V. Dolgachev, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, *Adv. Stud. Pure Math.*, **60**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 1–49.

- [34] N. I. Shepherd-Barron, “The rationality of quintic Del Pezzo surfaces—a short proof”, *Bull. London Math. Soc.*, **24**:3 (1992), 249–250.
- [35] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989.
- [36] J. Kollár, “Unirationality of cubic hypersurfaces”, *J. Inst. Math. Jussieu*, **1**:3 (2002), 467–476.
- [37] А. В. Воскресенский, *Алгебраические торы*, Наука, М., 1977.
- [38] V. A. Iskovskikh, “Two non-conjugate embeddings of $S_3 \times Z_2$ into the Cremona group. II”, *Algebraic geometry in East Asia—Hanoi 2005*, Adv. Stud. Pure Math., **50**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, 251–267.
- [39] A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.
- [40] W. van der Kulk, “On polynomial rings in two variables”, *Nieuw Arch. Wiskunde* (3), **1** (1953), 33–41.
- [41] М. Х. Гизатуллин, “Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 909–970.
- [42] В. А. Исковских, “Простое доказательство теоремы Гизатуллина”, *Теория Галуа, кольца, алгебраические группы и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **183**, Наука. Ленинградское отд., Л., 1990, 111–116.
- [43] В. А. Исковских, “Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем”, *Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **200**, Наука, М., 1991, 157–170.
- [44] В. А. Исковских, Ф. К. Кабдыкаиров, С. Л. Трегуб, “Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:3 (1993), 3–69.
- [45] L. Bayle, A. Beauville, “Birational involutions of \mathbb{P}_2 ”, *Asian J. Math.*, **4**:1 (2000), 11–17.
- [46] T. de Fernex, “On planar Cremona maps of prime order”, *Nagoya Math. J.*, **174** (2004), 1–28.
- [47] J. Blanc, “Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane”, *Groups Geom. Dyn.*, **3**:2 (2009), 215–266.
- [48] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 24

Юрий Геннадьевич Прохоров

Рациональные поверхности

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Сдано в набор 06.05.2015. Подписано в печать 18.09.2015.

Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/noc/> e-mail: pupyrev@mi.ras.ru