Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 21

Издание выходит с 2006 года

А. Г. Сергеев

Лекции об универсальном пространстве Тейхмюллера

МИАН

Москва
2013

УДК 517.5
ББК (В)22.16
Л43

Сергеев А. Г.

Л43 Лекции об универсальном пространстве Тейхмюллера – М.: МИАН, 2013. – 130 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 21).

ISBN 978-5-98419-050-3

Серия "Лекционные курсы НОЦ" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии "Лекционные курсы НОЦ" публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящий курс лекций был прочитан А. Г. Сергеевым в 2011 г. в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

ISBN 978-5-98419-050-3

Оглавление

Предисловие

Понятие универсального пространства Тейхмюллера возникло в работах Альфорса и Берса по квазиконформным отображениям. Это пространство, обозначаемое через $\mathcal{T}$, определяется как фактор пространства квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности по дробно-линейным автоморфизмам единичного круга. При этом квазисимметричными называются гомеоморфизмы окружности, которые продолжаются внутрь круга как квазиконформные отображения. Приведенное определение, привлекательное ввиду своей краткости, не объясняет однако, почему указанное пространство называется "универсальным пространством Тейхмюллера". Этим названием оно обязано тому, что все классические пространства Тейхмюллера вкладываются в $\mathcal{T}$ в виде комплексных подмногообразий. (Напомним, что классическое пространство Тейхмюллера, ассоциированное с компактной римановой поверхностью конечного рода, параметризует различные комплексные структуры на этой поверхности, которые получаются из исходной структуры квазиконформными деформациями.)

Помимо классических пространств Тейхмюллера пространство $\mathcal{T}$ содержит пространство $\mathcal{S}$ диффеоморфизмов окружности, рассматриваемых с точностью до дробно-линейных автоморфизмов круга. Последнее пространство получило известность в связи с теорией гладких струн. Пространство $\mathcal{S}$ параметризует различные комплексные структуры на фазовом пространстве этой теории и играет важнейшую роль в ее квантовании. Отметим еще, что в отличие от классических пространств Тейхмюллера пространство $\mathcal{S}$ целиком располагается в регулярной части $\mathcal{T}$.

Уже из приведенного краткого описания свойств универсального пространства Тейхмюллера можно догадаться о его значении для теории квазиконформных отображений и ее приложений. Для нас однако главной мотивацией подробного изучения этого пространства явилась его связь с теорией струн. В нашей предыдущей книге [1] была подробно исследована связь пространства диффеоморфизмов $\mathcal{S}$ с теорией гладких струн. При этом стало понятно, что на самом деле нет никаких физических оснований для того, чтобы рассматривать в струнной теории только гладкие объекты – такое ограничение продиктовано скорее математическими соображениями удобства работы с гладкими отображениями. Гораздо более естественно выбирать в качестве фазового пространства теории вместо пространства гладких струн его соболевское пополнение $H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, R^d)$ как наиболее широкое в шкале соболевских пространств, на котором еще корректно определена симплектическая форма теории струн. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, также как пространство $\mathcal{S}$ в случае гладких струн, параметризует различные комплексные структуры на этом фазовом пространстве. (Подробнее о связи универсального пространства Тейхмюллера с теорией струн см. послесловие к этой книге.) После того, как мы выбрали в качестве фазового пространства теории указанное выше соболевское пространство, возникает задача квантования пространства $\mathcal{T}$. И тут проявляется главная трудность при работе с "негладкими" объектами, которая состоит в том, что к пространству $\mathcal{T}$ не применимы методы квантования, разработанные для гладких струн: дираковская схема квантования, использовавшаяся при квантовании пространства диффеоморфизмов $\mathcal{S}$, не работает в случае универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Для квантования этого пространства приходится применять принципиально иную схему, основанную на соображениях из некоммутативной геометрии Конна.

Основой для данной книги послужили лекции, прочитанные автором слушателям Научно-образовательного центра МИАН весной 2011 г. Хотя книга называется курсом лекций и разделена на отдельные части-лекции, эти части следует воспринимать скорее как отдельные темы, нежели "реальные" лекции (отсюда колебания в их продолжительности). В книге имеется довольно большое число задач, которые давались слушателям курса. Мы не делили их на упражнения и "трудные" задачи, предоставляя читателю возможность разобраться в этом самому. Можно поручиться только за то, что среди них нет нерешенных проблем.

В заключение хочу поблагодарить всех слушателей курса, которые своими вопросами и замечаниями способствовали улучшению первоначального текста лекций.

Москва, февраль 2012 года А. Г. Сергеев

Глава 1. Квазиконформные отображения

В этой главе излагаются общие свойства квазиконформных отображений, на которых базируется теория универсального пространства Тейхмюллера. Даются три различных определения квазиконформных отображений комплексной плоскости – как отображений с контролируемым растяжением (п. I.2), как решений уравнения Бельтрами (п. I.3), и геометрическое определение в терминах конформных модулей (п. III.2).

Доказываются основные теоремы о существовании (п. II.2) и единственности (п. II.1) квазиконформных отображений.

Квазиконформные гомеоморфизмы области на себя составляют группу. Все отображения из этой группы непрерывны вплоть до границы, а их граничные значения называются квазисимметричными гомеоморфизмами. Внутреннее описание квазисимметричных гомеоморфизмов дается теоремой Берлинга–Альфорса (п. III.3).

Лекция I. Определение квазиконформности

I.1. Квазиконформные диффеоморфизмы. Понятие конформности происходит из оптики, где оно означает, что сечение кругового светового пучка, ортогональное оси этого пучка, остается круговым по мере удаления от источника света.

В математической интерпретации это понятие формулируется в виде следующего определения. Сохраняющее ориентацию гладкое отображение комплексной плоскости *w конформно в точке z*, если касательное к нему отображение $w_*(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, задаваемое формулой

$$w_*(z)(\zeta) = w(z) + \frac{\partial w}{\partial z}(z)(\zeta - z) + \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}(z)(\overline{\zeta} - \overline{z}),$$

переводит окружности с центром в точке z в окружности с центром в точке $w(z)$.

Иначе говоря, дифференциал $dw(z)$ является невырожденным линейным отображением, представляющимся в виде композиции поворота с растяжением.

По аналогии с этим, мы можем дать следующее геометрическое определение гладких квазиконформных отображений. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм w комплексной плоскости называется *квазиконформным*, если касательное к нему отображение $w_*(z)$, переводящее окружности с центром в точке z в эллипсы с центром в точке $w(z)$, удовлетворяет следующему условию: дилатации указанных эллипсов[1] ограничены константой, не зависящей от точки z.

Попытаемся превратить это геометрическое определение в аналитическое. Пусть w есть сохраняющий ориентацию диффеоморфизм комплексной плоскости. Обозначим через

$$\partial_\theta w(z) = \lim_{\rho\to 0} \frac{w(z+\rho e^{i\theta}) - w(z)}{\rho e^{i\theta}}$$

его производную по направлению θ в точке z. Простое вычисление показывает, что эта производная равна

$$\partial_\theta w(z) = \partial w + \overline{\partial} w \cdot e^{-2i\theta},$$

где

$$\partial w := \frac{\partial w}{\partial z}(z), \qquad \overline{\partial} w := \frac{\partial w}{\partial \overline{z}}(z).$$

Отсюда

$$\max_\theta |\partial_\theta w(z)| = |\partial w| + |\overline{\partial} w|, \qquad \min_\theta |\partial_\theta w(z)| = |\partial w| - |\overline{\partial} w| > 0.$$

Величина $|\partial w| - |\overline{\partial} w|$ всюду положительна ввиду положительности якобиана $J_w = |\partial w|^2 - |\overline{\partial} w|^2$ диффеоморфизма w, сохраняющего ориентацию.

Дилатация искомого эллипса с центром в точке $w(z)$ равна

$$D_w(z) = \frac{\max_\theta |\partial_\theta w(z)|}{\min_\theta |\partial_\theta w(z)|} = \frac{|\partial w| + |\overline{\partial} w|}{|\partial w| - |\overline{\partial} w|}\,.$$

В частности, отображение w всюду конформно $\Leftrightarrow$ $D_w \equiv 1$ $\Leftrightarrow$ $\overline{\partial} w \equiv 0$.

[1] *Дилатацией* эллипса называется отношение длины большой полуоси эллипса к длине его малой полуоси.

Задача I.1. Проверьте, что дилатация D_w является конформным инвариантом отображения w, т.е.

$$D_w(z) = D_{h\circ w\circ g^{-1}}(g(z))$$

для конформных отображений h и g.

Определение I.1. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ области $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на область $\mathcal{D}' \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется K-*квазиконформным* в области $\mathcal{D}$, если

$$D_w(z) \leqslant K$$

для всех $z \in \mathcal{D}$. Иначе говоря,

$$\max_\theta |\partial_\theta w(z)| \leqslant K \min_\theta |\partial_\theta w(z)| \tag{I.1}$$

для всех $z \in \mathcal{D}$.

I.2. Определение квазиконформных отображений. Попытаемся обобщить данное в предыдущем пункте определение I.1 на негладкие гомеоморфизмы. Первая идея, которая приходит в голову – определить квазиконформные отображения как сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, которые дифференцируемы почти всюду в $\mathcal{D}$ и удовлетворяют условию (I.1) для почти всех точек $z \in \mathcal{D}$. Однако, как показывают контрпримеры, такое определение будет расходиться с геометрическим определением квазиконформных отображений в терминах конформных прямоугольников, которое мы дадим ниже в п. III.2.

Правильное определение квазиконформных отображений получится, если вместо условия дифференцируемости почти всюду потребовать выполнения условия абсолютной непрерывности на прямоугольниках.

Определение I.2. Непрерывная вещественнозначная функция u, заданная в области $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$, называется *абсолютно непрерывной на прямоугольниках* (ПАН), если для любого прямоугольника

$$\Pi = \{x + iy : a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\} \subset \mathcal{D}$$

функция $x \mapsto u(x + iy)$ абсолютно непрерывна по $x \in [a, b]$ для почти всех $y \in [c, d]$, а функция $y \mapsto u(x + iy)$ абсолютно непрерывна по $y \in [c, d]$ для почти всех $x \in [a, b]$. Комплекснозначная функция $w = u + iv$, заданная в области $\mathcal{D}$, обладает свойством ПАН, если этим свойством обладают ее вещественная часть u и мнимая часть v.

Замечание I.1. Пользуясь стандартными теоремами из вещественного анализа, можно показать, что функция, обладающая свойством ПАН в области $\mathcal{D}$, имеет конечные частные производные по x и y почти всюду в $\mathcal{D}$.

Определение I.3. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм w, заданный в области $\mathcal{D}$, называется *K-квазиконформным*, если:
1) он обладает свойством ПАН в области $\mathcal{D}$;
2) $\max_\theta |\partial_\theta w(z)| \leqslant K \min_\theta |\partial_\theta w(z)|$ для почти всех $z \in \mathcal{D}$.

I.3. Уравнение Бельтрами. Пусть $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ есть K-квазиконформное отображение, дифференцируемое в точке $z \in \mathcal{D}$. Тогда неравенство из определения I.3

$$\frac{\max_\theta |\partial_\theta w(z)|}{\min_\theta |\partial_\theta w(z)|} = \frac{|\partial w| + |\overline{\partial} w|}{|\partial w| - |\overline{\partial} w|} \leqslant K$$

можно переписать в виде

$$|\overline{\partial} w(z)| \leqslant \frac{K-1}{K+1} |\partial w(z)|.$$

Так как в точке z якобиан $J_w(z)$ положителен, то $\partial w(z) \neq 0$ и можно рассмотреть функцию

$$\mu(z) := \frac{\overline{\partial} w(z)}{\partial w(z)}\,.$$

Эта функция, по построению определенная почти всюду в $\mathcal{D}$, называется *комплексной дилатацией* отображения w. Она измерима (поскольку функция w непрерывна) и удовлетворяет оценке

$$\mu(z) \leqslant \frac{K-1}{K+1} < 1,$$

иначе говоря, μ принадлежит единичному шару банахова пространства $L^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{C})$.

Геометрически, $\mu(z)$ отвечает за дилатацию эллипсов, получающихся из окружностей с центром в точке z под действием касательного отображения $w_*(z)$. Конкретно, указанная дилатация равна

$$\frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}\,.$$

Если $\mu(z) = 0$, то отображение w конформно в точке z. Если же $\mu(z) \neq 0$, то угол $\frac{1}{2}\arg\mu(z)$ задает направление максимального растяжения отображения w в точке z в том смысле, что при $\theta = \frac{1}{2}\arg\mu(z)$ модуль $|\partial_\theta w(z)|$ производной по направлению достигает максимума.

Определение I.4. Уравнение

$$\overline{\partial} w = \mu\, \partial w \tag{I.2}$$

на функцию w в области $\mathcal{D}$, в котором μ – заданная измеримая ограниченная функция в $\mathcal{D}$ с $\|\mu\|_\infty < 1$, называется *уравнением Бельтрами*. В случае, когда $\mu \equiv 0$, это уравнение совпадает с уравнением Коши–Римана.

Замечание I.2. Функцию μ в уравнении (I.2) принято называть *дифференциалом Бельтрами*, поскольку при замене переменной она должна вести себя, в силу уравнения (I.2), как дифференциал. Более точно, если f – конформное отображение, определенное в области $\mathcal{D}$, то функция μ под действием отображения f должна преобразовываться как

$$\mu(f(z)) = \mu(z)\frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}.$$

Напомним, что функцию φ, заданную в области $\mathcal{D}$, принято называть *дифференциалом типа* (m, n), где $m, n \in \mathbb{Z}$, если форма $\varphi\, dz^m\, d\bar{z}^n$ остается инвариантной при конформных заменах координаты z. С этой точки зрения дифференциал Бельтрами является дифференциалом типа $(-1, 1)$.

Будем говорить, что функция w является L^p*-решением* уравнения Бельтрами (I.2), если производные w первого порядка принадлежат $L^p(\mathcal{D})$, а само уравнение (I.2) выполняется почти всюду в $\mathcal{D}$.

Уравнение Бельтрами можно было бы взять за определение квазиконформных отображений, поскольку справедлива следующая теорема, доказательство которой можно найти в книге [2, I.4.2].

Теорема I.1. *Гомеоморфизм w, определенный в области $\mathcal{D}$, является K-квазиконформным тогда и только тогда, когда он является L^2-решением уравнения Бельтрами* (I.2) *с функцией $\mu \in L^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ такой, что $\|\mu\|_\infty < 1$.*

Краткое содержание лекции I.

Были даны два определения квазиконформных отображений областей на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Согласно первому определению, сохраняющий ориентацию гомеоморфизм w, заданный в области $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$, называется K-квазиконформным, если он абсолютно непрерывен на прямоугольниках, а его производная по направлению обладает свойством

$$\max_{\theta} |\partial_\theta w(z)| \leqslant K \min_{\theta} |\partial_\theta w(z)|$$

для почти всех $z \in \mathcal{D}$.

Согласно второму определению в терминах дифференциалов Бельтрами, сохраняющий ориентацию гомеоморфизм w, заданный в области $\mathcal{D}$, является квазиконформным $\Leftrightarrow$ он задает L^2-решение уравнения Бельтрами

$$\overline{\partial} w = \mu\, \partial w,$$

где функция μ, равная почти всюду

$$\mu(z) := \frac{\overline{\partial} w(z)}{\partial w(z)}\,,$$

называется комплексной дилатацией или дифференциалом Бельтрами. Она принадлежит единичному шару пространства $L^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{C})$.

Лекция II. Теоремы единственности и существования

II.1. Композиция квазиконформных отображений. Теорема единственности. Пусть в области $\mathcal{D}$ заданы два квазиконформных отображения: отображение f с комплексной дилатацией μ_f и отображение g с комплексной дилатацией μ_g. Тогда композиция $f \circ g^{-1}$ снова является квазиконформным отображением. Более того, имеет место следующая

Теорема II.1 (теорема композиции). *Отображение, обратное к K-квазиконформному отображению, снова является K-квазиконформным. Композиция K_1-квазиконформного отображения $f_1\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ и K_2-квазиконформного отображения $f_2\colon \mathcal{D}' \to \mathcal{D}''$ является K_1K_2-квазиконформным отображением.*

Это утверждение, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения, нетрудно получить, пользуясь геометрическим определением квазиконформных отображений, которое будет дано ниже в п. III.2.

Задача II.1. Докажите формулу композиции для дифференциалов Бельтрами

$$\mu_{f\circ g^{-1}}(g(z)) = \frac{\mu_f(z)-\mu_g(z)}{1-\mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}}\left[\frac{\partial g(z)}{|\partial g(z)|}\right]^2,$$

которая выполняется для почти всех $z \in \mathcal{D}$.

Теорема II.2 (теорема единственности). *Пусть f и g – два квазиконформных отображения, заданных в области $\mathcal{D}$, комплексные дилатации которых совпадают почти всюду в $\mathcal{D}$:*

$$\mu_f = \mu_g.$$

Тогда отображения $f\circ g^{-1}$ и $g\circ f^{-1}$ конформны. Композиция $h\circ f$ отображения f с произвольным конформным отображением h, заданным в области $f(\mathcal{D})$, является квазиконформным отображением с той же комплексной дилатацией, что и у отображения f.

Доказательство. Из формулы композиции следует, что $\mu_{f\circ g^{-1}} = 0$ почти всюду в $\mathcal{D}$. Тем самым, функция $f \circ g^{-1}$ удовлетворяет почти всюду в $g(\mathcal{D})$ уравнению Коши–Римана и, как квазиконформное отображение, обладает L^2-производными первого порядка в этой области (согласно теореме I.1). По лемме Вейля (см. [3]) отображение $f \circ g^{-1}$ голоморфно и потому конформно в $g(\mathcal{D})$. Аналогичным образом доказывается конформность отображения $g\circ f^{-1}$. Последнее утверждение теоремы о том, что $\mu_{h\circ f} = \mu_f$ для конформного отображения, заданного в области $f(\mathcal{D})$, немедленно вытекает из формулы композиции.

II.2. Теорема существования.

Теорема II.3 (теорема существования). *Для любой измеримой ограниченной функции μ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $\|\mu\|_\infty < 1$ найдется решение w уравнения Бельтрами*

$$\bar\partial w = \mu \partial w,$$

являющееся квазиконформным отображением с комплексной дилатацией, совпадающей почти всюду с μ.

Приведем основные этапы доказательства этой теоремы, подробности которого можно найти в книге Альфорса [3].

Предположим сначала, что функция μ *имеет компактный носитель*.

Лемма II.1. *В предположении, что μ имеет компактный носитель, существует единственное решение w уравнения Бельтрами* (I.2), *удовлетворяющее условиям*

$$w(0) = 0, \qquad \partial w - 1 \in L^p,$$

где $p > 2$ – некоторое число, которое будет выбрано позже. Указанное решение уравнения Бельтрами будет называться нормальным.

Рассмотрим вместо уравнения (I.2) систему уравнений

$$\begin{cases} \partial w = f, \\ \overline{\partial} w = \mu f, \end{cases} \tag{II.1}$$

где f – некоторая измеримая ограниченная функция. Ясно, что каждое решение системы (II.1) будет давать некоторое решение уравнения Бельтрами (I.2). Однако система (II.1) переопределена – необходимым условием ее разрешимости является совпадение почти всюду смешанных производных правых частей

$$\overline{\partial} f = \partial(\mu f) = f \partial\mu + \mu\partial f. \tag{II.2}$$

Для того, чтобы подобрать функцию f, дающую решение системы (II.1) и, тем самым, уравнения Бельтрами (I.2), можно действовать следующим образом. Сначала, пользуясь 2-м уравнением (II.1), запишем w в виде решения $\overline{\partial}$-уравнения, задаваемого интегралом Коши–Грина, плюс неизвестная голоморфная функция W. Затем, подставляя это выражение в 1-е уравнение (II.1), получим интегральное уравнение на функцию f. При этом функцию W удается фиксировать с помощью условия $\partial w - 1 \in L^p$, а сам интегральный оператор окажется сжимающим благодаря условию $\|\mu\|_\infty < 1$. Поэтому полученное интегральное уравнение можно решить методом последовательных приближений. Такова стратегия решения системы (II.1).

Прежде, чем приступить к ее реализации, напомним свойства интегрального оператора Коши–Грина, задаваемого формулой

$$Ph(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} h(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) d\xi\, d\eta, \qquad \zeta = \xi + i\eta,$$

(этот оператор отличается от стандартного оператора Коши–Грина, задаваемого интегралом $-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{h(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta$, нормировкой $Ph(0)=0$). Оператор Коши–Грина $Ph(z)$ корректно определен на функциях $h\in L^p$ с любым $p>2$ и задает непрерывную (и даже непрерывную по Гёльдеру с показателем $1-\frac{2}{p}$) функцию от z. Частные производные функции $Ph(z)$ в обобщенном смысле удовлетворяют уравнениям

$$\overline{\partial}(Ph)=h, \qquad \partial(Ph)=Th, \tag{II.3}$$

где T – *интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда*:

$$Th(z)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P.V.}\!\int_{\mathbb{C}}\frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta.$$

Интеграл в этой формуле берется в смысле главного значения, иначе говоря, он равен по определению

$$Th(z)=-\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|\zeta-z|>\epsilon}\frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\xi\,d\eta.$$

Оператор Кальдерона–Зигмунда корректно определен на функциях $h\in L^p$ с любым $p>1$ и ограничен в норме L^p:

$$\|Th\|_{L^p}\leqslant C_p\|h\|_{L^p},$$

причем оценку C_p можно выбрать так, чтобы $C_p\to 1$ при $p\to 2$. Пользуясь этим свойством, выберем число $p>2$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|\mu\|_\infty C_p<1$.

Вернемся теперь к изложенной выше схеме построения решения системы (II.1). Рассмотрим функцию

$$W:=w-P(\overline{\partial}w).$$

Частная производная этой функции по $\overline{z}$ равна нулю, поэтому W есть целая функция. С другой стороны, из условия $\partial w-1\in L^p$ вытекает, что производная этой функции по z, равная

$$\partial W=\partial w-T(\overline{\partial}w),$$

удовлетворяет условию $\partial W-1\in L^p$, поскольку $\overline{\partial}w=\mu\partial w\in L^p$ (напомним, что μ по предположению имеет компактный носитель!). Это возможно только в том случае, если

$$\partial W\equiv 1 \quad\Longrightarrow\quad W(z)=z+\mathrm{const}.$$

Константа в последнем равенстве равна нулю ввиду нормировки $w(0) = 0$, поэтому
$$w = z + P(\overline{\partial} w).$$
Дифференцируя это соотношение по z, получим
$$\partial w = 1 + T(\overline{\partial} w) = 1 + T(\mu \partial w) = f \tag{II.4}$$
в силу 1-го уравнения (II.1). Тем самым, мы получили интегральное уравнение на функцию ∂w, в котором оператор $T \circ \mu$ является сжимающим, поскольку
$$\|T \circ \mu\|_{L^p} \leqslant \|\mu\|_\infty C_p < 1.$$
Подставляя в уравнение (II.4) $f = h + 1$, получим интегральное уравнение на функцию h:
$$h = T(\mu h) + T\mu.$$
Единственное решение $h \in L^p$ этого уравнения дает нам требуемое решение уравнения Бельтрами (I.2), задаваемое формулой
$$\mu = P(\mu(h+1)) + z.$$
Действительно, $\mu(h+1) \in L^p$, поскольку μ имеет компактный носитель. Поэтому функция $P(\mu(h+1))$ корректно определена и непрерывна. Кроме того, $w(0) = 0$ и
$$\begin{cases} \overline{\partial} w = \overline{\partial} P(\mu(h+1)) = \mu(h+1), \\ \partial w = \partial P(\mu(h+1)) + 1 = T(\mu(h+1)) + 1 = h + 1. \end{cases}$$

Лемма II.2. *Предположим, дополнительно к условиям леммы II.1, что функция μ является C^1-гладкой и покажем, что при этом условии нормальное решение системы (II.1) является C^1-гладким гомеоморфизмом.*

Замечание II.1. Для справедливости леммы II.2 достаточно потребовать, чтобы функция μ имела обобщенную производную $\partial \mu \in L^p$ (см. [3]).

Доказательство. Напомним, что необходимым условием разрешимости системы
$$\partial w = f, \qquad \overline{\partial} w = \mu f$$

является соотношение

$$\overline{\partial} f = f\partial\mu + \mu\partial f.$$

Допустим, что нам удалось построить решение w системы (II.1), которое является C^1-гладким гомеоморфизмом. Тогда его якобиан, равный

$$|\partial w|^2 - |\overline{\partial} w|^2 = (1-|\mu|^2)|f|^2,$$

должен быть строго положителен, иными словами, у функции f не должно быть нулей. Поэтому будем искать такую функцию в виде

$$f = e^g.$$

Для функции g соотношение (II.2) превратится в уравнение

$$\overline{\partial} g = \mu\partial g + \partial\mu.$$

Решение этого уравнения можно снова свести к решению переопределенной системы уравнений

$$\begin{cases} \partial g = h, \\ \overline{\partial} g = \mu h + \partial\mu, \end{cases}$$

где h – некоторая измеримая функция. Запишем функцию g в виде

$$g = P(\mu h) + P(\partial\mu) + \mathrm{const}.$$

Тогда для функции h получим уравнение

$$\partial g = T(\mu h) + T(\partial\mu) = h.$$

Это уравнение имеет единственное решение $h \in L^p$. Поэтому введенная функция

$$g = P(\mu h) + P(\partial\mu) + \mathrm{const}$$

корректно определена и непрерывна всюду, включая точку $z = \infty$ (напомним, что μ имеет компактный носитель!). Теперь выберем константу в формуле для g так, чтобы

$$g(z) \to 0 \qquad \text{при} \quad z \to \infty.$$

Функция $f = e^g$ удовлетворяет соотношению (II.2). Теперь, также как при доказательстве леммы II.1, можно показать, что система (II.1) имеет решение, которое будет в этом случае C^1-гладким.

Если нормировать его условием $w(0) = 0$, то это решение будет совпадать с нормальным, поскольку при $z \to \infty$

$$f(z) \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \partial w \to 1.$$

Якобиан построенного отображения w совпадает с

$$|\partial w|^2 - |\overline{\partial} w|^2 = (1 - |\mu|^2)e^{2g} > 0,$$

т.е. отображение w локально взаимнооднозначно. Так как $w(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ (поскольку $\partial w \to 1$), то w задает глобальный гомеоморфизм.

Условие $\mu \in C^1$ можно снять с помощью аппроксимации исходной функции μ C^1-гладкими функциями (см. [3]).

Лемма II.3. *Условие компактности носителя можно снять.*

Прежде, чем переходить к доказательству этого утверждения, введем следующее обозначение. Для того, чтобы однозначно задать решение уравнения Бельтрами на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, определенное априори с точностью до дробно-линейного отображения, достаточно фиксировать три любые его значения. Мы будем требовать, чтобы рассматриваемое нами решение оставляло неподвижными три точки $0, 1, \infty$. Такое решение уравнения (I.2) будем обозначать через w^μ.

Доказательство. Переходя к доказательству леммы, рассмотрим сначала случай, когда $\mu \equiv 0$ в окрестности точки $z = 0$. Введем *отражение* $\widetilde{\mu}$ функции μ относительно единичной окружности, задаваемое формулой

$$\widetilde{\mu}(z) = \mu\left(\frac{1}{z}\right)\frac{z^2}{\overline{z}^2}\,.$$

Эта функция имеет компактный носитель в $\mathbb{C}$, поэтому уравнение Бельтрами с дифференциалом Бельтрами $\widetilde{\mu}$ допускает решение $\widetilde{w}$. Тогда исходное уравнение Бельтрами (I.2) с дифференциалом Бельтрами μ будет допускать решение

$$w(z) = \frac{1}{\widetilde{w}\left(\frac{1}{z}\right)}\,.$$

Действительно,

$$\begin{cases} \partial w(z) = \dfrac{1}{\widetilde{w}\left(\dfrac{1}{z}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{z^2} \cdot \partial \widetilde{w}\left(\dfrac{1}{z}\right), \\ \overline{\partial} w(z) = \dfrac{1}{\widetilde{w}\left(\dfrac{1}{z}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\overline{z}^2} \cdot \overline{\partial} \widetilde{w}\left(\dfrac{1}{z}\right), \end{cases}$$

откуда следует, что $\overline{\partial} w = \mu \partial w$.

В общем случае представим μ в виде

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

где $\mu_1 \equiv 0$ в окрестности ∞, а $\mu_2 \equiv 0$ в окрестности 0. Конечно, из приведенного представления не вытекает, что

$$w^{\mu} = w^{\mu_1} \circ w^{\mu_2}$$

ввиду нелинейного характера формулы композиции. Однако, из этого представления следует, что

$$w^{\mu} = w^{\lambda} \circ w^{\mu_2} \quad \Longleftrightarrow \quad w^{\lambda} = w^{\mu} \circ (w^{\mu_2})^{-1},$$

где

$$\lambda = \left[\left(\frac{\mu - \mu_2}{1 - \mu \overline{\mu}_2} \right) \frac{\partial w^{\mu_2}}{\overline{\partial} w^{\mu_2}} \right] \circ (w^{\mu_2})^{-1},$$

а такая функция λ имеет компактный носитель.

Тем самым, мы доказали теорему существования квазиконформных отображений в следующей формулировке.

Теорема II.4 (теорема существования). *Для любой измеримой ограниченной функции μ на $\overline{\mathbb{C}}$ существует единственное квазиконформное отображение w^{μ}, комплексная дилатация которого совпадает с μ почти всюду, оставляющее точки $0, 1, \infty$ неподвижными.*

Доказанная теорема позволяет получить следующее обобщение теоремы Римана.

Теорема II.5. *Пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ односвязные области в $\overline{\mathbb{C}}$ с нетривиальными границами (т.е. с границами, состоящими более чем из одной точки). Если $\mu \in L_\infty(\mathcal{D})$ с $\|\mu\|_\infty < 1$, то найдется квазиконформное отображение $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, комплексная дилатация которого совпадает с μ почти всюду.*

Доказательство этого утверждения мы оставляем в качестве задачи.

Краткое содержание лекции II.

Квазиконформные гомеоморфизмы $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ образуют группу относительно композиции. Имеется формула для дифференциала Бельтрами композиции двух квазиконформных отображений через их дифференциалы Бельтрами.

Теорема единственности: $\mu_f = \mu_g \Rightarrow$ отображения $f \circ g^{-1}$ и $g \circ f^{-1}$ конформны.

Теорема существования: Для любой $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ с $\|\mu\|_\infty < 1$ существует решение уравнения Бельтрами: $\overline{\partial} w = \mu\, \partial w$, являющееся квазиконформным отображением с комплексной дилатацией μ.

Из двух приведенных теорем вытекает, что существует единственное нормализованное решение w^μ уравнения Бельтрами на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathcal{C}}$, оставляющее точки $0, 1, \infty$ неподвижными.

Лекция III. Квазисимметричные гомеоморфизмы

III.1. Граничное поведение квазиконформных отображений.

Теорема III.1 (теорема Мори). *Пусть $w\colon \Delta \to \Delta$ есть K-квазиконформный гомеоморфизм единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на себя, нормированный условием $w(0) = 0$.*

Тогда для всех $z_1 \neq z_2$ из Δ имеет место точная оценка

$$|w(z_1) - w(z_2)| < 16|z_1 - z_2|^{1/K}.$$

Иными словами, гомеоморфизм w равномерно непрерывен по Гельдеру в круге Δ с показателем $1/K$.

Доказательство этой теоремы, которое мы опускаем, можно найти в книге [3, гл. III, п. С.].

Из нее немедленно вытекает

Следствие III.1. *Любой квазиконформный гомеоморфизм* $\Delta \to \Delta$ *единичного круга* Δ *на себя непрерывно продолжается до гомеоморфизма замыканий* $\overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$. *Более общим образом, произвольный квазиконформный гомеоморфизм жордановой области* $\mathcal{D}$ *на жорданову область* $\mathcal{D}'$ *непрерывно продолжается до гомеоморфизма замыканий* $\overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathcal{D}'}$.

Для квазиконформных отображений имеет место теорема о нормальной сходимости, аналогичная соответствующей теореме для голоморфных отображений.

Теорема III.2 (теорема о нормальной сходимости). *Пусть в области* $\mathcal{D}$ *задана последовательность* K*-квазиконформных отображений* w_n, *которая сходится равномерно на компактах к отображению* w. *Тогда предельная функция* w *является либо константой, либо* K*-квазиконформным отображением.*

Доказательство этой теоремы см. в книге [2, гл. 1, п. 2.3].

III.2. Конформные прямоугольники. Геометрическое определение квазиконформных отображений. Напомним сначала понятие *конформного модуля*, на котором базируется геометрическое определение квазиконформных отображений.

Хорошо известно, что для любых троек (z_1, z_2, z_3) и (w_1, w_2, w_3) попарно различных точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ найдется конформное (следовательно, дробно-линейное) преобразование $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, переводящее (z_1, z_2, z_3) в (w_1, w_2, w_3). Аналогичное утверждение для четверок попарно различных точек (z_1, z_2, z_3, z_4) и (w_1, w_2, w_3, w_4) уже неверно.

Назовем *конформным прямоугольником* $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ жорданову область на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит точки z_1, z_2, z_3, z_4, причем последовательное движение $z_1 \mapsto z_2 \mapsto z_3 \mapsto z_4$ совпадает с положительным направлением обхода границы (при котором область остается слева). Каждый такой конформный прямоугольник можно конформно отобразить на евклидов прямоугольник $\Pi(w_1, w_2, w_3, w_4)$, причем указанное преобразование определено однозначно с точностью до подобия. (Докажите это!)

Допустим, что указанное конформное преобразование переводит заданный конформный прямоугольник $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ на евклидов прямоугольник $\Pi(0, a, a + ib, ib)$. В этом случае назовем

число
$$MQ(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{a}{b}$$
конформным модулем прямоугольника $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Ясно, что это число является конформным инвариантом и равенство
$$MQ(z_1, z_2, z_3, z_4) = MP(w_1, w_2, w_3, w_4)$$
является необходимым и достаточным условием конформной эквивалентности конформных прямоугольников $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $P(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Более того, справедлив следующий результат, доказанный в [4].

Теорема III.3. *Пусть $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ есть гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Если w сохраняет модули конформных прямоугольников, то w является конформным преобразованием.*

Для заданной области $\mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$ рассмотрим множество $\{Q\}$ всех конформных прямоугольников $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, замыкания которых содержатся в $\mathcal{D}$.

Теорема III.4. *Пусть $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, для которого величина*
$$K := \sup_{\{Q\}} \frac{MQ(w(z_1), w(z_2), w(z_3), w(z_4))}{MQ(z_1, z_2, z_3, z_4)},$$
называемая максимальной дилатацией, конечна. Тогда отображение w является K-квазиконформным.

На самом деле, указанное в теореме свойство может быть взято за определение K-квазиконформных отображений. Доказательство эквивалентности такого определения исходному см. в [4].

Следствие III.2. *Любое 1-квазиконформное отображение обязательно конформно.*

III.3. Квазисимметричные гомеоморфизмы. Как было отмечено в п. III.1, квазиконформные гомеоморфизмы областей обязательно продолжаются до гомеоморфизмов их замыканий. Спрашивается, когда верно обратное утверждение, т.е. когда заданный гомеоморфизм границ областей допускает продолжение до квазиконформного гомеоморфизма самих областей?

Разберем этот вопрос сначала в случае, когда обе области совпадают с верхней полуплоскостью $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Граничное значение квазиконформного гомеоморфизма $H \to H$ является гомеоморфизмом $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сохраняющим ориентацию. Иначе говоря, оно задает монотонно возрастающий гомеоморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с условием $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Назовем *максимальной дилатацией* гомеоморфизма f величину

$$K = \sup_{\{x_i\}} \frac{MH(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))}{MH(x_1, x_2, x_3, x_4)}, \qquad \text{(III.1)}$$

где верхняя грань берется по всем четверкам точек x_1, x_2, x_3, x_4 из $\overline{\mathbb{R}}$, для которых последовательное движение $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4$ совпадает с положительным направлением на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Из приведенного выше геометрического определения K-квазиконформных отображений (см. теорему III.4) следует, что максимальная дилатация гомеоморфизма $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющегося граничным значением K-квазиконформного гомеоморфизма $w\colon H \to H$, совпадает с K. Выберем в формуле (III.1) точки

$$x_1 = x - t, \quad x_2 = x, \quad x_3 = x + t, \quad x_4 = \infty, \qquad \text{где} \quad t > 0.$$

Для них величина $MH(x - t, x, x + t, \infty) = 1$, а из конечности максимальной дилатации будет следовать, что

$$\frac{1}{C(K)} \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leqslant C(K).$$

Задача III.1. Докажите это утверждение.

Определение III.1. Монотонно возрастающий гомеоморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *k-квазисимметричным*, если

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leqslant k, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{(III.2)}$$

для всех $t > 0$.

Таким образом, граничное значение K-квазиконформного гомеоморфизма $H \to H$ является k-квазисимметричным гомеоморфизмом $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема III.5 (теорема Берлинга–Альфорса). *Пусть* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *есть* k*-квазисимметричный гомеоморфизм. Тогда найдется квазиконформный гомеоморфизм* $w\colon H \to H$, *граничное значение которого совпадает с* f, *а максимальная дилатация ограничена числом* $K(k)$, *которое можно выбрать так, чтобы* $K(k) \to 1$ *при* $k \to 1$.

Идея доказательства.[2] Определим отображение w, заданное на замыкании $\overline{H}$, по формуле

$$w(x+iy) = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(x+ty)+f(x-iy)]\,dt \\ + \frac{i}{2}\int_0^1 [f(x+ty)-f(x-iy)]\,dt.$$

Очевидно, что на вещественной оси $w(x) = f(x)$. Если ввести обозначение

$$\alpha(x,y) = \int_0^1 f(x+ty)\,dt = \frac{1}{y}\int_x^{x+y} f(t)\,dt,$$
$$\beta(x,y) = \int_0^1 f(x-ty)\,dt = \frac{1}{y}\int_{x-y}^{x} f(t)\,dt,$$

то формула для w запишется в виде

$$w(x+iy) = \frac{\alpha+\beta}{2} + i\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Геометрический смысл функций α и β очевиден: функция $\alpha(x,y)$ сопоставляет точке $x+iy \in H$ среднее значение функции f на отрезке $[x, x+y]$, а функция $\beta(x,y)$ – среднее значение f на отрезке $[x-y, x]$.

Функции α и β непрерывно дифференцируемы по x и y и определяемое ими отображение $w\colon H \to H$ имеет положительный якобиан (вычисленный в книге [3]). Из этого факта и того, что граничное значение w, совпадающее с f, является монотонно возрастающим гомеоморфизмом $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, следует, что w задает гомеоморфизм $H \to H$. Условие квазиконформности w переписывается в терминах неравенства, связывающего значения функции

[2] Полное доказательство см. в книге [3, гл. IV, п. B].

f в точках x, $x+y$ и $x-y$, выполнение которого обеспечивается условием (III.2).

В случае единичного круга Δ условие квазисимметричности Берлинга–Альфорса (III.2) удобно формулировать в терминах перекрестного отношения.

Напомним, что *перекрестным* (или *двойным*) *отношением* четырех попарно различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости называется величина

$$CR(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\,.$$

Совпадение перекрестных отношений

$$CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = CR(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

является необходимым и достаточным условием существования конформного преобразования комплексной плоскости, переводящего точки (z_1, z_2, z_3, z_4) в точки (w_1, w_2, w_3, w_4).

Определение III.2. Гомеоморфизм f единичной окружности S^1 на себя, сохраняющий ориентацию, называется *квазисимметричным*, если при некотором $0 < \epsilon < 1$ он удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon) \leqslant CR(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \leqslant \frac{1}{2}(1+\epsilon) \qquad \text{(III.3)}$$

для любой четверки попарно различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 на S^1 с перекрестным отношением $CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2}$.

Условие (III.3) является аналогом для единичного круга Δ условия Берлинга–Альфорса (III.2). Это условие, как и в случае верхней полуплоскости H, гарантирует квазиконформную продолжаемость квазисимметричного гомеоморфизма $f\colon S^1 \to S^1$ внутрь Δ.

Теорема III.6. *Если f есть сохраняющий ориентацию гомеоморфизм единичной окружности S^1 на себя, удовлетворяющий условию* (III.3), *то он допускает продолжение до квазиконформного гомеоморфизма $w\colon \Delta \to \Delta$.*

Задача III.2. Покажите, что любой диффеоморфизм окружности S^1 на себя, сохраняющий ориентацию, является квазисимметричным, т.е. допускает продолжение до квазиконформного диффеоморфизма единичного круга Δ.

Краткое содержание лекции III.

Граничное поведение. Квазиконформные гомеоморфизмы $\mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ непрерывно продолжаются до гомеоморфизмов замыканий $\overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathcal{D}'}$.

Дано еще одно, *геометрическое определение квазиконформных отображений*: сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ является K-квазиконформным $\Leftrightarrow$ он имеет конечную максимальную дилатацию

$$K := \sup_{\{Q\}} \frac{MQ(w(z_1), w(z_2), w(z_3), w(z_4))}{MQ(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

по всем конформным прямоугольникам Q, содержащимся в $\mathcal{D}$ вместе с замыканием: $\overline{Q} \subset \mathcal{D}$.

Квазисимметричные гомеоморфизмы верхней полуплоскости. Монотонно возрастающий гомеморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется квазисимметричным, если для некоторого $k > 0$ выполняется условие Берлинга–Альфорса

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leqslant k$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Теорема Берлинга–Альфорса: монотонно возрастающий гомеморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является квазисимметричным $\Leftrightarrow$ его можно продолжить до квазиконформного гомеоморфизма $w\colon H \to H$ верхней полуплоскости H.

В случае *единичного круга* условие квазисимметричности сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f\colon S^1 \to S^1$ формулируется в терминах перекрестных отношений: гомеоморфизм $f\colon S^1 \to S^1$ квазисимметричен, если для некоторого ϵ, $0 < \epsilon < 1$, выполняется условие

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon) \leqslant CR(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \leqslant \frac{1}{2}(1+\epsilon)$$

для всех $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S^1$ с перекрестным отношением $CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2}$.

Теорема Берлинга–Альфорса остается справедливой и в случае единичного круга Δ.

Если $f\colon S^1 \to S^1$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, то он квазисимметричен, т.е. его можно продолжить до диффеоморфизма замкнутого круга $\overline{\Delta}$.

Глава 2. Универсальное пространство Тейхмюллера

В этой главе вводится универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ и сообщаются основные сведения о его устройстве. Даны три различных определения этого пространства. Первое определение в терминах квазисимметричных гомеоморфизмов окружности приводится в п. IV.1, второе – в терминах квазикругов – дано в п. IV.2 и третье – в терминах дифференциалов Бельтрами – также в п. IV.2.

Основные сведения о метрических и топологических свойствах универсального пространства Тейхмюллера собраны в п. V.1.

В п. V.3 строится вложение Берса универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге, которое позволяет ввести на $\mathcal{T}$ естественную комплексную структуру. При этом существенно используются свойства производной Шварца, которые сообщаются в п. V.2.

В п. V.5 рассматривается вопрос о существовании кэлеровой метрики на пространстве $\mathcal{T}$ и строится плотно заданная кэлерова квазиметрика на $\mathcal{T}$.

В этом же параграфе вводятся квазисимметричные векторные поля на окружности, отвечающие функциям из пространства Зигмунда.

Лекция IV. Определение универсального пространства Тейхмюллера

IV.1. Определение в терминах квазисимметричных гомеоморфизмов. Из теоремы композиции II.1 из п. II.1 вытекает, что квазиконформные гомеоморфизмы единичного круга Δ образуют группу относительно операции композиции. Поэтому квазисимметричные гомеоморфизмы единичной окружности S^1 также образуют группу относительно этой операции. Мы обозначаем ее через $\mathrm{QS}(S^1)$. С учетом задачи III.2 в конце III.3 группа

$\mathrm{QS}(S^1)$ содержит группу $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию. Тем самым, имеется цепочка вложений

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathrm{Diff}_+(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1) \subset \mathrm{Homeo}_+(S^1).$$

В этой цепочке $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ обозначает группу гомеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию, а $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ есть группа дробно-линейных автоморфизмов единичного круга Δ, суженных на S^1.

Определение IV.1. Пространство

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

называется *универсальным пространством Тейхмюллера*.

Пространство $\mathcal{T}$ можно отождествить с подпространством $\mathrm{QS}(S^1)$, состоящим из *нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов* окружности, оставляющих три точки окружности S^1 неподвижными. В качестве таких точек принято выбирать ± 1 и $-i$.

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит в качестве подпространства пространство

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1),$$

которое можно отождествить с пространством *нормализованных квазисимметричных диффеоморфизмов* окружности. Это пространство подробно рассматривается в главе 4.

IV.2. Определение в терминах дифференциалов Бельтрами. Поскольку понятие квазиконформности допускает определение в терминах дифференциалов Бельтрами (см. I.3), удобно иметь определение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ непосредственно в терминах этих дифференциалов.

Обозначим пространство дифференциалов Бельтрами в единичном круге Δ через

$$B(\Delta) \equiv B_{(-1,1)}(\Delta).$$

Согласно п. I.3 его можно отождествить с единичным шаром в комплексном банаховом пространстве $L^\infty(\Delta)$.

Пусть $\mu \in B(\Delta)$ есть дифференциал Бельтрами в круге Δ. Продолжим его до дифференциала Бельтрами $\widehat{\mu}$ во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с помощью симметрии относительно окружности S^1, полагая

$$\widehat{\mu}\left(\frac{1}{\bar z}\right) := \overline{\mu(z)}\,\frac{z^2}{\bar z^2} \qquad \text{при} \quad z \in \Delta.$$

Применяя теорему существования квазиконформных отображений (теорема II.3 из п. II.1) к уравнению Бельтрами с продолженным дифференциалом Бельтрами $\widehat{\mu}$, найдем нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w_μ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с комплексной дилатацией $\widehat{\mu}$. В силу теоремы единственности (теорема II.2 из п. II.1) этот гомеоморфизм w_μ должен быть симметричен относительно S^1 и, следовательно, отображать окружность S^1 в себя. Таким образом, мы можем сопоставить исходному дифференциалу Бельтрами μ нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм окружности w_μ:

$$B(\Delta) \ni \mu \mapsto w_\mu|_{S^1} \in \mathcal{T}.$$

Это отображение взаимнооднозначно по модулю следующего отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами

$$\mu \sim \nu \quad \Longleftrightarrow \quad w_\mu|_{S^1} \equiv w_\nu|_{S^1}\,.$$

Следовательно, *универсальное пространство Тейхмюллера* $\mathcal{T}$ *можно отождествить с фактором*

$$\mathcal{T} = B(\Delta)/\!\sim.$$

Другой естественный способ продолжения заданного дифференциала Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ до дифференциала Бельтрами $\breve{\mu}$ состоит в том, чтобы положить

$$\breve{\mu}(z) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad z \in \Delta_- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}.$$

Применяя теорему существования квазиконформных отображений к уравнению Бельтрами с продолженным дифференциалом Бельтрами $\breve{\mu}$, получим квазиконформный гомеоморфизм w^μ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с комплексной дилатацией $\breve{\mu}$. Удобно нормализовать его условием фиксации точек $0, 1, \infty$. Построенный нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ будет конформным на дополнении Δ_- к замкнутому единичному кругу $\overline{\Delta}$.

Назовем *квазикругом* образ единичного круга Δ при квазиконформном отображении, а *квазиокружностью* образ единичной окружности S^1 при таком отображении. С учетом этого определения мы только что построили отображение

$$B(\Delta) \ni \mu \mapsto \text{квазикруг } \Delta^\mu := w^\mu(\Delta) \text{ в } \overline{\mathbb{C}}.$$

Это отображение взаимнооднозначно по модулю следующего отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами:

$$\mu \approx \nu \quad \Longleftrightarrow \quad w^\mu|_{\Delta_-} \equiv w^\nu|_{\Delta_-}.$$

Лемма IV.1. *Введенные отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами совпадают, т.е.*

$$\mu \sim \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \approx \nu.$$

Доказательство. Допустим сначала, что $\mu \approx \nu$, т.е. $w^\mu \equiv w^\nu$ на Δ_-. Рассмотрим отображения

$$w^\mu \circ w_\mu^{-1} \colon \Delta \to \Delta^\mu \qquad \text{и} \qquad w^\nu \circ w_\nu^{-1} \colon \Delta \to \Delta^\nu.$$

Заметим, что $\Delta^\mu = \Delta^\nu$, поскольку $w^\mu = w^\nu$ на S^1. Оба введенных отображения конформны. Например, $w^\mu \circ w_\mu^{-1}$ конформно в круге Δ, поскольку w^μ и w_μ имеют в Δ одну и ту же комплексную дилатацию μ. Аналогичное рассуждение применимо к отображению $w^\nu \circ w_\nu^{-1}$. Кроме того, введенные отображения переводят три заданные точки $\pm 1, -i$ на S^1 в три точки $w^\mu(\pm 1) = w^\nu(\pm 1)$, $w^\mu(-i) = w^\nu(-i)$ на $\partial\Delta^\mu$. Следовательно, эти отображения совпадают, т.е.

$$w^\mu \circ w_\mu^{-1} \equiv w^\nu \circ w_\nu^{-1} \qquad \text{на} \quad \Delta$$

и, следовательно, на S^1. Но $w^\mu = w^\nu$ на S^1, откуда следует, что $w_\mu = w_\nu$ на S^1, т.е. $\mu \sim \nu$.

Обратно, пусть $\mu \sim \nu$, т.е. $w_\mu = w_\nu$ на S^1. Рассмотрим отображение

$$w = \begin{cases} w^\mu \circ (w^\nu)^{-1} & \text{на } w^\nu(\Delta_-), \\ w^\mu \circ w_\mu^{-1} \circ w_\nu \circ (w^\nu)^{-1} & \text{на } w^\nu(\Delta) = w^\nu(\Delta_+). \end{cases}$$

Заметим, что граничные значения обоих отображений, заданных соответственно на $w^\nu(\Delta_-)$ и $w^\nu(\Delta_+)$, согласованы на квазиокружности $w^\nu(S^1)$, поскольку $w_\mu = w_\nu$ на S^1. Введенный гомеоморфизм w является конформным на квазикруге $w^\nu(\Delta_-)$, поскольку w^μ и w^ν конформны на Δ_-. Он также конформен на квазикруге $w^\nu(\Delta_+)$, поскольку конформны отображения $w^\mu \circ w_\mu^{-1}$ и $w_\nu \circ (w^\nu)^{-1}$ (ввиду того, что комплексные дилатации w^μ и w_μ, а также w^ν и w_ν, совпадают в единичном круге Δ). Отсюда следует, что гомеоморфизм w конформен во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ благодаря следующему утверждению, которое мы оставляем в качестве задачи.

Задача IV.1. Пусть w есть гомеоморфизм расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, который является K-квазиконформным в дополнении к квазиокружности S. Тогда w является K-квазиконформным всюду в $\overline{\mathbb{C}}$.

Из сформулированной задачи вытекает, что введенный гомеоморфизм w конформен всюду в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. совпадает с дробно-линейным преобразованием. Это преобразование ввиду нормализации оставляет на месте точки $0, 1, \infty$, поэтому $w \equiv \mathrm{id}$. Отсюда следует, что $w^\mu = w^\nu$ на Δ_-, т.е. $\mu \approx \nu$.

Благодаря доказанной лемме, мы получаем еще две интерпретации универсального пространства Тейхмюллера:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{\text{пространство нормализованных квазикругов в } \overline{\mathbb{C}}\} \\ &= \{\text{пространство нормализованных квазиконформных} \\ &\qquad\qquad \text{отображений } \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \text{ конформных в круге } \Delta_-\}.\end{aligned} \tag{IV.1}$$

Связь между двумя реализациями универсального пространства Тейхмюллера в виде *пространства нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов окружности* S^1 и *пространства нормализованных квазикругов в* $\overline{\mathbb{C}}$ может быть установлена и непосредственным образом.

Для этого воспользуемся следующей задачей факторизации, представляющей самостоятельный интерес.

Задача факторизации. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1 на себя. Требуется найти конформные отображения w_+ и w_-, заданные соответственно в круге Δ_+ и его внешности Δ_-, такие что

$$f = w_+^{-1} \circ w_- \qquad \text{на} \quad S^1 \tag{IV.2}$$

Пара отображений (w_+, w_-) называется *нормализованной*, если отображения $w_\pm$ оставляют на месте точки $\pm 1, -i$.

Лемма IV.2 (лемма о факторизации). *Пусть f есть нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм окружности S^1 на себя. Тогда задача факторизации* (IV.2) *допускает единственное нормализованное решение.*

Доказательство. Для данного гомеоморфизма f по теореме Берлинга–Альфорса найдется нормализованный квазиконформный гомеоморфизм $w\colon \Delta_+ \to \Delta_+$ такой, что $w|_{S^1} = f$. Обозначим через μ его комплексную дилатацию. Продолжим μ на $\overline{\mathbb{C}}$ нулем вне Δ_+ до дифференциала Бельтрами $\breve{\mu}$ и обозначим через $\widetilde{w}^\mu$ квазиконформный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, комплексная дилатация которого совпадает с $\breve{\mu}$, оставляющий на месте точки $\pm 1, -i \in S^1$. Тогда отображения

$$w_+ := \widetilde{w}^\mu|_{\Delta_+} \circ w_\mu^{-1}\colon \Delta_+ \to \text{квазикруг } \widetilde{\Delta}^\mu \tag{IV.3}$$

$$w_- := \widetilde{w}^\mu|_{\Delta_-}\colon \qquad \Delta_- \to \text{квазикруг } \widetilde{\Delta}^\mu_- \tag{IV.4}$$

конформны соответственно в Δ_+ и Δ_- (конформность w_+ вытекает из того, что гомеоморфизмы $\widetilde{w}^\mu$ и w_μ имеют одну и ту же комплексную дилатацию μ в круге Δ_+). Поэтому они задают нормализованное решение задачи факторизации (IV.2).

Если (v_+, v_-) – другое нормализованное решение этой задачи, то на S^1 будут выполнены равенства

$$v_- = v_+ \circ f = v_+ \circ w_\mu = v_+ \circ (w_+^{-1} \circ w_-).$$

Рассмотрим отображение

$$v = \begin{cases} v_+ \circ w_\mu & \text{на } \Delta_+ \cup S^1, \\ v_- & \text{на } \Delta_-. \end{cases}$$

Оно задает гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, который квазиконформен всюду вне S^1. Ввиду задачи IV.1 из п. IV.2 гомеоморфизм v квазиконформен всюду в $\overline{\mathbb{C}}$. Так как гомеоморфизм v_+ конформен в круге Δ_+, то v имеет ту же комплексную дилатацию μ, что и $\widetilde{w}^\mu$, и оставляет на месте точки $\pm 1, -i$. Следовательно, $v = \widetilde{w}^\mu$, откуда

$$v_+ = \widetilde{w}^\mu \circ w_\mu^{-1} = w_+, \qquad v_- = \widetilde{w}^\mu = w_-.$$

Вернемся к интересующему нас соответствию

$$\{\text{нормализованные квазисимметричные гомеоморфизмы } S^1\} \leftrightarrow \{\text{нормализованные квазикруги в } \overline{\mathcal{C}}\}. \tag{IV.5}$$

Если f – нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$, то он допускает единственную нормализованную факторизацию вида

$$f = w_+^{-1} \circ w_-,$$

где $w_+ = \widetilde{w}^\mu|_\Delta \circ w_\mu^{-1}$, $w_- = \widetilde{w}^\mu|_{\Delta_-}$. Сопоставим ему нормализованный квазикруг $\Delta^\mu = w^\mu(\Delta)$.

Обратно, если Δ^μ есть нормализованный квазикруг, отвечающий квазиконформному отображению w^μ с комплексной дилатацией μ, то мы рассмотрим отображения

$$w_+ = \widetilde{w}^\mu \circ w_\mu^{-1} \quad \text{на} \quad \Delta_+ \qquad \text{и} \qquad w_- = \widetilde{w}^\mu \quad \text{на} \quad \Delta_-.$$

Эти отображения конформны и оставляют на месте точки $\pm 1, -i$ на S^1. Сопоставим им квазисимметричный гомеоморфизм окружности S^1 на себя, задаваемый формулой

$$f = w_+^{-1} \circ w_- \qquad \text{на} \quad S^1.$$

Это и есть искомый нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$.

Краткое содержание лекции IV.

Первое определение универсального пространства Тейхмюллера:

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1).$$

Второе определение универсального пространства Тейхмюллера. Заданный дифференциал Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ можно продолжить на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ либо по симметрии относительно окружности S^1, либо нулем вне круга Δ. Решая уравнение Бельтрами для продолженных дифференциалов Бельтрами, получаем два нормализованных квазиконформных гомеоморфизма на $\overline{\mathbb{C}}$. Первому продолжению отвечает квазиконформный гомеоморфизм w_μ, сохраняющий круг Δ, второму – квазиконформный гомеоморфизм w^μ, конформный в дополнении к кругу Δ. Пользуясь последним гомеоморфизмом w^μ, универсальное пространство Тейхмюллера можно определить как *пространство квазикругов* $\Delta^\mu = w^\mu(\Delta)$ *в* $\overline{\mathbb{C}}$ или как *пространство нормализованных квазиконформных отображений* $\overline{\mathbb{C}}$, *конформных в дополнении к кругу* Δ.

Третье определение универсального пространства Тейхмюллера:

$$\mathcal{T} = B(\Delta)/\!\sim,$$

т.е. $\mathcal{T}$ есть фактор пространства дифференциалов Бельтрами в круге Δ по модулю следующего отношения эквивалентности: $\mu \sim \nu \Leftrightarrow w_\mu = w_\nu$ на $S^1 \Leftrightarrow w^\mu = w^\nu$ в дополнении к Δ.

Лекция V. Свойства универсального пространства Тейхмюллера

V.1. Метрические и топологические свойства $\mathcal{T}$. Введем *расстояние Тейхмюллера* между точками пространства $\mathcal{T}$. Если f и g – два нормализованных квазисимметричных гомеоморфизма $S^1 \to S^1$, то расстояние между ними задается величиной

$$\operatorname{dist}(f, g) = \frac{1}{2} \log K[g \circ f^{-1}],$$

равной максимальной дилатации квазисимметричного гомеоморфизма $g \circ f^{-1}$.

В терминах комплексных дилатаций оно равно

$$\operatorname{dist}([\mu], [\nu]) = \frac{1}{2} \min \log \frac{1 + \left\| \dfrac{\mu - \nu}{1 - \bar{\mu}\nu} \right\|_\infty}{1 - \left\| \dfrac{\mu - \nu}{1 - \bar{\mu}\nu} \right\|_\infty},$$

где минимум берется по всем $\mu \in [\mu]$, $\nu \in [\nu]$, а $[\mu]$ обозначает класс дифференциалов Бельтрами, содержащий μ, в факторе $\mathcal{T} = B(\Delta)/\sim$.

Выражение в правой части последнего определения напоминает формулу для гиперболического расстояния в круге Δ. Именно, если определить расстояние между функциями μ и ν формулой

$$\|\mu - \nu\|_\Delta := \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \Delta} \rho(\mu(z), \nu(z)),$$

где ρ – метрика Пуанкаре в круге Δ, то

$$\operatorname{dist}([\mu], [\nu]) = \min \|\mu - \nu\|_\Delta,$$

где минимум берется по всем $\mu \in [\mu]$, $\nu \in [\nu]$.

Приведем основные топологические свойства пространства $\mathcal{T}$, доказательство которых можно найти в книге [2, гл. III, п. 2].

Утверждение V.1. *Пространство $\mathcal{T}$ линейно связно.*

Утверждение V.2. *Пространство $\mathcal{T}$ полно*, *т.е. любая последовательность Коши в $\mathcal{T}$ сходится.*

Утверждение V.3. *Пространство $\mathcal{T}$ стягиваемо.*

Утверждение V.4. *Пространство $\mathcal{T}$ не является топологической группой. Иными словами, операция композиции нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов $S^1 \to S^1$ не является непрерывной в метрике Тейхмюллера.*

V.2. Производная Шварца. Прежде, чем переходить к описанию комплексной структуры пространства $\mathcal{T}$, напомним основные свойства производной Шварца.

Производной Шварца конформного отображения f называется величина

$$S[f] = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = (\log f')' - \frac{1}{2}(\log f')^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Перечислим основные свойства производной Шварца, которые нам понадобятся впоследствии (проверку этих свойств оставляем читателю).

Свойство V.1. Если f – дробно-линейное отображение, то

$$S[f] = 0.$$

Свойство V.2. Если функция f не имеет нулей в области определения, то

$$S[f] = S\left[\frac{1}{f}\right].$$

Это свойство можно использовать для определения производной Шварца локально инъективных мероморфных отображений.

Свойство V.3. Формула композиции:

$$S[f \circ g] = (S[f] \circ g)g'^2 + S[g].$$

В частности, если g – преобразование Мебиуса, то

$$S[f \circ g] = (S[f] \circ g)g'^2.$$

Если же f есть преобразование Мебиуса, то

$$S[f \circ g] = S[g],$$

т.е. $S[f]$ инвариантно относительно действия преобразований Мебиуса слева:

$$S[f] = S\left[\frac{af+b}{cf+d}\right] \qquad \text{для} \quad \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Формулу композиции можно использовать для определения значения $S[f]$ в точке $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$. Именно, согласно этой формуле, указанное значение должно быть равно

$$S[f](\infty) = \lim_{z \to 0} \; z^4 S[\varphi](z),$$

где $\varphi(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Следующее свойство оправдывает применение термина “производная” по отношению к $S[f]$.

Свойство V.4. Для любого z_0 найдется единственное преобразование Мебиуса h, для которого существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(h \circ f)(z) - z}{(z - z_0)^3} = \frac{1}{6}\, S[f](z_0).$$

Свойство V.5. Пусть φ есть голоморфная функция в односвязной области $\mathcal{D}$. Тогда в $\mathcal{D}$ найдется мероморфная функция f, для которой

$$S[f] = \varphi.$$

Эта функция f определяется единственным образом по φ с точностью до преобразований Мебиуса (см. [2, гл. II, п. 1.2.]).

Если область $\mathcal{D}$ конформно эквивалентна кругу Δ, то можно определить норму $S[f]$, пользуясь метрикой Пуанкаре ρ в круге Δ. Именно,

$$\|S[f]\|_{\mathcal{D}} := \sup_{z \in \mathcal{D}} \frac{|S[f](z)|}{\rho(z)^2}\,.$$

Норма производной Шварца $\|S[f]\|_{\mathcal{D}}$ измеряет расстояние от заданного конформного отображения до множества дробно-линейных отображений.

Свойство V.6. Если f – конформное отображение, заданное в единичном круге Δ, то справедлива точная оценка

$$\|S[f]\|_{\Delta} \leqslant 6.$$

Доказательство этого свойства, которое можно найти в книге [2, гл. II, п. 1.6], основано на следующей известной теореме площадей.

Теорема V.1 (теорема площадей). *Пусть f – однолистная мероморфная функция во внешности Δ_- единичного круга Δ, которая имеет следующее разложение в степенной ряд в окрестности бесконечности*

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1,$$

причем это неравенство точное.

Доказательство этой теоремы также приводится в книге [2], однако попробуйте сначала доказать ее самостоятельно.

Из теоремы площадей вытекает, в частности, что $|b_1| \leqslant 1$. Равенство в этой оценке достигается только на функции

$$f(z) = z + \frac{e^{i\theta}}{z}.$$

V.3. Вложение Берса. Построим вложение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге.

Пусть точке $[\mu] \in \mathcal{T}$ отвечает нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ. Тогда w^μ конформен во внешности Δ_- единичного круга Δ и потому мы можем рассмотреть его производную Шварца

$$S[w^\mu|_{\Delta_-}].$$

Полученная функция на Δ_- не зависит от выбора $\mu \in [\mu]$, поскольку по лемме IV.1 конформное отображение $w^\mu|_{\Delta_-}$ не зависит от этого выбора. Далее, указанная функция голоморфна по $z \in \Delta_-$ и при конформных заменах координат преобразуется как квадратичный дифференциал ввиду свойства V.3 производной Шварца.

Отображение

$$[\mu] \mapsto S[w^\mu|_{\Delta_-}]$$

является вложением, поскольку из равенства

$$S[w^\mu|_{\Delta_-}] = S[w^\nu|_{\Delta_-}]$$

следует, ввиду свойства V.5 производной Шварца, что

$$w^{\mu}|_{\Delta_-} = w^{\nu}|_{\Delta_-},$$

т.е. $\mu \sim \nu$.

Итак, мы построили вложение

$$\Psi \colon \mathcal{T} \to B_2(\Delta_-)$$

универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство $B_2(\Delta_-) \equiv B_{(2,0)}(\Delta_-)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ_-. Это отображение называется *вложением Берса*. Заметим, что $B_2(\Delta_-)$ есть комплексное банахово пространство, наделенное естественной гиперболической нормой:

$$B_2(\Delta_-) = \Big\{\psi = \psi(z)\, dz^2 : \|\psi\|_{B_2} := \sup_{z \in \Delta_-} (1 - |z|^2)^2 |\psi(z)| < \infty\Big\}.$$

Можно показать (см. [2, гл. III, п. 4.3]), что вложение Ψ является гомеоморфизмом пространства $\mathcal{T}$ на его образ в $B_2(\Delta_-)$. Описание образа $\Psi(\mathcal{T})$ в $B_2(\Delta_-)$ является трудной проблемой, однако справедлива следующая

Теорема V.2. *Образ $\Psi(\mathcal{T})$ в $B_2(\Delta_-)$ является связным открытым стягиваемым подмножеством в $B_2(\Delta_-)$, которое содержит открытый шар $B(0,2)$ радиуса 2 с центром в начале и содержится в замкнутом шаре $B(0,6)$.*

Доказательства фактов, приведенных в этой теореме, можно найти в книге [2, гл. III, п. 3,4.].

V.4. Комплексная структура пространства $\mathcal{T}$. Введем комплексную структуру на пространстве $\mathcal{T}$, индуцированную комплексной структурой на комплексном банаховом пространстве $B_2(\Delta_-)$ посредством вложения Берса.

По-другому, комплексную структуру на $\mathcal{T}$ можно было бы ввести как структуру, индуцированную естественной проекцией

$$B(\Delta) \longrightarrow \mathcal{T} = B(\Delta)/\!\sim.$$

Оказывается, оба способа дают один и тот же результат, точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема V.3. *Композиция естественной проекции $B(\Delta) \to \mathcal{T}$ с вложением Берса, задающая отображение*

$$F\colon B(\Delta) \to B_2(\Delta_-),$$

является голоморфным отображением комплексных банаховых пространств.

Этот результат доказан в книге [5, п. 3.4].

Дадим явное описание касательного отображения dF в начале, т.е. в точке $\mu \equiv 0$. Эта точка при отображении F переходит в класс $\mathrm{id} = [\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)]$ в представлении

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1).$$

(Формула для дифференциала $d_\mu F$ в произвольной точке $\mu \in L^\infty(\Delta)$ приводится в книге [5, п. 3.4.2.])

Пусть $\mu \in L^\infty(\Delta)$ есть произвольный касательный вектор из пространства $T_0B(\Delta)$. Тогда при достаточно малом t функция $t\mu \in B(\Delta)$ и потому определяет отвечающий ей нормализованный квазиконформный гомеоморфизм $w^{t\mu}$, для которого справедливо представление

$$w^{t\mu}(z) = z + tw_1(z) + o(t) \tag{V.1}$$

при $t \to 0$, где $o(t) \equiv t\varepsilon(z,t)$ и $\varepsilon(z,t) \to 0$ равномерно по z, принадлежащим компактным подмножествам в $\mathbb{C}$. (Этот факт вытекает из теоремы о равномерной зависимости решения w^μ уравнения Бельтрами от параметра и доказан в книге [3, гл. V, п. C].)

Коэффициент

$$w_1(z) \equiv \dot{w}[\mu](z) \tag{V.2}$$

представляет собой первую вариацию квазиконформного гомеоморфизма w^μ относительно μ.

Подставим $w^{t\mu}$ в уравнение Бельтрами и продифференцируем полученное соотношение по t при $t = 0$. В результате получим соотношение

$$\bar\partial w^{t\mu} = t\mu\partial w^{t\mu},$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}(\bar\partial w^{t\mu}) = \mu(\partial w^{t\mu})|_{t=0}. \tag{V.3}$$

При выводе последнего соотношения нужно воспользоваться тем фактом, что оператор $\partial/\partial t$ коммутирует с операторами $\overline{\partial}$ и ∂, который доказан в книге [3, гл. V, п. C]).

Из представления (V.1) вытекает, что

$$\partial w^{t\mu}|_{t=0} = 1, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} w^{t\mu} = w_1(z),$$

поэтому из соотношения (V.3) получаем $\overline{\partial}$-уравнение на функцию $w_1(z)$:

$$\overline{\partial} w_1 = \mu, \tag{V.4}$$

которое выполняется для почти всех $z \in \mathbb{C}$. Если носитель μ компактен, то решение этого уравнения задается интегралом Коши–Грина

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \qquad \zeta = \xi + i\eta,$$

плюс произвольная целая функция. В книге [3, гл. V, п. C], показано, что эта целая функция может быть только линейной вида $A + Bz$. Постоянные A и B нетрудно найти из условий нормализации

$$w^{t\mu}(0,t) \equiv 0, \qquad w^{t\mu}(1,t) \equiv 1,$$

откуда $w_1(0) = w_1(1) = 0$. Из последних соотношений следует, что

$$A = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\, d\xi\, d\eta, \qquad B = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \mu(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta}\right] d\xi\, d\eta,$$

так что

$$A + Bz = \frac{1-z}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta}\, d\xi\, d\eta + \frac{z}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - 1}\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, искомое решение уравнения (V.4) будет задаваться формулой

$$\begin{aligned} w_1(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \mu(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{z-1}{\zeta} - \frac{z}{\zeta - 1}\right] d\xi\, d\eta \\ &= -\frac{z(z-1)}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)}\,. \end{aligned} \tag{V.5}$$

Эта формула получена в предположении, что μ имеет компактный носитель в $\mathbb{C}$. Последнее ограничение можно снять с помощью рассуждения из [3, гл. V, п. C].

Воспользуемся формулой (V.5) для доказательства следующей теоремы.

Теорема V.4. *Дифференциал отображения*

$$F\colon B(\Delta) \to B_2(\Delta_-)$$

в точке $\mu \equiv 0$ *является ограниченным линейным оператором* $d_0F\colon L^\infty(\Delta) \to B_2(\Delta_-)$, *задаваемым формулой*

$$d_0F[\mu](z) = -\frac{6}{\pi}\int_\Delta \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4}\, d\xi\, d\eta, \qquad z \in \Delta_-, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \Delta.$$

Операторная норма d_0F *оценивается абсолютной константой* ($\leqslant 96$).

Идея доказательства.[3] Фиксируем точку $z_0 \in \Delta_-$. Можно показать, что функция $w^{t\mu}(z)$ является голоморфной как по z, так и по t (и, следовательно, по их совокупности) при достаточно малых $|t|$ и $|z - z_0|$ (см. [5, п. 3.4.3]). Поэтому функция

$$\varphi(t, z) := S[w^{t\mu}](z),$$

являющаяся образом функции $t\mu$ при отображении Берса, голоморфна в области

$$\{|t| < \epsilon\} \times \{|z - z_0| < \delta\} \subset \mathbb{C}^2$$

при достаточно малых ϵ и δ. Вычислим производную этой функции по t при $t = 0$. Для сокращения формул будем обозначать производную по t "точкой", а производную по z "штрихом". Тогда

$$\dot\varphi = \left[\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\frac{w''^2}{w'^2}\right]^{\cdot} = \frac{w'^3\dot w''' - \dot w' w'^2 w''' - 3\dot w'' w'^2 w'' + 6\dot w' w' w''}{w'^4}.$$

При $t = 0$ имеем $w(z) \equiv z$, откуда следует, что $w' \equiv 1$, $w'' = w''' \equiv 0$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{w'^3\dot w'''}{w'^4} = \dot w'''.$$

[3] Полное доказательство см. в книге [5, п. 3.4.5].

Теперь воспользуемся формулой (V.5) для функции $w_1(z) = \dot{w}[\mu](z)$:

$$\dot{w}(z) = -\frac{z(z-1)}{\pi}\int_\Delta \frac{\mu(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

(напомним, что при построении нормализованного решения $w^{t\mu}$ мы продолжаем μ нулем вне Δ). Поскольку интеграл в последней формуле равномерно ограничен по z на компактных подмножествах из Δ_-, мы можем продифференцировать по z под знаком интеграла. В итоге получим

$$\dot{w}'''(z) = -\frac{6}{\pi}\int_\Delta \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta-z)^4}\,d\xi\,d\eta, \qquad z \in \Delta_-.$$

Оценка нормы оператора d_0F вытекает из оценки интеграла

$$\int_\Delta \frac{|d\xi\,d\eta|}{|\zeta-z|^4} \leqslant \frac{\pi}{\operatorname{dist}(z,S^1)^2} \qquad \text{при} \quad z \in \Delta_-.$$

Опишем теперь ядро дифференциала d_0F. Для этого введем подпространство $A_2(\Delta) \subset B_2(\Delta)$, состоящее из *суммируемых* (т.е. L^1-интегрируемых) *голоморфных квадратичных дифференциалов* в круге Δ:

$$A_2(\Delta) = \left\{\psi = \psi(z)\,dz^2 \in B_2(\Delta) : \int_\Delta |\psi(z)||dx\,dy| < \infty\right\}.$$

Между этим пространством и пространством $B(\Delta)$ дифференциалов Бельтрами имеется естественное спаривание

$$\langle\mu,\psi\rangle = \int_\Delta \mu\psi.$$

Это обычное спаривание между $(-1,1)$- и $(2,0)$-дифференциалами, при котором интеграл в правой части берется от интегрируемой $(1,1)$-формы.

В терминах этого спаривания ядро d_0F описывается следующим образом.

Лемма V.1 (лемма Тейхмюллера). *Ядро дифференциала d_0F совпадает с подпространством*

$$N := A_2(\Delta)^\perp = \{\mu \in L^\infty(\Delta) : \langle\mu,\psi\rangle = 0 \ \text{для всех}\ \psi \in A_2(\Delta)\}.$$

Доказательство. Мы хотим описать множество всех $\mu \in L^\infty(\Delta)$ таких, что

$$\varphi(z) := \int_\Delta \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4}\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad \text{для всех} \quad z \in \Delta_-.$$

Разложим подынтегральную функцию $1/(\zeta - z)^4$ в ряд Тейлора по степеням $1/z$ в окрестности точки $z = \infty$ и почленно проинтегрируем его по ζ. Получим:

$$\varphi(z) = \frac{c_3}{z^4} + \frac{c_4}{z^5} + \cdots,$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = n(n-1)(n-2)\int_\Delta \zeta^{n-3}\mu(\zeta)\, d\xi\, d\eta \qquad \text{при} \quad n = 3, 4, \dots .$$

Из условия $\varphi(z) \equiv 0$ при $z \in \Delta_-$ следует, что

$$\int_\Delta \zeta^k \mu(\zeta)\, d\xi\, d\eta = 0 \qquad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. функция $\mu(\zeta)$ ортогональна всем степеням ζ^k, $k = 0, 1, 2, \dots$, и потому всем голоморфным полиномам. Поскольку эти полиномы, очевидно, плотны в $A_2(\Delta)$, то $\langle \mu, \psi \rangle = 0$ для всех $\psi \in A_2(\Delta)$.

V.5. Кэлерова структура пространства $\mathcal{T}$. Результаты, полученные в предыдущем пункте, подсказывают, каким образом можно попытаться ввести кэлерову метрику на пространстве $\mathcal{T}$.

Воспользуемся для этого *отображением Альфорса*(см. [3, гл. IV, п. D]):

$$\Phi\colon L^\infty(\Delta) \to B_2(\Delta),$$

сопоставляющим функции $\mu \in L^\infty(\Delta)$ интеграл

$$\Phi[\mu](z) \equiv \varphi(z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar\zeta)^4}\, d\xi\, d\eta. \tag{V.6}$$

Образом функции μ при этом отображении является голоморфный квадратичный дифференциал $\varphi = \varphi(z)dz^2$ в круге Δ. Ядро отображения Φ совпадает с $N = A_2(\Delta)^\perp$.

Мы хотели бы определить, пользуясь формулой (V.6), эрмитову метрику на пространстве $\mathcal{T}$. Попробуем сначала определить ее в нуле, чтобы затем разнести в другие точки $\mathcal{T}$ с помощью действия группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на $\mathcal{T}$ левыми сдвигами. Эрмитову метрику на касательном пространстве $T_0\mathcal{T}$ естественно определять, полагая ее равной на касательных векторах $[\mu],[\nu]\in T_0\mathcal{T}=L^\infty(\Delta)/N$ двойному интегралу

$$(\mu,\nu)\equiv\langle\mu,\Phi[\nu]\rangle=\int_\Delta\int_\Delta\frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\zeta)^4}\,d\xi\,d\eta\,dx\,dy. \tag{V.7}$$

Однако, введенная таким образом эрмитова метрика на $T_0\mathcal{T}$ оказывается корректно определенной только на плотном подмножестве в $T_0\mathcal{T}$. Причина в том, что для общего $\nu\in L^\infty(\Delta)$ его образ $\Phi[\nu]$ в $B_2(\Delta)$ может оказаться не интегрируемым, т.е. не принадлежащим $A_2(\Delta)$, и в этом случае интеграл в формуле (V.7) разойдется. На самом деле, формула (V.7) корректно определена только для достаточно гладких касательных векторов $[\mu],[\nu]$ из $T_0\mathcal{T}$. Сформулируем это утверждение более точно.

Пусть $[\mu]\in L^\infty(\Delta)$ есть касательный вектор из $T_0\mathcal{T}$. Рассмотрим отображение

$$d\beta\colon T_0(B(\Delta/{\sim})\to T_{\mathrm{id}}(\mathrm{QS}(S^1)/\operatorname{M\ddot{o}b}(S^1)), \tag{V.8}$$

касательное к изоморфизму

$$\beta\colon B(\Delta/{\sim})\to\mathrm{QS}(S^1)/\operatorname{M\ddot{o}b}(S^1).$$

При этом отображении касательный вектор $[\mu]$ переходит в некоторое векторное поле на S^1 вида

$$v(\theta)\frac{d}{d\theta}=\dot{w}[\mu](z)\frac{d}{dz}\,,\qquad z=e^{i\theta},$$

где $\dot{w}[\mu]$ – первая вариация квазиконформного гомеоморфизма w^μ по μ из формулы (V.2). Будем называть векторные поля на S^1, являющиеся образами элементов $[\mu]\in T_0\mathcal{T}$ при отображении $d\beta$, *квазисимметричными*. Ниже в главе 3 будет показано, что интеграл в формуле (V.7) сходится, если векторам μ,ν отвечают векторные поля $\dot{w}[\mu]$, $\dot{w}[\nu]$ на S^1 с гладкостью класса $C^{3/2+\epsilon}$ с любым $\epsilon>0$.

Замечание V.1. В следующей главе будет показано, что формула (V.7) все-таки задает корректно определенную кэлерову метрику, если сузить ее на классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ или на пространство нормализованных диффеоморфизмов S.

Вернемся к соответствию (V.8), рассмотренному выше, и дадим внутреннее описание квазисимметричных векторных полей на S^1, являющихся образами векторов $[\mu] \in T_0(B(\Delta)/\sim)$ при отображении (V.8). Поскольку в этом описании существенную роль играет условие Берлинга–Альфорса, удобно начать со случая верхней полуплоскости H.

Введем *пространство Зигмунда* $\Lambda(\mathbb{R})$, состоящее из непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \frac{f(x)}{x^2+1} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

для которых существует константа $C > 0$ такая, что

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant C|t| \qquad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Пространство $\Lambda(\mathbb{R})$ является (не сепарабельным) банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_\Lambda := \sup_{x,t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right|.$$

В работе [6] показано, что квазисимметричные векторные поля на $\mathbb{R}$ отвечают в точности функциям из пространства Зигмунда $\Lambda(\mathbb{R})$.

Отсюда нетрудно получить аналог пространства $\Lambda(\mathbb{R})$ для окружности S^1, пользуясь преобразованием Кэли. Именно, квазисимметричные векторные поля на окружности имеют вид $v(e^{i\theta})\frac{d}{d\theta}$, где функция $v\colon S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывна, обращается в нуль в точках $\pm 1, -i$, и ее образ при дробно-линейном изоморфизме $\Delta \to H$ есть функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{x^2+1}{2} \cdot v\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \in \Lambda(\mathbb{R}).$$

Нормировка $v(\pm 1) = v(-i) = 0$ достигается добавлением к (не нормированному) векторному полю $u(e^{i\theta})\frac{d}{d\theta}$ подходящего векторного поля вида $(ae^{i\theta} + \overline{a}e^{-i\theta} + b)\frac{d}{d\theta}$, где $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$, из алгебры Ли $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ группы Ли $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$.

Краткое содержание лекции V.

Метрические и топологические свойства универсального пространства Тейхмюллера. Метрика Тейхмюллера – это расстояние между двумя нормализованными квазисимметричными гомеоморфизмами $S^1 \to S^1$:

$$\mathrm{dist}(f,g) = \frac{1}{2}\log K[g\circ f^{-1}],$$

где K – максимальная дилатация квазисимметричного гомеоморфизма. Пространство $\mathcal{T}$ в метрике Тейхмюллера является стягиваемым полным метрическим пространством.

Производная Шварца

$$S[f] = (\log f')' - \frac{1}{2}(\log f')^2$$

обладает следующими свойствами:

1) $S\left[\frac{az+b}{cz+d}\right] = 0$;
2) $S[f] = S\left[\frac{1}{f}\right]$;
3) $S[f\circ g] = (S[f]\circ g)g'^2 + S[g]$; при этом если g дробно-линейно, то $S[f\circ g] = (S[f]\circ g)g'^2$, если же f дробно-линейно, то $S[f\circ g] = S[g]$;
4) $S[f] = S\left[\frac{af+b}{cf+d}\right]$ для $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}})$;
5) для заданной голоморфной функции φ в односвязной области $\mathcal{D}$ существует мероморфная в $\mathcal{D}$ функция f, для которой

$$S[f] = \varphi.$$

Вложение Берса. Вложение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство $B_2(\Delta_-)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в дополнении Δ_- к единичному кругу Δ, задаваемое отображением

$$[\mu] \mapsto S[w^\mu|_{\Delta_-}].$$

Это вложение индуцирует на $\mathcal{T}$ комплексную структуру, совместимую с комплексной структурой на этом пространстве, индуцируемой проекцией

$$B(\Delta) \to \mathcal{T} = B(\Delta)/\sim.$$

Композиция указанной проекции с вложением Берса является голоморфным отображением $F\colon B(\Delta) \to B_2(\Delta_-)$, *дифференциал* которого в нуле равен

$$d_0F[\mu](z) = -\frac{6}{\pi}\int_\Delta \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4}\,d\xi\,d\eta, \qquad z \in \Delta_-, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \Delta.$$

Ядро d_0F совпадает с подпространством

$$N := A_2(\Delta)^\perp = \{\mu \in L^\infty(\Delta) : \langle \mu, \psi\rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in A_2(\Delta)\},$$

где $A_2(\Delta)$ – пространство интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ.

Кэлерова квазиметрика на $\mathcal{T}$ задается на векторах $[\mu], [\nu] \in T_0\mathcal{T} = L^\infty(\Delta)/N$ формулой

$$(\mu, \nu) = \langle \mu, \Phi[\nu]\rangle,$$

где $\Phi\colon L^\infty(\Delta) \to B_2(\Delta)$ – отображение Альфорса, определяемое формулой

$$\Phi[\mu](z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar\zeta)^4}\,d\xi\,d\eta.$$

Эта квазиметрика корректно определена только на "гладких" касательных векторах $[\mu], [\nu] \in T_0\mathcal{T}$, которым отвечают $C^{3/2+\epsilon}$-гладкие квазисимметричные векторные поля на окружности S^1.

Пространство $\Lambda(\mathbb{R})$ квазисимметричных векторных полей на вещественной прямой $\mathbb{R}$ совпадает с *пространством Зигмунда*, состоящим из непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что:

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad \frac{f(x)}{x^2+1} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}, t>0} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} < \infty.$$

Глава 3. Подпространства универсального пространства Тейхмюллера

В этой главе подробно изучаются два типа подмногообразий универсального пространства Тейхмюллера – классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ и пространство нормализованных диффеоморфизмов окружности $\mathcal{S}$.

Классическим пространствам Тейхмюллера посвящена лекция VII. Ее предваряет лекция VI, в которой излагаются необходимые сведения из теории римановых поверхностей. В ней принят подход, основанный на теории фуксовых групп, как наиболее удобный для последующего вложения классических пространств Тейхмюллера $T(G)$ в универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Пространства $T(G)$ вкладываются в $\mathcal{T}$ в виде комплексных подмногообразий. При этом кэлерова квазиметрика на $\mathcal{T}$, построенная в п. V.5, редуцируется в настоящую кэлерову метрику Вейля–Петерсона на пространствах $T(G)$.

Пространство нормализованных диффеоморфизмов окружности $\mathcal{S}$ также вкладывается в $\mathcal{T}$ в виде комплексного подмногообразия. Причем, в отличие от классических пространств Тейхмюллера $T(G)$, образ этого вложения целиком содержится в регулярной части пространства $\mathcal{T}$. Кэлерова квазиметрика на $\mathcal{T}$ дает при ограничении на $\mathcal{S}$ настоящую кэлерову метрику.

Лекция VI. Римановы поверхности

VI.1. Клейновы группы. Существуют различные подходы к определению римановых поверхностей. Наиболее удобным для наших целей является подход, основанный на теории клейновых групп, в котором риманова поверхность возникает как фактор одной из стандартных комплексных областей (т.е. римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или единичного круга Δ) по подходящей дискретной группе дробно-линейных преобразований.

Начнем с классификации таких преобразований. Пусть

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{где} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Сопоставим этому преобразованию величину

$$\operatorname{tr}^2 w = (a+d)^2 \in \mathbb{C}.$$

Эта величина инвариантна относительно сопряжения в группе $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$ согласно следующей задаче.

Задача VI.1. Преобразования $u, v \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$, не равные тождественному преобразованию I, сопряжены друг другу, т.е. $u = gvg^{-1}$ для некоторого $g \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \operatorname{tr}^2 u = \operatorname{tr}^2 v$.

Классификация дробно-линейных преобразований. Дробно-линейное преобразование w называется *параболическим*, если

$$\operatorname{tr}^2 w = 4.$$

Это условие равносильно тому, что w имеет на $\overline{\mathbb{C}}$ единственную неподвижную точку. Пример: $w(z) = z + 1$.

Дробно-линейное преобразование w называется *эллиптическим*, если $\operatorname{tr}^2 w$ вещественно и

$$0 \leqslant \operatorname{tr}^2 w < 4.$$

Это условие равносильно тому, что w сопряжено (в группе $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$) повороту

$$z \mapsto \lambda z \qquad \text{с} \quad |\lambda| = 1.$$

Дробно-линейное преобразование w называется *локсодромическим*, если оно не принадлежит к двум первым классам. В этом случае w сопряжено преобразованию

$$z \mapsto \lambda z \qquad \text{с} \quad |\lambda| \neq 1.$$

Наиболее важный подкласс локсодромических преобразований составляют *гиперболические* преобразования, сопряженные преобразованиям из $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{R})$.

Определение VI.1. Пусть G есть дискретная подгруппа в группе $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$. Множество

$$\Omega = \Omega(G) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : G \text{ действует вполне разрывно в точке } z\}$$

называется *областью разрывности* группы G. Говорят, что группа G действует *вполне разрывно* в точке z, если стабилизатор

$$G_z = \{g \in G : gz = z\}$$

этой точки состоит из конечного числа элементов и найдется окрестность U этой точки такая, что

$$\begin{aligned} g(U) = U \quad &\text{для всех} \quad g \in G_z, \\ g(U) \cap U = \varnothing \quad &\text{для всех} \quad g \in G \setminus G_z. \end{aligned}$$

Область разрывности $\Omega(G)$ является открытым инвариантным подмножеством в $\overline{\mathbb{C}}$. Она состоит из не более чем счетного числа связных компонент и, в частности, может оказаться пустой.

Определение VI.2. Дискретная подгруппа $G \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$ называется *клейновой*, если $\Omega(G) \neq \varnothing$.

Стабилизатор G_z клейновой группы в точке $z \in \Omega(G)$ может состоять только из единицы и эллиптических элементов конечного порядка.

Дополнение к $\Omega(G)$ называется *предельным множеством* группы G:

$$\Lambda(G) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega(G).$$

Оно совпадает с множеством предельных точек группы G.

Предельное множество $\Lambda(G)$ клейновой группы может оказаться конечным (более конкретно, пустым, либо содержащим одну или две точки) или бесконечным (и в этом случае, несчетным).

В случае конечного $\Lambda(G)$, т.е. при

$$\operatorname{card} \Lambda(G) = 0, 1, 2,$$

группа G называется *элементарной*. В случае несчетного $\Lambda(G)$ группа G называется *неэлементарной*, и тогда $\Lambda(G)$ является совершенным множеством в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. замкнутым, всюду плотным в себе и с пустой внутренностью (в частности, без изолированных точек). Более того, в этом случае $\Lambda(G)$ совпадает с множеством предельных точек любой из орбит.

Определение VI.3. Клейнова группа G называется *фуксовой*, если ее предельное множество лежит на окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ (т.е. на прямой или окружности в $\mathbb{C}$), делящей $\overline{\mathbb{C}}$ на два круга, каждый из которых сохраняется группой G.

Пользуясь сопряжением, всегда можно добиться того, чтобы указанная окружность совпадала с $\overline{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Мы будем предполагать далее это условие выполненным. В этом случае группа G действует вполне разрывно как на верхней полуплоскости $H = H_+$, так и на нижней полуплоскости H_-. Заметим, что любая дискретная подгруппа в $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{R})$ действует вполне разрывно на H и потому является фуксовой группой. (Однако не любая дискретная подгруппа в $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$ является даже клейновой.)

Определение VI.4. Фуксова группа G называется *фуксовой группой первого рода*, если $\Lambda(G) = \overline{\mathbb{R}}$. В этом случае

$$\Omega(G) = H_+ \cup H_-.$$

Фуксова группа G называется *фуксовой группой второго рода*, если

$$\Omega(G) = H_+ \cup H_- \cup \{\text{собственное открытое подмножество в } \overline{\mathbb{R}}\}.$$

В этом случае область разрывности $\Omega(G)$ является связной.

Определение VI.5. *Фундаментальной областью* клейновой группы G называется открытое подмножество $D \subset \Omega(G)$, обладающее следующими свойствами:

1) различные точки D принадлежат разным орбитам;
2) орбита любой точки $z \in \Omega(G)$ пересекает $\overline{D}$;
3) (двумерная) лебегова мера границы $\partial D = \overline{D} \setminus D$ равна нулю.

Это определение переносится очевидным образом на случай, когда G действует не на всей области $\Omega(G)$, а только на какомлибо из ее инвариантных подмножеств.

Например, в случае фуксовой группы $G \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{R})$ естественно искать фундаментальную область для действия G на верхней полуплоскости H. В этом случае обозначим через $U(G)$ максимальную область в H, на которой группа G действует свободно, т.е. без неподвижных точек. Точками $U(G)$ являются те точки из H, которые не остаются на месте под действием эллиптических элементов из G. В этом случае в качестве фундаментальной области для действия G на H можно взять гиперболический многоугольник с центром в точке $z_0 \in U(G)$:

$$D = \{z \in H : d(z, z_0) \leqslant d(z, g(z_0)) \text{ для всех } g \in G\},$$

где d – гиперболическая метрика на верхней полуплоскости H, задаваемая формулой:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{4y^2} \qquad \text{при} \quad x + iy \in H.$$

Указанный многоугольник принято также называть *фундаментальной областью Дирихле*. Его граница в случае конечно порожденной группы G состоит из конечного числа отрезков гиперболических геодезических. Стороны D входят в ∂D парами – каждая из них сопряжена некоторой другой стороне (в частности, возможно самой себе), которая получается из первой стороны действием некоторого элемента $g \in G$.

Для того, чтобы получить из D модель римановой поверхности H/G, достаточно склеить ∂D вдоль сопряженных сторон.

Если G – фуксова группа первого рода, то фундаментальная область D может касаться $\overline{\mathbb{R}}$ только в конечном числе параболических точек (“каспов”).

Примеры фуксовых и клейновых групп. Если предельное множество $\Lambda(G)$ фуксовой группы G пусто, то группа G обязательно конечна и является циклической группой, состоящей из эллиптических элементов.

Если предельное множество $\Lambda(G)$ состоит из единственной точки, то G является бесконечной циклической группой с параболической образующей.

Если предельное множество $\Lambda(G)$ состоит из двух точек, то G является бесконечной циклической группой с гиперболической образующей. Предельные точки в рассмотренных случаях неподвижны.

Группа тора порождается двумя комплексными числами τ_1, τ_2, одно из которых можно считать вещественным, а другое – лежащим в верхней полуплоскости H. Группа

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \{z \mapsto z + m\tau_1 + n\tau_2 : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

является элементарной клейновой группой с

$$\Omega(\Gamma) = \mathbb{C}, \qquad \Lambda(\Gamma) = \{\infty\}.$$

Эллиптическая модулярная группа

$$G_1 = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$$

является классическим примером фуксовой группы. Наряду с ней рассматриваются модулярные группы уровня k:

$$G_k = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod k \right\}.$$

Каждая из групп G_k является конечно порожденной фуксовой группой первого рода.

VI.2. Римановы поверхности. Напомним стандартную конструкцию компактных римановых поверхностей рода g. Фундаментальная группа $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$ такой поверхности X порождается $2g$ петлями $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ с единственным соотношением

$$\prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] = 1,$$

где $[A_i, B_i] := A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$.

Определение VI.6. Риманова поверхность имеет (конечный) *конформный тип* (g, n), если она биголоморфно эквивалентна поверхности вида

$$\widehat{X} \setminus \{x_1, \dots, x_n\},$$

где $\widehat{X}$ – компактная риманова поверхность рода g, а $x_1, \dots, x_n$ – попарно различные точки на $\widehat{X}$.

Такая поверхность называется иначе римановой поверхностью с n проколами. Ее фундаментальная группа порождается $2g$ петлями $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ и n “малыми” петлями $C_1, \dots, C_n$ вокруг проколотых точек $x_1, \dots, x_n$. Единственное соотношение между образующими имеет вид

$$\prod_{i=1}^{g} [A_i, B_i] \cdot C_1 \cdot \dots \cdot C_n = 1.$$

Униформизация. Теорема униформизации утверждает, что универсальная накрывающая $\widetilde{X}$ произвольной римановой поверхности X является либо римановой сферой $\overline{\mathbb{C}}$, либо комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, либо верхней полуплоскостью H (или единичным кругом Δ).

Иначе говоря, поверхность X биголоморфно эквивалентна поверхности $\widetilde{X}/G$, где $G \cong \pi_1(X)$ есть некоторая дискретная группа биголоморных автоморфизмов поверхности $\widetilde{X}$, действующая свободно и вполне разрывно на $\widetilde{X}$.

При этом риманова поверхность $X_1 = \widetilde{X}/G_1$ биголоморфно эквивалентна римановой поверхности $X_2 = \widetilde{X}/G_2$ тогда и только тогда, когда группы G_1 и G_2 сопряжены внутри группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\widetilde{X})$ (докажите это!)

Соответствие: римановы поверхности $\leftrightarrow$ клейновы группы. Пусть G есть клейнова дискретная подгруппа в группе $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$. Тогда $\Omega(G)/G \equiv \Omega/G$ есть объединение не более чем счетного числа римановых поверхностей, так что проекция

$$\pi\colon \Omega \to \Omega/G$$

является открытым голоморфным отображением. Действительно, если G действует свободно на Ω, то π есть накрытие, индуцирующее структуру комплексного многообразия на Ω/G. Если же стабилизатор G_{z_0} некоторой точки $z_0 \in \Omega$ нетривиален, то G_{z_0} есть циклическая группа конечного порядка k_0. Обозначим ее эллиптическую образующую через g_0. Тогда в терминах подходящей локальной координаты w в окрестности z_0 действие g_0 будет задаваться формулой

$$g_0 \cdot w = e^{2\pi i/k_0} w.$$

В этом случае проекция π является k-кратным накрытием в проколотой окрестности z_0 и функцию w^k можно взять в качестве голоморфной локальной координаты в окрестности точки $\pi(z_0) \in \Omega/G$. Точка $\pi(z_0)$ является при этом точкой ветвления k-го порядка, а проекция π над окрестностью точки $\pi(z_0)$ – голоморфным разветвленным накрытием степени k.

Получающиеся при этом римановы поверхности (связные компоненты Ω/G) могут иметь любой конформный тип (g, n), кроме $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$ и $(1,0)$. Этим типам отвечают римановы поверхности, для которых универсальной накрывающей служат риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$ и комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Более точно, тип $(0,0)$

отвечает римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$, которая накрывается ею же самою. Типы $(0,1)$, $(0,2)$ и $(1,0)$ отвечают соответственно комплексной плоскости $\mathbb{C}$, проколотой комплексной плоскости $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и тору. Все эти римановы поверхности накрываются комплексной плоскостью $\mathbb{C}$.

Если G – фуксова группа первого рода, то

$$X = \Omega/G = X_+ \cup X_-,$$

где $X_\pm = H_\pm/G$. Римановы поверхности $X_\pm$ двойственны друг другу и комплексное сопряжение задает антиголоморфный гомеоморфизм X_+ на X_-.

Если же G – фуксова группа второго рода, т.е. область разрывности $\Omega(G)$ связна, то римановы поверхности $X_\pm$ биголоморфно вкладываются в риманову поверхность

$$X^d = \Omega/G,$$

называемую *дублем Шоттки* поверхности X_+, так что образы $X_\pm$ в X^d склеиваются вдоль их общей границы

$$\partial X_+ = \partial X_- = (\Omega \cap \overline{\mathbb{R}})/G.$$

Антиголоморфная инволюция на X^d, индуцируемая комплексным сопряжением $z \mapsto \overline{z}$ на Ω, меняет X_+ и X_- местами, оставляя неподвижными точки их общей границы.

Римановы поверхности, накрываемые верхней полуплоскостью. Пусть, теперь, G – конечно порожденная фуксова группа первого рода. Тогда после факторизации верхней полуплоскости H по G получим риманову поверхность X конечного конформного типа. Если в G нет элементов конечного порядка, то H является универсальной накрывающей поверхности X, имеющей фундаментальную группу $\pi_1(X) = G$.

Если же в G имеются элементы конечного порядка, то рассмотрим вначале риманову поверхность $U(G)/G$, где $U(G)$ – максимальная область в H, на которой группа G действует свободно. Тогда

$$U(G) \to U(G)/G$$

является (неразветвленным) голоморфным накрытием, а поверхность $U(G)/G$ – римановой поверхностью некоторого конформного типа $(g, n+m)$ с $n+m$ проколами. В окрестности этих проколов полученная риманова поверхность устроена следующим образом. Первые n из них отвечают эллиптическим точкам $z_1, \dots, z_n$

порядков соответственно $\nu_1, \ldots, \nu_n$, так что стабилизатор G_{z_j} точки z_j, $j = 1, \ldots, n$, совпадает с циклической группой порядка ν_j. Риманова поверхность $X = H/G$ получается из $U(G)/G$ заполнением указанных проколов точками ветвления порядков $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Остающиеся m проколов отвечают параболическим точкам (“каспам”), лежащим на $\overline{\mathbb{R}}$. Стабилизатор каждой из этих точек является бесконечной циклической группой с параболической образующей. Риманова поверхность $X = H/G$ будет в этом случае иметь конформный тип (g, m).

Краткое содержание лекции VI.

Классификация преобразований Мебиуса. Преобразование $w = \frac{az+b}{cz+d}$ называется *параболическим*, если $\mathrm{tr}^2\, w = 4$, например, $z \mapsto z + 1$; такие преобразования имеют единственную неподвижную точку.

Преобразование w называется *эллиптическим*, если выполнено $0 \leqslant \mathrm{tr}^2\, w < 4$; например, $z \mapsto \lambda z$ с $|\lambda| = 1$.

Преобразование w называется *локсодромическим*, если оно не принадлежит к двум рассмотренным типам, например, $z \mapsto \lambda z$ с $|\lambda| \neq 1$. Преобразования из группы $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{R})$ вещественных дробно-линейных преобразований называются гиперболическими.

Множество $\Omega(G)$ точек $z \in \overline{\mathbb{C}}$, в которых дискретная группа G дробно-линейных преобразований действует вполне разрывно называется *областью разрывности.* Ее дополнение $\Lambda(G) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega(G)$ называется *предельным множеством* группы G. Группа G *клейнова*, если $\Omega(G) \neq \varnothing$. Предельное множество такой группы либо пусто, либо конечно и состоит из одной или двух точек, либо несчетно.

Дискретная группа дробно-линейных преобразований G называется *фуксовой*, если $\Lambda(G) \subset \overline{\mathbb{R}}$. *Фуксова группа первого рода* выделяется условием: $\Lambda(G) = \overline{\mathbb{R}}$, а *фуксова группа первого рода*– условием $\Lambda(G) \neq \overline{\mathbb{R}}$. Примером фуксовой группы первого рода может служить группа целочисленных дробно-линейных преобразований $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Если G – клейнова группа, то $\Omega(G)/G$ есть объединение римановых поверхностей, а проекция $\Omega(G) \to \Omega(G)/G$ является голоморфным накрытием. Для фуксовой группы первого рода $\Omega(G) = X_+ \cup X_-$, где $X_\pm = H_\pm/G$ – факторы верхней (соответственно нижней) полуплоскости по действию группы G. Для фуксовой группы второго рода $X_\pm$ являются подмножествами римановой поверхности $X^d = \Omega(G)/G$ с общей границей $\partial X_+ = \partial X_-$.

Римановы поверхности типа H/G с фуксовой группой G первого рода. Если группа G не имеет кручения, то $X = H/G$ есть риманова поверхность, а проекция $H \to H/G = X$ – голоморфное накрытие.

В случае, когда в G есть элементы конечного порядка, рассмотрим максимальную подобласть $U(G)$ в H, на которой группа G действует свободно; тогда проекция $U(G) \to U(G)/G$ задает голоморфное накрытие римановой поверхностью $U(G)/G$ конформного типа $(g, n+m)$ (т.е. римановой поверхности рода g с $n+m$ проколами), при этом первые n проколов отвечают эллиптическим точкам на H, а остальные m проколов отвечают параболическим точкам на $\overline{\mathbb{R}}$. Дополняя эллиптические точки точками ветвления соотв. порядков, получим риманову поверхность $X = H/G$ конформного типа (g, m).

Лекция VII. Классические пространства Тейхмюллера

VII.1. G-инвариантные квазиконформные отображения.

Определение VII.1. Квазиконформный гомеоморфизм w называется *G-инвариантным* относительно клейновой группы G (или *совместимым с действием* G), если

$$wGw^{-1} \subset \text{Möb}(\mathbb{C}).$$

Иначе говоря, группа wGw^{-1} снова является клейновой, при этом ее область разрывности будет совпадать с $w(\Omega(G))$.

Это определение допускает следующую переформулировку в терминах дифференциалов Бельтрами.

Предложение VII.1. *Квазиконформный гомеоморфизм w римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ с комплексной дилатацией μ является G-инвариантным тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\mu(gz)\frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} = \mu(z) \qquad \text{(VII.1)}$$

для почти всех $z \in \overline{\mathbb{C}}$ и всех $g \in G$.

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для нормализованного гомеоморфизма w^μ, поскольку он отличается от w на дробно-линейное преобразование. Для w^μ его G-инвариантность означает, что для любого $g \in G$ выполняется соотношение

$$w^\mu \circ g \circ (w^\mu)^{-1} =: g^\mu \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}) \to w^\mu \circ g = g^\mu \circ w^\mu.$$

Дифференцируя последнее равенство по $\overline{z}$, получим

$$\overline{\partial}(w^\mu \circ g) = (\overline{\partial} w^\mu \circ g)\overline{g}' = [(g^\mu)' \circ w^\mu]\overline{\partial} w^\mu,$$

а дифференцирование этого равенства по z дает

$$\partial(w^\mu \circ g) = (\partial w^\mu \circ g)g' = [(g^\mu)' \circ w^\mu]\partial w^\mu.$$

Поделив первое соотношение на второе, получим

$$(\mu \circ g)\frac{\overline{g'}}{g'} = \mu$$

почти всюду на $\overline{\mathbb{C}}$. Следовательно, условие (VII.1) необходимо для G-инвариантности w^μ и w. Если теперь обратить все импликации, то получим, что это условие и достаточно для G-инвариантности w^μ и w.

Приведенное выше определение и доказанное предложение немедленно переносятся на квазиконформные гомеоморфизмы, заданные в единичном круге Δ. Если преобразования из группы G сохраняют Δ, то квазиконформные гомеоморфизмы w^μ и w_μ, построенные по G-инвариантному квазиконформному гомеоморфизму w круга Δ, будут G-инвариантны в $\overline{\mathbb{C}}$, поскольку продолжения дифференциала Бельтрами μ нулем и по симметрии вне Δ не нарушают условия (VII.1). Поэтому по каждому G-инвариантному дифференциалу Бельтрами μ в круге Δ и фуксовой группе G, сохраняющей Δ, можно построить клейновы группы

$$G_\mu := w_\mu G w_\mu^{-1} \qquad \text{и} \qquad G^\mu := w^\mu G (w^\mu)^{-1}.$$

При этом группа G_μ является снова фуксовой, поскольку сохраняет круг Δ.

VII.2. Классические пространства Тейхмюллера. Пусть $G \subset \text{Möb}(S^1)$ есть фуксова группа первого рода. Определение G-инвариантности квазиконформных гомеоморфизмов немедленно переносится на квазисимметричные гомеоморфизмы $S^1 \to S^1$.

Определение VII.2. Квазисимметричный гомеоморфизм $f \in \text{QS}(S^1)$ называется *G-инвариантным* относительно фуксовой группы G (или *совместимым с действием* G), если

$$fGf^{-1} \subset \text{Möb}(S^1).$$

Обозначим подгруппу G-инвариантных квазисимметричных гомеоморфизмов в $\text{QS}(S^1)$ через $\text{QS}(S^1)^G$ и определим *классическое пространство Тейхмюллера* $T(G)$ как

$$T(G) = \text{QS}(S^1)^G / \text{Möb}(S^1).$$

В терминах дифференциалов Бельтрами это пространство определяется как

$$T(G) = B(\Delta)^G/\sim,$$

где $B(\Delta)^G$ – подпространство G-инвариантных дифференциалов Бельтрами в $B(\Delta)$, состоящее из дифференциалов $\mu \in B(\Delta)$, удовлетворяющих соотношению (VII.1), а отношение эквивалентности остается тем же, что и в случае универсального пространства Тейхмюллера, т.е. $\mu \sim \nu \Leftrightarrow w_\mu = w_\nu$ на Δ_-.

Пространство Тейхмюллера $T(G)$ есть комплексное банахово многообразие, комплексная структура которого индуцируется вложением Берса или естественной проекцией $B(\Delta)^G \to T(G) = B(\Delta)^G/\sim$. Тем самым, все классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ вкладываются в универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, отвечающее фуксовой группе $\{1\}$, в виде комплексных подмногообразий.

Пусть риманова поверхность X униформизуется фуксовой группой G, т.е.

$$X = \Delta/G.$$

По каждому классу $[\mu] \in T(G)$ мы можем построить новую риманову поверхность

$$X_\mu = \Delta/G_\mu,$$

где $G_\mu = w_\mu G w_\mu^{-1}$. Эту же поверхность можно записать в виде (проверьте справедливость этого утверждения!)

$$X_\mu = \Delta^\mu/G^\mu,$$

где $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$, $G^\mu = w^\mu G(w^\mu)^{-1}$ (заметим, что G^μ действует на Δ^μ вполне разрывно). В то же время риманова поверхность Δ^μ_-/G^μ, где $\Delta^\mu_- := w^\mu(\Delta_-)$, биголоморфно эквивалентна Δ_-/G, поскольку w^μ конформно на Δ_-.

Иными словами, можно сказать, что пространство $T(G)$ параметризует посредством сопоставления $[\mu] \mapsto G_\mu$ различные комплексные структуры на римановой поверхности $X = \Delta/G$, получающиеся из исходной квазиконформными деформациями. (Более подробно об этом см. [3, гл. VI, п. A.])

Все свойства универсального пространства Тейхмюллера, изложенные в гл. 2, переносятся и на классические пространства Тейхмюллера, нужно только добавлять везде условие G-инвариантности.

Так, вложение Берса в случае единичного круга Δ задается отображением

$$F\colon B(\Delta)^G \to B_2(\Delta_-)^G,$$

сопоставляющим дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)^G$ голоморфный квадратичный дифференциал $S[w^\mu]|_{\Delta_-}$ на Δ_-. Пространство $B_2(\Delta_-)^G$ состоит по определению из G-инвариантных голоморфных квадратичных дифференциалов в Δ_-, имеющих конечную норму

$$\|\psi\|_2 := \sup_{z\in\Delta_-} (1-|z|^2)^2|\psi(z)| < \infty.$$

Формула для дифференциала d_0F имеет тот же вид:

$$d_0F[\mu](z) = -\frac{6}{\pi}\int_{\Delta_+} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4}\, d\xi\, d\eta, \qquad z \in \Delta_-,$$

для $\mu \in L^\infty(\Delta_+)^G$. Ядро d_0F совпадает с подпространством

$$\begin{aligned} N^G &\equiv (A_2(\Delta_+)^G)^\perp \\ &= \{\mu \in L^\infty(\Delta_+)^G : \langle \mu, \psi\rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in A_2(\Delta_+)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, касательное пространство к $T(G)$ в начале совпадает с $L^\infty(\Delta)^G/N^G$.

Как и в гл. 2, имеется отображение Альфорса $L^\infty(\Delta)^G/N^G \to B_2(\Delta)^G$, задаваемое формулой

$$L^\infty(\Delta)^G \ni \mu \mapsto \Phi[\mu](z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar\zeta)^4}\, d\xi\, d\eta.$$

Попытаемся, как и в гл. 2, ввести с помощью этого отображения кэлерову метрику на пространстве $T(G)$, задавая ее на векторах $[\mu],[\nu]$ из $T_0T(G) = L^\infty(\Delta)^G/N^G$ формулой

$$(\mu,\nu)_G = \langle \mu, \Phi[\nu]\rangle_G := \int_{\Delta/G}\int_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\bar{\zeta})^4}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy. \qquad \text{(VII.2)}$$

В случае классических пространств Тейхмюллера $T(G)$, т.е. при условии, что риманова поверхность Δ/G имеет конечный конформный тип, пространство $B_2(\Delta)^G$ совпадает с пространством интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов $A_2(\Delta)^G$ (см. [5]), поэтому формула (VII.2) корректно определена для всех $\mu,\nu \in L^\infty(\Delta)^G$ и задает эрмитову метрику на пространстве $T_0T(G)$, называемую *метрикой Вейля–Петерсона*.

Указанная кэлерова метрика на пространствах $T(G)$ была введена и исследована в классических работах Вейля [7] и Альфорса [8]. В указанной работе Альфорс также показал, что построенная метрика имеет отрицательную голоморфную секционную кривизну.

Что можно сказать об образе классических пространств $T(G)$ в универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$? Имеется интересный результат Боуэна [9], показывающий, что этот образ не принадлежит регулярной части $\mathcal{T}$.

Более точно, будем называть точку из $\mathcal{T}$ *регулярной*, если ей отвечает гладкий нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм из $\mathrm{QS}(S^1)$ или, что то же самое, квазикруг с гладкой границей. Боуэн показал, что каждой точке из $T(G)\setminus\{0\}$ (G – фуксова группа, униформизующая компактную риманову поверхность $X=\Delta/G$) отвечает квазикруг с фрактальной границей, хаусдорфова размерность d_H которой находится в пределах $1<d_H<2$ (и может быть любым числом из этого промежутка). В терминах квазисимметричных гомеоморфизмов можно доказать, что если f есть G-инвариантный квазисимметричный гомеоморфизм, принадлежащий классу C^1 хотя бы в одной точке, то $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$.

Краткое содержание лекции VII.

Квазиконформный гомеоморфизм w называется G*-инвариантным* относительно клейновой группы G, если

$$wGw^{-1} \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}).$$

Аналогично, квазисимметричный гомеоморфизм f называется G-*инвариантным* относительно фуксовой группы первого рода G, если

$$fGf^{-1} \subset \text{Möb}(S^1).$$

Дифференциал Бельтрами μ называется G-*инвариантным* относительно группы G, если

$$\mu(gz)\frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} = \mu(z).$$

Пространство Тейхмюллера, отвечающее фуксовой группе первого рода G, определяется как

$$T(G) = \text{QS}(S^1)^G / \text{Möb}(S^1) = B(\Delta)^G/\sim,$$

где $\text{QS}(S^1)^G$ обозначает подгруппу G-инвариантных квазисимметричных гомеоморфизмов в $\text{QS}(S^1)$, а $B(\Delta)^G$ – подпространство G-инвариантных дифференциалов Бельтрами в $B(\Delta)$.

Если $X = \Delta/G$ – риманова поверхность, униформизуемая единичным кругом Δ, то по каждому дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ можно построить новую риманову поверхность

$$X_\mu = \Delta/G_\mu = \Delta^\mu/G^\mu,$$

где $G_\mu = w_\mu G w_\mu^{-1}$, $G^\mu = w^\mu G(w^\mu)^{-1}$, а квазикруг Δ^μ определяется как $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$. Эта поверхность биголоморфна $X \Leftrightarrow \mu \sim 0$. Таким образом, *пространство $T(G)$ параметризует* посредством сопоставления $[\mu] \mapsto G_\mu$ *различные комплексные структуры на римановой поверхности $X = \Delta/G$, получающиеся из исходной квазиконформными деформациями.*

Кэлерова *метрика Вейля–Петерсона* на $T(G)$ задается на векторах $[\mu], [\nu] \in T_0T(G)$ формулой

$$(\mu, \nu)_G = \int_{\Delta/G}\int_\Delta \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\bar{\zeta})^4}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy.$$

Пространство $T(G)\setminus\{0\}$ целиком лежит в нерегулярной части универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$.

Лекция VIII. Пространство нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$

VIII.1. Комплексная структура. Пространство нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1), \qquad \text{(VIII.1)}$$

введенное в п. IV.1, целиком лежит в регулярной части пространства $\mathcal{T}$. Вложение (VIII.1) наделяет $\mathcal{S}$ индуцированной комплексной структурой. Однако комплексную структуру на $\mathcal{S}$ можно ввести и более прямым путем.

Прежде всего заметим, что указанную комплексную структуру достаточно определить только в начале $[\mathrm{id}] \in \mathcal{S}$, а затем разнести в другие точки $\mathcal{S}$ с помощью действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Построенная таким образом комплексная структура будет, тем самым, $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной. Касательное пространство

$$T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S} = T_{[\mathrm{id}]}(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$$

можно отождествить с фактором алгебры Ли группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по ее подалгебре $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, совпадающей с алгеброй Ли группы Ли $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ совпадает с алгеброй Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ гладких векторных полей на S^1, а ее элементы $v = v(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$ удобно задавать разложениями Фурье вида

$$v = \sum_{n\in\mathcal{Z}} v_n e_n$$

с комплексными коэффициентами, удовлетворяющими условию $\overline{v}_n = v_{-n}$, где e_n – базисные векторные поля

$$e_n = e^{in\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} = iz^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Тогда элементы $v \in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ будут задаваться рядами вида

$$v = \sum_{n\neq 0,\pm 1} v_n e_n.$$

Комплексная структура J на пространстве $T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ определяется формулой

$$Jv = -i\sum_{n=2}^{\infty} v_n e_n + i\sum_{n=-\infty}^{-1} v_n e_n. \qquad \text{(VIII.2)}$$

Сравним введенную комплексную структуру с построенной ранее комплексной структурой I на пространстве $T_{[0]}\mathcal{T}$ в реализации $\mathcal{T} = B(\Delta)/\sim$ и покажем, что эти структуры эквивалентны. В терминах дифференциалов Бельтрами действие комплексной структуры I отвечает умножению дифференциала Бельтрами μ на i. Напомним (см. V.5), что дифференциалу Бельтрами μ отвечает квазисимметричное векторное поле на S^1, имеющее вид

$$v = \dot{w}[\mu]\frac{\partial}{\partial z},$$

где (см. V.4) $\dot{w}[\mu]$ есть первая вариация квазиконформного гомеоморфизма $w_{t\mu}$ по μ, определяемая разложением

$$w_{t\mu}(z) = z + t\dot{w}[\mu](z) + o(t) \qquad \text{при} \quad t \to 0,$$

имеющим тот же смысл, что и в формуле (V.1). Для того, чтобы вычислить комплексную структуру J, мы должны для заданного векторного поля

$$v = v(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} = izv(z)\frac{\partial}{\partial z} = \dot{w}[\mu]\frac{\partial}{\partial z}$$

найти векторное поле

$$Jv = \widetilde{v}(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} = iz\widetilde{v}(z)\frac{\partial}{\partial z} = \dot{w}[i\mu]\frac{\partial}{\partial z}.$$

Преобразование, сопоставляющее функции $v(z)$ функцию $\widetilde{v}(z)$, называется *преобразованием Гильберта*. Мы найдем его явный вид немного позже.

Вариация $\dot{w}[\mu]$, также как в п. V.4, удовлетворяет $\bar{\partial}$-уравнению

$$\bar{\partial}\dot{w}[\mu] = \mu \qquad \text{почти всюду в} \quad \Delta. \tag{VIII.3}$$

Поэтому функция $F := \dot{w}[i\mu] - i\dot{w}[\mu]$ голоморфна в круге Δ, а на окружности S^1 совпадает с

$$F(z) = iz\widetilde{v}(z) + zv(z), \qquad z = e^{i\theta}. \tag{VIII.4}$$

Заметим, что граничное значение функции F на S^1 корректно определено, поскольку интеграл Коши–Грина от функции $\mu \in L^\infty(\Delta)$, задающий решение $\bar{\partial}$-уравнения (VIII.3) в круге Δ, непрерывен по Гельдеру вплоть до S^1.

Записывая функцию F в виде $F(z) = F(0) + zF_1(z)$, получим из формулы (VIII.4) соотношение

$$\overline{z}F(0) + F_1(z) = i\widetilde{v}(z) + v(z), \qquad z = e^{i\theta}.$$

Учитывая вещественность функций $v(\theta)$ и $\widetilde{v}(\theta)$, получаем отсюда соотношения

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{Re}(\overline{z}F(0) + F_1(z)) = \operatorname{Re}(z\overline{F(0)} + F_1(z)) = \operatorname{Re} f(z) \\ \widetilde{v} &= \operatorname{Im}(\overline{z}F(0) + F_1(z)) = \operatorname{Im}(\overline{z}F(0) - z\overline{F(0)} + f(z)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = \operatorname{Im} f(z) + bz + \overline{b}\overline{z}. \end{aligned}$$

Здесь, $f(z) = z\overline{F(0)} + F_1(z)$ – голоморфная в круге Δ функция, вещественная часть которой на окружности S^1 совпадает с v: $\operatorname{Re} f(\theta) = v(\theta)$. Такая функция f определяется функцией v однозначно с точностью до мнимой постоянной и задается *формулой Шварца*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}}\, v(\theta)\, d\theta + ia, \qquad \text{где} \quad a \in \mathbb{R}. \tag{VIII.5}$$

Из приведенных соотношений и формулы Шварца(VIII.5) вытекает, что

$$\widetilde{v}(z) = \operatorname{Im} f(z) + bz + \overline{b}\overline{z} + a, \qquad \text{где} \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}. \tag{VIII.6}$$

Если функция $v(\theta)$ задается рядом Фурье вида

$$v(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n e^{in\theta},$$

то функция f, голоморфная в круге Δ и удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} f = v$ на S^1, будет задаваться степенным рядом

$$f(z) = v_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} v_n z^n.$$

Поэтому из представления (VIII.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(\theta) &= \operatorname{Im} f(e^{i\theta}) + be^{i\theta} + \overline{b}e^{-i\theta} + a \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(-iv_n)e^{in\theta} + \sum_{n=2}^{\infty}\overline{(-iv_n)}e^{-in\theta} + (\alpha + \beta e^{i\theta} + \overline{\beta}e^{-i\theta}). \end{aligned} \tag{VIII.7}$$

Полагая в этом равенстве $\alpha = \beta = 0$, подберем константы a, b так, чтобы составляющая $\widetilde{v}$, принадлежащая $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, обратилась в нуль. Тогда для $\widetilde{v} = Jv$ получим формулу (VIII.2). Тем самым, мы показали, что два определения комплексной структуры J на $\mathcal{S}$, данные выше, эквивалентны, откуда следует, что вложение многообразия $\mathcal{S}$, наделенного комплексной структурой J, в универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, наделенное комплексной структурой I, является голоморфным.

VIII.2. Кэлерова метрика. Пространство $\mathcal{S}$ обладает однородной симплектической формой ω. Эта форма определяется однозначно с точностью до умножения на константу и ее значения на базисных векторных полях $e_n \in T^{\mathbb{C}}_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ равны (см. [1, п. 10.3]):

$$\omega(e_m, e_n) = \alpha(m^3 - m)\delta_{m,-n}, \qquad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

По форме ω и комплексной структуре J можно построить согласованную с ними риманову метрику g_R, задаваемую на касательных векторах $u, v \in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ формулой

$$g_R(u,v) = a\ \mathrm{Re}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \overline{u}_n v_n (n^3 - n)\right], \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где

$$u = \sum_{n \neq 0, \pm 1} u_n e_n, \qquad v = \sum_{n \neq 0, \pm 1} v_n e_n.$$

Кэлерова метрика

$$g(u,v) = a \sum_{n=2}^{\infty} \overline{u}_n v_n (n^3 - n) \tag{VIII.8}$$

является комплексификацией построенной римановой метрики g_R. Заметим, что ряд в правой части (VIII.8) абсолютно сходится, если векторные поля u, v принадлежат классу $C^{3/2+\epsilon}$ с любым $\epsilon > 0$.

Метрика (VIII.8) на пространстве $\mathcal{S}$ построена в работе Кириллова и Юрьева[10], где также показано, что эта метрика является кэлеровой. Эта метрика совпадает с ограничением на $\mathcal{S}$ кэлеровой квазиметрики (V.7) из п. V.5 при подходящем выборе константы a. Точнее, имеет место следующее

Предложение VIII.1. *Пусть векторы* $\mu, \nu \in L^\infty(\Delta)$ *отвечают* $C^{3/2+\epsilon}$*-гладким векторным полям* u, v *на* S^1 *соответственно. Тогда значение метрики* (VIII.8) *на этих полях равно*

$$g(u,v) = \frac{a}{6\pi^2} \int_\Delta \int_\Delta \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\overline{\zeta})^4}\, dx\, dy.$$

Идея доказательства.[4] Также, как при доказательстве леммы Тейхмюллера из п. V.4, можно показать, пользуясь интегральным представлением для $\dot{w}[\mu]$ (формула (V.5)), что коэффициенты Фурье векторного поля $u = u(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$, могут быть найдены по формуле

$$u_n = \frac{i}{\pi} \int_\Delta \overline{z}^{n-2}\overline{\mu(z)}\, dx\, dy \qquad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

и $\overline{u}_n = u_{-n}$ при $n \leqslant -2$. Отсюда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \overline{u}_n v_n (n^3 - n)$$
$$= -\frac{1}{\pi^2} \int_\Delta \int_\Delta \mu(z)\overline{\nu(\zeta)} \sum_{n=2}^{\infty} z^{n-2}\overline{\zeta}^{n-2}(n^3-n)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta. \tag{VIII.9}$$

(Мы поменяли интегралы и знак суммирования местами, пользуясь равномерной сходимостью рассматриваемого ряда для $C^{3/2+\epsilon}$-гладких векторных полей.) Осталось учесть, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-2}(n^2 - n) = -\frac{1}{6(1-\lambda)^4} \qquad \text{при} \quad |\lambda| < 1$$

и подставить это равенство в формулу (VIII.9) при $\lambda = z\overline{\zeta}$.

Образ вложения $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$ лежит, как указывалось ранее, в регулярной части пространства $\mathcal{T}$. С другой стороны, образы вложений классических пространств Тейхмюллера $T(G) \setminus \{0\}$ принадлежат нерегулярной части $\mathcal{T}$. Тем самым, эти подмногообразия пересекаются только в начале $[\mathrm{id}] \in \mathcal{T}$.

[4]Полное доказательство см. в статье [11]

Краткое содержание лекции VIII.

Пространство нормализованных диффеоморфизмов:

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{T} = \mathrm{QS}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1).$$

Комплексная структура в начале задается на векторе $v = \sum_{n\neq 0,\pm 1} v_n e_n \in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ формулой

$$Jv = -i\sum_{n=2}^{\infty} v_n e_n + i\sum_{n=-\infty}^{-1} v_n e_n.$$

Эта структура совпадает с комплексной структурой, индуцированной вложением $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

Симплектическая структура в начале, определенная с точностью до мультипликативной постоянной, задается на базисных векторах e_n формулой

$$\omega(e_m, e_n) = \alpha(m^3 - m)\delta_{m,-n}.$$

Совместимая с ней *кэлерова метрика* на векторах

$$u = \sum_{n\neq 0,\pm 1} u_n e_n,\ \ v = \sum_{n\neq 0,\pm 1} v_n e_n \in T^{\mathbb{C}}_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$$

задается формулой

$$g(u,v) = a\sum_{n=2}^{\infty} \overline{u}_n v_n (n^3 - n).$$

Эта метрика (при подходящем выборе константы a) совпадает с метрикой, индуцированной квазиметрикой на $\mathcal{T}$ при вложении $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, и задается на векторных полях u, v, отвечающих дифференциалам Бельтрами μ, ν, формулой

$$g(u,v) = 6\pi^2 \int_{\Delta}\int_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\overline{\zeta})^4}\, dx\, dy.$$

Пространство $\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ целиком лежит в регулярной части универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ и пересекается с классическими пространствами Тейхмюллера $T(G)$ только в начале.

Глава 4. Грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера

В этой главе строится грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера в виде подмногообразия бесконечномерного грассманиана, играющая ключевую роль в квантовании пространства $\mathcal{T}$.

В ее основе лежит теорема Нага–Сулливана, доказанная в п. IX.3. Эта теорема утверждает, что группа квазисимметричных гомеоморфизмов окружности $\mathrm{QS}(S^1)$ действует на соболевском пространстве полудифферецируемых функций на окружности $V := H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$ симплектическими преобразованиями. Свойства соболевского пространства V излагаются в пп. IX.1, IX.2.

Из теоремы Нага–Сулливана вытекает, что универсальное пространство Тейхмюллера вкладывается в пространство $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур на соболевском пространстве V, совместимых с его симплектической структурой. Это пространство в свою очередь можно отождествить с бесконечномерным диском Зигеля $\mathcal{D}$, вложенным в бесконечномерный грассманиан гильбертова пространства V. Результирующее вложение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в указанный грассманиан является голоморфным отображением комплексных банаховых многообразий.

Ограничение указанного вложения на пространство нормализованных диффеоморфизмов окружности $\mathcal{S}$ реализует это пространство в виде подмногообразия грассманиана Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V^{\mathbb{C}})$ гильбертова пространства $V^{\mathbb{C}}$.

Лекция IX. Действие квазисимметричных гомеоморфизмов на гильбертовом пространстве

IX.1. Соболевское пространство полудифференцируемых функций.

Определение IX.1. *Соболевское пространство полудифференцируемых функций*

$$V = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R})$$

есть гильбертово пространство, состоящее из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности, имеющих обобщенную производную порядка $\frac{1}{2}$ из $L^2(S^1, \mathbb{R})$. Иначе говоря, оно состоит из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$, ряды Фурье которых имеют вид

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \qquad \overline{f}_n = f_{-n}, \quad z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядка $\frac{1}{2}$

$$\|f\|^2_{\frac{1}{2}} = \sum_{n \neq 0} |n| |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n |f_n|^2 < \infty.$$

Сопоставляя функции $f \in V$ последовательность $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, ее коэффициентов Фурье, мы установим изометрический изоморфизм пространства V с гильбертовым пространством $\ell_2^{\frac{1}{2}}$, состоящим из последовательностей $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots)$ комплексных чисел f_n с конечной нормой

$$\|\vec{f}\|^2_{\ell_2^{\frac{1}{2}}} := 2 \sum_{n=1}^{\infty} n |f_n|^2 < \infty.$$

Рассмотрим на пространстве V *кососимметрическую* 2-*форму* $\omega \colon V \times V \to \mathbb{R}$, которая определяется в терминах коэффициентов Фурье векторов $\xi, \eta \in V$ по формуле

$$\omega(\xi, \eta) = -i \sum_{n \neq 0} n \xi_n \eta_{-n} = 2 \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \xi_n \overline{\eta}_n.$$

Эта форма корректно определена ввиду неравенства Коши–Шварца

$$|\omega(\xi, \eta)| \leqslant \|\xi\|_{\frac{1}{2}} \cdot \|\eta\|_{\frac{1}{2}}.$$

Форма ω совпадает с пополнением естественной симплектической структуры на пространстве гладких петель

$$\Omega S^1 = C_0^\infty(S^1, S^1),$$

задаваемой 2-формой

$$\omega_0(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(e^{i\theta})\frac{d\eta(e^{i\theta})}{d\theta}\,d\theta \tag{IX.1}$$

(см. [1, п. 7.2]).

Пространство V обладает также *комплексной структурой* J^0, которая определяется в терминах разложений Фурье по формуле

$$\xi(z) = \sum_{n\neq 0}\xi_n z^n \mapsto (J^0\xi)(z) = -i\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n z^n + i\sum_{n=-\infty}^{-1}\xi_n z^n. \tag{IX.2}$$

Эта комплексная структура совместима с симплектической формой ω в том смысле, что вместе они определяют *риманову метрику* на V по формуле $g^0(\xi,\eta) := \omega(\xi, J^0\eta)$, или в терминах коэффициентов Фурье

$$g^0(\xi,\eta) = \sum_{n\neq 0}|n|\xi_n\overline{\eta}_n = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\overline{\eta}_n. \tag{IX.3}$$

Иными словами, V является *кэлеровым гильбертовым пространством.*

Комплексификация

$$V^{\mathbb{C}} = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{C})$$

пространства V является комплексным гильбертовым пространством, состоящим из функций $f \in L^2(S^1,\mathbb{C})$ с разложениями Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} f_n z^n, \qquad z = e^{i\theta},$$

и конечной соболевской нормой

$$\|f\|^2_{\frac{1}{2}} = \sum_{n\neq 0}|n||f_n|^2 < \infty.$$

Риманова метрика g^0 продолжается на $V^{\mathbb{C}}$ до эрмитовой метрики

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{n \neq 0} |n| \xi_n \overline{\eta}_n.$$

Продолжим также форму ω и комплексную структуру J^0 комплексно линейно на $V^{\mathbb{C}}$. Тогда пространство $V^{\mathbb{C}}$ будет допускать разложение в прямую сумму подпространств

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-, \tag{IX.4}$$

где $W_\pm$ есть собственное $(\mp i)$-подпространство линейного оператора $J^0 \colon V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$. Иными словами,

$$W_+ = \left\{ \xi \in V^{\mathbb{C}} : \xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z^n \right\},$$
$$W_- = \left\{ \xi \in V^{\mathbb{C}} : \xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \xi_n z^n \right\}.$$

Подпространства $W_\pm$ изотропны относительно симплектической формы ω, т.е. $\omega(\xi, \eta) = 0$, если одновременно $\xi, \eta \in W_+$ или $\xi, \eta \in W_-$. Разложение (IX.4) является ортогональной прямой суммой относительно эрмитова скалярного произведения $\langle \cdot , \cdot \rangle$. В терминах разложения (IX.4) это скалярное произведение задается формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle = i\omega(\xi_+, \overline{\eta}_+) - i\omega(\xi_-, \overline{\eta}_-),$$

где $\xi_\pm$ (соответственно $\eta_\pm$) обозначает проекцию $\xi \in V^{\mathbb{C}}$ (соответственно $\eta \in V^{\mathbb{C}}$) на $W_\pm$.

IX.2. Определение в терминах гармонических функций. Обозначим через $\mathcal{D}$ *пространство Дирихле*, состоящее из гармонических функций в круге $h \colon \Delta \to \mathbb{R}$, нормированных условием $h(0) = 0$ и имеющих конечную *энергию*

$$E(h) = \frac{1}{2\pi} \int_\Delta |\operatorname{grad} h(z)|^2 \, dx \, dy$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_\Delta \left(\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right|^2 \right) dx \, dy < \infty.$$

Предложение IX.1. *Преобразование Пуассона*

$$Pf(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\zeta, z) f(\zeta)\, d\theta, \qquad \zeta = e^{i\theta},$$

где $P(\zeta, z)$ *– ядро Пуассона в круге* Δ:

$$P(\zeta, z) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta - z|^2},$$

устанавливает изометрический изоморфизм

$$P\colon V \to \mathcal{D}$$

между соболевским пространством V *и пространством Дирихле* $\mathcal{D}$, *наделенным нормой*

$$\|h\|^2_{\mathcal{D}} := E(h).$$

Идея доказательства. Пусть

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} f_n z^n$$

есть произвольный элемент из соболевского пространства $V^{\mathbb{C}}$. Тогда его преобразование Пуассона $h = Pf$ будет задаваться формулой

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} f_{-n}\overline{z}^n, \tag{IX.5}$$

где $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$. При этом его энергия будет равна

$$E(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta} |\operatorname{grad} h(z)|^2\, dx\, dy = \sum_{n\neq 0} |n||f_n|^2 = \|f\|^2_{\frac{1}{2}}.$$

Обратно, пространство Дирихле $\mathcal{D}$ является подпространством соболевского пространства $H^1_0(\Delta)$, состоящего из функций из пространства $L^2(\Delta)$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка из $L^2(\Delta)$ и равных нулю при $z = 0$. Для таких функций определен след на окружности S^1 с “потерей гладкости на $\frac{1}{2}$”, иначе говоря, след функции из пространства $H^1_0(\Delta)$ принадлежит пространству $H^{\frac{1}{2}}_0(S^1)$. (Этот факт, хорошо известный в теории соболевских пространств, можно найти, например, в книге [12].)

IX.3. Действие квазисимметричных гомеоморфизмов на соболевском пространстве. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $S^1 \to S^1$. Сопоставим ему оператор T_f, действующий по формуле

$$(T_f\xi)(z) = \xi(f(z)) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(f(e^{i\theta}))\,d\theta, \qquad z = e^{i\theta},$$

на функциях $\xi \in V$.

Теорема IX.1 (теорема Нага–Сулливана). *Оператор T_f действует из пространства V в себя тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{QS}(S^1)$. Если квазисимметричный гомеоморфизм f продолжается до K-квазиконформного гомеоморфизма круга Δ, то операторная норма T_f не превосходит $\sqrt{K + K^{-1}}$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть гомеоморфизм $f \in \mathrm{QS}(S^1)$ и продолжается до квазиконформного гомеоморфизма w круга Δ. Пусть ξ – произвольный вектор из V и $h = P\xi$ – его гармоническое продолжение внутрь Δ. Тогда определено граничное значение функции $g := h \circ w$, которое совпадает с $\xi \circ f$. Покажем, что $\xi \circ f \in V$, точнее покажем, что энергия гармонического продолжения функции $\xi \circ f$ не превосходит

$$E(P(\xi \circ f)) \leqslant 2\biggl(\frac{1+k^2}{1-k^2}\biggr)E(Pf), \tag{IX.6}$$

где k – константа квазиконформности w, равная норме $\|\mu\|_\infty$ дифференциала Бельтрами μ отображения w. Отсюда, в силу предложения IX.1, будет следовать, что операторная норма T_f не превосходит

$$\|T_f\| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\frac{1+k^2}{1-k^2}} = \sqrt{K + \frac{1}{K}}, \qquad \text{где} \quad K = \frac{1+k}{1-k}.$$

Достаточно доказать неравенство (IX.6) для отображения $g = h \circ w$, поскольку отсюда будет следовать его справедливость для $P(\xi \circ f)$. (Напомним, что минимум энергии среди всех гладких отображений с заданными граничными значениями достигается как раз на гармонических отображениях.) Полагая $w = u + iv$, получим оценку

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \leqslant 2\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right](|\partial w|^2+|\overline{\partial} w|^2) \qquad \text{почти всюду в} \quad \Delta.$$

Квазиконформность отображения w означает, что

$$|\overline{\partial} w| \leqslant k|\partial w| \qquad \text{почти всюду в} \quad \Delta,$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \leqslant 2\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right]\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)\operatorname{Jac}(w),$$

где $\operatorname{Jac}(w)=|\partial w|^2-|\overline{\partial} w|^2$. После замены переменных в интеграле для $E(g)$ получаем требуемое неравенство

$$E(g)\leqslant 2\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)E(h).$$

Как известно, интеграл Дирихле обладает свойством конформной инвариантности. Приведенное доказательство показывает, по существу, что он обладает и свойством квазиинвариантности относительно квазиконформных отображений.

Необходимость. Пользуясь свойством конформной инвариантности интеграла Дирихле, можно свести доказываемое утверждение к случаю верхней полуплоскости H. При этом соболевское пространство $H_0^{\frac{1}{2}}(S^1,\mathbb{R})$ заменится на соболевское пространство $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Нам понадобится следующая *формула Дугласа*, выражающая энергию отображения $f\in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ через разностную производную функции f (эта формула доказывается, например, в книге [13]):

$$E(Pf)=\|f\|_{1/2}^2=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right]^2 dx\,dy. \tag{IX.7}$$

Пусть, теперь, f есть сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которого

$$T_f^{-1}\colon H^{1/2}(\mathbb{R})\to H^{1/2}(\mathbb{R})$$

есть ограниченный оператор с нормой M. Выберем срезающую функцию $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \chi_0 \leqslant 1$, такую что $\chi_0 \equiv 1$ на отрезке $[-1,1]$ и $\chi_0 \equiv 0$ вне отрезка $[-2,2]$. Фиксируем $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ и введем обозначение

$$I_1 = [x-t, x], \qquad I_2 = [x, x+t].$$

Рассмотрим сдвиг функции χ_0, задаваемый формулой

$$\chi_1(s) := \chi_0(as+b),$$

где константы a, b подбираются таким образом, чтобы функция $\chi_1 \equiv 1$ на I_1 и $\chi_1 \equiv 0$ на $[x+t, \infty)$.

По предположению $\chi_1 \circ f^{-1} \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ и ввиду ограниченности оператора T_f^{-1} справедлива оценка

$$\|T_f^{-1}\chi_1\| = \|\chi_1 \circ f^{-1}\|_{\frac{1}{2}} \leqslant M\|\chi_1\|_{\frac{1}{2}} = M\|\chi_0\|_{\frac{1}{2}}$$

(последнее равенство вытекает, например, из формулы Дугласа). Следовательно,

$$\begin{aligned}
M^2\|\chi_0\|_{\frac{1}{2}}^2 &\geqslant \|\chi_1 \circ f^{-1}\|_{\frac{1}{2}}^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{\chi_1 \circ f^{-1}(r) - \chi_1 \circ f^{-1}(s)}{r-s}\right]^2 dr\,ds \\
&\geqslant \int_{f(x-t)}^{f(x)} ds \int_{f(x+t)}^{\infty} dr\,\frac{1}{(r-s)^2} \\
&= \log\left[1 + \frac{f(x)-f(x-t)}{f(x+t)-f(x)}\right]. \qquad \text{(IX.8)}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{f(x)-f(x-t)}{f(x+t)-f(x)} \geqslant \frac{1}{e^{M^2\|\chi_0\|_{\frac{1}{2}}^2} - 1}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Аналогично, выбирая сдвиг χ_2 функции χ_0 так, чтобы $\chi_2 \equiv 1$ на I_2 и $\chi_2 \equiv 0$ на $(-\infty, x-t]$, докажем противоположное неравенство

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)-f(x-t)} \leqslant e^{M^2\|\chi_0\|_{\frac{1}{2}}^2} - 1.$$

Из двух последних неравенств следует, что отображение f удовлетворяет условию Берлинга–Альфорса (III.2) из п. III.3, т.е. гомеоморфизм квазисимметричен.

IX.4. Действие квазисимметричных гомеоморфизмов на симплектическую и комплексную структуры.

Теорема IX.2. *Действие операторов $T_f\colon V \to V$ с гомеоморфизмом $f \in \mathrm{QS}(S^1)$ на соболевском пространстве V сохраняет симплектическую структуру ω, т.е.*

$$\omega(T_f\xi, T_f\eta) = \omega(\xi,\eta) \qquad \text{для любых} \quad \xi,\eta \in V. \tag{IX.9}$$

Более того, комплексно-линейное продолжение оператора T_f на комплексифицированное пространство $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространства $W_\pm$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ и в этом случае T_f действует на $W_\pm$ как унитарный оператор.

Идея доказательства. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Оно, очевидно, выполняется для гладких гомеоморфизмов f. Действительно, для гладких векторов $\xi,\eta \in C_0^\infty(S^1,\mathbb{R})$ утверждение сводится к замене переменной, задаваемой отображением f, в формуле (IX.1) для формы ω_0 из п. IX.1. Отсюда следует, что соотношение (IX.9) выполняется и для произвольных векторов $\xi,\eta \in V$. Аппроксимируя произвольные квазисимметричные гомеоморфизмы f гладкими с помощью теоремы аппроксимации из [4, п. 7.4], докажем справедливость соотношения (IX.9) для произвольных $f \in \mathrm{QS}(S^1)$.

Далее, если действие T_f на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространство W_+, то f продолжается до голоморфного отображения $F\colon \Delta \to \Delta$ (почему?). Так как f – гомеоморфизм, то отображение F должно быть конформно, т.е. $F \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\Delta)$. Поскольку оператор T_f сохраняет симплектическую форму, то отсюда следует, что он сохраняет и эрмитову метрику на W_+, т.е. действует на W_+ унитарными преобразованиями. Аналогичные рассуждения применимы и к W_-.

Покажем теперь, что и сама форма ω на V определена фактически единственным образом.

Теорема IX.3. *Допустим, что непрерывная билинейная форма $\widetilde{\omega}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ обладает следующим свойством инвариантности относительно дробно-линейных преобразований:*

$$\widetilde{\omega}(T_f\xi, T_f\eta) = \widetilde{\omega}(\xi,\eta) \qquad \text{для любых} \quad f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1), \quad \xi,\eta \in V.$$

Тогда $\widetilde{\omega} = \lambda\omega$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. В частности, если такая форма не равна тождественно нулю, то она автоматически *невырождена и инвариантна относительно всей группы квазисимметричных гомеоморфизмов* $\mathrm{QS}(S^1)$.

Идея доказательства. Любое билинейное непрерывное отображение $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ задает отображение двойственности $S\colon V \to V'$, определяемое формулой

$$S(\xi)(\cdot) := \omega(\xi, \cdot) \qquad \text{для} \quad \xi \in V.$$

Отображение двойственности S, отвечающее исходной симплектической форме ω, очевидно невырождено. Обозначим через $\widetilde{S}$ отображение двойственности, отвечающее форме $\widetilde{\omega}$, и рассмотрим сплетающий оператор

$$A := S^{-1}\widetilde{S}\colon V \to V.$$

Покажем, что *этот оператор коммутирует со всеми обратимыми линейными операторами на* V, *сохраняющими формы* ω *и* $\widetilde{\omega}$. Действительно, оператор A определяется равенством

$$\omega(\xi, A\eta) = \widetilde{\omega}(\xi, \eta), \qquad \xi, \eta \in V.$$

Если задан обратимый оператор T, сохраняющий формы ω и $\widetilde{\omega}$, то имеют место равенства

$$\omega(T\xi, TA\eta) = \omega(\xi, A\eta) = \widetilde{\omega}(\xi, \eta) = \widetilde{\omega}(T\xi, T\eta) = \omega(T\xi, AT\eta).$$

Поскольку оператор T обратим, отсюда следует, что

$$\omega(\xi, TA\eta) = \omega(\xi, AT\eta) \qquad \text{для всех} \quad \xi \in V.$$

Но форма ω невырождена, поэтому $TA = AT$, как и утверждалось.

Мы хотим доказать, что сплетающий оператор A является скалярным, откуда будет следовать, что $\widetilde{S} = \lambda S \implies \widetilde{\omega} = \lambda\omega$. Воспользуемся для этого леммой Шура из теории представлений.

Заметим, что унитарное представление группы $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемое операторами T_f с $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, определяет неприводимое унитарное представление группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ на пространствах $W_{\pm}$ и эти пространства являются единственными инвариантными подпространствами указанного представления на $V^{\mathbb{C}}$. (Этот факт вытекает из общей теории представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, см. [14, лемма 4.6].)

По доказанному, сплетающий оператор A должен коммутировать со всеми обратимыми операторами, сохраняющими формы ω и $\widetilde{\omega}$. В частности, он должен коммутировать со всеми операторами T_f с $f \in \mathrm{Möb}(S^1)$. Поскольку операторы T_f с $f \in \mathrm{Möb}(S^1)$ сохраняют подпространства $W_\pm$, то оператор A может отображать подпространство W_+ только на W_+ или на W_-. Если выполняется первое, то A должен коммутировать со всеми операторами $T_f \colon W_+ \to W_+$ неприводимого унитарного представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ на W_+ и потому является скалярным, т.е. $A = \lambda I$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ ввиду вещественности оператора A. Вторая возможность реализоваться не может, поскольку в этом случае можно было бы заменить оператор A комплексно сопряженным оператором $\overline{A}$, отображающим W_+ в W_+. По доказанному такой оператор $\overline{A}$ был бы скалярным, иначе говоря, равным λI с $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. совпадающим с A, что невозможно.

Краткое содержание лекции IX.

Соболевское пространство полудифференцируемых функций:

$$V = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$ с разложениями Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \qquad \overline{f}_n = f_{-n},$$

с конечной нормой

$$\|f\|^2_{\frac{1}{2}} = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2.$$

Это кэлерово гильбертово пространство, обладающее симлектической формой ω и комплексной структурой J^0, совместимыми друг с другом и порождающими риманову метрику g^0.

Комплексификация $V^{\mathbb{C}} = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{C})$ разлагается в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$$

собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J^0, ортогональную относительно скалярного произведения $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, задаваемого эрмитовым продолжением метрики g^0 на $V^{\mathbb{C}}$.

Соболевское пространство V можно отождествить с *пространством Дирихле* $\mathcal{D}$, состоящим из гармонических в круге Δ функций h таких, что $h(0) = 0$, и обладающих конечной энергией

$$E(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} |\operatorname{grad} h(z)|^2 \, dx \, dy < \infty.$$

Изометрический изоморфизм $V \to \mathcal{D}$ устанавливается преобразованием Пуассона.

Теорема Нага–Сулливана.

1. Преобразование

$$f \mapsto T_f \xi := \xi \circ f - \text{среднее}(\xi \circ f)$$

действует из пространства V в него же $\Leftrightarrow$ $f \in \mathrm{QS}(S^1)$ и в этом случае

$$\|T_f\| \leqslant \sqrt{K + K^{-1}},$$

где K – максимальная дилатация f.

2. Для $f \in \mathrm{QS}(S^1)$ оператор T_f действует симплектическими преобразованиями; комплексно-линейное продолжение оператора T_f на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространства $W_\pm \iff f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$.

3. Если $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, то T_f действует на $W_\pm$ унитарными преобразованиями.

Теорема. Симплектическая форма ω на V определена по существу единственным образом, а именно, если $\widetilde{\omega}$ – другая непрерывная билинейная форма на V, инвариантная относительно преобразований T_f с $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, то $\widetilde{\omega} = \lambda\omega$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лекция X. Грассманова реализация пространства $\mathcal{T}$

X.1. Вложение пространства $\mathcal{T}$ в зигелев диск. Из теоремы Нага–Сулливана (п. IX.3) и теоремы IX.2 (п. IX.4) вытекает, что имеется вложение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+), \tag{X.1}$$

где $\mathrm{Sp}(V)$ обозначает *симплектическую группу* пространства V, состоящую из ограниченных линейных операторов на V, сохраняющих симплектическую форму ω, а $\mathrm{U}(W_+)$ – ее подгруппа, состоящая из унитарных операторов, т.е. операторов, комплексно-линейные продолжения которых на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняют подпространство W_+ (и, следовательно, W_-).

Опишем эти группы более подробно. В терминах разложения (IX.4) из п. IX.1

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$$

любой линейный оператор $A\colon V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ может быть записан в блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\colon W_+ \to W_+ & b\colon W_- \to W_+ \\ c\colon W_+ \to W_- & d\colon W_- \to W_- \end{pmatrix}.$$

В частности, линейные операторы на $V^{\mathbb{C}}$, получаемые комплексно-линейным продолжением операторов $A\colon V \to V$, имеют блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \ ,$$

где мы отождествляем пространство W_- с комплексно сопряженным пространством $\overline{W}_+$.

Линейный оператор $A\colon V \to V$ принадлежит симплектической группе $\mathrm{Sp}(V)$, если он сохраняет симплектическую форму ω. Это условие эквивалентно следующим соотношениям на блочные компоненты A (проверьте!):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{a}^t a - b^t \overline{b} = 1, \quad \overline{a}^t b = b^t \overline{a}, \qquad (\text{X.2})$$

где a^t, b^t обозначают транспонированные операторы

$$\begin{aligned} a^t\colon W'_+ \to W'_+ &\iff a^t\colon W_- \to W_-, \\ b^t\colon W'_+ \to W'_- &\iff b^t\colon W_- \to W_+. \end{aligned}$$

где пространство W'_+, двойственное к W_+, отождествляется с пространством W_- с помощью скалярного произведения $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемого комплексно-линейным продолжением на $V^{\mathbb{C}}$ римановой метрики g^0. Пользуясь тем, что $A^{-1}A = I$, можно получить еще и двойственные сооотношения

$$a\overline{a}^t - b\overline{b}^t = 1, \qquad a\overline{b}^t = ba^t. \qquad (\text{X.3})$$

Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ в виде подгруппы блочно-диагональных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Вернемся к отображению (X.1). Пространство

$$\mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

в правой части (X.1) можно отождествить с пространством $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур на пространстве $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω. Действительно, любая комплексная структура J такого вида определяет разложение

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W} \tag{X.4}$$

в прямую сумму собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J, изотропных относительно ω. Обратно, любое разложение вида (X.4) пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму подпространств, изотропных относительно ω, определяет комплексную структуру J на $V^{\mathbb{C}}$, равную $-iI$ на W и $+iI$ на $\overline{W}$ и совместимую с ω. Тем самым, группа $\mathrm{Sp}(V)$ действует транзитивно на пространстве $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур J на V, совместимых с ω.

Чтобы получить однородное представление для пространства $\mathcal{J}(V)$, нужно профакторизовать группу $\mathrm{Sp}(V)$ по ее подгруппе, состоящей из преобразований, сохраняющих исходную комплексную структуру J^0 или, другими словами, сохраняющих подпространства $W_\pm$. Указанная подгруппа состоит в точности из унитарных преобразований из группы $\mathrm{U}(W_+)$, откуда следует, что

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Пространство $\mathcal{J}(V)$ допускает интерпретацию в виде бесконечномерного зигелева диска. По определению, *зигелев диск* $\mathcal{D}$ состоит из ограниченных линейных операторов вида

$$\mathcal{D} = \{Z\colon W_+ \to W_- \text{ -- ограниченный линейный}$$
$$\text{симметричный оператор, удовлетворяющий } \overline{Z}Z < I\}.$$

Симметричность Z означает, что $Z^t = Z$, а условие $\overline{Z}Z < I$ равносильно тому, что симметричный оператор $I - \overline{Z}Z$ положительно определен.

Для того, чтобы отождествить пространство $\mathcal{J}(V)$ с зигелевым диском $\mathcal{D}$, рассмотрим действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{D}$, задаваемое операторными дробно-линейными преобразованиями вида

$$\mathrm{Sp}(V) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : Z \mapsto (\bar{a}Z + \bar{b})(bZ + a)^{-1}.$$

Проверьте, что сопоставление оператору $A \in \mathrm{Sp}(V)$ указанного дробно-линейного преобразования зигелева диска $\mathcal{D}$ задает взаимно-однозначное отображение

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) \to \mathcal{D}.$$

Зигелев диск $\mathcal{D}$ естественным образом вкладывается в грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ гильбертова пространства $V^{\mathbb{C}}$, состоящий из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$, получаемых из W_+ действием ограниченных линейных операторов. Указанное вложение задается отображением

$$\mathcal{D} \ni Z \mapsto \text{график отображения } Z\colon W_+ \to W_-.$$

Грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ является комплексным банаховым многообразием (см. [1, п. 5.1]), а сквозное отображение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\operatorname{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{D} \to \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$$

является эквивариантным голоморфным вложением комплексных банаховых многообразий. (Этот факт доказан в статье [14].)

X.2. Грассманова реализация пространства нормализованных диффеоморфизмов. Построенное вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ порождает вложение пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\operatorname{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{T}$$

в “регулярную часть” грассманиана $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$, совпадающую с грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$, который определяется следующим образом.

Определение X.1. *Грассманиан* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ *Гильберта–Шмидта* состоит из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$ таких, что ортогональная проекция $\pi_+ : W \to W_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\pi_- : W \to W_-$ – оператором Гильберта–Шмидта.

Напомним, что линейный оператор $T\colon H_1 \to H_2$, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, называется *фредгольмовым*, если он обладает конечномерными ядром и коядром. Такой оператор обратим по модулю компактных операторов, т.е. для него обязательно найдется линейный оператор $S\colon H_2 \to H_1$ такой, что операторы

$$I_{H_1} - ST \qquad \text{и} \qquad I_{H_2} - TS$$

компактны.

Оператор T называется *оператором Гильберта–Шмидта* (HS-оператором), если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в пространстве H_1 ряд

$$\sum \|Te_i\|^2_{H_2} < \infty$$

сходится. Если это условие выполняется для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в H_1, то оно выполняется и для любого ортонормированного базиса в H_1. Операторы Гильберта–Шмидта образуют комплексное гильбертово пространство $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$ с нормой

$$\|T\| := \Big(\sum \|Te_i\|^2_{H_2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Возвращаясь к определению грассманиана Гильберта–Шмидта, можно сказать, что $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ состоит из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$, которые “мало” отличаются от подпространства W_+ в том смысле, что проекция $\pi_+ : W \to W_+$ “почти” обратима, а проекция $\pi_- : W \to W_-$ “мала”.

Грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ является кэлеровым гильбертовым многообразием, имеющим в качестве локальной модели гильбертово пространство $\mathrm{HS}(W_+, W_-)$ операторов Гильберта–Шмидта.

Введем теперь *симплектическую группу Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, которая состоит из преобразований

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V),$$

для которых b является оператором Гильберта–Шмидта. Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ содержится в $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в виде подгруппы блочно-диагональных матриц.

Построенное вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{J}(V)$ индуцирует вложение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Задача X.1. Докажите, что образ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в $\mathrm{Sp}(V)$ при вложении $\mathrm{QS}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(V)$ на самом деле принадлежит подгруппе $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Пространство

$$\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) := \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

отождествляется, как и в п. X.1, с некоторым пространством комплексных структур на $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω. Будем называть комплексные структуры из $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ *комплексными структурами Гильберта–Шмидта*. Также, как в п. X.1, пространство $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ допускает реализацию в виде *зигелева диска Гильберта–Шмидта*, определяемого как

$$\mathcal{D}_{\mathrm{HS}} = \{Z\colon W_+ \to W_- \text{ – симметричный оператор Гильберта–Шмидта с } \overline{Z}Z < I\}.$$

Также, как в п. X.1, можно показать, что зигелев диск $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ вкладывается в грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ так, что сквозное отображение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$$

будет эквивариантным голоморфным вложением комплексного пространства Фреше $\mathcal{S}$ в комплексное гильбертово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ (см. [15]).

Краткое содержание лекции X.

Из теоремы Нага–Сулливана следует, что

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{J}(V).$$

Пространство $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур на соболевском пространстве V, совместимых с симплектической формой ω, отождествляется с *зигелевым диском*

$$\mathcal{D} = \{Z\colon W_+ \to W_- \text{ – ограниченный линейный симметричный оператор, удовлетворяющий } \overline{Z}Z < I\}.$$

Указанное отождествление устанавливается с помощью отображения, сопоставляющего оператору

$$\mathrm{Sp}(V) \ni A \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

дробно-линейное преобразование зигелевого диска вида

$$Z \mapsto (\overline{a}Z + \overline{b})(bZ + a)^{-1}.$$

Сквозное отображение

$$\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{J} = \mathcal{D} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$$

универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ соболевского пространства $V^{\mathbb{C}}$ является голоморфным вложением комплексных банаховых многообразий.

Ограничение этого вложения на пространство нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S}$ порождает вложение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V),$$

где

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V) = \{A \in \mathrm{Sp}(V) : b \text{ – оператор Гильберта–Шмидта}\}$$

есть симплектическая группа Гильберта–Шмидта, а $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ – пространство комплексных структур Гильберта–Шмидта на V, совместимых с симплектической формой ω. Последнее пространство отождествляется с *зигелевым диском Гильберта–Шмидта*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{HS}} = \{Z\colon W_+ \to W_- \text{ – симметричный оператор Гильберта–Шмидта с } \overline{Z}Z < I\}.$$

Сквозное отображение

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V^{\mathbb{C}})$$

пространства $\mathcal{S}$ в грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V^{\mathbb{C}})$ гильбертова пространства $V^{\mathbb{C}}$ является голоморфным вложением комплексного пространства Фреше $\mathcal{S}$ в комплексное гильбертово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Глава 5. Квантование пространства нормализованных диффеоморфизмов

Эта глава посвящена квантованию пространства нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S}$. Она начинается с лекции XI, в которой дается определение классических систем и их квантования.

В п. XI.3 задача квантования конкретизируется применительно к изучаемому в этой главе пространству $\mathcal{S}$. Сначала строится квантование расширенной системы, фазовым пространством которой является пространство $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ комплексных структур Гильберта–Шмидта на соболевском пространстве V. Роль пространства квантования играет при этом фоковское пространство, ассоциированное с пространством V и комплексной структурой J на нем (п. XII.1). В этом пространстве реализуется неприводимое унитарное представление алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ (п. XII.2). Ключевую роль в квантовании пространства $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ играет теорема Шейла–Березина, приведенная в п. XII.3. Она утверждает, что представления Гейзенберга в фоковских пространствах, отвечающих двум различным комплексным структурам на пространстве V, унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда эти структуры получаются друг из друга симплектическим преобразованием Гильберта–Шмидта. Из этой теоремы вытекает, что фоковское расслоение, объединяющее фоковские пространства, отвечающие различным комплексным структурам Гильберта–Шмидта на V, является голоморфным гильбертовым расслоением над $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$, наделенным проективным действием симплектической группы Гильберта–Шмидта, накрывающим действие этой группы на базе расслоения.

Инфинитезимальным вариантом указанного действия является унитарное проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта в фоковском пространстве, которое строится в п. XII.4. Оно и задает дираковское квантование пространства $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$, ограничение которого на $\mathcal{S}$ дает квантование исходного пространства $\mathcal{S}$. Квантование $\mathcal{S}$ можно построить и непосредственно, исходя из проективного представления алгебры Вирасоро, обсуждаемого в п. XII.5.

Лекция XI. Квантование классических систем

XI.1. Классические системы. Конечномерная *классическая система* задается парой $(M, \mathcal{A})$, состоящей из фазового пространства M и алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$.

Фазовое пространство M есть гладкое симплектическое многообразие четной размерности $2n$ с симплектической формой ω. Локально, оно изоморфно *стандартной модели* $M_0 := (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, где ω_0 – стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемая в канонических координатах (p_i, q_i), $i = 1, \ldots, n$, на $\mathbb{R}^{2n}$ формулой

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть произвольная подалгебра Ли в алгебре Ли $C^\infty(M, \mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций на фазовом пространстве M относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической формой ω. В частности, $\mathcal{A}$ может совпадать со всей алгеброй Пуассона $C^\infty(M, \mathbb{R})$. В случае стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ в качестве алгебры наблюдаемых можно взять *алгебру Гейзенберга* $\mathrm{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, которая порождается координатными функциями p_i, q_i, $i = 1, \ldots, n$, и 1, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \\ &\qquad\qquad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \qquad \text{при} \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Алгебры наблюдаемых возникают обычно следующим образом. Пусть Γ есть некоторая группа Ли, действующая на односвязном фазовом многообразии M симплектическими преобразованиями. Тогда ее алгебру Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ можно рассматривать как подалгебру алгебры Ли гамильтоновых векторных полей X_f на M, порождаемых гладкими функциями $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. В этом случае за алгебру наблюдаемых $\mathrm{ham}(\Gamma)$, отвечающую группе Γ, можно взять алгебру Ли, состоящую из функций f, для которых $X_f \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$, и наделенную скобкой Пуассона в качестве скобки Ли.

XI.2. Квантование классических систем. Пусть $(M, \mathcal{A})$ есть некоторая классическая система. *Квантованием* этой системы называется неприводимое линейное представление

$$r \colon \mathcal{A} \to \mathrm{End}^* H$$

наблюдаемых из $\mathcal{A}$ самосопряженными линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве H, называемом *пространством квантования*. При этом требуется, чтобы

$$r(\{f,g\}) = \frac{1}{i}[r(f), r(g)] = \frac{1}{i}(r(f)r(g) - r(g)r(f)) \tag{XI.1}$$

для любых $f, g \in \mathcal{A}$ и $r(1) = I$.

Операторы квантования $r(f)$, возникающие в конкретных примерах, оказываются, как правило, неограниченными, поэтому необходимо требовать, чтобы все они были определены на общей области определения, плотной в H.

Часто бывает удобнее иметь дело с комплексифицированными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ или, более общим образом, с *инволютивными* комплексными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, наделенными инволюцией. В этом случае квантование алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет задаваться неприводимым линейным представлением $r\colon \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \operatorname{End} H$ замкнутыми линейными операторами на H, удовлетворяющим помимо условия (XI.1) и нормировки $r(1) = I$ еще и правилу сопряжения: инволюция в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ переходит под действием r в эрмитово сопряжение.

Мы будем применять приведенное определение квантования к бесконечномерным классическим системам, в которых как фазовые пространства, так и алгебры наблюдаемых являются бесконечномерными. Для бесконечномерных алгебр Ли $\mathcal{A}$ более естественно искать не обычные, а проективные представления. Если нам удастся найти такое представление для заданной алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, то это будет означать, что мы построили квантование не исходной системы $(M, \mathcal{A})$, а ее расширения $(M, \widetilde{\mathcal{A}})$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ – подходящее центральное расширение алгебры $\mathcal{A}$, которое определяется коциклом проективного представления. (О проективных представлениях и центральных расширениях см. [1, гл. 4].)

XI.3. Квантование пространства $\mathcal{S}$: постановка задачи. В случае пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \operatorname{Diff}_+(S^1)/\operatorname{M\ddot{o}b}(S^1)$$

роль бесконечномерной классической системы будет играть пара

$$(\mathcal{S}, \operatorname{Vect}(S^1)),$$

где $\mathcal{S}$ – фазовое пространство системы, а $\operatorname{Vect}(S^1)$ – алгебра наблюдаемых, являющаяся алгеброй Ли группы $\operatorname{Diff}_+(S^1)$. Эта алгебра совпадает с алгеброй Ли гладких векторных полей на S^1.

Мы построим квантование указанной системы, предварительно расширив ее до системы, ассоциированной с соболевским пространством V. Для этого воспользуемся вложением

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+),$$

построенным в п. X.2. При таком вложении группа $\operatorname{Diff}_+(S^1)$ вкладывается в симплектическую группу Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В качестве расширенной классической системы берется пара

$$(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}, \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)),$$

где $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ есть алгебра Ли симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Краткое содержание лекции XI.

Классическая система: $(M, \mathcal{A})$, где M – фазовое пространство, $\mathcal{A}$ – алгебра наблюдаемых на M. Стандартная модель: $M = \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{A} = \operatorname{heis}(\mathbb{R}^{2n})$. Если Γ – некоторая группа Ли симплектоморфизмов на односвязном симплектическом многообразии M, то ей можно сопоставить классическую модель с фазовым пространством M и алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A} = \operatorname{Lie}\Gamma$, где $\operatorname{Lie}\Gamma$ – алгебра Ли группы Γ.

Квантованием классической системы $(M, \mathcal{A})$ называется неприводимое линейное представление r наблюдаемых из алгебры $\mathcal{A}$ самосопряженными линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве квантования H, при котором скобка Пуассона наблюдаемых переходит в коммутатор отвечающих им операторов:

$$\{f, g\} \mapsto \frac{1}{i}[r(f), r(g)].$$

В случае пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \operatorname{Diff}_+(S^1)/\operatorname{M\ddot{o}b}(S^1)$$

роль бесконечномерной классической системы играет пара

$$(\mathcal{S}, \operatorname{Vect}(S^1))$$

с фазовым пространством $\mathcal{S}$ и алгеброй наблюдаемых $\mathrm{Vect}(S^1)$, совпадающей с алгеброй Ли гладких векторных полей на S^1. Эта классическая система вкладывается в расширенную систему

$$(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)),$$

где $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ – алгебра Ли симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Лекция XII. Квантование расширенной системы

XII.1. Фоковское пространство. Приступая к квантованию расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$, мы должны прежде всего указать пространство квантования H, в котором будет действовать представление алгебры наблюдаемых $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Роль этого пространства в рассматриваемом случае будет играть фоковское пространство, ассоциированное с соболевским пространством V.

Для того, чтобы определить указанное пространство, фиксируем некоторую комплексную структуру $J \in \mathcal{J}(V)$, совместимую с симплектической формой ω. Эта структура порождает разложение комплексифицированного пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$$

собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J. Указанное разложение ортогонально относительно эрмитова скалярного произведения на $V^{\mathbb{C}}$, порождаемого J и ω:

$$\langle z, w\rangle_J := \omega(z, Jw).$$

Фоковское пространство $F(V^{\mathbb{C}}, J)$ является пополнением алгебры симметричных полиномов от переменных $z \in W$ по норме, порожденной скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_J$.

Более подробно, обозначим через $\mathfrak{S}(W)$ алгебру симметричных полиномов от переменных $z \in W$ и введем на ней скалярное произведение, порождаемое скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_J$. На мономах одинаковой степени оно задается формулой

$$\langle z_1 \otimes \cdots \otimes z_n, z_1' \otimes \cdots \otimes z_n'\rangle_J := \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}} \langle z_1, z_{i_1}'\rangle_J \cdots \langle z_n, z_{i_n}'\rangle_J,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_1, \dots, i_n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ (скалярное произведение мономов разных степеней полагается равным нулю). Скалярное произведение на мономах продолжается затем по линейности на всю алгебру $\mathfrak{S}(W)$.

Определение XII.1. *Фоковское пространство*

$$F_J = F(V^{\mathbb{C}}, J)$$

есть замыкание алгебры $\mathfrak{S}(W)$ по норме $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_J$.

Если $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис пространства W, то в качестве ортонормированного базиса фоковского пространства F_J можно взять мономы вида

$$P_K(z) = \frac{1}{\sqrt{k!}} \langle z, w_1\rangle_J^{k_1} \cdots \langle z, w_n\rangle_J^{k_n}, \qquad z \in W, \tag{XII.1}$$

где $K = (k_1, \dots, k_n, 0, \dots)$ – финитный набор натуральных чисел $k_i \in \mathbb{N}$, и $k! = k_1! \cdots k_n!$.

Тем самым, фоковское пространство разлагается в прямую сумму

$$F_J = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k(W),$$

где $\mathfrak{S}_k(W)$ есть подпространство однородных полиномов степени k в $\mathfrak{S}(W)$.

XII.2. Представление Гейзенберга.

Определение XII.2. *Алгеброй Гейзенберга* $\mathrm{heis}(V)$ гильбертова пространства V называется центральное расширение абелевой алгебры Ли V, порождаемой координатными функциями. Другими словами, как векторное пространство, эта алгебра совпадает с

$$\mathrm{heis}(V) = V \oplus \mathbb{R}$$

и наделяется скобкой Ли вида

$$[(x, s), (y, t)] := (0, \omega(x, y)), \qquad x, y \in V, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Построим неприводимое представление алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J. Заметим, прежде всего, что элементы алгебры $\mathfrak{S}(W)$ можно рассматривать как голоморфные

функции на пространстве $\overline{W}$, отождествляя $z \in W$ с голоморфной функцией
$$\overline{W} \ni \overline{w} \mapsto \langle z, w\rangle_J \qquad \text{на} \quad \overline{W}.$$
Соответственно, пространство F_J можно рассматривать как пространство функций, голоморфных на $\overline{W}$.

С учетом этого отождествления, *представление Гейзенберга* r_J алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J будет задаваться формулой
$$V \ni v \mapsto r_J(v)f(\overline{w}) = \partial_v f(\overline{w}) + \langle v, w\rangle_J f(\overline{w}), \tag{XII.2}$$
где ∂_v есть оператор дифференцирования в направлении вектора v. Продолжая r_J на комплексифицированную алгебру $\mathrm{heis}^{\mathbb{C}}(V)$ той же формулой (XII.2), получим, что
$$\begin{aligned} r_J(\overline{z})f(\overline{w}) &= \partial_{\overline{z}} f(\overline{w}) \qquad &&\text{при} \quad \overline{z} \in \overline{W}, \\ r_J(z)f(\overline{w}) &= \langle z, w\rangle_J f(\overline{w}) \qquad &&\text{при} \quad z \in W. \end{aligned}$$

Представление Гейзенберга удобно описывать в терминах *операторов рождения* и *уничтожения* на пространстве F_J, которые задаются формулами
$$a_J^*(v) = \frac{r_J(v) + ir_J(Jv)}{2}, \quad a_J(v) = \frac{r_J(v) - ir_J(Jv)}{2},$$
где $v \in V^{\mathbb{C}}$. Отсюда
$$\begin{aligned} a_J^*(z)f(\overline{w}) &= \langle z, w\rangle_J f(\overline{w}) \qquad &&\text{при} \quad z \in W, \\ a_J(\overline{z})f(\overline{w}) &= \partial_{\overline{z}} f(\overline{w}) \qquad &&\text{при} \quad \overline{z} \in \overline{W}. \end{aligned}$$
Выбирая ортонормированный базис $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве W, введем операторы
$$a_n^* := a^*(w_n), \quad a_n := a(\overline{w}_n) \qquad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots .$$
Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям вида
$$[a_m, a_n] = [a_m^*, a_n^*] = 0, \quad [a_m^*, a_n] = \delta_{mn} I \qquad \text{при} \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{XII.3}$$

Определение XII.3. Вектор $f_J \in F_J \setminus \{0\}$ называется *вакуумом*, если он аннулируется всеми операторами уничтожения, т.е.

$$a_n f_J = 0 \qquad \text{при всех} \quad n = 1, 2, \dots . \tag{XII.4}$$

Такой вектор определяется представлением r_J однозначно с точностью до мультипликативной константы. В случае исходного фоковского пространства $F_0 = F(V, J^0)$ в качестве вакуума берется $f_0 \equiv 1$.

Действуя на вакуум f_J операторами рождения a_n^*, мы получим множество векторов в F_J вида $(a_1^*)^{k_1} \cdots (a_n^*)^{k_n} f_J$, замкнутая линейная оболочка которого совпадает со всем пространством F_J, откуда вытекает неприводимость представления r_J. Заметим, что мономы $P_K(z)$, задаваемые формулой (XII.1) из п. XII.1, которые были выбраны нами в качестве ортонормированного базиса пространства F_J, построены именно таким способом.

Покажем, что любое неприводимое представление $\widetilde{r}$ алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$, обладающее вакуумом, эквивалентно начальному представлению r_0 в фоковском пространстве $F_0 = F(V, J^0)$. Действительно, векторы вида $(\widetilde{a}_1^*)^{k_1} \cdots (\widetilde{a}_n^*)^{k_n} \widetilde{f}$, полученные из вакуума $\widetilde{f}$ представления $\widetilde{r}$ действием отвечающих ему операторов рождения $\widetilde{a}_n$, линейно независимы и порождают инвариантное подпространство в пространстве $\widetilde{F}$ представления $\widetilde{r}$. В силу неприводимости это подпространство должно совпадать со всем пространством $\widetilde{F}$. Рассмотрим теперь отображение $F_0 \to \widetilde{F}$, сопоставляющее полиному $P(z_1, \dots, z_n)$ из алгебры $\mathfrak{S}(W)$ вектор вида $P(\widetilde{a}_1^*, \dots, \widetilde{a}_n^*)\widetilde{f}$ в пространстве $\widetilde{F}$. Это отображение можно сделать унитарным, если ввести на $\widetilde{F}$ эрмитово скалярное произведение, в котором векторы вида $\frac{1}{\sqrt{k!}}(\widetilde{a}_1^*)^{k_1} \cdots (\widetilde{a}_n^*)^{k_n} \widetilde{f}$ образуют ортонормированный базис. Тогда построенное отображение $F_0 \to \widetilde{F}$ будет задавать унитарный оператор, сплетающий представление $\widetilde{r}$ с исходным представлением r_0.

XII.3. Теорема Шейла–Березина. Мы хотим построить унитарный оператор $U_J \colon F_0 \to F_J$, сплетающий представления Гейзенберга r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J.

Теорема XII.1 (теорема Шейла–Березина) (см. [16], [17]). *Пусть комплексная структура $J \in \mathcal{J}(V)$ получается из комплексной структуры J^0 действием элемента $A \in \mathrm{Sp}(V)$. Тогда представления r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве*

F_J унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $A \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Другими словами, при выполнении последнего условия существует унитарный сплетающий оператор $U_J\colon F_0 \to F_J$, такой что

$$r_J = U_J \circ r_0 \circ U_J^{-1}.$$

Идея доказательства.[5] Для того, чтобы построить сплетающий оператор U_J, достаточно, согласно рассуждению, приведенному в конце п. XII.2, построить вакуум в пространстве F_J. Указанный вакуум можно искать, раскладывая его по базису пространства F_0, образованному векторами $\frac{1}{\sqrt{k!}}(a_1^*)^{k_1}\cdots(a_n^*)^{k_n} f_0$, и подставляя полученный ряд в соотношения (XII.4). Искомый вакуум f_J будет задаваться формулой

$$f_J = c e^{-\frac{1}{2} a_J^*(a^{-1}b)a_J^*} f_0, \tag{XII.5}$$

если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Коэффициент c в этой формуле равен

$$c = \frac{\theta}{(\det a\bar{a}^t)^{\frac{1}{4}}},$$

где θ – комплексное число, по модулю равное 1. Заметим, что из описания группы $\mathrm{Sp}(V)$, даваемого соотношением (X.2) из п. X.1, следует, что оператор a обратим. Более того, вектор f_J, задаваемый формулой (XII.5), принадлежит пространству F_J тогда и только тогда, когда $a^{-1}b$ есть оператор Гильберта–Шмидта $\Leftrightarrow$ b есть оператор Гильберта–Шмидта, т.е. $A \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В этом случае оператор (см. формулу (X.3))

$$a\bar{a}^t = 1 + b\bar{b}^t$$

имеет вид “$1+$ядерный” и потому его детерминант имеет смысл. Неопределенный коэффициент θ возникает из-за того, что вакуум f_J определяется только с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной 1.

Имея формулу (XII.5) для вакуума f_J, можно найти и явное представление для сплетающего оператора U_J, которое выписано в упомянутой книге [17, ч. I, гл. II, п. 4.5]. Этот оператор, также как и вакуум, определяется однозначно с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной 1.

[5] Полное доказательство см. в книге [17, ч. I, гл. II, п. 4.3].

Объединим все фоковские пространства F_J с $J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ в единое *фоковское расслоение*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}.$$

Предложение XII.1. *Фоковское расслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над зигелевым диском $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$. На нем имеется унитарное проективное действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$.*

Голоморфность фоковского расслоения устанавливается также, как голоморфность детерминантного расслоения над грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ (см. [1, п. 5.3]). Поскольку зигелев диск $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ является стягиваемым (и даже выпуклым) множеством, то это расслоение тривиально. Более того, действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, определяемое теоремой Шейла–Березина, задает его явную тривиализацию.

XII.4. Представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта. Инфинитезимальным вариантом действия симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на фоковском расслоении является проективное представление ее алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в слое $F_0 = F(V^{\mathbb{C}}, J^0)$ фоковского расслоения над точкой J^0. Явная конструкция этого представления дана в статье [18].

Симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ состоит из ограниченных линейных операторов A, действующих в пространстве $V^{\mathbb{C}}$ и имеющих блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный косоэрмитов оператор, β – симметричный оператор Гильберта–Шмидта. Комплексифицированная алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ состоит из операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный оператор, а β и $\overline{\gamma}$ являются симметричными операторами Гильберта–Шмидта.

Проективное представление комплексифицированной симплектической алгебры $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ в пространстве F_0 задается формулой

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}} \ni A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix} \mapsto \rho(A) = D_\alpha + \frac{1}{2} M_\beta + \frac{1}{2} M_\gamma^*. \quad \text{(XII.6)}$$

Здесь, D_α – оператор дифференцирования, порождаемый оператором $\alpha\colon W_+ \to W_+$ и определяемый посредством

$$D_\alpha f(\overline{w}) = \langle \alpha w, \partial_w \rangle f(\overline{w}).$$

Оператор M_β, порождаемый оператором $\beta\colon W_- = \overline{W}_+ \to W_+$, имеет вид

$$M_\beta f(\overline{w}) = \langle \overline{\beta} w, w \rangle f(\overline{w}),$$

а оператор M_γ^*, сопряженный к M_γ, действует по формуле

$$M_\gamma^* f(\overline{w}) = \langle \gamma \partial_w, \partial_w \rangle f(\overline{w}).$$

Теорема XII.2 (теорема Сигала [18]). *Формула* (XII.6) *задает унитарное проективное представление симплектической алгебры Ли $sp_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ в фоковском пространстве F_0 с коциклом*

$$[\rho(A_1), \rho(A_2)] - \rho([A_1, A_2]) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\overline{\gamma}_2 \beta_1 - \overline{\gamma}_1 \beta_2) I. \qquad \text{(XII.7)}$$

Это представление сплетается с представлением Гейзенберга r_0 алгебры Гейзенберга $heis(V)$ в пространстве F_0.

Тот факт, что построенное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта сплетается с представлением r_0, вытекает из того, что это представление является инфинитезимальной версией проективного действия симплектической группы Гильберта–Шмидта на фоковском расслоении, сплетающего различные представления алгебры Гейзенберга.

Проективное представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ определяет квантование расширенной системы

$$(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}, \widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)})$$

где $\widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}$ есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, задаваемое коциклом (XII.7).

Одновременно мы построили квантование еще одной классической системы, тесно связанной с теорией струн. А именно, системы

$$(V, \mathcal{A}),$$

фазовое пространство которой совпадает с соболевским пространством $V = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R})$, а алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть полупрямая сумма

$$\mathcal{A} = \mathrm{heis}(V) \rtimes \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V).$$

Указанную алгебру наблюдаемых можно рассматривать как бесконечномерный аналог алгебры Пуанкаре пространства Минковского. Напомним, что алгебра Пуанкаре есть прямая сумма алгебры трансляций и алгебры гиперболических поворотов пространства Минковского. В случае соболевского пространства V роль алгебры трансляций играет алгебра Гейзенберга, а роль алгебры поворотов – симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В случае пространства Минковского преобразования из алгебры сдвигов линейно зависят от координат, а преобразования из алгебры поворотов зависят от них квадратично. Эта закономерность сохраняется и в бесконечномерном случае — представление Гейзенберга линейно по переменным $\overline{w}$ и $\partial_{\overline{w}}$, а представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ по ним квадратично.

Остановимся еще на связи построенного представления алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ с инвариантными связностями на фоковском расслоении.

Заметим, что симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ допускает разложение в прямую сумму

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathfrak{u}(W_+) \oplus \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{u}(W_+)$ есть алгебра Ли унитарной группы $\mathrm{U}(W_+)$, отождествляемая с множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где $\alpha\colon W_+ \to W_+$ – ограниченный косоэрмитов оператор. Линейное подпространство $\mathfrak{m}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \overline{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\beta\colon W_- \to W_+$ – симметричный оператор Гильберта–Шмидта. Это подпространство можно отождествить с касательным пространством $T_0\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$. Оно инвариантно относительно присоединенного действия группы $\mathrm{U}(W_+)$ на алгебре Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

В соответствии с общей теорией инвариантных связностей из [19, гл. II, п. 11], существует взаимно-однозначное соответствие между проективными унитарными представлениями алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в пространстве F_0 и унитарными $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$-инвариантными проективно-плоскими связностями на фоковском расслоении $\mathcal{F}$. Это соответствие устанавливается следующим образом: форма связности задается ограничением проективного представления на подпространство $\mathfrak{m}$. При этом кривизна связности будет совпадать с коциклом представления.

Более подробно, из трех следующих объектов

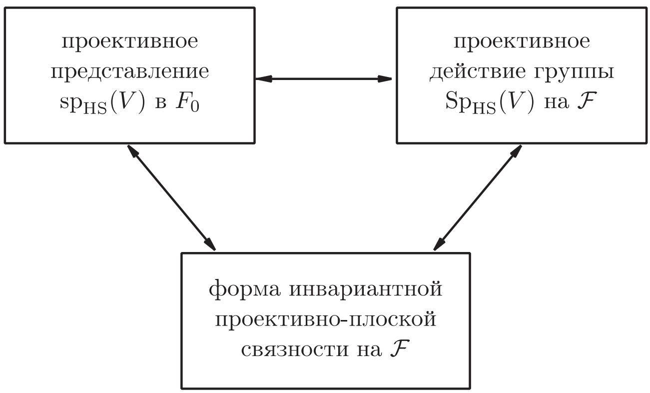

Рис. XII.1.

любые два определяют третий. Например, форма связности в слое F_0 задается представлением $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в F_0, ограниченным на подпространство $\mathfrak{m}$, а затем разносится в другие слои $\mathcal{F}$ с помощью действия группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. По представлению и форме связности действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ восстанавливается интегрированием представления с помощью связности. Представление восстанавливается по форме связности, инвариантной относительно действия группы, вычитанием из нее плоской связности.

XII.5. Квантование пространства нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S}$. Сужение конструкции фоковского расслоения $\mathcal{F} \to \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, приведенной в п. XII.3, на подмногообразие

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\,\mathrm{Möb}(S^1) \subset \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$$

дает фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} := \bigcup_{J\in\mathcal{S}} F_J \to \mathcal{S}$$

над пространством $\mathcal{S}$.

Предложение XII.2. *Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над пространством $\mathcal{S}$. На этом расслоении имеется унитарное проективное действие группы диффеоморфизмов* $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, *накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{S}$.*

Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ тривиально, поскольку пространство $\mathcal{S}$ стягиваемо (попробуйте доказать это самостоятельно!). Действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на расслоении $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ задается ограничением $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$-действия на фоковском расслоении $\mathcal{F} \to \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, построенного в п. XII.3. Однако это действие можно построить и непосредственно, как в статье [20].

Инфинитезимальным вариантом действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на фоковском расслоении $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ является проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ этой группы в фоковском пространстве F_0. Конструкцию этого представления, называемого представлением Вирасоро, удобно описать в терминах операторов рождения и уничтожения a_n^*, a_n на пространстве F_0, введенных в п. XII.2. Дополним это определение, полагая

$$a_0 = \lambda I, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \text{и} \qquad a_{-n} := n a_n^*, \quad n \in \mathbb{N},$$

так что для полученных операторов будут выполняться следующие коммутационные соотношения

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n} I \qquad \text{при} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Представление Вирасоро алгебры Ли $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ порождается *операторами Вирасоро* L_n, являющимися образами базисных элементов e_n алгебры $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$. Эти операторы задаются формулой

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} {:}a_{-i}a_{i+n}{:}\,, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где $:\cdot:$ означает *нормальное упорядочение*, определяемое правилом

$$:a_i a_j: = \begin{cases} a_i a_j & \text{при } i \leqslant j, \\ a_j a_i & \text{при } i > j. \end{cases}$$

Впрочем, эти операторы можно записать, избегая нормального упорядочения, в следующем виде:

$$L_n = \begin{cases} \sum\limits_{i > -\frac{n}{2}} a_{-i} a_{i+n} & \text{при нечетном } n, \\ \dfrac{a_{\frac{n}{2}}^2}{2} + \sum\limits_{i > -\frac{n}{2}} a_{-i} a_{i+n} & \text{при четном } n. \end{cases}$$

В частности, оператор энергии L_0 имеет вид

$$L_0 = \frac{\lambda^2}{2} + \sum_{i>0} a_{-i} a_i.$$

Ввиду нормального упорядочения, при применении оператора L_n к любому полиному P из алгебры $\mathfrak{S}(W_+)$ только конечное число членов в бесконечном ряде, задающем $L_n P$, будет отлично от нуля, т.е. действие операторов L_n корректно определено на алгебре $\mathfrak{S}(W_+)$ и продолжается на все фоковское пространство $F_0 = \widehat{\mathfrak{S}(W_+)}$ по замыканию.

Операторы L_n порождают унитарное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0, поскольку удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \delta_{m,-n} \frac{m^3 - m}{12} \tag{XII.8}$$

(см. [21, п. 2.3]).

Замечание XII.1 (см. [21]). Это представление неприводимо для общих значений параметра λ.

Построенное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0 задает квантование системы

$$(\mathcal{S}, \mathrm{vir}),$$

где vir есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$. Это расширение называется *алгеброй Вирасоро* и определяется коциклом представления (XII.8). Заметим, что центральное расширение $\mathrm{Vect}(S^1)$ определяется по существу единственным образом (см. [1, п. 10.1]).

Краткое содержание лекции XII.

Приступая к квантованию расширенной системы

$$(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)),$$

возьмем в качестве пространства квантования фоковское пространство, ассоциированное с соболевским пространством $V^{\mathbb{C}}$.

Фоковское пространство, ассоциированное с соболевским пространством $V^{\mathbb{C}}$, наделенным комплексной структурой $J \in \mathcal{J}(V)$, определяется следующим образом. Комплексная структура J порождает разложение комплексифицированного соболевского пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$$

собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J, причем это разложение ортогонально относительно эрмитового скалярного произведения $\langle \cdot , \cdot \rangle_J$, порождаемого симплектической формой ω и комплексной структурой J. Тогда фоковское пространство

$$F_J = F(V^{\mathbb{C}}, J)$$

по определению совпадает с пополнением алгебры $\mathfrak{S}(W)$ симметричных полиномов по переменным $z \in W$ относительно скалярного произведения на $\mathfrak{S}(W)$, порождаемого $\langle \cdot , \cdot \rangle_J$.

Если $\{w_n\}$ – ортонормированный базис пространства W, то в качестве ортонормированного базиса фоковского пространства F_J можно взять мономы

$$P_K(z) = \frac{1}{\sqrt{k!}} \langle z, w_1 \rangle_J^{k_1} \cdots \langle z, w_n \rangle_J^{k_n},$$

где $K = (k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots)$.

Алгебра Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ как векторное пространство совпадает с $V \oplus \mathbb{R}$ и наделяется скобкой Ли, порождаемой симплектической формой ω.

Неприводимое представление Гейзенберга r_J алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J, элементы которого отождествляются с голоморфными функциями на пространстве $\overline{W}$, задается в терминах операторов рождения и уничтожения формулой

$$a_J^*(z)f(\overline{w}) = \langle z, w\rangle_J f(\overline{w}), \qquad a_J(\overline{z})f(\overline{w}) = \partial_{\overline{z}} f(\overline{w}),$$

где $z \in W$. Выбирая ортонормированный базис $\{w_n\}$ в пространстве W, введем операторы

$$a_n^* := a^*(w_n), \qquad a_n := a(\overline{w}_n),$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[a_m^*, a_n] = \delta_{mn}$$

(остальные коммутаторы равны нулю).

Вакуум: вектор $f_J \in F_J$, аннулируемый всеми операторами уничтожения, т.е. $a_n f_J = 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Фоковское пространство F_J порождается векторами вида $(a_1^*)^{k_1} \cdots (a_n^*)^{k_n} f_J$, откуда следует неприводимость представления r_J.

Любое неприводимое представление алгебры Гейзенберга, обладающее вакуумом, унитарно эквивалентно представлению $r_0 \equiv r_{J^0}$.

Теорема Шейла–Березина: Представление Гейзенберга r_J унитарно эквивалентно представлению $r_0 \Leftrightarrow J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Фоковское расслоение

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \to \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$$

является голоморфным эрмитовым гильбертовым расслоением, наделенным унитарным проективным действием группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, накрывающим ее действие на базе $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта $sp_{\mathrm{HS}}(V)$ в фоковском пространстве $F_0 \equiv F_{J^0}$ задается формулой

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix} \mapsto \rho(A) = D_\alpha + \frac{1}{2} M_\beta + \frac{1}{2} M_\gamma^*,$$

где

$$D_\alpha f(\overline{w}) = \langle \alpha w, \partial_w \rangle f(\overline{w}),$$
$$M_\beta f(\overline{w}) = \langle \overline{\beta} w, w \rangle f(\overline{w}),$$
$$M^*_\gamma f(\overline{w}) = \langle \gamma \partial_w, \partial_w \rangle f(\overline{w}).$$

Представление ρ сплетается с представлением r_0.

Проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ определяет *квантование расширенной системы*

$$(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}, \widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)})$$

где $\widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}$ – центральное расширение алгебры $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, и квантование системы $(V, \mathcal{A})$, фазовое пространство которой совпадает с соболевским пространством V, а алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть полупрямая сумма

$$\mathcal{A} = \mathrm{heis}(V) \rtimes \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V).$$

Пользуясь разложением симплектической алгебры Гильберта–Шмидта

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathfrak{u}(W_+) \oplus \mathfrak{m}$$

в прямую сумму подпространств, где $\mathfrak{u}(W_+)$ есть алгебра Ли унитарной группы $\mathrm{U}(W_+)$, можно установить соответствие между:

$$\{\text{проективные представления алгебры Ли } \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$$
$$\text{в фоковском пространстве } F_0\},$$
$$\{\text{инвариантные проективно-плоские связности}$$
$$\text{на фоковском расслоении } \mathcal{F}\},$$
$$\{\text{проективные действия группы } \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$$
$$\text{на фоковском расслоении } \mathcal{F}\}.$$

Из трех этих объектов каждые два определяют третий.

Фоковское расслоение над пространством $\mathcal{S}$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} := \bigcup_{J \in \mathcal{S}} F_J \to \mathcal{S}$$

является голоморфным эрмитовым гильбертовым расслоением, наделенным унитарным проективным действием группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, накрывающим ее действие на базе $\mathcal{S}$.

Проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ *в фоковском пространстве* F_0 порождается операторами Вирасоро L_n, являющимися образами базисных элементов e_n алгебры $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$. Эти операторы задаются формулой

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} {:}a_{-i}a_{i+n}{:}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Указанное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в пространстве F_0 задает *квантование системы*

$$(\mathcal{S}, \mathrm{vir}),$$

где алгебра Вирасоро vir есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$.

Глава 6. Квантование универсального пространства Тейхмюллера

В этой главе строится квантование универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Вначале в лекции XIII определяется квантование классических систем по Конну и подробно разбирается (п. XIII.2) пример квантования системы, имеющей в качестве алгебры наблюдаемых алгебру ограниченных функций на окружности.

Затем в п. XIV строится конновское квантование системы, в которой роль фазового пространства играет универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$. На этом пространстве действует группа $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности, однако указанное действие не является гладким, в частности, по нему нельзя построить никакой классической алгебры наблюдаемых. Однако квантовую алгебру наблюдаемых, ассоциированную с $\mathcal{T}$, построить можно. Она порождается квантовыми дифференциалами $d^q f$, отвечающими функциям $f \in \mathrm{QS}(S^1)$. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, наделенное указанной алгеброй наблюдаемых, и следует рассматривать в качестве квантовой системы, ассоциированной с пространством $\mathcal{T}$.

Лекция XIII. Квантование по Конну

XIII.1. Определение. В основе квантования расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$, а значит, и пространства нормализованных диффеоморфизмов $(\mathcal{S}, \mathrm{Vect}(S^1))$ лежал тот факт, что естественное действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на пространстве $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ удалось поднять с помощью теоремы Шейла–Березина до проективного действия этой группы на фоковском расслоении

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \to \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V).$$

Однако этот метод не применим для всего универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Хотя у нас по-прежнему имеются вложение

$$\mathcal{T} \to \mathcal{J} = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

пространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{J}$ комплексных структур на V, совместимых с симплектической формой ω, и фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} := \bigcup_{J \in \mathcal{J}(V)} F_J \to \mathcal{J}(V),$$

мы не можем поднять естественное действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{J}(V)$ до проективного действия этой группы на $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, накрывающего ее действие на базе $\mathcal{J}(V)$. Это запрещается теоремой Шейла–Березина. Поэтому нам придется использовать другой подход к квантованию $\mathcal{T}$, основанный на соображениях из некоммутативной геометрии.

Напомним, что в дираковском подходе квантованию подвергаются классические системы $(M, \mathcal{A})$, задаваемые фазовым пространством M и алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, являющейся инволютивной алгеброй Ли, состоящей из гладких функций на M. Квантование такой системы задается неприводимым линейным представлением r наблюдаемых из $\mathcal{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования H, переводящим скобку Пуассона $\{f, g\}$ наблюдаемых $f, g \in \mathcal{A}$ в коммутатор $\frac{1}{i}[r(f), r(g)]$ отвечающих им операторов. В подходе Конна классическая система задается парой $(M, \mathfrak{A})$, где M снова фазовое пространство, а алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}$ есть ассоциативная инволютивная алгебра, состоящая из гладких функций на M. Квантованием такой системы по Конну называется неприводимое линейное представление π наблюдаемых из $\mathcal{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования H, переводящее оператор внешнего дифференцирования d в коммутатор с некоторым *оператором симметрии* S, где S – самосопряженный оператор на H с квадратом $S^2 = I$. Иначе говоря,

$$\pi \colon df \mapsto [S, \pi(f)], \qquad f \in \mathfrak{A}.$$

Имеем следующую таблицу.

	подход Дирака	подход Конна
классическая система	$(M, \mathcal{A})$ M – фазовое пространство $\mathcal{A}$ – инволютивная алгебра Ли наблюдаемых на M	$(M, \mathfrak{A})$ M – фазовое пространство $\mathfrak{A}$ – инволютивная ассоциативная алгебра наблюдаемых на M
квантовая система	неприводимое представление $r\colon \mathcal{A} \to \operatorname{End} H$, $\{f, g\} \mapsto \frac{1}{i}[r(f), r(g)]$	неприводимое представление $\pi\colon \mathfrak{A} \to \operatorname{End} H$, $df \mapsto [S, \pi(f)]$,

Рис. XIII.1.

Заметим, что конновский подход также можно сформулировать на языке алгебр Ли. Для этого рассмотрим *алгебру* $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ *дифференцирований* алгебры $\mathfrak{A}$, т.е. линейных отображений $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющих правилу Лейбница. Алгебра $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ является алгеброй Ли, поскольку коммутатор двух дифференцирований из этой алгебры снова является дифференцированием. В терминах алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ квантование по Конну есть неприводимое представление алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ в алгебре Ли $\operatorname{End} H$, наделенной коммутатором в качестве скобки Ли.

XIII.2. Сравнение дираковского и конновского подходов. Если все наблюдаемые являются гладкими функциями на M (как предполагалось выше), то между двумя подходами к квантованию нет большого различия. Действительно, дифференциал df наблюдаемой f является симплектически двойственным к гамильтонову векторному полю X_f, что устанавливает связь между ассоциативной алгеброй наблюдаемых $\mathfrak{A} \ni f$ и алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей $\mathcal{A} \ni X_f$ или двойственной к ней алгеброй Ли гамильтонианов f, порождающих векторные поля X_f. Оператор симметрии S определяется в этом случае *поляризацией*

$$H = H_+ \oplus H_- \tag{XIII.1}$$

пространства квантования H, т.е. разложением H в прямую ортогональную сумму замкнутых бесконечномерных подпространств $H_\pm$. Отвечающий поляризации оператор симметрии полагается равным $S = \pm I$ на $H_\pm$. Этот оператор тесно связан с оператором комплексной структуры J на H, задаваемым разложением (XIII.1), а именно, $S = -iJ$, так что $J = \pm iI$ на $H_\pm$.

Однако в случае, если мы разрешим алгебре наблюдаемых $\mathcal{A}$ содержать негладкие функции, дираковское определение потеряет смысл. В конновском подходе дифференциал негладкой наблюдаемой $f \in \mathfrak{A}$ также не определен в классическом смысле, тем не менее его квантовый аналог

$$d^q f := [S, \pi(f)]$$

может быть корректно определен.

Рассмотрим в качестве примера алгебру $\mathfrak{A} = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$ ограниченных функций на окружности S^1. Любая функция $f \in \mathfrak{A}$ определяет ограниченный *оператор умножения* M_f в гильбертовом пространстве $H = L^2(S^1)$, действующий по формуле:

$$M_f \colon h \in H \mapsto fh \in H.$$

Оператор симметрии S на H задается *преобразованием Гильберта*

$$(Sh)(\phi) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi} K(\phi,\psi) f(\psi)\, d\psi, \qquad f \in H, \qquad \text{(XIII.2)}$$

где интеграл берется в смысле *главного значения*, т.е.

$$\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi} K(\phi,\psi) f(\psi)\, d\psi := \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_0^{\psi-\epsilon} + \int_{\psi+\epsilon}^{2\pi}\right] K(\phi,\psi) f(\psi)\, d\psi.$$

(Здесь и в дальнейшем мы отождествляем функции $f(z)$ на окружности S^1 с функциями $f(\phi) := f(e^{i\phi})$ на отрезке $[0, 2\pi]$.) *Ядро Гильберта* в формуле (XIII.2) задается выражением

$$K(\phi,\psi) = 1 + i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\phi-\psi}{2}\,.$$

Заметим, что при $\phi \to \psi$ оно ведет себя как $1 + \frac{2i}{\phi-\psi}$.

Дифференциал общей наблюдаемой $f \in \mathfrak{A}$ не определен в классическом смысле, но его квантовый аналог

$$d^q f := [S, M_f]$$

корректно определен как оператор на H (этот оператор корректно определен даже для функций из $\mathrm{BMO}(S^1)$). Для функций $f \in V^{\mathbb{C}} = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{C})$ можно утверждать даже большее.

Предложение XIII.1. *Функция f принадлежит соболевскому пространству $V^{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда ее квантовый дифференциал $d^q f$ является оператором Гильберта–Шмидта на H и следовательно на $V^{\mathbb{C}}$. Более того, норма Гильберта–Шмидта оператора $d^q f$ совпадает с соболевской нормой функции f.*

Доказательство. Коммутатор $d^q f := [S, M_f]$ является интегральным оператором на H с ядром, равным

$$k(\phi, \psi) = K(\phi, \psi)(f(\phi) - f(\psi)).$$

Этот оператор является оператором Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда его ядро $k(\phi, \psi)$ квадратично интегрируемо на $S^1 \times S^1$, что равносильно условию

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\phi) - f(\psi)|^2}{\sin^2\left(\dfrac{\phi - \psi}{2}\right)} \, d\phi \, d\psi < \infty. \tag{XIII.3}$$

Утверждение предложения вытекает теперь из формулы Дугласа (IX.7) из п. IX.3. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно перейти в формуле (XIII.3) от окружности S^1 к вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда левая часть неравенства (XIII.3) перейдет в выражение

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right]^2 dx \, dy = \|f\|_{\frac{1}{2}}^2,$$

откуда вытекает утверждение предложения.

Итак, квантовый дифференциал $d^q f := [S, M_f]$ для функций $f \in V^{\mathbb{C}}$ является интегральным оператором на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемым формулой

$$(d^q f)(h)(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\phi, \psi) h(\psi) \, d\psi, \qquad h \in V^{\mathbb{C}}, \tag{XIII.4}$$

где

$$k(\phi, \psi) = K(\phi, \psi)(f(\phi) - f(\psi)),$$

а $K(\phi, \psi)$ – ядро Гильберта. При $\phi \to \psi$ ядро $k(\phi, \psi)$ ведет себя как

$$2i \, \frac{f(\phi) - f(\psi)}{\phi - \psi} \, .$$

Можно показать, что квазиклассический предел оператора (XIII.4), отвечающий взятию следа оператора (XIII.4) при $\phi = \psi$, совпадает (с точностью до константы) с оператором умножения

$$h \mapsto f' \cdot h.$$

Задача XIII.1. Придайте точный смысл этому утверждению.

Тем самым, в рассмотренном примере квантование свелось, по существу, к замене производной ее конечно-разностным аналогом. Такое квантование, задаваемое соответствием

$$\mathfrak{A} \ni f \mapsto d^q f \colon H \to H,$$

Конн называет "квантовым исчислением" по аналогии с исчислением конечных разностей.

Приведем без доказательства несколько конкретных примеров указанного соответствия между функциями $f \in \mathfrak{A}$ и операторами $d^q f$ на H (подробнее об этом см. [22]):

1) дифференциал $d^q f$ является оператором конечного ранга тогда и только тогда, когда f есть рациональная функция (теорема Кронекера);
2) дифференциал $d^q f$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу $\mathrm{VMO}(S^1)$;
3) дифференциал $d^q f$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу $\mathrm{BMO}(S^1)$.

Напомним для полноты определения пространства BMO функций ограниченной средней осцилляции и пространства VMO функций исчезающей средней осцилляции. Более удобно сделать это для функций $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, заданных на вещественной прямой $\mathbb{R}$, а не на окружности. Обозначим через

$$f_I := \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx$$

среднее такой функции по отрезку I вещественной прямой длины $|I|$. Если

$$M(f) := \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\,dx < \infty,$$

то будем говорить, что функция $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$. Обозначим для $\delta > 0$

$$M_\delta(f) := \sup_{|I|<\delta} \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\,dx.$$

Тогда $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ функция $M_\delta(f)$ ограничена по δ. Будем говорить, что функция $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $\mathrm{VMO}(\mathbb{R})$, если $M_\delta(f) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Краткое содержание лекции XIII.

Квантование по Конну: классическая система задается в этом подходе парой $(M, \mathfrak{A})$, где M – фазовое пространство, $\mathfrak{A}$ – ассоциативная инволютивная алгебра наблюдаемых. Квантование классической системы $(M, \mathfrak{A})$ есть неприводимое линейное представление π наблюдаемых из алгебры $\mathfrak{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования H, переводящее дифференциал df наблюдаемой f в коммутатор $d^q f = [S, \pi(f)]$ ее образа с оператором симметрии S, являющимся самосопряженным оператором на H с квадратом $S^2 = I$.

В терминах алгебр Ли это представление алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебре Ли $\mathrm{End}\,H$ замкнутых линейных операторов в H, наделенной коммутатором в качестве скобки Ли.

Если все наблюдаемые из алгебры $\mathfrak{A}$ являются гладкими функциями на M, то конновский подход эквивалентен дираковскому. Однако в случае, когда некоторые из наблюдаемых негладкие функции, дираковский подход теряет смысл. В конновском подходе дифференциал df также не определен в классическом смысле, однако его квантовый аналог $d^q f$ может иметь смысл.

Пример. Представление алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A} = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$ в пространстве $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ задается отображением

$$\pi\colon \mathfrak{A} \ni f \mapsto \text{оператор умножения } M_f\colon H \ni h \mapsto fh \in H.$$

Оператор симметрии $S\colon H \to H$ совпадает с преобразованием Гильберта, при этом квантовый дифференциал $d^q f = [S, M_f]$ корректно определен как оператор на H. Более того, $d^q f$ является оператором Гильберта–Шмидта $\Leftrightarrow f \in V$.

Квантовое исчисление – это словарь, связывающий свойства функций $f \in V$ со свойствами отвечающих им операторов $d^q f$ на пространстве H.

Лекция XIV. Квантование универсального пространства Тейхмюллера

XIV.1. Конструкция квантования. Напомним, что в п. IX.3 мы определили естественное действие группы $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности на соболевском пространстве $V = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R})$. Это действие не является гладким и потому не допускает дифференцирования. Нам хотелось бы сопоставить пространству $\mathcal{T}$ классическую систему, в которой $\mathcal{T}$ играло бы роль фазового пространства, а в качестве алгебры наблюдаемых выступала алгебра Ли, ассоциированная с группой $\mathrm{QS}(S^1)$. Однако на классическом уровне такой алгебры Ли построить нельзя из-за негладкости действия $\mathrm{QS}(S^1)$. По этой причине мы не можем сопоставить $\mathcal{T}$ никакой естественной классической системы. Однако квантовую систему, ассоциированную с $\mathcal{T}$, мы построить можем.

Для этого определим сначала *квантованное инфинитезимальное действие* группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на соболевском пространстве V, задавая его с помощью квантового дифференциала d^q, определяемого формулой (XIII.4):

$$\mathrm{QS}(S^1) \ni f \mapsto d^q f \colon V \to V.$$

Далее продолжим этот оператор на все фоковское пространство F_0, определяя его сначала на элементах базиса $P_K(z)$ из формулы (XII.1) (п. XII.1) по правилу Лейбница, а затем продолжая по линейности на всю алгебру полиномов $\mathfrak{S}(W_+)$. Замыкание полученного оператора даст нам оператор $d^q f$ на фоковском пространстве $F_0 = \widehat{\mathfrak{S}(W_+)}$. Искомая *квантовая алгебра Ли наблюдаемых* порождается построенными операторами $d^q f$ на F_0 с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$. Мы обозначаем ее через $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$ и рассматриваем в качестве замены (не существующей) классической алгебры Ли группы $\mathrm{QS}(S^1)$.

Сравним изложенный способ построения квантовой системы, ассоциированной с $\mathcal{T}$, с дираковским квантованием системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$ из лекции XII.

XIV.2. Заключение. Итак, конновское квантование универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ состоит из двух этапов.

$\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}$-случай

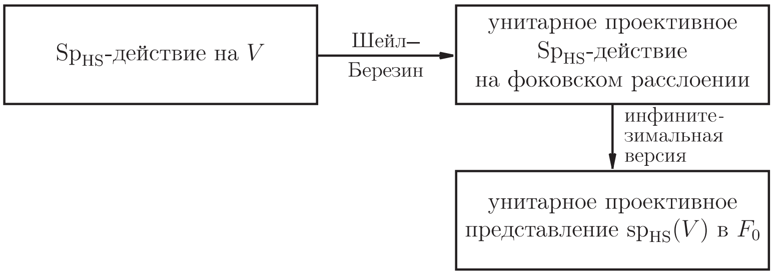

Рис. XIV.1.

$\mathcal{T}$-случай

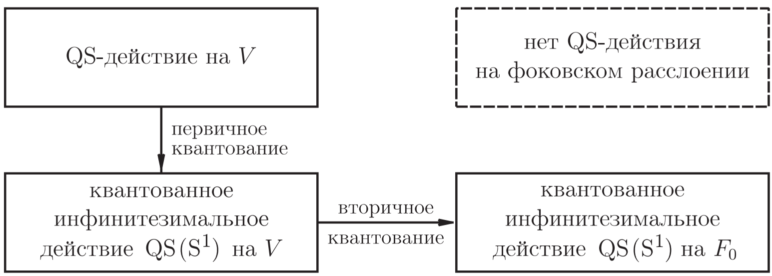

Рис. XIV.2.

I. *Первичное квантование.* Построение квантового инфинитезимального действия группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на соболевском пространстве V, задаваемого посредством

$$\mathrm{QS}(S^1) \ni f \mapsto d^q f = [S, M_f] \colon V \to V.$$

II. *Вторичное квантование.* Продолжение операторов $d^q f$ на фоковское пространство F_0 и построение квантовой алгебры наблюдаемых $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$, порождаемой операторами $d^q f \in \mathrm{End}\, F_0$ с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$.

Принцип соответствия для построенного квантования пространства $\mathcal{T}$ состоит в том, что ограничение конновского квантования $\mathcal{T}$ на пространство нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ дает нам дираковское квантование $\mathcal{S}$, построенное в п. XII.5.

Краткое содержание лекции XIV.

Квантование универсального пространства Тейхмюллера.

Первичное квантование:

$$\mathrm{QS}(S^1) \ni f \mapsto d^q f = [S, M_f] \colon V \to V;$$

Вторичное квантование: продолжение квантового дифференциала $d^q f \colon V \to V$ до замкнутого линейного оператора $d^q f \colon F_0 \to F_0$.

Квантовая алгебра наблюдаемых $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$ порождается операторами $d^q f \colon F_0 \to F_0$, отвечающими $f \in \mathrm{QS}(S^1)$, и может служить заменой несуществующей классической алгебры Ли, ассоциированной с группой $\mathrm{QS}(S^1)$.

Вместо послесловия. Универсальное пространство Тейхмюллера и теория струн

Главной отправной точкой для изучения универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ явилась для нас связь этого пространства с теорией струн. В ряде физических работ, посвященных этой теории (см., например, [23], [24]), было замечено, что пространство $\Omega_d := C_0^\infty(S^1, R^d)$ гладких петель в d-мерном векторном пространстве R^d (наделяемом метрикой d-мерного пространства Минковского) можно рассматривать как фазовое пространство d-мерной бозонной теории замкнутых струн. В частности, на Ω_d имеется естественная симплектическая форма (одномерный аналог указанного пространства петель и симплектической формы на нем был рассмотрен в лекции IX, п. IX.1).

Остановимся более подробно на приведенной интерпретации пространства петель Ω_d. Конфигурационное пространство d-мерной бозонной теории замкнутых струн состоит из гладких отображений $q\colon [0,\pi] \to R^d$, все производные которых обращаются в нуль в граничных точках. Ассоциированное с ним фазовое пространство этой теории состоит из пар отображений (p,q) того же типа, где отображение q играет роль "координаты", а отображение p – роль "импульса". Симплектическая форма на указанном фазовом пространстве задается "струнным аналогом" формы типа "$dp \wedge dq$":

$$\omega(\delta p, \delta q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \delta p(\sigma) \wedge \delta q(\sigma)\, d\sigma, \tag{D.1}$$

где δp, δq – гладкие отображения $[0,\pi] \to R^d$ того же типа, что p и q, интерпретируемые как касательные векторы к фазовому пространству. Рассмотрим отображение, сопоставляющее паре (p,q) отображение $x\colon [-\pi,\pi] \to R^d$, которое задается формулой

$$x(\sigma) = \begin{cases} p(\sigma) + q'(\sigma) & \text{при } 0 \leqslant \sigma \leqslant \pi, \\ p(-\sigma) + q'(-\sigma) & \text{при } -\pi \leqslant \sigma \leqslant 0. \end{cases}$$

Это отображение отождествляет введенное фазовое пространство с пространством Ω_d. Оно также переводит симплектическую форму (D.1) на фазовом пространстве теории струн в симплектическую форму на пространстве Ω_d, задаваемую формулой, аналогичной (IX.1) (см. [24]):

$$\omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta)\rangle \, d\theta, \tag{D.2}$$

где $\xi = \xi(e^{i\theta})$, $\eta = \eta(e^{i\theta})$ – гладкие отображения $[-\pi,\pi] \to R^d$.

Симплектическую форму (D.2) на пространстве гладких петель Ω_d можно продолжить на соболевское пополнение этого пространства, совпадающее с пространством полудифференцируемых вектор-функций $V_d := H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, R^d)$. Заметим, что последнее пространство является наибольшим в шкале соболевских пространств $H_0^s(S^1, R^d)$, на которое допускает продолжение форма ω. Тем самым, можно сказать, что форма ω "сама выбирает" правильное пространство, на котором ее нужно рассматривать. С этой точки зрения выбор пространства V_d в качестве фазового пространства теории струн выглядит более естественным, чем принятый во многих работах выбор Ω_d в качестве такого пространства.

Положим теперь $d = 1$ и обозначим $V := V_1 = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R})$, чтобы установить соответствие с обозначениями и результатами, изложенными в этой книге выше. По теореме Нага–Сулливана из п. IX.3 имеется естественная группа, ассоциированная с пространством $V = H_0^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R})$, а именно, группа $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности. Снова можно сказать, что само соболевское пространство V "выбирает" правильную группу, которая на этом пространстве действует. Указанное действие группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на пространстве V является симплектическим, т.е. сохраняет форму ω. Если бы оно было гладким, то в качестве классической системы, ассоциированной с рассматриваемой теорией струн, было бы естественно взять фазовое пространство V (точнее, его d-мерный аналог), а в качестве алгебры наблюдаемых на нем алгебру Ли группы $\mathrm{QS}(S^1)$. К сожалению, это действие не является гладким и, тем самым, мы не можем сопоставить никакой классической системы фазовому пространству V, наделенному симплектическим действием группы $\mathrm{QS}(S^1)$. Однако в п. XIV.1 было показано, что можно построить квантовую алгебру наблюдаемых, отвечающую указанной группе.

Исходя из твисторного подхода к квантованию, представленного в [1], предлагаемая схема квантования теории струн выглядит следующим образом. Фиксируем фазовое пространство V_d с симплектическим действием группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на нем. Рассматриваем пространство комплексных структур на V_d, получаемых из стандартной комплексной структуры J^0 действием на нее группы $\mathrm{QS}(S^1)$. Это пространство отождествляется с универсальным пространством Тейхмюллера $\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. Теперь, для того чтобы проквантовать рассматриваемую теорию, достаточно, согласно [1], построить квантовую систему, ассоциированную с пространством $\mathcal{T}$, наделенным действием группы $\mathrm{QS}(S^1)$. Это и есть квантовая система, построенная в п. XIV.1, алгебра наблюдаемых которой порождается квантовыми дифференциалами $d^q f$ с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$.

Задачи

Ниже приводятся задачи, которые давались слушателям курса, прочитанного автором в Научно-образовательном центре МИАН. Среди них есть как легкие упражнения, так и "трудные" задачи, но нет нерешенных проблем.

1. Покажите, что дилатация диффеоморфизма w комплексной плоскости, равная

$$D_w(z) = \frac{|\partial w(z)| + |\overline{\partial} w(z)|}{|\partial w(z)| - |\overline{\partial} w(z)|}\,,$$

является конформным инвариантом, т.е.

$$D_w(z) = D_{h\circ w\circ g^{-1}}(g(z))$$

для любых конформных отображений h и g.

2. Докажите теорему композиции для квазиконформных отображений: отображение, обратное к K-квазиконформному, снова K-квазиконформно и композиция K_1-квазиконформного отображения с K_2-квазиконформным является K_1K_2-квазиконформным отображением.

3. Докажите формулу композиции для дифференциалов Бельтрами квазиконформных отображений:

$$\mu_{f\circ g^{-1}}(g(z)) = \frac{\mu_f(z) - \mu_g(z)}{1 - \mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}}\left[\frac{\partial g(z)}{|\partial g(z)|}\right]^2$$

для квазиконформных отображений $f, g : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$.

4. Докажите теорему Римана для квазиконформных отображений: если $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ – две односвязных области в $\overline{\mathbb{C}}$ с нетривиальными границами (т.е. с границами, состоящими более, чем из одной точки), то для любой функции $\mu \in L^\infty(\mathcal{D})$ с нормой $\|\mu\|_\infty < 1$ найдется квазиконформное отображение $w\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, комплексная дилатация которого совпадает с μ почти всюду.

5. Докажите теорему о нормальной сходимости для квазиконформных отображений: если в области $\mathcal{D}$ задана последовательность K-квазиконформных отображений w_n, сходящаяся равномерно на компактах к отображению w, то w является либо константой, либо K-квазиконформным отображением.

6. Докажите, что каждый конформный прямоугольник $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ можно конформно отобразить на евклидов прямоугольник $\Pi(w_1, w_2, w_3, w_4)$ и такое преобразование определено однозначно с точностью до подобия.

7. Пусть f – монотонно возрастающий гомеоморфизм вещественной прямой на себя. Обозначим через K его максимальную дилатацию

$$K = \sup_{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}} \frac{MH(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))}{MH(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

где $MH(t_1, t_2, t_3, t_4)$ обозначает конформный модуль конформного прямоугольника $H(t_1, t_2, t_3, t_4)$ (H – верхняя полуплоскость). Покажите, что условие $K < \infty$ эквивалентно следующему условию: для некоторой константы $C > 0$ имеет место оценка

$$\frac{1}{C} \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leqslant C$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

8. Покажите, что любой диффеоморфизм окружности, сохраняющий ориентацию, является квазисимметричным, т.е. продолжается до квазиконформного диффеоморфизма круга.

9. Пусть w есть гомеоморфизм расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, являющийся квазиконформным в дополнении к некоторой квазиокружности. Тогда он квазиконформен всюду в $\overline{\mathbb{C}}$.

10. Докажите, что универсальное пространство Тейхмюллера является полным линейно связным метрическим пространством в метрике Тейхмюллера.

11. Докажите теорему о существовании функции с заданным шварцианом: если φ – заданная голоморфная функция в односвязной области $\mathcal{D}$, то в этой области найдется мероморфная функция f, шварциан которой совпадает с φ, т.е. $S[f] = \varphi$. Указанная функция f определяется по функции φ единственным образом с точностью до преобразований Мебиуса.

12. Докажите теорему площадей: если f – однолистная мероморфная функция во внешности единичного круга, имеющая степенное разложение вида

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}\,,$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1$, причем это неравенство точное.

13. Преобразования Мебиуса u и v, не равные тождественному, сопряжены в группе $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}^2\, u = \mathrm{tr}^2\, v$.

14. Приведите пример дискретной подгруппы группы $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C})$, область разрывности которой пуста.

15. Если две римановы поверхности $X_1 = \widetilde{X}/G_1$ и $X_2 = \widetilde{X}/G_2$, получающиеся факторизацией одной и той же универсальной накрывающей $\widetilde{X}$, биголоморфны друг другу, то группы G_1 и G_2 сопряжены в группе автоморфизмов $\widetilde{X}$ и обратно.

16. Докажите, что форма ω_0, задаваемая на пространстве $\Omega S^1 = C_0^\infty(S^1, S^1)$ гладких отображений $S^1 \to S^1$ с нулевым средним по окружности формулой

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(e^{i\theta}) \frac{d\eta(e^{i\theta})}{d\theta}\, d\theta,$$

задает симплектическую структуру на ΩS^1, т.е. является замкнутой невырожденной 2-формой.

17. Покажите, что линейный ограниченный оператор $A\colon V \to V$ принадлежит симплектической группе $\mathrm{Sp}(V)$ тогда и только тогда, когда он имеет блочное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \qquad \text{с} \quad \overline{a}^t a - b^t\,\overline{b} = 1, \quad \overline{a}^t b = b^t\,\overline{a}$$

в терминах разложения $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$, где $W_\pm$ – собственные $(\mp i)$-подпространства оператора комплексной структуры J^0 на соболевском пространстве V.

18. Докажите, что пространство $\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ комплексных структур на соболевском пространстве V, совместимых с симплектической структурой, можно отождествить с бесконечномерным диском Зигеля $\mathcal{D}$. Проверьте, что $\mathcal{D}$ является выпуклым множеством.

19. Докажите, что операторы Гильберта–Шмидта $T\colon H_1 \to H_2$, действующие из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, образуют гильбертово пространство.

20. Покажите, что операторы Вирасоро

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} {:}a_{-i}a_{i+n}{:}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

задают проективное представление алгебры Ли гладких векторных полей на окружности. Конкретно,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12}\,.$$

21. Покажите, что преобразование Гильберта задает оператор симметрии на пространстве $L^2(S^1, \mathbb{C})$.

22. Найдите квазиклассический предел квантового дифференциала $d^q f$ на соболевском пространстве V, задаваемого интегральным оператором с ядром, равным разностной производной функции $f \in V$. Иначе говоря, покажите, что след этого оператора на диагонали для гладких функций f совпадает с оператором умножения на производную f'.

23. Докажите теорему Кронекера: квантовый дифференциал $d^q f$ является оператором конечного ранга тогда и только тогда, когда функция f рациональна.

24. Докажите, что пространство нормализованных диффеоморфизмов окружности $\mathcal{S}$ стягиваемо.

Библиографические указания

Приводимый ниже список литературы может помочь заинтересованному читателю подробнее ознакомиться с вопросами, которые (по необходимости) кратко представлены в тексте. Кроме того, пользуясь ссылками, данными в тексте, читатель сможет восстановить детали тех доказательств, которые представлены в лекциях на "идейном" уровне. Тем самым, предлагаемый список никоим образом не может претендовать на полноту. Отметим также, что ссылки в библиографических указаниях, предшествующих списку, даются на издания, которые казались автору наиболее доступными.

Глава 1. Теории квазиконформных отображений комплексной плоскости посвящено несколько книг, из которых мы особенно рекомендуем лекции Альфорса [3], где можно найти большую часть материала, представленного в гл. 1. В частности, при доказательстве центрального результата – теоремы о существовании квазиконформных отображений комплексной плоскости – мы следуем подходу, изложенному в этих лекциях.

Глава 2. Основные сведения об универсальном пространстве Тейхмюллера можно найти в книгах [2] и [5]. Вопросу о существовании кэлеровой метрики на универсальном пространстве Тейхмюллера посвящено большое количество статей. Отметим в этой связи интересную монографию [25], в которой построена такая метрика на универсальном пространстве Тейхмюллера. Подчеркнем, что топология, индуцируемая этой метрикой, отличается от топологии, индуцируемой метрикой Тейхмюллера. (В частности, универсальное пространство Тейхмюллера в топологии [25] состоит из несчетного множества связных компонент.)

Глава 3. Существует большое количество книг, посвященных теории римановых поверхностей, из которых наиболее близкой к нашему изложению является, по-видимому, книга [26]. Классическим пространствам Тейхмюллера также посвящен целый ряд книг, из которых можно рекомендовать книги [2] и [5], изложение в которых наиболее близко к нашему. Кэлерова метрика Вейля–Петерсона на классических пространствах Тейхмюллера была введена и исследована в классических работах Вейля [7] и Альфорса [8]. Альфорс показал, что построенная метрика имеет отрицательную голоморфную секционную кривизну. Подробное исследование свойств этой метрики и ее геодезических было проведено в работах Вольперта (см. [27], [28], [29]). Интересные связи между указанной метрикой и уравнением Лиувилля установлены в работах Зографа и Тахтаджяна (см. [30], [31]). Свойства пространства нормализованных диффеморфизмов $\mathcal{S}$ изучаются в книге [1] и цитированных там статьях. Кэлерова метрика на этом пространстве построена в работе Кириллова и Юрьева [10].

Глава 4. Приводимая в этой главе теорема Нага–Сулливана, играющая ключевую роль в квантовании универсального пространства Тейхмюллера, доказана в статье [14], где сообщаются и другие факты, относящиеся к вложению универсального пространства Тейхмюллера в бесконечномерный грассманиан (см. также [32] и [1]).

Глава 5. Квантование классических систем излагается во всех книгах по геометрическому квантованию (например, в [33]). Фоковское пространство и представление Гейзенберга также изучаются в целом ряде книг (например, в книгах [21] и [17]). Теорема Шейла–Березина доказана в оригинальной статье Шейла [16] и книге Березина [17]. Проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта построено в статье [18] (см. также [1], [32]). Представление алгебры Вирасоро хорошо известно и представлено в целом ряде статей и книг (например, в книгах [21], [32]).

Глава 6. Геометрическое квантование по Конну представлено в его книге [34] (см. также [35]). В частности, из этой книги нами заимствован пример, приведенный в п. XIII.2. Конновское квантование универсального пространства Тейхмюллера представлено в статье [36] (см. также [1]).

Список литературы

[1] А. Г. Сергеев, *Геометрическое квантование пространств петель*, Совр. пробл. матем., **13**, МИАН, М., 2009, 294 с.

[2] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Grad. Texts in Math., **109**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.

[4] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Grundlehren Math. Wiss., **126**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[5] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, Wiley-Interscience Publ., New York, 1988.

[6] F. P. Gardiner, D. P. Sullivan, "Symmetric structures on a closed curve", *Amer. J. Math.*, **114**:4 (1992), 683–736.

[7] A. Weil, "Sur les modules des surfaces de Riemann", *Sem. Bourbaki*, **10** (1957).

[8] L. Ahlfors, "Curvature properties of Teichmüller's space", *J. Analyse Math.*, **9** (1961), 161–176.

[9] R. Bowen, "Hausdorff dimension of quasicircles", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50** (1979), 11–25.

[10] А. А. Кириллов, Д. В. Юрьев, "Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Rot}(S^1)$", *Функц. анализ и его прил.*, **21**:4 (1987), 35–46.

[11] S. Nag, A. Verjovsky, "$\mathrm{Diff}(S^1)$ and the Teichmüller spaces", *Comm. Math. Phys.*, **130**:1 (1990), 123–138.

[12] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.

[13] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill Ser. in Higher Math., McGraw Hill, New York, 1973.

[14] S. Nag, D. Sullivan, "Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space on the circle", *Osaka J. Math.*, **32**:1 (1995), 1–34.

[15] S. Nag, "A period mapping in universal Teichmüller space", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **26**:2 (1992), 280–287.

[16] D. Shale, "Linear symmetries of free boson field", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 149–167.

[17] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986.

[18] G. Segal, "Unitary representations of some infinite dimensional groups", *Comm. Math. Phys.*, **80**:3 (1981), 301–342.

[19] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, Наука, М., 1981.

[20] R. Goodman, N. R. Wallach, "Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle", *J. Reine Angew. Math.*, **347** (1984), 69–133.

[21] V. G. Kac, A. K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Adv. Ser. Math. Phys., **2**, World Sci., Singapore, 1987.

[22] S. C. Power, *Hankel Operators on Hilbert Space*, Res. Notes in Math., **64**, Pitman, Boston, MA, 1982.

[23] J. Scherk, "An introduction to the theory of dual models and strings", *Rev. Mod. Phys.*, **47** (1975), 123–164.

[24] M. J. Bowick, S. G. Rajeev, "The holomorphic geometry of closed bosonic string theory and Diff S^1/S^1", *Nuclear Phys. B*, **293**:2 (1987), 348–384.

[25] L. A. Takhtajan, L.-P. Teo, *Weil-Petersson Metric on the Universal Teichmüller Space*, Mem. Amer. Math. Soc., **183**, no. 861, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[26] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Grad. Texts in Math., **71**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[27] S. Wolpert, "The topology and geometry of the moduli space of Riemann surfaces", Lecture Notes in Math., **1111**, 1985, 431–451.

[28] S. Wolpert, "On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curves", *Amer. J. Math.*, **107** (1985), 969–997.

[29] S. Wolpert, "Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves", *Invent. Math.*, **85** (1986), 119–145.

[30] П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, "Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0", *Матем. сб.*, **132**:2 (1987), 147–166.

[31] П. Г. Зограф, Л. А. Тахтаджян, "Об униформизации римановых поверхностей и метрике Вейля–Петерсона на пространствах Тейхмюллера и Шоттки", *Матем. сб.*, **132**:3 (1987), 304–321.

[32] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.

[33] N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1992.

[34] A. Connes, *Géométrie Non Commutative*, InterEditions, Paris, 1990.

[35] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhauser Adv. Texts Basler Lehrbucher, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[36] A. G. Sergeev, "The Group of Quasisymmetric Homeomorphisms of the Circle and Quantization of the Universal Teichmüller Space", *SIGMA*, **5** (2009), 015, 20 pp.

Предметный указатель

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 21

Армен Глебович Сергеев

Лекции об универсальном пространстве Тейхмюллера

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Сдано в набор 10.06.2012. Подписано в печать 09.04.2013.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pupyrev@mi.ras.ru`