Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 20

Издание выходит с 2006 года

С. А. Теляковский

Курс лекций по математическому анализу

Семестр III

Издание 2-е, доработанное

МИАН

Москва
2013

УДК 517
ББК (В)22.16
Л43

Теляковский С. А.

Л43 Курс лекций по математическому анализу. Семестр III – М.: МИАН, 2013. – 242 с. – (Лекционные курсы НОЦ, ISSN 2226-8782; Вып. 20).

ISBN 978-5-98419-049-7

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит “Курс лекций по математическому анализу” С. А. Теляковского, читавшийся студентам второго курса механико-математического факультета МГУ в 1996–2006 годах.

ISBN 978-5-98419-049-7

Оглавление

Введение

Материал третьего семестра составляют в основном ряды – числовые (гл. 15), функциональные (гл. 16), тригонометрические ряды Фурье (гл. 19). Близка к рядам в идейном смысле и гл. 17, посвященная интегралам, зависящим от параметра.

Несколько особняком от обычного содержания курсов математического анализа стоит гл. 18 “Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве”. В этой главе излагаются начальные сведения из функционального анализа, однако лишь в том направлении и объеме, в котором они близки к традиционному содержанию математического анализа.

Одна из педагогических установок автора состоит в том, что в начальном курсе математического анализа, обязательном для студентов первого и второго годов обучения, для более прочного усвоения материала не нужно гнаться за чрезмерной общностью и злоупотреблять включением сведений из других разделов математики, даже близких к математическому анализу.

Отметим, что настоящий текст, как и материал первого и второго семестров только небольшим числом вкраплений отличается от лекций, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ.

Как и семестр I (Лекционные курсы Научно-образовательного центра МИАН, выпуск 11, 2009 г.), и семестр II (Лекционные курсы Научно-образовательного центра МИАН, выпуск 17, 2011 г.) настоящее 2-ое издание “Курса лекций” третьего семестра представляет собой доработанный вариант первого издания, выпускавшегося Центром прикладных исследований механико-математического факультета МГУ в 2002–2004 гг.

Октябрь 2012 г. С. А. Теляковский

Глава 15. Числовые ряды

§ 15.1. Определение ряда

Числовым рядом называют формально записанную сумму бесконечной последовательности чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{15.1.1}$$

Числа u_k называют *членами ряда*.

Сами по себе слова "сумма бесконечной последовательности чисел" смысла не имеют, а говоря так, имеют в виду следующее.

Вводят *частные* (говорят также частичные) *суммы* ряда (15.1.1)

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Если последовательность частных сумм $\{S_n\}$ сходится к некоторому числу S, ряд (15.1.1) называют *сходящимся*, число S называют его *суммой* и пишут

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Таким образом, в этом случае (15.1.1) обозначает не только сам ряд, но и его сумму.

Если последовательность частных сумм $\{S_n\}$ расходится, т.е. не имеет конечного предела, ряд (15.1.1) называют *расходящимся*.

Понятно, что сходимость и расходимость ряда не зависят от начальных его членов. Вообще ряды, отличающиеся только конечным числом членов, сходятся или расходятся одновременно.

В некоторых вопросах, о которых будет говориться в гл. 16, нужны ряды с комплексными членами. Поэтому будем предполагать, что членами ряда u_k являются, вообще говоря, комплексные числа.

Приведем определение сходимости последовательности комплексных чисел, хотя оно и не отличается от определения сходимости последовательности действительных чисел.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся к числу* z^*, если для каждого положительного ε существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$ справедлива оценка $|z_n - z^*| < \varepsilon$.

По определению *ε-окрестностью комплексного числа* z^* называют множество чисел z, для которых соответствующие им точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$ принадлежат открытому кругу радиуса ε с центром в точке z^*.

На последовательности комплексных чисел переносятся все теоремы о последовательностях действительных чисел, кроме тех, которые связаны с понятиями "больше – меньше", поскольку для комплексных чисел эти понятия не имеют смысла.

Понятие ряда является очень общим. Членами ряда могут быть произвольные объекты, для которых определены сложение конечного числа этих объектов и сходимость их последовательностей. Это дает возможность говорить о частных суммах ряда и о сходимости последовательности частных сумм.

Ряды, членами которых являются числа, действительные или комплексные, называют числовыми. Ряды, членами которых являются функции, называют *функциональными*. Они рассматриваются в следующей главе.

В записи ряда (15.1.1) суммирование по k ведется, начиная с $k = 1$. Но можно начинать суммирование с $k = 0$ или вообще с любого числа m, т.е. рассматривать ряды вида

$$\sum_{k=m}^{\infty} u_k.$$

Наряду с (15.1.1) для обозначения ряда используется также запись $\sum u_k$ без указания пределов, в которых изменяется индекс суммирования k.

Если ряд (15.1.1) сходится к числу S, то вводится последовательность остатков ряда

$$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Приведем некоторые простые свойства сходящихся рядов.

Теорема 15.1.1 (Критерий Коши сходимости ряда). *Ряд* (15.1.1) *сходится в том и только том случае, когда выполнено условие Коши, состоящее в том, что для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует число* N *такое, что для любых чисел* m *и* n, *удовлетворяющих условию* $N < m \leqslant n$, *справедлива оценка*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| < \varepsilon. \tag{15.1.2}$$

Так как

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = S_n - S_{m-1},$$

теорема следует из критерия Коши сходимости числовых последовательностей.

Теорема 15.1.2. *Если ряд* (15.1.1) *сходится, то*

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0, \tag{15.1.3}$$

т.е. общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Это утверждение вытекает из критерия Коши при $n = m$. Оно является необходимым условием сходимости ряда.

В § 2.9 были приведены примеры, которые показывают, что последовательность частных сумм *гармонического ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{15.1.4}$$

расходится, а последовательность частных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{15.1.5}$$

сходится.

Название гармонический ряд объясняется тем, что каждый член a_k этого ряда, начиная со второго, является средним гармоническим двух соседних членов, т.е.

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}}\right).$$

Расходимость гармонического ряда установил Г. Лейбниц (1673). Это был первый пример расходящегося ряда со стремящимися к нулю членами.

Таким образом, стремление к нулю общего члена ряда, будучи в силу теоремы 15.1.2 необходимым условием сходимости ряда, достаточным условием не является.

Теорема 15.1.3. *Если ряды* $\sum u_k$ *и* $\sum v_k$ *сходятся, то для произвольных чисел* α *и* β *сходится ряд* $\sum(\alpha u_k + \beta v_k)$ *и справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{15.1.6}$$

Доказательство. Запишем равенство для частных сумм

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum_{k=1}^{n} v_k. \tag{15.1.7}$$

Так как суммы из правой части равенства (15.1.7) являются частными суммами сходящихся рядов, они имеют пределы при $n \to \infty$. Значит, имеет предел и сумма из левой части (15.1.7), т.е. ряд $\sum(\alpha u_k + \beta v_k)$ сходится. Равенство (15.1.6) получим, переходя в (15.1.7) к пределу при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Это свойство сходящихся рядов называется *линейностью*.

Из теоремы 15.1.3 следует, что если один из рядов $\sum u_k$ или $\sum v_k$ сходится, а другой расходится, то ряд $\sum(u_k + v_k)$ расходится.

Теорема 15.1.4. *Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом, не меняя порядка их следования. Полученный при этом ряд сходится, причем к той же сумме.*

Для доказательства достаточно заметить, что последовательность частных сумм ряда, полученного при группировке, является подпоследовательностью последовательности частных сумм исходного ряда.

Отметим, что группировать члены расходящихся рядов нельзя. Например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

расходится, так как его общий член не стремится к нулю. А если сгруппировать члены этого ряда парами, то получим сходящийся ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots.$$

В § 15.6 будет показано, что в теореме 15.1.4 требование сохранять при группировке порядок следования членов ряда, является существенным. Без него такое утверждение в общем случае неверно.

Итак, на сходящиеся ряды переносятся некоторые свойства конечных сумм, например, сложение и умножение членов ряда на число. Но некоторые свойства конечных сумм на сходящиеся ряды не переносятся, например, возможность произвольной группировки слагаемых.

Докажем формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Эта формула известна из школы, но там она не была строго обоснована.

Покажем, что если z – комплексное число и $|z|<1$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \tag{15.1.8}$$

сходится и его сумма равна

$$\frac{1}{1-z}.$$

В самом деле, согласно формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{n} z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z}\,z^{n+1},$$

а в силу условия $|z|<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-z}\,z^{n+1}=0.$$

Условие $|z|<1$ здесь существенно, так как если $|z|\geqslant 1$, то $|z^n|=|z|^n\geqslant 1$, т.е. общий член ряда (15.1.8) не стремится к нулю и ряд расходится.

§ 15.2. Простейшие признаки сравнения

В этом и нескольких следующих параграфах основное внимание сосредоточено на признаках (достаточных условиях) сходимости рядов.

Теорема 15.2.1. *Сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

с неотрицательными членами равносильна ограниченности последовательности его частных сумм.

Действительно, в этом случае

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n,$$

т.е. последовательность частных сумм ряда возрастает и утверждение теоремы вытекает из свойств монотонных последовательностей.

В теореме 15.2.1 можно предполагать, что условие $a_k \geqslant 0$ выполняется не при всех k, а только для достаточно больших k. В таких случаях говорят, что члены ряда a_k *финально* неотрицательны. Подобное замечание можно будет сделать и ко многим другим теоремам, но не будем на этом останавливаться.

Теорема 15.2.2 (Признак сравнения). *Пусть u_k – комплексные числа, a_k – действительные числа и $|u_k| \leqslant a_k$ для всех k. Тогда*

1°) *из сходимости ряда $\sum a_k$ следует сходимость ряда $\sum u_k$;*
2°) *из расходимости ряда $\sum u_k$ следует расходимость ряда $\sum a_k$.*

Доказательство. 1°. В силу условия $|u_k| \leqslant a_k$ числа a_k неотрицательны. Так как ряд $\sum a_k$ сходится, то согласно критерию Коши для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любых m и n, удовлетворяющих условию $N < m \leqslant n$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |u_k| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon$$

и, пользуясь критерием Коши теперь как достаточным условием, видим, что сходится ряд $\sum u_k$.

2°. Если ряд $\sum u_k$ расходится, то ряд $\sum a_k$ не может быть сходящимся, так как согласно утверждению 1^0 тогда сходился бы и ряд $\sum u_k$.

Теорема доказана.

Следующие две теоремы являются простыми следствиями теоремы 15.2.2, но ими часто удобно пользоваться. Их также называют признаками сравнения.

Теорема 15.2.3. *Если числа a_k и b_k положительны и существуют такие числа c_1 и c_2, что при всех k*

$$0 < c_1 \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant c_2 < \infty, \tag{15.2.1}$$

то ряды $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Из (15.2.1) следует, что

$$c_1 b_k \leqslant a_k \leqslant c_2 b_k,$$

и остается только применить теорему 15.2.2.

Условия теоремы 15.2.3 выполняются, если числа a_k и b_k положительны и существует отличный от нуля предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}\,.$$

В самом деле, тогда существуют такие положительные числа c_1 и c_2, что при всех достаточно больших k имеют место неравенства (15.2.1). А начальные члены на сходимость рядов не влияют.

Отметим, что теоремы 15.2.1–15.2.3 аналогичны соответствующим утверждениям из § 9.10 о сходимости несобственных интегралов.

При доказательстве следующей теоремы будет использован знак произведения. По аналогии с записью суммы чисел $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$, $m \leqslant n$, с помощью знака суммы

$$\sum_{k=m}^{n} u_k$$

произведение таких чисел обозначают

$$\prod_{k=m}^{n} u_k := u_m \cdot u_{m+1} \cdot \ldots \cdot u_n.$$

Теорема 15.2.4. *Пусть числа a_k и b_k положительны и*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k} \tag{15.2.2}$$

при всех k. Тогда, если сходится ряд $\sum b_k$, то сходится и ряд $\sum a_k$, а если ряд $\sum a_k$ расходится, то ряд $\sum b_k$ расходится.

Доказательство. Согласно (15.2.2)

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Так как

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_1}, \qquad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_1},$$

то

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1}.$$

Поэтому теорема 15.2.4 вытекает из теоремы 15.2.2.

Теорема 15.2.5 (Признак Даламбера). *Пусть $a_k > 0$ при всех k. Тогда*

1°) *ряд $\sum a_k$ сходится, если существует число $q < 1$ такое, что для всех достаточно больших k*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q; \tag{15.2.3}$$

2°) *ряд $\sum a_k$ расходится, если при всех k, начиная с некоторого,*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1. \tag{15.2.4}$$

Доказательство. 1°. Положим $b_k := q^k$. Тогда в силу (15.2.3) справедлива оценка (15.2.2). Поэтому согласно теореме 15.2.4 из сходимости ряда $\sum b_k$ вытекает сходимость ряда $\sum a_k$.

2°. Из (15.2.4) следует, что $a_{k+1} \geqslant a_k$. Таким образом, ряд $\sum a_k$ не может сходиться, так как его члены положительны и образуют финально возрастающую последовательность.

Теорема доказана.

Условие 1° теоремы 15.2.5 можно записать с помощью верхнего предела

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1.$$

Из теоремы 15.2.5 вытекает следующее утверждение, которое также называют признаком Даламбера (предельной формой признака Даламбера).

Теорема 15.2.6 (Признак Даламбера). *Пусть $a_k > 0$ и существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда ряд $\sum a_k$ сходится, если $q < 1$, расходится, если $q > 1$, а при $q = 1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

В самом деле, если $q < 1$, то для $q_1 \in (q, 1)$ при достаточно больших k имеем $a_{k+1}/a_k < q_1$, а если $q > 1$, то $a_{k+1} \geqslant a_k$ для достаточно больших k.

Так как для рядов (15.1.4) и (15.1.5)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$$

и один из этих рядов сходится, а другой расходится, то ряд при $q = 1$ в теореме 15.2.6 может быть и сходящимся и расходящимся.

Теорема 15.2.7 (Признак Коши). *Пусть $a_k \geqslant 0$ при всех k. Тогда*

1°) *ряд $\sum a_k$ сходится, если существует число $q < 1$ такое, что для всех достаточно больших k*

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q; \tag{15.2.5}$$

2°) *ряд $\sum a_k$ расходится, если для всех k, начиная с некоторого,*

$$\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1. \tag{15.2.6}$$

Доказательство. 1°. Согласно (15.2.5) для достаточно больших k

$$a_k \leqslant q^k.$$

Так как ряд $\sum q^k$ сходится, то сославшись на теорему 15.2.2, получим сходимость ряда $\sum a_k$.

2°. Из (15.2.6) вытекает неравенство $a_k \geqslant 1$, т.е. общий член ряда $\sum a_k$ не стремится к нулю и ряд расходится.

Теорема доказана.

Достаточное условие сходимости ряда $\sum a_k$ из теоремы 15.2.7 можно записать с помощью верхнего предела

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1.$$

Справедлив также признак Коши в предельной форме.

Теорема 15.2.8 (Признак Коши). *Пусть $a_k \geqslant 0$ и существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда ряд $\sum a_k$ сходится, если $q < 1$, расходится, если $q > 1$, а при $q = 1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

При $q < 1$ и $q > 1$ эти утверждения следуют из теоремы 15.2.7, а в случае $q = 1$ можно вновь сослаться на ряды (15.1.4) и (15.1.5), для которых

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1.$$

В обоих вариантах и признака Даламбера и признака Коши ряд сравнивается с геометрической прогрессией. Таким образом, эти признаки пригодны для доказательства сходимости только тех рядов, члены которых убывают быстрее членов некоторой сходящейся к нулю геометрической прогрессии. Но когда эти признаки применимы, они обычно позволяют сравнительно просто установить сходимость ряда.

Признаки Даламбера и Коши, как признаки расходимости, означают, что общий член ряда не стремится к нулю, поэтому их значение как признаков расходимости невелико.

Покажем, что признак Коши сильнее признака Даламбера, т.е. если сходимость некоторого ряда можно доказать с помощью признака Даламбера, то ее можно установить и с помощью признака Коши, а обратное утверждение неверно.

Будем считать числа a_k при всех k положительными, чтобы можно было говорить об обоих этих признаках.

Если сходимость ряда $\sum a_k$ можно доказать с помощью признака Даламбера, т.е. для k, начиная с некоторого k_0, выполняется неравенство (15.2.3), то при $n > k_0$

$$\prod_{k=k_0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_{k_0}} \leqslant q^{n-k_0}.$$

Таким образом, положив $c := a_{k_0} q^{-k_0}$, получим, что при $n > k_0$

$$a_n \leqslant cq^n,$$

и значит,

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{c}\, q. \tag{15.2.7}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

из (15.2.7) следует, что для $q_1 \in (q, 1)$ при всех достаточно больших k справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_1,$$

т.е. выполнено условие 1° признака Коши из теоремы 15.2.7.

С другой стороны, если

$$b_k := \begin{cases} 2^{-k} & \text{при нечетных } k, \\ 3^{-k} & \text{при четных } k, \end{cases}$$

то корень $\sqrt[k]{b_k}$ при каждом k равен либо $1/2$, либо $1/3$ и, значит, $\sqrt[k]{b_k} \leqslant 1/2$.

Таким образом, согласно признаку Коши ряд $\sum b_k$ сходится. В то же время, если k четно, то

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = +\infty$$

и установить сходимость ряда $\sum b_k$ с помощью признака Даламбера нельзя.

§ 15.3. Ряды с монотонными членами

Рассмотрим ряды $\sum a_k$, члены которых положительны и монотонно убывают, т.е. $a_k \geqslant a_{k+1}$. В таком случае пишут $a_k \downarrow$, при этом если последовательность $\{a_k\}$ сходится к a, пишут $a_k \downarrow a$. Аналогично, запись $a_k \uparrow$ означает монотонное возрастание последовательности $\{a_k\}$.

Будем считать, что оценки $a_k \geqslant a_{k+1} > 0$ выполняется для всех k, хотя при изучении сходимости рядов можно иметь в виду только достаточно большие k.

Теорема 15.3.1 (Интегральный признак сходимости). *Если функция $f(x)$ на $[1, +\infty)$ положительна и монотонно убывает, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

и интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. В силу монотонного убывания f справедливы неравенства

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1).$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k). \tag{15.3.1}$$

Поэтому ограниченность последовательности сумм $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ равносильна ограниченности последовательности интегралов $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$. Так как значения $f(x)$ положительны, из (15.3.1) в силу теоремы 15.2.1 и аналогичного свойства несобственных интегралов следует теорема 15.3.1.

Неравенства (15.3.1) имеют простой геометрический смысл. Интеграл

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

равен площади криволинейной трапеции с основанием $[1, n+1]$, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$.

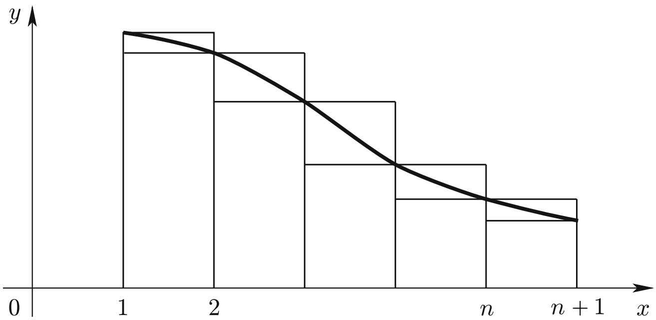

Рис. 15.1.

Сумма из левой части неравенства (15.3.1) равна сумме площадей прямоугольников (см. рисунок), покрывающих криволинейную трапецию. А сумма из правой части (15.3.1) равна сумме площадей прямоугольников, содержащихся в этой трапеции.

Применим интегральный признак к исследованию сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \tag{15.3.2}$$

при положительных значениях r.

Согласно теореме 15.3.1 ряд (15.3.2) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx. \tag{15.3.3}$$

При $r = 1$ этот интеграл расходится, так как

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

где C – некоторая постоянная. Это дает новое доказательство расходимости гармонического ряда.

Из неравенств (15.3.1) можно получить оценку скорости возрастания частных сумм гармонического ряда. Согласно (15.3.1) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \geqslant \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n+1) + O(1) = \ln n + O(1). \tag{15.3.4}$$

Если $r \neq 1$, то при $x > 0$

$$\int \frac{1}{x^r}\,dx = \frac{x^{1-r}}{1-r} + C.$$

Поэтому ряд (15.3.2) как и интеграл (15.3.3) сходится при $r > 1$ и расходится при $r < 1$.

Рассмотрим теперь ряды

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln^r k}, \qquad r > 0. \tag{15.3.5}$$

Они сходятся или расходятся одновременно с интегралом

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^r x}\,dx.$$

Пусть $x \geqslant 2$. Если $r = 1$, то

$$\int \frac{1}{x \ln^r x}\,dx = \ln\ln x + C,$$

поэтому и интеграл и ряд расходятся. А если $r \neq 1$, то

$$\int \frac{1}{x \ln^r x}\,dx = \frac{\ln^{1-r} x}{1-r} + C.$$

Значит, ряд (15.3.5) сходится при $r > 1$ и расходится при $r < 1$.

Сравнение частных сумм ряда $\sum f(k)$ с интегралом $\int f(x)\,dx$, использованное при доказательстве теоремы 15.3.1, бывает полезным и в других вопросах.

Получим, например, оценку скорости роста $n!$. Ясно, что при $n \to \infty$ числа $n!$ растут очень быстро, но не быстрее n^n.

Воспользуемся тем, что

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k,$$

и оценим полученную сумму через интеграл. Функция $\ln x$ возрастает и при $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < \int_1^n \ln x\,dx < \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = \int_1^n \ln x\,dx + \alpha_n,$$

где $0 < \alpha_n < \ln n$. Так как

$$\int_1^n \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1,$$

то

$$n! = e^{n\ln n - n + 1 + \alpha_n} = e^{\ln n^n} e^{-n} e^{1+\alpha_n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1+\alpha_n}.$$

Из неравенств $0 < \alpha_n < \ln n$ следует, что

$$1 < e^{\alpha_n} < e^{\ln n} = n.$$

Положим $r_n := e^{1+\alpha_n}$, тогда

$$e < r_n < en. \tag{15.3.6}$$

Таким образом,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n r_n, \tag{15.3.7}$$

где для множителя r_n справедливы оценки (15.3.6).

В § 17.4 будет установлено, что при $n \to \infty$

$$r_n = \sqrt{2\pi n} + O(1),$$

но это потребует тонких рассуждений, а неравенства (15.3.6) были получены с помощью совсем простых соображений.

Продолжим изучение сходимости рядов с монотонными членами.

Теорему 15.3.1 можно уточнить следующим образом.

Теорема 15.3.2. *Пусть функция $f(x)$ на $[1, +\infty)$ положительна и монотонно убывает. Тогда числа*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{15.3.8}$$

неотрицательны, с ростом n монотонно возрастают и ограничены числом $f(1)$. При этом, если

$$\alpha := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx\right), \tag{15.3.9}$$

то справедливы оценки

$$0 \leqslant \alpha - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx\right) \leqslant f(n+1). \tag{15.3.10}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx.$$

Функции под знаком интегралов в правой части этого равенства в силу убывания $f(x)$ неотрицательны. Значит, суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx$$

неотрицательны и с ростом n возрастают. Они ограничены числом $f(1)$, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} [f(k) - f(k+1)]\,dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [f(k) - f(k+1)] = f(1) - f(n+1) < f(1).$$

Левое неравенство (15.3.10) вытекает из возрастания чисел (15.3.8). А правое неравенство следует из того, что

$$\alpha - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx\right) = \\ = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{m} f(k) - \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx\right),$$

так как при $m > n$ имеем

$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) - \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx = \\ = \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)]\,dx \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} [f(k) - f(k+1)] = f(n+1) - f(m+1) < f(n+1).$$

Теорема доказана.

Для гармонического ряда значение предела (15.3.9)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx\right)$$

называют *постоянной Эйлера* и часто обозначают γ.

После чисел π и e постоянная Эйлера является, пожалуй, наиболее важной математической константой. Десятичное представление числа γ имеет вид

$$\gamma = 0,5772\ldots.$$

Таким образом,

$$\ln(n+1) + \gamma - \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1) + \gamma. \tag{15.3.11}$$

Неравенства (15.3.11) уточняют оценку (15.3.4).

Отметим кстати, что до сих пор не известно, является постоянная Эйлера рациональным или иррациональным числом.

Теорема 15.3.3. *Если числа a_k монотонно убывают и ряд $\sum a_k$ сходится, то $ka_k \to 0$ при $k \to \infty$, т.е.*

$$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right), \qquad k \to \infty. \tag{15.3.12}$$

Доказательство. Для положительного ε найдем N такое, что при всех m и n, удовлетворяющих условию $n \geqslant m > N$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда для любого числа n, такого, что $[n/2] > N$, имеем

$$\sum_{k=[n/2]+1}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

В силу монотонности чисел a_k

$$\sum_{k=[n/2]+1}^{n} a_k \geqslant a_n(n-[n/2]) \geqslant a_n\frac{n}{2}\,.$$

Таким образом, $na_n < \varepsilon$, что приводит к оценке (15.3.12).

Теорема доказана.

Оценка (15.3.12) дает необходимое условие сходимости ряда $\sum a_k$ с монотонно убывающими членами, когда $ka_k \to 0$, но это условие не является достаточным, что видно на примере расходящегося ряда

$$\sum \frac{1}{k\ln k}\,.$$

Теорема 15.3.4 (Теорема Коши). *Если числа a_k монотонно убывают к нулю, то ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{15.3.13}$$

и

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m} \tag{15.3.14}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – монотонно убывающая на $[1,+\infty)$ функция, удовлетворяющая условию $f(k) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Согласно теореме 15.3.1 сходимость ряда (15.3.13) эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{15.3.15}$$

Если интеграл (15.3.15) сходится, то

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{m-1}}^{2^m} f(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int_{2^{m-1}}^{2^m} f(2^m)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} f(2^m)$$

и, следовательно, сходится ряд (15.3.14).

А если сходится ряд (15.3.14), то для каждого n

$$\int_1^{2^{n+1}} f(x)\,dx = \sum_{m=0}^{n} \int_{2^m}^{2^{m+1}} f(x)\,dx \leqslant \sum_{m=0}^{n} 2^m f(2^m) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}.$$

Итак, последовательность интегралов

$$\int_1^{2^{n+1}} f(x)\,dx$$

ограничена. В силу неотрицательности функции $f(x)$ отсюда следует сходимость интеграла (15.3.15), а значит, и сходимость ряда (15.3.13).

Теорема доказана.

Следующая теорема относится к рядам со знакочередующимися членами, т.е. члены ряда попеременно положительны и отрицательны.

Теорема 15.3.5 (Признак Лейбница). *Пусть числа a_k положительны и монотонно убывают. Тогда ряд*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \tag{15.3.16}$$

сходится, если

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{15.3.17}$$

Если ряд (15.3.16) *сходится, то для его суммы справедливы оценки*

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k < a_1. \tag{15.3.18}$$

Доказательство. Для частных сумм ряда (15.3.16) с четными номерами имеем

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Значит, последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастает.

Вместе с тем,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

Таким образом, последовательность $\{S_{2n}\}$ сходится к некоторому числу S и $0 < S < a_1$, так как в силу (15.3.17) все разности $a_{2n-2} - a_{2n-1}$ не могут равняться нулю.

Для частных сумм ряда (15.3.16) с нечетными номерами имеем

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S, \qquad n \to \infty.$$

Поэтому ряд (15.3.16) сходится к S.

Теорема доказана.

Из неравенств (15.3.18) вытекает следующая оценка остатка ряда (15.3.16), если этот ряд сходится:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \right| < a_n \qquad \text{для любого} \;\; n,$$

поскольку ряд $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ с точностью до знака удовлетворяет условиям теоремы 15.3.5.

§ 15.4. Более тонкие признаки сходимости

Признак Даламбера не дает ответ на вопрос о сходимости ряда $\sum a_k$, если
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1.$$
Приведем некоторые признаки, относящиеся к этому случаю.

Теорема 15.4.1 (Признак Раабе). *Пусть* $\sum a_k$ *– ряд с положительными членами.*

1°. *Если существует такое число* $p > 1$, *что для достаточно больших* k
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant 1 - \frac{p}{k}, \tag{15.4.1}$$
то ряд $\sum a_k$ *сходится.*

2°. *Если для достаточно больших* k
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 - \frac{1}{k}, \tag{15.4.2}$$
то ряд $\sum a_k$ *расходится.*

Доказательство. 1°. Положим $b_k := k^{-r}$, где r такое число, что $1 < r < p$. Тогда ряд $\sum b_k$ сходится.

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-r} = 1 - \frac{r}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right), \qquad k \to \infty.$$
Так как $r < p$, отсюда для достаточно больших k имеем
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} > 1 - \frac{p}{k}.$$
Из этого неравенства и (15.4.1) следует, что
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$
Поэтому согласно теореме 15.2.4 из сходимости ряда $\sum b_k$ вытекает сходимость ряда $\sum a_k$.

2°. Из (15.4.2) следует, что для достаточно больших k
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \frac{k-1}{k} = \frac{1/k}{1/(k-1)}.$$

Теперь сравниваем ряд $\sum a_k$ с гармоническим рядом и, пользуясь теоремой 15.2.4, получаем расходимость ряда $\sum a_k$.

Теорема доказана.

В предельной форме признак Раабе формулируется так.

Теорема 15.4.2 (Признак Раабе). *Если для ряда $\sum a_k$ с положительными членами существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=p, \tag{15.4.3}$$

то при $p>1$ ряд $\sum a_k$ сходится, а при $p<1$ расходится. При $p=1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если в (15.4.3) $p>1$, возьмем $r\in(1,p)$. Тогда для достаточно больших k справедливо неравенство

$$k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)>r,$$

откуда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}<1-\frac{r}{k}$$

и согласно теореме 15.4.1 ряд $\sum a_k$ сходится.

Если $p<1$, то для достаточно больших k выполняется неравенство (15.4.2).

Значит, при $p\neq 1$ утверждения теоремы 15.4.2 вытекают из теоремы 15.4.1.

При $p=1$ ряд может быть и сходящимся и расходящимся. Так, для гармонического ряда, когда $a_k=1/k$, имеем $p=1$, поскольку

$$k\left(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=k\left(1-\frac{k}{k+1}\right)=\frac{k}{k+1}\,.$$

С другой стороны, для сходящегося ряда

$$\sum \frac{1}{k\ln^2 k} \tag{15.4.4}$$

также $p=1$. Действительно, при $k\to\infty$

$$\ln k=\ln(k+1)+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Поэтому
$$\ln^2 k = \ln^2(k+1) + O\left(\frac{\ln(k+1)}{k}\right)$$
и
$$k\left(1 - \frac{k\ln^2 k}{(k+1)\ln^2(k+1)}\right) = k\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + O\left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right). \tag{15.4.5}$$

Признак Раабе сильнее признака Даламбера. В самом деле, из (15.2.3) следует выполнение условия (15.4.1) при некотором $p > 1$. Вместе с тем, признак Раабе в отличие от признака Даламбера позволяет установить сходимость рядов $\sum k^{-r}$ при $r > 1$.

С признаком Коши признак Раабе несравним, так как существуют ряды, сходимость которых с помощью одного из этих признаков установить можно, а с помощью другого нельзя.

В самом деле, признак Коши неприменим к рядам $\sum k^{-r}$, $r > 1$. А в § 15.2 был приведен ряд, сходимость которого доказывает признак Коши, но ее нельзя установить с помощью признака Даламбера, а следовательно, и с помощью признака Раабе.

Следующий признак представляет собой добавление к признакам Даламбера и Раабе.

Теорема 15.4.3 (Признак Гаусса). *Пусть для ряда $\sum a_k$ с положительными членами дробь a_{k+1}/a_k представима в виде*
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \alpha - \frac{\beta}{k} + \gamma_k,$$
где α и β – некоторые числа и
$$\gamma_k = o\left(\frac{1}{k\ln k}\right), \qquad k \to \infty. \tag{15.4.6}$$

Тогда ряд $\sum a_k$

1°) *сходится, если $\alpha < 1$ или $\alpha = 1$, $\beta > 1$;*

2°) *расходится, если $\alpha > 1$ или $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$.*

Доказательство. Эти утверждения при $\alpha \neq 1$ вытекают из признака Даламбера, а при $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ – из признака Раабе.

Таким образом, остается доказать расходимость ряда $\sum a_k$ в случае, когда $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, т.е. когда
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{1}{k} + \gamma_k.$$

Введем числа

$$b_k := \frac{1}{(k-1)\ln k}, \qquad k = 2, 3, \ldots .$$

Ряд $\sum b_k$ расходится и, чтобы воспользоваться теоремой 15.2.4, покажем, что при достаточно больших k

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k}. \tag{15.4.7}$$

Так как

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k-1)\ln k}{k\ln(k+1)} = \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln(k+1)}$$

и

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

то

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k\ln(k+1)} + O\left(\frac{1}{k^2\ln(k+1)}\right).$$

Поэтому в силу (15.4.6) оценка (15.4.7) справедлива для достаточно больших k и согласно теореме 15.2.4 ряд $\sum a_k$ расходится.

Теорема доказана.

Заметим, что в (15.4.6) o-малое нельзя заменить на O-большое. В самом деле, для сходящегося ряда (15.4.4) имеем, см. (15.4.5),

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} + O\left(\frac{1}{k\ln k}\right) = 1 - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k\ln k}\right), \qquad k \to \infty.$$

Теорема 15.4.4 (Признак Куммера). *Если члены ряда $\sum a_k$ положительны и существует последовательность положительных чисел $\{b_k\}$ такая, что при некотором $c > 0$ для достаточно больших k*

$$a_k \leqslant c\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right), \tag{15.4.8}$$

то ряд $\sum a_k$ сходится.

Доказательство. Сложив оценки (15.4.8) при $k = 1, 2, \ldots, n$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant c\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = c\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) < c\,\frac{a_1}{b_1}.$$

Таким образом, последовательность частных сумм ряда $\sum a_k$ с положительными членами ограничена. Значит, этот ряд сходится и теорема доказана.

Хотя в признаке Куммера b_k – произвольные положительные числа, при использовании этого признака имеет смысл брать только те последовательности $\{b_k\}$, для которых расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{15.4.9}$$

В самом деле, если выполнено условие (15.4.8). то

$$\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} > 0, \tag{15.4.10}$$

откуда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{b_{k+1}}{b_k}\,.$$

Поэтому, если ряд (15.4.9), сходится, то сходимость ряда $\sum a_k$ вытекает из теоремы 15.2.4.

Вместе с тем, условие (15.4.10) менее ограничительно, чем (15.4.8). Но при замене (15.4.8) в теореме 15.4.4 на (15.4.10) нельзя получить результат лучший, чем теорема 15.2.4.

Признак Куммера представляет собой целую серию признаков, получающихся при разном выборе последовательности $\{b_k\}$.

Покажем, например, как с помощью признака Куммера можно получить признак Раабе.

Положим $b_k := 1/(k-1)$, $k \geqslant 2$. Если выполнена оценка (15.4.1), то

$$\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = (k-1)a_k - ka_{k+1} \geqslant$$
$$\geqslant (k-1)a_k - k\left(1 - \frac{p}{k}\right)a_k = (p-1)a_k.$$

Поэтому при $p > 1$ выполняется оценка (15.4.8) и, значит, ряд $\sum a_k$ сходится.

Рассмотрим вопросы о скорости сходимости рядов.

Если у одного из двух сходящихся рядов остатки при $n \to \infty$ стремятся к нулю быстрее остатков второго, то говорят, что первый ряд сходится быстрее, чем второй.

В признаках Даламбера и Коши ряд сравнивался с геометрической прогрессией, в признаке Раабе – с рядами $\sum k^{-r}$, которые сходятся при $r > 1$, причем, как нетрудно убедиться, тем медленнее, чем меньше число r. Такие ряды сходятся медленнее рядов из членов произвольной геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1.

Можно брать другие более медленно сходящиеся ряды и сравнивать с ними исследуемый ряд, получая новые признаки сходимости. Однако, условия в этих признаках будут громоздкими и более трудно проверяемыми.

Из следующей теоремы вытекает, что не существует универсального признака сравнения, который был бы пригоден для исследования сходимости любого ряда с неотрицательными членами.

Теорема 15.4.5. *Для каждого сходящегося ряда с неотрицательными членами, среди которых бесконечно много ненулевых, существует ряд, сходящийся более медленно.*

Действительно, если $a_k \geqslant 0$ и ряд $\sum a_k$, сходится, то остатки этого ряда

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{15.4.11}$$

монотонно убывают к нулю.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{R_k} - \sqrt{R_{k+1}}\,).$$

Этот ряд сходится, члены его неотрицательны и остатки равны $\sqrt{R_{n+1}}$. Таким образом, ряд $\sum(\sqrt{R_k} - \sqrt{R_{k+1}}\,)$ сходится медленнее, чем $\sum a_k$.

Рассмотрим признаки сходимости рядов $\sum u_k v_k$, члены которых представлены в виде произведения $u_k v_k$, а условия накладываются на последовательности $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ по отдельности.

Сначала получим удобное представление суммы $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$. Положим

$$V_k := \sum_{j=1}^{k} v_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда $v_k = V_k - V_{k-1}$ и

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 V_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k V_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} V_k = \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n. \tag{15.4.12}$$

Таким образом, справедливо тождество

$$\sum_{k=2}^{n} u_k (V_k - V_{k-1}) \equiv u_n V_n - u_1 V_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k. \tag{15.4.13}$$

Тождество (15.4.13) напоминает формулу интегрирования по частям для определенных интегралов

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dg(x) = f(x)g(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, df(x). \tag{15.4.14}$$

Разности в (15.4.13) соответствуют дифференциалам в (15.4.14), а суммы – интегралам. Поэтому тождество (15.4.13) иногда называют “формулой суммирования по частям”.

Если в (15.4.12) положить числа v_k при всех $k < p$ равными нулю, то получим

$$\sum_{k=p}^{n} u_k v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n, \qquad p = 1, 2, \ldots, n, \tag{15.4.15}$$

где

$$V_k := \sum_{j=p}^{k} v_j, \qquad k = p, \ldots, n. \tag{15.4.16}$$

Преобразование, с помощью которого были получены тождества (15.4.12) и (15.4.13) называют *преобразованием Абеля.*

Лемма 15.4.6 (Лемма Абеля). *Пусть числа a_k, $k = p, \ldots, n$, действительны и монотонны (т.е. при всех k или $a_k \geqslant a_{k+1}$ или $a_k \leqslant a_{k+1}$). Если числа V_k для, вообще говоря, комплексных v_k заданы формулой (15.4.16) и $|V_k| \leqslant B$ при всех $k = p, \ldots, n$, то справедлива оценка*

$$\left| \sum_{k=p}^{n} a_k v_k \right| \leqslant 2B(|a_p| + |a_n|). \tag{15.4.17}$$

Доказательство. Из (15.4.15) следует, что

$$\left|\sum_{k=p}^{n} a_k v_k\right| \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}||V_k| + |a_n||V_n| \leqslant$$
$$\leqslant B\left(\sum_{k=p}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right).$$

Отсюда, пользуясь монотонностью чисел a_k, находим

$$\left|\sum_{k=p}^{n} a_k v_k\right| \leqslant B\left(\left|\sum_{k=p}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\right| + |a_n|\right) =$$
$$= B(|a_p - a_n| + |a_n|) \leqslant 2B(|a_p| + |a_n|).$$

Лемма доказана.

Теорема 15.4.7 (Признак Дирихле). *Если действительные числа a_k монотонно стремятся к нулю, а последовательность частных сумм ряда $\sum v_k$, где v_k могут быть комплексными, ограничена, то ряд $\sum a_k v_k$ сходится.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности частных сумм ряда $\sum v_k$ для некоторого числа B при всех m

$$\left|\sum_{k=1}^{m} v_k\right| < B.$$

Значит, для любых чисел p и m, таких, что $p \leqslant m$,

$$\left|\sum_{k=p}^{m} v_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} v_k - \sum_{k=1}^{p-1} v_k\right| < 2B.$$

Пользуясь леммой Абеля, получаем для $m \geqslant p$

$$\left|\sum_{k=p}^{m} a_k v_k\right| \leqslant 4B(|a_p| + |a_m|).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при всех $k > N$ справедлива оценка

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{8B}\,.$$

Поэтому для $m \geqslant p > N$ имеем

$$\left|\sum_{k=p}^{m} a_k v_k\right| < 4B \cdot \frac{2\varepsilon}{8B} = \varepsilon,$$

что согласно критерию Коши обеспечивает сходимость ряда $\sum a_k v_k$.

Теорема доказана.

Получим с помощью признака Дирихле новое доказательство признака Лейбница (теорема 15.3.5).

Если $b_k := (-1)^k$, то последовательность частных сумм ряда $\sum b_k$ ограничена и

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

Поэтому, если числа a_k монотонно стремятся к нулю, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k$ в силу признака Дирихле сходится.

Теорема 15.4.8 (Признак Абеля). *Ряд $\sum a_k v_k$ сходится, если сходится ряд $\sum v_k$, а действительные числа a_k монотонны и ограничены.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha := \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Тогда числа $\alpha_k := a_k - \alpha$ монотонно стремятся к нулю. Так как последовательность частных сумм ряда $\sum v_k$ ограничена, то согласно признаку Дирихле сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \alpha) v_k.$$

Отсюда в силу сходимости ряда $\sum \alpha v_k$ следует утверждение теоремы.

Таким образом, если члены сходящегося ряда умножить на члены произвольной монотонной ограниченной последовательности, то полученный ряд будет сходиться.

Сравним условия признаков Дирихле и Абеля. В признаке Дирихле условия на монотонную последовательность несколько больше, чем в признаке Абеля (требовалось стремление к нулю, а в признаке Абеля только ограниченность). Но в признаке Дирихле более слабые условия на числа v_k: не сходимость ряда $\sum v_k$, а только ограниченность последовательности его частных сумм.

§ 15.5. Абсолютно сходящиеся ряды

Определение. Ряд $\sum u_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |u_k|$.

Абсолютно сходящиеся ряды сходятся согласно теореме 15.2.2.

Но сходящийся ряд может не сходиться абсолютно. Например, согласно признаку Лейбница ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

сходится, но этот ряд не сходится абсолютно.

Заметим, что признаки сходимости рядов с неотрицательными членами являются фактически признаками абсолютной сходимости.

Теорема 15.5.1. *Если ряды $\sum u_k$ и $\sum v_k$ с комплексными членами сходятся абсолютно, α и β – произвольные комплексные числа, то ряд $\sum(\alpha u_k + \beta v_k)$ сходится абсолютно.*

Утверждение вытекает из критерия Коши. Нужно воспользоваться оценкой

$$\sum_{k=m}^{n} |\alpha u_k + \beta v_k| \leqslant |\alpha| \sum_{k=m}^{n} |u_k| + |\beta| \sum_{k=m}^{n} |v_k|.$$

Теорема 15.5.2 (Неравенство Гёльдера). *Пусть $p > 1$, q – сопряженное с p число, т.е.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

и сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q. \tag{15.5.1}$$

Тогда ряд $\sum u_k v_k$ *абсолютно сходится и справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q\right)^{1/q}, \tag{15.5.2}$$

которое называют неравенством Гёльдера.

Доказательство. Согласно неравенству Гёльдера для конечных сумм (теорема 6.8.2)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k v_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k v_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}. \tag{15.5.3}$$

Заменив правую часть неравенства (15.5.3) на правую часть неравенства (15.5.2), получим ограниченность частных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k|,$$

а в пределе при $n \to \infty$ и неравенство (15.5.2).

Теорема доказана.

Неравенство (15.5.2) при $p = 2$ называют неравенством Коши–Буняковского.

Теорема 15.5.3 (Неравенство Минковского). *Пусть* $p > 1$ *и сходятся ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p.$$

Тогда сходится ряд $\sum |u_k + v_k|^p$ *и справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p\right)^{1/p}, \tag{15.5.4}$$

его называют неравенством Минковского (неравенством треугольника).

Неравенство (15.5.4), подобно неравенству Гёльдера, выводится из неравенства Минковского для конечных сумм (теорема 6.8.4)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k + v_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^p\right)^{1/p}.$$

Неравенства Гёльдера и Минковского дают признаки абсолютной сходимости рядов.

На абсолютно сходящиеся ряды можно перенести некоторые свойства конечных сумм.

Сначала рассмотрим перестановки членов ряда.

Определение. Ряд $\sum u_k^*$ называют *перестановкой* ряда $\sum u_k$, если он составлен из тех же членов, но расположенных в другом порядке.

Говорят, что ряд $\sum u_k^*$ получен из ряда $\sum u_k$ перестановкой его членов.

Перестановку ряда можно задать так. Все натуральные числа запишем без повторений в виде последовательности $n_1, n_2, \ldots$ и положим $u_p^* := u_{n_p}$. Тогда ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} u_p^* = \sum_{p=1}^{\infty} u_{n_p}$$

является перестановкой ряда $\sum u_p$.

Теорема 15.5.4. *Если ряд сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится абсолютно. При этом суммы исходного и переставленного рядов равны.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно и $\sum u_j^*$ – некоторая его перестановка.

Так как каждое число $|u_j^*|$ является членом ряда $\sum |u_k|$, то для частных сумм ряда $\sum |u_j^*|$ справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j^*| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|.$$

Значит, ряд $\sum |u_j^*|$ абсолютно сходится.

Докажем равенство сумм исходного и переставленного рядов.

Введем обозначения

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad S_n^* := \sum_{j=1}^{n} u_j^*.$$

Для положительного ε выберем такое натуральное N, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда
$$|S - S_N| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем теперь такое M, что члены исходного ряда $u_1, u_2, \ldots, u_N$ содержатся среди $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_M^*$. Тогда для всех $m > M$ имеем
$$|S_m^* - S_N| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$
и значит,
$$|S - S_m^*| = |(S - S_N) + (S_N - S_m^*)| \leqslant |S - S_N| + |S_N - S_m^*| < \varepsilon.$$
Поэтому
$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = S.$$

Теорема доказана.

Покажем, что умножение абсолютно сходящихся рядов можно производить так же, как умножение конечных сумм, когда каждый член первой суммы умножают на каждый член второй и затем складывают полученные произведения.

Теорема 15.5.5. *Пусть ряды* $\sum u_k$ *и* $\sum v_m$ *абсолютно сходятся. Составим всевозможные произведения* $u_k v_m$, $k = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, *и запишем их все без повторений в виде последовательности* $w_1, w_2, \ldots$.

Тогда ряд $\sum w_j$ *абсолютно сходится и справедливо равенство*
$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty} v_m. \tag{15.5.5}$$

Доказательство. Произведение
$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \cdot \sum_{m=1}^{n} |v_m|$$
можно записать как сумму
$$\sum_{j=1}^{n^2} |w_j^*|,$$

где ряд $\sum w_j^*$ является перестановкой ряда $\sum w_j$, которую получим, складывая по квадратам элементы бесконечной матрицы

$$\begin{array}{cccc} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \ldots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \ldots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n^2} |w_j^*| = \sum_{k=1}^{n} |u_k| \cdot \sum_{m=1}^{n} |v_m| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \cdot \sum_{m=1}^{\infty} |v_m| < \infty.$$

Значит, сходится ряд $\sum |w_j^*|$, откуда согласно теореме 15.5.4 следует абсолютная сходимость ряда $\sum w_j$.

Чтобы доказать (15.5.5), перейдем в равенстве

$$\sum_{j=1}^{n^2} w_j^* = \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \sum_{m=1}^{n} v_m$$

к пределу при $n \to \infty$. Получим сходимость подпоследовательности частных сумм ряда $\sum w_j^*$ с номерами n^2 к числу из правой части (15.5.5). Так как ряд $\sum w_j^*$ сходится, то последовательность всех его частных сумм сходится к тому же числу, т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty} v_m. \tag{15.5.6}$$

Согласно теореме 15.5.4 сумма абсолютно сходящегося ряда сохраняется при перестановке его членов, поэтому из (15.5.6) следует (15.5.5).

Теорема доказана.

Следующая теорема также относится к умножению рядов, но только один из них предполагается сходящимся абсолютно.

Теорема 15.5.6 (Теорема Мертенса). *Пусть ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

сходятся, причем первый из них сходится абсолютно. Положим

$$y_p := \sum_{j=1}^{p} u_j v_{p+1-j}, \qquad p = 1, 2, \ldots .$$

Тогда ряд $\sum y_p$ *сходится и справедливо равенство*

$$\sum_{p=1}^{\infty} y_p = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty} v_m. \tag{15.5.7}$$

Доказательство. Положим

$$U := \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad U_n := \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad V := \sum_{m=1}^{\infty} v_m, \qquad V_n := \sum_{m=1}^{n} v_m.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|UV - \sum_{p=1}^{n} y_p\right| &= \left|(U - U_n)V + U_n V - \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_j v_{p+1-j}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant |U - U_n||V| + \left|\sum_{j=1}^{n} u_j V - \sum_{j=1}^{n} u_j \left(\sum_{p=j}^{n} v_{p+1-j}\right)\right| = \\ &= |U - U_n||V| + \left|\sum_{j=1}^{n} u_j \left(V - V_{n+1-j}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant |U - U_n||V| + \sum_{j=1}^{n} |u_j||V - V_{n+1-j}|.\end{aligned} \tag{15.5.8}$$

Задав произвольное $\varepsilon > 0$, выберем натуральное N так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j| < \varepsilon \tag{15.5.9}$$

и для всех $q > N$

$$|V - V_q| < \varepsilon. \tag{15.5.10}$$

Тогда при $n > N$

$$|U - U_n| < \varepsilon.$$

Запишем для $n > 2N$ равенство

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j||V - V_{n+1-j}| =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} |u_j||V - V_{n+1-j}| + \sum_{j=N+1}^{n} |u_j||V - V_{n+1-j}|.$$

Если $j \leqslant N$, то

$$n + 1 - j \geqslant n + 1 - N > 2N + 1 - N = N + 1.$$

Значит, для таких j согласно (15.5.10) имеем $|V - V_{n+1-j}| < \varepsilon$.

Так как V_q – частные суммы сходящегося ряда, то существует такое число L, что $|V_q| \leqslant L$ при всех q, а значит, и $|V| \leqslant L$. Поэтому из (15.5.8) для $n > 2N$ получаем

$$\left|UV - \sum_{p=1}^{n} y_p\right| \leqslant \varepsilon|V| + \sum_{j=1}^{N} |u_j|\varepsilon + \sum_{j=N+1}^{n} |u_j| 2L \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon|V| + \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|\varepsilon + \varepsilon 2L \leqslant \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| + 3L\right).$$

Отсюда вытекает равенство (15.5.7), так как множитель при ε от n не зависит.

Теорема доказана.

В теореме Мертенса в отличие от теоремы 15.5.5 требования на ряды меньше (предполагается абсолютная сходимость только одного ряда), но и утверждение более слабое: сходимость, а не абсолютная сходимость ряда из произведений, при этом ряд из произведений определяются специальным способом – сначала строятся числа y_p, а затем берется ряд из y_p.

Ряд $\sum y_p$ называют *произведением по Коши* рядов $\sum u_k$ и $\sum v_k$.

Заметим, что произведения по Коши естественно возникают при умножении рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k, \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m x^m. \tag{15.5.11}$$

В этом случае

$$y_p = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^j \cdot \beta_{p+1-j} x^{p+1-j} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \beta_{p+1-j} x^{p+1},$$

т.е. числа y_p соответствуют группировке слагаемых в произведении с одинаковыми степенями x, получающихся при почленном умножении рядов (15.5.11).

§ 15.6. Теорема Римана о перестановках членов ряда

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, его называют сходящимся *условно*. Впрочем, эта терминология используется только в тех случаях, когда противопоставляются сходимость и абсолютная сходимость рядов.

Для простоты будем рассматривать ряды с действительными членами.

Понятно, что условно сходящийся ряд с действительными членами имеет бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов.

Для условно сходящегося ряда $\sum a_k$ введем две последовательности чисел

$$a_k^+ := \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_k < 0, \end{cases}$$

и

$$a_k^- := \begin{cases} 0, & \text{если } a_k \geqslant 0, \\ a_k, & \text{если } a_k < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $a_k = a_k^+ + a_k^-$ и $a_k^+ \geqslant 0$, $a_k^- \leqslant 0$.

При этом оба ряда $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ расходятся. В самом деле, если бы один из них сходился, то в силу сходимости ряда $\sum a_k$ согласно теореме 15.1.3 сходился бы и другой. Но сходимость рядов $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ равносильна их абсолютной сходимости, поэтому должен был бы абсолютно сходиться и ряд $\sum a_k$.

Теорема 15.6.1 (Теорема Римана). *Если ряд $\sum a_k$ с действительными членами сходится условно, то для любого A, $-\infty \leqslant A \leqslant +\infty$, можно так переставить члены ряда $\sum a_k$, что полученный ряд будет сходиться к A.*

Здесь сходимость ряда к $+\infty$ понимается как стремление его частных сумм к $+\infty$. Строго говоря, вместо "ряд сходится к $+\infty$" точнее было бы говорить о расходимости ряда к $+\infty$.

При доказательстве теоремы Римана используются ряды $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$.

Члены ряда $\sum a_k^+$ при k, для которых $a_k < 0$, равны нулю. Исключим их из ряда $\sum a_k^+$ и полученный ряд обозначим $\sum \alpha_j$. Исключим так же из ряда $\sum a_k^-$, равные нулю члены, соответствующие k, для которых $a_k \geqslant 0$. Получившийся ряд обозначим $\sum \beta_j$.

Каждый член исходного ряда $\sum a_k$ является членом одного из рядов $\sum \alpha_j$ или $\sum \beta_j$, а каждый член этих рядов является членом ряда $\sum a_k$.

Поэтому любой ряд, составленный из всех членов рядов $\sum \alpha_j$ и $\sum \beta_j$, когда каждое α_j и каждое β_j взято один раз, является некоторой перестановкой ряда $\sum a_k$ и теорема 15.6.1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 15.6.2. *Пусть ряды $\sum \alpha_j$ и $\sum \gamma_j$ с неотрицательными стремящимися к нулю членами расходятся. Тогда для каждого A, $-\infty \leqslant A \leqslant +\infty$, существуют такие строго возрастающие последовательности натуральных чисел $\{m_p\}$ и $\{n_p\}$, что ряд*

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n_1}&\\ + \alpha_{m_1+1} + \dots + \alpha_{m_2} - \gamma_{n_1+1} - \dots - \gamma_{n_2} + \cdots&\end{aligned} \tag{15.6.1}$$

сходится к A.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда A конечно.

Построим последовательности $\{m_p\}$ и $\{n_p\}$. Пользуясь расходимостью ряда $\sum \alpha_j$, в качестве m_1 возьмем наименьший индекс, для которого

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} > A.$$

Будем теперь вычитать члены ряда $\sum \gamma_j$. Пусть n_1 – наименьший индекс, при котором

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n_1} < A.$$

Такой индекс найдется в силу расходимости ряда $\sum \gamma_j$. При этом для всех k таких, что $1 \leqslant k \leqslant n_1$, частные суммы ряда (15.6.1)

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_k$$

отличаются от A менее, чем на $\max(\alpha_{m_1}, \gamma_{n_1})$.

Теперь будем добавлять со знаком $+$ члены ряда $\sum \alpha_j$ с индексами, бо́льшими m_1, пока впервые не получим число, превосходящее A. Пусть m_2 – наименьший индекс такой, что

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n_1} + \alpha_{m_1+1} + \dots + \alpha_{m_2} > A.$$

При этом отклонения от A сумм вида

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n_1} + \alpha_{m_1+1} + \dots + \alpha_k$$

при $k = m_1 + 1, \dots, m_2$ не превышают $\max(\alpha_{m_2}, \gamma_{n_1})$.

На следующем шаге построения приходим к неравенству

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n_1} + \\ + \alpha_{m_1+1} + \dots + \alpha_{m_2} - \gamma_{n_1+1} - \dots - \gamma_{n_2} < A,$$

где n_2 – наименьший индекс, для которого выполняется это неравенство. Уклонения от A частных сумм ряда (15.6.1)

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n_1} + \\ + \alpha_{m_1+1} + \dots + \alpha_{m_2} - \gamma_{n_1+1} - \dots - \gamma_k$$

при $k = n_1 + 1, \dots, n_2$ не превосходит $\max(\alpha_{m_2}, \gamma_{n_2})$.

Продолжая такое построение, получим нужный ряд, сходимость которого к A следует из стремления чисел α_j и γ_j к нулю.

Заметим, что в этом построении были использованы и притом только по одному разу все члены рядов $\sum \alpha_j$ и $\sum \gamma_j$.

Докажем теперь теорему для бесконечных значений A. Пусть для определенности $A = +\infty$.

Сначала выбираем наименьший индекс m_1, при котором

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} > 1,$$

а затем вычитаем первый член ряда $\sum \gamma_j$. Тогда число

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1$$

может быть меньше 1 не более, чем на γ_1.

Теперь добавляем члены ряда $\sum \alpha_j$ так, чтобы получить оценку

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 + \alpha_{m_1+1} + \dots + \alpha_{m_2} > 2.$$

После этого вычитаем γ_2. При этом

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{m_1} - \gamma_1 + \alpha_{m_1+1} + \cdots + \alpha_{m_2} - \gamma_2$$

может быть меньше 2 не более, чем на γ_2.

Продолжив это построение, получим ряд (15.6.1), частные суммы которого стремятся к $+\infty$, так как при добавлении $-\gamma_s$ они могут быть меньше s не более, чем на γ_s.

Теорема доказана.

Согласно теореме 15.5.4 абсолютная сходимость ряда достаточна, для того чтобы его члены можно было произвольным образом переставлять и полученные при этом ряды сходились бы к той же сумме. Из теоремы Римана следует, что в этом утверждении абсолютная сходимость ряда является не только достаточным, но и необходимым условием.

§ 15.7. Суммирование рядов методом средних арифметических

В некоторых естественно возникающих задачах (одна из таких задач рассматривается в гл. 19) необходимо оперировать не только со сходящимися, но и с расходящимися рядами. Для изучения расходящихся рядов вводится понятие *суммирования* рядов. В настоящем параграфе на примере числовых рядов с действительными членами изучается одно из наиболее простых и часто используемых определений суммирования рядов.

Ради удобства дальнейших приложений будем рассматривать ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \tag{15.7.1}$$

в котором члены нумеруются с нуля. Частные суммы ряда (15.7.1) будем обозначать

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Определение. Ряд (15.7.1) называют *суммирующимся методом средних арифметических* к S, $-\infty \leqslant S \leqslant +\infty$, если последовательность средних арифметических частных сумм этого ряда

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k \tag{15.7.2}$$

имеет предел при $n \to \infty$ и этот предел равен S.

Величину S называют (обобщенной) суммой ряда (15.7.1) в смысле метода средних арифметических.

Выразим величины σ_n через члены ряда (15.7.1):

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_j \right) = \\ = \sum_{j=0}^{n} \frac{n-j+1}{n+1} a_j = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n+1} \right) a_j. \tag{15.7.3}$$

Суммирование рядов методом средних арифметических рассматривали еще в XVIII веке. Но обычно его называют суммированием методом Чезаро первого порядка или методом $(C,1)$, поскольку Э. Чезаро в конце XIX века ввел целую серию методов суммирования, на первом месте в которой стоит суммирование методом средних арифметических.

Для других методов суммирования рассматриваются средние, построенные с помощью частных сумм ряда иначе, чем в (15.7.2).

Можно говорить также о суммировании произвольной последовательности S_n, которая не обязательно является последовательностью частных сумм ряда.

Характерным примером расходящегося ряда, суммируемого методом $(C,1)$, является ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

Этот ряд суммируется методом средних арифметических к числу $1/2$, так как его частные суммы попеременно равны 1 или 0.

Если $\sum a_k$ и $\sum b_k$ суммируются методом $(C,1)$ к A и B соответственно, где A и B не обязательно конечны, и числа α и β таковы, что имеет смысл выражение $\alpha A + \beta B$, то ряд $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$, как легко видеть, суммируется методом $(C,1)$ к $\alpha A + \beta B$. Такое свойство методов суммирования называют *линейностью*.

Теорема 15.7.1. *Если сумма ряда (15.7.1) равна S, где $-\infty \leqslant S \leqslant +\infty$, то этот ряд суммируется методом средних арифметических к S.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда S конечно. Тогда существует такое число L, что $|S_n| \leqslant L$ при всех n и, значит, $|S_n - S| \leqslant 2L$.

В силу сходимости ряда (15.7.1) для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при всех $k > N$ справедлива оценка

$$|S_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $p \geqslant 1$ имеет место оценка

$$|\sigma_{N+p} - S| = \left|\frac{1}{N+p+1}\sum_{k=0}^{N+p} S_k - S\right| = \left|\frac{1}{N+p+1}\sum_{k=0}^{N+p}(S_k - S)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{N+p+1}\sum_{k=0}^{N}|S_k - S| + \frac{1}{N+p+1}\sum_{k=N+1}^{N+p}|S_k - S| <$$
$$< \frac{N+1}{N+p+1}\cdot 2L + \frac{p}{N+p+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < 2L\frac{N+1}{N+p+1} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Найдем теперь такое p_0, что при $p > p_0$

$$2L\frac{N+1}{N+p+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для этих p имеем

$$|\sigma_{N+p} - S| < \varepsilon,$$

т.е. $\sigma_n \to S$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь S бесконечно, для определенности $S = +\infty$. Тогда для каждого числа M существует такое N, что $S_k > M$ при всех $k > N$.

Для $n > N$ имеем

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n} S_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} S_k \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n-N}{n+1}M - \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} S_k\right|.$$

Поэтому для всех достаточно больших n справедлива оценка $\sigma_n > M/2$, т.е. $\sigma_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Метод суммирования называют *регулярным*, если он суммирует все ряды, сходящиеся к конечным пределам, и называют *вполне регулярным*, если он суммирует также и все ряды, сходящиеся к бесконечным пределам. Регулярность метода показывает, что суммирование этим методом согласуется со сходимостью, т.е. сходящиеся ряды суммируются к тому же пределу.

Привелем необходимые условия суммируемости рядов методом $(C, 1)$.

Теорема 15.7.2. *Если ряд* (15.7.1) *суммируется методом* $(C, 1)$ *к конечному пределу, то для частных сумм и общего члена ряда справедливы оценки*

$$S_n = o(n), \quad a_n = o(n), \qquad n \to \infty. \tag{15.7.4}$$

Доказательство. Имеем

$$(n+1)\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} S_k,$$

значит,

$$S_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \sigma_n. \tag{15.7.5}$$

В силу суммируемости ряда к конечному пределу $\sigma_n - \sigma_{n-1} \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена, поскольку она имеет конечный предел. Поэтому из (15.7.5) следует, что

$$S_n = o(n), \qquad n \to \infty,$$

т.е. справедлива первая оценка (15.7.4). А так как

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

то справедлива и вторая из этих оценок.

Теорема доказана.

Эту теорему можно рассматривать как некоторый аналог теоремы 15.1.2 о стремлении к нулю общего члена сходящегося ряда.

Покажем, что для рядов, не имеющих членов разных знаков, суммируемость методом средних арифметических равносильна сходимости.

Теорема 15.7.3. *Ряд с неотрицательными членами, суммирующийся методом средних арифметических к S, $0 \leqslant S \leqslant +\infty$, сходится к S.*

Доказательство. Пусть S_n и σ_n – соответственно частные суммы и средние арифметические ряда $\sum a_k$.

Так как $a_k \geqslant 0$, последовательность $\{\sigma_n\}$ возрастает (не обязательно строго). Поэтому если $S < +\infty$, достаточно установить ограниченность последовательности $\{S_n\}$, а равенство суммы ряда S будет вытекать из теоремы 15.7.1.

Из (15.7.3), пользуясь неотрицательностью членов ряда, находим

$$\sigma_{2n} = \sum_{j=0}^{2n}\left(1 - \frac{j}{2n+1}\right)a_j \geqslant \sum_{j=0}^{n}\left(1 - \frac{j}{2n+1}\right)a_j \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=0}^{n}\left(1 - \frac{n}{2n+1}\right)a_j \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} a_j = \frac{1}{2}S_n.$$

Таким образом, $S_n \leqslant 2\sigma_{2n} \leqslant 2S$ при всех n.

Для $S = +\infty$ в силу возрастания чисел S_n имеем

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k \leqslant S_n.$$

Значит, при $n \to +\infty$ из $\sigma_n \to +\infty$ следует, что $S_n \to +\infty$.

Теорема доказана.

Теорема 15.7.3 показывает, что метод средних арифметических может суммировать к конечному пределу только те расходящиеся ряды, которые имеют бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов.

Утверждения, согласно которым из суммируемости ряда вытекает его сходимость, называют *теоремами тауберова типа*. Неотрицательность членов ряда является простейшим тауберовым условием.

§ 15.8. Бесконечные произведения

Ряды являются формально записанными суммами бесконечных последовательностей слагаемых. Рассматриваются также произведения бесконечных последовательностей множителей.

Бесконечным произведением чисел называют формально записанное произведение бесконечной последовательности действительных или комплексных чисел $p_1, p_2, \ldots$

$$p_1 \cdot p_2 \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} p_k. \tag{15.8.1}$$

Чтобы придать смысл записи (15.8.1), по аналогии с частными суммами рядов вводят “частные произведения”

$$P_n := \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Если существует конечный отличный от нуля предел последовательности частных произведений $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, говорят, что бесконечное произведение (15.8.1) *сходится*, число P называют его значением и пишут

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = P.$$

Если конечный предел $\lim P_n$ не существует или существует, но равняется нулю, бесконечное произведение (15.8.1) называют *расходящимся*.

Здесь все аналогично соответствующим определениям для рядов, за исключением расходимости бесконечного произведения к нулю. Пояснение такой терминологии будет дано после теоремы 15.8.2.

Случай, когда хотя бы один множитель бесконечного произведения равен нулю, не интересен. Поэтому будем считать, что все множители бесконечного произведения отличны от нуля, не оговаривая это явно.

Как и для рядов, сходимость или расходимость бесконечных произведений не зависит от конечного числа множителей. Нумеровать множители можно, начиная с любого числа, а не только с $k = 1$, как это сделано выше.

Теорема 15.8.1. *Если бесконечное произведение (15.8.1) сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1. \tag{15.8.2}$$

Доказательство. Имеем

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k \Big/ \prod_{k=1}^{n-1} p_k.$$

В этом выражении и делимое и делитель имеют конечный неравный нулю предел P. Значит, предел дроби равен отношению пределов делимого и делителя, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{P}{P} = 1$$

и теорема доказана.

Будем далее до конца этого параграфа считать, что все множители p_k бесконечного произведения (15.8.1) являются действительными числами.

Из теоремы 15.8.1 следует, что все множители p_k сходящегося бесконечного произведения положительны, начиная с некоторого номера.

Теорема 15.8.2. *Бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k, \tag{15.8.3}$$

в котором все множители p_k положительны, сходится в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k. \tag{15.8.4}$$

Если произведение (15.8.3) сходится, то справедливо равенство

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k\right). \tag{15.8.5}$$

Доказательство. Так как

$$\ln P_n = \ln \prod_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k,$$

то
$$P_n = \exp\biggl(\sum_{k=1}^{n} \ln p_k\biggr). \tag{15.8.6}$$

В силу непрерывности и строгой монотонности показательной функции из этого равенства следует, что сходимость ряда (15.8.4) равносильна существовнию положительного предела последовательности $\{P_n\}$, т.е. сходимости бесконечного произведения (15.8.3).

Равенство (15.8.5) вытекает из (15.8.6) при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Таким образом, для сходящегося бесконечного произведения (15.8.3) положительных чисел справедливо равенство
$$\ln \prod_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k,$$
как и в случае конечного числа множителей.

Если $\lim P_n = 0$, ряд $\sum \ln p_n$ расходится. Это можно считать объяснением, почему бесконечное произведение считается расходящимся, когда $\lim P_n = 0$.

Поскольку у сходящихся бесконечных произведений общий множитель стремится к 1, бесконечное произведение обычно записывают в виде
$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k). \tag{15.8.7}$$
При этом условие $p_k > 0$ и равенство $\lim p_k = 1$ переходят соответственно в $a_k > -1$ и $\lim a_k = 0$.

Далее будем предполагать, что все числа a_k отличны от нуля и $a_k > -1$, т.е. множители $1 + a_k$ положительны.

Теорема 15.8.3. *Бесконечное произведение* (15.8.7), *в котором все числа a_k одного знака* (*т.е. или все положительны или все отрицательны*) *сходится в том и только том случае, когда сходится ряд*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Согласно теореме 15.8.2 сходимость бесконечного произведения $\prod(1 + a_k)$ равносильна сходимости ряда

$\sum \ln(1 + a_k)$. Будем считать, что $\lim a_k = 0$, так как это условие необходимо для сходимости и бесконечного произведения и ряда.

Числа a_k и $\ln(1 + a_k)$ имеют одинаковые знаки. Поэтому согласно теореме 15.2.3 из равенства

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1 + a_k)}{a_k} = 1$$

следует, что ряды $\sum \ln(1 + a_k)$ и $\sum a_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема доказана.

В случае, когда числа a_k имеют разные знаки, применить теорему 15.2.3 нельзя и утверждение теоремы 15.8.3 может оказаться неверным. Но справедливо следующее предложение.

Теорема 15.8.4. *Пусть $a_k > -1$ при всех k и сходится один из рядов $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$. Тогда сходимость другого ряда необходима и достаточна для сходимости бесконечного произведения* (15.8.7).

Доказательство. В силу условий теоремы $\lim a_k = 0$, поэтому

$$\ln(1 + a_k) = a_k - \frac{1}{2}\, a_k^2 + o(a_k^2), \qquad k \to \infty.$$

Значит,

$$a_k - \ln(1 + a_k) = \frac{1}{2}\, a_k^2 + o(a_k^2), \qquad k \to \infty,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k - \ln(1 + a_k)}{a_k^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{15.8.8}$$

Так как $\ln(1 + x) < x$ для всех неравных нулю $x > -1$, то у дроби из левой части равенства (15.8.8) и числитель и знаменатель положительны. Следовательно, в силу теоремы 15.2.3 ряды $\sum(a_k - \ln(1 + a_k))$ и $\sum a_k^2$ сходятся или расходятся одновременно.

Но один из рядов $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$ сходится. Поэтому сходимость другого ряда равносильна сходимости ряда $\sum \ln(1 + a_k)$, а согласно теореме 15.8.2 и сходимости бесконечного произведения (15.8.7).

Теорема доказана.

Отметим, что произведение $\prod(1+a_k)$ может сходиться, когда оба ряда $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$ расходятся.

Пусть, например, при $k=1,2,\dots$

$$a_{2k-1} := -\frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad a_{2k} := \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}.$$

Тогда ряды $\sum a_k$ и $\sum a_k^2$ расходятся. Вместе с тем, бесконечное произведение $\prod(1+a_k)$ сходится. В самом деле,

$$(1+a_{2k-1})(1+a_{2k}) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}\right) = 1-\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

Значит, сходится произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k}),$$

а поскольку $a_k \to 0$ при $k\to\infty$, сходится и произведение (15.8.7).

§ 15.9. Двойные ряды

Двойным числовым рядом называется формально записанное выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}, \tag{15.9.1}$$

где *члены ряда* $a_{k,l}$ – действительные или комплексные числа.

Для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{15.9.2}$$

члены которых имели один индекс, сходимость определялась как сходимость последовательности частных сумм, составленных из начальных членов ряда.

Для двойных рядов такого единого естественного способа построения частных сумм нет. Частными суммами называют суммы любого конечного набора членов ряда и в разных случаях рассматривают сходимость различных последовательностей частных сумм.

При этом на последовательности частных сумм, сходимость которых принимается в качестве определения сходимости ряда, накладывается условие, что каждый член ряда входит во все частные суммы этой последовательности, начиная с некоторой.

При построении частных сумм ряда (15.9.1) для наглядности считают, что числам $a_{k,l}$ соответствуют точки (k,l) координатной плоскости.

Наиболее часто используются *прямоугольные* частные суммы

$$S_{n,m} := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_{k,l},$$

соответствующие прямоугольникам $[1,n]\times[1,m]$, расположенным в первом квадранте.

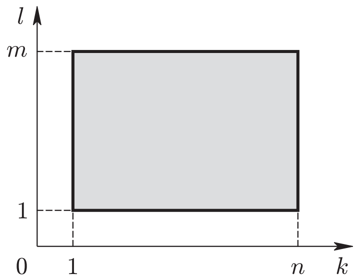

Рис. 15.2.

Определение. Ряд (15.9.1) называют *сходящимся к числу* S *по Прингсхейму* (по прямоугольникам), если для каждого положительного ε существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех n, $m > N$ справедлива оценка

$$|S_{n,m} - S| < \varepsilon. \tag{15.9.3}$$

При этом пишут

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

Таким образом, числа n и m стремятся к бесконечности одновременно, но независимо друг от друга.

Рассматривается также вариант сходимости по прямоугольникам, когда требуется, чтобы оценка (15.9.3) имела место не для всех $n,m > N$, а только для тех, для которых существуют такие постоянные c_1 и c_2, что

$$0 < c_1 \leqslant \frac{n}{m} \leqslant c_2 < \infty.$$

Это называют сходимостью по прямоугольникам с ограниченным отношением.

Сходимость последовательности $S_{n,n}$ называют сходимостью ряда (15.9.1) *по квадратам.*

Приведем еще два классических определения сходимости двойных рядов.

Это – сходимость *по треугольникам*, когда сходятся частные суммы

$$S_n := \sum_{k+l\leqslant n} a_{k,l},$$

и сходимость *по кругам*, когда сходятся частные суммы

$$S_n := \sum_{\sqrt{k^2+l^2}\leqslant n} a_{k,l}.$$

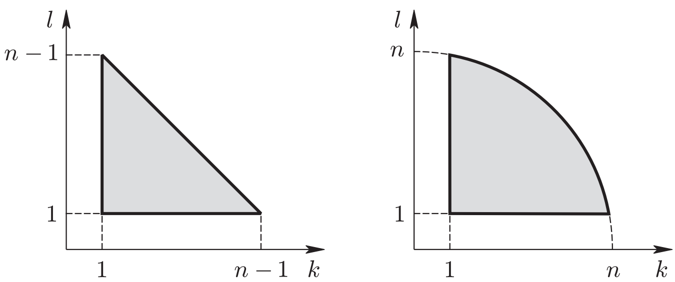

Рис. 15.3.

Название “сходимость по кругам” легко объяснить, если рассматривать не ряд (15.9.1), а ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{k,l}.$$

Сходимость двойных рядов по треугольникам фактически встречалась при исследовании произведений двух рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \sum_{l=1}^{\infty} v_l.$$

Согласно теореме 15.5.6 Мертенса, если один из этих рядов сходится, а другой сходится абсолютно, то сходится ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{q=1}^{p} u_q v_{p+1-q}\Bigr). \tag{15.9.4}$$

Частные суммы ряда (15.9.4) представляют собой суммы членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} u_k v_l$$

по треугольникам.

Из сходимости ряда (15.9.2) следует стремление общего члена ряда к нулю и, следовательно, ограниченность всех членов ряда.

Рассмотрим такие вопросы для двойных рядов.

Теорема 15.9.1. *Если ряд* (15.9.1) *сходится по Прингсхейму, то*

$$\lim a_{k,l} = 0,$$

когда k и l стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

Этот результат выводится с помощью представления

$$a_{k,l} = S_{k,l} - S_{k-1,l} - (S_{k,l-1} - S_{k-1,l-1}).$$

Но ограниченность членов ряда из сходимости по Прингсхейму не следует. Например, если $a_{1,l} = l$, $a_{2,l} = -l$, а все остальные члены ряда равны нулю, то при $k \geqslant 2$ и всех l имеем $S_{k,l} = 0$.

На этом примере видно также, что из сходимости ряда по Прингсхейму не следует ни сходимость по треугольникам, ни сходимость по кругам.

Из простейших свойств пределов вытекает следующее утверждение.

Теорема 15.9.2. *Пусть ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{k,l}$$

сходятся при некотором способе построения частных сумм. Тогда при том же определении сходимости сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j}),$$

где α, β *– произвольные числа, и справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(\alpha a_{k,l}+\beta b_{k,l})=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}+\beta\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{k,l}.$$

Ясно, что если двойной ряд сходится по Прингсхейму, то он сходится и по прямоугольникам с ограниченным отношением, а ряды, сходящиеся по прямоугольникам с ограниченным отношением, сходятся по квадратам.

За исключением этих очевидных случаев для каждой пары из указанных выше определений сходимости двойных рядов существуют ряды, сходящиеся при одном определении и расходящиеся при другом.

Если сходимость двойного ряда определена как сходимость последовательности частных сумм, зависящей от одного параметра (например, сходимость по квадратам, по треугольникам или по кругам), то критерий Коши сходимости двойного ряда получается простой перефразировкой критерия Коши сходимости последовательностей, зависящих от одного индекса.

Получим критерий Коши сходимости двойных рядов по прямоугольникам.

Теорема 15.9.3 (Критерий Коши сходимости ряда по Прингсхейму). *Для того чтобы ряд* (15.9.1) *сходился по Прингсхейму, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного* ε *существовало число* N *такое, что оценка*

$$|S_{n,m}-S_{p,q}|<\varepsilon$$

выполняется для любой пары точек (n,m), (p,q), *все координаты которых превосходят* N.

Доказательство. Необходимость устанавливается стандартными рассуждениями. Если ряд (15.9.1) сходится и S – его сумма, то по $\varepsilon>0$ выбираем N так, чтобы для точек (n,m), (p,q), все координаты которых превосходят N, были справедливы оценки

$$|S_{n,m}-S|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |S_{p,q}-S|<\frac{\varepsilon}{2},$$

а затем оцениваем разность

$$|S_{n,m}-S_{p,q}|\leqslant|S_{n,m}-S|+|S-S_{p,q}|<\varepsilon.$$

Докажем достаточность. Из условия Коши сходимости ряда по Прингсхейму следует, что выполнено условие Коши для последовательности частных сумм по квадратам $S_{n,n}$. Значит, последовательность $\{S_{n,n}\}$ сходится. Обозначим ее предел S.

Выберем по $\varepsilon > 0$ число N так, чтобы для всех n, m, превосходящих N, имели место оценки

$$|S_{n,n} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|S_{n,m} - S_{n,n}| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда

$$|S_{n,m} - S| \leqslant |S_{n,m} - S_{n,n}| + |S_{n,n} - S| < \varepsilon.$$

Значит, ряд (15.9.1) сходится по Прингсхейму и теорема доказана.

Отметим на рисунках, по каким точкам (n, m), (p, q) могут браться члены ряда (15.9.1) при построении разностей $S_{n,m} - S_{p,q}$ в условии Коши.

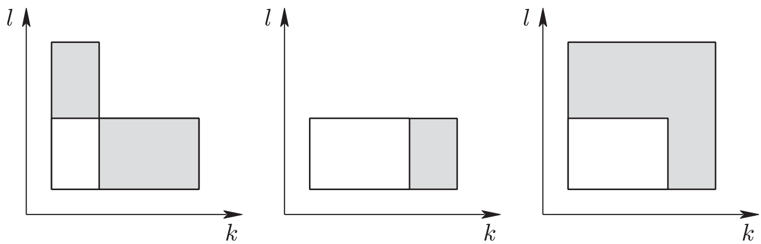

Рис. 15.4.

Поэтому условие Коши можно сформулировать так: для каждого положительного ε существует N такое, что для любых чисел n, m, p, q таких, что $p \geqslant n > N$, $q \geqslant m > N$, справедливы оценки

$$\left|\sum_{k=n}^{p}\sum_{l=1}^{m} a_{k,l}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=m}^{q} a_{k,l}\right| < \varepsilon. \tag{15.9.5}$$

В самом деле, разность $S_{n,m} - S_{p,q}$ можно представить как линейную комбинацию сумм, участвующих в (15.9.5).

Используя члены ряда (15.9.1), можно построить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right). \tag{15.9.6}$$

Такие ряды называют *повторными рядами*.

По определению повторный ряд (15.9.6) сходится, если при каждом k сходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}$$

и сходится ряд по k из сумм таких рядов. Полученное при этом число называют суммой ряда (15.9.6).

Точно также определяют другой повторный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right), \tag{15.9.7}$$

когда сначала при фиксированном l находят сумму членов ряда (15.9.1) по k, а затем – сумму полученных выражений по l.

Заметим, что сходимость повторного ряда (15.9.6) равносильна существованию повторного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^{m} a_{k,l}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{k,l}\right).$$

Так как повторные пределы могут зависеть от порядка, в котором они берутся, то и повторные ряды (15.9.6) и (15.9.7) могут вести себя по-разному.

Например, для ряда (15.9.1) с общим членом

$$a_{k,l} := \frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{l} - \frac{1}{k+2}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{l} \tag{15.9.8}$$

оба повторных ряда (15.9.6) и (15.9.7) сходятся, но их суммы различны.

Действительно,

$$\sum_{l=1}^{m} a_{k,l} = \frac{k}{k+1} - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{m+1} - \frac{k+1}{k+2} + \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{m+1}.$$

Поэтому для каждого k

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} \right) = -\frac{1}{2}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{l} - \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{l}.$$

Значит, при каждом l

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l} = \frac{1}{2^{l+1}}$$

и

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l} \right) = \frac{1}{2}.$$

Ряд с общим членом (15.9.8) не сходится по Прингсхейму. В этом легко убедиться, рассмотрев частные суммы $S_{n,m}$. Этот факт вытекает и из следующего предложения.

Теорема 15.9.4 (Теорема Прингсхейма). *Если ряд* (15.9.1) *сходится по Прингсхейму и для каждого k сходится ряд*

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}, \tag{15.9.9}$$

то повторный ряд (15.9.6) *сходится и его сумма равна сумме ряда* (15.9.1).

Доказательство. Пусть S – сумма ряда (15.9.1) по Прингсхейму и $S_{n,m}$ – частные суммы этого ряда по прямоугольникам.

По условию для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n, m > N$ имеет место оценка

$$|S - S_{n,m}| < \varepsilon. \tag{15.9.10}$$

Из сходимости рядов (15.9.9), следует, что при каждом фиксированном n

$$\lim_{m\to\infty} S_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{m} a_{k,l} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

Из (15.9.10) в пределе при $m \to \infty$ получаем, что для всех $n > N$

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Эта оценка доказывает и сходимость повторного ряда (15.9.6) и равенство сумм рядов (15.9.6) и (15.9.1).

Теорема доказана.

Теорема 15.9.4 является аналогом теоремы 11.3.2 о повторных пределах функций двух переменных.

Рассмотрим вопрос о равенстве для двойных рядов сумм повторных рядов.

Теорема 15.9.5 (Теорема Маркова). *Пусть повторный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\right)$$

сходится и при каждом l сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}.$$

Тогда

1°) *при каждом $m \geqslant 0$ сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=m+1}^{\infty} a_{k,l}\right); \tag{15.9.11}$$

2°) *для сходимости повторного ряда*

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\right) \tag{15.9.12}$$

необходимо и достаточно существование предела $R := \lim_{m\to\infty} R_m$, *где* R_m – *сумма ряда* (15.9.11), *и условие* $R = 0$ *необходимо и достаточно для равенства сумм повторных рядов.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{l=m+1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} - a_{k,1} - \cdots - a_{k,m}.$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства является членом сходящегося ряда по k. Значит, сходится ряд по k из величин в левой части, т.е. доказана сходимость ряда (15.9.11).

Далее, для каждого m

$$R_m = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}\Bigr) - \sum_{l=1}^{m}\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,l}\Bigr).$$

Поэтому существование предела $\lim_{m\to\infty} R_m$ равносильно сходимости ряда (15.9.12), а условие $R = 0$ необходимо и достаточно для равенства сумм повторных рядов.

Теорема доказана.

Построим для ряда (15.9.1) ряд из модулей его членов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{k,l}|. \tag{15.9.13}$$

Если все частные суммы ряда (15.9.13), т.е. значения сумм всевозможных конечных наборов членов этого ряда, ограничены, ряд (15.9.1) называют *абсолютно сходящимся*.

Имея в виду изучение абсолютной сходимости двойных рядов, рассмотрим ряды с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{k,l}, \qquad b_{k,l} \geqslant 0. \tag{15.9.14}$$

Теорема 15.9.6. *Если множество частных сумм ряда (15.9.14) с неотрицательными членами ограничено, то при любом способе построения последовательностей частных сумм этот ряд сходится и притом к одному и тому же значению.*

Пусть S – верхняя грань значений всех частных сумм ряда (15.9.14). По заданному $\varepsilon > 0$ найдем такую частную сумму σ, что $S - \sigma < \varepsilon$.

Для произвольной последовательности частных сумм ряда (15.9.14) все члены ряда, составляющие σ, входят во все частные суммы этой последовательности, начиная с некоторой частной суммы. Поэтому в силу неотрицательности членов ряда все частные суммы рассматриваемой последовательности, начиная с этой частной суммы, отличаются от S меньше, чем на ε.

Таким образом, абсолютно сходящийся двойной ряд с неотрицательными членами сходится при любом определении сходимости и его сумма равна S – верхней грани значений частных сумм.

Поэтому, говоря об абсолютной сходимости ряда (15.9.1), не нужно указывать, какое определение сходимости двойных рядов имеется в виду.

Понятно, что для абсолютно сходящихся двойных рядов абсолютно сходятся и оба повторных ряда.

Заметим, что приведенные здесь утверждения об абсолютно сходящихся двойных рядах аналогичны теореме 15.5.4 о независимости сумм абсолютно сходящихся рядов от перестановок членов ряда.

Приведем еще следующую теорему сравнения.

Теорема 15.9.7. *Если для всех k, l справедлива оценка $|a_{k,l}| \leqslant Cb_{k,l}$, где C – некотроая постоянная, и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{k,l},$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}$$

абсолютно сходится.

В заключение отметим, что по аналогии с двойными рядами рассматриваются ряды кратности $m > 2$, члены которых зависят от m индексов.

§ 15.10. Задачи и упражнения

15.10.1. Докажите, что ряд $\sum a_k$ сходится, если сходится ряд $\sum k^2 a_k^2$.

15.10.2. Докажите теорему Ласкера, согласно которой если ряд $\sum a_k$ сходится и величины ka_k монотонно стремятся к нулю,

то
$$a_k = o\left(\frac{1}{k\ln k}\right), \qquad k \to \infty.$$

15.10.3. Докажите, что если ряд $\sum a_k$ с положительными членами сходится, то
$$\varliminf_{k\to\infty} ka_k = 0.$$

15.10.4. Докажите логарифмический признак сходимости, согласно которому ряд $\sum a_k$ с положительными членами сходится, если при $\alpha > 0$ для достаточно больших k
$$\ln\frac{1}{a_k} \geqslant \ln k(1+\alpha),$$
и расходится, если
$$\ln\frac{1}{a_k} \leqslant \ln k.$$

15.10.5. При каких положительных a сходится и при каких расходится ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{\ln k}\,?$$

15.10.6. Приведите пример сходящегося ряда $\sum a_k$, для которого ряд $\sum a_k^2$ расходится.

15.10.7. Ряд
$$1 + \sum_{k-1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\,c(c+1)\cdots(c+k-1)}\,x^k,$$
где числа a, b, c не равны нулю и целым отрицательным числам, называется *гипергеометрическим рядом*. Докажите, что радиус сходимости гипергеометрического ряда равен 1.

15.10.8. Докажите, что ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$$
абсолютно сходится только при $x = n\pi$, где n – целое число.

15.10.9. Докажите, что если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

15.10.10. Постройте сходящийся ряд $\sum a_k$ с положительными членами такой, что при всех $p < 1$ ряды $\sum a_k^p$ расходятся.

15.10.11. Докажите, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

с положительными членами сходится, то существует такая монотонно стремящаяся к $+\infty$ последовательность $\{b_k\}$, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

15.10.12. Докажите, что если числа a_k монотонно возрастают к $+\infty$, то существует такой сходящийся ряд $\sum b_k$, что ряд $\sum a_k b_k$ расходится.

15.10.13. Пусть $a_k \geqslant 0$, $a_1 > 0$ и $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Докажите, что ряды $\sum a_k$ и $\sum a_k/S_k$ сходится или расходятся одновременно.

15.10.14. Докажите, что для каждого условно сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{15.10.1}$$

существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $1 = n_1 < n_2 < \cdots$, что сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \right|. \tag{15.10.2}$$

15.10.15. Докажите, что для каждой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $1 = n_1 < n_2 < \cdots$ существует условно сходящийся ряд (15.10.1), для которого ряд (15.10.2) расходится.

15.10.16. Докажите, что если произведение по Коши для двух сходящихся рядов сходится, то оно сходится к произведению сумм этих рядов.

15.10.17. Докажите, что произведение по Коши двух сходящихся рядов может расходиться.

15.10.18. Приведите пример двух расходящихся рядов таких, что их произведение по Коши сходится.

15.10.19. Просуммируйте методом средних арифметических ряды, члены которых представляют собой следующие повторяющиеся серии чисел:

a) $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \cdots;$
b) $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \cdots;$
c) $0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + \cdots;$
d) $1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots.$

15.10.20. Докажите, что если два ряда отличаются только конечным числом членов, то они

- либо оба суммируются методом средних арифметических к одному и тому же значению;
- либо оба не суммируются методом средних арифметических.

15.10.21. Докажите, что произведение по Коши двух сходящихся рядов суммируется методом средних арифметических.

15.10.22. Докажите, что если $|x| < 1$, то

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

15.10.23. Докажите, что если $|x| < 1$, то

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{2k}) = \frac{1}{1 - x}.$$

15.10.24. Обязательно ли члены двойного ряда $a_{k,l}$ стремятся к нулю при $k, l \to \infty$, если этот ряд

1) сходится по треугольникам;
2) сходится по кругам?

15.10.25. Обязательно ли члены двойного ряда ограничены в совокупности, если этот ряд

1) сходится по треугольникам;
2) сходится по кругам?

15.10.26. Найдите необходимое и достаточное условие сходимости по Прингсхейму двойных рядов вида $\sum a_k b_l$.

15.10.27. Покажите, что из сходимости двойного ряда по треугольникам не следует ни сходимость по Прингсхейму, ни сходимость по кругам.

15.10.28. Покажите, что из сходимости двойного ряда по кругам не следует ни сходимость по Прингсхейму, ни сходимость по треугольникам.

15.10.29. Докажите, что сходиться при любой перестановке его членов может только абсолютно сходящийся ряд.

Глава 16. Функциональные последовательности и ряды

§ 16.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

При изучении функциональных рядов, членами которых являются функции, будут использоваться последовательности функций.

Пусть на некотором множестве точек D конечномерного евклидова пространства или комплексной плоскости, задана последовательность функций $\varphi_1(\mathbf{x})$, $\varphi_2(\mathbf{x}), \dots$. Эти функции предполагаем, вообще говоря, комплекснозначными.

Определение. Если для каждой точки $\mathbf{x}_0 \in D$ числовая последовательность $\varphi_1(\mathbf{x}_0), \varphi_2(\mathbf{x}_0), \dots$ сходится к некоторому числу, которое обозначим $\varphi(\mathbf{x}_0)$, то последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ называют *сходящейся к функции* $\varphi(\mathbf{x})$ *на множестве* D.

Говорят также, что последовательность $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ сходится в каждой точке D или сходится *поточечно* на D.

Сходимость последовательности функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ на множестве D к функции $\varphi(\mathbf{x})$ в подробной записи означает, что для каждой точки $\mathbf{x} \in D$ и любого положительного числа ε существует такое число $N = N(\mathbf{x}, \varepsilon)$, что для всех $n > N$ справедлива оценка

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что N зависит не только от ε, но и от $\mathbf{x}$. Вскоре будет приведен пример последовательности функций, сходящейся в каждой точке, когда число N нельзя выбрать так, чтобы оно зависело только от ε и не зависело от $\mathbf{x}$.

Определение. Последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ называют *сходящейся к функции* $\varphi(\mathbf{x})$ *равномерно на множестве* D, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех $n > N$ справедлива оценка

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Таким образом, при поточечной сходимости для каждой точки $\mathbf{x}$ должно существовать свое N, а в случае равномерной сходимости требуется, чтобы число N было одним и тем же сразу для всех $\mathbf{x} \in D$.

Понятно, что если последовательность функций равномерно сходится на некотором множестве, то она равномерно сходится и на любом его подмножестве. Равномерно сходящаяся последовательность функций сходится и поточечно. Обратное утверждение, как было сказано выше, неверно.

Заметим, что равномерная сходимость последовательности функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ к функции $\varphi(\mathbf{x})$ равносильна равномерной сходимости последовательности $\{\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\}$ к нулю.

Равномерную сходимость можно охарактеризовать в других терминах.

Множество всех ограниченных на D функций обозначают $B(D)$, для функций $\varphi \in B(D)$ величину

$$\|\varphi(\mathbf{x})\| = \|\varphi(\mathbf{x})\|_{B(D)} := \sup_{\mathbf{x} \in D} |\varphi(\mathbf{x})|$$

называют *чебышевской* (равномерной) *нормой*. Понятно, что

$$0 \leqslant \|\varphi(\mathbf{x})\|_{B(D)} < +\infty.$$

Теорема 16.1.1. *Для равномерной сходимости на множестве D последовательности функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$, принадлежащих $B(D)$, к функции $\varphi(\mathbf{x})$ необходимо и достаточно условие*

$$\lim_{k \to \infty} \|\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\|_{B(D)} = 0. \tag{16.1.1}$$

Доказательство. Согласно (16.1.1) для каждого положительного ε существует такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех $k > N$

$$\|\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\|_{B(D)} < \varepsilon.$$

Значит, для всех точек $\mathbf{x} \in D$

$$|\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| < \varepsilon,$$

т.е. последовательности функций $\{\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится к нулю.

Необходимость следует из того, что если последовательность $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ сходится к $\varphi(\mathbf{x})$ равномерно на D, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех $k > N$

$$|\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\sup_{\mathbf{x}\in D} |\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

В терминах нормы это означает, что

$$\|\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\|_{B(D)} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

С помощью теоремы 16.1.1 легко убедиться, что последовательность степеней $\{x^k\}$ не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. В самом деле, пределом последовательности $\{x^k\}$ при поточечной сходимости является функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Но для каждого k

$$\|x^k - \varphi(x)\|_{B([0,1])} = 1,$$

а это показывает отсутствие равномерной сходимости.

Таким образом, последовательность функций может не сходиться на множестве равномерно, хотя она и сходится в каждой точке этого множества.

Теорема 16.1.2 (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций). *Последовательность функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ равномерно сходится на множестве D к конечной в каждой точке D функции в том и только том случае, когда выполнено условие Коши, состоящее в том, что для каждого положительного ε существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $\mathbf{x} \in D$ и всех чисел $n, m > N$ справедлива оценка*

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi_m(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Доказательство. Если последовательность $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ сходится к $\varphi(\mathbf{x})$ равномерно, то необходимость условия Коши стандартным образом выводится из неравенства

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi_m(\mathbf{x})| \leqslant |\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| + |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_m(\mathbf{x})|.$$

Не будем приводить детали этого рассуждения.

Докажем достаточность. Если выполнено условие Коши равномерной сходимости, то в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ согласно критерию Коши сходимости числовых последовательностей существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathbf{x}).$$

Обозначим его $\varphi(\mathbf{x})$.

Согласно условию Коши равномерной сходимости для каждого положительного ε существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $\mathbf{x} \in D$ и всех чисел $n, m > N$ справедлива оценка

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi_m(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этого неравенства в пределе при $m \to \infty$ получаем для всех $n > N$ и всех $\mathbf{x} \in D$ оценку

$$|\varphi_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

которая показывает, что последовательность $\{\varphi_n(\mathbf{x})\}$ сходится равномерно на множестве D.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь функциональные ряды, т.е. ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}), \tag{16.1.2}$$

где члены ряда – функции $u_k(\mathbf{x})$, вообще говоря, комплекснозначные, заданные на некотором множестве D конечномерного евклидова пространства или комплексной плоскости.

Сходимость функционального ряда в точке определяется как сходимость последовательности его частных сумм в этой точке.

Определение. Ряд (16.1.2) называют *сходящимся равномерно на множестве* D, если на D равномерно сходится последовательность его частных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x}).$$

Теорема 16.1.3 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для равномерной сходимости ряда* (16.1.2) *на множестве* D *к конечной в каждой точке функции, необходимо и достаточно условие Коши, согласно которому для каждого положительного* ε *существует число* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для всех точек* $\mathbf{x} \in D$ *и всех чисел* $n \geqslant m > N$ *выполнено условие*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} u_k(\mathbf{x}) \right| < \varepsilon. \tag{16.1.3}$$

Теорема 16.1.3 является следствием критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций. Как и в теореме 16.1.2, здесь существенно, что число N одно и то же для всех точек $\mathbf{x}$ из D.

Теорема 16.1.4. *Если ряд* (16.1.2) *сходится равномерно на множестве* D, *то последовательность функций* $\{u_k(\mathbf{x})\}$ *сходится к нулю равномерно на* D.

Это необходимое условие равномерной сходимости функциональных рядов следует из критерия Коши, если положить в (16.1.3) $m = n$. Понятно, что для равномерной сходимости ряда это условие не является достаточным.

Теорема 16.1.5. *Если ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\mathbf{x})$$

сходятся равномерно на множестве D, *то для любых ограниченных на* D *функций* $\alpha(\mathbf{x})$ *и* $\beta(\mathbf{x})$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) v_k(\mathbf{x}))$$

сходится равномерно на D.

Эта теорема устанавливается стандартным образом с помощью критерия Коши.

До сих пор говорилось о равномерной сходимости последовательностей функций. Но равномерная сходимость рассматривается и в более общей ситуации.

Определение. Пусть функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ задана на декартовом произведении $D \times T$, где D и T – некоторые множества конечномерных евклидовых пространств или комплексной плоскости, и $\mathbf{t}^0$ – предельная точка множества T. Функцию $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ называют равномерно сходящейся на множестве D к функции $\varphi(\mathbf{x})$ при $\mathbf{t} \to \mathbf{t}^0$, $\mathbf{t} \in T$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех $\mathbf{t} \in T$, для которых $0 < |\mathbf{t} - \mathbf{t}^0| < \delta$, справедлива оценка

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \varphi(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Здесь $\mathbf{t}^0$ – точка пространства, которому принадлежит множество T, а $|\mathbf{t} - \mathbf{t}^0|$ обозначает расстояние между точками $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^0$ этого пространства. Нетрудно переформулировать это определение для случая, когда $\mathbf{t}^0$ – бесконечный символ.

§ 16.2. Признаки равномерной сходимости

Начнем с признака сравнения для функциональных рядов.

Теорема 16.2.1 (признак Вейерштрасса). *Пусть на множестве D заданы ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbf{x})$$

и в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ при всех k справедливы оценки $|u_k(\mathbf{x})| \leqslant a_k(\mathbf{x})$. Тогда

1°) *если ряд $\sum a_k(\mathbf{x})$ равномерно сходится на D, то ряд $\sum u_k(\mathbf{x})$ сходится на D абсолютно и равномерно*;

2°) *если ряд $\sum u_k(\mathbf{x})$ не является равномерно сходящимся на D, то и ряд $\sum a_k(\mathbf{x})$ не является равномерно сходящимся на D.*

Доказательство. В этой теореме функции $a_k(\mathbf{x})$ неотрицательны, а функции $u_k(\mathbf{x})$ могут быть комплекснозначными.

1°. Если ряд $\sum a_k(\mathbf{x})$ равномерно сходится на D, то пользуясь критерием Коши (теорема 16.1.3) как необходимым условием, видим, что для каждого положительного ε существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $\mathbf{x} \in D$ и всех чисел $n \geqslant m > N$ справедлива оценка

$$\sum_{k=m}^{n} a_k(\mathbf{x}) < \varepsilon.$$

Значит, при этих $\mathbf{x}$, n и m

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k(\mathbf{x})\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |u_k(\mathbf{x})| \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_k(\mathbf{x}) < \varepsilon. \qquad (16.2.1)$$

Пользуясь теперь критерием Коши как достаточным условием, из (16.2.1) получаем, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x})$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(\mathbf{x})|$ сходятся равномерно на D.

2°. Это утверждение вытекет из 1°. Если бы ряд $\sum a_k(\mathbf{x})$ равномерно сходился, то согласно 1° ряд $\sum u_k(\mathbf{x})$ также был бы равномерно сходящимся.

Теорема доказана.

Важным случаем теоремы 16.2.1 является утверждение, которое также называют признаком Вейерштрасса, когда в качестве $\sum a_k(\mathbf{x})$ берется числовой ряд, сходимость которого можно рассматривать как равномерную сходимость функционального ряда.

Получим для равномерной сходимости функциональных рядов аналоги признаков Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.

Теорема 16.2.2 (Признак Дирихле). *Пусть последовательность действительнозначных монотонных в каждой точке множества D функций $\{a_k(\mathbf{x})\}$ сходится к нулю равномерно на D. Если частные суммы ряда $\sum u_k(\mathbf{x})$, где $u_k(\mathbf{x})$ – комплекснозначные функции, равномерно ограничены на D, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbf{x})\, u_k(x) \qquad (16.2.2)$$

сходится на D равномерно.

Доказательство. Отметим, что характер монотонности последовательности чисел $\{a_k(\mathbf{x})\}$ в разных точках множества D

может быть различным: в одних точках эта последовательность может возрастать, а в других – убывать.

Равномерная ограниченность частных сумм ряда $\sum u_k(\mathbf{x})$ означает, что существует такое число B, что для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех n справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x})\right| < B.$$

Поэтому для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех $n \geqslant m$ имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k(\mathbf{x})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{m-1} u_k(\mathbf{x})\right| < 2B.$$

В силу равномерной сходимости функций $a_k(\mathbf{x})$ к нулю для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n > N$ и всех $\mathbf{x} \in D$ справедлива оценка

$$|a_n(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{8B}.$$

Воспользуемся леммой Абеля 15.4.6. Так как при каждом $\mathbf{x}$ последовательность $\{a_k(\mathbf{x})\}$ монотонна, то согласно оценке (15.4.17) для каждой точки $\mathbf{x} \in D$ при всех $n \geqslant m > N$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(\mathbf{x})\, u_k(\mathbf{x})\right| \leqslant 2 \cdot 2B(|a_m(\mathbf{x})| + |a_n(\mathbf{x})|) < 4B\left(\frac{\varepsilon}{8B} + \frac{\varepsilon}{8B}\right) = \varepsilon.$$

Далее ссылаемся на критерий Коши.

Теорема доказана.

Теорема 16.2.3 (Признак Абеля). *Пусть последовательность действительнозначных функций $\{a_k(\mathbf{x})\}$ в каждой точке множества D монотонна и все эти функции ограничены на D числом A. Если ряд $\sum u_k(\mathbf{x})$ равномерно сходится на D, то и ряд* (16.2.2) *равномерно сходится на D.*

Доказательство. Здесь, как и в признаке Дирихле, функции $u_k(\mathbf{x})$, вообще говоря, комплекснозначные, а характер монотонности последовательности $a_k(\mathbf{x})$ в разных точках множества D может быть различным.

Пользуясь равномерной сходимостью ряда $\sum u_k(\mathbf{x})$, по $\varepsilon > 0$ находим такое N, что для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех $n \geqslant m > N$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k(\mathbf{x})\right| < \frac{\varepsilon}{4A}.$$

Поэтому, если $n \geqslant m > N$, то с помощью леммы Абеля 15.4.6 находим

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(\mathbf{x})\, u_k(\mathbf{x})\right| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4A}(|a_m(\mathbf{x})| + |a_n(\mathbf{x})|) < \frac{\varepsilon}{2A} \cdot 2A = \varepsilon.$$

Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши.

Теорема 16.2.4 (Признак Дини). *Пусть функции $f_n(\mathbf{x})$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны на компакте D и в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ значения функций $f_n(\mathbf{x})$ возрастают. Если последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ при $n \to \infty$ сходится к непрерывной на D функции, то сходимость этой последовательности является равномерной на D.*

Доказательство. Пусть $f(\mathbf{x})$ обозначает предел последовательности $\{f_n(\mathbf{x})\}$ и $\varphi_n(\mathbf{x}) := f(x) - f_n(x)$. Тогда последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n(\mathbf{x})\}$ в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ сходится к нулю, монотонно убывая.

При заданном $\varepsilon > 0$ для каждой точки $\mathbf{x} \in D$ выберем индекс $n(\mathbf{x})$ такой, что $0 \leqslant \varphi_{n(\mathbf{x})}(\mathbf{y}) < \varepsilon$ для всех $\mathbf{y} \in D$ из некоторой окрестности $U_{n(\mathbf{x})}$ точки $\mathbf{x}$. Эти окрестности являются открытыми множествами.

Таким образом, компакт D покрыт набором открытых множеств $U_{n(\mathbf{x})}$. Согласно лемме Гейне–Бореля (теорема 11.2.6) из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть такое конечное подпокрытие осуществляют окрестности $U_{n(\mathbf{x}_1)}$, $U_{n(\mathbf{x}_2)}, \ldots, U_{n(\mathbf{x}_m)}$.

Положим $M := \max(n(\mathbf{x}_1), n(\mathbf{x}_2), \ldots, n(\mathbf{x}_m))$. Тогда в силу убывания в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ последовательности значений $\{\varphi_n(\mathbf{x})\}$ для всех $\mathbf{x} \in D$ и всех $n > M$ имеем

$$0 \leqslant \varphi_n(\mathbf{x}) < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность функций $\{f_n(\mathbf{x})\}$ сходится к $f(\mathbf{x})$ равномерно на D.

Теорема доказана.

Из теоремы 16.2.4 вытекает следующий результат для рядов.

Теорема 16.2.5 (Признак Дини). *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\mathbf{x}) \tag{16.2.3}$$

неотрицательных непрерывных на компакте D функций сходится в каждой точке D. Если сумма ряда (16.2.3) *непрерывна на D, то этот ряд сходится на D равномерно.*

§ 16.3. Предельный переход в равномерно сходящихся рядах

Равномерно сходящиеся ряды обладают многими важными свойствами, которым посвящены этот и следующих два параграфа. Эти свойства аналогичны свойствам конечных сумм.

Сначала рассмотрим вопрос о почленном переходе к пределу в равномерно сходящихся рядах.

Теорема 16.3.1. *Пусть ряд $\sum u_k(\mathbf{x})$ сходится равномерно на множестве D к функции $S(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x}_0$ – предельная точка D.*

Если для каждой функции $u_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, существует конечный предел $\lim u_k(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ по множеству D, то сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} u_k(\mathbf{x}), \tag{16.3.1}$$

существует предел $\lim S(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ по множеству D и справедливо равенство

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} S(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ x\in D}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} u_k(\mathbf{x}). \tag{16.3.2}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\alpha_k := \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} u_k(\mathbf{x}), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Согласно критерию Коши в силу равномерной сходимости ряда $\sum u_k(\mathbf{x})$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geqslant m > N$ и всех $\mathbf{x} \in D$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=m}^{n} u_k(\mathbf{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если в этом неравенстве перейти к пределу при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ по множеству D, получим

$$\left| \sum_{k=m}^{n} \alpha_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это доказывает сходимость ряда (16.3.1). Обозначим его сумму через A.

Выберем для заданного положительного ε номер p такой, что одновременно выполняются оценки

$$|S(\mathbf{x}) - S_p(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in D,$$

где $S_p(\mathbf{x})$ – частная сумма порядка p ряда $\sum u_k(\mathbf{x})$, и

$$\left| A - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для всех $\mathbf{x} \in D$

$$|S(\mathbf{x}) - A| \leqslant |S(\mathbf{x}) - S_p(\mathbf{x})| + \left| S_p(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k - A \right| <$$
$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \left| S_p(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \right|. \tag{16.3.3}$$

Так как

$$S_p(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = \sum_{k=1}^{p} (u_k(\mathbf{x}) - \alpha_k)$$

и здесь только конечное число слагаемых, существует такое $\delta > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in D$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$, имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (u_k(\mathbf{x}) - \alpha_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому из (16.3.3) следует, что для всех $\mathbf{x} \in D$ из проколотой δ-окрестности точки $\mathbf{x}_0$

$$|S(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon,$$

т.е. существует предел $\lim S(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ по множеству D и имеет место равенство (16.3.2).

Теорема доказана.

Когда здесь говорилось о δ-окрестности, считалось, что $\mathbf{x}_0$ является точкой, а не бесконечным символом. Легко понять, как записать доказательство, если $\mathbf{x}_0$ – бесконечный символ.

Из теоремы 16.3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 16.3.2. *Если члены ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mathbf{x}),$$

равномерно сходящегося на множестве D, непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 \in D$ по множеству D, то и сумма ряда непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ по множеству D.

В частности, если все функции $u_k(\mathbf{x})$ непрерывны на D, то сумма ряда непрерывна на D.

Последнее утверждение теоремы 16.3.2 кратко формулируют так.

Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Из признака Дини (теорема 16.2.4) и теоремы 16.3.2 вытекает, что для равномерной сходимости на компакте D ряда, члены которого – неотрицательные непрерывные на D функции, необходима и достаточна непрерывность суммы ряда на D.

Для функциональных последовательностей аналог теорем 16.3.1 и 16.3.2 имеет следующий вид.

Теорема 16.3.3. *Пусть $\mathbf{x}_0$ – предельная точка множества D и последовательность функций $\{f_k(\mathbf{x})\}$ при $k \to \infty$ сходится к функции $f(\mathbf{x})$ равномерно на D. Если для каждой функции $f_k(\mathbf{x})$ существует предел $\lim f_k(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ по множеству D, то существует предел $\lim f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ по множеству D и справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} \Big(\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x}) \Big) = \lim_{k\to\infty} \Bigg(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\in D}} f_k(\mathbf{x}) \Bigg).$$

В частности, если $\mathbf{x}_0 \in D$ и все функции $f_k(\mathbf{x})$ непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$ по множеству D, то предельная функция $f(\mathbf{x})$ также непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ по множеству D. А если функции $f_k(\mathbf{x})$ непрерывны на D, то и функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна на D.

Для доказательства положим $u_1(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x})$ и $u_k(\mathbf{x}) := f_k(\mathbf{x}) - f_{k-1}(\mathbf{x})$ при $k \geqslant 2$. Тогда

$$f_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x})$$

и остается только сослаться на теоремы 16.3.1 и 16.3.2.

Такой переход от последовательностей к рядам позволяет доказывать теоремы для рядов, а затем формулировать соответствующие утверждения для последовательностей. Разумеется, можно поступать и обратном порядке.

Из теоремы 16.3.3 вытекает другое доказательство того, что последовательность степеней $\{x^k\}$, сходящаяся в каждой точке отрезка $[0, 1]$, не сходится на этом отрезке равномерно, так как в этом случае предельная функция разрывна.

§ 16.4. Почленное дифференцирование равномерно сходящихся рядов

В этом и следующем параграфах рассматриваются функции одной переменной на отрезке $[a, b]$ действительной оси. Функции считаем, вообще говоря, комплекснозначными.

Начнем с вопроса о дифференцировании равномерно сходящихся последовательностей.

Теорема 16.4.1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность дифференцируемых функций $\{f_k(x)\}$, сходящаяся в некоторой точке x_0, а последовательность производных $\{f'_k(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится равномерно, предельная функция*

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

дифференцируема и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} f'_k(x). \tag{16.4.1}$$

Доказательство. Сначала установим равномерную сходимость последовательности $\{f_k(x)\}$ на $[a, b]$.

Согласно критерию Коши из условий теоремы следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что при $m, n > N$ выполняются оценки

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon \tag{16.4.2}$$

и

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{16.4.3}$$

для всех $x \in [a, b]$.

Оценим величину

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|.$$

Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, видим, что между x и x_0 существует такая точка ξ, что

$$(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0)) = (f'_m(\xi) - f'_n(\xi))(x - x_0).$$

Поэтому для всех $x \in [a, b]$ в силу (16.4.3) и (16.4.2)

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon(b - a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1).$$

Значит, последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

Докажем теперь дифференцируемость функции f и равенство (16.4.1).

Зафиксируем точку $x \in [a, b]$ и покажем, что последовательность функций

$$g_k(t) := \frac{f_k(t) - f_k(x)}{t - x}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

сходится равномерно на множестве $D_1 := [a, b] \setminus \{x\}$.

По определению функций g_k

$$g_m(t) - g_n(t) = \frac{1}{t - x}((f_m(t) - f_n(t)) - (f_m(x) - f_n(x))).$$

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа между x и t существует такая точка ξ, что

$$g_m(t) - g_n(t) = f'_m(\xi) - f'_n(\xi).$$

Поэтому для m и n, при которых справедлива оценка (16.4.3), имеем

$$|g_m(t) - g_n(t)| < \varepsilon.$$

Так как эта оценка имеет место при всех $t \in D_1$, она доказывает, что последовательность $\{g_k(t)\}$ сходится равномерно относительно t, принадлежащих множеству D_1.

Для каждой функции $g_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, существует предел

$$\lim_{t \to x} g_k(t) = f'_k(x)$$

(в точках a и b это – односторонние производные).

Пользуясь теоремой 16.3.3 о предельном переходе в равномерно сходящихся последовательностях, получаем

$$\lim_{k\to\infty} f_k'(x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to x} g_k(t) = \lim_{t\to x}\lim_{k\to\infty} g_k(t) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Значит, функция f имеет в точке x производную, равную

$$\lim_{k\to\infty} f_k'(x).$$

Теорема доказана.

Заметим, что если в теореме 16.4.1 производные функций $f_k(x)$ непрерывны, то согласно теореме 16.3.2 непрерывной будет и производная предельной функции.

Из теоремы 16.4.1 вытекает следующее утверждение о почленном дифференцировании рядов с равномерно сходящимся рядом производных.

Теорема 16.4.2. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задан ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \tag{16.4.4}$$

в котором все функции $u_k(x)$ *дифференцируемы на* $[a, b]$. *Если ряд* (16.4.4) *сходится в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$, *а ряд производных*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x), \tag{16.4.5}$$

сходится равномерно на $[a, b]$, *то на* $[a, b]$ *ряд* (16.4.4) *сходится равномерно, его сумма дифференцируема и справедливо равенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x). \tag{16.4.6}$$

Опираясь на теорему 16.4.2, приведем пример функции, непрерывной на всей оси, но не имеющей производной ни в одной точке.

Этими свойствами обладает функция

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\sin 8^k x,$$

непрерывность которой вытекает из равномерной сходимости ряда.

Рассмотрим в произвольной точке x разность

$$\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}[\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x].$$

Знак $+$ или $-$ выберем позднее.

Если $k > n$, то $8^k \cdot 2^{-3n-1}$ – целое четное число и в силу периодичности синуса

$$\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) = \sin 8^k x.$$

Значит,

$$\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}[\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x]. \tag{16.4.7}$$

Пользуясь неравенством $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$, оценим сумму

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}[\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x]\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} \cdot 8^k \pi 2^{-3n-1} = 2^{-3n-1}\pi \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = \\ = 2^{-3n-1}\pi \frac{4-4^n}{1-4} < 2^{-n}\frac{\pi}{6}.\end{aligned} \tag{16.4.8}$$

Слагаемое при $k = n$ суммы в правой части (16.4.7) равно

$$\begin{aligned}2^{-n}[\sin 8^n(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^n x] = \\ = 2^{-n}\left[\sin\left(8^n x \pm \frac{\pi}{2}\right) - \sin 8^n x\right] = \\ = 2^{-n} \cdot 2\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(8^n x \pm \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned} \tag{16.4.9}$$

До сих пор знак $+$ или $-$ в формуле (16.4.7) не имел значения. При каждом n этот знак можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\cos\left(8^n x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{16.4.10}$$

В самом деле, расстояние между точками

$$8^n x + \frac{\pi}{4}, \quad 8^n x - \frac{\pi}{4}$$

равно $\pi/2$, а $|\cos(\alpha + \pi/2)| = |\sin\alpha|$ для любых α и по крайней мере одно из чисел $|\cos\alpha|$ и $|\sin\alpha|$ больше или равно $1/\sqrt{2}$.

Из (16.4.7)–(16.4.10) следует, что при соответствующем выборе знака

$$|\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x)| > 2^{-n} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-n} \cdot \frac{\pi}{6} = \\ = 2^{-n}\Big(1 - \frac{\pi}{6}\Big).$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\left|\frac{\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x)}{\pm\pi 2^{-3n-1}}\right| > \Big(1 - \frac{\pi}{6}\Big)\frac{1}{\pi}\,2^{2n+1} \to \infty,$$

т.е. функция $\varphi(x)$ не имеет производной в точке x.

§ 16.5. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов

Прежде, чем выяснять условия, при которых справедливо равенство

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(x)\,dx, \tag{16.5.1}$$

заметим, что если все функции $\varphi_k(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum \varphi_k(x)$ сходится в каждой точке $[a, b]$, сумма ряда может оказаться неинтегрируемой функцией.

В самом деле, пусть $r_1, r_2, \ldots$ – последовательность всех рациональных чисел отрезка $[a, b]$ и

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x = r_k, \\ 0, & \text{если } x \neq r_k. \end{cases}$$

Тогда все функции $\varphi_k(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, ряд $\sum \varphi_k(x)$ сходится всюду на $[a, b]$ и суммой ряда является функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

которая не интегрируема.

Таким образом, говоря о равенстве (16.5.1), на ряд $\sum \varphi_k(x)$ нужно накладывать условия, обеспечивающие интегрируемость его суммы.

Сначала рассмотрим вопрос об интегрировании последовательностей функций.

Теорема 16.5.1. *Если последовательность функций $\{f_k(x)\}$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, сходится к функции $f(x)$ равномерно на $[a, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, существует предел*

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx, \qquad (16.5.2)$$

т.е. возможен предельный переход под знаком интеграла.

Доказательство. Пользуясь равномерной сходимостью последовательности функций $\{f_k(x)\}$, по заданному $\varepsilon > 0$ находим число N такое, что для всех $x \in [a, b]$ и всех $p > N$

$$|f(x) - f_p(x)| < \varepsilon,$$

откуда

$$f_p(x) - \varepsilon < f(x) < f_p(x) + \varepsilon. \qquad (16.5.3)$$

Эти неравенства доказывают, в частности, ограниченность функции $f(x)$.

Сравним верхние и нижние суммы Дарбу функций $f(x)$ и $f_p(x)$ при $p > N$.

Из правой оценки (16.5.3) следует, что для каждого разбиения T отрезка $[a, b]$

$$\overline{S_T}(f) \leqslant \overline{S_T}(f_p) + \varepsilon(b - a), \qquad (16.5.4)$$

а из левой оценки (16.5.3) следует неравенство

$$\underline{S_T}(f) \geqslant \underline{S_T}(f_p) - \varepsilon(b - a). \qquad (16.5.5)$$

Для функции $f_p(x)$ в силу ее интегрируемости существует разбиение T^*, для которого

$$\overline{S_{T^*}}(f_p) - \underline{S_{T^*}}(f_p) < \varepsilon.$$

Отсюда и из (16.5.4) и (16.5.5) находим

$$\overline{S_{T^*}}(f) - \underline{S_{T^*}}(f) \leqslant (\overline{S_{T^*}}(f_p) + \varepsilon(b-a)) - (\underline{S_{T^*}}(f_p) - \varepsilon(b-a)) < \\ < \varepsilon(1 + 2(b-a)).$$

Из этой оценки согласно теореме 9.2.5 следует интегрируемость функции $f(x)$.

Поэтому из неравенств (16.5.3) получаем

$$\int_a^b f_p(x)\,dx - \varepsilon(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_p(x)\,dx + \varepsilon(b-a).$$

Значит,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_p(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Так как это неравенство имеет место при всех $p > N$, оно завершает доказательство теоремы.

Теорему 16.5.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 16.5.2. *Допустим, что последовательность функций $\{f_k(x)\}$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, сходится к функции $f(x)$ равномерно на $[a, b]$. Тогда для каждой неотрицательной интегрируемой на $[a, b]$ функции $g(x)$ такой, что при всех k сходятся интегралы*

$$\int_a^b f_k(x)\,g(x)\,dx,$$

интеграл

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

сходится и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)g(x)\,dx.$$

Для доказательства нужно умножить неравенства (16.5.3) на $g(x)$ и проинтегрировть полученные неравенства.

Здесь интегралы с функцией $g(x)$ могут быть и собственными и несобственными.

Для рядов соответствующее утверждение формулируется так.

Теорема 16.5.3. *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$$

сходится равномерно и все функции $\varphi_k(x)$ *интегрируемы. Тогда для каждой неотрицательной интегрируемой на* $[a,b]$ *функции* $g(x)$, *для которой при всех* k *сходятся интегралы*

$$\int_a^b \varphi_k(x) g(x)\, dx,$$

сходится интеграл

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) g(x)\, dx$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) g(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(x) g(x)\, dx.$$

Заметим, что при выполнении условий теорем 16.5.1–16.5.3 интегралы по отрезку $[a,b]$ можно заменить на интегралы по произвольному отрезку, содержащемуся в $[a,b]$.

§ 16.6. Степенные ряды

Определение. *Степенными рядами* называют ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z^*)^k,$$

где коэффициенты ряда c_k, фиксированное число z^* и независимая переменная z являются, вообще говоря, комплексными числами.

Иногда степенные ряды образно называют “многочленами бесконечной степени”.

При изучении степенных рядов будем для простоты считать (как это делают обычно) $z^* = 0$. К этому случаю легко прийти, взяв в качестве новой переменной разность $z - z^*$.

Теорема 16.6.1 (Первая теорема Абеля о степенных рядах). *Если степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{16.6.1}$$

сходится в некоторой точке $z_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно и равномерно в каждом круге вида* $|z| \leqslant q$, *где* q *– произвольное число, удовлетворяющее условию* $0 < q < |z_0|$.

Доказательство. В силу сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k$$

существует такое число M, что $|c_k z_0^k| \leqslant M$ при всех k.

Если $|z| \leqslant q < |z_0|$, то

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^k \leqslant M\left(\frac{q}{|z_0|}\right)^k$$

и в силу оценки

$$\frac{q}{|z_0|} < 1$$

ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\left(\frac{q}{|z_0|}\right)^k$$

сходится. Поскольку модули членов ряда (16.6.1) не превосходят членов сходящегося числового ряда, согласно признаку Вейерштрасса (теорема 16.2.1) ряд (16.6.1) сходится абсолютно и равномерно при всех z таких, что $|z| \leqslant q$.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что условие сходимости ряда (16.6.1) в точке z_0 можно заменить на существование числа M, для которого $|c_k z_0^k| \leqslant M$ при всех k.

Отметим, что для ряда (16.6.1), сходящегося при $z_0 \neq 0$, во всем круге $|z| < |z_0|$ равномерной сходимости может не быть. Например, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

сходится при $z = -1$. Если бы этот ряд равномерно сходился в круге $|z| < 1$, то согласно критерию Коши для каждого $\varepsilon > 0$ существовало бы число N такое, что для всех $|z| < 1$ и всех $n \geqslant m > N$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{z^k}{k}\right| < \varepsilon.$$

Отсюда в пределе при $z \to 1$ следовало бы неравенство

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для всех} \quad n \geqslant m > N,$$

противоречащее расходимости гармонического ряда.

Важными следствиями теоремы 16.6.1 являются следующие два утверждения.

1. *Если ряд* (16.6.1) *сходится при* $z_0 \neq 0$, *то он абсолютно сходится во всех точках* z *таких, что* $|z| < |z_0|$.

2. *Если ряд* (16.6.1) *расходится при* z_0, *то он расходится во всех точках* z, *для которых* $|z| > |z_0|$.

Определение. Величину

$$R := \sup |z|,$$

где верхняя грань берется по всем z, при которых сходится ряд (16.6.1), называют *радиусом сходимости* этого ряда.

Понятно, что радиус сходимости равен верхней грани значений $|z|$, взятой по всем z, для которых ряд сходится абсолютно.

Для каждого степенного ряда

$$0 \leqslant R \leqslant +\infty.$$

При этом радиус сходимости может равняться нулю (такой пример будет приведен позднее) и равняться бесконечности – это утверждение очевидно.

Определение. Если радиус сходимости R степенного ряда (16.6.1) не равен нулю, то открытый круг $|z| < R$ на комплексной плоскости называют *кругом сходимости* этого ряда.

При этом берется круг на комплексной плоскости и в том случае, когда рассматриваются только действительные значения аргумента z.

Из теоремы Абеля 16.6.1 и непрерывности суммы равномерно сходящихся рядов непрерывных функций следует, что сумма степенного ряда в круге его сходимости является непрерывной функцией.

Если R – радиус сходимости степенного ряда, то в точках z, для которых $|z| > R$, ряд расходится. Вопрос о поведении степенного ряда на границе его круга сходимости, т.е. при z, для которых $|z| = R$, рассмотрим позднее.

Теорема 16.6.2 (Формула Коши–Адамара). *Для радиуса сходимости степенного ряда* (16.6.1) *справедливо равенство*

$$R = \frac{1}{A}, \tag{16.6.2}$$

где

$$A := \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}, \tag{16.6.3}$$

называемое формулой Коши–Адамара.

Доказательство. Из определения величины A следует, что $0 \leqslant A \leqslant +\infty$. При $A = 0$ равенство (16.6.2) нужно понимать как $R = +\infty$, а при $A = +\infty$ равенство (16.6.2) означает $R = 0$.

1°. Покажем сначала, что

$$R \leqslant \frac{1}{A}. \tag{16.6.4}$$

При $R = 0$ это очевидно. Если $R > 0$, возьмем произвольное число r, удовлетворяющее условию $0 < r < R$.

При $z = r$ ряд (16.6.1) сходится, значит, существует число $M > 0$ такое, что $|c_k r^k| < M$ для всех k. Отсюда

$$\sqrt[k]{|c_k r^k|} = r\sqrt[k]{|c_k|} < \sqrt[k]{M},$$

т.е.

$$\sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1}{r}\sqrt[k]{M}.$$

Предел корня $\sqrt[k]{M}$ при $k \to \infty$ равен 1. Поэтому

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{1}{r}\sqrt[k]{M} = \frac{1}{r},$$

значит, $A \leqslant 1/r$ и
$$r \leqslant \frac{1}{A}.$$

Так как эта оценка справедлива для всех $r < R$, из нее вытекает (16.6.4).

2°. Докажем теперь, что
$$R \geqslant \frac{1}{A}. \tag{16.6.5}$$

При $R = +\infty$ это очевидно, поэтому будем считать $R < +\infty$.

Для любого числа r_* такого, что $r_* > R$, ряд (16.6.1) при $z = r_*$ расходится. Тем более расходится ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r_*^k. \tag{16.6.6}$$

Значит,
$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k| r_*^k} \geqslant 1, \tag{16.6.7}$$
иначе согласно признаку Коши (теорема 15.2.7) ряд (16.6.6) сходился бы.

Из (16.6.7) получаем $A\, r_* \geqslant 1$ и, таким образом,
$$r_* \geqslant \frac{1}{A}.$$

Поскольку оценка имеет место для любого $r^* > R$, из нее вытекает (16.6.5).

Равенство (16.6.3) следует из (16.6.4) и (16.6.5).

Теорема доказана.

С помощью формулы Коши–Адамара легко построить ряд, радиус сходимости которого равен 0. Таким свойством обладает, например, ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k. \tag{16.6.8}$$

В этом случае
$$\sqrt[k]{|c_k|} = k,$$
значит, $R = 0$ и ряд (16.6.8) сходится только при $z = 0$.

Теорема 16.6.3. *Степенные ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^k$$

имеют одинаковые радиусы сходимости.

Доказательство. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1,$$

то согласно теореме 2.8.3 о верхнем пределе произведения последовательностей имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|kc_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\sqrt[k]{k}\,\sqrt[k]{|c_k|}\right] = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Отсюда в силу формулы Коши–Адамара вытекает утверждение теоремы.

Из теоремы 16.6.3 следует, что равны радиусы сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, z^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\, z^k. \tag{16.6.9}$$

Радиус сходимости первого из них очевидно равен 1, значит, равны 1 и радиусы сходимости второго и третьего рядов (16.6.9).

Вместе с тем на границе круга сходимости, т.е. при $|z| = 1$, эти ряды ведут себя по-разному.

Первый из рядов (16.6.9) во всех точках окружности $|z| = 1$ расходится, так как для таких z общий член ряда не стремится к нулю. Второй из этих рядов сходится при $z = -1$ и расходится при $z = 1$. Наконец, третий ряд (16.6.9) сходится во всех точках окружности $|z| = 1$, так как для таких z модули членов ряда равны членам сходящегося числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Таким образом, степенной ряд на границе круга сходимости может сходиться во всех точках, сходиться в одних точках и расходиться в других, или расходиться во всех точках.

Выясним связь рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{16.6.10}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}. \tag{16.6.11}$$

Если переменная z принимает действительные значения, ряд (16.6.11) является почленно продифференцированным рядом (16.6.10).

Покажем, что такое утверждение справедливо и для производных по комплексному аргументу z.

Определение. Если функция $f(z)$ комплексной переменной z определена в некоторой окрестности точки z_0, *то производной $f(z)$ по комплексному аргументу* в точке z_0 называют предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

если этот предел существует.

Как и производную по действительному аргументу, эту производную обозначают

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0).$$

Для производной функции z^k, где $k = 1, 2, \ldots$, по комплексному аргументу справедливо равенство

$$(z^k)' = k z^{k-1}. \tag{16.6.12}$$

В самом деле,

$$\frac{(z + \Delta z)^k - z^k}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \sum_{m=0}^{k-1} \Delta z (z + \Delta z)^m z^{k-1-m} =$$
$$= \sum_{m=0}^{k-1} (z + \Delta z)^m z^{k-1-m}.$$

В полученной сумме k слагаемых, каждое из которых при $\Delta z \to 0$ стремится к z^{k-1}. Отсюда следует равенство (16.6.12).

Теорема 16.6.4. *Если степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то сумма этого ряда во всех точках круга сходимости имеет производную по комплексному аргументу, равную сумме производных членов ряда.*

Доказательство. Из теоремы 16.6.3 следует, что ряд из производных имеет такой же радиус сходимости, как и исходный ряд.

Пусть

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

и радиус сходимости этого ряда $R > 0$.

Рассмотрим произвольную точку z из круга сходимости ряда, т.е. $|z| < R$. Выберем число ρ, для которого $|z| < \rho < R$. Будем придавать аргументу функции $f(z)$ приращения Δz, при которых $|z+\Delta z| < \rho$. Пользуясь почленным сложением сходящихся рядов, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta z}(f(z+\Delta z) - f(z)) &= \frac{1}{\Delta z}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+\Delta z)^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right) = \\ &= \frac{1}{\Delta z}\sum_{k=1}^{\infty} c_k((z+\Delta z)^k - z^k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{m=0}^{k-1} (z+\Delta z)^m z^{k-1-m}. \qquad (16.6.13)\end{aligned}$$

Поскольку точки z и $z + \Delta z$ лежат в круге радиуса ρ, справедлива оценка

$$\left|\sum_{m=0}^{k-1} (z+\Delta z)^m z^{k-1-m}\right| < k\rho^{k-1}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{m=0}^{k-1} (z+\Delta z)^m z^{k-1-m}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| k\rho^{k-1}.$$

Полученный числовой ряд сходится, так как $\rho < R$.

Значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{m=0}^{k-1} (z+\Delta z)^m z^{k-1-m}$$

в круге $|z| \leqslant \rho$ сходится равномерно относительно Δz, удовлетворяющих условию $|z + \Delta z| < \rho$. Поэтому для нахождения предела при $\Delta z \to 0$ суммы ряда из правой части (16.6.13) можно переходить к пределу почленно. Так получим

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}(f(z+\Delta z) - f(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k z^{k-1}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 16.6.4 в качестве следствия вытекает такое принципиально важное утверждение.

Теорема 16.6.5. *Если*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{16.6.14}$$

где ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то функция $f(z)$ во всех точках, принадлежащих кругу сходимости ряда имеет производные по комплексному аргументу всех порядков и равенство (16.6.14) *можно почленно дифференцировать любое число раз.*

Следующее утверждение называют теоремой единственности для степенных рядов.

Теорема 16.6.6. *Пусть $\{z_n\}$ – последовательность ненулевых точек, сходящихся к нулю при $n \to \infty$. Если значения сумм степенных рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \tag{16.6.15}$$

равны во всех точках z_n, то $c_k = d_k$ для всех k, т.е. ряды (16.6.15) *совпадают тождественно.*

Доказательство. Перейдем в равенстве

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z_n^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z_n^k \tag{16.6.16}$$

к пределу при $n \to \infty$. Это можно сделать почленно, ибо точки z_n принадлежат кругам сходимости рядов (16.6.15). Так как $z_n \to 0$

при $n \to \infty$, пределом ряда из левой части равенства (16.6.16) является число c_0, а пределом ряда из правой части – число d_0. Значит, $c_0 = d_0$.

Опустим в (16.6.16) слагаемые, соответствующие $k = 0$, и пользуясь тем, что $z_n \neq 0$, разделим полученные равенства на z_n:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z_n^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k z_n^{k-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{16.6.17}$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, находим $a_1 = b_1$. Далее повторяем ту же процедуру, т.е. опускаем в (16.6.17) слагаемые при $k = 1$, делим получившееся равенство на z_n и устремляем n к бесконечности. В результате приходим к равенству $c_2 = d_2$. Повторяя этот процесс шаг за шагом, видим, что $c_k = d_k$ при всех k.

Теорема доказана.

Теорема 16.6.7 (Вторая теорема Абеля о степенных рядах). *Пусть ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{16.6.18}$$

сходится в точке $w \neq 0$. Тогда на отрезке, соединяющем на комплексной плоскости точки 0 и w, т.е. при $z = \alpha w$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, ряд (16.6.18) *сходится равномерно и его сумма на этом отрезке является непрерывной функцией.*

Доказательство. На отрезке, о котором говорится в теореме, ряд (16.6.18) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha w)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \cdot \alpha^k.$$

Нужно доказать равномерную относительно $\alpha \in [0, 1]$ сходимость этого ряда. Так как последовательность функций $\{\alpha^k\}$ на $[0, 1]$ монотонна и ограничена, а числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$$

сходится, и значит, сходится равномерно относительно α, то согласно признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов (теорема 16.2.3) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha w)^k$$

сходится равномерно относительно $\alpha \in [0,1]$ и в силу теоремы 16.3.2 его сумма является на $[0,1]$ непрерывной функцией от α.

Теорема доказана.

Если в теореме 16.6.7 точка w лежит внутри круга сходимости ряда (16.6.18), это утверждение вытекает из первой теоремы Абеля 16.6.1. Новым в теореме 16.6.7 является случай, когда точка w лежит на границе круга сходимости ряда (16.6.18).

Отметим, что несмотря на условность названий “первая теорема Абеля”, “вторая теорема Абеля” эти названия устоялись и их можно считать общепринятыми.

§ 16.7. Ряды Тейлора

Определение. Функцию комплексной переменной $f(z)$, которая в некоторой окрестности точки z_0 равна сумме ряда по степеням $z - z_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \tag{16.7.1}$$

называют *аналитической в точке* z_0.

Согласно теореме 16.6.5 в круге сходимости ряда (16.7.1) сходятся также ряды из производных любого порядка этого ряда. Поэтому из равенства

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k k(k-1)\cdots(k-m+1)(z-z_0)^{k-m}$$

вытекают представления коэффициентов ряда (16.7.1)

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0), \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Таким образом, ряд (16.7.1) приобретает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k. \tag{16.7.2}$$

Определение. Если функция f имеет в точке z_0 производные любого порядка, то ряд (16.7.2) называют *рядом Тейлора функции f в точке z_0*.

Если степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то согласно сказанному выше он является рядом Тейлора своей суммы.

Определения аналитической функции и ее ряда Тейлора относятся и к действительнозначным функциям действительной переменной.

Для таких функций в главе 6 были определены многочлен Тейлора и формула Тейлора. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0 (т.е. имеет в этой точке производные любого порядка), для нее можно записать многочлен Тейлора любой степени и стремление к нулю остаточного члена формулы Тейлора в точке x

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k, \qquad n \to \infty, \qquad (16.7.3)$$

равносильно сходимости при этом x ряда Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

к значению $f(x)$, т.е. равносильно аналитичности функции f в точке x_0.

Напомним, что в § 6.3 была построена функции $\varphi(x)$, для которой в точке 0 при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место равенства $\varphi^{(k)}(0) = 0$, но функция $\varphi(x)$ обращается в нуль только в этой точке. Таким образом, ряд Тейлора функции φ по степеням x к ней не сходится.

В § 6.5 установлено стремление к нулю остаточного члена формулы Тейлора (16.7.3) некоторых элементарных функций $f(x)$. Сейчас вернемся к этим вопросам и продолжим изучение поведения остаточного члена формулы Тейлора элементарных функций при $n \to \infty$.

Ряды Тейлора будем рассматривать в нуле. Ряды Тейлора в нуле часто называют рядами Маклорена, но исторически это не оправдано.

1°. *Показательная функция e^x.* В гл. 6 было показано, что остаточный член формулы Тейлора функции e^x для всех $x \in \mathbb{R}$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, при всех x

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k. \tag{16.7.4}$$

Заметим, что сходимость этого ряда при всех x легко установить с помощью признака Даламбера.

Так как ряд из (16.7.4) сходится при $x \in (-\infty, +\infty)$, то при всех комплексных z сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k. \tag{16.7.5}$$

Сумму этого ряда обозначают e^z, т.е. полагают по определению

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k. \tag{16.7.6}$$

Таким образом, показательная функция с действительных значений аргумента распространена на комплексные значения аргумента.

Свойства функции e^z устанавливаются с помощью формулы (16.7.6). Так, из равномерной на произвольном компакте комплексной плоскости сходимости ряда (16.7.5) вытекают непрерывность и бесконечная дифференцируемость функции e^z во всей комплексной плоскости.

Докажем в качестве примера справедливость равенства

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{16.7.7}$$

для любых комплексных чисел z и w. Имеем

$$e^z \cdot e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^k\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\, w^m\right).$$

Эти ряды сходятся абсолютно для всех z, w. Из теоремы 15.5.5 следует, что при умножении таких рядов можно произвольным образом группировать слагаемые, получающиеся при умножении членов одного ряда на члены другого. Поэтому

$$e^z \cdot e^w = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{p} \frac{z^{p-q} w^q}{(p-q)!\, q!}\right) =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\sum_{q=0}^{p} \frac{p!}{(p-q)!\, q!}\, z^{p-q} w^q\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(z+w)^p = e^{z+w}.$$

2°. *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$. В гл. 6 было доказано, что остаточные члены формул Тейлора функций $\sin x$ и $\cos x$ стремятся к нулю для всех x. Таким образом, при всех действительных значениях x

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Пользуясь сходимостью этих рядов, вводят функции синус и косинус комплексного аргумента по формулам

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \tag{16.7.8}$$

Синус и косинус комплексного аргумента можно выразить через показательную функцию. В самом деле,

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{z^k}{k!}, \qquad e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k \frac{z^k}{k!}. \tag{16.7.9}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 2\cos z.$$

Аналогично находим

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2\sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2i\sin z.$$

Итак, справедливы равенства

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{16.7.10}$$

Из (16.7.10) следует, что

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{16.7.11}$$

Если $z = x+iy$ – разложение комплексного числа z на действительную и мнимую части, то с помощью (16.7.11) можно получить разложение e^z на действительную и мнимую части:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y, \tag{16.7.12}$$

Равенства (16.7.10)–(16.7.12) называют *формулами Эйлера*.

При $x = 0$ из (16.7.12) получаем, что для произвольного действительного числа y

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{16.7.13}$$

С помощью (16.7.13) легко доказать *формулу Муавра*

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos ny + i \sin ny. \tag{16.7.14}$$

В самом деле, согласно (16.7.13) имеем

$$(e^{iy})^n = (\cos y + i \sin y)^n$$

и

$$(e^{iy})^n = e^{iny} = \cos ny + i \sin ny.$$

Выделив в (16.7.14) действительную и мнимую части, получим с помощью формулы бинома Ньютона

$$\begin{gathered}\cos ny = \cos^n y - C_n^2 \cos^{n-2} y \sin^2 y + C_n^4 \cos^{n-4} y \sin^4 y - \cdots, \\ \sin ny = C_n^1 \cos^{n-1} y \sin y - C_n^3 \cos^{n-3} y \sin^3 y + \cdots.\end{gathered} \tag{16.7.15}$$

Из равенства (16.7.15), в частности, следует, что функцию $\cos ny$ можно представить в виде многочлена по степеням $\cos y$.

Функция $\cos y + i \sin y$ имеет период 2π. Поэтому из (16.7.12) следует, что

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Таким образом, показательная функция e^z комплексного аргумента z имеет период $2\pi i$.

3°. *Гиперболические синус и косинус.* Так как для гиперболических синуса $\operatorname{sh} x$ и косинуса $\operatorname{ch} x$ остаточные члены формул Тейлора стремятся к нулю для всех x, то справедливы представления этих функций в виде рядов Тейлора

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Эти равенства позволяют распространить гиперболические синус и косинус с действительных на комплексные значения аргумента по формулам

$$\operatorname{sh} z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \tag{16.7.16}$$

Отсюда легко вывести для комплексных z равенства

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \qquad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \tag{16.7.17}$$

аналоги которых для действительных значений аргумента были взяты в гл. 5 в качестве определений гиперболических синуса и косинуса. Разумеется, и здесь можно было взять в качестве определения формулы (16.7.17) и вывести затем с их помощью разложения (16.7.16).

Установим связь тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов.

Для этого рассмотрим функции $\sin z$ и $\cos z$ на мнимой оси, т.е. при $z = iy$, где y – действительные числа. Имеем

$$\sin iy = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} i \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = i \operatorname{sh} y,$$
$$\cos iy = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \operatorname{ch} y.$$

Таким образом, $\operatorname{ch} y$ совпадает с функцией $\cos z$ на мнимой оси $z = iy$, а $\operatorname{sh} y$ с точностью до множителя i совпадает с функцией $\sin z$ на мнимой оси. Это объясняет аналогию свойств тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов. Подробно эти вопросы обсуждаются в курсе комплексного анализа.

До сих пор рассматривались ряды Тейлора функций, представимых степенными рядами при всех значениях аргумента.

Для функций, ряды Тейлора которых имеют конечный радиус сходимости, будет использоваться следующее утверждение, вытекающее из второй теоремы Абеля о степенных рядах.

Теорема 16.7.1. *Если ряд Тейлора функции f сходится в точке z_0, в которой f непрерывна, то значение $f(z_0)$ равно сумме ряда Тейлора функции f в этой точке.*

4°. *Логарифмическая функция* $\ln(1+x)$. В § 6.5 для функции $\ln(1+x)$ были выписаны многочлены Тейлора и показано, что для $x \in [-1/2, +1]$ остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, при $x \in [-1/2, +1]$ имеет место равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}. \tag{16.7.18}$$

Покажем, что это равенство выполняется при всех $x \in (-1, +1]$, опираясь только на развитую выше теорию степенных рядов и не пользуясь полученными в § 6.5 результатами.

При $t \in (-1, +1)$ справедливо равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m t^m = \frac{1}{1+t}. \tag{16.7.19}$$

Так как ряд в (16.7.19) сходится равномерно на каждом отрезке $|t| \leqslant x < 1$, то на любом отрезке, содержащемся в интервале $(-1, 1)$, ряд из (16.7.19) можно интегрировать почленно. Значит, при всех $|x| < 1$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^m t^m \, dt =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{m+1}}{m+1} \bigg|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Таким образом, равенство (16.7.18) обосновано для $|x| < 1$. Поскольку функция $\ln(1+x)$ представлена сходящимся к ней степенным рядом, этот ряд является ее рядом Тейлора.

Радиус сходимости ряда Тейлора функции $\ln(1+x)$ равен 1. В самом деле, этот ряд расходится при $x = -1$, так как тогда он только знаком отличается от гармонического ряда. Вместе с тем, согласно признаку Лейбница ряд из (16.7.18) сходится при $x = +1$.

Справедливость равенства (16.7.18) при $x = 1$ вытекает из теоремы 16.7.1.

В силу сказанного выше ряд из (16.7.18) вне промежутка $(-1, 1]$ расходится. Отметим, что при $x \leqslant -1$ функция $\ln(1+x)$ не определена, а при $x > 1$ она определена и нетрудно показать, что является даже во всех этих точках аналитической, но ее нельзя представить рядом по степеням x.

Не будем говорить о распространении логарифмической функции на комплексные значения аргумента. Отметим только, что ввиду периодичности функции e^z обратная к ней функция должна быть многозначной. Эти вопросы рассматриваются в курсе комплексного анализа.

5°. *Функция* $\operatorname{arctg} x$. Ряд Тейлора функции $\operatorname{arctg} x$ получим с помощью рассуждений, аналогичных проведенным для функции $\ln(1+x)$.

Будем исходить из равенства

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}, \tag{16.7.20}$$

радиус сходимости ряда в котором равен 1. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-x, +x]$, где $0 < x < 1$.

При интегрировании равенства (16.7.20) получим, что для всех $x \in (-1, +1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\, dt = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\bigg|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Таким образом, функция $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1, +1)$ представима рядом Тейлора

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{16.7.21}$$

Легко показать, что радиус сходимости этого ряда равен 1.

Согласно теореме 16.7.1 равенство (16.7.21) имеет место и в точках ± 1, так как в этих точках ряд из (16.7.21) сходится.

6°. *Степенная функция* $(1+x)^\alpha$. Для целых неотрицательных значений показателя α функция $(1+x)^\alpha$ является многочленом и ее ряд Тейлора представляет собой запись этого многочлена по степеням x.

Будем далее считать, что α отрицательное или положительное, но не целое число.

Функция $f(x) := (1+x)^\alpha$ бесконечно дифференцируема в нуле. Ее производные равны

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Поэтому

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

и ряд Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ имеет вид

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k. \tag{16.7.22}$$

Найдем радиус сходимости ряда (16.7.22). Обозначим члены этого ряда $b_k(x)$ и выясним, когда он сходится абсолютно. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{|b_{k+1}(x)|}{|b_k(x)|} &= \\ &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!}\, x^{k+1} \cdot \frac{k!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\, x^k}\right| = \\ &= \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\, x\right|.\end{aligned}$$

Полученное выражение при $k \to \infty$ стремится к $|x|$.

Значит, согласно признаку Даламбера ряд (16.7.22) абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Таким образом, радиус сходимости ряда равен 1.

Докажем теперь, что при $|x| < 1$ сумма ряда (16.7.22) равна $(1+x)^\alpha$.

Для этого запишем формулу Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ с остаточным членом в интегральной форме (см. (9.6.9))

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt,$$

и покажем, что если $|x| < 1$, остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Имеем

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1}\,dt.$$

Представим выражение

$$\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n$$

в виде произведения

$$x^n\left(\frac{1-(t/x)}{1+t}\right)^n.$$

Числа t и x имеют одинаковые знаки и $|t| \leqslant |x| < 1$. Поэтому

$$0 \leqslant \frac{1-(t/x)}{1+t} \leqslant \frac{1-(t/x)}{1-|t|} \leqslant 1.$$

Значит, справедлива оценка

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}\,|x|^n \cdot \left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,dt\right|. \qquad (16.7.23)$$

Выше с помощью признака Даламбера была доказана сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}\,|x|^n$$

при $|x| < 1$. Значит, общий член этого ряда стремится к нулю и, следовательно, в силу (16.7.23) $R_n(x)$ для $|x| < 1$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, при $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k. \qquad (16.7.24)$$

Выясним, справедливо ли это равенство в точках ± 1.

Сначала рассмотрим вопрос об абсолютной сходимости ряда из (16.7.24) при $|x| = 1$, т.е. сходится ли ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)|}{k!}. \tag{16.7.25}$$

Обозначим члены этого ряда a_k. Тогда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)|}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)|} = \frac{|\alpha-k|}{k+1}. \tag{16.7.26}$$

Для $k > \alpha$ имеем

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k\left(1 - \frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \frac{k}{k+1}(1+\alpha).$$

Таким образом, согласно предельной форме признака Раабе (теорема 15.4.2) ряд (16.7.25) при $\alpha+1 > 1$ сходится, а при $\alpha+1 < 1$ расходится.

Итак, при $\alpha > 0$ ряд из (16.7.24) в точках ± 1 сходится абсолютно, а при $\alpha < 0$ абсолютной сходимости в этих точках нет.

Рассмотрим теперь сходимость ряда из (16.7.24) в точках ± 1.

В точке -1 все члены ряда (16.7.24) при $k > \alpha + 1$ имеют одинаковые знаки. Таким образом, при $x = -1$ сходимость ряда равносильна абсолютной сходимости. Значит, в точке -1 ряд (16.7.24) сходится, если $\alpha > 0$, и расходится, если $\alpha < 0$.

Если $x = 1$, то начиная с $k > \alpha + 1$, знаки членов ряда из (16.7.24) чередуются.

В силу (16.7.26) для $k > \alpha$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-\alpha}{k+1}.$$

Поэтому $a_{k+1} \geqslant a_k$, если

$$\frac{k-\alpha}{k+1} \geqslant 1,$$

т.е. при $\alpha \leqslant -1$ числа a_k не стремятся к нулю и ряд из (16.7.24) в точке 1 расходится.

Осталось рассмотреть $\alpha \in (-1, 0)$. Так как в этом случае

$$\frac{k-\alpha}{k+1} < 1,$$

то $a_{k+1} < a_k$, т.е. члены ряда (16.7.25) монотонно убывают.

Покажем, что для $\alpha \in (-1, 0)$ числа $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно, согласно признаку Лейбница ряд из (16.7.24) при $x = 1$ сходится. Имеем

$$a_k = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \right| = |\alpha| \prod_{m=2}^{k} \frac{m-\alpha-1}{m}.$$

Таким образом, числа a_k равны частным произведениям бесконечного произведения

$$|\alpha| \prod_{m=2}^{\infty} \frac{m-\alpha-1}{m} = |\alpha| \prod_{m=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha+1}{m}\right), \tag{16.7.27}$$

все множители которого положительны и меньше 1.

Согласно теореме 15.8.3 это произведение сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\alpha+1}{m}.$$

Значит, бесконечное произведение (16.7.27) расходится.

Так как все множители произведения (16.7.27) положительны и меньше 1, его частные произведения убывают и расходиться такое произведение может только к нулю, следовательно, $a_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Итак, в точке 1 ряд из (16.7.24) сходится при $\alpha > -1$ и расходится при $\alpha \leqslant -1$.

В тех случаях, когда при $x = \pm 1$ ряд из (16.7.24) сходится, знак равенства в (16.7.24) обосновывается ссылкой на теорему 16.7.1.

Подведем итог установленных результатов. Равенство (16.7.24) имеет место для $|x| < 1$ при всех α, в точке 1 при $\alpha > -1$, в точке -1 при $\alpha > 0$.

§ 16.8. Суммирование рядов методом Абеля–Пуассона

С помощью степенных рядов определяется суммирование рядов методом Абеля–Пуассона, который наряду с методом средних арифметических является одним из основных в теории суммирования.

Как и при суммировании методом средних арифметических, будем рассматривать ряды, членами которых являются действительные числа.

Определение. Если для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{16.8.1}$$

при каждом $x \in [0,1)$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{16.8.2}$$

и

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S,$$

ряд (16.8.1) называют *суммируемым методом Абеля–Пуассона* к S.

Величина S называется обобщенной суммой ряда (16.8.1) в смысле метода Абеля–Пуассона.

Иногда этот метод называют методом Абеля, иногда – методом Пуассона.

Обозначим частные суммы ряда (16.8.1) S_n, $n = 0, 1, \ldots$.

Теорема 16.8.1. *Если один из рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k \tag{16.8.3}$$

сходится при всех $x \in [0,1)$, *то при этих* x *другой ряд также сходится и справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k. \tag{16.8.4}$$

Доказательство. Будем пользоваться тождеством

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k + S_n x^n, \tag{16.8.5}$$

которое доказывается с помощью преобразования Абеля:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} x^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) + S_n x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k + S_n x^n.$$

В силу (16.8.5) для доказательства теоремы достаточно установить, что из сходимости одного из рядов (16.8.3) на $[0,1)$ следует, что для $x \in [0,1)$ величина $S_n x^n$ стремится к нулю $n \to \infty$.

Если при $x \in (0,1)$ сходится первый из рядов (16.8.3), то существует такое число M, что $|a_k t^k| \leqslant M$ для $t \in (0,1)$ и всех k. Значит, $|a_k| \leqslant M t^{-k}$. Поэтому для $x \in [0,t)$

$$|S_n x^n| \leqslant x^n \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant M x^n \sum_{k=0}^{n} t^{-k} = M \frac{x^n}{t^n} \sum_{j=0}^{n} t^j <$$
$$< M \left(\frac{x}{t}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{M}{1-t} \left(\frac{x}{t}\right)^n.$$

Для $x \in (0,t)$ полученное выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому из (16.8.5) вытекают сходимость второго ряда (16.8.3) и равенство (16.8.4).

Если же на $[0,1)$ сходится второй ряд (16.8.3), то $S_n x^n \to 0$ при $n \to \infty$ как общий член сходящегося ряда.

Теорема доказана.

Согласно теореме 16.8.1 ряд (16.8.1) суммируется к S, $-\infty \leqslant S \leqslant +\infty$, методом Абеля–Пуассона, если для всех $x \in [0,1)$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k,$$

где S_k, $k = 0, 1, \ldots$, – частные суммы ряда (16.8.1), и

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = S.$$

Если в качестве $\{S_k\}$ взять произвольную последовательность, а не последовательность частных сумм ряда, получим определение суммируемости последовательностей методом Абеля–Пуассона.

Покажем, что суммирование рядов методом Абеля–Пуассона согласуется с суммированием методом средних арифметических, а значит, и со сходимостью рядов.

Теорема 16.8.2 (Теорема Фробениуса). *Если ряд* (16.8.1) *суммируем методом средних арифметических к* S, $-\infty \leqslant S \leqslant +\infty$, *то он суммируем к* S *и методом Абеля–Пуассона.*

Доказательство. 1°. Рассмотрим сначала случай, когда S конечно.

Из суммируемости ряда методом средних арифметических к конечному пределу согласно теореме 15.7.2 вытекает оценка $a_k = o(k)$, $k \to \infty$. Отсюда в силу формулы Коши–Адамара следует, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

не может быть меньше 1, т.е. для всех $x \in [0,1)$ этот ряд сходится.

Применив два раза тождество (16.8.4), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k, \qquad (16.8.6)$$

где σ_k – средние арифметические частных сумм ряда (16.8.1).

Продиференцировав почленно при $|x|<1$ ряд в равенстве

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Значит,

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k, \qquad |x|<1, \qquad (16.8.7)$$

и из (16.8.6) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma_k - S)x^k. \qquad (16.8.8)$$

Так как $\sigma_k - S \to 0$ при $k \to \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $k > N$ выполняется оценка

$$|\sigma_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left|(1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)(\sigma_k - S)x^k\right| &\leqslant \\ \leqslant (1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)|\sigma_k - S|x^k &\leqslant \\ \leqslant (1-x)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)\frac{\varepsilon}{2}x^k &< \frac{\varepsilon}{2}(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно (16.8.8) имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right| \leqslant (1-x)^2 \sum_{k=0}^{N}(k+1)|\sigma_k - S| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как число N фиксировано, отсюда следует, что для x, достаточно близких к 1, справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right| < \varepsilon,$$

которая доказывает теорему для конечных S.

2°. Пусть теперь S является бесконечным символом, для определенности $S = +\infty$.

Сначала предположим, что ряды (16.8.3) сходятся при всех $x \in [0, 1)$. Тогда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k x^k$$

и при всех $x \in [0, 1)$ справедливо равенство (16.8.6).

Так как $\sigma_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то для каждого положительного M существует N такое, что $\sigma_k > M$ для всех $k > N$. Значит, при $x \in [0, 1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = (1-x)^2 \left(\sum_{k=0}^{N}(k+1)\sigma_k x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} (k+1)\sigma_k x^k\right) \geqslant$$

$$\geqslant (1-x)^2\left(\sum_{k=0}^{N}(k+1)\sigma_k x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty}(k+1)Mx^k\right) =$$

$$= (1-x)^2\left(\sum_{k=0}^{N}(k+1)(\sigma_k - M)x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)Mx^k\right) =$$

$$= (1-x)^2\sum_{k=0}^{N}(k+1)(\sigma_k - M)x^k + M >$$

$$> M - (1-x^2)\sum_{k=0}^{N}(k+1)|\sigma_k - M|.$$

Поэтому при $x < 1$, достаточно близких к 1,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k > \frac{M}{2}$$

и, таким образом,

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = +\infty.$$

Обсудим теперь случай, когда при некотором $x_0 \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \tag{16.8.9}$$

расходится.

Покажем, что если $S_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то частные суммы ряда (16.8.9) стремятся к $+\infty$.

Начиная с некоторого номера k, числа S_k положительны и, значит, частные суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k x_0^k \tag{16.8.10}$$

возрастают. Этот ряд не может сходится, так как иначе в силу (16.8.5) сходился бы и ряд (16.8.9). Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = +\infty.$$

Чтобы охватить и случай, когда ряд вида (16.8.9) расходится, определение суммируемости методом Абеля–Пуассона расширяют следующим образом.

Если частные суммы ряда (16.8.1) имеют пределом $+\infty$ и при некотором $x_0 \in (0,1)$ ряд (16.8.9) расходится, ряд (16.8.1) называют суммируемым методом Абеля–Пуассона к $+\infty$.

При таком определении суммируемости можно утверждать, что метод суммирования Абеля–Пуассона вполне регулярен.

Теорема доказана.

Метод суммирования Абеля–Пуассона сильнее метода средних арифметических, т.е. существуют ряды, которые суммируются методом Абеля–Пуассона, но не суммируются методом $(C,1)$.

Таков, например, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1). \tag{16.8.11}$$

Заменив в равенстве (16.8.7) x на $-x$, находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k = \frac{1}{(1+x)^2}, \qquad |x|<1.$$

Значит,

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k = \frac{1}{4}.$$

А согласно теореме 15.7.2 ряд (16.8.11) не суммируется методом средних арифметических к конечному пределу, так как его члены не является величиной $o(k)$ при $k\to\infty$.

Отметим еще, что как и метод средних арифметических, метод Абеля–Пуассона суммирует ряды с неотрицательными членами только в том случае, когда эти ряды сходятся. Это вытекает из теорем 16.8.2 и 15.7.3.

§ 16.9. Задачи и упражнения

16.9.1. Докажите, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$$

сходится равномерно на любом конечном отрезке, но не сходится абсолютно ни при одном значении x.

16.9.2. Докажите, что если последовательность многочленов степени не выше n равномерно сходится на некотором отрезке, то предел этой последовательности является многочленом степени не выше n.

16.9.3. Чему равна сумма ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\, e^{-x}\ ?$$

Сходится ли этот ряд на полуоси $[0, +\infty)$ равномерно?

16.9.4. Докажите, что если последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций сходится равномерно на интервале (a, b), то эта последовательность сходится равномерно и на отрезке $[a, b]$.

16.9.5. Покажите на примере, что в теореме 16.3.1 равномерную сходимость на D нельзя заменить на сходимость в каждой точке D.

16.9.6. В теореме 16.2.4 предполагалось, что 1) множество D ограничено, 2) D замкнуто, 3) последовательность $\{f_n(\mathbf{x})\}$ в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ возрастает, 4) предел последовательности $\{f_n(\mathbf{x})\}$ – непрерывная на D функция.

Приведите примеры, показывающие, что ни от одного из этих условий отказаться нельзя, т.е. примеры, когда выполнены только какие-либо три из этих условий и утверждение теоремы не верно.

16.9.7. Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и для каждой последовательности точек $\{x_0 + \alpha_n\}$, сходящейся при $n \to \infty$ к x_0, последовательность $\{f_n(x + \alpha_n)\}$ сходится к числу a, то последовательность $\{f_n(x)\}$ называют сходящейся к a в точке x_0 *равномерно*.

Приведите пример последовательности непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящейся в некоторой точке, но не сходящейся в этой точке равномерно.

16.9.8. Докажите, что степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

сходится во всех точках единичной окружности, кроме точки $z = 1$.

16.9.9. Запишите ряд Тейлора функции $\log(1 + x)$ в точке 1 и определите радиус сходимости этого ряда.

Глава 17. Интегралы, зависящие от параметра

§ 17.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть G – множество точек (x, y) на плоскости, для координат которых выполняется условие $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, где φ и ψ – некоторые функции, заданные на отрезке $[a, b]$.

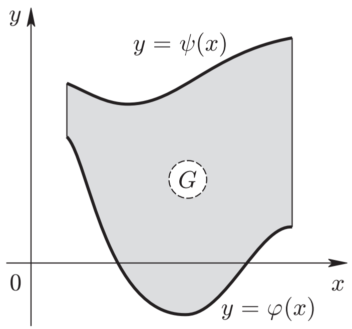

Рис. 17.1.

Предположим, что на G определена функция $f(x, y)$, которая при каждом $x \in [a, b]$ интегрируема по y на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$.

Этот параграф посвящен изучению функции

$$I(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy. \tag{17.1.1}$$

Теорема 17.1.1. *Если функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a, b]$, а функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве G, то функция $I(x)$ непрерывна на $[a, b]$.*

Эта теорема будет получена из следующего утверждения.

Теорема 17.1.2. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то функция трех переменных x, u, v, где* *и u и v принадлежат* $[c, d]$,

$$J(x, u, v) := \int_u^v f(x, y)\, dy$$

непрерывна на параллелепипеде $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$.

Доказательство. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна на замкнутом прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, существует такое число M, что $|f(x, y)| \leqslant M$ во всех точках этого прямоугольника.

Придадим аргументам функции $J(x, u, v)$ приращения, не выводящие точки (x, u, v) за пределы параллелепипеда $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$, и оценим приращение функции J. Если $\omega(f, \delta)$ – модуль непрерывности функции $f(x, y)$ как функции двух переменных на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то

$$\begin{aligned}
&|J(x + \Delta x, u + \Delta u, v + \Delta v) - J(x, u, v)| = \\
&\quad = \left| \int_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} f(x + \Delta x, y)\, dy - \int_u^v f(x, y)\, dy \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left| \int_u^v (f(x + \Delta x, y) - f(x, y))\, dy \right| + \\
&\qquad + \left| \int_{u+\Delta u}^{u} f(x + \Delta x, y)\, dy \right| + \left| \int_v^{v+\Delta v} f(x + \Delta x, y)\, dy \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left| \int_u^v |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)|\, dy \right| + \\
&\qquad + \left| \int_{u+\Delta u}^{u} |f(x + \Delta x, y)|\, dy \right| + \left| \int_v^{v+\Delta v} |f(x + \Delta x, y)|\, dy \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left| \int_u^v \omega(f, |\Delta x|)\, dy \right| + M|\Delta u| + M|\Delta v| \leqslant \\
&\quad \leqslant \omega(f, |\Delta x|)(d - c) + M(|\Delta u| + |\Delta v|). \qquad (17.1.2)
\end{aligned}$$

Функция $f(x, y)$ на компакте $[a, b] \times [c, d]$ непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна. Поэтому ее модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ стремится к нулю при $\delta \to +0$ и из (17.1.2) вытекает непрерывность функции $J(x, u, v)$.

Теорема доказана.

Чтобы вывести теорему 17.1.1 из теоремы 17.1.2, возьмем числа c и d такие, что графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ лежат в прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$. Затем продолжим функцию $f(x,y)$ с множества G на этот прямоугольник, положив при каждом $x \in [a,b]$ значения функции $f(x,y)$ равными $f(x,\varphi(x))$ для точек, лежащих ниже графика функции $\varphi(x)$, и равными $f(x,\psi(x))$ для точек, лежащих выше графика функции $\psi(x)$. Нетрудно убедиться, что продолженная таким образом функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$.

Теперь для получения теоремы 17.1.1 нужно воспользоваться тем, что

$$I(x) = J(x, \varphi(x), \psi(x))$$

и теоремой о непрерывности сложной функции.

Непрерывность функции $I(x)$ в точке x_0 равносильна равенству

$$\lim_{x\to x_0} I(x) = I(x_0).$$

Поэтому утверждение теоремы 17.1.1 можно записать так: для $x_0 \in [a,b]$

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_{\lim_{x\to x_0}\varphi(x)}^{\lim_{x\to x_0}\psi(x)} \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy = \\ = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,y)\,dy.$$

В частности, если пределы интегрирования не зависят от x,

$$\lim_{x\to x_0} \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,dy = \int_c^d f(x_0,y)\,dy.$$

Таким образом, теорему 17.1.1 можно рассматривать как утверждение о возможности предельного перехода под знаком интеграла. В теореме 16.3.3 был обоснован предельный переход под знаком интеграла, когда последовательность подынтегральных функций равномерно сходится. Теорема 17.1.1 относится к случаю, когда параметр, по которому осуществляется переход к пределу, изменяется непрерывно и от этого параметра зависят также и пределы интегрирования.

Задачу о переходе к пределу под знаком интеграла рассматривают и в более общей ситуации.

Теорема 17.1.3. *Пусть X – множество точек на оси абсцисс, x^* – его предельная точка (возможно, бесконечная), на X определены функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, для которых существуют пределы*

$$\lim_{x\to x^*,\, x\in X} \varphi(x) = u, \qquad \lim_{x\to x^*,\, x\in X} \psi(x) = v, \tag{17.1.3}$$

и для всех $x \in X$ при некоторых числах c и d имеют место неравенства $c \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x) \leqslant d$.

Если функция $f(x,y)$ задана в точках (x,y), где $x \in X$, $y \in [c,d]$, и при каждом $x \in X$ интегрируема по y на отрезке $[c,d]$, а при $x \to x^*$, $x \in X$, сходится к функции $g(y)$ равномерно относительно $y \in [c,d]$, то функция $g(y)$ интегрируема на $[u,v]$ и

$$\lim_{x\to x^*,\, x\in X} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_u^v g(y)\,dy. \tag{17.1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность точек $\{x_n\}$ из X, сходящуюся к x^*. Из равномерной сходимости функций $f(x_n,y)$ при $n\to\infty$ в силу теоремы 16.5.1 следует, что предельная функция $g(y)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$ и для каждого отрезка $[\alpha,\beta]$, принадлежащего $[c,d]$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x_n,y)\,dy = \int_\alpha^\beta g(y)\,dy. \tag{17.1.5}$$

Имеем

$$\int_{\varphi(x_n)}^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,dy = \\ = \int_u^v f(x_n,y)\,dy + \int_{\varphi(x_n)}^u f(x_n,y)\,dy + \int_v^{\psi(x_n)} f(x_n,y)\,dy. \tag{17.1.6}$$

Согласно (17.1.5) первый интеграл из правой части равенства (17.1.6) при $n\to\infty$ сходится к

$$\int_u^v g(y)\,dy.$$

Значения двух последних интегралов из правой части (17.1.6) стремятся к нулю при $n\to\infty$. В самом деле, в силу равномерной сходимости последовательности функций $\{f(x_n, y)\}$ к интегрируемой и, значит, ограниченной функции $g(y)$ существует такое число B, что $|f(x_n, y)| \leqslant B$ для всех n и $y \in [c, d]$. Поэтому

$$\left|\int_{\psi(x_n)}^{u} f(x_n, y)\, dy\right| \leqslant B|u - \psi(x_n)|.$$

Получена величина, стремящаяся к нулю в силу (17.1.3). Аналогично оценивается последний интеграл из правой части (17.1.6).

Итак, равенство (17.1.4) имеет место, если предел берется по произвольной последовательности точек $\{x_n\}$ из X, сходящейся к x^*.

Справедливость равенства (17.1.4), когда предел берется по $x \to x^*$, $x \in X$, выводится отсюда с помощью таких же рассуждений, которые использовались в § 3.2 при доказательстве непрерывности по Гейне функций, непрерывных по Коши.

Теорема доказана.

Теорема 17.1.4 (Формула Лейбница). *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *дифференцируемы и* $c \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi(x) \leqslant d$. *Если функции*

$$f(x, y), \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, *то на* $[a, b]$ *функция* $I(x)$ *дифференцируема и справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\frac{d\,I(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy + f(x, \psi(x))\frac{d\psi(x)}{dx} - f(x, \varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx},\end{aligned} \tag{17.1.7}$$

которое называют формулой Лейбница.

Доказательство. Предположим сначала, что пределы интегрирования интеграла $I(x)$ не зависят от x. Пусть $\varphi(x) \equiv c$ и $\psi(x) \equiv d$.

Так как

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\, dy,$$

нужно доказать, что при $\Delta x \to 0$

$$\int_c^d \left(\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) dy \to 0.$$

Оценим разность, стоящую под интегралом, через модуль непрерывности производной $\partial f/\partial x$ на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$.

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x+\theta\Delta x, y)}{\partial x}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Поэтому

$$\left| \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| = \\ = \left| \frac{\partial f(x+\theta\Delta x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \leqslant \omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}, |\Delta x| \right). \tag{17.1.8}$$

Так как производная $\partial f/\partial x$ непрерывна на компакте $[a,b] \times [c,d]$, то

$$\omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \delta \right) \to 0, \qquad \delta \to +0,$$

и в силу (17.1.8) при $\Delta x \to 0$

$$\int_c^d \frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x}\, dx \to \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy.$$

Таким образом, для случая, когда пределы интегрирования $I(x)$ не зависят от x, теорема доказана.

Чтобы доказать теорему в общем случае, рассмотрим функцию трех переменных

$$J(x,u,v) := \int_u^v f(x,y)\, dy,$$

где $x \in [a,b]$ и $u, v \in [c,d]$.

Эта функция имеет частные производные по всем переменным и все эти производные непрерывны как функции трех переменных. Действительно, производная по x непрерывна согласно теореме 17.1.2, а так как

$$\frac{\partial J}{\partial v} = f(x,v), \qquad \frac{\partial J}{\partial u} = -f(x,u)$$

непрерывны и эти производные.

По доказанному уже равенству (17.1.7) при постоянных пределах интегрирования

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy.$$

Эта производная непрерывна в силу теоремы 17.1.2.

Таким образом, в силу теоремы 12.1.2 функция $J(x,u,v)$ дифференцируема и по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\,I(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} J(x,\varphi(x),\psi(x)) = \\ &= \frac{\partial J}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) + \frac{\partial J}{\partial u}(x,\varphi(x),\psi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx} + \\ &\qquad + \frac{\partial J}{\partial v}(x,\varphi(x),\psi(x))\frac{d\psi(x)}{dx}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство (17.1.7) в общем случае.

Теорема доказана.

Теорема 17.1.5. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, то функция*

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

интегрируема на отрезке $[a,b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy. \tag{17.1.9}$$

Доказательство. Существование внешних интегралов в равенстве (17.1.9) вытекает из теоремы 17.1.1 о непрерывности интеграла, зависящего от параметра. Новым утверждением является равенство (17.1.9).

Рассмотрим функцию

$$\varPhi(x,y) := \int_c^y f(x,t)\,dt.$$

В силу теоремы 17.1.2 эта функция непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$. Ее частная производная по y, равная $f(x,y)$, также непрерывна. Поэтому согласно (17.1.7) имеем

$$\frac{d}{dy}\int_a^b \Phi(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Проинтегрировав это равенство, находим

$$\int_c^d \left(\frac{d}{dy}\int_a^b \Phi(x,y)\,dx\right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

С другой стороны, используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int_c^d \left(\frac{d}{dy}\int_a^b \Phi(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \Phi(x,d)\,dx - \int_a^b \Phi(x,c)\,dx = \\ = \int_a^b \Phi(x,d)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,dt\right) dx.$$

Теорема доказана.

В (17.1.9) порядок, в котором вычисляются интегралы, указан с помощью скобок. Наряду с такой записью часто используется обозначение

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy := \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Формула (17.1.9) является утверждением об интегрировании под знаком интеграла.

В дальнейшем будет установлено, что интегрирование под знаком интеграла возможно при меньших требованиях, чем в теореме 17.1.5.

Но уже сейчас отметим, что если предполагать только интегрируемость при каждом $x \in [a,b]$ функции $f(x,y)$ как функции от y, то интеграл

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

не обязательно существует для всех y.

Например, если $f(x,y) = 0$ для всех $x \in [0,1]$ и $y \in (0,1]$, а при $y = 0$

$$f(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

то при каждом x

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = 0,$$

а интеграл

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

при $y = 0$ не существует.

Согласно теоремам этого параграфа в собственных интегралах, зависящих от параметра, переход к пределу, дифференцирование и интегрирование возможны при естественных и не очень ограничительных требованиях.

§ 17.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Переходим к изучению несобственных интегралов, зависящих от параметра. Как и в гл. 9, будем предполагать, что интеграл имеет единственную особенность в верхнем пределе интегрирования

Пусть функция $f(x,y)$ задана для $x \in X$, $y \in [c,d)$ и интегрируема при каждом фиксированном $x \in X$ как функция от y по отрезкам $[c,\eta]$ при всех $\eta < d$. Здесь d может быть числом или $+\infty$.

Напомним, что по определению несобственный интеграл

$$\int_c^d f(x,y)\,dy \tag{17.2.1}$$

сходится, если существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to d-0} \int_c^\eta f(x,y)\,dy,$$

который считают значением интеграла (17.2.1).

Определение. Пусть функция $f(x,y)$ задана на множестве $X \times [c,d)$ и при всех $x \in X$ сходится интеграл (17.2.1). Этот интеграл называют *сходящимся равномерно относительно множества* X, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta_\varepsilon < d$ такое, что для всех $x \in X$ и всех η, удовлетворяющих условию

$\eta_\varepsilon < \eta < d$, имеет место оценка

$$\left|\int_\eta^d f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что здесь η_ε не зависит от x.

Теорема 17.2.1 (Критерий Коши). *Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $X \times [c,d)$ и при всех $x \in X$, $\eta < d$ интеграл*

$$\int_c^\eta f(x,y)\,dy$$

существует как собственный. Для того чтобы интеграл (17.2.1) сходился равномерно относительно X, необходимо и достаточно условие Коши, состоящее в том, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta_\varepsilon \in [c,d)$ такое, что для любых η' и η'', удовлетворяющих условию $\eta_\varepsilon \leqslant \eta' < \eta'' < d$, при всех $x \in X$ справедлива оценка

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon.$$

Доказательство стандартно, поэтому здесь не приводится.

Теорема 17.2.2 (Признак сравнения, признак Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x,y)$ задана на множестве $X \times [c,d)$ и при всех $x \in X$, $\eta < d$ существует собственный интеграл*

$$\int_c^\eta f(x,y)\,dy.$$

Если существует функция $g(x,y)$, для которой при всех $(x,y) \in X \times [c,d)$

$$|f(x,y)| \leqslant g(x,y) \tag{17.2.2}$$

и несобственный интеграл

$$\int_c^d g(x,y)\,dy \tag{17.2.3}$$

сходится равномерно относительно X, то интеграл (17.2.1) сходится равномерно относительно X.

Доказательство проводится обычными рассуждениями с помощью критерия Коши.

Часто признак сравнения применяется, когда функция g не зависит от x.

Заметим, что признак сравнения представляет собой достаточное условие равномерной сходимости интеграла от модуля функции $f(x, y)$, откуда следует равномерная сходимость интеграла от самой функции $f(x, y)$.

В качестве примера использования признака сравнения выясним, на каком множестве изменения параметра x равномерно сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + (t - x)^2}\,. \tag{17.2.4}$$

Сходимость при каждом x этого интеграла с особенностями в обоих пределах интегрирования очевидна. При этом значение интеграла от x не зависит.

Покажем, что интеграл (17.2.4) сходится равномерно относительно x, принадлежащих произвольному конечному отрезку $[A, B]$. Введем функцию

$$g(t) := \begin{cases} (1 + (t - A)^2)^{-1} & \text{при } t \leqslant A, \\ 1 & \text{при } A \leqslant t \leqslant B, \\ (1 + (t - B)^2)^{-1} & \text{при } B \leqslant t. \end{cases}$$

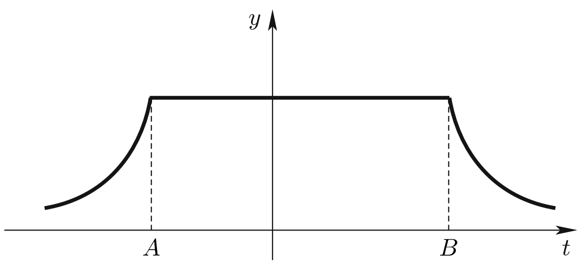

Рис. 17.2.

Тогда при $x \in [A, B]$ и всех t справедливо $(1 + (t - x)^2)^{-1} \leqslant g(t)$ и в силу сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$$

интеграл (17.2.4) сходится равномерно относительно $x \in [A, B]$.

Это утверждение нельзя усилить: на любых промежутках вида $(-\infty, A]$ и $[B, +\infty)$ интеграл (17.2.4) не сходится равномерно. В самом деле, для каждого числа α интеграл

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t-\alpha)^2}$$

равен $\pi/2$ и поэтому, выбрав, например, для произвольного B число $\alpha > B$, получим, что равномерной сходимости интеграла (17.2.4) на $[B, +\infty)$ нет.

Теорема 17.2.3 (Признаки Дирихле и Абеля). *Пусть на множестве $X \times [c, d)$ заданы функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, причем при всех $x \in X$, $\eta \in [c, d)$ интеграл*

$$\int_{c}^{\eta} f(x, y)\, dy \tag{17.2.5}$$

существует как собственный и при каждом $x \in X$ функция $g(x, y)$ как функция от y монотонна. Тогда интеграл

$$\int_{c}^{d} f(x, y) g(x, y)\, dy \tag{17.2.6}$$

сходится равномерно относительно X, если

1°) (признак Дирихле) интегралы (17.2.5) равномерно ограничены, т.е. существует число B такое, что для всех $x \in X$ и $\eta \in [c, d)$

$$\left| \int_{c}^{\eta} f(x, y)\, dy \right| \leqslant B,$$

а функция $g(x, y)$ при $y \to d - 0$ стремится к нулю равномерно относительно X;

2°) (признак Абеля) интеграл

$$\int_{c}^{d} f(x, y)\, dy$$

сходится равномерно относительно X, а функция $g(x, y)$ равномерно ограничена, т.е. $|g(x, y)| \leqslant M$ для некоторого числа M при всех x и y.

Доказательство. Чтобы воспользоваться критерием Коши, оценим интеграл

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,g(x,y)\,dy$$

для $c \leqslant \eta' < \eta'' < d$.

В силу второй теореме о среднем (теорема 9.7.3) для каждого x существует такая точка $\xi(x) \in (\eta', \eta'')$, что

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,g(x,y)\,dy = \\ = g(x,\eta')\int_{\eta'}^{\xi(x)} f(x,y)\,dy + g(x,\eta'')\int_{\xi(x)}^{\eta''} f(x,y)\,dy. \quad (17.2.7)$$

Если выполнены условия признака Дирихле, то из (17.2.7) следует, что

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)g(x,y)\,dy\right| \leqslant 2B(|g(x,\eta')| + |g(x,\eta'')|). \quad (17.2.8)$$

Величину из правой части оценки (17.2.8) можно сделать как угодно малой равномерно относительно X, если числа η' и η'' достаточно близки к d. Поэтому из (17.2.8) следует равномерная сходимость интеграла (17.2.6).

Если же выполнены условия признака Абеля, то в силу (17.2.7)

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)g(x,y)\,dy\right| \leqslant M\left(\left|\int_{\eta'}^{\xi(x)} f(x,y)\,dy\right| + \left|\int_{\xi(x)}^{\eta''} f(x,y)\,dy\right|\right)$$

и пользуемся тем, что согласно критерию Коши полученные интегралы как угодно малы́ равномерно относительно X, если числа η' и η'' достаточно близки к d.

Теорема доказана.

Отметим аналогию этой теоремы с теоремами 16.2.2 и 16.2.3 о равномерной сходимости рядов.

§ 17.3. Свойства равномерно сходящихся интегралов

Установим для равномерно сходящихся несобственных интегралов теоремы о переходе к пределу, дифференцировании и интегрировании под знаком интеграла.

Теорема 17.3.1. *Пусть на множестве* $X \times [c, d)$ *задана функция* $f(x, y)$, *для которой несобственный интеграл*

$$\int_c^d f(x,y)\,dy \tag{17.3.1}$$

сходится равномерно относительно X, *и* x^0 *– предельная точка множества* X. *Если* $f(x, y)$ *на каждом отрезке* $[c, \eta]$, $\eta \in [c, d)$, *при* $x \to x^0$, $x \in X$, *сходится равномерно относительно* $y \in [c, \eta]$ *к функции* $\varphi(y)$, *то интеграл*

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy \tag{17.3.2}$$

сходится и справедливо равенство

$$\lim_{x \to x^0,\, x \in X} \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \lim_{x \to x^0,\, x \in X} f(x,y)\,dy = \int_c^d \varphi(y)\,dy, \tag{17.3.3}$$

т.е. возможен предельный переход под знаком интеграла.

Доказательство. Сначала докажем сходимость интеграла (17.3.2).

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема по переменной y на каждом отрезке $[c, \eta]$, $\eta < d$, и при $x \to x^0$, $x \in X$, сходится равномерно относительно $y \in [c, \eta]$ к функции $\varphi(y)$, то согласно теореме 17.1.3 о собственных интегралах функция $\varphi(y)$ интегрируема на $[c, \eta]$.

Пользуясь равномерной относительно X сходимостью интеграла (17.3.1), по заданному положительному ε находим η_ε такое, что для любой пары чисел η' и η'', удовлетворяющих условию $\eta_\varepsilon < \eta' < \eta'' < d$, при всех $x \in X$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon.$$

Так как функция $f(x, y)$ сходится при $x \to x^0$, $x \in X$ к функции $\varphi(y)$ равномерно на каждом отрезке $[\eta', \eta'']$, в этом собственном интеграле можно перейти к пределу под знаком интеграла. В результате получим

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} \varphi(y)\,dy \right| \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши отсюда следует сходимость интеграла (17.3.2).

Докажем теперь равенство (17.3.3).

Для каждого положительного ε существует такое число η_ε, что

$$\left|\int_{\eta_\varepsilon}^{d} \varphi(y)\, dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и для всех $x \in X$

$$\left|\int_{\eta_\varepsilon}^{d} f(x,y)\, dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $f(x,y)$ при $x \to x^0, x \in X$, сходится к $\varphi(y)$ равномерно относительно $y \in [c, \eta_\varepsilon]$, то существует такая окрестность точки x^0, что для всех $x \in X$ из этой окрестности имеет место оценка

$$\left|\int_{c}^{\eta_\varepsilon} f(x,y)\, dy - \int_{c}^{\eta_\varepsilon} \varphi(y)\, dy\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и поэтому

$$\left|\int_{c}^{d} f(x,y)\, dy - \int_{c}^{d} \varphi(y)\, dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{c}^{\eta_\varepsilon} f(x,y)\, dy - \int_{c}^{\eta_\varepsilon} \varphi(y)\, dy\right| +$$
$$+ \left|\int_{\eta_\varepsilon}^{d} \varphi(y)\, dy\right| + \left|\int_{\eta_\varepsilon}^{d} f(x,y)\, dy\right| < \varepsilon.$$

Это доказывает справедливость равенства (17.3.3).

Теорема доказана.

Следствие 17.3.2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a,b] \times [c,d)$, где $[a,b]$ – конечный или бесконечный промежуток. Если несобственный интеграл*

$$\int_{c}^{d} f(x,y)\, dy$$

сходится равномерно относительно $x \in [a,b]$, то этот интеграл является функцией, непрерывной на $[a,b]$.

Доказательство. Если $[a, b]$ – конечный отрезок, то для каждого $\eta < d$ функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на замкнутом прямоугольнике $[a, b] \times [c, \eta]$. Поэтому в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ при $x \to x_0$ имеем $f(x, y) \to f(x_0, y)$ равномерно относительно $y \in [c, \eta]$. Таким образом, применима теорема 17.3.1 о предельном переходе в несобственных интегралах.

Если промежуток $[a, b]$ бесконечен, то для любого отрезка, содержащегося в нем, по уже доказанному имеем непрерывность интеграла на этом отрезке. Так как каждая точка промежутка $[a, b]$ содержится в некотором отрезке из $[a, b]$, это обеспечивает непрерывность интеграла на $[a, b]$.

Теорема 17.3.3. *Пусть $[a, b]$ – конечный отрезок и функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d)$. Если несобственный интеграл*

$$\int_c^d f(x, y)\, dy \tag{17.3.4}$$

сходится равномерно относительно $x \in [a, b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy, \tag{17.3.5}$$

означающее изменение порядка интегрирования или интегрирование под знаком интеграла.

Доказательство. Из следствия 17.3.2 вытекает непрерывность интеграла (17.3.4) как функции от x. Это обеспечивает существование интеграла в левой части равенства (17.3.5). Существование внутреннего интеграла в правой части (17.3.5) очевидно, а существование внешнего интеграла нужно доказать.

Из свойств собственных интегралов, зависящих от параметра, следует, что для любого $\eta < d$

$$\int_a^b \left(\int_c^\eta f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^\eta \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{17.3.6}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x, t) := \int_c^t f(x, y)\, dy.$$

Функция $g(x,t)$ для каждого $t < d$ непрерывна на $[a,b] \times [c,t]$. Кроме того, по условию теоремы функция $g(x,t)$ при $t \to d-0$ сходится к интегралу (17.3.4) равномерно относительно $x \in [a,b]$.

Значит, согласно теореме 17.1.3 в интеграле

$$\int_a^b g(x,\eta)\,dx$$

возможен переход к пределу при $\eta \to d-0$ под знаком интеграла. Но

$$\int_a^b g(x,\eta)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^\eta f(x,y)\,dy \right) dx,$$

и, таким образом, возможен переход к пределу под знаком интеграла из левой части равенства (17.3.6). Отсюда следуют существование внешнего интеграла в правой части (17.3.5) и равенство (17.3.5).

Теорема доказана.

Теорема 17.3.4. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d)$. Предположим, что несобственный интеграл*

$$\int_c^d f(x,y)\,dy \tag{17.3.7}$$

сходится равномерно относительно x из каждого промежутка $[a,\xi]$, $\xi < b$, а интеграл

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно y из каждого промежутка $[c,\eta]$, $\eta < d$.

Если сходится один из интегралов

$$\int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|\,dx \right) dy, \qquad \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|\,dy \right) dx, \tag{17.3.8}$$

то другой интеграл также сходится и справедливо равенство

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{17.3.9}$$

Доказательство. Будем для определенности считать, что сходится первый интеграл из (17.3.8).

Для произвольного $\xi < b$ по условию теоремы интеграл (17.3.7) сходится равномерно относительно $x \in [a, \xi]$. Поэтому согласно теореме 17.3.3 об интегрировании по конечному отрезку справедливо равенство

$$\int_a^\xi \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^\xi f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{17.3.10}$$

Покажем, что в интеграле из правой части равенства (17.3.10) возможен переход к пределу при $\xi \to b-0$ под знаком интеграла. Отсюда будут вытекать оба утверждения теоремы.

Введем функцию

$$h(\xi, y) := \int_a^\xi f(x,y)\,dx.$$

Согласно теореме 17.1.1 при каждом фиксированном $\xi < b$ функция $h(\xi, y)$ непрерывна как функция от y. Значит, для любого $\eta < d$ существует интеграл

$$\int_c^\eta h(\xi, y)\,dy.$$

Далее, справедливы оценки

$$|h(\xi, y)| \leqslant \int_a^\xi |f(x,y)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x,y)|\,dx.$$

Значит, благодаря сходимости первого из интегралов (17.3.8) можно применить признак Вейерштрасса (теорема 17.2.2), согласно которому интеграл

$$\int_c^d h(\xi, y)\,dy$$

сходится равномерно относительно $\xi \in [a, b)$.

По условию теоремы при $\xi \to b-0$ функция $h(\xi, y)$ сходится к функции

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

равномерно относительно y, принадлежащих любому отрезку $[c, \eta]$, $\eta < d$.

Таким образом, выполнены условия теоремы 17.3.1 о предельном переходе под знаком интеграла и поэтому

$$\lim_{\xi\to b-0}\int_c^d h(\xi,y)\,dy = \int_c^d \lim_{\xi\to b-0} h(\xi,y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Полученное равенство означает возможность предельного перехода под знаком левого интеграла в (17.3.10), что приводит к утверждению теоремы.

Теорема 17.3.5. *Пусть функция $f(x,y)$ и ее частная производная*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

непрерывны на $[a,b]\times[c,d)$. Предположим, что интеграл

$$I(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$$

сходится при каждом $x\in[a,b]$, а интеграл

$$\int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy \tag{17.3.11}$$

сходится равномерно относительно $x\in[a,b]$. Тогда функция $I(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную, для которой справедливо равенство

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy. \tag{17.3.12}$$

Доказательство. Если точки x и $x+\Delta x$ принадлежат отрезку $[a,b]$, то

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_c^d (f(x+\Delta x,y)-f(x,y))\,dy = \\ = \frac{1}{\Delta x}\int_c^d \left(\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\,dt\right) dy.$$

Так как интеграл

$$\int_c^d \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\,dy$$

сходится равномерно относительно $t \in [a, b)$, то для t, принадлежащих отрезку с концами в точках x и $x + \Delta x$, имеем

$$\int_c^d \left(\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\, dt \right) dy = \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_c^d \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\, dy \right) dt$$

и, таким образом,

$$\frac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_c^d \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\, dy \right) dt.$$

В силу равномерной относительно t сходимости интеграла

$$\int_c^d \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\, dy$$

этот интеграл является непрерывной функцией от t. Значит, согласно теореме о производной интеграла по верхнему пределу интегрирования

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_c^d \frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\, dy \right) dt = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy.$$

Итак, справедливость равенства (17.3.12) для каждого значения $x \in [a, b]$ доказана. А непрерывность производной $I'(x)$ вытекает из равномерной сходимости интеграла (17.3.11).

Теорема доказана.

§ 17.4. Г-функция

Г-*функция* (читается гамма-функция) для $x > 0$ определяется формулой

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{17.4.1}$$

Интеграл из (17.4.1) имеет особенность в верхнем пределе интегрирования при всех значениях x, а если $x < 1$, особенность есть и в нижнем пределе интегрирования. Интеграл по промежутку $[1, +\infty)$ сходится при любом x, а по промежутку $[0, 1]$ – при $x > 0$.

С помощью признака сравнения легко показать, что интеграл из (17.4.1) сходится равномерно на любом отрезке вида $[A, B]$, где $0 < A < B < +\infty$.

Поэтому Γ-функция непрерывна на $(0,+\infty)$.

Рассмотрим вопрос о ее производных. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t}\ln t$$

и интеграл

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt$$

согласно признаку сравнения сходится равномерно относительно $x\in[A,B]$, $0<A<B<+\infty$, то согласно теореме 17.3.5 функция $\Gamma(x)$ дифференцируема на $(0,+\infty)$ и

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt.$$

Для старших производных аналогично находим

$$\Gamma^{(m)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^m t\,dt, \qquad m=2,3,\ldots\,.$$

В частности, при $m=2$

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln^2 t\,dt > 0$$

и согласно следствию 6.7.5 Γ-функция строго выпукла на $(0,+\infty)$.

Интегрируя по частям, получаем для $x>0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = e^{-t}\frac{t^x}{x}\Big|_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{t^x}{x}(-e^{-t})\,dt = \\ = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

Таким образом,

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \quad x>0. \tag{17.4.2}$$

Равенство (17.4.2) называют *формулой приведения* (формулой понижения) для Γ-функции.

Так как

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1,$$

то $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$ и вообще для всех натуральных n
$$\Gamma(n+1) = n! \tag{17.4.3}$$

Формула (17.4.3) показывает, что Γ-функцию можно рассматривать как распространение функции $n!$ на нецелые значения n. Кроме того, благодаря формуле (17.4.3) получает естественное объяснение определения $0! := 1$. Действительно, $0! = \Gamma(0+1) = 1$.

Формула приведения дает возможность распространить Γ-функцию на все отрицательные значения аргумента, кроме целых отрицательных значений. Но не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим поведение функции $\Gamma(x)$ при $x \to 0$. Так как в силу непрерывности Γ-функции $\Gamma(x+1) \approx 1$ при $x \to 0$, то
$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \approx \frac{1}{x}, \qquad x \to 0.$$

Схематически график Γ-функции имеет вид

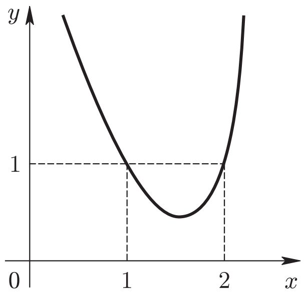

Рис. 17.3.

Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то Γ-функция имеет минимум на интервале $(1, 2)$ (он достигается в точке $1.4616\ldots$ и равен $0.8856\ldots$).

Выясним теперь поведение Γ-функции при $x \to +\infty$.

Перейдем в интеграле
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$$
к переменной интегрирования s по формуле $t = x(1+s)$, считая $x > 0$. Тогда
$$\Gamma(x+1) = \int_{-1}^{+\infty} x^x (1+s)^x e^{-x(1+s)} x\, ds =$$

$$= x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}(1+s)^x e^{-xs}\,ds =$$
$$= x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))}\,ds. \qquad (17.4.4)$$

Рассмотрим функцию

$$f(s) := s - \ln(1+s), \qquad -1 < s < +\infty.$$

Так как
$$f'(s) = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s},$$

то $f(s)$ строго убывает на $(-1,0]$ и строго возрастает на $[0,+\infty)$. Имеем также $f(0)=0$ и $f(s)\to+\infty$ при $s\to-1+0$ и при $s\to+\infty$.

Поэтому, если задать переменную u формулой

$$\frac{u^2}{2} = s - \ln(1+s) \qquad (17.4.5)$$

и условиться, что знак u совпадает со знаком s, получим взаимно однозначное соответствие между переменными $s\in(-1,+\infty)$ и $u\in(-\infty,+\infty)$.

Чтобы перейти в интеграле из правой части (17.4.4) к переменной интегрирования u, найдем производную ds/du.

Продифференцировав равенство (17.4.5) по u, находим

$$u = \left(1 - \frac{1}{1+s}\right)\frac{ds}{du} = \frac{s}{s+1}\,\frac{ds}{du},$$

откуда при $s\neq 0$
$$\frac{ds}{du} = \frac{u}{s} + u. \qquad (17.4.6)$$

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа
$$\ln(1+s) = s - \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2}{(1+\theta s)^2},$$

где $0<\theta<1$. Значит,

$$\frac{u^2}{2} = s - \ln(1+s) = \frac{s^2}{2(1+\theta s)^2}$$

и в силу того, что $1+\theta s > 0$, и совпадения знаков u и s получаем

$$u = \frac{s}{1+\theta s}\,.$$

Отсюда

$$1 = u\frac{1+\theta s}{s} = \frac{u}{s} + \theta u.$$

Поэтому из (17.4.6) следует, что

$$\frac{ds}{du} = 1 + (1-\theta)u, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{17.4.7}$$

При выводе представления (17.4.7) предполагалось, что $s \neq 0$ или, что то же самое, что $u \neq 0$.

Но равенство (17.4.7) справедливо и при $u = 0$. В самом деле, предел производной ds/du при $u \to 0$ равен 1. Значит, согласно следствию 6.2.12 производная ds/du при $u = 0$ равна 1 и, таким образом, для всех u

$$\left|\frac{ds}{du} - 1\right| \leqslant |u|.$$

Заменив в последнем интеграле из правой части формулы (17.4.4) переменную интегрирования по формуле (17.4.5), в силу (17.4.7) получим

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2/2}\frac{ds}{du}\,du = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2/2}\,du + A(x), \tag{17.4.8}$$

где для $A(x)$ справедлива оценка

$$|A(x)| < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2/2}|u|\,du.$$

Для интеграла из правой части формулы (17.4.8) имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2/2}\,du = \sqrt{\frac{2}{x}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,dv.$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\,dv$$

называют *интегралом Пуассона* (интегралом Эйлера–Пуассона). В следующем параграфе будет показано, что этот интеграл равен $\sqrt{\pi}$, и следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2/2}\,du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,.$$

Оценим теперь величину $A(x)$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2/2}|u|\,du = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-xu^2/2}u\,du =$$
$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-xv/2}\,dv = \frac{2}{x}\int_{0}^{+\infty} e^{-w}\,dw = \frac{2}{x}\,.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))}\,ds = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} + R,$$

где

$$|R| < \frac{2}{x}\,.$$

Поэтому согласно (17.4.4)

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}e^{-x}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{x}} + R\right), \qquad |R| < \frac{2}{x}\,,$$

и окончательно,

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}(1+R_1), \tag{17.4.9}$$

где

$$|R_1| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,.$$

Равенство (17.4.9) называется *формулой Стирлинга*.

В частности, для $n!$ имеем

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} + O\left(\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right), \qquad n \to +\infty.$$

Эта формула имелась в виду в § 15.3.

Отметим, что для величины R_1 известна более точная оценка.

§ 17.5. B-функция

B-*функцией* (читается бета-функция) называется функция двух переменных

$$\mathrm{B}(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \tag{17.5.1}$$

где p и q положительны. При $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ интеграл в (17.5.1) является собственным.

B-функцию называют функцией Эйлера первого рода, а Г-функцию – функцией Эйлера второго рода.

Интеграл из (17.5.1) сходится равномерно относительно p и q, удовлетворяющих условиям $p \geqslant p_0 > 0$, $q \geqslant q_0 > 0$. В этом легко убедиться с помощью признака сравнения, так как тогда при всех $t \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leqslant t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}.$$

Замена переменной интегрирования $t = 1-s$ в (17.5.1) приводит к равенству

$$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p).$$

При $p > 0$, $q > 0$

$$\mathrm{B}(p+1,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\,dt$$

и с помощью интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(p+1,q) &= -t^p\frac{(1-t)^q}{q}\Big|_0^1 + \int_0^1 pt^{p-1}\frac{(1-t)^q}{q}\,dt = \\
&= \frac{p}{q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q\,dt = \\
&= \frac{p}{q}\left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt - \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}t\,dt\right) = \\
&= \frac{p}{q}\mathrm{B}(p,q) - \frac{p}{q}\mathrm{B}(p+1,q).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{p}{q}\right)\mathrm{B}(p+1,q) = \frac{p}{q}\mathrm{B}(p,q)$$

и, значит,

$$\mathrm{B}(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q). \tag{17.5.2}$$

Это равенство называют *формулой приведения* для В-функции.

В силу симметрии В-функции имеем также

$$\mathrm{B}(p,q+1) = \frac{q}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q).$$

Для натуральных m и n применив $m-1$ раз формулу (17.5.2), в силу того, что $B(1,q) = 1/q$, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(m,n) &= \frac{m-1}{m+n-1}\,\mathrm{B}(m-1,n) = \cdots = \\ &= \frac{(m-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(n+1)}\,\mathrm{B}(1,n) = \\ &= \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}\,.\end{aligned}$$

Докажем подобное равенство для всех положительных p и q.

Теорема 17.5.1. *При любых положительных p и q*

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,. \tag{17.5.3}$$

Доказательство. Сделаем в интеграле

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} t^{p+q-1}e^{-t}\,dt$$

замену $t = (1+v)u$, где u – новая переменная интегрирования, а v – некоторый положительный параметр. Тогда получим

$$\Gamma(p+q) = (1+v)^{p+q}\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-(1+v)u}\,du.$$

Перейдем теперь в интеграле из (17.5.1) к новой переменной интегрирования по формуле

$$t = \frac{v}{1+v}\,.$$

Тогда
$$1-t=\frac{1}{1+v}\,,\qquad dt=\frac{1}{(1+v)^2}\,dv,$$
и таким образом,
$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{v}{1+v}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+v}\right)^{q-1}\frac{dv}{(1+v)^2}=\\&=\int_0^{+\infty}\frac{v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}}\,dv.\end{aligned}\tag{17.5.4}$$

Умножим обе части этого равенства на $\Gamma(p+q)$:
$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)\,\Gamma(p+q)&=\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(p+q)v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}}\,dv=\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-(1+v)u}v^{p-1}\,du\right)dv.\end{aligned}\tag{17.5.5}$$

Если изменить здесь порядок интегрирования, получим
$$\begin{aligned}\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-(1+v)u}v^{p-1}\,dv\right)du=\\&=\int_0^{+\infty}u^{q-1}e^{-u}\left(\int_0^{+\infty}(uv)^{p-1}e^{-uv}u\,dv\right)du=\\&=\int_0^{+\infty}u^{q-1}e^{-u}\left(\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}\,dx\right)du=\\&=\Gamma(p)\Gamma(q).\end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно обосновать изменение порядка интегрирования в правой части (17.5.5).

Если $p\geqslant 1$, то каждый из этих интегралов имеет особенность только в верхнем пределе интегрирования.

Чтобы говорить об интегралах, к которым легко применить теорему 17.3.4, докажем сначала, что
$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-(1+v)u}v^{p-1}\,du\right)dv=\\&\qquad=\lim_{\xi\to+0}\int_0^{+\infty}\left(\int_\xi^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-(1+v)u}v^{p-1}\,du\right)dv.\end{aligned}\tag{17.5.6}$$

Для этого введем функцию

$$\Phi(\xi, v) := \int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, du$$

и, чтобы воспользоваться теоремой 17.3.1, покажем, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \Phi(\xi, v)\, dv \tag{17.5.7}$$

сходится равномерно относительно ξ, а функция $\Phi(\xi, v)$ при $\xi \to 0$ сходится к $\Phi(0, v)$ равномерно на каждом конечном отрезке изменения параметра v.

Равномерная относительно ξ сходимость интеграла (17.5.7) согласно признаку сравнения (теорема 17.2.2) вытекает из оценок

$$0 \leqslant \Phi(\xi, v) \leqslant \Phi(0, v)$$

и сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} \Phi(0, v)\, dv.$$

Далее, если $v \in [0, a]$, то

$$\Phi(0, v) - \Phi(\xi, v) = \int_0^{\xi} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, du <$$
$$< v^{p-1} \int_0^{\xi} u^{p+q-1}\, du \leqslant a^{p-1} \frac{\xi^{p+q}}{p+q},$$

и значит, $\Phi(\xi, v)$ при $\xi \to 0$ сходится к $\Phi(0, v)$ равномерно на отрезке $[0, a]$.

Таким образом, равенство (17.5.6) обосновано.

Докажем теперь, что

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, du \right) dv =$$
$$= \int_{\xi}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, dv \right) du. \tag{17.5.8}$$

Чтобы воспользоваться теоремой 17.3.4, убедимся в равномерной сходимости каждого из внутренних интегралов в (17.5.8) на произвольных конечных отрезках изменения параметров v и u соответственно.

Интеграл

$$\int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, du$$

сходится равномерно относительно $v \in [0, a]$ при каждом конечном a, так как тогда

$$u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1} \leqslant u^{p+q-1} e^{-u} a^{p-1}$$

и сходится интеграл

$$\int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} a^{p-1}\, du.$$

А интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, dv$$

сходится равномерно относительно $u \in [\xi, b]$ при любом конечном b, так как для таких u

$$u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1} \leqslant b^{p+q-1} e^{-v\xi} v^{p-1}$$

и сходится интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} b^{p+q-1} e^{-v\xi} v^{p-1}\, dv.$$

Наконец, интеграл

$$\int_{\xi}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, dv \right) du$$

сходится, так как

$$\int_{\xi}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, dv \right) du \leqslant$$
$$\leqslant \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} v^{p-1}\, dv \right) du.$$

Следовательно, условия теоремы 17.3.4 выполнены и, значит, справедливо равенство (17.5.8).

Из (17.5.6) и (17.5.8) вытекает возможность изменения порядка интегрирования в интегралах из правой части равенства (17.5.5).

Таким образом, теорема доказана для $p \geqslant 1$.

Освободиться от условия $p \geqslant 1$ можно с помощью формул приведения. В самом деле, если $p > 0$, то

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{p+q}{p}\,\mathrm{B}(p+1,q) = \frac{p+q}{p}\,\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

Теперь теорема 17.5.1 доказана полностью.

Теорема 17.5.2 (Формула дополнения для Γ-функции). *Если* $0 < a < 1$, *то*

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}\,. \tag{17.5.9}$$

Доказательство. В силу (17.5.3) и (17.5.4)

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = B(a,1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt.$$

Положим

$$I_1 := \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt, \qquad I_2 := \int_1^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt$$

и рассмотрим сначала интеграл I_1.

В силу непрерывности интеграла как функции предела интегрирования имеем

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k,$$

ряд в котором сходится равномерно на любом отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Используя почленное интегрирование, получаем

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \int_0^{1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{a+k-1}\,dt =$$

$$= \int_0^{1-\varepsilon} t^{a-1}\,dt + \int_0^{1-\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t^{a+k-1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} (-1)^k t^{a+k-1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left.\frac{t^{a+k}}{a+k}\right|_0^{1-\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{a+k}}{a+k}\,.$$

Признак Лейбница (теорема 15.3.5) показывает, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a+k}$$

сходится. Значит, согласно второй теореме Абеля о степенных рядах (теорема 16.6.7) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{a+k}}{a+k}$$

сходится равномерно относительно $\varepsilon \in [0,1]$ и, таким образом,

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{a+k-1}\,dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)^{a+k}}{a+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a+k}\,.$$

Рассмотрим теперь интеграл I_2.

С помощью замены $t = 1/x$ получаем

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \int_1^{0} \frac{x^{1-a}}{1+1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\,dx,$$

т.е. интеграл такого же вида, как I_1. Поэтому

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-a+k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}\,.$$

Пользуясь этими равенствами для интегралов I_1 и I_2, находим

$$\mathrm{B}(a, 1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right). \tag{17.5.10}$$

В § 19.3 будет доказано, что для всех нецелых a

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,. \tag{17.5.11}$$

Поэтому

$$\mathrm{B}(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,,$$

что приводит к (17.5.9).

Значит, чтобы закончить доказательство теоремы 17.5.2 остается только установить равенство (17.5.11).

Равенство (17.5.9) при $a = 1/2$ показывает, что

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Но

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt$$

и после замены $t = x^2$ имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Это обосновывает равенство для интеграла Пуассона, использованное в § 17.4 при доказательстве формулы Стирлинга.

§ 17.6. Задачи и упражнения

17.1.1. При выводе теоремы 17.1.1 из теоремы 17.1.2 функция $f(x, y)$ была продолжена с множества G на прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. Проведите доказательство непрерывности полученной функции на $[a, b] \times [c, d]$.

17.1.2. Докажите, что в теореме 17.1.1 непрерывность функций φ и ψ нельзя заменить на их ограниченность.

17.1.3. Интеграл из (17.4.1) сходится равномерно на каждом отрезке $[A, B]$, $0 < A < B < +\infty$, изменения параметра x. Докажите, что ни одно из условий $x \geqslant A > 0$ и $x \leqslant B < +\infty$ в этом утверждении нельзя опустить.

17.1.4. Докажите формулу удвоения Лежандра для Г-функции

$$\Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

17.1.5. Докажите для положительных a равенство

$$\mathrm{B}(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

17.1.6. Покажите, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right),$$

если $m > -1$ и $n > -1$.

Глава 18. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве

§ 18.1. Нормированные и гильбертовы пространства

При изучении конечномерных пространств обычно пользуются ортонормированными базисами. Эта глава посвящена в основном ортонормированным системам элементов в бесконечномерных пространствах.

Будем рассматривать линейные пространства $\mathcal{L}$ с умножением на действительные или на комплексные числа.

В курсе линейной алгебры понятия линейной зависимости и линейной независимости вводились для конечных наборов элементов. Распространим эти определения на бесконечные системы элементов.

Определение. Бесконечное множество элементов линейного пространства называется *линейно независимым*, если линейно независимо любое конечное число элементов этого множества.

Например, в пространстве функций, непрерывных на отрезке, линейно независимую систему образует множество всех степеней $t^0 = 1, t, t^2, \ldots$.

Определение. *Нормой* в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют функцию, которая каждому элементу $x \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие действительное число $\|x\|$ и при этом выполняются условия:

1) $\|x\| \geqslant 0$ для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ и $\|x\| = 0$ в том и только том случае, когда $x = 0$;
2) для любого элемента x и произвольного числа α
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$
3) для любых элементов x и y справедливо неравенство
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Здесь в условии 1), когда говорится о неравенстве и равенстве норм, символ 0 обозначает число нуль, а в равенстве $x = 0$ этот символ обозначает нулевой элемент пространства $\mathcal{L}$.

Заметим, что из свойств нормы следует неравенство

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|. \tag{18.1.1}$$

Определение. Линейное пространство, в котором введена норма, называют *линейным нормированным пространством*.

При этом слово линейное обычно опускают и говорят о нормированных пространствах.

Приведем примеры нормированных пространств.

1) Пространство чисел, действительных или комплексных. В качестве нормы элемента x можно взять $|x|$. Выполнение всех аксиом нормы очевидно.

2) Векторы в трехмерном пространстве (и векторы на плоскости) с умножением на действительные числа. В качестве нормы вектора можно взять его длину. Для неколлинеарных векторов аксиома нормы 3) имеет простой геометрический смысл – в треугольнике длина одной стороны меньше суммы длин двух других сторон. Аксиому 3) называют *неравенством треугольника* и в произвольных нормированных пространствах.

3) Бесконечные числовые последовательности можно рассматривать как линейное пространство бесконечномерных векторов, определив сумму последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ как последовательность $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$, а произведение последовательности $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ на число α – как последовательность $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$.

Для элементов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ этого пространства, для которых при некотором $p \geqslant 1$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p,$$

в качестве нормы берется число

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Справедливость неравенства треугольника в этом случае вытекает из неравенства Минковского (15.5.4). Полученное нормированное пространство обозначают l_p.

Норму в пространстве ограниченных последовательностей определяют формулой

$$\|\mathbf{x}\| = \sup_k |x_k|.$$

Это пространство обозначают m.

4) В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, норму также определяют разными способами.

Норму, заданную формулой

$$\|x(t)\|_C := \max_{t\in[a,b]} |x(t)|, \tag{18.1.2}$$

называют *равномерной* нормой или нормой в $C[a, b]$. Точнее, $C[a, b]$ – это линейное нормированное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с нормой (18.1.2).

Выполнение аксиом 1) и 2) для нормы (18.1.2) очевидно, а аксиома 3) следует из неравенства

$$|x(t) + y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \|x(t)\|_C + \|y(t)\|_C,$$

в левой части которого нужно взять максимум по $t \in [a, b]$.

Норму (18.1.2) называют также *чебышевской* в честь П. Л. Чебышева, который первым систематически изучал свойства функций в такой норме. Отметим, что термин чебышевская норма у нас, к сожалению, употребляют реже, чем за границей.

В пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, вводят также норму

$$\|x(t)\|_L := \int_a^b |x(t)|\, dt. \tag{18.1.3}$$

В этом случае выполнение всех аксиом нормы вытекает из простейших свойств определенных интегралов. В частности, если $\|x(t)\|_L = 0$, то $x(t) \equiv 0$ в силу теоремы 9.3.4.

Наряду с (18.1.3) в пространстве непрерывных функций вводят также нормы

$$\|x(t)\|_{L^p} := \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \tag{18.1.4}$$

при $p > 1$. Здесь аксиома треугольника имеет место в силу неравенства Минковского (9.8.3) для интегралов. Если в (18.1.4) положить $p = 1$, получим норму (18.1.3).

Пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормами (18.1.3) и (18.1.4) обозначают $L_C[a, b]$ и $L_C^p[a, b]$ соответственно. Индекс C здесь показывает, что берутся не все функции, для которых конечны интегралы (18.1.3) и (18.1.4), а только непрерывные функции.

Рассмотрим теперь линейное пространство функций, кусочно непрерывных на отрезке. Если в этом пространстве попытаться ввести норму по формуле (18.1.3), то не будет выполняться аксиома 1) нормы, так как например, для функции, равной нулю всюду на $[a, b]$, кроме одной точки, интеграл из (18.1.3) равен нулю.

Эту трудность можно обойти, если говорить не о всех кусочно непрерывных функциях, а только о таких, которые непрерывны в концах отрезка, а во всех его внутренних точках разрыва непрерывны, скажем, слева или равны значению полусуммы пределов справа и слева. Не будем вдаваться в эти вопросы, так как нормы в L^p естественно рассматривать, когда интеграл понимается в смысле Лебега, что выходит за рамки настоящего курса.

В нормированном пространстве определяется *расстояние* между произвольными элементами x и y по формуле

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

В силу аксиом нормы расстояние обладает следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0$ в том и только том случае, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Здесь x, y, z – произвольные элементы пространства. Свойство 3) также называют неравенством треугольника.

Определение. Множество элементов произвольной природы, в котором для каждой пары элементов x, y введено расстояние $\rho(x, y)$, обладающее указанными выше свойствам 1)–3), называют *метрическим пространством*, а само расстояние – *метрикой*.

При этом говорят, что в пространстве введена метрика. Таким образом, нормированные пространства являются примерами метрических пространств. Заметим, что в общем случае в метрических пространствах нет ни сложения элементов, ни умножения элементов на числа.

Но основным в этой главе является изучение нормированных пространств частного вида – пространств со скалярным произведением.

Определение. *Скалярным произведением* в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют функцию двух переменных, которая каждой паре элементов x, y ставит в соответствие число (действительное или комплексное), которое обозначают (x, y), если при этом выполняются условия:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых элементов $x, y \in \mathcal{L}$; в частности, если рассматривается пространство над полем действительных чисел, то $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для любых элементов $x, y, z \in \mathcal{L}$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любых элементов $x, y \in \mathcal{L}$ и произвольного числа α;
4) $(x, x) \geqslant 0$ для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ и $(x, x) = 0$ в том и только том случае, когда $x = 0$.

В связи с аксиомой 4) заметим, что из 1) следует, что и в пространстве с умножением на комплексные числа скалярное произведение каждого элемента самого на себя является действительным числом. Поэтому произведение (x, x) можно сравнивать с нулем.

Из аксиом 1) и 3) следует, что $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$ для любых элементов $x, y \in \mathcal{L}$ и произвольного числа α.

Из аксиом 1) и 2) следует, что $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ для любых элементов $x, y, z \in \mathcal{L}$. Положив в этом равенстве $y = z = 0$, получим $(x, 0) = 0$ для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$. Здесь 0 как множитель в скалярном произведении обозначает нуль пространства, а в равенстве справа – число нуль.

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называют *пространством со скалярным произведением*.

В пространствах со скалярным произведением норму вводят по формуле

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}\,.$$

Выполнение аксиом 1) и 2) нормы при этом очевидно, в доказательстве нуждается только аксиома 3) – неравенство треугольника.

Теорема 18.1.1. *Для любых элементов x, y линейного пространства со скалярным произведением справедливы неравенство Коши–Буняковского*

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{18.1.5}$$

и неравенство треугольника (неравенство Минковского)

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{18.1.6}$$

Доказательство. В случае, когда какой-либо из элементов x и y нулевой, неравенства очевидны. Поэтому при доказательстве теоремы будем считать x и y ненулевыми элементами.

Для любых элементов x, y и произвольных чисел α и β имеем $(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) \geqslant 0$. Но

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) + \alpha\overline{\beta}(x,y) + \beta\overline{\alpha}(y,x) + \beta\overline{\beta}(y,y).$$

Положив в этом равенстве $\alpha = (y,y)$, $\beta = -(x,y)$, получаем

$$\begin{aligned}(y,y)\big[(y,y)(x,x) - \overline{(x,y)}(x,y) - (x,y)(y,x) + (x,y)\overline{(x,y)}\,\big] &= \\ = (y,y)[(x,x)(y,y) - (x,y)\overline{(x,y)}\,] &\geqslant 0.\end{aligned}$$

При $y \neq 0$ отсюда следует, что $(x,x)(y,y) \geqslant (x,y)\overline{(x,y)} = |(x,y)|^2$. Значит,

$$|(x,y)|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

и неравенство (18.1.5) установлено.

Неравенство (18.1.6) доказывается с помощью (18.1.5):

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) &\leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2&.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим, как задается скалярное произведение в классических пространствах.

В пространстве чисел (как действительных, так и комплексных) скалярное произведение определяют равенством $(x,y) := x \cdot \overline{y}$.

Скалярное произведение трехмерных векторов обладает всеми свойствами, указанными выше как аксиомы скалярного произведения.

В пространстве последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, для которых сходится ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$
скалярное произведение задают формулой
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}}.$$

В пространстве $L^2_C[a,b]$ скалярное произведение функций $x(t)$ и $y(t)$ определяют как
$$(x, y) := \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$
Выполнение аксиом скалярного произведения вытекает из свойств интегралов. При этом для нормы получаем то же выражение, что и в (18.1.4) при $p = 2$:
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\int_a^b x(t)\overline{x(t)}\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

В нормированных пространствах вводится понятие сходимости последовательности элементов по норме.

Определение. Последовательность элементов $x_1, x_2, \dots$ нормированного пространства называется *сходящейся к элементу x по норме*, если
$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Сходимость по норме называют также *сильной сходимостью*, чтобы отличать ее от другого вида сходимости, которую называют слабой. В настоящем курсе слабая сходимость не рассматривается.

Для краткости в дальнейшем будем говорить “сходимость элементов”, имея в виду их сходимость по норме.

Обычное рассуждение показывает, что если последовательность элементов сходится, то ее предел определяется однозначно. В самом деле, если последовательность $\{x_n\}$ сходится к x и к x^*, то
$$\|x - x^*\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - x^*\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$
Отсюда $\|x - x^*\| = 0$ и, значит, $x = x^*$.

Отметим, что если последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к x, то последовательность норм $\{\|x_n\|\}$ сходится к $\|x\|$. Это легко установить с помощью неравенства (18.1.1).

Каждая сходящаяся последовательность элементов удовлетворяет условию Коши: для любого положительного ε существует число $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n, m > N$ выполняется оценка

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Доказательство стандартное: если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, то по ε выбираем N так, чтобы для $n > N$ имела место оценка

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и для $n, m > N$ получаем

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon.$$

Однако, обратное утверждение в общем случае неверно, т.е. выполнение для некоторой последовательности элементов нормированного пространства условия Коши не обеспечивает существование элемента пространства, к которому эта последовательность сходится.

Пусть, например, на $[-1, 1]$ для каждого n задана функция $x_n(t)$, график которой изображен на рисунке.

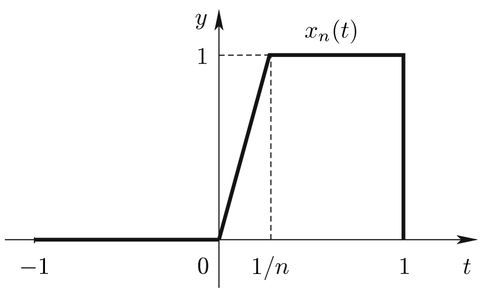

Рис. 18.1.

Легко видеть, что последовательность $\{x_n(t)\}$ как последовательность функций из пространства $L^1_C[-1, 1]$, удовлетворяет условию Коши и сходится по норме (18.1.3) к функции

$$x^*(t) := \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [-1, 0], \\ 1 & \text{при } t \in (0, 1], \end{cases}$$

которая не принадлежит пространству $L^1_C[-1,1]$.

Если последовательность удовлетворяет условию Коши, ее называют *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*.

Определение. Нормированное пространство называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность имеет предел. Полные линейные нормированные пространства называют *банаховыми пространствами*.

Таким образом, приведенный выше пример последовательности $\{x_n(t)\}$, показывает, что пространство L^1_C не является полным. На этом же примере видно, что не являются полными пространства L^p_C при всех $p > 1$.

Справедлива теорема о пополнении, согласно которой для каждого неполного нормированного пространства $\mathcal{L}$ существует такое полное нормированное пространство $\mathcal{B}$, что $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$, для элементов из $\mathcal{L}$ линейные операции в $\mathcal{B}$ и норма элементов имеют в $\mathcal{B}$ те же значения, что и в $\mathcal{L}$, и $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{B}$. Последнее означает, что для каждого элемента $x \in \mathcal{B}$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $y \in \mathcal{L}$ такой, что

$$\|x - y\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon.$$

Не будем обсуждать пополнение пространств, эти вопросы обычно рассматриваются в курсе функционального анализа. Заметим только, что пополнением пространств L^p_C, $p \geqslant 1$, являются пространства функций, интегрируемых по Лебегу со степенью p.

Поскольку в линейных пространствах со скалярным произведением введена норма, в этих пространствах также можно говорить о сходимости по норме, полноте и пополнении пространств, при котором сохраняются уже не только линейные операции, но и скалярные произведения.

Определение. Полное линейное пространство со скалярным произведением называют *гильбертовым пространством*.

Названия пространств банахово и гильбертово даны в честь С. Банаха и Д. Гильберта.

Неполные нормированные пространства называют предбанаховыми, а неполные пространства со скалярным произведением – предгильбертовыми.

Докажем полноту некоторых классических пространств.

Теорема 18.1.2. *Каждое конечномерное линейное пространство со скалярным произведением полно.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве размерности m ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_m$.

Пусть последовательность элементов $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши и

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} \xi_n^k e_k, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

– разложения элементов этой последовательности по базису, т.е. $\xi_n^k = (x_n, e_k)$. Оценим при фиксированном k разность

$$|\xi_n^k - \xi_s^k| = |(x_n, e_k) - (x_s, e_k)| = |(x_n - x_s, e_k)| \leqslant \\ \leqslant \|x_n - x_s\| \|e_k\| = \|x_n - x_s\|.$$

Таким образом, при каждом k числовая последовательность $\{\xi_n^k\}$ удовлетворяет условию Коши и, следовательно, сходится. Обозначим

$$\xi_*^k := \lim_{n \to \infty} \xi_n^k.$$

Тогда для элемента

$$x_* := \sum_{k=1}^{m} \xi_*^k e_k$$

имеем

$$\|x_n - x_*\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \xi_n^k e_k - \sum_{k=1}^{m} \xi_*^k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} (\xi_n^k - \xi_*^k) e_k \right\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left\| (\xi_n^k - \xi_*^k) e_k \right\| = \sum_{k=1}^{m} |\xi_n^k - \xi_*^k|.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_* по норме.

Теорема доказана.

Отметим без доказательства, что полно любое конечномерное нормированное пространство.

Теорема 18.1.3. *Пространства последовательностей m и l_p при $p \geqslant 1$ полны.*

Доказательство. Пусть, как обычно, $\mathbf{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$.

Сначала докажем полноту пространства m. В этом случае

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(s)}\|_m = \sup_k |x_k^{(n)} - x_k^{(s)}|$$

и из условия Коши для последовательности $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$ следует, что при каждом k последовательность $\{x_k^{(n)}\}$ сходится к некоторому числу, которое обозначим x_k^*.

Если при всех $n, s > N$

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(s)}\|_m < \varepsilon,$$

то для каждого k и $n > N$ в пределе при $s \to \infty$ получаем

$$|x_k^{(n)} - x_k^*| \leqslant \varepsilon. \tag{18.1.7}$$

Значит, для всех k

$$|x_k^*| \leqslant |x_k^{(N+1)}| + \varepsilon \leqslant \|\mathbf{x}^{(N+1)}\|_m + \varepsilon,$$

поэтому последовательность $(x_1^*, x_2^*, \dots)$ принадлежит m.

Так как оценка (18.1.7) выполняется при $n > N$ для всех k, из нее следует, что последовательность $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$, т.е. пространство m полно.

Рассмотрим теперь пространства l_p, $p \geqslant 1$. Имеем при $p = 1$

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(s)}\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(s)}|$$

и при $p > 1$

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(s)}\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(s)}|^p\right)^{1/p}.$$

Поэтому если последовательность элементов $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$ удовлетворяет условию Коши, то для каждого k последовательность $\{x_k^{(n)}\}$ сходится к некоторому числу x_k^*.

Пусть $p = 1$. Тогда если

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(s)}\|_{l_1} < \varepsilon,$$

то для каждого фиксированного N

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(s)}| < \varepsilon.$$

Отсюда в пределе при $s \to \infty$ получаем

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^*| \leqslant \varepsilon. \tag{18.1.8}$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^*| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)}| + \varepsilon \leqslant \|\mathbf{x}^{(n)}\|_{l_1} + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности N это доказывает, что последовательность $(x_1^*, x_2^*, \dots)$ принадлежит l_1. Обозначим эту последовательность $\mathbf{x}^*$. Из (18.1.8) следует оценка

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_{l_1} \leqslant \varepsilon,$$

опираясь на которую, видим, что последовательность $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$ сходится к $\mathbf{x}^*$.

Аналогично доказывается полнота пространств l_p при $p > 1$.

Теорема доказана.

Теорема 18.1.4. *Пространство $C(D)$ функций, непрерывных на множестве D, полно.*

Так как сходимость последовательности функций по норме пространства C означает равномерную сходимость этой последовательности, то теорема 18.1.4 является просто другой формулировкой теоремы 16.3.3 о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

Рассмотрим вопрос о приближении элементов нормированного пространства фиксированным конечным набором элементов этого пространства.

Пусть $\mathcal{L}$ – линейное нормированное пространство и $x_1, \dots, x_n$ – элементы из $\mathcal{L}$. Линейные комбинации элементов $x_1, \dots, x_n$, т.е. суммы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \tag{18.1.9}$$

называют *полиномами* по системе $x_1, \dots, x_n$.

Точная нижняя грань

$$\inf_{a_1,\ldots,a_n}\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\Big\|. \tag{18.1.10}$$

называется наилучшим приближением элемента $x \in \mathcal{L}$ полиномами (18.1.9)

Теорема 18.1.5. *Для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ существует полином* (18.1.9), *для которого в* (18.1.10) *достигается точная нижняя грань.*

Доказательство. Будем считать элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимыми, так как элементы, являющиеся линейными комбинациями остальных, можно исключить.

Введем функцию переменных $a_1, \ldots, a_n$

$$g(a_1,\ldots,a_n) := \Big\|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\Big\|.$$

Эта функция неотрицательна и непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$, так как в силу (18.1.1) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&|g(a_1,\ldots,a_n)-g(a_1',\ldots,a_n')| = \\
&\quad = \left|\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\Big\|-\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}a_k'x_k\Big\|\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_k')x_k\Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k-a_k'|\cdot\|x_k\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \max_{j=1,\ldots,n}|a_j-a_j'|\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|.
\end{aligned}$$

В частности, взяв в качестве x нуль пространства, получим непрерывность в $\mathbb{R}^n$ функции

$$h(a_1,\ldots,a_n) := \Big\|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\Big\|.$$

Чтобы показать, что функция $g(a_1,\ldots,a_n)$ принимает в некоторой точке из $\mathbb{R}^n$ свое минимальное значение, построим замкнутый шар, вне которого значения g велики, а внутри шара функция g будет принимать минимальное значение согласно теореме о достижении непрерывной функцией на компакте точной нижней грани своих значений.

В $\mathbb{R}^n$ точки $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых выполняется равенство

$$|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 1, \tag{18.1.11}$$

т.е. точки, принадлежащие единичной сфере пространства $\mathbb{R}^n$, являются замкнутым ограниченным множеством. Поэтому функция $h(a_1, \ldots, a_n)$ принимает в некоторой точке этой сферы свое минимальное на ней значение. Обозначим его μ. При этом $\mu > 0$, так как в силу линейной независимости $x_1, \ldots, x_n$, в каждой точке сферы (18.1.11) значение функции $h(a_1, \ldots, a_n)$ положительно.

Обозначим точную нижнюю грань значений $g(a_1, \ldots, a_n)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ через ρ. Тогда $\rho \geqslant 0$.

Положим

$$r := \frac{1}{\mu}(\rho + 1 + \|x\|)$$

и рассмотрим числа $a_1, \ldots, a_n$, для которых

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2} > r,$$

т.е. точки $(a_1, \ldots, a_n)$ лежат вне шара радиуса r с центром в начале координат.

Так как

$$\begin{aligned} g(a_1, \ldots, a_n) \geqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| - \|x\| = \\ = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2} \right)^{-1} \cdot x_k \right\| \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2} - \|x\|, \end{aligned}$$

а норма в правой части этого выражении является значением функции h в некоторой точке сферы (18.1.11), то

$$g(a_1, \ldots, a_n) \geqslant \mu \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} - \|x\| > \mu r - \|x\| = \rho + 1.$$

Таким образом, нижняя грань значений функции $g(a_1,\ldots,a_n)$ может достигаться только в точках, для которых

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2}\leqslant r.$$

Такие точки образуют в $\mathbb{R}^n$ замкнутое ограниченное множество. Значит, непрерывная на этом множестве $g(a_1,\ldots,a_n)$ достигает на нем точную нижнюю грань своих значений.

Теорема доказана.

Полином, для которого достигается точная нижняя грань (18.1.10), называют *полиномом наилучшего приближения* x по системе элементов $x_1,\ldots,x_n$.

§ 18.2. Ортонормированные системы

В этом параграфе E обозначает линейное пространство со скалярным произведением. В первую очередь будем иметь в виду пространство L^2_C.

Определение. Ненулевые элементы $x,y\in E$ называют *ортогональными*, если $(x,y)=0$.

Набор ненулевых элементов $\{e_\alpha\}$ пространства E, где α принадлежат некоторому набору индексов $\mathcal{A}$, называют *ортогональной системой*, если $(e_\alpha,e_\beta)=0$ для любых $\alpha\neq\beta$.

Ортогональную систему элементов $\{e_\alpha\}$ называют *ортонормированной*, если $(e_\alpha,e_\alpha)=1$ для всех элементов e_α.

Для краткости часто вместо ортонормированная система пишут ОНС.

С помощью символа Кронекера

$$\delta_{\alpha,\beta}=\begin{cases}1 & \text{при } \alpha=\beta,\\ 0 & \text{при } \alpha\neq\beta,\end{cases}$$

условие ортонормированности системы $\{e_\alpha\}$ записывается так:

$$(e_\alpha,e_\beta)=\delta_{\alpha,\beta}.$$

Каждая ортогональная система линейно независима.

Действительно, если бы ортогональная система $\{e_\alpha\}$ была линейно зависимой, то существовал бы такой элемент e^* этой системы, что для некоторых элементов системы $e_1, \ldots, e_s$ и чисел $a_1, \ldots, a_s$ выполняется равенство

$$e^* = \sum_{k=1}^{s} a_k e_k.$$

Умножив скалярно обе части этого равенства на e^*, получим

$$(e^*, e^*) = \left(\sum_{k=1}^{s} a_k e_k, e^* \right) = \sum_{k=1}^{s} a_k (e_k, e^*) = 0.$$

Значит, $\|e^*\| = 0$ и $e^* = 0$, а все элементы ортогональной системы должны быть ненулевыми.

Ортогональная система может состоять как из конечного, так из бесконечного, в том числе и инесчетного набора элементов.

Так, ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства является конечной ортонормированной системой.

Классическим примером бесконечной ортогональной системы является *тригонометрическая система*

$$1, \quad \cos kx, \quad \sin kx, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{18.2.1}$$

в пространстве $L^2_C[-\pi, \pi]$.

Покажем, что функции (18.2.1) попарно ортогональны.

Для чисел k и m, принимающих значения $0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$(\cos kx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \cos mx \, dx =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(k-m)x + \cos(k+m)x] \, dx.$$

Поэтому, если $k \neq m$, то

$$(\cos kx, \cos mx) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k-m)x}{k-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(k+m)x}{k+m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0,$$

а при $k = m = 1, 2, \ldots$

$$(\cos kx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 + \cos 2kx] \, dx = \pi.$$

Таким образом, при всех натуральных k и m имеем

$$(\cos kx, \cos mx) = \pi\delta_{k,m},$$

где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Если k – натуральное, а $m = 0$, то $(\cos kx, 1) = 0$.

Аналогично для всех натуральных k и m

$$(\sin kx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(k-m)x - \cos(k+m)x]\,dx = \pi\delta_{k,m}.$$

Далее, при $k = 0, 1, 2, \ldots$ и натуральных m

$$(\cos kx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\,dx = 0,$$

так как это интегралы от нечетных функций.

Наконец,

$$(1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi.$$

Итак, тригонометрическая система (18.2.1) ортогональна в пространстве $L^2_C[-\pi, \pi]$, а функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{18.2.2}$$

образуют ортонормированную систему.

Чтобы убедиться, что ортонормированная система может быть несчетной, рассмотрим пространство всевозможных конечных линейных комбинаций функций $\sin \alpha t$, определенных на всей оси, где α – произвольные числа. Скалярное произведение функций $x(t)$ и $y(t)$ в этом пространстве зададим формулой

$$(x(t), y(t)) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t)\,dt.$$

Легко проверить, что в этом случае выполнены аксиомы скалярного произведения и функции $\sin \alpha t$, $\alpha \neq 0$, образуют ОНС. В самом деле,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \sin \alpha t \sin \beta t\,dt =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (\cos(\alpha-\beta)t - \cos(\alpha+\beta)t)\,dt = \delta_{\alpha,\beta}.$$

Задача о наилучшем приближении элементов полиномами, которой для нормированных пространств была посвящена теорема 18.1.5, в пространствах со скалярным произведением решается сравнительно просто.

Рассмотрим приближение элемента $x \in E$ полиномами по системе элементов $e_1, \ldots, e_n$, образующих ОНС. Это не ограничивает общность, так как из произвольного конечного набора линейно независимых элементов можно получить ОНС методом ортогонализации Шмидта.

Итак, для элемента x требуется за счет выбора чисел $a_1, \ldots, a_n$ минимизировать значение нормы

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\|. \tag{18.2.3}$$

Согласно теореме 18.1.5 полином наилучшего приближения существует. Покажем, как такой полином строится в пространствах со скалярным произведением.

Имеем

$$\begin{aligned}\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\|^2 &= \Big(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\, x - \sum_{m=1}^{n} a_m e_m \Big) = \\ &= (x, x) - \Big(x,\, \sum_{m=1}^{n} a_m e_m \Big) - \\ &\qquad - \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\, x \Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\, \sum_{m=1}^{n} a_m e_m \Big) = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{m=1}^{n} \overline{a_m}(x, e_m) - \sum_{k=1}^{n} a_k (e_k, x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_k}.\end{aligned}$$

Введем обозначение $c_k := (x, e_k)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\|^2 = \\ &\quad = \|x\|^2 - \sum_{m=1}^{n} \overline{a_m} c_m - \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k} + \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_k} = \\ &\quad = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (-\overline{a_k} c_k - a_k \overline{c_k} + a_k \overline{a_k} + c_k \overline{c_k}) - \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} =\end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)\overline{(c_k - a_k)} - \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} =$$
$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

Это равенство показывает, что минимальное значение норма (18.2.3) имеет, если $a_k = c_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$.

Заметим, что для элемента $x = 0$ все $c_k = 0$. Таким образом, для произвольного полинома по ортонормированной системе, справедливо равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2. \tag{18.2.4}$$

Определение. Если в линейном пространстве со скалярным произведением E элементы e_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, образуют ортонормированную систему и $x \in E$, то числа $c_\alpha := (x, e_\alpha)$ называют *коэффициентами Фурье* элемента x по системе $\{e_\alpha\}$.

Коэффициенты Фурье (x, e_α) обозначают $\widehat{x}_\alpha$.

Используя коэффициенты Фурье, доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 18.2.1. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированная система в E, то для каждого элемента $x \in E$*

$$\inf_{a_1, \ldots, a_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|, \tag{18.2.5}$$

где c_k – коэффициенты Фурье x по системе $e_1, \ldots, e_n$. При этом

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \tag{18.2.6}$$

Свойство, выраженное равенством (18.2.5), называют *минимальным свойством коэффициентов Фурье*, а равенство (18.2.6) – *тождеством Бесселя.*

Из (18.2.6) следует, что для каждого элемента x и произвольной ортонормированной системы $e_1, \ldots, e_n$ справедлива оценка

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \tag{18.2.7}$$

Поэтому для любой несчетной ОНС в пространстве E у каждого элемента отличными от нуля может быть не более счетного множества коэффициентов Фурье. В самом деле, в силу (18.2.7) для каждого натурального числа m неравенство $|c_\alpha| \geqslant 1/\sqrt{m}$ может выполняться только для конечного числа коэффициентов Фурье элемента x. А для любого неравного нулю коэффициента Фурье такое неравенство имеет место при некотором m.

Из оценки (18.2.7) вытекает также следующее утверждение.

Теорема 18.2.2 (Неравенство Бесселя). *Если в пространстве E последовательность элементов $e_1, e_2, \ldots$ образует ортонормированную систему и c_k – коэффициенты Фурье элемента $x \in E$ по этой системе, то справедливо неравенство*

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \tag{18.2.8}$$

которое называют неравенством Бесселя.

Неравенство Бесселя может быть строгим. Действительно, если элементы e_1, e_2 ортогональны и нормированы, то для ОНС, состоящей из e_2, коэффициент Фурье элемента e_1 равен нулю и неравенство (18.2.8) имеет вид $1 > 0$.

Если в неравенстве (18.2.8) имеет место равенство, его называют *равенством Парсеваля.*

Определение. Если $e_1, e_2, \ldots$ – ортонормированная система в пространстве E и числа $c_1, c_2, \ldots$ – коэффициенты Фурье элемента $x \in E$ по этой системе, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

называют *рядом Фурье элемента x по системе $e_1, e_2, \ldots$.*

Теорема 18.2.3. *Если $\{e_\alpha\}$ – ортонормированная система в пространстве E, то для каждого элемента $x \in E$ следующие утверждения эквивалентны:*

1°) *для каждого положительного числа ε существует полином*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k e_k^*$$

по системе $\{e_\alpha\}$, для которого справедлива оценка

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k^* \right\| < \varepsilon; \tag{18.2.9}$$

2°) *существует такая последовательность $e_1, e_2, \ldots$ элементов из $\{e_\alpha\}$, что ряд Фурье элемента x по системе e_1, $e_2, \ldots$, сходится к x по норме*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \qquad c_k = (x, e_k); \tag{18.2.10}$$

3°) *существует такая последовательность $e_1, e_2, \ldots$ элементов из $\{e_\alpha\}$, для которой имеет место равенство Парсеваля*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \qquad c_k = (x, e_k). \tag{18.2.11}$$

Доказательство. Сначала покажем, что из 1° следуют утверждения 2° и 3°. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим полином, для которого справедлива оценка (18.2.9). В силу минимального свойства коэффициентов Фурье

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k^* e_k^* \right\| < \varepsilon, \qquad c_k^* = (x, e_k^*). \tag{18.2.12}$$

Будем предполагать, что в (18.2.12) $c_k^* \neq 0$ для всех k, исключив в случае необходимости те k, для которых $c_k^* = 0$.

Элемент x имеет не более счетного множества отличных от нуля коэффициентов Фурье по системе $\{e_\alpha\}$.

Выберем последовательность элементов системы $\{e_\alpha\}$, в которой сначала идут $e_1^*, \ldots, e_N^*$, а затем добавлены все остальные элементы из $\{e_\alpha\}$, коэффициенты Фурье x по которым не равны нулю.

Рассмотрим ряд Фурье элемента x по построенной системе $e_1, e_2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Согласно тождеству Бесселя (18.2.6) при каждом n

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

Поэтому для $n > N$

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k^*|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{N} c_k^* e_k^*\right\|^2.$$

Отсюда, как легко видеть, следует, что из утверждения 1° вытекают 2° и 3°.

Если выполнено 2°, т.е. существует последовательность e_1, $e_2, \ldots$, для которой справедливо равенство (18.2.10), то для каждого положительного ε найдется число N такое, что справедлива оценка вида (18.2.9), т.е. из 2° следует 1°.

Наконец, если выполнено утверждение 3°, то

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \to 0, \qquad n \to \infty,$$

и так как согласно (18.2.6)

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2,$$

то справедливо и утверждение 1°.

Теорема доказана.

Теорема 18.2.4. *Если $e_1, e_2, \ldots$ – ортонормированная система в пространстве E и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \tag{18.2.13}$$

сходится по норме к некоторому элементу $x \in E$, то этот ряд является рядом Фурье x по системе $e_1, e_2, \ldots$.

Доказательство. По условию теоремы

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{18.2.14}$$

При $m \leqslant n$ имеем

$$(x, e_m) = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_m\right) = \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_m\right) + a_m.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$\left|\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_m\right)\right| \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|.$$

Поэтому в силу (18.2.14) $(x, e_m) = a_m$ и теорема доказана.

Из этой теоремы и неравенства Бесселя следует, что сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{18.2.15}$$

является необходимым условием, для того чтобы ряд (18.2.13) по ортонормированной системе $e_1, e_2, \ldots$ сходился к некоторому элементу пространства E.

Так как согласно (18.2.4) для любых чисел $n \geqslant m$

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} a_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |a_k|^2,$$

то из сходимости ряда (18.2.15) следует выполнение условия Коши для ряда (18.2.13).

А если пространство E является полным, то из выполнения условия Коши для ряда (18.2.13) следует, что этот ряд сходится к некоторому элементу из E (полнота пространства здесь необходима).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 18.2.5 (Теорема Рисса–Фишера). *Если $e_1, e_2, \ldots$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H и $a_1, a_2, \ldots$ – числа, для которых сходится ряд* (18.2.15), *то ряд* (18.2.13) *сходится по норме к некоторому элементу $x \in H$, является рядом Фурье своей суммы и справедливо равенство Парсеваля*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Определение. Множество элементов $\{x_\alpha\}$ линейного нормированного пространства называют *полным* в этом пространстве, если каждый элемент x пространства можно как угодно хорошо приблизить полиномом по системе $\{x_\alpha\}$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует полином по системе $\{x_\alpha\}$, для которого

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| < \varepsilon.$$

Если в линейном пространстве со скалярным произведением E элементы $\{x_\alpha\}$ образуют ортонормированную систему, то согласно теореме 18.2.3 полнота этой системы равносильна тому, что каждый элемент $x \in E$ является суммой своего ряда Фурье по системе $\{x_\alpha\}$, а также тому, что для каждого элемента x выполняется равенство Парсеваля.

Установим еще одно необходимое и достаточное условие полноты ортонормированной системы.

Теорема 18.2.6. *Для того чтобы ортонормированная система $\{e_\alpha\}$ была полна в пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов $x, y \in E$ имело место равенство*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\overline{(y, e_k)}, \tag{18.2.16}$$

где последовательность $\{e_k\}$ содержит все элементы системы $\{e_\alpha\}$, для которых хотя бы один из коэффициентов Фурье (x, e_k) и (y, e_k) отличен от нуля.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 18.2.3, так как при $x = y$ равенство (18.2.16) превращается в (18.2.11).

Докажем необходимость. Для этого покажем, что из (18.2.11) следует, что равенство (18.2.16) справедливо для любой пары элементов x, y.

Введем обозначения $c_k := (x, e_k)$ и $d_k := (y, e_k)$. При любом N

$$\left(x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k,\, y - \sum_{m=1}^{N} d_m e_m \right) =$$

$$= (x, y) - \sum_{k=1}^{N} c_k (e_k, y) -$$

$$- \sum_{m=1}^{N} \overline{d_m} (x, e_m) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} c_k \overline{d_m} (e_k, e_m) =$$

$$= (x,y) - \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{d_k} - \sum_{m=1}^{N} \overline{d_m} c_m + \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{d_k} =$$
$$= (x,y) - \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{d_k}. \tag{18.2.17}$$

Но согласно неравенству Коши–Буняковского

$$\left|\left(x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k,\, y - \sum_{m=1}^{N} d_m e_m\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\right\| \cdot \left\|y - \sum_{m=1}^{N} d_m e_m\right\|.$$

Поэтому из (18.2.17) следует, что

$$\left|(x,y) - \sum_{k=1}^{N} c_k \overline{d_k}\right| \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\right\| \cdot \left\|y - \sum_{m=1}^{N} d_m e_m\right\|.$$

Нормы из правой части этой оценки в силу полноты системы стремятся к нулю при $N \to \infty$. Значит, выполняется равенство (18.2.16).

Теорема доказана.

Равенство (18.2.16) также называют равенством Парсеваля или обобщенным равенством Парсеваля.

Определение. Ортонормированную систему $\{e_\alpha\}$ называют *замкнутой* в пространстве E, если из того, что $(x, e_\alpha) = 0$ для всех e_α, следует равенство $x = 0$.

Теорема 18.2.7. *Для замкнутости ортонормированной системы в гильбертовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы она была полна.*

Доказательство. Если система полна, то равенство нулю всех коэффициентов Фурье элемента согласно теореме 18.2.3 показывает, что этот элемент равен нулю. Таким образом, достаточность в теореме 18.2.7 имеет место не только для гильбертовых пространств, но и для произвольных пространств со скалярным произведением.

Докажем необходимость. Предположим, что система $\{e_\alpha\}$ замкнута, но не полна. Тогда в силу теоремы 18.2.3 существует элемент x, для которого не выполняется равенство Парсеваля, т.е.

$$\| x \|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \tag{18.2.18}$$

где c_k – коэффициенты Фурье x, причем ряд в правой части (18.2.18) содержит все отличные от нуля коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{e_\alpha\}$.

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

сходится, то в силу полноты пространства согласно теореме Рисса–Фишера ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

сходится к некоторому элементу x^* и для x^* справедливо равенство Парсеваля

$$\| x^* \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \tag{18.2.19}$$

Рассмотрим элемент $x' := x - x^*$. Так как числа c_k являются коэффициентами Фурье и элемента x и элемента x^*, все коэффициенты Фурье элемента x' равны нулю. Отсюда в силу замкнутости системы следует, что $x' = 0$, т.е. $x = x^*$.

Сопоставив (18.2.18) и (18.2.19), получим

$$\| x \|^2 > \| x^* \|^2 .$$

Это противоречие заканчивает доказательство теоремы.

§ 18.3. Задачи и упражнения

18.3.1. Проведите доказательство неравенства (18.1.1) для произвольных элементов x и y.

18.3.2. Докажите. что в пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций $x(t)$ величины

$$\left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

при $p \in (0,1)$ не удовлетворяют аксиомам нормы.

18.3.3. Подпространство пространства m сходящихся числовых последовательностей обозначают c, а подпространство сходящихся к нулю последовательностей обозначают c_0. Докажите полноту пространств c и c_0.

18.3.4. Докажите. что в пространстве со скалярным произведением для любой пары элементов x и y выполняется равенство

$$\|x-y\| + \|x+y\| = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Глава 19. Ряды Фурье по тригонометрической системе

§ 19.1. Класс функций L_R

Ряды, которые теперь называют рядами Фурье, появились в начале XIX века как ряды по тригонометрической системе (18.2.1) в исследованиях Ж. Фурье уравнения теплопроводности, когда требуется найти функцию $u(x,t)$, для которой выполняется равенство

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,.$$

Основная задача при этом была в представлении функции в виде суммы тригонометрического ряда. В дальнейшем помимо этой центральной проблемы изучались и многие другие вопросы и к настоящему времени теория тригонометрических рядов стала одним из важнейших разделов математического анализа.

В этой главе будет рассматриваться класс функций, абсолютно интегрируемых по Риману в несобственном смысле на промежутке $[a,b]$. Этот класс обозначим $L_R[a,b]$.

Согласно определению несобственных интегралов, данному в § 9.10, в случае, когда $[a,b]$ – конечный отрезок, функция $f \in L_R[a,b]$, если $[a,b]$ можно разбить на конечное число отрезков $[a_j,b_j]$ таких, что f интегрируема в собственном смысле на отрезках вида $[a_j+\varepsilon, b_j-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, и для каждого j существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a_j+\varepsilon}^{b_j-\varepsilon} |f(x)|\,dx.$$

Значение такого предела обозначают

$$\int_{a_j}^{b_j} |f(x)|\,dx, \tag{19.1.1}$$

а сумму интегралов (19.1.1) по всем отрезкам $[a_j, b_j]$, на которые разбит исходный отрезок $[a, b]$, обозначают

$$\int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Пусть теперь $[a, b]$ – бесконечный промежуток, для определенности вся ось $(-\infty, +\infty)$. Тогда $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, если для любого конечного отрезка $[\alpha, \beta]$ функция f принадлежит $L_R[\alpha, \beta]$ и существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}} \int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx,$$

значение которого обозначают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

Понятно, что если $f \in L_R[a, b]$, то существует несобственный интеграл не только от функции $|f(x)|$, но и от функции $f(x)$.

Ясно, что произвольная линейная комбинация функций из $L_R[a, b]$ принадлежит этому пространству, т.е. $L_R[a, b]$ – линейное пространство.

Если для функций $f \in L_R[a, b]$ положить

$$\|f\|_L := \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

то $\|f\|_L$ будет удовлетворять всем аксиомы нормы, за исключением того, что из $\|f\|_L = 0$ не следует $f(x) \equiv 0$.

Чтобы это свойство также имело место, не будем различать функции f и g из $L_R[a, b]$, если $\|f - g\|_L = 0$.

Более аккуратный подход состоял бы в том, что все функции из $L_R[a, b]$ разбиваются на такие классы, что функции f и g принадлежат одному классу, если $\|f - g\|_L = 0$. Тогда элементами пространства $L_R[a, b]$ были бы классы функций, для которых еще нужно определить сложение и умножение на числа так, чтобы выполнялись обычные свойства этих операций. Не будем останавливаться подробнее на этом вопросе, тем более, что указанное свойство в дальнейшем не будет играть существенную роль.

Легко убедиться, что функции из пространства $L_R[a,b]$ обладают следующим свойством.

Если отрезок $[a,b]$ конечен, то для функции $f(x) \in L_R[a,b]$ и функции $g(x)$, интегрируемой на $[a,b]$ по Риману и такой, что $|g(x)| \leqslant B$, произведение этих функций принадлежит $L_R[a,b]$ и справедлива оценка

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant B \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{19.1.2}$$

Подобное утверждение для бесконечного промежутка $[a,b]$ формулируется так: если функция $f(x) \in L_R[a,b]$, а функция $g(x)$ на $[a,b]$ локально интегрируема, т.е. интегрируема на любом конечном отрезке из $[a,b]$, и $|g(x)| \leqslant B$ для всех $x \in [a,b]$, то $f(x)g(x) \in L_R[a,b]$ и справедлива оценка (19.1.2).

Согласно теореме 9.5.1 интегрируемые по Риману функции можно приблизить ступенчатыми функциями как угодно хорошо по норме пространства L. Покажем, что таким свойством обладают и функции из $L_R[a,b]$.

Теорема 19.1.1. *Если $f(x) \in L_R[a,b]$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция $\varphi(x)$, что*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{19.1.3}$$

Доказательство. Если отрезок $[a,b]$ конечен, то f может иметь особенности только в конечном числе точек. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда функция имеет особенности только в концах отрезка $[a,b]$, а на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ интегрируема в собственном смысле.

Для произвольного положительного ε возьмем такой отрезок $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, что

$$\int_a^\alpha |f(x)|\,dx + \int_\beta^b |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.1.4}$$

Далее, пользуясь теоремой 9.5.1, находим ступенчатую функцию $\varphi(x)$, для которой

$$\int_\alpha^\beta |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{19.1.5}$$

и полагаем $\varphi(x) = 0$ на $[a, b] \setminus [\alpha, \beta]$. Тогда оценка (19.1.3) вытекает из (19.1.4) и (19.1.5).

Если промежуток $[a, b]$ бесконечен, сначала выбираем конечный отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ такой, что справедлива оценка (19.1.4), и пользуясь доказанным уже утверждением для конечных отрезков, находим ступенчатую функцию $\varphi(x)$, для которой выполнена оценка (19.1.5). Затем доопределив функцию $\varphi(x)$ нулем на $[a, b] \setminus [\alpha, \beta]$, получим оценку (10.1.3).

Теорема доказана.

Отметим, что если промежуток $[a, b]$ бесконечен, то построенная в этом доказательстве функция $\varphi(x)$ *финитна*, т.е. равна нулю вне некоторого конечного отрезка. Поэтому функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_R[a, b]$.

Согласно теореме 9.5.2 каждую функцию, интегрируемую по Риману в собственном смысле, можно приблизить по норме пространства L как угодно хорошо непрерывной функцией. Это верно и для функций из $L_R[a, b]$.

Теорема 19.1.2. *Если $f(x) \in L_R[a, b]$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная (финитная, если промежуток $[a, b]$ бесконечен) функция $\psi(x)$ такая, что*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{19.1.6}$$

Сначала опираясь на теорему 19.1.1, приближаем $f(x)$ финитной ступенчатой функцией $\varphi(x)$. Поскольку функция $\varphi(x)$ может иметь только конечное число точек разрыва и это разрывы первого рода, существует непрерывная функция $\psi(x)$, которая хорошо приближает $\varphi(x)$.

Важную роль в дальнейшем будут играть следующие утверждения, доказательство которых опирается на теорему 19.1.1.

Теорема 19.1.3 (Лемма Римана). *Для каждой функции $f(x)$ из $L_R[a, b]$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x\, dx = 0 \tag{19.1.7}$$

и

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x\, dx = 0. \tag{19.1.8}$$

Доказательство. Докажем (19.1.7). Если $f(x)$ – *характеристическая функция* конечного отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. функция, равная 1 на $[\alpha, \beta]$ и равная 0 вне $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx = \int_\alpha^\beta \cos \nu x \, dx = \frac{\sin \nu x}{\nu}\bigg|_\alpha^\beta = \frac{1}{\nu}(\sin \nu\beta - \sin \nu\alpha),$$

откуда следует (19.1.7) для характеристических функций отрезков. Следовательно, это равенство имеет место и для ступенчатых функций.

Произвольную функцию $f(x) \in L_R[a, b]$ приближаем финитной ступенчатой функцией $\varphi(x)$ и пользуемся оценкой

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx\right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left|\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \cos \nu x \, dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x) \cos \nu x \, dx\right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx + \left|\int_a^b \varphi(x) \cos \nu x \, dx\right|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу теоремы 19.1.1 и справедливости (19.1.7) для ступенчатых функций получаем (19.1.7) для произвольных функций из $L_R[a, b]$.

Доказательство равенства (19.1.8) аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 19.1.4. *Если $f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$, то при $\alpha \to 0$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha) - f(x)| \, dx \to 0. \tag{19.1.9}$$

Доказательство. Для ступенчатых финитных функций f утверждение теоремы очевидно. Если f – произвольная функция из $L_R(-\infty, +\infty)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция $\varphi(x)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon.$$

Пользуясь этой оценкой и неравенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\alpha) - f(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\alpha) - \varphi(x+\alpha)|\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)|\, dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - f(x)|\, dx < 2\varepsilon + \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)|\, dx,$$

приходим к (19.1.9).

Теорема доказана.

Наряду с пространством $L_R[a,b]$ рассматривают пространства $L_R^p[a,b]$ при $p > 1$. Это – множество функций $f(x)$, для которых $|f(x)|^p \in L_R[a,b]$.

В § 9.5 доказано, что функции, интегрируемые по Риману в собственном смысле, можно как угодно хорошо приблизить по норме L ступенчатыми функциями и непрерывными функциями. Аналогично доказательству теорем 9.5.1 и 9.5.2, можно установить подобное свойство о приближении по норме L^p, $p > 1$, а также следующее утверждение.

Теорема 19.1.5. *Если $f(x) \in L_R^p[a,b]$, $p \geqslant 1$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существуют финитные функции ступенчатая $\varphi(x)$ и непрерывная $\psi(x)$ такие, что*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p\, dx < \varepsilon, \qquad \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^p\, dx < \varepsilon.$$

§ 19.2. Коэффициенты Фурье по тригонометрической системе

Настоящая глава посвящена вопросам, связанным с представлением функций рядами по тригонометрической системе (18.2.1).

Все функции системы (18.2.1) имеют период 2π. Поэтому рядами по тригонометрической системе представляют функции, которые имеют период 2π.

Заметим, что при вычислении интегралов от 2π-периодических функций по промежутку длины 2π в качестве отрезка интегрирования можно брать произвольный отрезок длины 2π. Обычно берут отрезок $[-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi]$.

В § 18.2 было доказано, что в пространстве $L^2_R[a,b]$ тригонометрическая система ортогональна, а система функций (18.2.2) ортонормирована.

Если функция $f(x)$ равна сумме ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{19.2.1}$$

который сходится к ней равномерно, то согласно теореме 16.5.2 равенство (19.2.1) после умножения его на произвольную непрерывную функцию можно почленно интегрировать. Это позволяет выразить коэффициенты a_k и b_k ряда из (19.2.1) с помощью интегралов от функции $f(x)$.

Сначала проинтегрируем по периоду почленно само равенство (19.2.1):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,dx = a_0\pi.$$

Значит,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{19.2.2}$$

Умножим теперь равенство (19.2.1) на $\cos nx$ при натуральном n и проинтегрируем по периоду почленно полученный ряд. В силу ортогональности тригонометрической системы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos nx\,dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx\,dx = a_n\pi.$$

Таким образом, при всех натуральных n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{19.2.3}$$

Заметим, что (19.2.2) можно считать частным случаем равенства (19.2.3), соответствующим $n = 0$. Этим объясняется запись свободного члена в (19.2.1) в виде $a_0/2$.

Аналогично, умножив равенство (19.2.1) на $\sin nx$ и проинтегрировав полученное равенство почленно, находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{19.2.4}$$

Таким образом, если ряд в (19.2.1) сходится равномерно при всех x, то для его коэффициентов справедливы формулы (19.2.3) и (19.2.4).

В этом рассуждении равномерная сходимость ряда в (19.2.1) была нужна только для обоснования возможности почленного интегрирования ряда после умножения его на функции тригонометрической системы. Поэтому сделанный вывод о коэффициентах ряда (19.2.1) имеет место для каждой функции $f(x)$, представимой рядом, для которого допустимо почленное интегрирование.

Заметим, что вычисление коэффициентов тригонометрического ряда с помощью почленного интегрирования восходит к Л. Эйлеру. Об обосновании почленного интегрирования в те годы не задумывались.

Интегралы из формул (19.2.3) и (19.2.4) существуют для каждой 2π-периоди- ческой функции $f(x) \in L_R$.

Определение. Для функции $f \in L_R[-\pi, \pi]$ числа a_n и b_n, заданные формулами (19.2.3) и (19.2.4), называют ее *коэффициентами Фурье по тригонометрической системе.*

Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{19.2.5}$$

в котором a_k и b_k – коэффициенты Фурье f, называют *рядом Фурье функции f по тригонометрической системе.*

Ряды Фурье функций из L_R и даже ряды Фурье непрерывных функций могут не сходиться в некоторых точках. Потому в общем случае нельзя писать равенство вида (19.2.1). Чтобы показать, что ряд (19.2.5) является рядом Фурье функции $f(x)$, используют знак соответствия

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Из сказанного выше следует, что каждый равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

Лемма Римана (теорема 19.1.3) показывает, что коэффициенты Фурье функций из $L_R[-\pi,\pi]$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Из (19.2.4) следует, что коэффициенты Фурье по синусам четных функций равны нулю. Точно также равны нулю коэффициенты Фурье нечетных функций по косинусам.

Заметим, что если для 2π-периодической функции $f(x) \in L_R[-\pi,\pi]$ определить ряд Фурье по ортонормированной системе (18.2.2) так, как это сделано в § 18.2, то получим тот же ряд (19.2.5). В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{a_0}{2},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\,dt \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} = a_k \cos kx, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Аналогичные равенства имеет место для членов ряда по синусам.

Таким образом, хотя коэффициенты Фурье и ряды Фурье по тригонометрической системе определены сейчас иначе, чем в главе 18, получены те же ряды, а коэффициенты Фурье отличаются только множителем $1/\sqrt{\pi}$.

Всюду далее, если не оговорено противное, ряд Фурье по тригонометрической системе будем для краткости называть рядом Фурье.

§ 19.3. Сходимость ряда Фурье в точке

Получим сначала представление частных сумм ряда Фурье, удобное при изучении сходимости.

Пусть (19.2.5) – ряд Фурье функции $f \in L_R[-\pi,\pi]$. Рассмотрим частную сумму ряда (19.2.5)

$$S_n(f,x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Такую сумму называют частной суммой ряда Фурье порядка n.

Используя для a_k и b_k формулы (19.2.3) и (19.2.4), находим

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx]\,dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

Определение. Тригонометрический полином

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{19.3.1}$$

называют *ядром Дирихле порядка* n.

Таким образом,

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt. \tag{19.3.2}$$

Такой интеграл называют сверткой функции f с ядром Дирихле D_n.

Для ядра Дирихле при t, не кратных 2π, справедливо представление

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}\,. \tag{19.3.3}$$

В самом деле,

$$D_n(t)\cdot 2\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\cos kt\sin\frac{t}{2} = \\ = \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right] = \\ = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$$

Покажем, что поведение частных сумм ряда Фурье функции f в точке зависит только от значений f в малой окрестности этой точки.

Теорема 19.3.1 (Принцип локализации Римана). *Сходимость или расходимость ряда Фурье в точке, а также значение суммы ряда, если он сходится, определяются значениями функции из как угодно малой окрестности этой точки.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число δ, $0 < \delta < \pi$, и запишем частную сумму ряда Фурье f в виде

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)D_n(t)\,dt + \rho_n(x), \tag{19.3.4}$$

где

$$\rho_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

и

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{для } |t| < \delta, \\ f(x+t)\,(2\sin t/2)^{-1} & \text{для } \delta \leqslant |t| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Так как функция $g(t) \in L_R[-\pi,\pi]$, то согласно лемме Римана при $n \to \infty$

$$\rho_n(x) \to 0.$$

Теорема доказана, так как в интеграле из (19.3.4) участвуют значения функции f только из δ-окрестности точки x.

Используя (19.3.4) видим, что если $f \in L_R[-\pi,\pi]$ и на некотором отрезке $[\alpha,\beta]$ функция $f(x)$ равна нулю, то в любой точке интервала (α,β) ряд Фурье функции f сходится к нулю, т.е. к значению функции в этой точке.

Поучительна следующая переформулировка теоремы 19.3.1.

Теорема 19.3.2 (Принцип локализации Римана). *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат пространству $L_R[-\pi,\pi]$ и на некотором отрезке $[\alpha,\beta]$ их значения совпадают, то в каждой точке интервала (α,β) ряды Фурье функций f и g сходятся или расходятся одновременно, а если они сходятся, то к одному и тому же пределу.*

Обратим внимание, что при выполнении условий теоремы 19.3.2 коэффициенты Фурье функций f и g при каждом $\cos kx$ и каждом $\sin kx$ могут значительно отличаться, поскольку в определении коэффициентов участвуют значения функций на всем периоде. Тем не менее, в точках интервала (α,β) частные суммы рядов Фурье этих функций ведут себя одинаково.

Наряду с (19.3.2) часто пользуются следующим представлением частных сумм ряда Фурье

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\,D_n(t)\,dt, \tag{19.3.5}$$

которое в силу четности ядра Дирихле вытекает из (19.3.2).

Так как

$$\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}, \tag{19.3.6}$$

то для произвольного числа A

$$S_n(f,x) - A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2A]D_n(t)\,dt. \tag{19.3.7}$$

Установим признаки (достаточные условия) сходимости рядов Фурье в точке.

Теорема 19.3.3 (Признак Дини). *Пусть $f \in L_R[-\pi,\pi]$. Если при некотором A для точки x сходится интеграл*

$$\int_0^\pi |f(x+t)+f(x-t)-2A|\frac{dt}{t}, \tag{19.3.8}$$

то ряд Фурье функции f в точке x сходится к A.

Доказательство. Так как $f \in L_R[-\pi,\pi]$, то интеграл (19.3.8) может расходиться только из-за особенности при $t = 0$, порожденной множителем $1/t$. Таким образом, сходимость интеграла (19.3.8) определяется поведением функции f вблизи точки x, что согласуется с принципом локализации.

При $t \in [0,\pi]$ имеем $\sin t/2 \geqslant t/\pi$. Поэтому если сходится интеграл (19.3.8), то в силу оценки

$$|f(x+t)+f(x-t)-2A|\frac{1}{2\sin t/2} \leqslant \\ \leqslant |f(x+t)+f(x-t)-2A|\frac{\pi}{2t}$$

функция

$$|f(x+t)+f(x-t)-2A|\frac{1}{2\sin t/2}$$

принадлежит пространству $L_R[0,\pi]$.

Согласно (19.3.7)

$$S_n(f,x) - A = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2A]\frac{1}{2\sin t/2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

поэтому сходимость $S_n(f,x)$ к A вытекает из леммы Римана.

Теорема доказана.

Признак Дини является весьма общим, но удобно иметь более простые для проверки, хотя и менее общие признаки.

Теорема 19.3.4. *Если функция $f \in L_R[-\pi,\pi]$ и для точки x при малых t и некоторых положительных числах α и M выполняется неравенство*

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant M|t|^{\alpha}, \tag{19.3.9}$$

то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению $f(x)$.

Доказательство. Если в некоторой окрестности точки x выполнено условие (19.3.9), то при малых t

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2M|t|^{\alpha}.$$

Отсюда в силу положительности α следует сходимость интеграла (19.3.8) при $A = f(x)$ и, значит, согласно признаку Дини ряд Фурье функции f сходится в точке x к числу $f(x)$.

Теорема доказана.

Отметим, что оценка (19.3.9) заведомо выполнена, если f имеет в точке x производную или хотя бы обе односторонние производные.

По аналогии с теоремой 19.3.4 можно установить достаточное условие сходимости ряда Фурье функции в точках разрыва первого рода.

Теорема 19.3.5. *Пусть функция f из $L_R[-\pi,\pi]$ имеет в точке x разрыв первого рода. Если существуют такие положительные числа α и M, что при малых положительных t справедливы оценки*

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leqslant Mt^{\alpha} \tag{19.3.10}$$

и

$$|f(x-t) - f(x-0)| \leqslant Mt^{\alpha}, \tag{19.3.11}$$

то ряд Фурье функции f сходится в точке x к среднему арифметическому пределов f в точке x справа и слева, т.е. к

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Из (19.3.10) и (19.3.11) следует, что

$$|f(x+t)+f(x-t)-(f(x+0)+f(x-0))| \leqslant 2Mt^{\alpha}.$$

Поэтому при

$$A=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

сходится интеграл (19.3.8). Это доказывает утверждение теоремы.

Получим, опираясь на теорему 19.3.4, разложение в ряд Фурье функции $f(x)=\cos\alpha x$, где α – нецелое число и $x\in[-\pi,\pi]$.

Для этой функции при $k=0,1,2,\ldots$ имеем

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha t\,\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\alpha-k)t+\cos(\alpha+k)t]\,dt=\\ &=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-k)\pi}{\alpha-k}+\frac{\sin(\alpha+k)\pi}{\alpha+k}\right)=\\ &=(-1)^k\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right).\end{aligned}$$

А $b_k=0$ для всех k в силу четности f.

Так как 2π-периодическая функция f при $|x|<\pi$ имеет производную, а в точках $\pm\pi$ имеет обе односторонние производные, то согласно теореме 19.3.4 ряд Фурье функции f в каждой точке x сходится к значению $f(x)$, т.е.

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right)\cos kx. \tag{19.3.12}$$

Положив в (19.3.12) $x=0$, получим, что для нецелых α

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right). \tag{19.3.13}$$

Это равенство было использовано в гл. 17 при доказательстве формулы дополнения для Г-функции.

Из (19.3.12) при $x = \pi$ получаем

$$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha-k} + \frac{1}{\alpha+k}\right)\right],$$

откуда после замены $\alpha\pi = t$ находим, что для t, не кратных π,

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-k\pi} + \frac{1}{t+k\pi}\right). \tag{19.3.14}$$

Установим с помощью формулы (19.3.14) представление функции $\sin x$ в виде бесконечного произведения многочленов.

Сначала заметим, что если $0 < \varepsilon < x < \pi$, то

$$\int_{\varepsilon}^{x}\left(\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t}\right)dt = (\ln\sin t - \ln t)\Big|_{\varepsilon}^{x} = \ln\frac{\sin x}{x} - \ln\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon},$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ для $x \in (0, \pi)$ следует равенство

$$\int_{0}^{x}\left(\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t}\right)dt = \ln\frac{\sin x}{x}.$$

Далее, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{t-k\pi} + \frac{1}{t+k\pi}\right) \tag{19.3.15}$$

при любом фиксированном $t_0 \in (0, \pi)$ сходится равномерно относительно t, удовлетворяющих условию $|t| \leqslant t_0$, так как

$$\left|\frac{1}{t-k\pi} + \frac{1}{t+k\pi}\right| = \frac{2|t|}{(k\pi)^2 - t^2} \leqslant \frac{2t_0}{(k\pi)^2 - t_0^2}.$$

Поэтому ряд (19.3.15) можно проинтегрировать по $t \in (-\pi, \pi)$ почленно. Используя формулу (19.3.14), получим

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{x}\left(\frac{1}{t-k\pi} + \frac{1}{t+k\pi}\right)dt, \qquad |x| < \pi.$$

Таким образом,

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}[\ln|t-k\pi| + \ln|t+k\pi|]\Big|_{t=0}^{x} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\ln[(k\pi)^2 - t^2]\Big|_{t=0}^{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right), \qquad |x| < \pi. \tag{19.3.16}$$

Ряд из правой части (19.3.16) сходится, поэтому в силу теоремы 15.8.2

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right), \qquad |x| < \pi.$$

При $x = \pm\pi$ это бесконечное произведение равно нулю. Поэтому для $x \in [-\pi, \pi]$

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right). \tag{19.3.17}$$

Покажем, что равенство (19.3.17) имеет место при всех x, а не только при $|x| \leqslant \pi$. Для этого достаточно убедиться, что функция

$$\varphi(x) := x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right)$$

является 2π-периодической.

Функция $\varphi(x)$ определена при всех x, так как для x, не кратных π, бесконечное произведение сходится, а для x, кратных π, оно равно нулю.

Найдем сначала значение $\varphi(x+\pi)$:

$$\varphi(x+\pi) = \lim_{n\to\infty}(x+\pi)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(x+\pi)^2}{(k\pi)^2}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&(x+\pi)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(x+\pi)^2}{(k\pi)^2}\right) = \\
&\quad = (x+\pi)\prod_{k=1}^{n}\left((k\pi)^2 - (x+\pi)^2\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(m\pi)^2} = \\
&\quad = (x+\pi)\prod_{k=1}^{n}(k\pi - x - \pi)(k\pi + x + \pi)\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(m\pi)^2} = \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n}((k-1)\pi - x)\prod_{k=0}^{n}((k+1)\pi + x)\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(m\pi)^2} = \\
&\quad = -x\prod_{k=1}^{n-1}(k\pi - x)\prod_{k=1}^{n+1}(k\pi + x)\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(m\pi)^2} =
\end{aligned}$$

$$= -x\prod_{k=1}^{n}\frac{(k\pi - x)(k\pi + x)}{(k\pi)^2}\cdot\frac{(n+1)\pi + x}{n\pi - x} =$$
$$= -x\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right)\cdot\left(1 + \frac{\pi + 2x}{n\pi - x}\right).$$

Следовательно,

$$\varphi(x+\pi) = -x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right) = -\varphi(x).$$

Значит, $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ и, таким образом, равенство (19.3.17) имеет место при всех x.

Представление функции $\sin x$ в виде бесконечного произведения многочленов впервые было установлено Л. Эйлером.

Из (19.3.17) при $x = \pi/2$ получаем

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)},$$

т.е.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Это равенство называется *формулой Валлиса*, она была установлена в середине XVII века и была одним из первых примеров бесконечных произведений.

§ 19.4. Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в точке

Следующий пример показывает, что ряды Фурье непрерывных функций могут расходиться в отдельных точках.

Пусть $f(x)$ – четная функция, заданная на $[0,\pi]$ формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{19.4.1}$$

где все $b_k \geqslant 0$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Таким образом, ряд (19.4.1) сходится равномерно, функция $f(x)$ непрерывна на всей оси и $f(0) = 0$.

Покажем, что числа b_k можно выбрать так, что ряд Фурье этой функции будут расходиться в точке $x = 0$.

В силу четности функции f и равномерной сходимости ряда (19.4.1) имеем

$$S_n(f,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,dt = \\ = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\pi} \sin kt\,D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\beta_{k,n}, \qquad (19.4.2)$$

где

$$\beta_{k,n} := \int_0^{\pi} 2\sin kt\,D_n(t)\,dt.$$

Для любого натурального j

$$\int_0^{\pi} \sin jt\,dt = -\frac{\cos jt}{j}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^j}{j} \geqslant 0. \qquad (19.4.3)$$

Пользуясь этим, покажем, что для всех натуральных k и n

$$\beta_{k,n} \geqslant 0.$$

Имеем

$$2\sin kt\,D_n(t) = 2\sin kt\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n}\cos jt\right) = \\ = \sin kt + \sum_{j=1}^{n}[\sin(k+j)t + \sin(k-j)t]. \qquad (19.4.4)$$

Если здесь $k > n$, то $k - j > 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$ и из (19.4.4) в силу (19.4.3) получаем $\beta_{k,n} \geqslant 0$, $k > n$.

Для $k \leqslant n$ преобразуем равенство (19.4.4) так:

$$2\sin kt\,D_n(t) = \sum_{j=0}^{n}\sin(k+j)t + \\ + \sum_{j=1}^{k-1}\sin(k-j)t - \sum_{j=k+1}^{n}\sin(j-k)t =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+k} \sin jt - \sum_{j=1}^{n-k} \sin jt = \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \sin jt. \qquad (19.4.5)$$

Отсюда в силу оценки (19.4.3) видим, что $\beta_{k,n} \geqslant 0$ и для $k \leqslant n$.

Поэтому из (19.4.2) следует оценка

$$S_n(f, 0) \geqslant \frac{1}{\pi} b_n \beta_{n,n}. \qquad (19.4.6)$$

При $k = n$ из (19.4.5) получаем

$$2 \sin nt \, D_n(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sin jt,$$

значит,

$$\beta_{n,n} = \int_0^\pi \sum_{j=1}^{2n} \sin jt \, dt = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1 - (-1)^j}{j} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{2m - 1} > \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > \int_1^n \frac{du}{u} = \ln n.$$

Таким образом, согласно (19.4.6)

$$S_n(f, 0) \geqslant \frac{1}{\pi} b_n \ln n. \qquad (19.4.7)$$

Осталось выбрать числа b_n так, чтобы выражение из правой части (19.4.7) не стремилось к нулю.

Для чисел n вида 2^{m^3} положим $b_n := 1/m^2$ и $b_n := 0$ для остальных n. Тогда для $n = 2^{m^3}$ имеем

$$S_n(f, 0) \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{1}{m^2} \ln 2^{m^3} = \frac{\ln 2}{\pi} m.$$

Значит, последовательность частных сумм $S_n(f, x)$ расходится в нуле.

Более сложные примеры показывают, что ряды Фурье непрерывных функций могут иметь бесконечно много точек расходимости. В частности, для любого счетного множества существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится во всех точках этого множества, а в остальных точках сходится.

§ 19.5. Равномерная сходимость рядов Фурье

Сделаем добавление к лемме Римана (теорема 19.1.3).

Теорема 19.5.1 (Обобщенная лемма Римана). *Пусть функция f принадлежит пространству $L_R(-\infty, +\infty)$, а функция g на $(-\infty, +\infty)$ локально интегрируема и ограничена. Тогда при всех x справедливы равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(t)\cos\nu t\,dt = 0 \qquad (19.5.1)$$

и

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(t)\sin\nu t\,dt = 0, \qquad (19.5.2)$$

сходимость к пределу в которых равномерная относительно x, принадлежащих произвольному конечному отрезку.

Доказательство. Согласно сказанному в § 19.1 для каждого x произведение $f(x+t)g(t) \in L_R(-\infty, +\infty)$. Поэтому равенство нулю пределов (19.5.1) и (19.5.2) при каждом x вытекает из леммы Римана. Новым является утверждение о равномерной сходимости.

Докажем равномерную сходимость в (19.5.1), для (19.5.2) рассуждения аналогичны.

Если в качестве f взята финитная ступенчатая функция φ, то существует такое число M, что $|\varphi(x)| \leqslant M$.

Зафиксируем произвольный конечный отрезок $[\alpha, \beta]$ и покажем, что стремление к нулю в (19.5.1) для функции φ является равномерным относительно $x \in [\alpha, \beta]$.

В силу финитности функции $\varphi(x)$ существует такой конечный отрезок $[A, B]$, что $\varphi(x+t) = 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$ и всех t, лежащих вне $[A, B]$. Поэтому в интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t)g(t)\cos\nu t\,dt \qquad (19.5.3)$$

$g(t)$ можно заменить на функцию $g^*(t)$, совпадающую с $g(t)$ на $[A, B]$ и равную нулю вне $[A, B]$.

Будем далее рассматривать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t)g^*(t)\cos\nu t\,dt, \qquad (19.5.4)$$

в котором в отличие от (19.5.3) функция $g^*(t)$ финитна. Пусть G – число, для которого $|g^*(t)| < G$.

Для каждой функции $h(t)$ из $L_R(-\infty, +\infty)$ при $\nu \neq 0$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cos\nu t\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\cos\nu\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)dt = \\ = -\int_{-\infty}^{+\infty} h\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\cos\nu t\,dt,$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\cos\nu t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[h(t) - h\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right]\cos\nu t\,dt. \quad (19.5.5)$$

Согласно (19.5.5) имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t)\,g^*(t)\cos\nu t\,dt\right| = \\ = \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi(x+t)\,g^*(t) - \right.\right. \\ \left.\left. - \varphi\left(x+t+\frac{\pi}{\nu}\right)g^*\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right]\cos\nu t\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(x+t)\,g^*(t) - \varphi\left(x+t+\frac{\pi}{\nu}\right)g^*(t)\right|dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi\left(x+t+\frac{\pi}{\nu}\right)g^*(t) - \right. \\ \left. - \varphi\left(x+t+\frac{\pi}{\nu}\right)g^*\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right|dt \leqslant \\ \leqslant \frac{G}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(x+t) - \varphi\left(x+t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right|dt + \\ + \frac{M}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g^*(t) - g^*\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right|dt = \\ = \frac{G}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(t) - \varphi\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right|dt + \\ + \frac{M}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g^*(t) - g^*\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right|dt. \quad (19.5.6)$$

Первый из полученных интегралов не зависит от x, а второй зависит не от x, а от отрезка $[\alpha, \beta]$, так как функция $g^*(t)$ строилась в зависимости от этого отрезка. Согласно теореме 19.1.4 оба эти интеграла стремятся к нулю при $\nu \to 0$ и в силу сказанного выше сходимость равномерная относительно x, принадлежащих отрезку $[\alpha, \beta]$.

Таким образом, для случая, когда f – финитная ступенчатая функция, теорема доказана.

Для доказательства в общем случае по заданному $\varepsilon > 0$ находим финитную ступенчатую функцию φ, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{G}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) g^*(t) \cos \nu t\, dt\right| &\leqslant \\ \leqslant \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) g^*(t) \cos \nu t\, dt\right| &+ \\ + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - \varphi(x+t)] g^*(t) \cos \nu t\, dt\right| &< \\ < \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) g^*(t) \cos \nu t\, dt\right| &+ \varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость в общем случае, так как для финитных ступенчатых функций теорема уже доказана.

Теорема доказана.

В дальнейшем будет нужен вариант теоремы 19.5.1, когда функция g зависит еще от некоторого параметра. Рассмотрим этот вопрос только в случае, который будет использован в § 19.10.

Лемма 19.5.2. *Пусть функция $f \in L_R(-\infty, +\infty)$ и для $t \neq 0$*

$$g(t, \alpha) := \begin{cases} t^{-1} \sin \alpha t & \text{при } |t| \leqslant \delta, \\ 0 & \text{при } |t| > \delta, \end{cases}$$

где $\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) g(t, \alpha) \cos \nu t\, dt = 0 \tag{19.5.7}$$

и при каждом фиксированном δ сходимость равномерная относительно x, принадлежащих произвольному конечному отрезку, и α, удовлетворяющих условию $|\alpha| \leqslant 1$.

Доказательство. Проведем рассуждения по той же схеме, что и доказательство теоремы 19.5.1.

Сначала установим лемму для случая, когда в качестве f взята финитная ступенчатая функция φ. Пусть $|\varphi(x)| \leqslant M$.

Пользуясь формулой (19.5.5), получаем оценку, аналогичную (19.5.6):

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) g(t,\alpha)\cos\nu t\,dt\right| = \\
&\quad = \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi(x+t)\,g(t,\alpha) - \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. - \varphi\left(x+t+\frac{\pi}{\nu}\right) g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right]\cos\nu t\,dt\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{\nu}\right)\right| dt + \\
&\qquad + \frac{M}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t,\alpha)-g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right| dt.
\end{aligned} \tag{19.5.8}$$

Первый интеграл из правой части (19.5.8) не зависит ни от x, ни от α, он стремится к нулю при $\nu \to \infty$ в силу теоремы 19.1.4.

Второй интеграл из правой части (19.5.8) также не зависит от x. Покажем, что при $\nu \to \infty$ он стремится к нулю равномерно относительно α, для которых $|\alpha| \leqslant 1$. Если $\pi/\nu < \delta$, то

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t,\alpha)-g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right| dt = \\
&\quad = \int_{-\delta-\pi/\nu}^{\delta}\left|g(t,\alpha)-g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right| dt = \\
&\quad = \int_{-\delta-\pi/\nu}^{-\delta}\left|g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right| dt + \\
&\qquad + \int_{-\delta}^{\delta-\pi/\nu}\left|g(t,\alpha)-g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right| dt + \int_{\delta-\pi/\nu}^{\delta}|g(t,\alpha)|\,dt.
\end{aligned} \tag{19.5.9}$$

Первый и третий интегралы из правой части (19.5.9) при $\nu \to \infty$ стремятся к нулю равномерно относительно α в силу оценки $|g(t,\alpha)| \leqslant |\alpha| \leqslant 1$.

Оценим второй интеграл.

Так как при $|t| \in (0,\delta)$ и $|\alpha| \leqslant 1$

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,\alpha) = \frac{\alpha\cos\alpha t}{t} - \frac{\sin\alpha t}{t^2} = \\ = \frac{\alpha}{t} + O(\alpha^3 t) - \frac{\alpha}{t} + O(\alpha^3 t) = O(t),$$

то с помощью формулы конечных приращений Лагранжа находим

$$\int_{-\delta}^{\delta-\pi/\nu} \left| g(t,\alpha) - g\left(t+\frac{\pi}{\nu},\alpha\right)\right| dt = O\left(\int_{-\delta}^{\delta-\pi/\nu} |t|\frac{\pi}{\nu}\,dt\right) = \\ = O\left(\delta^2\frac{1}{\nu}\right).$$

Эта оценка завершает доказательство леммы для ступенчатых функций.

Заключительный шаг доказательства – переход от ступенчатых функций к произвольным функциям из $L_R(-\infty,+\infty)$, проводится точно так же, как для теоремы 19.5.1. Не будем повторять это рассуждение.

Теорема 19.5.3 (Обобщенная лемма Римана для периодических функций). *Пусть функции f и g имеют период 2π, f принадлежит пространству $L_R[-\pi,+\pi]$, а g интегрируема на $[-\pi,+\pi]$ по Риману. Тогда при всех x справедливы равенства*

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos\nu t\,dt = 0 \qquad (19.5.10)$$

и

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\nu t\,dt = 0, \qquad (19.5.11)$$

сходимость к пределу в которых равномерная относительно всех x.

Доказательство. Поскольку f имеет период 2π, достаточно рассматривать $x \in [-\pi,\pi]$. Если $x \in [-\pi,\pi]$ и $t \in [-\pi,\pi]$, то $t+x \in [-2\pi,2\pi]$.

Поэтому в интеграле (19.5.10) можно заменить f на функцию f^*, совпадающую с f на $[-2\pi, 2\pi]$ и равную нулю вне этого отрезка.

Тогда, считая, что $g(t) = 0$ при $|t| > \pi$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos\nu t\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x+t)g(t)\cos\nu t\,dt.$$

К этому интегралу применима теорема 19.5.1.

Для (19.5.11) доказательство такое же.

Теорема доказана.

Переходя к изучению равномерной сходимости рядов Фурье, заметим, что непрерывность функции является необходимым условием равномерной сходимости. Но как показывает пример из § 19.4 ряды Фурье непрерывных функций могут расходиться в некоторых точках. Поэтому для равномерной сходимости ряда Фурье функция помимо непрерывности должна удовлетворять еще каким-либо дополнительным условиям.

Определение. Условие

$$\omega(f,\delta)\ln\frac{1}{\delta} \to 0, \qquad \delta \to 0, \tag{19.5.12}$$

где $\omega(f,\delta)$ – модуль непрерывности функции f, называют *условием Дини–Липшица*.

Теорема 19.5.4. *Если 2π-периодическая функция f удовлетворяет условию Дини–Липшица, то ее ряд Фурье сходится равномерно.*

Доказательство. Представим ядро Дирихле следующим образом:

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2} = \sin nt \cdot \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos nt = \\ &= \frac{\sin nt}{t} + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right)\sin nt + \frac{1}{2}\cos nt. \end{aligned} \tag{19.5.13}$$

Согласно (19.3.2) и (19.5.13)

$$\begin{aligned} &S_n(f,x) - f(x) = \\ &\quad = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)]D_n(t)\,dt = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin nt}{t}\, dt + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \right) \sin nt\, dt + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \cos nt\, dt. \qquad (19.5.14)
\end{aligned}
$$

Второй и третий интегралы из правой части (19.5.14) при $n \to \infty$ стремятся к нулю равномерно относительно всех x при одном только условии непрерывности функции f.

В самом деле, при $t \to 0$

$$
g(t) := \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t} = \frac{t \cos t/2 - 2 \sin t/2}{2t \sin t/2} = O(t).
$$

Поэтому, если положить $g(0) := 0$, функция $g(t)$ будет непрерывной на $[-\pi, \pi]$. Значит, согласно теореме 19.5.3 интеграл

$$
\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \right) \sin nt\, dt
$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно x.

Функция f непрерывна, поэтому она ограничена и произведение

$$
f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \right) \sin nt\, dt
$$

в силу леммы Римана (теорема 19.1.3) сходится к нулю равномерно относительно x.

Подобным образом убеждаемся в равномерной сходимости к нулю и третьего интеграла из правой части (19.5.14).

Рассмотрим первый интеграл из правой части (19.5.14). Положим

$$
\begin{aligned}
U &:= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin nt}{t}\, dt = \\
&= \int_{0}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin nt}{t}\, dt.
\end{aligned}
$$

Справедлива оценка

$$\left|\int_0^{\pi/n}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant n\int_0^{\pi/n}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt \leqslant n2\,\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} =$$
$$= 2\pi\,\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right). \qquad (19.5.15)$$

Для интеграла по промежутку $[\pi/n,\pi]$ по аналогии с (19.5.5) имеем

$$\int_{\pi/n}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin nt}{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,\frac{\sin nt}{t}\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi-\pi/n}\left[f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)-2f(x)\right]\frac{\sin nt}{t+\pi/n}\,dt.$$

Заменим в последнем интеграле промежуток интегрирования на $[\pi/n,\pi]$. Ошибка от такой замены не превосходит величины, стремящейся при $n\to\infty$ к нулю равномерно относительно x. В самом деле, для $t>0$

$$\left|\frac{\sin nt}{t+\pi/n}\right| \leqslant \frac{n}{\pi},$$

поэтому

$$\left|\int_0^{\pi/n}\left[f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)+f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)-2f(x)\right]\,\frac{\sin nt}{t+\pi/n}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\pi/n}2\omega\left(f,\frac{2\pi}{n}\right)\frac{n}{\pi}\,dt = 2\omega\left(f,\frac{2\pi}{n}\right)$$

и аналогично

$$\left|\int_{\pi-\pi/n}^{\pi}\left[f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)+f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)-2f(x)\right]\,\frac{\sin nt}{t+\pi/n}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\omega\left(f,\frac{2\pi}{n}\right).$$

Таким образом, с точностью до слагаемого, стремящегося к нулю равномерно относительно x, величина U равна

$$V := \frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin nt}{t}\,dt - \\ - \frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{\pi}\left[f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)+\right. \\ \left. + f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)-2f(x)\right]\frac{\sin nt}{t+\pi/n}\,dt.$$

Добавим в правую часть со знаками минус и плюс интеграл, подобный последнему интегралу в этом равенстве, но когда в знаменателе сумма $t+\pi/n$ заменена на t. Тогда получим

$$|V| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\left([f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]-\right.\right. \\ - \left[f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)+f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)-\right. \\ \left.\left.\left. -2f(x)\right]\right)\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| + \\ + \frac{1}{2}\left|\int_{\pi/n}^{\pi}\left[f\left(x+t+\frac{\pi}{n}\right)+f\left(x-t-\frac{\pi}{n}\right)-2f(x)\right]\times\right. \\ \left.\times\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+\pi/n}\right)\sin nt\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{\pi}2\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_{\pi/n}^{\pi}2\omega(f,2t)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+\pi/n}\right)dt \leqslant \\ \leqslant \omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\ln n + \frac{\pi}{n}\int_{\pi/n}^{\pi}\omega(f,2t)\frac{dt}{t^2}. \qquad (19.5.16)$$

Полученное выражение не зависит от x. Первое слагаемое стремится к нулю в силу условия Дини–Липшица. А для оценки второго слагаемого воспользуемся тем, что в силу монотонности модуля непрерывности

$$\frac{1}{n}\int_{\pi/n}^{\pi}\omega(f,2t)\frac{dt}{t^2} = \\ = \frac{1}{n}\int_{\pi/n}^{\pi/\sqrt{n}}\omega(f,2t)\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n}\int_{\pi/\sqrt{n}}^{\pi}\omega(f,2t)\frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\,\omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{n}}\right) \int_{\pi/n}^{\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n}\,\omega(f, 2\pi) \int_{\pi/\sqrt{n}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\,\omega\left(f, \frac{2\pi}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\pi\sqrt{n}}\,\omega(f, 2\pi).$$

Эта сумма стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, теорема доказана.

Отметим без доказательства, что в теореме 19.5.4 условие Дини–Липшица нельзя заменить на

$$\omega(f, \delta) \ln \frac{1}{\delta} = O(1).$$

Для функций f, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha > 0$, имеем $\omega(f, \delta) = O(\delta^\alpha)$. Поэтому условие Дини–Липшица для таких функций заведомо выполнено и, таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 19.5.5. *Если функция f имеет период 2π и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то ряд Фурье f сходится равномерно на всей оси.*

В частности, ряд Фурье функции сходится равномерно, если она непрерывна, а ее производная непрерывна или хотя бы кусочно непрерывна.

Покажем, что для равномерной сходимости справедлив аналог принципа локализации сходимости ряда Фурье в точке.

Теорема 19.5.6. *Если функция f имеет период 2π, принадлежит $L_R[-\pi, \pi]$ и на отрезке $[a, b]$ равна нулю, то ряд Фурье функции f сходится к 0 при всех x из интервала (a, b), причем сходимость равномерная на каждом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.*

Доказательство. Сходимость ряда Фурье во внутренних точках отрезка $[a, b]$ вытекает из теоремы 19.3.4 о сходимости в точке. Новым в теореме 19.5.6 является утверждение о равномерной сходимости.

Положим $\delta := \min(a' - a, b - b')$, т.е. δ – минимальное из расстояний концов отрезка $[a', b']$ от соответствующих концов интервала (a, b).

Для $x \in [a', b']$ при $|t| \leqslant \delta$ имеем $x + t \in [a, b]$, поэтому

$$S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\, dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) D_n(t)\, dt.$$

Введем функцию

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{для } |t| < \delta, \\ (2 \sin t/2)^{-1} & \text{для } \delta \leqslant |t| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) D_n(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) h(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt. \tag{19.5.17}$$

Интеграл из правой части равенства (19.5.17) удовлетворяет условиям теоремы 19.5.3 и поэтому при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно x.

Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 19.5.6 ряд Фурье функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ может не сходиться равномерно.

В этом легко убедиться так. Пусть для всех x из некоторой левой окрестности точки a функция $f(x)$ принимает постоянное значение, отличное от 0. Тогда согласно теореме 19.3.5 ряд Фурье функции f сходится в точке a к полусумме пределов f в точке a справа и слева, т.е. сумма ряда имеет в точке a разрыв. Значит, на $[a, b]$ равномерной сходимости нет.

Теорема 19.5.6 позволяет так сформулировать аналог принципа локализации Римана для равномерной сходимости рядов Фурье на отрезке.

Если значения двух функций из $L_R[-\pi, \pi]$ совпадают на некотором отрезке $[a, b]$, то равномерная сходимость ряда Фурье одной из этих функций на отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$ влечет равномерную сходимость на $[a', b']$ ряда Фурье другой функции.

Таким образом, равномерная сходимость ряда Фурье на отрезке зависит только от значений функции на как угодно малом расширении этого отрезка в обе стороны от его концов.

§ 19.6. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Выясним, как связаны ряды Фурье функции и ее производной.

В теореме 16.4.2 приведены достаточные условия почленной дифференцируемости функциональных рядов. Покажем, что ряд Фурье производной можно получить почленным дифференцированием ряда Фурье функции при меньших требованиях, чем в теореме 16.4.2.

Пусть функция f имеет период 2π и непрерывна на всей оси, а ее производная кусочно непрерывна на периоде. Введем обозначения рядов Фурье f и f':

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{19.6.1}$$

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Согласно формуле Ньютона–Лейбница

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

С помощью интегрирования по частям находим при $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-k\sin kx)\,dx\right] = \\ &= \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx = k\,b_k.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\beta_k = -ka_k.$$

Следовательно,

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k \cos kx - ka_k \sin kx),$$

т.е. при указанных условиях ряд Фурье производной f' может быть получен из ряда Фурье функции f почленным дифференцированием.

Применив последовательно m раз, $m = 1, 2, \ldots$, формулу, связывающую ряды Фурье функции и ее производной, приходим к следующему утверждению.

Теорема 19.6.1. *Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π и вместе со всеми своими производными до порядка $m-1$ включительно, где $m = 1, 2, \ldots$, непрерывна на всей оси, а производная порядка m кусочно непрерывна на периоде. Тогда ряд Фурье производной $f^{(m)}(x)$ имеет вид*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \tag{19.6.2}$$

где при четных m

$$\alpha_k = \pm k^m a_k, \qquad \beta_k = \pm k^m b_k, \tag{19.6.3}$$

а при нечетных m

$$\alpha_k = \pm k^m b_m, \qquad \beta_k = \pm k^m a_k. \tag{19.6.4}$$

Знаки $+$ или $-$ в каждой из формул (19.6.3) и (19.6.4) не обязательно одинаковы, они определяются остатками от деления числа m на 4.

В частности, для коэффициентов Фурье функции f справедливы оценки

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^m}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^m}\right), \qquad k \to \infty. \tag{19.6.5}$$

Оценки (19.6.5) вытекают из (19.6.3) и (19.6.4), так как коэффициенты Фурье производной $f^{(m)}$ стремятся к нулю.

Отметим, что утверждение теоремы 19.6.1 справедливо и при меньших предположениях о функции. Здесь были наложены условия, позволяющие воспользоваться формулами Ньютона–Лейбница и интегрирования по частям в том виде, как они были доказаны в гл. 9.

Формулы почленного дифференцирования рядов Фурье можно записать иначе.

Согласно формулам Эйлера (16.7.10) имеем при $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2}\, e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}\, e^{-ikx} = \\ &= c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}, \end{aligned}$$

где

$$c_k := \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad c_{-k} := \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

До сих пор не нужно было различать, являются значения функции $f(x)$ действительными или комплексными числами. Если же считать функцию $f(x)$ действительнозначной, то ее коэффициенты Фурье – действительные числа и

$$c_{-k} = \overline{c_k}.$$

Числа c_k можно представить в виде интегралов:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - i \sin kt)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

и аналогично

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt + i \sin kt)\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i(-k)t}\, dt. \end{aligned}$$

Положим еще

$$c_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt.$$

Таким образом, при всех целых k

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \Big(f(x), e^{ikx} \Big). \tag{19.6.6}$$

Функции системы $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ имеют период 2π и попарно ортогональны на периоде. Действительно,

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, \overline{e^{imt}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)t}\, dt,$$

а этот интеграл равен нулю, если $k \neq m$, и равен 2π при $k = m$.

Определение. Ряд
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{19.6.7}$$
коэффициенты c_k которого заданы формулами (19.6.6), называют *комплексной формой* ряда Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе, а числа c_k – *комплексными коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Частной суммой порядка n ряда (19.6.7) называется сумма
$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Из теорема 19.6.1 следует, что при указанных там условиях на функцию f
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$
и
$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}.$$
Вообще
$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^m c_k e^{ikx}, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим вопрос о почленном интегрировании рядов Фурье.

Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π, кусочно непрерывна на периоде и
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{19.6.8}$$
– ее ряд Фурье.

Введем функцию
$$\varphi(x) := \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt.$$
Функция φ непрерывна и имеет кусочно непрерывную на периоде производную
$$f(x) - \frac{a_0}{2}\,.$$

При этом $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$, так как

$$\varphi(\pi) - \varphi(-\pi) = \int_0^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt - \int_0^{-\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - a_0 \pi = 0.$$

Следовательно, ряд Фурье функции φ равномерно сходится. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Согласно теореме 19.6.1

$$\varphi'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-kA_k \sin kx + kB_k \cos kx).$$

Значит, для $k = 1, 2, \ldots$

$$a_k = kB_k, \qquad b_k = -kA_k,$$

и, таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right). \tag{19.6.9}$$

При $x = 0$ из (19.6.9) получаем

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\,. \tag{19.6.10}$$

Это показывает, в частности, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\,. \tag{19.6.11}$$

Отметим без доказательства, что ряд (19.6.11) сходится для всех функций пространства $L_R[-\pi, \pi]$. Это утверждение называется теоремой Римана–Лебега.

При почленном интегрировании ряда (19.6.8) получим

$$\int_0^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\,dt =$$
$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1-\cos kx)\right) =$$
$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos kx + \frac{a_k}{k}\sin kx\right).$$

Отсюда в силу (19.6.9) и (19.6.10) следует, что

$$\int_0^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\,dt =$$
$$= \frac{a_0}{2}x + \varphi(x) = \frac{a_0}{2}x + \int_0^x\left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Таким образом, при почленном интегрировании ряда Фурье функции f по отрезку $[0,x]$ получен интеграл от f по этому отрезку. Понятно, что подобное равенство получится и при почленном интегрировании ряда (19.6.8) по произвольному отрезку.

Это свойство установлено здесь для кусочно непрерывных функций, но оно имеет место для каждой функции из $L_R[-\pi,\pi]$.

§ 19.7. Явление Гиббса

Частные суммы ряда Фурье функции имеют характерную особенность вблизи изолированных точек разрыва первого рода функции.

Сначала покажем это для 2π-периодической функции

$$\varphi(x) := \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi, \qquad \varphi(0) := 0,$$

непрерывной всюду кроме точек, кратных 2π, в которых она имеет разрыв первого рода.

Так как функция φ нечетна, ее ряд Фурье не содержит косинусов. Найдем коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по синусам

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx\, dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[(\pi - x)\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k}\cos kx\, dx\right] = \frac{1}{k}.$$

В силу теоремы 19.3.5 при всех x

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}. \tag{19.7.1}$$

Рассмотрим на $[0,\pi]$ частные суммы ряда (19.7.1). Имеем

$$S_n(\varphi, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt\, dt = \int_0^x D_n(t)\, dt - \frac{x}{2}, \tag{19.7.2}$$

где $D_n(t)$ – ядро Дирихле порядка n.

Согласно (19.5.13) для ядра Дирихле справедливо представление

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2} = \frac{\sin nt}{t} + g(t)\sin nt + \frac{1}{2}\cos nt, \tag{19.7.3}$$

где $g(t)$ – непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция.

Таким образом,

$$S_n(\varphi, x) = \int_0^x \frac{\sin nt}{t}\, dt + \int_0^x g(t)\sin nt\, dt + \frac{1}{2}\int_0^x \cos nt\, dt - \frac{x}{2}. \tag{19.7.4}$$

Введем 2π-периодическую функцию

$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [-\pi, 0], \\ 0 & \text{при } t \in (0, \pi). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^x g(t)\sin nt\, dt = \int_0^\pi h(t-x)g(t)\sin nt\, dt$$

и согласно теореме 19.5.3 интегралы

$$\int_0^x g(t)\sin nt\,dt$$

при $n \to \infty$ стремятся к нулю равномерно относительно x.

Поэтому из (19.7.4) следует, что

$$S_n(\varphi, x) = \int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt - \frac{x}{2} + r_n(x),$$

где функция $r_n(x)$ при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно x.

Таким образом,

$$S_n(\varphi, x) - \varphi(x) = \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} + r_n(x). \qquad (19.7.5)$$

Заметим (хотя сейчас это не нужно), что поскольку в силу теоремы 19.3.4 суммы $S_n(\varphi, x)$ в каждой точке $x \in (0, \pi]$ при $n \to \infty$ сходятся к значению $\varphi(x)$, из (19.7.5) вытекает равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Рассмотрим *интегральный синус* – функцию

$$\mathrm{Si}(u) := \int_0^u \frac{\sin t}{t}\,dt, \qquad u \geqslant 0.$$

Так как первая производная интегрального синуса

$$\mathrm{Si}'(u) = \frac{\sin u}{u}$$

обращается в нуль в точках $k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$, а вторая производная

$$\mathrm{Si}''(u) = \frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2}$$

в этих точках при нечетных k отрицательна, а при четных k положительна, то $\mathrm{Si}\,(u)$ имеет в точках $k\pi$ при нечетных k локальные максимумы, а при четных k – локальные минимумы. При этом значения функции $\mathrm{Si}(u)$ в точках локальных максимумов

$(2m-1)\pi$, $m = 1, 2, \dots$, с ростом m строго убывают, поскольку как нетрудно видеть, интегралы

$$\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

отрицательны.

Таким образом, максимальное на $[0, +\infty)$ значение интегральный синус принимает в точке π. Это значение равно $1.8519\dots$.

Согласно (19.7.5)

$$S_n(\varphi, x) - \varphi(x) = \mathrm{Si}(nx) - \frac{\pi}{2} + r_n(x),$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\pi]} |S_n(\varphi, x) - \varphi(x)| = \mathrm{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}.$$

Но

$$\mathrm{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2} = 1.8519\dots - 1.5708\dots = 0.2811\dots,$$

что составляет примерно 17.9% от $\pi/2$.

Рассмотрим графики частных сумм ряда Фурье функции φ, т.е. кривые, определяемые уравнениями $y = S_n(\varphi, x)$, $n = 1, 2, \dots$, на $[0, \pi]$.

Эти кривые "сгущаются" около графика функции $y = (\pi - x)/2$ и, кроме того, около отрезка $[0, \mathrm{Si}(\pi)]$ на оси OY, так как для каждой точки $y_0 \in [0, \mathrm{Si}(\pi)]$ существуют числа $\alpha_n > 0$ такие, что при $n \to \infty$

$$S_n(\varphi, \alpha_n) \to y_0.$$

Так как функция $\varphi(x)$ нечетна, кривые $y = S_n(\varphi, x)$, симметричны относительно начала координат.

Таким образом, хотя для каждого фиксированного x частные суммы $S_n(\varphi, x)$ сходятся при $n \to \infty$ к значению $\varphi(x)$, кривые $y = S_n(\varphi, x)$ сгущаются около отрезка $[-\mathrm{Si}(\pi), \mathrm{Si}(\pi)]$ на оси OY. Длина этого отрезка равна $2\,\mathrm{Si}(\pi)$, что больше π – величины скачка функции $\varphi(x)$ в нуле примерно на 17.9% величины скачка.

На рисунке изображены предельные точки множества точек, принадлежащих кривым $y = S_n(\varphi, x)$, $n = 1, 2, \dots$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Феномен, состоящий в том, что среди этих предельных точек имеются точки на оси OY, выходящие за отрезок $[-\pi/2, \pi/2] = [\inf \varphi(x), \sup \varphi(x)]$, называют *явлением Гиббса*.

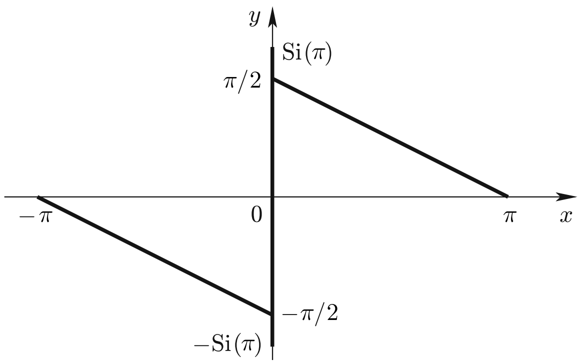

Рис. 19.1.

Явление Гиббса характерно для поведения частных сумм рядов Фурье произвольных функций в окрестности их изолированных точек разрыва первого рода.

Именно, если x_0 – изолированная точка разрыва первого рода функции f из $L_R[-\pi,\pi]$ и $d := f(x_0+0) - f(x_0-0) \neq 0$ – скачок f в точке x_0, то функция

$$\psi(x) := f(x) - \frac{d}{\pi}\,\varphi(x-x_0)$$

непрерывна в точке x_0. Поэтому, если ряд Фурье функции $\psi(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 сходится равномерно, то для частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 имеет место явление Гиббса, как для функции $(d/\pi)\varphi(x-x_0)$.

§ 19.8. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Ряды Фурье непрерывных функций не обязательно сходятся во всех точках.

Покажем, что тем не менее ряд Фурье любой непрерывной функции равномерно суммируется к ней методом средних арифметических.

Пусть $f \in L_R[-\pi, \pi]$ и $S_k(f, x)$ – частные суммы ряда Фурье функции f. $(C, 1)$-средние частных сумм ряда Фурье функции f

$$\sigma_n(f, x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f, x)$$

называют *суммами Фейера* (средними Фейера) этой функции.

Получим сначала удобное представление полиномов $\sigma_n(f, x)$.

Пользуясь формулой (19.3.2), находим

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_k(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t)\, dt.$$

Согласно (19.3.3) при $t \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\sin t/2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t =$$
$$= \frac{1}{(2\sin t/2)^2} \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t =$$
$$= \frac{1}{(2\sin t/2)^2} \sum_{k=0}^{n} (\cos kt - \cos(k+1)t) =$$
$$= \frac{1}{(2\sin t/2)^2} (1 - \cos(n+1)t) = \frac{\sin^2(n+1)t/2}{2\sin^2 t/2}.$$

Таким образом, для сумм Фейера справедливо представление

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\, dt, \tag{19.8.1}$$

где при $t \neq 0$

$$F_n(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{\sin^2(n+1)t/2}{2(n+1)\sin^2 t/2}. \tag{19.8.2}$$

Интеграл из формулы (19.8.1) является сверткой функции f с функцией F_n, которую называют *ядром Фейера*. Напомним, что формула (19.3.2) выражала частную сумму ряда Фурье в виде свертки f с ядром Дирихле D_n.

Из (19.8.2) и (19.3.6) следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1. \tag{19.8.3}$$

Поэтому для любой функции f из $L_R[-\pi,\pi]$

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]F_n(t)\,dt. \tag{19.8.4}$$

Теорема 19.8.1 (Теорема Фейера). *Для 2π-периодической непрерывной на всей оси функции $f(x)$ суммы Фейера $\sigma_n(f,x)$ при $n\to\infty$ сходятся к $f(x)$ равномерно относительно x.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $x\in[-\pi,\pi]$. Для модуля непрерывности функции f имеем $\omega(f,+0)=0$.

Так как ядро Фейера неотрицательно и четно, то согласно (19.8.4)

$$\begin{aligned}
&|\sigma_n(f,x) - f(x)| = \\
&\qquad = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]F_n(t)\,dt\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)\,dt \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(f,|t|)F_n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\omega(f,t)F_n(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{19.8.5}$$

Интеграл в правой части формулы (19.8.5) не зависит от x, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что этот интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$.

Для каждого положительного ε существует $\delta>0$ такое, что

$$\omega(f,\delta) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.8.6}$$

Согласно (19.8.5) и монотонности модуля непрерывности имеем

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f,x) - f(x)| &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\omega(f,t)F_n(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\omega(f,t)F_n(t)\,dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\omega(f,\delta)\int_0^{\delta}F_n(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\omega(f,\pi)\int_{\delta}^{\pi}F_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу (19.8.3) и представления ядра Фейера (19.8.2) получаем

$$|\sigma_n(f,x)-f(x)| \leqslant \omega(f,\delta)+\frac{2}{\pi}\,\omega(f,\pi)\int_\delta^\pi \frac{dt}{2(n+1)\sin^2 t/2}\,. \quad (19.8.7)$$

Число δ фиксировано. Если выбрать N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\pi}\,\omega(f,\pi)\frac{1}{N+1}\int_\delta^\pi \frac{dt}{\sin^2 t/2} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

то из (19.8.7) и (19.8.6) будет следовать, что для всех $n > N$

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

В силу регулярности метода суммирования средних арифметических из теоремы Фейера вытекает следующее утверждение.

Теорема 19.8.2. *Если ряд Фурье непрерывной функции f сходится в точке x_0, то он сходится к значению $f(x_0)$.*

§ 19.9. Теоремы Вейерштрасса о полноте

Произвольную линейную комбинацию функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

называют тригонометрическим полиномом порядка не выше n. Если в этой линейной комбинации числовой множитель хотя бы при одной из функций $\cos nx$ и $\sin nx$ отличен от нуля, полином называется полиномом порядка n.

Теорема 19.9.1 (Теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ имеет период 2π и непрерывна на всей оси, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином $t(x)$, что при всех x справедлива оценка*

$$|f(x) - t(x)| \leqslant \|f(x) - t(x)\|_C < \varepsilon. \quad (19.9.1)$$

Согласно теореме 19.8.1 в качестве полиномов $t(x)$ в теореме Вейерштрасса можно взять суммы Фейера $\sigma_n(f,x)$.

Теорема Вейерштрасса была исторически первым утверждением такого рода. Теорема Фейера дает одну из возможных конструкций полиномов, которыми можно как угодно хорошо приближать непрерывные периодические функции в метрике пространства C.

Если функция является четной, то ее ряд Фурье содержит только косинусы. Поэтому для четных функций $f(x)$ в теореме Вейерштрасса полиномы $t(x)$ можно считать четными. Точно также для нечетных функций $f(x)$ полиномы $t(x)$ можно считать нечетными.

Теорема Вейерштрасса означает, что множество тригонометрических полиномов всюду плотно в пространстве $C[-\pi,\pi]$, т.е. тригонометрическая система полна в $C[-\pi,\pi]$.

Отметим, что в теореме 19.9.1 ничего не говорится о порядке полинома $t(x)$. Вообще говоря, при заданном ε он может быть высоким.

Приведем некоторые следствия из теоремы 19.9.1.

Теорема 19.9.2. *Если функция $f(x) \in L^p_R[-\pi,\pi]$, $p \geqslant 1$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином $T(x)$, для которого справедлива оценка*

$$\|f(x) - T(x)\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 19.1.5, по $\varepsilon > 0$ находим непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию $\varphi(x)$, для которой

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для функции $\varphi(x)$ равенство $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ может не выполняться. Но изменив значения $\varphi(x)$ в окрестности точки π или $-\pi$, можно получить непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию $\psi(x)$, для которой $\psi(\pi) = \psi(-\pi)$ и

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Приблизив теперь функцию $\psi(x)$ в равномерной метрике, видим, что существует тригонометрический полином $T(x)$, для которого

$$\|\psi(x) - T(x)\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пользуясь неравенством Минковского (9.8.3), получаем

$$\|f(x) - T(x)\|_{L^p} \leqslant \|f(x) - \varphi(x)\|_{L^p} + \\ + \|\varphi(x) - \psi(x)\|_{L^p} + \|\psi(x) - T(x)\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Таким образом, тригонометрическая система полна также в пространствах $L^p_R[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$.

Так как тригонометрическая система полна в пространстве $L^2_R[-\pi, \pi]$, то согласно теореме 18.2.6 для каждой пары функций f и g из этого пространства справедливо равенство Парсеваля (18.2.16).

В (18.2.16) участвуют коэффициенты Фурье по ортонормированной системе.

Для коэффициентов Фурье функции f по ортонормированной тригонометрической системе (18.2.2) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\,dt = \sqrt{\pi}a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\,dt = \sqrt{\pi}b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0.$$

Здесь a_k, b_k – коэффициенты Фурье, заданные формулами (19.2.3) и (19.2.4).

Поэтому, если a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f \in L^2_R[-\pi, \pi]$, а α_k, β_k – коэффициенты Фурье функции $g \in L^2_R[-\pi, \pi]$, то согласно (18.2.16)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{\alpha_0} + \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{\pi}\,a_k \cdot \sqrt{\pi}\,\overline{\alpha_k} + \sqrt{\pi}b_k \cdot \sqrt{\pi}\,\overline{\beta_k}\,).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 19.9.3. *Если функции f и g принадлежат пространству $L^2_R[-\pi,\pi]$ и a_k, b_k и α_k, β_k – их коэффициенты Фурье соответственно, то справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{a_0\overline{\alpha}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\overline{\alpha_k} + b_k\overline{\beta_k}\,).$$

Рассмотрим вопрос о полноте системы степеней в пространстве функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 19.9.4 (Теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для каждого положительного ε существует алгебраический многочлен $p(x)$ такой, что для всех $x\in[a,b]$*

$$|f(x)-p(x)| \leqslant \|f(x)-p(x)\|_{C[a,b]} < \varepsilon. \tag{19.9.2}$$

Доказательство. Если $[a,b]=[-1,1]$, то после замены $x=\cos\theta$, получим функцию $\varphi(\theta):=f(\cos\theta)$, непрерывную на отрезке $[0,\pi]$. Функцию $\varphi(\theta)$ в силу теоремы 19.9.1 можно приблизить полиномом по косинусам с оценкой

$$|\varphi(\theta)-t(\theta)|<\varepsilon, \qquad \theta\in[0,\pi]. \tag{19.9.3}$$

Функция $\cos k\theta$ согласно равенству (16.7.15) представима в виде многочлена по степеням $\cos\theta$:

$$\cos k\theta = T_k(\cos\theta), \tag{19.9.4}$$

откуда

$$T_k(x) = \cos k \arccos x.$$

Многочлены $T_k(x)$, $k=0,1,2,\ldots$, называются *многочленами Чебышева первого рода*. Они играют важную роль во многих разделах анализа.

В силу представления $\cos k\theta$ в виде многочленов по степеням $\cos\theta$ тригонометрический полином $t(\theta)$ из (19.9.3) является многочленом по степеням $\cos\theta$.

При переходе от переменной θ к переменной x получим оценку (19.9.2) для случая, когда $[a,b]=[-1,1]$.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. В самом деле, отрезок $[a,b]$ изменения переменной x при замене

$$x = a + \frac{b-a}{2}(u+1)$$

переходит в отрезок $[-1,1]$ изменения переменной u.

Функция
$$g(u) := f\left(a + \frac{b-a}{2}(u+1)\right)$$
непрерывна на $[-1, 1]$, значит, существует алгебраический многочлен $r(x)$, для которого справедлива оценка
$$|g(u) - r(u)| < \varepsilon, \qquad u \in [-1, 1].$$
Возвращаясь к переменной x по формуле
$$u = 2\frac{x-a}{b-a} - 1,$$
видим, что многочлен $r(u)$ переходит в многочлен относительно переменной x.

Теорема доказана.

Понятно, что имеет место аналог теоремы 19.9.2 о полноте системы степеней в пространствах $L^p_R[a, b]$, $p \geqslant 1$. Не будем говорить здесь об этом подробно.

§ 19.10. Преобразование Фурье

Тригонометрические ряды используются для представления функций периода 2π. Аналогом рядов Фурье для представления функций, заданных на всей оси, является преобразование Фурье.

Рассмотрим функцию $f \in L_R(-\infty, +\infty)$ и для каждого $s \geqslant 0$ построим интегралы
$$a(s) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos st\, dt$$
и
$$b(s) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin st\, dt,$$
являющиеся аналогами коэффициентов Фурье. Их называют *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье* функции f соответственно.

Покажем, что функции $a(s)$ и $b(s)$ непрерывны на $[0, +\infty)$.

Оценим приращение функции $a(s)$, когда аргумент получает приращение Δs. Сначала по $\varepsilon > 0$ находим финитную непрерывную функцию $\varphi(x)$ такую, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - \varphi(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&|a(s+\Delta s)-a(s)| = \\
&\quad = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(s+\Delta s)t-\cos st)\,dt\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)(\cos(s+\Delta s)t-\cos st)\,dt\right| + \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)-\varphi(t))(\cos(s+\Delta s)t-\cos st)\,dt\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(t)2\sin\frac{\Delta s}{2}t\cdot\sin\left(s+\frac{\Delta s}{2}\right)t\right|dt + \\
&\qquad + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)-\varphi(t)|\,dt < \\
&\quad < \frac{1}{\pi}|\Delta s|\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\cdot t|\,dt + \frac{2}{\pi}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

В силу финитности функции $\varphi(x)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\cdot t|\,dt$$

сходится. Поэтому при достаточно малых Δs выполняется оценка $|a(s+\Delta s)-a(s)| < \varepsilon$. Отсюда вытекает равномерная непрерывность функции $a(s)$. Для $b(s)$ доказательство такое же.

Аналогами членов ряда Фурье являются выражения

$$a(s)\cos sx + b(s)\sin sx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos s(t-x)\,dt.$$

Здесь переменная s принимает произвольные неотрицательные значения.

Аналогом частных сумм ряда Фурье являются интегралы

$$S_N(f,x) := \int_0^N [a(s)\cos sx + b(s)\sin sx]\,ds, \tag{19.10.1}$$

где $N \geqslant 0$ и N изменяется непрерывно, принимая все неотрицательные значения. Эти интегралы называют частными преобразованиями Фурье.

Выведем для интеграла (19.10.1) представление, аналогичное представлению частной суммы ряда Фурье (19.3.2). Имеем

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos s(t-x)\,dt\right) ds =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\cos st\,dt\right) ds. \qquad (19.10.2)$$

Если изменить порядок интегрирования, получим

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\left(\int_0^N \cos st\,ds\right) dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt. \qquad (19.10.3)$$

Дадим обоснование возможности изменения порядка интегрирования в интеграле из (19.10.2).

Согласно теореме 19.1.2 при $N>0$ для каждого $\varepsilon>0$ существует непрерывная финитная функция $\psi(t)$, для которой справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)-\psi(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2N}\,.$$

Поэтому

$$\left|\int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\cos st\,dt\right) ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x+t)\cos st\,dt\right) ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t)-\psi(x+t)|\,dt\right) ds < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (19.10.4)$$

и

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^N f(x+t)\cos st\,ds\right) dt - \right.$$
$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^N \psi(x+t)\cos st\,ds\right) dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t)-\psi(x+t)|\left|\int_0^N \cos st\,ds\right| dt < \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (19.10.5)$$

Так как функция $\psi(t)$ финитна, при каждом x интеграл по переменной t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^N \psi(x+t) \cos st \, ds \right) dt$$

является собственным. Поэтому в этом интеграле изменение порядка интегрирования возможно и из (19.10.4) и (19.10.5) вытекает оценка

$$\left| \int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos st \, dt \right) ds - \right.$$
$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^N f(x+t) \cos st \, ds \right) dt \right| < \varepsilon.$$

Интегралы в этом неравенстве не зависят от ε, значит, они равны. Таким образом, представление (19.10.3) обосновано.

Теорема 19.10.1. *Пусть функция $f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$, а 2π-периодическая функция $f_0(x)$ принадлежит $L_R[-\pi, \pi]$.*

Если $f(x) = f_0(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$, то для частного преобразования Фурье функции $f(x)$

$$S_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t} \, dt$$

и частной суммы ряда Фурье функции $f_0(x)$

$$s_n(f_0, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x+t) \frac{\sin(n+1/2)}{2 \sin t/2} \, dt, \qquad n = [N],$$

при $N \to \infty$ справедлива равномерная относительно $x \in [a', b']$ оценка

$$S_N(f, x) - s_n(f_0, x) \to 0,$$

где $[a', b']$ – произвольный отрезок, принадлежащий интервалу (a, b).

Доказательство. Выберем положительное число

$$\delta < \min\left(a' - a, b - b', \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда $f_0(x+t) = f(x+t)$, если $x \in [a', b']$ и $|t| \leqslant \delta$.

Используя теорему 19.5.1, получаем

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt + R_N(x),$$

где $R_N(x) \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно относительно x из любого конечного отрезка.

Преобразуем частную сумму ряда Фурье функции f_0. С помощью представления (19.7.3) ядра Дирихле, находим

$$\begin{aligned} s_n(f_0,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f_0(x+t)\frac{\sin nt}{t}\,dt &+ \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f_0(x+t)\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{t}\right)\sin nt\,dt &+ \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f_0(x+t)\cos nt\,dt &+ \\ + \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} f_0(x+t)D_n(t)\,dt&. \end{aligned} \tag{19.10.6}$$

Второй, третий и четвертый интегралы из правой части равенства (19.10.6) согласно обобщенной лемме Римана для периодических функций стремятся при $N \to \infty$ к нулю равномерно относительно $x \in [a', b']$.

Следовательно, с точностью до слагаемого, стремящегося при $N \to \infty$ к нулю равномерно относительно $x \in [a', b']$, разность

$$S_N(f,x) - s_n(f_0,x)$$

равна

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin Nt}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin nt}{t}\,dt. \tag{19.10.7}$$

Если $N = n + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, то

$$\sin Nt - \sin nt = \sin Nt - \sin(N-\alpha) = 2\sin\frac{\alpha t}{2}\cos\left(N - \frac{\alpha}{2}\right)t.$$

Значит, разность (19.10.7) равна

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\sin\frac{\alpha t}{2}\cos\left(N - \frac{\alpha}{2}\right)t\,dt.$$

Этот интеграл согласно лемме 19.5.2 стремится к нулю при $N \to \infty$ равномерно относительно x из любого конечного промежутка.

Теорема доказана.

Таким образом, если функция f принадлежит $L_R(-\infty, \infty)$ и при некотором x удовлетворяет условиям, обеспечивающим сходимость рядов Фурье в точке, то при этом x

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \cos s\,t\,dt \right) ds. \tag{19.10.8}$$

А если f на некотором интервале (a, b) удовлетворяет условиям, обеспечивающим равномерную сходимость рядов Фурье на отрезках, лежащих в (a, b), то интеграл по переменной s в (19.10.2) сходится равномерно на таких отрезках.

Преобразование Фурье удобно записывать в комплексной форме.

Согласно формуле Эйлера (16.7.10) из (19.10.2) следует, что

$$S_N(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)(e^{ist} + e^{-ist})\,dt \right) ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-ist}\,dt \right) ds.$$

Поэтому вместо равенства (19.10.8) имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-its}\,dt \right) ds.$$

Запишем это равенство с помощью интеграла в смысле главного значения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-its}\,dt \right) ds. \tag{19.10.9}$$

Именно это равенство имелось в виду в § 9.10, когда вводилось понятие интеграла в смысле главного значения.

Формуле (19.10.9) можно придать более симметричный вид. Именно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(t-x)s}\,dt \right) ds =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ist}\,dt \right) e^{ixs}\,ds.$$

Определение. Для функций $h(x)$ из пространства $L_R(-\infty, +\infty)$ *прямым преобразованием Фурье* называют функцию

$$\widehat{h}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-ist}\,dt,$$

а *обратным преобразованием Фурье* – функцию

$$\widetilde{h}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{ist}\,dt.$$

Таким образом, формула (19.10.9) означает, что функция равна обратному преобразованию Фурье от прямого преобразования Фурье, где интеграл, задающий обратное преобразование Фурье, понимается в смысле главного значения.

Найдем преобразование Фурье производной и производную преобразования Фурье, используя запись преобразований Фурье в комплексной форме.

Теорема 19.10.2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, а ее производная $f'(x)$ локально кусочно непрерывна, т.е. кусочно непрерывна на каждом конечном отрезке. Если $f(x)$ и $f'(x)$ принадлежат $L_R(-\infty, +\infty)$, то справедливо равенство*

$$\widehat{f'}(s) = is\,\widehat{f}(s).$$

Доказательство. В силу кусочной непрерывности производной $f'(x)$ при каждом x имеем

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Отсюда вследствие интегрируемости на $(-\infty, +\infty)$ производной $f'(x)$ следует, что существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, оба эти предела равны 0. Поэтому

$$\widehat{f'}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ist}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-ist}\Big|_{t=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-is)e^{-ist}\,dt = is\,\widehat{f}(s).$$

Теорема доказана.

Теорема 19.10.3. *Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ принадлежат пространству $L_R(-\infty,+\infty)$ и $f(x)$ непрерывна на всей оси, то преобразование Фурье $\widehat{f}\,(s)$ имеет на $(-\infty,+\infty)$ непрерывную производную и*

$$\widehat{f}'(s) = -i\,\widehat{xf(x)}(s). \tag{19.10.10}$$

Доказательство. Интеграл в представлении

$$\widehat{f}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}\,dt \tag{19.10.11}$$

сходится при всех s. Чтобы обосновать возможность дифференцирования по s под знаком этого интеграла, заметим, что интеграл, полученный в результате дифференцирования,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-it)e^{-ist}\,dt,$$

сходится равномерно относительно s, так как функция $tf(t) \in L_R(-\infty,+\infty)$. Поэтому равенство (19.10.10) вытекает из (19.10.11).

Теорема доказана.

§ 19.11. Другие ортонормированные системы функций

В этом параграфе приводятся определения некоторых классических ортонормированных систем функций.

Отметим, что эти системы в некоторых задачах являются более естественными для представления функций и более удобными в приложениях, чем тригонометрическая система.

19.11.1. Система Радемахера. Система Радемахера строится на отрезке $[0,1]$. Ее составляют функции

$$r_n(x) := \operatorname{sign}\sin 2^n\pi x, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Таким образом, отрезок $[0,1]$ делится на 2^n равных частей и на каждом из полученных интервалов значение функции $r_n(x)$ попеременно полагается равным $+1$ и -1. А в точках деления функция $r_n(x)$ равна нулю. Графики трех первых функций Радемахера имеют вид:

При желании этот параграф можно пропустить.

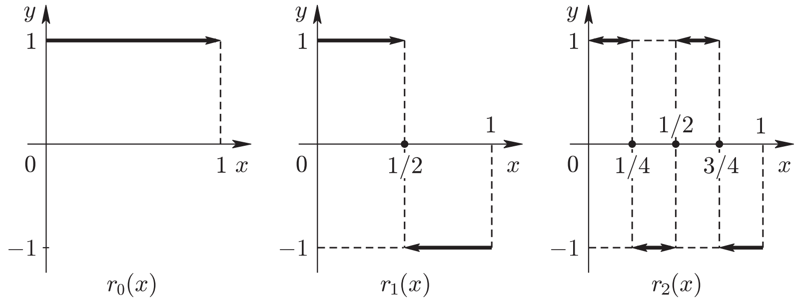

Рис. 19.2.

Очевидно, что норма функций Радемахера в метрике $L^2[0,1]$ равна 1. Ортогональность функций Радемахера вытекает из того, что каждая следующая функция на одной половине интервала постоянства предыдущей функции равна $+1$, а на второй половине равна -1.

Система Радемахера не является полной. Так как в пространствах со скалярным произведением из полноты ортонормированной системы следует ее замкнутость, покажем, что система Радемахера не является замкнутой.

Рассмотрим функцию $r_1(x) \cdot r_2(x)$:

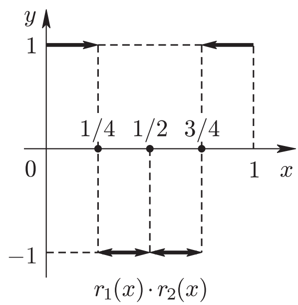

Рис. 19.3.

Эта функция не принадлежит системе Радемахера, вместе с тем она ортогональна всем функциям этой системы. Значит, система Радемахера не замкнута и, следовательно, не полна.

В теории вероятностей система Радемахера используется для представления случайных величин.

19.11.2. Система Уолша. Система функций Уолша $\{w_n(x)\}$ является пополнением в метрике $L^2[0,1]$ системы Радемахера до полной системы.

Положим $w_0(x) := r_0(x)$. Чтобы построить функции $w_n(x)$ при $n = 1, 2, \ldots$, представим n в виде суммы степеней числа 2:

$$n = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k 2^k, \tag{19.11.1}$$

где при каждом $k = 0, 1, \ldots, m-1$ числа ε_k равны или 0 или $+1$, а $\varepsilon_m = 1$.

Если $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ – все те номера k, для которых в (19.11.1) $\varepsilon_k = 1$, то по определению полагают

$$w_n(x) := \prod_{j=1}^{s} r_{\nu_j+1}(x). \tag{19.11.2}$$

При этом в устранимых точках разрыва функций $w_n(x)$, возникающих в нулях функций Радемахера, функции Уолша продолжают по непрерывности.

При $n = 1, 2, 3$ функции Уолша задаются равенствами $w_1(x) = r_1(x)$, $w_2(x) = r_2(x)$, $w_3(x) = r_1(x) r_2(x)$.

Согласно (19.11.2) функциями $w_n(x)$ являются всевозможные произведения конечного числа различных функций Радемахера.

Нормированность функций $w_n(x)$ очевидна. Доказательство ортогональности функций Уолша основано на тех же соображениях, что и для функций Радемахера. Отметим, что система функций Уолша $\{w_n(x)\}$ полна также в пространствах $C[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \geqslant 1$.

Ряды Фурье по системе Уолша называют рядами Фурье–Уолша. Формула (19.11.2) задает систему Уолша как упорядоченную систему функций. Многие свойства рядов Фурье–Уолша, порядок расположения функций в которых задан формулой (19.11.2), аналогичны свойствам тригонометрических рядов Фурье.

Благодаря полноте системы Уолша и тому, что каждая функция $w_n(x)$ принимает значения $+1$ и -1 всюду (за исключением конечного числа точек), ряды по системе Уолша находят приложения в прикладных исследованиях (проблемы передачи информации, радиолокация).

19.11.3. Система Хаара. Это полная ортонормированная система функций на отрезке $[0, 1]$.

Положим $\chi_0(x) \equiv 1$. Дальнейшие функции системы Хаара строятся как кусочно постоянные функции на двоичных интервалах отрезка $[0, 1]$ следующим образом. Функцию $\chi_1(x)$ полагают равной $+1$ на $[0, 1/2)$ и равной -1 на $(1/2, 1]$.

Следующие две функции определяются так. Функция $\chi_2(x)$ на $[0, 1/4)$ равна $+\sqrt{2}$, на $(1/4, 1/2)$ она равна $-\sqrt{2}$ и равна нулю на $(1/2, 1]$.

А функция $\chi_3(x)$ равна нулю на $[0, 1/2)$, равна $+\sqrt{2}$, на $(1/2, 3/4)$ и равна $-\sqrt{2}$ на $(3/4, 1]$. Таким образом, значения функции $\chi_3(x)$ на интервале $(1/2, 1)$ получены с помощью сдвига на этот интервал значений функции $\chi_2(x)$ с интервала $(0, 1/2)$. Числа $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ обеспечивают нормировку функций.

В точках разрыва эти функции, как и все последующие функции системы Хаара определяются как полусумма пределов справа и слева. На рисунке изображены графики функций $\chi_n(x)$ при $n = 1, 2, 3$.

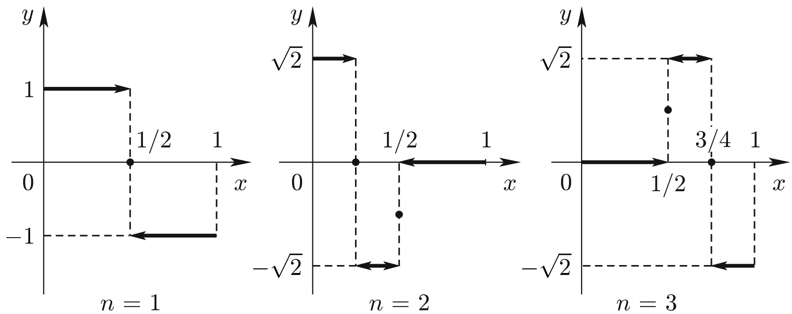

Рис. 19.4.

Далее строится блок из четырех функций Хаара. Сначала берут функцию, которая равна $+2$ на $(0, 1/8)$, равна -2 на $(1/8, 1/4)$ и равна нулю на $(1/4, 1)$. Здесь значения $+2$ и -2 выбраны для нормировки.

Затем значения этой функции сдвигаются с $(0, 1/4)$ на $(1/4, 1/2)$, потом на $(1/2, 3/4)$ и, наконец, на $(3/4, 1)$. В концах интервалов, содержащихся в $(0, 1)$, функции полагаются равными полусумме пределов справа и слева. А в концах отрезка $[0, 1]$ функции Хаара продолжаются по непрерывности.

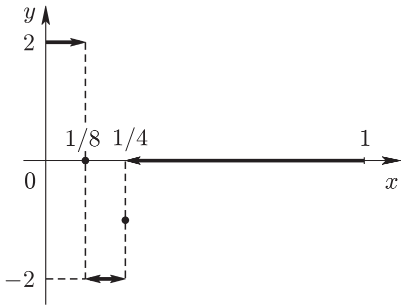

Рис. 19.5.

По указанной схеме строятся дальнейшие функции системы Хаара. При переходе к каждому следующему блоку функций их носители уменьшаются наполовину.

Свойства рядов Фурье–Хаара отличаются от свойств рядов по тригонометрической системе значительно.

Так, ряды Фурье–Хаара непрерывных функций сходятся равномерно к этим функциям.

Но коэффициенты Фурье–Хаара непрерывных функций не могут убывать очень быстро. Именно, если для коэффициентов Фурье–Хаара c_n непрерывной функции при $n \to +\infty$ справедлива оценка $c_n = o(n^{-3/2})$, то эта функция тождественно равна нулю.

Неудобство системы Хаара состоит в том, что эти функции не являются равномерно ограниченными, т.е. не существует такого числа B, что для всех n и x выполняется неравенство $|\chi_n(x)| \leqslant B$.

Ряды Фурье–Хаара хорошо отражают локальные свойства функций. Это можно объяснить так. Если функция f равна нулю вне некоторого интервала, то для всех функций системы Хаара, носители которых не пересекаются с этим интервалом, коэффициенты Фурье–Хаара функции f равны нулю.

В последние годы XX века интенсивно развивались исследования по представлению функций рядами по системам всплесков (вейвелетов, от английского wavelet). Отметим, что система Хаара является простейшей и исторически первой системой всплесков.

Значение рядов по системам всплесков определяется тем, что они, как и ряды по системе Хаара, хорошо учитывают локальные свойства функций. Благодаря этому, ряды по всплескам широко используются в проблемах передачи информации.

19.11.4. Ортогональные многочлены. Ортогональные многочлены обычно определяют на отрезке $[-1, 1]$. Для простоты будем рассматривать пространство действительнозначных функций, в котором введено скалярное произведение

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx. \tag{19.11.3}$$

Если провести ортогонализацию по Шмидту системы степеней $x^0 = 1, x, x^2, \ldots$ относительно скалярного произведения (19.11.3), получим систему многочленов, которые называются *многочленами Лежандра*.

Рассматриваются также ортогональные многочлены относительно более общего скалярного произведения, чем (19.11.3),

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,w(x)\,dx,$$

где функция $w(x)$, которую называют весовой функцией или весом, неотрицательна и интегрируема.

Система многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$ первого рода образует ортогональную систему относительно веса

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В самом деле, если $n \neq m$, то с помощью замены $x = \cos t$ находим

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^{0} \cos nt\, \cos mt \frac{-\sin t}{\sin t}\,dt = \\ = \int_{0}^{\pi} \cos nt\, \cos mt\,dt = 0.$$

Систему многочленов, ортогональных с весом $\sqrt{1-x^2}$, называют системой *многочленов Чебышева второго рода*.

Многочлены, ортогональные с весом $(1-x^2)^\alpha$, $\alpha > -1$, называют *многочленами Гегенбауера* или ультрасферическими многочленами. Эти многочлены являются частным случаем *многочленов Якоби*, ортогональных на $[-1, 1]$ с весом

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

где $\alpha > -1$ и $\beta > -1$.

Наконец, рассматриваются ортогональные многочлены на бесконечных промежутках. Многочлены, ортогональные на оси $(-\infty, +\infty)$ с весом

$$e^{-x^2},$$

называют *многочленами Чебышева–Эрмита* (многочленами Эрмита). А многочлены, ортогональные на полуоси $[0, +\infty)$ с весом $x^\alpha e^x$, $\alpha > -1$, называют *многочленами Чебышева–Лагерра* (многочленами Лагерра).

§ 19.12. Задачи и упражнения

19.12.1. Какой вид имеет ряд Фурье функции f, если она четна относительно точки $\pi/2$, т.е. если

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)?$$

19.12.2. Какой вид имеет ряд Фурье функции f, если она нечетна относительно точки $\pi/2$, т.е. если

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)?$$

19.12.3. Докажите, что в теореме 19.6.1 можно утверждать не только справедливость оценок (19.6.5), но и сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m}(a_k^2 + b_k^2).$$

19.12.4. Разложите в ряд Фурье функцию, равную x^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Найдите с помощью этого разложения сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

19.12.5. Докажите, что если числа a_k монотонно убывают к нулю, то для $x \in (0, \pi]$ справедливы оценки

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos kx = O\left(\frac{a_n}{x}\right), \qquad \sum_{k=n}^{\infty} a_k \sin kx = O\left(\frac{a_n}{x}\right).$$

19.12.6. Докажите, что если числа a_k монотонно убывают к нулю, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

a) равномерно сходится тогда и только тогда, когда $ka_k \to 0$, $k \to \infty$;
b) имеет равномерно ограниченные частные суммы в том и только том случае, когда $ka_k = O(1)$.

19.12.7. Докажите, что при всех n справедливы оценки

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx \geqslant 0, \qquad x \in (0, \pi),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx > 0, \qquad x \in (0, \pi).$$

19.12.8. Докажите, что в теореме 19.8.2 вместо непрерывности f на всей оси можно предполагать непрерывность только в точке x_0.

Краткие сведения об ученых, упоминаемых в тексте

Адама́р Жак Саломон (Hadamart Jacques Salomon, 1865 – 1963) – французский математик.

Ба́нах Стефан (Banach Stefan, 1892 – 1945) – польский математик.

Бе́ссель Фридрих Вильгельм (Bessel Friedrich Wilhelm, 1784 – 1846) – немецкий астроном и математик.

Ва́ллис Джон (Wallis John, 1616 – 1703) – английский математик.

Га́усс Карл Фридрих (Gauss Karl Friedrich, 1777 – 1855) – немецкий математик, иностранный почётный член Петербургской Академии наук.

Ге́генбауер Леопольд Бернхард (Gegenbauer Leopold Bernhard, 1849 – 1903) – австрийский математик.

Гиббс Джозайя Уиллард (Gibbs Josiah Willard, 1839 – 1903) – американский физик, химик, математик и механик.

Ги́льберт Давид (Hilbert David. 1862 – 1943) – немецкий математик, иностранный почётный член Академии наук СССР.

Кро́некер Леопольд (Kronecker Leopold, 1823 – 1891) – немецкий математик, иностранный член-коррепондент Петербургской Академии наук.

Ку́ммер Эрнст Эдуард (Kummer Ernst Eduard, 1810 – 1893) – немецкий математик.

Лаге́рр Эдмонд Никола (Lagerre Edmond Nicolas, 1834 – 1886) – французский математик.

Ла́скер Эммануил (Lasker Emanuel, 1868 – 1941) – немецкий математик, чемпион мира по шахматам 1894 – 1921 гг.

Лежа́ндр Адриан Мари (Legendre Adrian Marie, 1752 – 1833) – французский математик.

Ма́рков Андрей Андреевич (1856 – 1922) – русский математик, академик Петербургской Академии наук.

Сведения об ученых, упоминавшихся в семестрах I и II настоящего курса, здесь не приводятся.

Ме́ртенс Франц (Mertens Franz, 1840 – 1927) – немецкий математик.

Парсева́ль Марк Антуан (Parseval Marc Antoin, 1755 – 1836) – французский математик.

При́нгсхейм Альфред (Pringsheim Alfred, 1850 – 1941) – немецкий математик.

Пуассо́н Симеон Дени (Poisson Siméon Denis, 1781 – 1840) – французский механик, физик и математик, иностранный почетный член Петербургской Академии наук.

Ра́абе Иосиф Людвиг (Raabe Joseph Ludwig, 1801 – 1859) – швейцарский математик.

Радема́хер Ганс Адольф (Rademacher Hans Adolph, 1892 – 1968) – немецкий математик.

Рисс Фридьеш (Фредерик) (Riesz Fridyes, 1880 – 1956) – венгерский математик.

Сти́рлинг Джеймс (Stirling James, 1692 – 1770) – шотландский математик.

Та́убер Альфред (Tauber Alfred, 1866 – 1944) – австрийский математик.

Уо́лш Джозеф Леонард (Walsh Joseph Leonard, 1895 – 1973) – американский математик.

Фейе́р Липот (Fejer Lipot, 1880 – 1959) – венгерский математик.

Фробе́ниус Фердинад Георг (Frobenius Ferdinand Georg, 1849 – 1917) – немецкий математик.

Ха́ар Альфред (Haar Alfréd, 1885 – 1933) – венгерский математик.

Шмидт Эрхард (Schmidt Erhard, 1876 – 1959) – немецкий математик.

Эрми́т Шарль (Hermite Charles, 1822 – 1901) – французский математик, иностранный почётный член Петербургской Академии наук.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 20

Сергей Александрович Теляковский

Курс лекций по по математическому анализу
Семестр III

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Сдано в набор 16.10.2012. Подписано в печать 29.03.2013.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pupyrev@mi.ras.ru`