Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 15

Издание выходит с 2003 года

Конференция «Мальцевские чтения»

МИАН

Москва
2011

УДК 51
ББК (В)22
С56

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2011. Вып. 15: Конференция «Мальцевские чтения» / – 84 с.

ISBN 5-98419-042-7

Серия "Современные проблемы математики" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

ISBN 5-98419-042-7

Содержание

Теоретико-модельные свойства тьюринговых степеней разностной иерархии Ершова

М. М. Арсланов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

В настоящее время накоплено довольно много результатов, относящихся к разработке структурной теории (тьюринговых) степеней неразрешимости, содержащих множества из различных уровней иерархии Ершова. Следующим естественным шагом должно было быть систематическое рассмотрение теоретико-модельных свойств этих структур, но в этой области сделано пока еще очень немного.

Эти исследования берут начало со следующего характеристического свойства множеств по тьюринговой сводимости (для краткости T-сводимости) расположенных ниже $\varnothing'$ – степени неразрешимости проблемы остановки машины Тьюринга. Множество A T-сводится к множеству $\varnothing'$ (для краткости $A \leqslant_{\mathrm{T}} \varnothing'$) тогда и только тогда, когда существует такая вычислимая функция $f(s,x)$, что $A(x) = \lim_s f(s,x)$. Здесь $A(x)$ – характеристическая функция множества A:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, условие $A \leqslant_{\mathrm{T}} \varnothing'$ эквивалентно тому, что множество A может быть вычислимо аппроксимируемо в следующем смысле: существует такое множество равномерно вычислимых последовательностей $\{f(0,x), f(1,x), \ldots, f(s,x), \ldots \mid x \in \omega\}$, состоящих из 0 и 1, что для каждого x предел последовательности $f(0,x), f(1,x), \ldots$ существует и равен значению $A(x)$.

Ершов [1]–[3] построил иерархию множеств, расположенных ниже $\varnothing'$, которая теперь известна как *иерархия Ершова*. Место множества A в иерархии определяется по количеству изменений в аппроксимиции множества A с помощью описанной выше вычислимой последовательности, т.е. по количеству различных пар соседних элементов этой последовательности. Таким образом, иерархия Ершова ранжирует степени множеств, входящих в иерархию, в соответствии с алгоритмической сложностью распознавания их элементов. Иерархия Ершова состоит из *конечных* и *бесконечных* уровней. К конечным уровням иерархии относятся множества, у которых количество таких изменений ограничено некоторым натуральным числом. В противном случае множество принадлежит одному из бесконечных уровней иерархии Ершова. Таким образом, конечный уровень n, $n \geqslant 1$, иерархии Ершова составляют n-в.п. множества, которые в каноническом виде выглядят как

$$A = \bigcup_{i=0}^{[(n-1)/2]} \{(R_{2i+1} - R_{2i}) \cup (R_{2i} - R_{2i+1})\},$$

где $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ – такие в.п. множества, что $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots \subseteq R_{n-1}$. (Если n – число нечетное, то $R_n = \varnothing$.) Бесконечные уровни иерархии определяются с помощью бесконечных конструктивных ординалов. (Конечные уровни иерархии Ершова впервые под другими названиями были определены и изучены в работах Голда [4], Путнама [5] и др. Аддисон [6] рассмотрел общий метод построения “разностных” иерархий. В частности, построенная им иерархия, порожденная в.п. множествами, приводит к тем же классам n-в.п. множеств. В работе Аддисона получены также некоторые свойства n-в.п. множеств, например доказана теорема об иерархии.)

Как оказалось, возникающая иерархия множеств исчерпывает всю совокупность множеств, расположенных по T-сводимости ниже $\varnothing'$. Каждый следующий уровень иерархии содержит все предыдущие, но не совпадает ни с одним из них, при этом уровни иерархии устроены настолько “равномерно”, что высказывалась даже гипотеза (Доуни [7]), что полурешетки тьюринговых степеней множеств конечных уровней иерархии начиная со второго неразличимы на языке первого порядка. Это предположение получило известность как *гипотеза Доуни* и вызвало целый ряд публикаций.

Степень $\mathbf{a}$ называется *n-в.п. степенью*, если она содержит некоторое n-в.п. множество. Если она содержит n-в.п. множества и не содержит $(n-1)$-в.п. множества, то называется *собственной n-в.п. степенью.* Множество всех n-в.п. степеней мы обозначим через $\mathscr{D}_n$ (как обычно, $\mathscr{R} = \mathscr{D}_1$ обозначает совокупность всех в.п. степеней). Через $\mathscr{D}$ $(\leqslant \mathbf{0}')$ обозначается совокупность степеней, по тьюринговой сводимости расположенных ниже $\mathbf{0}'$, а множество всех тьюринговых степеней – через $\mathscr{D}$. Все эти совокупности образуют верхние полурешетки относительно T-сводимости: наименьшей верхней гранью степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, содержащих соответственно множества A и B, является степень множества

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}.$$

Мы придерживаемся обозначений, принятых в книге Соара [8]. В частности, частично вычислимые функционалы (с оракулом или без оракула) обозначаются заглавными греческими буквами, нумерация всех частично вычислимых функционалов (с оракулом или без оракула) обозначается через $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$; $\{W_e\}_{e\in\omega}$ означает стандартную нумерацию всех в.п. множеств.

Первые результаты в исследовании структурной теории n-в.п. степеней были получены в 70-х годах прошлого столетия, когда Купер [9] установил существование степени, содержащей d-в.п. множество, но не содержащей в.п. множества (т.е. существование собственной d-в.п. степени), а Лахлан (не опубликовано) доказал, что для любого $n > 1$ под каждой собственной n-в.п. степенью находится некоторая невычислимая в.п. степень. Эти два результата показывают, что совокупности n-в.п. степеней отличаются как от совокупности в.п. степеней, так и от совокупности всех степеней, расположенных ниже $\mathbf{0}'$ (так как по известной теореме Сакса существуют минимальные степени $< \mathbf{0}'$, а по упомянутой теореме Лахлана никакая n-в.п. степень не может быть минимальной).

Эти работы вызвали определенный интерес. Обобщая теорему Купера, Лерман и Хей (не опубликовано, см. [10]) установили, что для любого $n > 1$ существуют $(n+1)$-в.п. степени $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ такие, что интервал $\{\mathbf{b} \mid \mathbf{c} \leqslant \mathbf{b} \leqslant \mathbf{d}\}$ не содержит n-в.п. степеней. Они также отметили, что сочетание предложенного Купером для доказательства существования собственной d-в.п. степени метода с методом разрешения позволяет построить под каждой невычислимой в.п. степени собственную d-в.п. степень. Позднее автор [11], сочетая метод Купера с методом кодирования Сакса, построил собственную d-в.п. степень и над каждой не T-полной в.п. степенью.

Более активные исследования по разработке структурной теории n-в.п. (в основном d-в.п.) степеней начались после публикаций автора [11], [12] и Доуни [7], в которых установлено, что элементарные теории в.п. степеней и n-в.п. степеней различны. Автором доказано, что для любого $n \geqslant 1$ и для каждой n-в.п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ существует d-в.п. степень $\mathbf{d} < \mathbf{0}'$ такая, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{0}'$. Ранее в работах Ейтса и Купера (не опубликовано, см. статью Миллера [13]) было установлено, что в полурешетке в.п. степеней такой результат не имеет места. Отсюда следует, что эти теории различны на Σ^0_3-уровне. Доуни доказал возможность вложения четырехэлементной решетки $\diamondsuit$, называемой также *ромбом*, в d-в.п. степени с сохранением $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ (ранее Лахланом [14] было установлено, что в полурешетке в.п. степеней такой результат также не имеет места), а Купер, Лахлан, Лемпп, Соар и Харрингтон [15] установили, что упорядочение n-в.п. степеней неплотно для любого $n > 1$. Таким образом, эти теории различны уже на Σ^0_2-уровне (на Σ^0_1-уровне теории n-в.п. степеней при всех $n \geqslant 1$ совпадают, что следует из приведенного выше результата Лахлана и теорем Мучника [16] и Сакса [17] о возможности вложения в $\mathscr{R}$ произвольного счетного частично упорядоченного множества, что означает также разрешимость их Σ^0_1-теорий). В работе [7] Доуни сформулировал также свою ставшую знаменитой гипотезу об элементарной эквивалентности упорядочений n- и m-в.п. степеней при $n \neq m$, $n, m > 1$.

В настоящее время структурная теория n-в.п. степеней достаточно хорошо разработана, что нельзя сказать об изучении теоретико-модельных свойств этих структур. К крупным достижениям, полученным в этом направлении за последние годы, относятся кроме упомянутых работ автора и Доуни следующие:

- полурешетки d-в.п. и 3-в.п. степеней не элементарно эквивалентны (опровержение гипотезы Доуни; автор, Калимуллин, Лемпп [18]; в этой работе приведен также первый пример определимой в полурешетке $\mathscr{D}_n$ бесконечной совокупности в.п. степеней);
- в.п. степени в сигнатуре $\{\leqslant\}$ не образуют Σ_1-подструктуру n-в.п. степеней ни для какого $n \geqslant 2$ (Янг и Ю [19]);
- для любого $m \geqslant 1$ частично упорядоченные множества m-низких в.п. и m-низких d-в.п. степеней не элементарно эквивалентны (Ямалеев [20]; этот результат при $m = 1$ независимо получен М. Файзрахмановым).

Несмотря на многочисленные усилия, ответить на целый ряд естественно возникающих вопросов пока не удается.

Не разрешена проблема определимости (с параметрами или без параметров) в.п. степеней в структурах n-в.п. степеней при $n > 1$ (в более общей постановке – проблема определимости m-в.п. степеней в структурах n-в.п. степеней при $1 \leqslant m < n$).

Не исследована проблема определимости (с параметрами или без параметров) в Δ^0_2-степенях множества всех n-в.п. степеней для некоторого (всех) $n > 1$. (Представляет интерес нахождение естественных множеств n-в.п. степеней, определимых с параметрами в Δ^0_2-степенях.) Не известны также ответы на следующие вопросы. Существуют ли определимые в $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, индивидуальные n-в.п. степени, отличные от $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$? Если $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, фиксировано, то существуют ли множества m-в.п. степеней $(1 \leqslant m \leqslant n)$ C и n-в.п. степени $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ такие, что $|C \cap [\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 1$?

Проблемы определимости в степенных структурах $\mathscr{D}_n$ мы рассмотрим подробнее далее.

Остается открытой проблема элементарной эквивалентности структур n-в.п. степеней при различных $n > 2$. В недавней работе автора, Калимуллина и Лемппа [18] установлено, что полурешетки $\mathscr{D}_2$ и $\mathscr{D}_3$ различны, т.е. следующее Σ^0_2-предложение φ истинно в $\mathscr{D}_2$ и ложно в $\mathscr{D}_3$:

$$\varphi \doteq (\exists \mathbf{d} > \mathbf{0})(\exists \mathbf{e} > \mathbf{d})(\exists \mathbf{f} > \mathbf{e})\{(\forall \mathbf{u} \leqslant \mathbf{f})[\mathbf{u} \leqslant \mathbf{e} \vee \mathbf{e} \leqslant \mathbf{u} \cup \mathbf{d}] \mathbin{\&} (\forall \mathbf{u} \leqslant \mathbf{e})[\mathbf{u} \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{d} \leqslant \mathbf{u}]\}.$$

Этот результат опровергает предположение Доуни [7] о попарной элементарной эквивалентности этих структур. Однако проблема элементарной эквивалентности полурешеток $\mathscr{D}_n$ и $\mathscr{D}_m$ при $m \neq n$ и $n, m \geqslant 3$ все еще остается открытой. Мы предполагаем, что теории этих полурешеток попарно различны и отличающее их предложение может быть получено подходящим обобщением приведенного выше предложения φ на соответствующие уровни иерархии. Но доказательство этого утверждения, если идти по пути простого обобщения приведенного в [18] доказательства, может оказаться технически весьма сложным.

Если полурешетки $\mathscr{D}_n$ и $\mathscr{D}_{n+1}$ не элементарно эквивалентны для некоторого $n \geqslant 1$, то возникает вопрос: не является ли $\mathscr{D}_n$ Σ_k-подструктурой $\mathscr{D}_{n+1}$ для некоторого $k \geqslant 1$? По определению структура $\mathscr{L}$ является Σ_k-подструктурой структуры $\mathscr{P}$, если $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{P}$ и для любой Σ_k-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ и для любых $a_1, \ldots, a_r \in \mathscr{L}$

$$\mathscr{L} \models \varphi(a_1, \ldots, a_r) \iff \mathscr{P} \models \varphi(a_1, \ldots, a_r).$$

В этом случае пишем $\mathscr{L} \preceq_{\Sigma_k} \mathscr{P}$.

Известно (Янг и Ю [19]), что в.п. степени в сигнатуре $\{\leqslant\}$ не образуют Σ_1-подструктуру n-в.п. степеней ни для какого $n \geqslant 2$. Арсланов и Ямалеев недавно доказали, что существуют такие в.п. степень $\mathbf{d}$ и d-в.п. степень $\mathbf{e}$, что $\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{e}$ и для любой d-в.п. степени $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{e}$, либо $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{d}$, либо $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}$, но существует такая 3-в.п. степень $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{e}$, что $\mathbf{u}$ несравнима с $\mathbf{d}$. Отсюда следует, что Σ_1-предложение

$$\exists u(\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{e} \,\&\, u < \mathbf{e} \,\&\, u \nleqslant \mathbf{d} \,\&\, \mathbf{d} \nleqslant u)$$

истинно в $\mathscr{D}_3$ и ложно в $\mathscr{D}_2$, поэтому $\mathscr{D}_2 \npreceq_{\Sigma_1} \mathscr{D}_3$. Недавно стало известно, что Шор и Сламан (частное сообщение, не опубликовано) доказали, что $\mathscr{D}_m \npreceq_{\Sigma_1} \mathscr{D}_n$ при всех $1 \leqslant m < n$.

Одной из наиболее трудных открытых проблем является проблема разрешимости $\exists\forall$-теории n-в.п. степеней для каждого $n \geqslant 1$. Как заметил Шор [21] (для случая в.п. степеней), по произвольной конечной решетке $\mathscr{L}$ легко построить Σ_2^0-предложение, которое истинно в $\mathscr{D}_n$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}$ вложима в $\mathscr{D}_n$. Например, вложимость ромба в структуру d-в.п. степеней эквивалентна истинности следующего Σ_2^0-предложения:

$$\exists a, b, c, d\{(a < b, c < d) \,\&\, \forall x(x \leqslant b, c \to x \leqslant a) \,\&\, x \geqslant b, c \to x \geqslant d)\}.$$

Однако проблема описания конечных решеток, вложимых в $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, вероятно является еще более трудной задачей. Существует множество публикаций, посвященных этой проблеме (библиографию работ см., например, в статье Лермана [22]), но окончательный результат вряд ли стоит ожидать в ближайшем будущем.

Известно также (Лерман [23]), что проверка истинности в $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, произвольного Σ_2^0-предложения эквивалентна проблеме распознавания возможности по произвольному набору пар конечных решеток $\{\mathscr{P}, \mathscr{Q}_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, где $\mathscr{Q}_i$ – расширение $\mathscr{P}$ как частично упорядоченного множества, и определить по данному вложению $\mathscr{P}$ в $\mathscr{D}_n$, существует ли вложение некоторого $\mathscr{Q}_i$ в $\mathscr{D}_n$, расширяющее вложение $\mathscr{P}$. В некоторых частных случаях эта проблема решается положительно (например, Сламан и Соар [24], [25] для случая $m = 1$), но до получения общего решения еще далеко. Приведем пример, который иллюстрирует трудность проблемы для $\mathscr{D}_2$ даже при $m = 1$.

Пусть

$$\mathscr{P} = \{a, b, c \mid a < b < c\}, \qquad \mathscr{Q} = \{a, b, c, d \mid a < b < c,\ a < d < c,\ b \nleqslant d,\ d \nleqslant b\}.$$

Ясно, что $\mathscr{Q}$ расширяет $\mathscr{P}$, и пусть $f\colon \mathscr{P} \mapsto \mathscr{D}_2$ – такое вложение $\mathscr{P}$ в $\mathscr{D}_2$, что $f(a) = \mathbf{0}$. Следующая теорема автора, Калимуллина и Лемппа [18] устанавливает, что при этом может не существовать расширяющего $\mathscr{P}$ вложения $\mathscr{Q}$ в $\mathscr{D}_2$.

Теорема 1. *Существуют такие в.п. степень* $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ *и* d*-в.п. степень* $\mathbf{c} > \mathbf{b}$*, что для любой в.п. степени* $\mathbf{d}$*, если* $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{c}$*, то либо* $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{d}$*, либо* $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{b}$.

Некоторые теоретико-модельные свойства полурешеток $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, так же, как и решеток n-в.п. множеств $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$ ($\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}$ обозначает решетку всех в.п. множеств), можно вывести из соответствующих результатов для полурешеток $\mathscr{R}$ и $\mathscr{C}$, которые значительно более тщательно изучены. Например, так же, как и в вычислимо перечислимом случае, следующий результат может быть получен с помощью теорем Лахлана [26] о гипергиперпростых множествах и булевых алгебрах.

Теорема 2. *Для любого* $n \geqslant 1$ *решетка* $\mathscr{C}_n$ *всех* n*-в.п. множеств не имеет вычислимого представления, т.е. она не изоморфна никакому вычислимому частичному порядку.*

Доказательство. При $n = 1$ результат непосредственно следует из теоремы Лахлана [26] о том, что любая Σ_3^0-булева алгебра изоморфна булевой алгебре в.п. надмножеств некоторого гипергиперпростого множества, и теоремы Фейнера [27] о существовании Σ_3^0-булевой алгебры, которая не имеет вычислимого представления.

Теперь пусть $n \geqslant 2$ и A – произвольное гипергиперпростое множество. Если $A \subseteq B$, B является n-в.п. множеством и разность $B - A$ бесконечна, то она ко-в.п. (т.е. имеет в.п. дополнение). Действительно, $B - A$ должна быть $2k$-в.п. множеством для некоторого четного $2k$ (в противном случае $\omega - A$ не иммунна) и

$$B - A = (A_1 - A_2) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots \cup (A_{2k-1} - A_{2k})$$

для некоторых в.п. множеств $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{2k}$. Теорема Лахлана о гипергипериммунной разности в.п. множеств гласит, что если в.п. множества X и Y таковы, что $X \supset Y$ и $X - Y$ гипергипериммунна, то существует вычислимое множество R такое, что $X - Y \subseteq R \subseteq X$. Отсюда следует, что существуют такие вычислимые множества $R_1, R_2, \dots, R_k$, что

$$A_{2i-1} - A_{2i} \subseteq R_i \subseteq A_{2i-1}, \qquad B - A = \overline{R_1} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} \left(A_{2i} \cap \left\{ \overline{\bigcup_{m>2i} R_m} \right\} \right) \right\}.$$

Это значит, что множество $A \cup \{\omega - B\}$ вычислимо перечислимо.

По теореме Лахлана множество B также в.п., поэтому булевы алгебры $\mathscr{C}(A)$ и $\mathscr{C}_n(A)$ соответственно в.п. и n-в.п. надмножеств (по модулю конечных разностей) гипергиперпростого множества A совпадают.

При изучении степеней изоморфных копий $\mathscr{D}_n$ (для краткости – степеней представлений $\mathscr{D}_n$) весьма полезным является следующий результат, принадлежащий Шору [28], доказанный для в.п. степеней и в более общей формулировке).

Теорема 3. *Пусть A – произвольное Π^0_2 множество. Существует такая частичная решетка (т.е. верхняя полурешетка, в которой наибольшая верхняя грань существует не для всех пар элеиентов) $\mathscr{L}$, что:*

(1) *$\mathscr{L}$ изоморфно вкладывается в любую полурешетку $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$;*

(2) *если $\mathscr{L}$ изоморфно вкладывается в какую-нибудь полурешетку $\mathscr{S}$, то множество A вычислимо относительно (тьюрингова) скачка любого представления $\mathscr{S}$.*

В частности, A вычислимо относительно скачка любого представления каждой полурешетки $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$. Таким образом, справедливо

Следствие (Шор [28]). *Ни одна из полурешеток $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, не имеет вычислимого представления. Более того, степень любого представления каждой из них больше или равна $\mathbf{0}'$.*

Доказательство следующей теоремы может быть получено фактически повторением доказательства Шора предыдущего результата. (Переход от степени $\mathbf{0}'$ к высокой степени $\mathbf{h}$ осуществляется с помощью техники high permitting.)

Теорема 4. *Для любой высокой в.п. степени $\mathbf{h}$ полурешетка $\mathscr{D}_n$ $(\leqslant \mathbf{h})$ не имеет вычислимого представления.*

По-видимому, справедливо и более общее утверждение: *для любой в.п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ полурешетка $\mathscr{D}_n$ $(\leqslant \mathbf{a})$ не имеет вычислимого представления.* Спектры степеней представлений как полурешеток $\mathscr{D}_n$, $n \geqslant 1$, так и их фрагментов $\mathscr{D}_n$ $(\leqslant \mathbf{a})$ совершенно не исследованы.

Следующая теорема содержится в работе Лермана, Шора и Соара [29] для случая $n = 1$, но приведенное там доказательство проходит и в общем случае.

Теорема 5. *Для любого $n \geqslant 1$ полурешетка $\mathscr{D}_n$ не счетно категорична.*

Доказательство. Лерман, Шор и Соар [29] определили счетное множество попарно не изоморфных конечных частичных решеток (наибольшая нижняя грань существует не для всех пар степеней), порожденных тремя элементами, каждая из которых вкладывается в $\mathscr{R}$ и, следовательно, в $\mathscr{D}_n$ для каждого $n > 1$.

Каждая такая частичная решетка производит определенный 3-тип, реализуемый в $\mathscr{D}_n$. Теперь утверждение следует из теоремы Рыль-Нардзевского о счетной категоричности (см. Ершов и Палютин [30, с. 194]).

Рассмотрим более подробно проблемы определимости в полурешетках n-в.п. степеней. Одним из возможных способов доказательства определимости m-в.п. степеней в n-в.п. степенных структурах при $m < n$ является следующий:

а) находится некоторое бесконечное определимое в $\mathscr{D}_n$ множество $\mathscr{S}$ m-в.п. степеней;

б) доказывается, что степени из $\mathscr{S}$ порождают под операциями $\cup$ и $\cap$ полурешетку $\mathscr{D}_n$ (там, где она определена).

В этих исследованиях активно используются возможные способы разложения n-в.п. степеней на две несравнимые степени, поэтому начнем изложение с рассмотрения этих вопросов.

Определение. *Разложением степени* $\mathbf{d}$ называются такие степени $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_1$, что $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1 < \mathbf{d}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cup \mathbf{d}_1$. Говорят, что это *разложение над степенью* $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, если $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$. Наконец, разложение $\mathbf{d}$ на $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_1$ является *разложением, которое минует верхний конус степеней* $\mathbf{b}$, если $\mathbf{b} \nleqslant \mathbf{d}_i$, $i \leqslant 1$.

Ниже приводятся все основные результаты о разложениях n-в.п. степеней при различных $n \geqslant 1$, которые на сегодняшний день нам известны.

Теорема 6 (Сакс [31]). *Каждая в.п. степень* $\mathbf{a} > 0$ *разложима на две в.п. степени, минуя верхний конус степеней* $\mathbf{b}$, *для любой* Δ_2^0*-степени* $\mathbf{b} > 0$.

Теорема 7 (Лахлан [32]). *Существуют такие в.п. степени* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, *что* $\mathbf{b}$ *не разложима в в.п. степенях над* $\mathbf{a}$.

Теорема 8 (Робинсон [33]). *Каждая в.п. степень* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *разложима на две низкие в.п. степени над любой низкой в.п. степенью.*

Теорема 9 (Купер [34] для случая $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, Купер и Ли [35] для общего случая). *Каждая* d*-в.п. степень* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *разложима в* d*-в.п. степенях над произвольной в.п. степенью* $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Теорема 10 (Купер, Лахлан, Лемпп, Соар и Харрингтон [15]). *Не каждая* n*-в.п. степень (даже в.п. степень)* $\mathbf{d}$ *разложима (даже в* ω*-в.п. степенях) над произвольной* d*-в.п. степенью* $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, *для любого* $n > 1$.

Теорема 11 (Арсланов, Купер и Ли [35], [36]). *Любая в.п. степень* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *разложима в* d*-в.п. степенях над произвольной низкой* d*-в.п. степенью* $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.

Теорема 12 (Ли [37]). *Каждая* d*-в.п. степень* $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ *разложима в* d*-в.п. степенях над каждой низкой* d*-в.п. степенью* $\mathbf{x} < \mathbf{d}$.

Теорема 13 (Шор и Сламан [38]). *Пусть степени* $\mathbf{d}, \mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *таковы, что* $\mathbf{d}$ *является* n*-в.п. для некоторого* $n \geqslant 1$, *а* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *такие* Δ_2^0*-степени, что* $\mathbf{a} \ngeqslant \mathbf{b}$. *Тогда* $\mathbf{d}$ *можно разложить над* $\mathbf{a}$ *в* Δ_2^0*-степенях, минуя верхний конус степеней* $\mathbf{b}$.

Ясно, что последний результат нельзя усилить, рассматривая разложения на d-в.п. степени (в [15] доказано, что этого нельзя сделать даже при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$). Ямалеев [20] доказал, что такое разложение возможно при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{d}$ является собственно d-в.п. степенью, а $\mathbf{b}$ – такая невычислимая Δ_2^0-степень, что между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ нет в.п. степеней.

Теорема 14 [20]. *Пусть собственно* d*-в.п. степени* $\mathbf{d}$ *и* $\mathbf{b}$ *таковы, что* $\mathbf{d} > \mathbf{b}$ *и интервал* $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$ *не содержит в.п. степени. Тогда* $\mathbf{d}$ *можно разложить на две* d*-в.п. степени, минуя верхний конус степеней над* $\mathbf{b}$.

Следовательно, каждая собственная d-в.п. степень $\mathbf{b}$ обладает следующим свойством.

Для любой d-в.п. степени $\mathbf{d} > \mathbf{b}$ существует такая d-в.п. степень $\mathbf{a}$, что $\mathbf{b} < \mathbf{a} \leqslant \mathbf{d}$, и $\mathbf{a}$ разложима в d-в.п. степенях, минуя верхний конус степеней $\mathbf{b}$.

Действительно, если между степенями $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ существует некоторая в.п. степень $\mathbf{a}$, тогда $\mathbf{a}$ разложима, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{b}$, по теореме Сакса о разложении; если же между $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ нет в.п. степеней, то $\mathbf{d}$ сама таким образом разложима по теореме Ямалеева.

Теперь рассмотрим формулу

$$\varphi(x) \doteq (\exists b > x)(\forall d)[x < d \leqslant b \to (\forall d_0, d_1)[d = d_0 \cup d_1 \to x \leqslant d_0 \vee x \leqslant d_1]].$$

Из вышеизложенного следует, что

$$\mathscr{D}_2 \models \varphi(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{a} \text{ в.п.}$$

Если бы выполнялась и обратная импликация $\mathbf{a}$ в.п. $\Rightarrow \mathscr{D}_2 \models \varphi(\mathbf{a})$, то определимость в.п. степеней в $\mathscr{D}_2$ была бы установлена. Однако не каждая в.п. степень обладает этим свойством. Действительно, если $\mathscr{D}_2 \models \varphi(\mathbf{a})$ для некоторой в.п. степени, то пусть $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ – такая d-в.п. степень, которая не разложима, минуя верхний конус степеней $\mathbf{a}$. Тогда между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нет в.п. степеней, за исключением $\mathbf{a}$; в этом случае говорят, что $\mathbf{a}$ *изолирует* $\mathbf{b}$. Но в работе автора, Лемппа и Шора [39] установлено, что между любыми двумя в.п. степенями $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1$ существует в.п. степень, которая не изолирует никакую d-в.п. степень. Для каждой такой степени $\mathbf{a}$ имеем $\mathscr{D}_2 \models \neg\varphi(\mathbf{a})$.

Следующая теорема показывает, что тем не менее существует бесконечная совокупность в.п. степеней $\mathbf{a}$, удовлетворяющих формуле φ.

Теорема 15 (Арсланов, Калимуллин, Лемпп [18]). *Существует бесконечно много различных d-в.п. степеней $\mathbf{d}$ и в.п. степеней $\mathbf{b} < \mathbf{d}$ таких, что любая d-в.п. степень $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} < \mathbf{a} \leqslant \mathbf{d}$, не разложима в d-в.п. степенях, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{b}$.*

Отсюда следует, что множество

$$\mathscr{S} = \{\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} | (\exists \mathbf{y} > \mathbf{x})(\forall \mathbf{z})(x < z \leqslant y \to (\forall \mathbf{z_0}, \mathbf{z_1})(\mathbf{z_0} \cup \mathbf{z_1} = \mathbf{z} \,\&\, \mathbf{z_0} \mid \mathbf{z_1} \to \mathbf{x} \leqslant \mathbf{z_0} \vee \mathbf{x} \leqslant \mathbf{z_1}))\}$$

состоит только из в.п. степеней, бесконечно и определимо в $\mathscr{D}_2$ формулой

$$\varphi(x) = (\exists \mathbf{y} > \mathbf{x})(\forall z)(x < z \leqslant y \to (\forall \mathbf{z_0}, \mathbf{z_1})(\mathbf{z_0} \cup \mathbf{z_1} = \mathbf{z} \,\&\, \mathbf{z_0} \mid \mathbf{z_1} \to \mathbf{x} \leqslant \mathbf{z_0} \vee \mathbf{x} \leqslant \mathbf{z_1}))\}.$$

Теперь предположим, что $\mathbf{d}$ – некоторая собственная d-в.п. степень. Для любого разложения $\mathbf{d}$ на две d-в.п. степени $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_1$ по крайней мере одна из степеней $\mathbf{d}_i$, $i \leqslant 1$, должна обладать следующим свойством.

Любая d-в.п. степень $\mathbf{u}$, $\mathbf{d}_i \leqslant \mathbf{u} \leqslant \mathbf{d}$, разложима на d-в.п. степени, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{d}_i$.

В противном случае по теореме Ямалеева для каждой степени $\mathbf{d}_i$, $i \leqslant 1$, между $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}$ существует в.п. степень, и, следовательно, степень $\mathbf{d}$ сама вычислимо перечислима (как наибольшая нижняя грань таких степеней).

Ответы на следующие вопросы пока не известны. (Из вышеизложенного следует, что положительный ответ на любой из них означает определимость в.п. степеней в $\mathscr{D}_2$.)

Вопрос 1. Верно ли, что каждая в.п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ является наименьшей верхней гранью двух несравнимых степеней из $\mathscr{S}$?

С этим вопросом связан также следующий: верно ли, что степени из $\mathscr{S}$ плотны среди в.п. степеней, т.е. верно ли, что между любыми двумя в.п. степенями $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ найдется некоторая степень из $\mathscr{S}$? Положительный ответ на этот вопрос немедленно влечет положительный ответ на вопрос 1: для этого разлагаем в.п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ на две несравнимые в.п. степени $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_1$ (по теореме Сакса о разложении это можно сделать) и между степенями $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_i$, $i \leqslant 1$, находим степени $\mathbf{b}_i \in \mathscr{S}$. Имеем $\mathbf{a} = \mathbf{b}_0 \cup \mathbf{b}_1$.

Вопрос 2. Верно ли, что для каждой в.п. степени $\mathbf{a}$ существует такое разложение на (d-в.п. степени) $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, что некоторые d-в.п. степени $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$ такие, что $\mathbf{a}_i < \mathbf{b}_i < \mathbf{a}$, не разложимы, минуя верхний конус степеней $\mathbf{a}_i$, для каждого $i \in \{0,1\}$?

Исследование проблемы определимости в.п. степеней в полурешетках $\mathscr{D}_n$, $n > 2$, также можно проводить по следующей схеме.

1) Пусть $1 \leqslant m < n$ и собственные n-в.п. степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ таковы, что $\mathbf{d} > \mathbf{b}$ и интервал $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$ не содержит m-в.п. степеней. Верно ли, что $\mathbf{d}$ разложима в n-в.п. степенях, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{b}$?

2) Каждая n-в.п. степень $\mathbf{a}$ разложима на две $(n+1)$-в.п. степени $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, так что существуют такие $(n+1)$-в.п. степени $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_i < \mathbf{b}_i < \mathbf{a}$, не разложимые в $(n+1)$-в.п. степени, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{a}_i$, для каждого $i \in \{0,1\}$.

Мы предполагаем, что для каждого $n \geqslant 1$ множества

$$\mathscr{S}_n = \{\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} | (\exists \mathbf{y} > \mathbf{x})(\forall z)(x < z \leqslant y \to (\forall \mathbf{z_0}, \mathbf{z_1})(\mathbf{z_0} \cup \mathbf{z_1} = \mathbf{z} \,\&\, \mathbf{z_0} \mid \mathbf{z_1} \to \mathbf{x} \leqslant \mathbf{z_0} \vee \mathbf{x} \leqslant \mathbf{z_1}))\}$$

n-в.п. степеней определимы в $\mathscr{D}_{n+1}$.

Мы также предполагаем, что это множество n-в.п. степеней порождает весь класс n-в.п. степеней и, таким образом, справедливо следующее свойство.

Для любого $n > 1$ n-в.п. степени равномерно определимы в $\mathscr{D}_{n+1}$.

Перейдем к рассмотрению вопросов определимости с параметрами.

Теорема 16. *Существует бесконечная совокупность в.п. степеней, каждая из которых определима в $\mathscr{D}_2$ с одним параметром из $\mathscr{D}_2 - \mathscr{R}$.*

Доказательство. Для любого $\mathbf{a} \in \mathscr{S}$ пусть $\mathbf{d}$ является такой степенью, что для любой степени $\mathbf{z}$ при $\mathbf{a} < \mathbf{z} \leqslant \mathbf{d}$ и $\mathbf{z_0} \cup \mathbf{z_1} = \mathbf{z}$ для некоторых d-в.п. степеней $\mathbf{z_0}$ и $\mathbf{z_1}$, и $\mathbf{z_0} \mid \mathbf{z_1}$, справедливо либо $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{z_0}$, либо $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{z_1}$. Ясно, что $\mathbf{d}$ не вычислимо перечислима и однозначно определяет в.п. степень $\mathbf{a}$. В частности, $S \cap [\mathbf{0}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{a}\}$.

Сламан и Вудин [40] доказали, что класс $\mathscr{R}$ в.п. степеней определим с параметрами в $\mathscr{D}$ $(\leqslant \mathbf{0}')$. Принципиальное место в их доказательство занимает следующая теорема.

Теорема 17 [40]. *Пусть $\mathscr{A}$ – равномерно низкое множество Δ^0_2-степеней, ограниченное некоторой низкой степенью $\mathbf{a}$. Тогда $\mathscr{A}$ определимо с параметрами в $\mathscr{D}$ $(\leqslant \mathbf{0}')$.*

Множество степеней $\mathscr{A}$ называется *равномерно низкой совокупностью*, если существуют последовательность множеств $\langle X(n) \mid n \in \omega\rangle$ и $\varnothing'$-вычислимая функция f такие, что $\{\deg(X(n)) \mid n \in \omega\} = \mathscr{A}$ и $\Phi^{\varnothing'}_{f(n)} = (X(n))'$.

Из теоремы 17 определимость $\mathscr{R}$ с параметрами в $\mathscr{D}$ $(\leqslant \mathbf{0}')$ выводится с помощью следующей теоремы.

Теорема 18 (Уэлш [41]). *Существуют две равномерно вычислимые совокупности в.п. степеней $\mathscr{A}_0$ и $\mathscr{A}_1$ такие, что каждая из них ограничена некоторой низкой степенью и каждая в.п. степень $\mathbf{a}$ является наименьшей верхней гранью $\mathbf{a}_0 \in \mathscr{A}_0$ и $\mathbf{a}_1 \in \mathscr{A}_1$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно креативное множество $K = \{\langle e, n\rangle \mid n \in W_e\}$ разложить по теореме Сакса на два низких T-несравнимых множества A_0 и A_1 и определить $\mathscr{A}_i = \{e \mid \langle e, n\rangle \in A_i\}_{n\in\omega}$, $i \leqslant 1$.

По теореме 18 класс $\mathscr{R}$ в.п. степеней определим с параметрами в $\mathscr{D}$ $(\leqslant \mathbf{0}')$.

В [15] была доказана следующая теорема.

Теорема 19. *Существуют d-в.п. множество E и в.п. множество D такие, что $\varnothing <_{\mathrm{T}} D <_{\mathrm{T}} D \oplus E$ и для любого 2-в.п. множества U, если $U \leqslant_{\mathrm{T}} D \oplus E$, то либо $D \leqslant_{\mathrm{T}} U$, либо $U \leqslant_{\mathrm{T}} D$.*

Нетрудно проверить, что удовлетворение дополнительного требования

$$(\forall e)(\exists\infty s)(\Phi_e^D(e)[s]\downarrow) \to \Phi_e^D(e)\downarrow,$$

которое позволяет в этой теореме сделать степень множества D низкой, легко сочетается с процессом удовлетворения всех остальных ее требований. Таким образом, существуют в.п. множества низкой степени, удовлетворяющие условиям приведенной теоремы. Нам не известно, существуют ли множества не низкой степени с этими свойствами, т.е. существуют ли такие d-в.п. степени $\mathbf{d} > \mathbf{0}$, у которых разложения на d-в.п. степени не могут быть низкими:

$$(\mathbf{d} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b}) \to \mathbf{a}' > \mathbf{0}' \,\&\, \mathbf{b}' > \mathbf{0}'.$$

Если бы приведенную выше теорему удалось усилить таким образом, то это бы означало, что описанный выше метод Сламана и Вудина принципиально не подходит для доказательства определимости n-в.п. степеней с параметрами в $\mathscr{D}$ $(\leqslant \mathbf{0}')$. А именно, n-в.п. степени при $n > 1$ в общем случае нельзя разложить на две низкие n-в.п. степени, в отличие от случая в.п. степеней.

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств, I”, *Алгебра и логика*, **7**:1 (1968), 47–74.

[2] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств, II”, *Алгебра и логика*, **7**:4 (1968), 15–47.

[3] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств, III”, *Алгебра и логика*, **9**:1 (1970), 34–51.

[4] E. M. Gold, “Limiting recursion”, *J. Symbolic Logic*, **30**:1 (1965), 28–48.

[5] H. Putnam, “Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski”, *J. Symbolic Logic*, **30**:1 (1965), 49–57.

[6] J. W. Addison, “The method of alternating chains”, *Theory of Models*, North Holland, Amsterdam, 1965, 1–16.

[7] R. Downey, “D.r.e. degrees and the nondiamond theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **21**:1 (1989), 43–50.

[8] R. I. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees. A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1987; Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. общ-во, Казань, 2001.

[9] S. B. Cooper, *Degrees of Unsolvability*, Ph.D. Thesis, Univ. of Leicester, 1971.

[10] R. L. Epstein, R. Haas, R. L. Kramer, “Hierarchies of sets and degrees below $0'$”, *Logic Year* 1979–80, Lecture Notes in Math., **859**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 32–48.

[11] М. М. Арсланов, “О структуре степеней ниже $0'$”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 7, 27–33.

[12] М. М. Арсланов, “Структурные свойства степеней ниже $0'$”, *Докл. АН СССР*, **283**:2 (1985), 270–273.

[13] D. P. Miller, “High recursively enumerable degrees and the anti-cupping property”, *Logic Year* 1979–80, Lecture Notes in Math., **859**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 230–245.

[14] A. H. Lachlan, “Lower bounds for pairs of recursively enumerable degrees”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **16**:1 (1966), 537–569.

[15] S. B. Cooper, L. Harrington, A. H. Lachlan, S. Lempp, R. I. Soare, “The d.r.e. degrees are not dense”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **55**:2 (1991), 125–151.

[16] А. А. Мучник, “Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгоритмов, I”, Тр. ММО, **7**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1958, 391–405.

[17] G. E. Sacks, *Degrees of Unsolvability*, Ann. of Math. Stud., **55**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.

[18] M. M. Arslanov, I. Sh. Kalimullin, S. Lempp, “On Downey's conjecture”, *J. Symbolic Logic*, **75**:2 (2010), 401–441.

[19] Y. Yang, L. Yu, “On Σ_1-structural differences among Ershov hierarchies”, *J. Symbolic Logic*, **71**:4 (2006), 1223–1236.

[20] М. М. Ямалеев, “Разложимость 2-вычислимо перечислимых степеней с избеганием конусов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 6, 76–80.

[21] R. A. Shore, “The recursively enumerable degrees”, *Handbook of Computability Theory*, Stud. Logic Found. Math., **140**, North-Holland, Amsterdam, 1999, 169–197.

[22] M. Lerman, “Embeddings into the recursively enumerable degrees”, *Computability, Enumerability, Unsolvability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **224**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 185–204.

[23] M. Lerman, *The Degrees of Unsolvability. Local and Global Theory*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[24] T. A. Slaman, R. I. Soare, “Algebraic aspects of the computably enumerable degrees”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **92**:2 (1995), 617–621.

[25] T. A. Slaman, R. I. Soare, “Extension of embeddings in the computably enumerable degrees”, *Ann. of Math.* (2), **154**:1 (2001), 1–43.

[26] A. H. Lachlan, “The elementary theory of recursively enumerable sets”, *Duke Math. J.*, **35**:1 (1968), 123–146.

[27] L. Feiner, “Hierarchies of Boolean algebras”, *J. Symbolic Logic*, **35**:3 (1970), 365–374.

[28] R. A. Shore, “Finitely generated codings and the degrees r.e. in a degree **d**”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1982), 256–263.

[29] M. Lerman, R. A. Shore, R. I. Soare, “The elementary theory of the recursively enumerable degrees is not $\aleph_0$-categorical”, *Adv. in Math.*, **53**:3 (1984), 301–320.

[30] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Наука, М., 1987.

[31] A. H. Lachlan, “A recursively enumerable degree which will not split over all lesser ones”, *Ann. Math. Logic*, **9**:4 (1976), 307–365.

[32] R. W. Robinson, “Interpolation and embedding in the recursively enumerable degrees”, *Ann. of Math.* (2), **93**:2 (1971), 285–314.

[33] S. B. Cooper, “A splitting theorem for the n-r.e. degrees”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:2 (1992), 461–471.

[34] S. B. Cooper, A. Li, “Turing definability in the Ershov hierarchy”, *J. London Math. Soc.* (2), **66**:3 (2002), 513–528.

[35] M. Arslanov, S. B. Cooper, A. Li, “There is no low maximal d.c.e. degree”, *MLQ Math. Log. Q.*, **46**:3 (2000), 409–416.

[36] M. Arslanov, S. B. Cooper, A. Li, “There is no low maximal d.c.e. degree – Corrigendum”, *MLQ Math. Log. Q.*, **50**:6 (2004), 628–636.

[37] A. Li, “The low splitting theorem in the difference hierarchy”, *New Computational Paradigms*, Lecture Notes in Comput. Sci., **3526**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 287–296.

[38] R. A. Shore, T. A. Slaman, “A splitting theorem for n-REA degrees”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:12 (2001), 3721–3728.

[39] M. M. Arslanov, S. Lempp, R. A. Shore, “On isolating r.e. and isolated d-r.e. degrees”, *Computability, Enumerability, Unsolvability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **224**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 61–80.

[40] T. A. Slaman, W. H. Woodin, “Definability in the Turing degrees”, *Illinois J. Math.*, **30**:2 (1986), 320–334.

[41] L. V. Welch, *A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a ntheorem on bounding minimal pairs*, Ph.D. Thesis, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.

Амальгамируемость, интерполяция и неявная определимость в многообразиях алгебр

Л. Л. Максимова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, *г. Новосибирск*

1. Введение

Проблемы зависимости между структурными свойствами классов алгебр и свойствами формальных языков, описывающих эти классы, алгоритмические проблемы различных теорий играют большую роль в научном творчестве выдающегося математика Мальцева, основателя теории алгебраических систем [1], [2].

Алгебраическая семантика логических систем послужила основой для применения алгебраических методов в исследованиях по логике. К числу фундаментальных теорем логики относятся интерполяционная теорема Крейга [3] и теорема Бета о неявной определимости [4].

Мы рассматриваем проблемы амальгамируемости, интерполяции и справедливости свойства Бета и их вариантов в многообразиях алгебр. Нас интересует вопрос: когда исследование этих проблем можно свести к изучению более узких классов, а именно классов финитно неразложимых алгебр? Мы укажем достаточные условия для такого сведения.

В тех случаях, когда такое сведение возможно (например, в табличных конгруэнц-дистрибутивных многообразиях), получаем эффективный метод проверки исследуемых свойств. Метод применим для исследования свойств, близких к амальгамируемости, и интерполяционных свойств в многообразиях алгебр, ассоциированных с модальными и суперинтуиционистскими логиками, а также с подструктурными логиками и многими другими. Во многих случаях удается доказать разрешимость свойств на классе табличных логик и многообразий.

Взаимосвязи категорных свойств многообразий и синтаксических свойств их эквациональных теорий были обнаружены в 60-е годы XX века. Были установлены связи интерполяционного свойства с амальгамируемостью, позднее замечена связь свойства Бета с сюръективностью эпиморфизмов. Соотношения различных версий интерполяционного свойства и свойства Бета с амальгамируемостью и сюръективностью эпиморфизмов в алгебраической логике рассматривались в [5]–[14] и других работах.

Более подробно были изучены модальные и суперинтуиционистские логики (см. [15], [16]). Результаты о связи синтаксических и категорных свойств в подструктурных логиках представлены в [17].

При исследовании модальных логик обнаружилась возможность сведения интерполяционного свойства, свойства Бета и амальгамируемости в многообразиях модальных алгебр к подходящим свойствам классов финитно неразложимых алгебр. Это сведение имело большое значение для доказательства разрешимости указанных свойств в многообразиях гейтинговых алгебр и алгебр замыкания и в табличных многообразиях модальных алгебр. В этой статье будет получено обобщение указанных результатов о сведении на другие многообразия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00090а), программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-3606.2010.1) и программы АВЦП Минобразования России "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 2.1.1.10726).

Будут найдены достаточные условия для подобного сведения. Это позволит доказать разрешимость исследуемых свойств во многих табличных многообразиях, т.е. многообразиях, порожденных конечным множеством конечных алгебр.

В п. 2.1 приведены определения амальгамируемости и родственных свойств. В. 2.2 дан краткий обзор результатов об интерполяции, свойствах определимости по Бету и амальгамируемости в многообразиях алгебр, связанных с модальными, суперинтуиционистскими и позитивными логиками, приведены результаты о разрешимости указанных свойств. В параграфе 3 дан обзор результатов о взаимосвязях категорных и синтаксических свойств многообразий алгебр. Параграф 4 посвящен проблеме сведения вариантов амальгамируемости, интерполяции и свойства Бета к финитно неразложимым алгебрам. В параграфе 5 найдены достаточные условия разрешимости рассматриваемых свойств в табличных многообразиях алгебр.

2. Основные сведения

2.1. Определения. Пусть V – класс алгебр. Напомним определения амальгамируемости AP, сверхамальгамируемости SupAP, сильной амальгамируемости StrAP, ограниченной амальгамируемости RAP, слабой амальгамируемости WAP, сюръективности эпиморфизмов ES* и сильной сюръективности эпиморфизмов SES.

Класс V *амальгамируем*, если он удовлетворяет условию

AP : Для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Класс V *сильно амальгамируем*, если он удовлетворяет условию

StrAP : AP с дополнительным условием

$$\delta(\mathbf{B}) \cap \varepsilon(\mathbf{C}) = \delta(\mathbf{A}).$$

Класс V обладает *свойством ограниченной амальгамируемости*, если выполнено условие

RAP : Для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и ограничение δ' отображения δ на $\mathbf{A}$ является мономорфизмом.

Класс V, в котором все алгебры частично упорядочены, называем *сверхамальгамируемым*, если он удовлетворяет условию

SupAP : AP с дополнительными условиями: для всех $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$

$$\delta(x) \leqslant \varepsilon(y) \iff (\exists\, z \in \mathbf{A})(x \leqslant z \text{ и } z \leqslant y),$$

$$\delta(x) \geqslant \varepsilon(y) \iff (\exists\, z \in \mathbf{A})(x \geqslant z \text{ и } z \geqslant y).$$

Рассмотрим также следующий слабый вариант свойства SupAP:

WSupAP : Если $\mathbf{A}$ – общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из V, то существуют $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и для всех $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$

$$\delta(x) \leqslant \varepsilon(y) \iff (\exists\, z \in \mathbf{A})(x \leqslant z \text{ и } z \leqslant y),$$

$$\delta(x) \geqslant \varepsilon(y) \iff (\exists\, z \in \mathbf{A})(x \geqslant z \text{ и } z \geqslant y).$$

Зафиксируем сигнатуру, состоящую из функциональных символов и констант и включающую две константы $\bot$ и $\top$. Алгебру $\mathbf{A}$ назовем *ограниченной*, если она удовлетворяет условию: $\mathbf{A} \models \bot = \top$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ одноэлементна. Рассмотрим многообразия, состоящие из ограниченных алгебр. В качестве примера можно взять ограниченные решетки, гейтинговы алгебры, модальные алгебры, булевы алгебры с операторами. Ограниченную алгебру называем *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов. Для многообразий ограниченных алгебр определим понятие *слабой амальгамируемости*.

WAP : для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ есть общая подалгебра $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$, где $\mathbf{D}$ невырожденная, если $\mathbf{A}$ невырожденная.

Определим также свойства *сюръективности эпиморфизмов* (ES*) и *сильной сюръективности эпиморфизмов* (SES).

ES* : для любых $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ из V, для любого мономорфизма $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и любого $x \in \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{A})$ такого, что $\{x\} \cup \alpha(\mathbf{A})$ порождает $\mathbf{B}$, существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $\beta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ и $\gamma\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha = \gamma\alpha$ и $\beta(x) \neq \gamma(x)$.

SES : для любых $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ из V, для любого мономорфизма $\alpha\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и любого $x \in \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{A})$ существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $\beta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ и $\gamma\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha = \gamma\alpha$ и $\beta(x) \neq \gamma(x)$.

В любых многообразиях алгебр имеем

$$\mathrm{StrAP} \implies \mathrm{AP} \implies \mathrm{RAP} \implies \mathrm{WAP}, \qquad \mathrm{StrAP} \implies \mathrm{SES} \implies \mathrm{ES}^*.$$

В общем случае обратные импликации неверны. Кроме того,

$$\mathrm{ES}^* \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{WAP}, \quad \mathrm{AP} \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{ES}^*, \qquad \mathrm{StrAP} \iff \mathrm{AP}\&\mathrm{ES}^*$$

(см. теорему 3.14).

В многообразиях частично упорядоченных алгебр

$$\mathrm{SupAP} \Rightarrow \mathrm{StrAP}, \qquad \mathrm{SupAP} \Rightarrow \mathrm{WSupAP} \Rightarrow \mathrm{SES}.$$

Важную роль в наших рассмотрениях имеет свойство продолжаемости конгруэнций. Известно, что все многообразия модальных и гейтинговых алгебр обладают *свойством продолжаемости конгруэнций.*

CEP : для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$, где $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$, любая конгруэнция Φ на $\mathbf{A}$ может быть продолжена до конгруэнции Ψ на $\mathbf{B}$ такой, что ограничение отношения Ψ на алгебру $\mathbf{A}$ совпадает с Φ.

Обзоры по категорным свойствам классов алгебр, их соотношениям и взаимосвязям с синтаксическими свойствами теорий можно найти в [7], [11], [18]–[20]. Мы ограничимся несколькими примерами.

Многообразие $\mathscr{L}_{01}$ всех ограниченных решеток сверхамальгамируемо, а значит, имеет также StrAP, AP и SES [21]. С другой стороны, $\mathscr{L}_{01}$ не имеет CEP.

Многообразие $\mathscr{DL}$ дистрибутивных решеток имеет свойство продолжаемости конгруэнций CEP [22]. Это верно и для дистрибутивных решеток с псевдодополнениями [23]. С другой стороны, отсутствие дистрибутивности часто влечет отсутствие свойства CEP. Можно доказать, что единственное нетривиальное многообразие решеток со свойством CEP – это многообразие дистрибутивных решеток. Многообразие решеток с псевдодополнениями не имеет CEP [21].

Напомним, что *решетка с псевдодополнениями* – это ограниченная решетка с дополнительной операцией $\neg$, удовлетворяющая условию

$$x \wedge y = \bot \iff x \leqslant \neg y. \tag{1}$$

Многообразие $\mathscr{DP}$ всех дистрибутивных решеток с псевдодополнениями имеет свойство амальгамируемости AP [23]. Только три его собственных нетривиальных подмногообразия имеют AP [23], в частности, многообразие *алгебр Стоуна* (удовлетворяющих дополнительному тождеству $\neg x \vee \neg\neg x = 1$) и многообразие булевых алгебр. Единственное нетривиальное подмногообразие многообразия $\mathscr{DP}$ имеет SupAP и StrAP – это многообразие $\mathscr{B}$ булевых алгебр. Остальные подмногообразия не имеют ни ES*, ни SupAP, ни StrAP [21]. Все подмногообразия многообразия $\mathscr{DP}$ имеют WAP [14].

2.2. Многообразия, ассоциированные с логиками. Алгебраическая семантика логических систем послужила основой для применения алгебраических методов в исследованиях по логике. К числу фундаментальных теорем логики относятся интерполяционная теорема Крейга [3] и теорема Бета о неявной определимости [4]. Имеется большое число работ по проблеме интерполяции и связанной с ней проблеме амальгамируемости в классах алгебр, ассоциированных с неклассическими логиками [6], [13], [15], [17].

Приведем краткий обзор результатов по проблеме амальгамируемости и свойствам Бета в многообразиях модальных и гейтинговых алгебр, а также близких к ним алгебр. Интерес к этой проблеме был вызван равносильностью интерполяционных свойств модальной или суперинтуиционистской логики и амальгамируемости соответствующего многообразия алгебр, обнаруженной в [15], [24], [25]. В частности, интуиционистская пропозициональная логика Int характеризуется многообразием гейтинговых алгебр, а любая суперинтуиционистская логика – подходящим подмногообразием этого многообразия. Суперинтуиционистская логика L обладает интерполяционным свойством Крейга тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие гейтинговых алгебр $V(L)$ амальгамируемо; кроме того, в случае гейтинговых алгебр амальгамируемость равносильна сверхамальгамируемости. *Интерполяционное свойство Крейга* определяется следующим образом.

CIP : если в L верна импликация $A \to B$, то существует интерполянт, т.е. такая формула C, что в L верны $A \to C$ и $C \to B$ и все переменные формулы C входят одновременно в A и в B.

В модальных логиках свойство CIP эквивалентно сверхамальгамируемости соответствующего многообразия модальных алгебр, а амальгамируемость равносильна *дедуктивному интерполяционному свойству.*

IPD : если $A \vdash_L B$, то существует такая формула C, что $A \vdash_L C$ и $C \vdash_L B$ и все переменные формулы C входят одновременно в A и в B.

Свойства сюръективности эпиморфизмов SES и ES* в модальных и суперинтуиционистских логиках равносильны [26], [15] соответственно *свойствам Бета* PB2 и B2:

PB2 : пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие y и z, $A(\mathbf{x},\mathbf{q},y)$ – формула. Если $A(\mathbf{x},\mathbf{q},y), A(\mathbf{x},\mathbf{q}',z) \vdash_L (y \leftrightarrow z)$, то $A(\mathbf{x},\mathbf{q},y) \vdash_L (y \leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{x})$.

B2 : удаляя $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ из PB2, получаем свойство B2.

Напомним некоторые определения. *Импликативная решетка* (или *решетка с относительными псевдодополнениями*) – это алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \top)$ с решеточными операциями $\wedge, \vee$, наибольшим элементом $\top$ и дополнительной операцией относительного псевдодополнения, т.е.

$$z \leqslant x \to y \iff z \wedge x \leqslant y.$$

Алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \top, \bot)$, где $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \top)$ есть импликативная решетка, а $\bot$ – произвольный элемент множества A, называется J-*алгеброй. Гейтингова алгебра* – это J-алгебра, в которой $\bot$ является наименьшим элементом.

Модальной алгеброй называется алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \neg, \top, \Box)$, где $(A, \wedge, \neg, \top)$ есть булева алгебра, а одноместная операция $\Box$ удовлетворяет условиям

$$\Box\top = \top, \qquad \Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y.$$

Модальная алгебра называется *транзитивной*, если на ней выполнено неравенство

$$\Box x \leqslant \Box\Box x.$$

Транзитивная модальная алгебра называется *топобулевой алгеброй*, если удовлетворяет $\Box x \leqslant x$, и *диагонализируемой алгеброй*, если

$$\Box(\Box x \to x) \leqslant \Box x, \qquad \text{где} \quad y \to z = \neg(y \wedge \neg z).$$

Топобулева алгебра называется *эпистемической*, если выполнено

$$x \leqslant \Box\Diamond x, \qquad \text{где} \quad \Diamond x = \neg\Box\neg x,$$

и *гжегорчиковой алгеброй*, если

$$\Box(\Box(x \to \Box x) \to x) \leqslant x.$$

Известно, что все указанные многообразия имеют свойство CEP. Многообразия всех импликативных решеток, J-алгебр и гейтинговых алгебр, булевых алгебр, а также всех модальных алгебр, транзитивных модальных алгебр, топобулевых, диагонализируемых, эпистемических и гжегорчиковых алгебр сверхамальгамируемы. Кроме того, имеется лишь конечное число амальгамируемых многообразий топобулевых алгебр [27], [15] и конечное число амальгамируемых многообразий гейтинговых алгебр [24], хотя семейства многообразий топобулевых и гейтинговых алгебр имеют мощность континуума. Напротив, существует континуум амальгамируемых многообразий диагонализируемых алгебр [15]. При этом семейство неамальгамируемых многообразий диагонализируемых алгебр также имеет мощность континуума. Слабая амальгамируемость существенно отличается от ограниченной амальгамируемости и, тем более, от амальгамируемости. В частности, все многообразия диагонализируемых алгебр, гжегорчиковых и гейтинговых алгебр слабо амальгамируемы [14]. С другой стороны для класса эпистемических алгебр слабая амальгамируемость эквивалентна сильной амальгамируемости [28], поэтому все свойства, кроме ES*, равносильны.

В многообразиях модальных алгебр имеет место [12], [14], [15], [21]

$$\begin{gathered}\mathrm{SupAP} \iff \mathrm{WSupAP} \implies \mathrm{StrAP} \implies \mathrm{AP} \implies \mathrm{RAP} \implies \mathrm{WAP},\\ \mathrm{StrAP} \iff \mathrm{AP}\,\&\,\mathrm{ES}^* \implies \mathrm{SES} \implies \mathrm{ES}^*.\end{gathered}$$

В общем случае обратные импликации неверны. Кроме того,

$$\mathrm{ES}^* \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{WAP}. \qquad \mathrm{AP} \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{ES}^*.$$

Все многообразия модальных транзитивных алгебр имеют ES* [29], [15]. В многообразиях модальных транзитивных алгебр справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\mathrm{SupAP} \iff \mathrm{WSupAP} \implies \mathrm{StrAP} \iff \mathrm{AP} \implies \mathrm{SES} \implies \mathrm{RAP} \implies \mathrm{WAP},\\ \mathrm{StrAP} \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{SupAP}, \qquad \mathrm{SES} \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{AP}, \qquad \mathrm{WAP} \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{RAP}.\end{gathered}$$

В многообразиях эпистемических алгебр [28]:

$$\mathrm{SupAP} \iff \mathrm{StrAP} \iff \mathrm{AP} \iff \mathrm{SES} \iff \mathrm{RAP} \iff \mathrm{WAP}.$$

Для многообразий гейтинговых и гжегорчиковых алгебр и импликативных решеток имеем [30], [31]:

$$\mathrm{SupAP} \iff \mathrm{StrAP} \iff \mathrm{AP} \implies \mathrm{RAP} \iff \mathrm{SES}, \qquad \mathrm{SES} \;\not\Longrightarrow\; \mathrm{AP},$$

все указанные многообразия имеют ES* [15]; как было сказано выше, все многообразия гейтинговых и гжегорчиковых алгебр имеют WAP [14].

Полностью описаны многообразия гейтинговых и гжегорчиковых алгебр и импликативных решеток со свойствами амальгамируемости и сильной сюръективности эпиморфизмов [32]–[34]. В [15] указан список всех амальгамируемых многообразий топобулевых алгебр; установлено, что число амальгамируемых многообразий топобулевых алгебр не более 49 и не менее 43; все они конечно базируемы и порождаются своими конечными алгебрами. Найден эффективный критерий слабой амальгамируемости многообразий транзитивных модальных алгебр [35].

Найденные описания позволили доказать разрешимость алгоритмических проблем, связанных с интерполяцией и свойствами Бета в важных классах неклассических логик, с одной стороны, и с амальгамируемостью и сюръективностью эпиморфизмов в многообразиях соответствующих алгебр – с другой. Более точно, следующие свойства являются разрешимыми:

- интерполяционное свойство Крейга и дедуктивное интерполяционное свойство в суперинтуиционистских и позитивных исчислениях, а также в модальных исчислениях, содержащих модальную логику S4 [24], [27], [15];
- амальгамируемость, сильная амальгамируемость и сверхамальгамируемость в многообразиях топобулевых и гейтинговых алгебр и импликативных решеток [24], [27], [15];
- проективное свойство Бета над интуиционистской логикой и над логикой Гжегорчика, а также в позитивных логиках [36], [34], [33];
- сильная сюръективность эпиморфизмов и ограниченная амальгамируемость в многообразиях гейтинговых и гжегорчиковых алгебр и импликативных решеток [36], [34], [30], [33], [31];
- слабое интерполяционное свойство над модальной логикой K4 [35];
- слабая амальгамируемость в многообразиях транзитивных модальных алгебр [35].

Под разрешимостью свойства P над логикой L мы понимаем существование алгоритма, который по любой конечной системе схем аксиом, добавляемых к стандартным аксиомам и правилам логики L, определяет, обладает ли полученное в итоге исчисление свойством P. Свойство P считается разрешимым, например, в многообразиях гейтинговых алгебр, если существует алгоритм, который по любой конечной системе тождеств определяет, обладает ли свойством P подмногообразие гейтинговых алгебр, удовлетворяющих этим тождествам.

Все указанные выше свойства являются разрешимыми также в табличных модальных, суперинтуиционистских и позитивных логиках и соответствующих многообразиях [37] (см. далее теорему 5.1). Логика (или многобразие) называется *табличной*, если порождается конечным числом конечных алгебр. Под разрешимостью свойства P в табличных логиках понимается существование алгоритма, который по любой заданной конечной системе конечных алгебр определяет, обладает ли свойством P логика, порожденная этой системой.

3. Интерполяция, амальгамируемость и свойства Бета

В этом параграфе будет дан обзор результатов о взаимосвязях категорных и синтаксических свойств многообразий алгебр. Свойство амальгамируемости классов алгебр связано с интерполяционными свойствами их эквационаьных теорий. Различные варианты свойства Бета равносильны подходящим вариантам свойства сюръективности эпиморфизмов. Соотношения различных версий интерполяционного свойства и свойства Бета с амальгамируемостью и сюръективностью эпиморфизмов в алгебраической логике рассматривались в [5], [7]–[12], [14], [15], [18] и других работах.

Приведем ряд определений. Зафиксируем произвольную сигнатуру, состоящую из функциональных символов и/или констант. Для данного множества переменных $\mathbf{x}$ через $t(\mathbf{x})$ обозначим любой терм, все переменные которого входят в $\mathbf{x}$, а через $F(\mathbf{x})$ – множество всех таких термов. Для данной алгебры $\mathbf{A}$ *означиванием* в $\mathbf{A}$ называется любой гомоморфизм алгебры термов в алгебру $\mathbf{A}$. Если $t = t'$ – равенство двух термов и v – означивание, говорим, что $t = t'$ *выполнено в* $\mathbf{A}$ *при означивании* v и пишем $\mathbf{A} \models (t = t')[v]$, если $v(t) = v(t')$.

Если Γ – множество равенств и γ – равенство, то для любого многообразия V определим:

$$\Gamma \models_V \gamma \iff (\forall\, \mathbf{A} \in V)(\forall\, v)(\mathbf{A} \models \Gamma[v] \Longrightarrow \mathbf{A} \models \gamma[v]).$$

Отметим, что отношение $\models_V$ можно заменить на синтаксическое отношение выводимости в эквациональной логике. Поэтому отношение $\models_V$ является компактным, т.е.

$$\Gamma \models_V \gamma, \text{ если и только если } \Gamma_0 \models_V \gamma \text{ для некоторого конечного } \Gamma_0 \subseteq \Gamma.$$

Для доказательств используется представление алгебр с помощью множества порождающих и определяющих соотношений [2].

Пусть фиксирована сигнатура Σ, состоящая из функциональных символов и/или констант. Если $\mathbf{x}$ – множество переменных, через $F(\mathbf{x})$ обозначаем множество всех термов данной сигнатуры от переменных из $\mathbf{x}$. Пусть заданы многообразие V сигнатуры Σ и алгебра $\mathbf{A} \in V$. Зафиксируем некоторое множество X порождающих алгебры $\mathbf{A}$. Каждому элементу $a \in X$ ставим в соответствие переменную p_a, обозначим $\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in X\}$. Определяем каноническое означивание $v_0(p_a) = a$. На множестве $F(\mathbf{x})$ определим отношение

$$t =_{\mathbf{A}} t' \iff \mathbf{A} \models v_0(t) = v_0(t').$$

Предложение 3.1. *Отношение* $=_{\mathbf{A}}$ *есть конгруэнция на* $F(\mathbf{x})$ *и существует изоморфизм* φ_0 *между* $F(\mathbf{x})/{=_{\mathbf{A}}}$ *и* $\mathbf{A}$ *такой, что* $\varphi_0(t/{=_{\mathbf{A}}}) = v_0(t)$ *для любого* $t \in F(\mathbf{x})$.

Для данной алгебры $\mathbf{A}$ с множеством порождающих X обозначаем

$$D^+(\mathbf{A}, X) = \{\delta(\mathbf{x}) \mid \mathbf{A} \models \delta(\mathbf{x})[v_0]\}.$$

Если X совпадает с $\mathbf{A}$, то обозначаем

$$D^+(\mathbf{A}) = D^+(\mathbf{A}, X).$$

Стандартным способом доказываются следующие утверждения.

Предложение 3.2. *Если* $\mathbf{B} \models D^+(\mathbf{A}, X)[v]$ *для некоторой алгебры* $\mathbf{B}$ *и означивания* v, *то отображение* $h(a) = v(p_a)$ *можно продолжить до гомоморфизма из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{B}$.

Если Θ – конгруэнция на $\mathbf{A}$, то запись $(a = a') \in \Theta$ означает, что $(a, a') \in \Theta$.

Предложение 3.3. *Пусть* V *– многообразие. Тогда* $\Gamma \models_V \gamma$, *если и только если для любой алгебры* $\mathbf{A} \in V$, *для любого означивания* v *в* $\mathbf{A}$ *и для любой конгруэнции* Θ *на* $\mathbf{A}$ *из* $\Gamma[v] \subseteq \Theta$ *следует* $\gamma[v] \in \Theta$.

Предложение 3.4. *Пусть* V *– многообразие,* $\mathbf{A} \in V$, X *– множество порождающих алгебры* $\mathbf{A}$, $\Gamma \cup \{\delta\}$ *– некоторое множество равенств от переменных из* $\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in X\}$, Φ *– конгруэнция на* $\mathbf{A}$, *порожденная множеством* $v_0(\Gamma)$. *Тогда*

$$v_0(\delta) \in \Phi \iff D^+(\mathbf{A}, X),\ \Gamma \models_V \delta.$$

В частности, для любых термов $t = t(\mathbf{x})$, $t' = t'(\mathbf{x})$ *выполняется*

$$v_0(t) = v_0(t') \iff D^+(\mathbf{A}, X) \models_V t = t'.$$

Вторая часть утверждения следует из первой при пустом Γ.

3.1. Амальгамируемость и интерполяция. Определим ряд интерполяционных свойств. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ – произвольные множества равенств, $\delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ – равенство. Следующее свойство (*интерполяционный принцип для равенств*) рассматривалось в [38]:

EIP : если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $F(\mathbf{x}) \neq \varnothing$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

В добавление мы определим свойство IPR *ограниченной интерполяции*:

IPR : если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$.

Ясно, что IPR – частный случай EIP.

Хотя IPR не симметрично, из него выводится симметричная форма IPR:

если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, то существуют $\Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Delta'(\mathbf{x})$ такие, что $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$, $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta$ для всех $\delta \in \Delta'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}),\Delta'(\mathbf{x}) \models_V \delta(\mathbf{x})$.

Для вывода достаточно применить IPR еще раз к выражению $\Gamma'(\mathbf{x}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, поменяв местами $\Gamma'(\mathbf{x})$, $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

Рассмотрим также частный случай IPR при пустом $\mathbf{z}$, а именно,

WRIP : если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}),\Delta(\mathbf{x}) \models_V \delta(\mathbf{x})$.

Для классов частично упорядоченных алгебр определим *интерполяционный принцип для неравенств*:

IIP : пусть $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \qquad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant v(\mathbf{x},\mathbf{z})$, то существует терм $t(\mathbf{x})$ такой, что

$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant t(\mathbf{x}), \qquad \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Слабое интерполяционное свойство WIP определяем для классов ограниченных алгебр:

если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \bot = \top$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \bot = \top$.

Под *ограниченной алгеброй* понимаем частично упорядоченную алгебру с наименьшим и наибольшим элементами $\bot$ и $\top$. Ясно, что WIP является частным случаем IPR.

Теорема 3.5. *Для любого многообразия V:*

- EIP *равносильно конъюнкции* AP & CEP [38];
- IPR *равносильно конъюнкции* RAP & CEP [12];
- *если V – многообразие ограниченных алгебр, то* WAP & CEP $\Rightarrow$ WIP $\Rightarrow$ WAP [14];
- CEP *равносильно* WRIP [8].

Как мы видим, в случае многообразий со свойством продолжаемости конгруэнций CEP свойство амальгамируемости равносильно свойству EIP. Однако в общем случае это не так [8]. Следующий эквивалент амальгамируемости в произвольных многообразиях найден в [8] (где это свойство обозначено через ROB*):

EIP* : пусть $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \qquad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}),\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x},\mathbf{z})$, то $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

Введем также следующие свойства:

IPR*: пусть $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \qquad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$, то $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$;

WIP*: пусть $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \qquad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \bot = \top$, то $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \bot = \top$.

Теорема 3.6. *Для любого многообразия* V:
(1) AP *равносильно* EIP*;
(2) RAP *равносильно* IPR*;
(3) *если* V *– многообразие ограниченных алгебр, то* WAP *равносильно* WIP*.

Доказательство. (1) Доказано в [8]. Приведем доказательство для (2). Аналогично доказывается (3).

RAP $\Rightarrow$ IPR*. Пусть $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\},$$
$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x}).$$

Докажем, что $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$.

На множестве термов $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определяем конгруэнцию

$$t(\mathbf{x},\mathbf{y}) \approx_1 t'(\mathbf{x},\mathbf{y}) \iff \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V t(\mathbf{x},\mathbf{y}) = t'(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

а на множестве $F(\mathbf{x},\mathbf{z})$ – конгруэнцию

$$t(\mathbf{x},\mathbf{z}) \approx_2 t'(\mathbf{x},\mathbf{z}) \iff \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x},\mathbf{z}) = t'(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Положим $\mathbf{B}' = F(\mathbf{x},\mathbf{y})/{\approx_1}$, $\mathbf{C} = F(\mathbf{x},\mathbf{z})/{\approx_2}$. Очевидно, $\mathbf{B}', \mathbf{C} \in V$.

Пусть $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{C}$, порожденная множеством $\mathbf{x}/{\approx_2}$. Из условия $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$ следует, что $t(\mathbf{x}) \approx_1 t'(\mathbf{x}) \iff t(\mathbf{x}) \approx_2 t'(\mathbf{x})$ для любых термов $t(\mathbf{x}), t'(\mathbf{x})$, а значит, отображение $\varphi(t(\mathbf{x})/{\approx_2}) = (t(\mathbf{x})/{\approx_1})$ является мономорфизмом из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}'$. Отображение φ^{-1} можно продолжить до изоморфизма ψ из $\mathbf{B}'$ на подходящую алгебру $\mathbf{B}$ такую, что $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$. В силу RAP существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и ограничение ε' отображения ε на $\mathbf{A}$ является мономорфизмом.

В алгебре $\mathbf{D}$ определим означивание v:

$$v(y) = \delta\psi(y/{\approx_1}) \quad \text{для} \quad y \in \mathbf{x} \cup \mathbf{y}, \qquad v(z) = \varepsilon(z/{\approx_2}) \quad \text{для} \quad z \in \mathbf{x} \cup \mathbf{z}.$$

Определение корректно, так как выполняется $\delta\psi(x/{\approx_1}) = \varepsilon(x/{\approx_2})$ при $x \in \mathbf{x}$. По построению алгебры $\mathbf{B}$ получаем $\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})[v]$, а по построению алгебры $\mathbf{C}$ имеем $\mathbf{D} \models \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})[v]$. Следовательно, $\mathbf{D} \models \tau(\mathbf{x})[v]$. Отсюда, так как ε' – мономорфизм, получаем $\mathbf{C} \models \tau(\mathbf{x})[v_0]$, где $v_0(x) = x/{\approx_2}$. По определению алгебры $\mathbf{C}$ отсюда следует, что $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$.

IPR* $\Rightarrow$ RAP. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Обозначим

$$\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in \mathbf{A}\}, \qquad \mathbf{y} = \{p_a \mid a \in \mathbf{B} - \mathbf{A}\}, \qquad \mathbf{z} = \{p_a \mid a \in \mathbf{C} - \mathbf{A}\}.$$

На множестве $F(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ положим

$$t\Theta t' \iff D^+(\mathbf{B}), D^+(\mathbf{C}) \models_V t = t'.$$

Тогда Θ является конгруэнцией на $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Обозначим

$$\mathbf{D} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})/\Theta$$

и положим

$$g(b) = p_b/\Theta \quad \text{для} \quad b \in \mathbf{B}, \qquad h(c) = p_c/\Theta \quad \text{для} \quad c \in \mathbf{B}.$$

Тогда по предложению 3.2 g, h – гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно в алгебру $\mathbf{D}$, причем $g(a) = h(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.

Покажем, что ограничение гомоморфизма g на алгебру $\mathbf{A}$ является мономорфизмом. Пусть $a, b \in \mathbf{A}$ и $g(a) = g(b)$. Тогда по определению алгебры $\mathbf{D}$ получаем

$$D^+(\mathbf{B}), D^+(\mathbf{C}) \models_V p_a = p_b.$$

Поскольку $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, для любого равенства $\tau(\mathbf{x})$ выполняется

$$D^+(\mathbf{B}) \models_V \tau(\mathbf{x}) \iff D^+(\mathbf{C}) \models_V \tau(\mathbf{x}).$$

По IPR* получаем

$$D^+(\mathbf{C}) \models_V p_a = p_b.$$

По предложению 3.4 отсюда следует $a = b$, что и требовалось.

В [21] найден алгебраический эквивалент для свойства IIP в многообразиях алгебр, основанных на решетках. Доказательство верно и для *полурешеточно упорядоченных алгебр*, т.е. алгебр, в сигнатуре которых присутствует операция $\wedge$, которая интерпретируется как точная нижняя грань.

Теорема 3.7 [21]. *Пусть V – многообразие полурешеточно упорядоченных алгебр. Тогда*
- WSupAP *равносильно* IIP;
- SupAP *равносильно конъюнкции* IIP & EIP*.

Поскольку существуют амальгамируемые многообразия без свойства SupAP, из теоремы 3.7 следует, что в общем случае IIP не следует из AP.

Рассмотрим случай, когда в рассматриваемом многообразии наряду с операцией $\wedge$ взятия точной нижней грани, существуют термы $\mathbf{e}(x, y)$ и $\mathbf{t}$ без переменных, определяющие равенство, т.е. удовлетворяющие условию

$$\mathrm{EQ}: x = y \iff \mathbf{t} \leqslant \mathbf{e}(x, y).$$

Примерами таких многообразий могут служить многообразия булевых алгебр с операторами, гейтинговых алгебр и алгебр, связанных с нечеткими, подструктурными и релевантными логиками.

Предложение 3.8. *В многообразиях, удовлетворяющих условию* EQ, *выполнено*

$$\mathrm{WSupAP} \implies \mathrm{SupAP}.$$

Доказательство. Учитывая теорему 3.7, выведем EIP* из IIP. Пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \qquad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}.$$

Пусть

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t_1 = t_2, \qquad \text{где} \quad t_1 = t_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad t_2 = t_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Докажем, что $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t_1 = t_2$.

По условию EQ получаем

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \mathbf{t} \leqslant \mathbf{e}(t_1, t_2).$$

По IIP существует $t(\mathbf{x})$ такой, что

$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \mathbf{t} \leqslant t(\mathbf{x}), \qquad \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{e}(t_1,t_2).$$

Отсюда $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \mathbf{t} \wedge t(\mathbf{x}) = \mathbf{t}$, а значит, $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \mathbf{t} \leqslant t(\mathbf{x})$, поскольку $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$. Поэтому $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \mathbf{t} \leqslant \mathbf{e}(t_1,t_2)$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V t_1 = t_2$.

Из этого предложения и теоремы 3.7 сразу вытекает

Следствие 3.9. *Для любого многобразия, удовлетворяющего условию* EQ, *свойства* IIP, SupAP *и* WSupAP *равносильны.*

3.2. Свойства Бета и сюръективность эпиморфизмов. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие y и z, $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{q},y)$ – некоторое множество формул. Говорим, что многобразие V имеет *проективное свойство Бета* PBP, если выполнено условие:

$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{q},y), \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{q}',z) \models_V y = z$, где $F(\mathbf{x}) \neq \varnothing$ влечет $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{q},y) \models_V y = t(\mathbf{x})$ для некоторого терма $t(\mathbf{x})$.

Многобразие V имеет *свойство Бета* BP, если удовлетворяет условию:

из $\Gamma(\mathbf{x},y), \Gamma(\mathbf{x},z) \models_V y = z$, где $F(\mathbf{x}) \neq \varnothing$, следует $\Gamma(\mathbf{x},y) \models_V y = t(\mathbf{x})$ для некоторого терма $t(\mathbf{x})$.

Рассмотрим также *финитарное свойство Бета* FBP:

пусть $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_n)$ и для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}), \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V y_i = z_i$, где $F(\mathbf{x}) \neq \varnothing$. Тогда существуют термы $t_i(\mathbf{x})$ такие, что $\Gamma(\mathbf{x},y) \models_V y_i = t_i(\mathbf{x})$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ясно, что PBP $\Rightarrow$ FBP $\Rightarrow$ BP.

Заметим, что можно вывести FBP из BP [26], [11].

Предложение 3.10. *Для любого многобразия свойства* FBP *и* BP *равносильны.*

Доказательство. Индукция по n. Пусть для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n), \Gamma(\mathbf{x},z_1,\ldots,z_n) \models_V y_i = z_i,$$

где $F(\mathbf{x}) \neq \varnothing$. При $n = 1$ требуемый терм существует по BP.

Пусть $n > 1$. Тогда по BP существует терм $t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1})$ такой, что

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n) \models_V y_n = t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1}).$$

Подставим в исходное соотношение $t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1})$ вместо y_n и $t(\mathbf{x},z_1,\ldots,z_{n-1})$ вместо z_n. Получаем для всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1},t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1})), \Gamma(\mathbf{x},z_1,\ldots,z_{n-1},t(\mathbf{x},z_1,\ldots,z_{n-1})) \models_V y_i = z_i.$$

По индукционной гипотезе для всех $i \leqslant n-1$ существуют термы $t_i(\mathbf{x})$ такие, что

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1},t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1})) \models_V y_i = t_i(\mathbf{x}).$$

Учитывая, что

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n), y_n = t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1}) \models_V \Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1},t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1})),$$

и что равенство $y_n = t(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_{n-1})$ выводится из $\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n)$, получаем, что для всех $i \leqslant n-1$ выполняется

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n) \models_V y_i = t_i(\mathbf{x}).$$

Следовательно,

$$\Gamma(\mathbf{x},y_1,\ldots,y_n) \models_V y_n = t(\mathbf{x},t_1(\mathbf{x}),\ldots,t_{n-1}(\mathbf{x})).$$

Известно, что свойство Бета не следует из интерполяционного свойства EIP: существует контрпример в многобразиях модальных алгебр [15]. Однако легко вывести PBP из IIP.

Предложение 3.11. *Для любого многообразия частично упорядоченных алгебр проективное свойство Бета* PBP *следует из* IIP.

Доказательство. Пусть $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x), \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V x = y$. Тогда

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x), \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V x \leqslant y.$$

Ясно, что для любого $\delta(\mathbf{p})$ выполнено условие

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \models_V \delta(\mathbf{p}) \iff \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V \delta(\mathbf{p}).$$

По IIP существует терм $t(\mathbf{p})$ такой, что $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \models_V x \leqslant t(\mathbf{p})$ и $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V t(\mathbf{p}) \leqslant y$. Отсюда $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \models_V x = t(\mathbf{p})$.

Таким образом, в многообразиях частично упорядоченных алгебр выполнено

$$\mathrm{IIP} \implies \mathrm{PBP} \implies \mathrm{FBP} \iff \mathrm{BP}.$$

Кроме того,

$$\mathrm{PBP} \not\Longrightarrow \mathrm{IIP}, \qquad \mathrm{BP} \not\Longrightarrow \mathrm{PBP}$$

(см. [32]).

Укажем алгебраические эквиваленты для свойств Бета.

Теорема 3.12. *Для любого многообразия алгебр*:

(1) *проективное свойство Бета* PBP *равносильно* SES;

(2) *свойство Бета* BP *равносильно* ES^*.

Доказательство. (1) Доказано в [26] для многообразий модальных и гейтинговых алгебр, доказательство легко переносится на общий случай [11].

(2) Доказано в [25].

Другой эквивалент свойства Бета BP был найден ранее Немети [39, теорема 5.6.10]:

RES: пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$ и h – гомоморфизм из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ порождается множеством $h(\mathbf{A}) \cup \{a\}$ для некоторого $a \in \mathbf{B}$; если для любых гомоморфизмов k, l алгебры $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C} \in V$ выполняется $kh = lh \Rightarrow k = l$, то $h(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$.

В дополнение укажем эквивалент свойства Бета в терминах максимальных подалгебр:

ESM: если $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B} \in V$, то существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g \neq h$.

Предложение 3.13. *Для любого многообразия свойство* ES^* *равносильно свойству* ESM.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть V имеет ES^* и $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B}$. Существует $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A} \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}$ и по ES^* существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.

$\Leftarrow$. Пусть $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}$. Рассмотрим

$$\Sigma = \{\mathbf{A}' \mid \mathbf{A}' \text{ – подалгебра алгебры } \mathbf{B},\ \mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}',\ b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}'\}.$$

Тогда Σ удовлетворяет условиям леммы Цорна, а значит, имеет максимальный элемент $\mathbf{A}_1$. Покажем, что $\mathbf{A}_1$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B}$. Допустим, что собственная подалгебра $\mathbf{A}'$ алгебры $\mathbf{B}$ содержит $\mathbf{A}_1$. Тогда $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}'$, а значит, $\mathbf{A}' \in \Sigma$ и $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_1$.

По ESM существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}_1$ и $g \neq h$. Поскольку $\mathbf{A}_1 \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}$, получаем $g(b) \neq h(b)$.

Можно показать, что свойство ESM равносильно каждому из следующих свойств ESM1 и ESM2.

ESM1 : если $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B} \in V$, $b \in \mathbf{A} - \mathbf{B}$, то существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.

ESM2 : если $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B} \in V$, то существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$ для всех $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

В многообразиях гейтинговых алгебр свойства SES и PBP следуют из амальгамируемости. Однако это нарушается в многообразиях модальных алгебр, где в общем случае BP не следует из AP. В многообразиях модальных алгебр свойство сильной амальгамируемости StrAP равносильно конъюнкции AP & BP [25]. Это же справедливо и для произвольных многообразий [19], [17].

Теорема 3.14. *Для любого многообразия свойство сильной амальгамируемости* StrAP *равносильно конъюнкции* AP & ES* *и влечет* SES.

Доказательство. 1) StrAP равносильно AP & ES* [25], [19], [17].

2) Свойство SES следует из StrAP: достаточно в определении StrAP подожить $\mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Свойство ограниченной амальгамируемости RAP следует из SES в многообразиях гейтинговых алгебр [32]. Следующая теорема применима также к произвольным многообразиям модальных алгебр, решеток с относительными псевдодополнениями, а также к многообразиям резидуальных решеток [40].

Напомним, что алгебра называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов. Невырожденная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не представима как подпрямое произведение ее собственных факторалгебр. Алгебра называется *финитно неразложимой*, если не представима как конечное подпрямое произведение ее собственных факторалгебр.

Теорема 3.15 [12]. *Пусть многообразие V конгруэнц-дистрибутивно и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр из V финитно неразложимы. Тогда если V имеет* SES, *то V имеет* RAP.

Учитывая теоремы 3.5 и 3.12, получаем

Следствие 3.16. *Пусть многообразие V конгруэнц-дистрибутивно и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр финитно неразложимы. Тогда если V имеет* CEP *и* PBP, *то оно обладает свойством* IPR.

Эти результаты можно применить к известным классам алгебр. Суммируя полученные утверждения и учитывая результаты из [25], [26], для многообразий модальных алгебр мы получаем следующие соотношения:

1) IIP $\Leftrightarrow$ SupAP;
2) IIP $\Rightarrow$ EIP & BP $\Leftrightarrow$ StrAP, EIP & BP $\not\Rightarrow$ IIP;
3) EIP & BP $\Rightarrow$ PBP $\Leftrightarrow$ SES;
4) PBP $\not\Rightarrow$ EIP $\Leftrightarrow$ AP, EIP $\not\Rightarrow$ PBP;
5) PBP $\Rightarrow$ IPR $\Leftrightarrow$ RAP;
6) EIP $\Rightarrow$ IPR, IPR & BP $\not\Rightarrow$ EIP;
7) PBP $\Rightarrow$ BP, IPR $\not\Rightarrow$ BP, BP $\not\Rightarrow$ IPR.

Аналогичные соотношения имеют место для многообразий резидуальных решеток [40], так как они обладают свойством CEP, а также удовлетворяют условиям теоремы 3.15.

4. Сведение к финитно неразложимым алгебрам

При исследовании модальных логик обнаружилась возможность сведения интерполяционного свойства, свойства Бета и амальгамируемости в многообразиях модальных алгебр к подходящим свойствам классов финитно неразложимых алгебр. Это сведение имело большое значение для доказательства разрешимости указанных свойств в многообразиях гейтинговых алгебр и алгебр замыкания и в табличных многообразиях модальных алгебр. В этом параграфе будет получено обобщение указанных результатов о сведении на другие многообразия. Будут найдены достаточные условия для подобного сведения.

Для сравнения приведем теорему о финитизации для многообразий модальных алгебр и родственных многообразий.

Теорема 4.1. *Для любого многообразия V модальных алгебр*, J-*алгебр или импликативных решеток*:

(1) *V имеет* SupAP *тогда и только тогда, когда для любых конечно порожденных финитно неразложимых $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in V$, мономорфизмов $\beta\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\gamma\colon\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ и элементов $b_0\in\mathbf{B}$, $c_0\in\mathbf{C}$ таких, что не существует $a\in\mathbf{A}$, удовлетворяющего условиям $b_0\leqslant\beta(a)$ и $\gamma(a)\leqslant c_0$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}\in V$ и гомоморфизмы $g\colon\mathbf{B}\to\mathbf{D}$ и $h\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ такие, что $g\beta=h\gamma$ и $g(b_0)\nleqslant h(c_0)$* [24], [25], [33];

(2) *V имеет* AP *тогда и только тогда, когда для любых конечно порожденных финитно неразложимых $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in V$, мономорфизмов $\beta\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\gamma\colon\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ и элемента $c_0\in\mathbf{C}$, $c_0\neq\top$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon\mathbf{B}\to\mathbf{D}$, $\varepsilon\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta(x)=\varepsilon\gamma(x)$ для всех $x\in\mathbf{A}$ и $\delta(c_0)\neq\top$* [24], [25], [33];

(3) *V имеет* StrAP *тогда и только тогда, когда V имеет* AP *и* ES* [25];

(4) *V имеет* RAP *тогда и только тогда, когда для любых конечно порожденных подпрямо неразложимых $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in V$, мономорфизмов $\beta\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\gamma\colon\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ и различных элементов $a_1,a_2\in\mathbf{A}$ существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}\in V$ и гомоморфизмы $g\colon\mathbf{B}\to\mathbf{D}$ и $h\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ такие, что $g\beta=h\gamma$ и $g\beta(a_1)\neq h\gamma(a_2)$* [41];

(5) *многообразие V модальных или гейтинговых алгебр имеет* WAP *тогда и только тогда, когда класс конечно порожденных финитно неразложимых алгебр из* V *имеет* WAP [14];

(6) *V имеет* ES* *тогда и только тогда, когда класс конечно порожденных финитно неразложимых алгебр из V имеет* ES* [25];

(7) *V имеет* SES *тогда и только тогда, когда для любых финитно неразложимых конечно порожденных $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ из V, для любых мономорфизмов $\beta\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, $\gamma\colon\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ и для любых $x\in\mathbf{B},y\in\mathbf{C}$, если $\neg(\exists\, z\in\mathbf{A})(x=\beta(z)\ \&\ \gamma(z)=y)$, то существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и гомоморфизмы $\delta\colon\mathbf{B}\times\mathbf{C}\to\mathbf{D}$, $\varepsilon\colon\mathbf{B}\times\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ такие, что $\delta(x,y)\neq\varepsilon(x,y)$ и $\delta(\beta(z),\gamma(z))=\varepsilon(\beta(z),\gamma(z))$ для всех z из $\mathbf{A}$* [26].

Напомним, что алгебра называется *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов. Невырожденная алгебра *подпрямо неразложима*, если она не представима как подпрямое произведение ее собственных фактор-алгебр. Алгебра *финитно неразложима*, если не представима как конечное подпрямое произведение ее собственных фактор-алгебр. Невырожденная алгебра $\mathbf{A}$ называется *простой*, если она имеет точно две конгруэнции: нулевую конгруэнцию $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}=\{(a,a)\mid a\in\mathbf{A}\}$ и несобственную конгруэнцию $\mathbf{A}^2$.

Для данного класса алгебр V через $\mathrm{SI}(V)$ обозначается класс подпрямо неразложимых, через $\mathrm{FI}(V)$ – класс финитно неразложимых, а через $\mathrm{Sim}(V)$ – класс простых алгебр из V. Через $\mathrm{FG}(V)$ обозначается класс конечно порожденных алгебр из класса V.

Конгруэнция называется *неразложимой*, если она не представима как пересечение конечного числа отличных от нее конгруэнций, и *вполне неразложимой*, если она не представима как пересечение отличных от нее конгруэнций. Отметим, что алгебра $\mathbf{A}$ финитно неразложима тогда и только тогда, когда $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ неразложима; невырожденная алгебра $\mathbf{A}$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда ее нулевая конгруэнция $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ вполне неразложима.

Легко доказывается

Лемма 4.2. *Для любой собственной конгруэнции Φ на алгебре $\mathbf{A}$:*
- *факторалгебра $\mathbf{A}/\Phi$ финитно неразложима, если и только если Φ неразложима;*
- *$\mathbf{A}/\Phi$ подпрямо неразложима, если и только если Φ вполне неразложима.*

Лемма 4.3. *Пусть $a, b \in \mathbf{A}$, $a \neq b$. Тогда существует гомоморфизм h из $\mathbf{A}$ на подходящую подпрямо неразложимую алгебру $\mathbf{B}$ такой, что $h(a) \neq h(b)$.*

Доказательство. Семейство всех конгруэнций, не содержащих пару (a, b), непусто и удовлетворяет условиям леммы Цорна, а значит, имеет максимальный элемент, который и будет вполне неразложимой конгруэнцией.

Для многообразий со свойством продолжаемости конгруэнций справедлива

Лемма 4.4. *Пусть многообразие V имеет* CEP, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$, $\mathbf{A}$ *– подалгебра алгебры* $\mathbf{B}$, Φ *– конгруэнция на* $\mathbf{A}$. *Если Φ неразложима, то существует неразложимая конгруэнция Ψ на $\mathbf{B}$ такая, что $\Psi \cap \mathbf{A}^2 = \Phi$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\Sigma = \{\Psi \mid \Psi \text{ – конгруэнция на } \mathbf{B} \text{ и } \Psi \cap \mathbf{A}^2 = \Phi\}.$$

По CEP множество Σ непусто. Кроме того, Σ частично упорядочено по включению и объединение любой цепи элементов из Σ снова принадлежит Σ. По лемме Цорна Σ содержит максимальный элемент Ψ_0. Нетрудно показать, что Ψ_0 неразложима.

4.1. Амальгамируемость и ограниченная амальгамируемость. Рассмотрим условия сведения для свойств амальгамируемости AP и ограниченной амальгамируемости RAP. Имеет место

Лемма 4.5 [23]. *Для любого многообразия V следующие условия эквивалентны:*
(1) *V амальгамируемо;*
(2) *для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и для любых $c, c' \in \mathbf{C}$, если $c \neq c'$, то существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $h(c) \neq h(c')$.*

Следующая теорема доказана в [23] для свойства амальгамируемости.

Теорема 4.6. *Пусть многообразие V имеет* CEP *и, кроме того, класс* $\mathrm{SI}(V)$ *замкнут относительно взятия подалгебр. Если* $\mathrm{SI}(V)$ *имеет* AP, *то V имеет* AP.

По аналогии можно доказать, что справедлива

Теорема 4.7. *Пусть многообразие V имеет* CEP *и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр из V финитно неразложимы. Тогда если класс* $\mathrm{FI}(V)$ *финитно неразложимых алгебр из V имеет* AP, *то V имеет* AP.

Мы отметим, что условия теоремы 4.7 выполняются, например, в случае модальных алгебр и импликативных решеток в то время, как условие замкнутости класса $\mathrm{SI}(V)$ относительно подалгебр не выполняется.

В общем случае из амальгамируемости многообразия не следует амальгамируемость классов подпрямо неразложимых или финитно неразложимых алгебр: это не выполняется даже для модальных алгебр, хотя и выполняется для гейтинговых алгебр и импликативных решеток [15]. В этой связи оказывается полезным следующее свойство.

APF: для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – конечно порожденные и финитно неразложимые и $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и для любой пары c_1, c_2 различных элементов из $\mathbf{C}$ существуют конечно порожденная подпрямо неразложимая $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon(c_1) \neq \varepsilon(c_2)$.

Очевидно, в многообразиях APF равносильно свойству

APF$'$: для любых конечно порожденных финитно неразложимых алгебр $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, для любых мономорфизмов β и γ алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно и для любой пары c_1, c_2 различных элементов из $\mathbf{C}$ существуют конечно порожденная подпрямо неразложимая $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta(x) = \varepsilon\gamma(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon(c_1) \neq \varepsilon(c_2)$.

Теорема 4.8. *Пусть многообразие V обладает свойством* CEP *и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр финитно неразложимы. Тогда V амальгамируемо, если и только если V имеет* APF.

Доказательство. В силу леммы 4.3 ясно, что APF следует из AP. Пусть V имеет APF. Докажем, что V удовлетворяет условию (2) леммы 4.5. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, $c, c' \in \mathbf{C}$, $c \neq c'$. По лемме 4.3 существует вполне неразложимая конгруэнция Ψ на $\mathbf{C}$ такая, что $(c, c') \notin \Psi$. При этом алгебра $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$ подпрямо неразложима и является гомоморфным образом алгебры $\mathbf{C}$ относительно гомоморфизма $f(z) = z/\Psi$. Пусть $\mathbf{A}_1$ – образ алгебры $\mathbf{A}$ относительно f. По условию теоремы алгебра $\mathbf{A}_1$ финитно неразложима. Это означает, что конгруэнция $\Psi_0 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ алгебры $\mathbf{A}$ неразложима. По лемме 4.4 существует неразложимая конгруэнция Φ на $\mathbf{B}$ такая, что $\Psi_0 = \Phi \cap \mathbf{A}^2$. Обозначим $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$. Тогда $\mathbf{B}_1$ финитно неразложима и отображение $\beta\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1$, где $\beta(x/\Psi) = x/\Phi$ для $x \in \mathbf{A}$, является мономорфизмом. По APF$'$ существуют конечно порожденная подпрямо неразложимая $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B_1} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon\colon \mathbf{C_1} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta f(x) = \varepsilon f(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon f(c) \neq \varepsilon f(c')$. Тогда $g(y) = \delta(y/\Phi)$ для $y \in \mathbf{B}$ и $h(z) = \varepsilon f(z)$ для $z \in \mathbf{C}$ – требуемые гомоморфизмы.

Перейдем к ограниченной амальгамируемости. Следующие утверждения доказаны в [12].

Предложение 4.9. *Для любого многообразия V следующие условия эквивалентны*:

(1) *V имеет* RAP;

(2) *для любых мономорфизмов $\beta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ алгебр из V существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ и $\delta\beta$ является мономорфизмом*;

(3) *для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и для любых $a, a' \in \mathbf{A}$, если $a \neq a'$, то существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\varepsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\delta(a) \neq \delta(a')$.*

Предложение 4.10. *Пусть многообразие V имеет* CEP. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

- *V имеет* RAP.
- *для любых мономорфизмов $\beta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ подпрямо неразложимых алгебр из V существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $\epsilon\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \epsilon\gamma$ и $\delta\beta$ есть мономорфизм.*

Учитывая теорему 3.5, (2), можно в предложении 4.10 ограничиться конечно порожденными алгебрами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$. Из предложения 4.10 сразу вытекает

Теорема 4.11. *Пусть многообразие V имеет* CEP. *Тогда V имеет* RAP, *если и только если класс* FGSI(V) *конечно порожденных подпрямо неразложимых алгебр из V имеет* RAP.

4.2. Слабая амальгамируемость и простые алгебры. Слабое интерполяционное свойство и слабая амальгамируемость в многообразиях ограниченных алгебр изучались в [14]. Приведем основные результаты этой статьи.

Теорема 4.12. *Пусть V – многообразие ограниченных алгебр. Тогда*
(1) *если V имеет* WIP, *то оно имеет* WAP;
(2) *если V имеет* CEP *и* FG(V) *имеет* WAP, *то V имеет* WIP.

Непосредственно из теоремы вытекает

Следствие 4.13. *Для любого многообразия V ограниченных алгебр со свойством* CEP *следующие условия эквивалентны*:
(1) *V имеет* WIP;
(2) *V имеет* WAP;
(3) FG(V) *имеет* WAP.

Для многообразий модальных алгебр эквивалентность WIP и WAP следует из [28, теорема 2.3].

Напомним, что невырожденная алгебра называется *простой*, если она имеет точно две конгруэнции. Легко видеть, что в ограниченной алгебре конгруэнция Θ является собственной тогда и только тогда, когда $(\bot, \top) \notin \Theta$. Для любой собственной конгруэнции Θ ограниченной алгебры $\mathbf{A}$ существует максимальная конгруэнция $\Theta' \supseteq \Theta$; алгебра $\mathbf{A}/\Theta$ является простой тогда и только тогда, когда Θ – максимальная конгруэнция на $\mathbf{A}$.

Легко видеть, что справедлива следующая

Лемма 4.14. *Если многообразие V имеет* CEP, *то невырожденная подалгебра простой алгебры из V является простой алгеброй.*

Теорема 4.15 [14]. *Пусть многообразие V ограниченных алгебр имеет* CEP. *Тогда следующие условия эквивалентны*:
(1) *V слабо амальгамируемо*;
(2) *класс простых алгебр из V амальгамируем*;
(3) *класс конечно порожденных простых алгебр из V амальгамируем.*

В [35] описаны все конечно порожденные, простые транзитивные модальные алгебры. Это позволило доказать разрешимость слабой амальгамируемости в многообразиях транзитивных модальных алгебр.

В [23] доказано, что существуют точно четыре нетривиальных амальгамируемых многообразия дистрибутивных решеток с псевдодополнениями. С другой стороны, имеется лишь одна простая дистрибутивная решетка с псевдодополнениями – это двухэлементная булева алгебра. Поэтому все многообразия дистрибутивных решеток с псевдодополнениями имеют WAP и WIP.

Аналогично, каждый из классов простых гейтинговых, диагонализируемых и гжегорчиковых алгебр состоит из одной двухэлементной алгебры. Поэтому все подмногообразия гейтинговых, диагонализируемых и гжегорчиковых алгебр имеют WAP и WIP [28].

С другой стороны, в многобразиях эпистемических алгебр слабая амальгамируемость равносильна сверхамальгамируемости [28]. Все амальгамируемые многообразия эпистемических алгебр были описаны в [27], [42]. Можно показать, что простые эпистемические алгебры – это в точности модальные алгебры $\mathbf{A} = (A, \wedge, \neg, \top, \Box)$, где $\Box\top = \top$, $\Box x = \bot$ при $x \neq \top$. Кроме тривиального многообразия и многообразия всех эпистемических алгебр, амальгамируемыми являются многообразия, порожденные двухэлементной или четырехэлементной алгеброй указанного вида.

4.3. Сверхамальгамируемость и свойство отделимости. В формулировке свойства сверхамальгамируемости предполагается, что все алгебры частично упорядочены. Мы ограничимся рассмотрением классов алгебр, основанных на нижних полурешетках. То есть предполагаем, что в многообразиях выразима бинарная операция $\wedge$ взятия точной нижней грани.

Неизвестно, как в общем случае свести свойство сверхамальгамируемости к финитно неразложимым алгебрам. В случае модальных или гейтинговых алгебр такое сведение возможно (см. теорему 4.1) и играет большую роль в изучении сверхамальгамируемости. По теореме 3.5 сверхамальгамируемость равносильна конъюнкции свойств AP и WSupAP. Теорема 4.8 дает достаточные условия для сведения свойства AP.

Теперь рассмотрим вопрос о‘финитизации свойств IIP и WSupAP. Когда свойство WSupAP можно свести к рассмотрению финитно неразложимых алгебр?

Определим свойство

FWSupAP : для любой алгебры $\mathbf{A}$, любых финитно неразложимых и конечно порожденных $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, если $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, элементы $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ удовлетворяют условию $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})(b \leqslant a \,\&\, a \leqslant c)$, то существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(a) = h(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$ и $g(b) \not\leqslant h(c)$.

Нетрудно понять, что в многообразиях свойство FWSupAP равносильно следующему свойству.

FWSupAP$'$: для любой алгебры $\mathbf{A}$, любых финитно неразложимых и конечно порожденных $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, любых мономорфизмов $\beta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\gamma\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ и любых элементов $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ таких, что $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})(b \leqslant \beta(a) \,\&\, \gamma(a) \leqslant c)$, существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$, $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g\beta = h\gamma$ и $g(b) \not\leqslant h(c)$.

Мы сформулируем *свойство отделимости* SEP, которое справедливо для модальных и гейтинговых алгебр и существенно использовалось при исследовании амальгамируемости в многообразиях этих алгебр.

SEP : пусть $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из V, $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ и $\neg(\exists\, x \in \mathbf{A})(b \leqslant x \& x \leqslant c)$. Тогда существуют неразложимые конгруэнции Φ на $\mathbf{B}$ и Ψ на $\mathbf{C}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})(b/\Phi \leqslant a/\Phi \,\&\, a/\Psi \leqslant c/\Psi)$.

Ясно, что в случае полурешеток условие $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})(b/\Phi \leqslant a/\Phi \,\&\, a/\Psi \leqslant c/\Psi)$ равносильно условию $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})((b, b \wedge a) \in \Phi \,\&\, (a, a \wedge c) \in \Psi)$.

Теорема 4.16. *Для любого многообразия V полурешеточно упорядоченных алгебр, обладающего свойством отделимости* SEP, *следующие условия эквивалентны*:

(1) V *имеет* IIP;
(2) V *имеет* WSupAP;
(3) V *имеет* FWSupAP.

Доказательство. По теореме 3.7 IIP и WSupAP равносильны. Мы докажем

$$\mathrm{WSupAP} \implies \mathrm{FWSupAP} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{FWSupAP} \implies \mathrm{IIP}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть V имеет WSupAP. Докажем, что V имеет FWSupAP. Пусть даны алгебра $\mathbf{A}$, финитно неразложимые и конечно порожденные $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ такие, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и элементы $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ удовлетворяют условию $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})(b \leqslant a \,\&\, a \leqslant c)$. По WSupAP существуют $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ и $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и, кроме того,

$$g(x) \leqslant h(y) \iff (\exists\, z \in \mathbf{A})(x \leqslant z \text{ и } z \leqslant y).$$

Ясно, что можно считать алгебру $\mathbf{D}$ конечно порожденной. Кроме того, имеем $g(b) \nleqslant h(c)$, т.е. $g(b) \wedge h(c) \neq g(b)$. По лемме 4.3 существует гомоморфизм f из $\mathbf{D}$ на подходящую подпрямо неразложимую алгебру $\mathbf{D}'$ такой, что $f(g(b)) \wedge f(h(c)) \neq f(g(b))$, что равносильно $f(g(b)) \nleqslant f(h(c))$. Тогда $\mathbf{D}'$ – искомая алгебра, которая требуется в FWSupAP.

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, для доказательства от противного, что V имеет свойство FWSupAP′, равносильное FWSupAp, но не имеет IIP. Существуют $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})$, удовлетворяющие условиям:

(1) $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \qquad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

(2) $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant v(\mathbf{x},\mathbf{z})$;

(3) не существует терма $t(\mathbf{x})$ такого, что $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant t(\mathbf{x})$ и $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

Без ограничения общности можно считать. что списки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ конечны. На множестве термов $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определяем конгруэнцию

$$\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) \approx_1 \tau'(\mathbf{x},\mathbf{y}) \iff \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) \models_V \tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tau'(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

а множестве $F(\mathbf{x},\mathbf{z})$ – конгруэнцию

$$\tau(\mathbf{x},\mathbf{z}) \approx_2 \tau'(\mathbf{x},\mathbf{z}) \iff \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \tau'(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Положим $\mathbf{B} = F(\mathbf{x},\mathbf{y})/{\approx_1}$, $\mathbf{C}' = F(\mathbf{x},\mathbf{z})/{\approx_2}$.

Пусть $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, порожденная множеством $\mathbf{x}/{\approx_1}$. Из условия $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$ следует, что $\tau(\mathbf{x}) \approx_1 \tau'(\mathbf{x}) \iff \tau(\mathbf{x}) \approx_2 \tau'(\mathbf{x})$ для любых термов $\tau(\mathbf{x}), \tau'(\mathbf{x})$, а значит, отображение $\varphi(\tau(\mathbf{x})/{\approx_1}) = (\tau(\mathbf{x})/{\approx_2})$ является мономорфизмом из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{C}'$. Отображение φ^{-1} можно продолжить до изоморфизма ψ из $\mathbf{C}'$ на подходящую алгебру $\mathbf{C}$ такую, что $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{C}$.

Положим $b = u(\mathbf{x},\mathbf{y})/{\approx_1}$, $c = \varphi^{-1}(v(\mathbf{x},\mathbf{z})/{\approx_2})$. По условию (3) не существует элемента $a \in \mathbf{A}$ такого, что $b \leqslant a$ и $a \leqslant c$.

Применяем свойство отделимости. Существуют неразложимые конгруэнции Φ на $\mathbf{B}$ и Ψ на $\mathbf{C}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})(b/\Phi \leqslant a/\Phi \,\&\, a/\Psi \leqslant c/\Psi)$. Обозначим $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$. Тогда $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{C}_1$ финитно неразложимы и образ $\mathbf{A}_1$ подалгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}_1$ изоморфно вложим в $\mathbf{C}_1$ с помощью мономорфизма $\gamma(a/\Phi) = a/\Psi$. По свойству WSupAP′ существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{D}$, $h\colon \mathbf{C}_1 \to \mathbf{D}$ такие, что $g(b/\Phi) \nleqslant h(c/\Psi)$ и $g(a/\Phi) = h\gamma(a/\Phi)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.

Строим означивание v формул от переменных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ в алгебре $\mathbf{D}$, полагая

$$v(y) = g((y/{\approx_1})/\Phi) \quad \text{для} \quad y \in (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}), \qquad v(z) = h((z/{\approx_2})/\Psi) \quad \text{для} \quad z \in \mathbf{z}.$$

Тогда, учитывая, что $h((x/{\approx_2})/\Psi) = v(x)$ для $x \in \mathbf{x}$, получаем

$$\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})[v], \qquad \mathbf{D} \models \Delta(\mathbf{x},\mathbf{z})[v].$$

Из условия (2) заключаем, что $\mathbf{D} \models (u(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant v(\mathbf{x},\mathbf{z}))[v]$, т.е. $g(b/\Phi) \leqslant h(c/\Psi)$ – противоречие.

4.4. Свойства Бета и финитно неразложимые алгебры. В общем случае свойство Бета не сводится к финитно неразложимым алгебрам. Например, многообразие ограниченных дистрибутивных решеток не обладает свойством Бета (см., например, [21]), хотя класс финитно неразложимых алгебр из этого многообразия состоит лишь из двухэлементных решеток, не имеющих собственных подалгебр, и, очевидно, обладает свойством ES*, эквивалентным BP.

Для сведения свойств Бета нам достаточно следующего *свойства отделимости* SEP1, которое вытекает из SEP:

SEP1 : пусть $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$ из V, $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$; тогда существуют неразложимые конгруэнции Φ и Ψ на $\mathbf{B}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})((a,b) \in \Phi \,\&\, (a,b) \in \Psi)$.

Легко вывести SEP1 из SEP: достаточно положить в SEP $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ и $c = b$.

Теорема 4.17. *Пусть многообразие V имеет* SEP1. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *V имеет свойство Бета* BP;

(2) *для любой конечно порожденной, финитно неразложимой алгебры $\mathbf{B} \in V$ и любого $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$ такого, что $\mathbf{A} \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{A}$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $g \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ и $h \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ такие, что $g(b) \neq h(b)$ и $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из эквивалентности BP и ES* (теорема 3.12).

(2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что V не обладает свойством BP, и найдем контрпример для (2). Существует множество равенств $\Gamma(\mathbf{p}, x)$ такое, что

$$\Gamma(\mathbf{p}, x), \Gamma(\mathbf{p}, y) \models_V x = y, \qquad \neg\exists\, t(\mathbf{p})(\Gamma(\mathbf{p}, x) \models_V x = t(\mathbf{p})).$$

Очевидно, список $\mathbf{p}$ можно считать конечным. Берем следующую конгруэнцию на алгебре термов $F(\mathbf{p}, x)$:

$$u(\mathbf{p}, x) \approx v(\mathbf{p}, x) \iff \Gamma(\mathbf{p}, x) \models_V u(\mathbf{p}, x) = v(\mathbf{p}, x).$$

Обозначим через $\mathbf{B}$ факторалгебру алгебры $F(\mathbf{p}, x)$ по этой конгруэнции, а через $\mathbf{A}$ – подалгебру алгебры $\mathbf{B}$, состоящую из образов термов из $F(\mathbf{p})$. Для любой переменной $z \in \mathbf{p} \cup \{x\}$ обозначаем $z' = z/\approx$. Тогда $x' \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. По свойству SEP1 существуют неразложимые конгруэнции Φ и Ψ на $\mathbf{B}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})((x', a) \in \Phi$ и $(x', a) \in \Psi)$.

Обозначим $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$, $b = x'/\Phi$, $\mathbf{A}_1 = \{a/\Phi \mid a \in \mathbf{A}\}$. Покажем, что $b \in \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1$.

Допустим (для доказательства от противного), что $b \in \mathbf{A}_1$, т.е. существует $a \in \mathbf{A}$ такой, что $x'/\Phi = a/\Phi$. Тогда $(x', a) \in \Phi$. Кроме того, для любого равенства $\gamma(\mathbf{p}, x) \in \Gamma(\mathbf{p}, x)$ имеем $\mathbf{B} \models \gamma(\mathbf{p}', x')$, поэтому $\gamma(\mathbf{p}', x') \in \Phi$. Из $(x', a) \in \Phi$ получаем $\gamma(\mathbf{p}', a) \in \Phi$, а значит, $\gamma(\mathbf{p}', a) \in \Psi$. Таким образом, $\Gamma(\mathbf{p}', a) \subseteq \Psi$.

Из условия $\mathbf{B} \models \Gamma(\mathbf{p}', x')$ заключаем, что $\Gamma(\mathbf{p}', x') \subseteq \Psi$. Учитывая $\Gamma(\mathbf{p}', a) \subseteq \Psi$ и $\Gamma(\mathbf{p}, x), \Gamma(\mathbf{p}, y) \models_V x = y$, получаем $(x', a) \in \Psi$, что противоречит условию $\neg(\exists\, a \in \mathbf{A})((x', a) \in \Phi$ и $(x', a) \in \Psi)$. Следовательно, $b \in \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1$.

Поскольку конгруэнция Φ является неразложимой, алгебра $\mathbf{B}_1$ финитно неразложима. Кроме того, $\mathbf{B}_1$ – конечно порожденная и $\mathbf{A}_1 \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}_1$.

Допустим, что существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{D} \in V$ и два гомоморфизма h и g из $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{D}$ такие, что $h(a) = g(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}_1$ и $h(b) \neq g(b)$. Рассмотрим следующее означивание v в алгебре $\mathbf{D}$:

$$v(p) = g(p'/\Phi) = h(p'/\Phi) \qquad \text{для любой переменной} \quad p \in \mathbf{p},$$
$$v(x) = g(b), \qquad v(y) = h(b).$$

Тогда $\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{p}, x)[v]$, $\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{p}, y)[v]$, однако $\mathbf{D} \not\models (x = y)[v]$, что противоречит $\Gamma(\mathbf{p}, x), \Gamma(\mathbf{p}, y) \models_V x = y$. Теорема доказана.

Для проективного свойства Бета недостаточно, чтобы класс конечно порожденных финитно неразложимых алгебр из V имел свойство SES даже в случае, когда V имеет свойство SEP1 или даже более сильное свойство SEP. Простой контрпример был найден в [26] в классе гейтинговых алгебр. Там показано, что многообразие, порожденное 5-элементной линейно упорядоченной гейтинговой алгеброй, не имеет свойства SES. С другой стороны, для любой линейно упорядоченной гейтинговой алгебры $\mathbf{B}$ и любой ее подалгебры легко найти требуемые гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Тем не менее, при условии SEP1 сведение существует. Следующая теорема является аналогом теоремы 3.8 из [26], доказанной для многообразий модальных алгебр.

Теорема 4.18. *Пусть многообразие V имеет* SEP1. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *V имеет проективное свойство Бета* PBP;

(2) *для любых конечно порожденных финитно неразложимых алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, имеющих общую подалгебру $\mathbf{A}$, и любых элементов $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ таких, что $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b = a \,\&\, a = c)$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $h\colon \mathbf{B} \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(b,c) \neq h(b,c)$ и $g(a,a) = h(a,a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.*

Доказательство. Используем равносильность PBP и SES (теорема 3.12).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть даны $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ из V, имеющие общую подалгебру $\mathbf{A}$, и $b \in \mathbf{B}, c \in \mathbf{C}$ такие, что $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b = a \,\&\, a = c)$. Тогда алгебра $\mathbf{A}' = \{(z,z) \mid z \in \mathbf{A}\}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ и $(b,c) \in \mathbf{D} - \mathbf{A}'$. По SES существуют алгебра $\mathbf{D}'$ в $V(L)$ и требуемые гомоморфизмы. При этом можно взять алгебру $\mathbf{D}'$ подпрямо неразложимой.

(2) $\Rightarrow$ (1). В силу равносильности PBP и SES достаточно доказать SES для конечно порожденных алгебр. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – конечно порожденные алгебры из V, $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$ и $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Тогда по SEP1 существуют неразложимые конгуэнции Φ и Ψ на $\mathbf{B}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists a \in \mathbf{A})((a,b) \in \Phi \,\&\, (a,b) \in \Psi)$.

Тогда алгебры $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$ и $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}/\Psi$ финитно неразложимы. Заметим, что алгебра $\mathbf{A}_0 = \{a/\Phi \mid a \in \mathbf{A}\}$ изоморфно вложима в $\mathbf{B}_2$ с помощью мономорфизма $i_2(a/\Phi) = a/\Psi$, причем $\neg(\exists z \in \mathbf{A}_0)(b/\Phi = z \,\&\, b/\Psi = z)$. Существует изоморфизм φ алгебры $\mathbf{B}_2$ на подходящую алгебру $\mathbf{C}$ такую, что $\mathbf{A}_0$ является подалгеброй $\mathbf{C}$. Положим $b_1 = b/\Phi$, $c = \varphi(b/\Psi)$. По условию (2) существуют $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $h\colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ такие, что $g(b_1,c) \neq h(b_1,c)$ и $g(a,a) = h(a,a)$ для всех $a \in \mathbf{A}_0$. Для $x \in \mathbf{B}$ полагаем $\beta(x) = g(x/\Phi, \varphi(x/\Psi))$, $\gamma(x) = h(x/\Phi, \varphi(x/\Psi))$. Тогда β и γ – требуемые гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{D}$.

5. Многообразия, порожденные конечными алгебрами

Применим результаты предыдущих параграфов к табличным многообразиям. Многообразие алгебр конечной сигнатуры называется *табличным*, если оно порождается конечным числом конечных алгебр или, эквивалентно, одной конечной алгеброй. Укажем достаточные условия для разрешимости интерполяционных свойств, вариантов амальгамируемости и свойства Бета в табличных многообразиях алгебр.

Теоремы 3.5, 3.6 и 4.1 позволяют эффективно доказать или опровергнуть рассматриваемые свойства в табличных многообразиях модальных алгебр, импликативных решеток или гейтинговых алгебр. В случае указанных табличных многообразий можно за конечное число шагов проверить, удовлетворяет ли подкласс, состоящий из финитно неразложимых алгебр условиям (1)–(7) теоремы 4.1. С использованием известной теоремы Йонссона [43] доказывается

Теорема 5.1. *Следующие свойства являются разрешимыми на классах табличных многообразий модальных или гейтинговых алгебр, или решеток с относительными псевдодополнениями*:

(1) *амальгамируемость, сверхамальгамируемость, сильная амальгамируемость, ограниченная амальгамируемость, слабая амальгамируемость*;

(2) *сюръективность эпиморфизмов* ES* *и сильная сюръективность эпиморфизмов* SES;

(3) *интерполяционные свойства* EIP, IPR, WIP, IIP;

(4) *свойство Бета* BP *и проективное свойство Бета* PBP.

Напомним, что все указанные в теореме многообразия обладают свойством продолжаемости конгруэнций, поэтому свойства EIP*, IPR* и WIP* равносильны EIP*, IPR* и WIP* соответственно.

Для проверки свойств, указанных в теореме 5.1, по данному конечному множеству алгебр, порождающих многообразие V, достаточно построить конечный класс финитно неразложимых алгебр, содержащий все с точностью до изоморфизма финитно неразложимые алгебры из V, а затем проверить требуемые в теореме 4.1 условия.

Существенную роль в доказательстве играет тот факт, что все рассматриваемые многообразия конгруэнц-дистрибутивны, т.е. все алгебры, имеют дистрибутивные решетки конгруэнций. Если конгруэнц-дистрибутивное многообразие порождается конечным числом конечных алгебр, то по теореме Йонссона [43] оно имеет лишь конечное число (с точностью до изоморфизма) финитно неразложимых алгебр.

Предложение 5.2. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие, порожденное конечным множеством K конечных алгебр конечной сигнатуры. Тогда любая финитно неразложимая алгебра из V конечна, и можно эффективно найти конечный класс K_0 конечных алгебр, состоящий из всех (с точностью до изоморфизма) финитно неразложимых алгебр из V.*

Доказательство. Пусть многообразие V порождается конечным множеством K конечных модальных алгебр. Поскольку многообразие конгруэнц-дистрибутивно, по теореме Йонссона любая подпрямо неразложимая алгебра из V входит в класс $\mathrm{HSP_U}(K)$ [43], где H, S и $\mathrm{P_U}$ – замыкания класса алгебр относительно взятия гомоморфных образов, подалгебр и ультрапроизведений соответственно. Можно показать что это же верно и для финитно неразложимых алгебр. Любое ультрапроизведение алгебр из K конечно и изоморфно некоторой алгебре из K. Отсюда следует, что любая финитно неразложимая алгебра из V изоморфна некоторой алгебре из класса $\mathrm{HS}(K)$, поэтому любая финитно неразложимая алгебра конечна. Кроме того, класс $\mathrm{HS}(K)$ является конечным с точностью до изоморфизма. Проверка свойства финитной неразложимости также является эффективной. Таким образом, получим конечный подкласс K_0, содержащий с точностью до изоморфизма все финитно неразложимые алгебры из V.

Используя критерии, найденные в предыдущих параграфах, установим результаты о разрешимости исследуемых в работе свойств в табличных многообразиях. Предполагаем, что табличное многообразие задается с помощью конечной алгебры, порождающей это многообразие. Обозначаем через $V(\mathbf{A})$ многообразие, порожденное алгеброй $\mathbf{A}$. Учитывая предложение 5.2, мы ограничимся рассмотрением конгруэнц-дистрибутивных многообразий конечной сигннатуры.

Теорема 5.3. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, обладающее свойством продолжаемости конгруэнций* CEP. *Тогда*

(1) *существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами* RAP *и* IPR;

(2) *если подалгебры подпрямо неразложимых алгебр из V финитно неразложимы, то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами* AP *и* EIP;

(3) *если V – многообразие ограниченных алгебр, то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами* WAP *и* WIP.

Доказательство. По теореме 3.5 свойство RAP равносильно IPR, AP равносильно EIP, а WAP эквивалентно WIP. По предложению 5.2 эффективно строится конечный класс, состоящий из всех с точностью до изоморфизма финитно неразложимых алгебр из $V(\mathbf{A})$. Далее используем теоремы 4.11, 4.5 и 4.15.

Теорема 5.4. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие полурешеточно упорядоченных алгебр конечной сигнатуры, обладающее свойством отделимости* SEP. *Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры* $\mathbf{A} \in V$ *определить, обладает ли многообразие* $V(\mathbf{A})$ *свойствами* IIP *и* WSupAP.

Доказательство. Следует из теоремы 3.7, предложения 5.2 и теоремы 4.16.

Теорема 5.5. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, обладающее свойством отделимости* SEP1. *Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры* $\mathbf{A} \in V$ *определить, обладает ли многообразие* $V(\mathbf{A})$ *свойствами* BP, PBP, ES* *или* SES.

Доказательство. Следует из теоремы 3.12, предложения 5.2 и теорем 4.17 и 4.18.

Теорема 5.6. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, обладающее свойством* CEP, *причем подалгебры подпрямо неразложимых алгебр финитно неразложимы. Тогда*:

(1) *если V – многообразие полурешеточно упорядоченных алгебр, имеющее* SEP, *то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры* $\mathbf{A} \in V$ *определить, обладает ли многообразие* $V(\mathbf{A})$ *свойством* SupAP;

(2) *если V имеет* SEP1, *то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры* $\mathbf{A} \in V$ *определить, обладает ли многообразие* $V(\mathbf{A})$ *свойством* StrAP.

Доказательство. (1) Сразу следует из теорем 3.7, 5.3, 5.4.

(2) Следует из теорем 3.14, 5.3, 5.5.

Теорема 5.3 применима, например, к многообразиям дистрибутивных решеток с псевдодополнениями, резидуальных решеток [40] и так называемых BL-алгебр [13], используемых для интерпретации нечетких логик, поскольку все эти многообразия конгруэнц-дистрибутивны и обладают свойством CEP. Все теоремы 5.3–5.6 применимы к многообразиям булевых алгебр с операторами [44].

Список литературы

[1] А. И. Мальцев, "О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики", *Труды Международного конгресса математиков* (Москва, 1966), Мир, М., 1966, 217–231.

[2] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Современная алгебра, Наука, М., 1970.

[3] W. Craig, "Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory", *J. Symbolic Logic*, **22**:3 (1957), 269–285.

[4] E. W. Beth, "On Padoa's method in the theory of definition", *Indagationes Math.*, **15**:4 (1953), 330–339.

[5] B. Jónsson, "146–157", *Theory of Models* (Berkeley, 1963), North-Holland, Amsterdam, 1965.

[6] D. Pigozzi, "Amalgamation, congruence-extension, and interpolation properties in algebras", *Algebra Universalis*, **1** (1971), 269–349.

[7] J. Barwise, S. Feferman (eds.), *Model-Theoretic Logics*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, New York, NY, 1985.

[8] H. Ono, "Interpolation and the Robinson property for logics not closed under the Boolean operations", *Algebra Universalis*, **23**:2 (1986), 111–122.

[9] I. Sain, "Beth's and Craig's properties via epimorphisms and amalgamation in algebraic logic", *Algebraic Logic and Universal Algebra in Computer Science* (Ames, IA, 1988), Lecture Notes in Comput. Sci., **425**, Springer-Verlag, 1990, 209–225.

[10] J. Czelakowski, D. Pigozzi, "Amalgamation and Interpolation in abstract algebraic logic", *Models, Algebras and Proofs* (Bogotá, 1995), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **203**, Marcel Dekker, New York, NY, 1999, 187–265.

[11] E. Hoogland, *Definability and Interpolation. Model-Theoretic Investigations*, ILLC Publications, Dissertation Series, Nr. DS-2001-05, Amsterdam, Univ. of Amsterdam, 2001.

[12] Л. Л. Максимова, “Ограниченная интерполяция и проективное свойство Бета в эквациональной логике”, *Алгебра и логика*, **42**:6 (2003), 712–726.

[13] F. Montagna, “Interpolation and Beth's property in propositional many-valued logics: A semantic investigation”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **141**:1-2 (2006), 148–179.

[14] Л. Л. Максимова, “Слабая форма интерполяции в эквациональной логике”, *Алгебра и логика*, **47**:1 (2008), 94–107.

[15] D. M. Gabbay, L. Maksimova, *Interpolation and Definability. Modal and Intuitionistic Logics*, Oxford Logic Guides, **46**, Clarendon Press, Oxford, 2005.

[16] L. Maksimova, “Definability and interpolation in non-classical logics”, *Studia Logica*, **82**:2 (2006), 271–291.

[17] H. Kihara, H. Ono, “Interpolation properties, Beth definability properties and amalgamation properties for substructural logics”, *J. Logic Comput.*, **20**:4 (2010), 823–875.

[18] P. D. Bacsich, “Amalgamation properties and interpolation theorems for equational theories”, *Algebra Universalis*, **5**:1 (1975), 45–55.

[19] E. W. Kiss, L. Márki, P. Pröhle, W. Tholen, “Categorical algebraic properties. A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residual smallness, and injectivity”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **18**:1 (1983), 79–141.

[20] H. Andréka, I. Németi, I. Sain, “Algebraic logic”, *Handbook of Philosophical Logic*, v. 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 133–247.

[21] Л. Л. Максимова, Е. Орловска, “Свойство Бета и интерполяция в алгебрах и логиках, основанных на решётках”, *Алгебра и логика*, **47**:3 (2008), 307–334.

[22] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

[23] G. Grätzer, H. Lakser, “The structure of pseudocomplemented distributive lattices. II. Congruence extension and amalgamation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156** (1971), 343–358.

[24] Л. Л. Максимова, “Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр”, *Алгебра и логика*, **16**:6 (1977), 643–681.

[25] Л. Л. Максимова, “Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойство Бета, интерполяция и амальгамируемость”, *Алгебра и логика*, **31**:2 (1992), 145–166.

[26] Л. Л. Максимова, “Проективные свойства Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках”, *Алгебра и логика*, **38**:3 (1999), 316–333.

[27] Л. Л. Максимова, “Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр”, *Алгебра и логика*, **18**:5 (1979), 556–586.

[28] L. Maksimova, “Interpolation and joint consistency”, *We Will Show Them*!, v. 2, Essays in Honour of Dov Gabbay, King's College Publ., London, 2005, 293–305.

[29] Л. Л. Максимова, “Аналог теоремы Бета в нормальных расширениях модальной логики K4”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:6 (1992), 118–130.

[30] L. Maksimova, “Problem of restricted interpolation in superintuitionistic and some modal logics”, *Log. J. IGPL*, **18**:3 (2010), 367–380.

[31] Л. Л. Максимова, “Проективное свойство Бета и интерполяция в позитивных и близких к ним логиках”, *Алгебра и логика*, **45**:1 (2006), 85–113.

[32] L. L. Maksimova, “Intuitionistic logic and implicit definability”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **105**:1-3 (2000), 83–102.

[33] Л. Л. Максимова, “Неявная определимость и позитивные логики”, *Алгебра и логика*, **42**:1 (2003), 65–93.

[34] L. Maksimova, “Projective Beth property in Extensions of Grzegorczyk logic”, *Studia Logica*, **83**:1-3 (2006), 365–391.

[35] А. В. Карпенко, “Слабое интерполяционное свойство в расширениях логик $S4$ и $K4$”, *Алгебра и логика*, **47**:6 (2008), 705–722.

[36] Л. Л. Максимова, “Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр”, *Алгебра и логика*, **40**:3 (2001), 290–301.

[37] L. Maksimova, "Decidability of some properties in tabular logics", 13*th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Volume of Abstracts (2007, Beijing, China), 124–125.

[38] A. Wroński, "On a form of equational interpolation property", *Foundations of Logic and Linguistics* (Salzburg, 1983), Plenum Press, London, 1985, 23–29.

[39] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras*, Part II, Stud. Logic Found. Math., **115**, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[40] T. Kowalski, H. Ono, "Splittings in the variety of residuated lattices", *Algebra Universalis*, **44**:3-4 (2000), 283–298.

[41] L. Maksimova, "Restricted interpolation in modal logics", *Advances in Modal Logic*, v. 4, King's College Publ., London, 2003, 297–311.

[42] Л. Л. Максимова, "Интерполяционные теоремы в модальных логиках. Достаточные условия", *Алгебра и логика*, **19**:2 (1980), 194–213.

[43] B. Jónsson, "Algebras whose congruence structures are distributive", *Math. Scand.*, **21** (1967), 110–121.

[44] B. Jónsson, A. Tarski, "Boolean algebras with operators. Part I", *Amer. J. Math.*, **73**:4 (1951), 891–939.

Изотипные алгебры

Б. И. Плоткин
Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel

Посвящается 100-летнему юбилею гениального ученого
Анатолия Ивановича Мальцева

1. Общий взгляд

1.1. Введение. Понятие типа для алгебры, как и для любой другой алгебраической системы пришло из теории моделей и оказалось одним из ключевых понятий (см., например, [1], [2]).

Данная статья посвящена изотипным алгебрам, т.е. алгебрам с одной и той же системой типов. Мы рассматриваем алгебры, принадлежащие некоторому фиксированному многообразию алгебр Θ. Мы подходим к понятию типа с позиций универсальной алгебраической геометрии (UAG). С одной стороны, универсальная алгебраическая геометрия является эквациональной алгебраической геометрией в произвольном многообразии алгебр Θ. Это значит, что алгебраические множества определяются системами уравнений в свободных алгебрах из Θ. С другой стороны, универсальная алгебраическая геометрия распространяется до геометрии логики первого порядка (FOL) в произвольном Θ (логической геометрии). Это значит, что алгебраические множества определяются произвольными формулами первого порядка, семантически сжатыми в данном Θ. В случае логической геометрии алгебраические множества называются элементарными множествами, а произвольные формулы первого порядка заменяют уравнения (подробности см. в [3]).

В этой статье мы исходим из системы понятий алгебраической логики. В принципе такой подход можно перевести на обычный язык теории моделей. Однако мы убеждены, что применение алгебраической логики делает главные идеи статьи более явными и согласованными.

Мост между логической геометрией и теорией моделей наводится алгебраической логикой с помощью алгебры формул $\Phi = \Phi(X)$, где X – конечное множество переменных. В действительности, $\Phi(X)$ – это некоторое множество формул первого порядка некоторого сорта X, свертывающееся определенным образом в алгебру формул. Точное определение алгебры $\Phi = \Phi(X)$ дано в п. 5.5 (см. также [4]–[6]).

Пусть $W = W(X)$ – свободная алгебра в Θ над X. Равенство $w \equiv w'$, являющееся элементом алгебры $\Phi(X)$, соответствует равенству $w = w'$ в $W(X)$. Таким образом, равенства рассматриваются как нульместные операции (константы) в $\Phi(X)$. Булевы алгебры с равенствами вида $w \equiv w'$ и кванторами $\exists x$, действующими по всем $x \in X$, называются *расширенными булевыми алгебрами* (о списке тождеств см. [3], а также пп. 2.1 и 5.2 настоящей статьи). Алгебра $\Phi(X)$ служит примером расширенной булевой алгебры. Однако в $\Phi(X)$ существуют и другие операции s_* (см. ниже).

Как было сказано, универсальная алгебраическая геометрия – это алгебраическая геометрия, ассоциированная с произвольным многообразием алгебр Θ. Если $\Theta = \mathrm{Com} - K$ – это многообразие коммутативных ассоциативных алгебр с единицей над полем P, то мы получаем классическую алгебраическую геометрию. Одна из основных проблем, относящихся к универсальной алгебраической геометрии, – понять, какая часть богатой геометрии многообразия

$\Theta = \mathrm{Com} - K$ (т.е. классической алгебраической геометрии) сохраняется в других многообразиях Θ. С другой стороны, новые идеи, относящиеся к UAG и в особенности к логической геометрии, появляются в классической ситуации $\mathrm{Com} - K$.

Важно отметить, что эквациональная алгебраическая геометрия (AG) связана с категорией Θ^0 свободных в Θ алгебр $W = W(X)$ с конечными множествами X. Чтобы облегчить интуитивное понимание, нужно упомянуть, что в классическом случае Θ^0 является категорией всех полиномиальных алгебр над полем P. Роль Θ^0 в логической геометрии (LG) играет специальная категория Hal^0_Θ, чьи объекты суть алгебры формул $\Phi(X)$ (мы используем обозначение Hal, чтобы напомнить роль П. Халмоша в алгебраической логике). Категории Θ^0 и Hal^0_Θ связаны ковариантным функтором

$$\Theta^0 \to \mathrm{Hal}^0_\Theta.$$

Этот функтор сопоставляет морфизм $s_*\colon \Phi(X) \to \Phi(Y)$ в Hal^0_Θ каждому гомоморфизму-морфизму $s\colon W(X) \to W(Y)$ в Θ^0. Здесь s_* является булевым гомоморфизмом, в некотором смысле совместимым с кванторами и тождествами. Этот же s_* можно трактовать как операцию в специальной многосортной алгебре Халмоша (подробности см. в параграфе 5).

Сделаем теперь шаг вперед к общей теории. Обозначим через $\Phi^0 = \Phi^0(X)$ подалгебру в $\Phi(X)$, порожденную всеми тождествами в сигнатуре булевых операций и кванторов. Это расширенная булева алгебра, являющаяся подалгеброй расширенной булевой алгебры $\Phi(X)$. Эта подалгебра обычно меньше, чем $\Phi(X)$, так как операции s_* не вовлечены в запись элементов из Φ^0. Как мы заметим здесь, алгебра $\Phi^0(X)$ не может быть определена независимо от алгебры $\Phi(X)$. В свою очередь $\Phi(X)$ определяется посредством алгебраической логики.

Замечание 1.1. Из аксиом алгебр Халмоша (п. 5.3) следует, что если даны $s\colon W(Y) \to W(X)$ и равенство v в $\Phi^0(Y)$, то $s_*(v)$ будет равенством в $\Phi^0(X)$. Однако для формулы $v = \exists y v_0 \in \Phi^0(Y)$ формула $s_*(v)$ может не лежать в $\Phi^0(X)$ (см., например, предложение 4.12).

Рассмотрим теперь происхождение морфизмов и операций s_*. Причины для введения s_* состоят в следующем. Как известно, стандартная алгебраическая логика первого порядка использует бесконечное число переменных. Обозначим это бесконечное множество переменных через X^0. Предполагая нужды логической геометрии, мы будем иметь дело с системой Γ всех конечных подмножеств X в X^0. В алгебраической логике этот подход ведет к категорям Халмоша и многосортным (т.е. Γ-сортным) алгебрам Халмоша. Различные $\Phi(X)$, $X \in \Gamma$, должны быть как-то связаны, что требует введения операций и морфизмов типа s_* (подробности см. в параграфе 5, где речь идет об алгебре (категории) $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$).

Некоторые понятия, используемые нами, можно найти в [3]. Для полноты изложения мы воспроизводим много определений из [3]. Знакомство с работами, посвященными универсальной алгебраической геометрии ([4]–[10] и др.), сделают материал более доступным.

Статья организована следующим образом. В параграфе 1 мы вводим понятие изотипных алгебр и соотносим его с известными понятиями универсальной алгебраической геометрии. Параграф 2 имеет дело с нётеровыми свойствами. В параграфе 3 мы вводим понятие логически отделимой алгебры и приводим примеры изотипных, но не изоморфных алгебр. Параграф 4 посвящен логически совершенным алгебрам. Мы показываем, что всякая группа вкладывается в логически совершенную группу. Кроме того, мы рассматриваем два примера абелевых групп и изучаем их поведение по отношению к логическим свойствам. Параграф 5 призван сделать статью самодостаточной; здесь мы предоставляем читателю необходимые понятия алгебраической логики, в частности, мы определяем алгебру формул $\Phi(X)$, играющую главную роль во всех рассмотрениях. В параграфе 5 находится также список открытых проблем.

Настоящая статья не содержит сложных теорем. Однако она предоставляет новый взгляд и новые проблемы в той области математики, которую можно охарактерезовать как логику в алгебре. Что касается предметов исследования, главную роль в статье играет алгебра $H \in \Theta$, которая рассматривается в перспективе ее логических и геометрических инвариантов.

1.2. Алгебра $\mathrm{Bool}(W(X), H)$. Пусть H – некоторая алгебра в многообразии Θ. Возьмем свободную в Θ алгебру $W = W(X)$ с каким-нибудь конечным X и рассмотрим множество $\mathrm{Hom}(W, H)$ как аффинное пространство. Его точки суть гомоморфизмы $\mu\colon W \to H$. Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то $\mathrm{Hom}(W, H)$ изоморфно $H^{(n)}$ и точка μ соответствует n-ке $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in H^{(n)}$.

Булеву алгебру всех подмножеств множества $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ обозначим $\mathrm{Bool}(W(X), H)$. Определим действие кванторов $\exists x$, $x \in X$. Напомним (см. [11]), что если B – булева алгебра, то отображение $\exists\colon B \to B$ является *экзистенциальным квантором*, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\exists(0) = 0$;
2) $\exists(a) \geqslant a$;
3) $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$.

Универсальный квантор $\forall\colon B \to B$ определяется двойственно как $\forall(a) = \neg(\exists(\neg a))$.

Пусть теперь $A \in \mathrm{Bool}(W(X), H)$ и $x \in X$. Положим $\mu \in \exists x A$, если найдется такое $\nu \in A$, что $\mu(x') = \nu(x')$ для любого $x' \in X$, $x' \neq x$. Необходимые условия 1)–3) выполнены и определение экзистенциального квантора прекрасно согласуется с интуицией.

Пусть, далее, $w \equiv w'$ – какое-то равенство в алгебре формул $\Phi(X)$. Определим соответствующий элемент алгебры $\mathrm{Bool}(W(X), H)$ как

$$\mathrm{Val}_H^X(w \equiv w') = \{\mu\colon W \to H \mid (w, w') \in \mathrm{Ker}(\mu)\}.$$

Эти элементы рассматриваются как равенства в $\mathrm{Bool}(W(X), H)$.

Итак, $\mathrm{Bool}(W(X), H)$ определено как расширенная булева алгебра.

Как мы увидим, соответствие $w \equiv w' \to \mathrm{Val}_H^X(w \equiv w')$ естественно продолжается до гомоморфизма расширенных булевых алгебр

$$\mathrm{Val}_H^X\colon \Phi(X) \to \mathrm{Bool}(W(X), H). \tag{$*$}$$

Мы рассматриваем также категорию $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ всех алгебр вида $\mathrm{Bool}(W(X), H)$ с естественными морфизмами s_*. Значения и морфизмым в Hal_Θ^0 и $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ связаны следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} \Phi(X) \arrow[r, "s_*"] \arrow[d, "\mathrm{Val}_H^X"'] & \Phi(Y) \arrow[d, "\mathrm{Val}_H^Y V"] \\ \mathrm{Bool}(W(X), H) \arrow[r, "s_*"] & \mathrm{Bool}(W(Y), H). \end{tikzcd} \tag{$**$}$$

Замечание 1.2. Существование гомомофизмов Val_H^X для любой алгебры H в Θ, удовлетворяющей вышеприведенной диаграмме, было ведущей идеей для определения алгебры формул $\Phi(X)$ и категории таких алгебр формул Hal_Θ^0. Здесь очевидно преимущество применения алгебраической логики.

Наша цель – определить систему алгебр формул $\Phi(X)$, где X пробегает конечные подмножества множества X^0, и определить категорию Hal_Θ^0 этих алгебр, таким образом, чтобы условия ($*$) и ($**$) выполнялись для всякой алгебры $H \in \Theta$ и всякого гомоморфизма $s\colon W(X) \to W(Y)$.

В действительности, нам нужно определить верхний уровень диаграммы ($**$) и ее вертикальные стрелки, уже имея заданным нижний уровень диаграммы (это ведет к построениям и условиям, которые будут реализованы в параграфе 5).

Такой подход к определению алгебры $\Phi(X)$ и категории Hal_Θ^0 хорошо согласуется с подходом, основанным на применении эквивалентности Линденбаума–Тарского в логике.

1.3. Логическое ядро точки, типы, изотипные алгебры. Определим понятие *логического ядра* точки как $\mu\colon W(X) \to H$. Таким образом, наряду с (обычным) ядром $\mathrm{Ker}(\mu)$ мы будем рассматривать логическое ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$. Это логическое ядро является важным логическим инвариантом точки.

Определение 1.3. Пусть $u \in \Phi(X)$ и $\mu\colon W(X) \to H$ – некоторая точка в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Положим $u \in \mathrm{LKer}(\mu)$, если $\mu \in \mathrm{Val}_H^X(u)$.

В этом случае мы будем говорить, что $\mathrm{Val}_H^X(u)$ – *значение формулы u в* $\mathrm{Bool}(W(X), H)$, а точка μ – *решение "уравнения" u в* $\mathrm{Hom}(W(X), H)$.

Это определение соответствует обычному индуктивному определению точки, удовлетворяющей формуле (см. [2]).

Имеет место также
$$\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{LKer}(\mu) \cap M_X,$$
где M_X – множество всех равенств $w \equiv w'$, $w, w' \in W(X)$.

Покажем, что ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$ является ультрафильтром булевой алгебры $\Phi(X)$. Вначале докажем, что оно является фильтром. Пусть $u_1, u_2 \in \mathrm{LKer}(\mu)$. Имеем
$$\mu \in \mathrm{Val}_H^X(u_1) \cap \mathrm{Val}_H^X(u_2) = \mathrm{Val}_H^X(u_1 \wedge u_2).$$
Значит, $u_1 \wedge u_2 \in \mathrm{LKer}(\mu)$. Пусть теперь $u \in \mathrm{LKer}(\mu)$, $v \in \Phi(X)$. Имеем
$$\mu \in \mathrm{Val}_H^X(u) \cup \mathrm{Val}_H^X(v) = \mathrm{Val}_H^X(u \vee v).$$
Таким образом, $u \vee v \in \mathrm{LKer}(\mu)$ и $\mathrm{LKer}(\mu)$ – фильтр.

Пусть теперь $u \in \Phi(X), u \notin \mathrm{LKer}(\mu)$, т.е.
$$\mu \notin \mathrm{Val}_H^X(u), \qquad \mu \in \neg\mathrm{Val}_H^X(u) = \mathrm{Val}_H^X(\neg u).$$
Тогда $\neg u \in \mathrm{LKer}(\mu)$ и, значит, $\mathrm{LKer}(\mu)$ – ультрафильтр.

Определение 1.4. Всякий ультрафильтр в $\Phi(X)$ назовем *X-типом.* Тип T назовем *X-типом алгебры* $H \in \Theta$, если $T = \mathrm{LKer}(\mu)$ для некоторого $\mu\colon W(X) \to H$.

Замечание 1.5. Ср. с определением типа из [2].

Будем говорить, что тип T *реализуется в алгебре* H, если T является X-типом алгебры H. Обозначим через $S^X(H)$ систему всех X-типов алгебры H. Это важный логический инвариант алгебры H.

Определение 1.6. Алгебры H_1 и H_2 в Θ называются *изотипными*, если для всякого конечного X любой X-тип алгебры H_1 является X-типом алгебры H_2 и наоборот.

Таким образом, алгебры H_1 и H_2 *изотипны*, если
$$S^X(H_1) = S^X(H_2) \qquad \text{для всех} \quad X.$$
Далее, заметим, что логическое ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$ точки $\mu\colon W(X) \to H$ содержит элементарную X-теорию алгебры H. В самом деле, если $u \in \mathrm{Th}^X(H)$, то $\mathrm{Val}_H^X(u) = \mathrm{Hom}(W(X), H)$. В частности, $\mu \in \mathrm{Val}_H^X(u)$ и $u \in \mathrm{LKer}(\mu)$. Таким образом, $\mathrm{Th}^X(H) \subset \mathrm{LKer}(\mu)$; здесь
$$\mathrm{Th}^X(H) = \{u \in \Phi(X) \mid \mathrm{Val}_H^X(u) = \mathrm{Hom}(W(X), H)\}.$$

Теперь ясно, что если H_1 и H_2 изотипны, то
$$\mathrm{Th}^X(H_1) = \mathrm{Th}^X(H_2),$$
где $\mathrm{Th}^X(H)$ – элементарная X-теория алгебры H.

Определение 1.7. Скажем, что алгебра H является *насыщенной*, если для всякого X любой ультрафильтр T в $\Phi(X)$, содержащий $\mathrm{Th}^X(H)$, реализуется в H.

Замечание 1.8. Определение насыщенной алгебры, используемое в теории моделей, оперирует также с константами. В нашем определении константы уже входят в сигнатуру многообразия Θ.

Из определения следует, что если насыщенные алгебры H_1 и H_2 элементарно эквивалентны, т.е. $\mathrm{Th}(H_1) = \mathrm{Th}(H_2)$, то они изотипны. Таким образом, насыщенные алгебры элементарно эквивалентны, если и только если они изотипны. Как мы отметили выше, изотипные алгебры всегда элементарно эквивалентны. Однако понятие изотипности сильнее понятия элементарной эквивалентности. Фактически отношение алгебр "быть изотипными" можно трактовать как обобщение идеи насыщенности алгебр.

В дальнейшем мы рассматриваем логически нётеровы алгебры. Утверждение для таких алгебр также двустороннее: логически нётеровы алгебры H_1 и H_2 элементарно эквивалентны, если и только если они изотипны.

Мы будем изучать определение изотипных алгебр с позиции логической геометрии, но сначала обсудим эквациональную алгебраическую геометрию. Заметим, что в алгебраической геометрии также бывает полезно говорить об атомарном ядре, под которым подразумеваются все те равенства $w \equiv w'$ и их отрицания $w \not\equiv w'$, которые лежат в $\mathrm{LKer}(\mu)$. Обозначим атомарное ядро через $At\mathrm{Ker}(\mu)$. Если $w \equiv w' \notin At\mathrm{Ker}(\mu)$, то $w \not\equiv w' \in At\mathrm{Ker}(\mu)$. Фактически $At\mathrm{Ker}(\mu)$ является ядром точки μ, представленным в алгебре формул $\Phi(X)$.

Мы рассматриваем также специальное *логическое ядро* $\mathrm{LKer}^0(\mu)$, определенное как

$$\mathrm{LKer}^0(\mu) = \mathrm{LKer}(\mu) \cap \Phi^0(X).$$

Это ядро является ультрафильтром в алгебре $\Phi^0(X)$.

1.4. Основные соответствия Галуа в алгебраической геометрии и логической геометрии. AG- и LG-эквивалентность алгебр. Рассмотрим соответствие Галуа между подмножествами A в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ и системами уравнений T в $W = W(X)$. Эти T можно рассматривать как двуместные отношения в W. Для каждого T положим

$$T'_H = A = \{\mu\colon W \to H \mid T \subset \mathrm{Ker}(\mu)\}.$$

Для произвольного A положим

$$A'_H = T = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{Ker}(\mu).$$

Мы имеем здесь соответствие Галуа и можем говорить о замыканиях Галуа A''_H, T''_H. Любое множество $A \subset \mathrm{Hom}(W(X), H)$ вида $A = T'_H$ замкнуто; назовем его *алгебраическим множеством*. Любая система уравнений T вида $T = A'_H$ будет H-замкнутой конгруэнцией в W.

Сделаем то же самое для логической геометрии, подставляя $\mathrm{LKer}(\mu)$ вместо $\mathrm{Ker}(\mu)$. Здесь T будет произвольным подмножеством в $\Phi = \Phi(X)$. Положим

$$T^L_H = A = \{\mu\colon W \to H \mid T \subset \mathrm{LKer}(\mu)\}, \qquad A^L_H = T = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{LKer}(\mu).$$

Соответствующие замыкания суть T^{LL}_H и A^{LL}_H. Каждое A вида $A = T^L_H$ назовем *элементарным множеством* (оно определено и для бесконечного T). Каждое $T = A^L_H$ будет H-замкнутым фильтром в булевой алгебре $\Phi = \Phi(X)$. Имеем также

$$T^L_H = A = \bigcap_{u \in T} \mathrm{Val}^X_H(u), \qquad T = A^L_H = \{u \in \Phi(X) \mid A \subset \mathrm{Val}^X_H(u)\}.$$

Вспомним, что алгебры H_1 и H_2 в Θ называются *геометрически эквивалентными* (*AG-эквивалентными*), если для всякого конечного X и всякого T в $W(X)$ верно

$$T''_{H_1} = T''_{H_2}$$

(см. [4], [5]), и что H_1 и H_2 называются *LG-эквивалентными*, если всегда

$$T^{LL}_{H_1} = T^{LL}_{H_2}$$

для всех $T \subset \Phi(X)$ (см. [3]).

Отметим, что можно, начиная с логического ядра $\mathrm{LKer}^0(\mu)$, также установить соответствие Галуа между подмножествами T в $\Phi^0(X)$ и множествами точек A в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$.

1.5. LG-эквивалентность и изотипные алгебры. Установим соотношения между LG-эквивалентностью и изотипностью алгебр. Пусть A – подмножество в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, состоящее из единственной точки $\mu\colon W(X) \to H$. Имеем

$$T = A^L_H = \{\mu\}^L_H = \mathrm{LKer}(\mu).$$

Значит, $\mathrm{LKer}(\mu) = \{\mu\}^L_H$ и $\mathrm{LKer}(\mu)$ является H-замкнутым ультрафильтром. Пусть T – ультрафильтр и $T = \mathrm{LKer}(\mu)$. Возьмем $T^L_H = A_0$ и положим $\nu \in A_0$. Имеем

$$\{\nu\}^L_H = \mathrm{LKer}(\nu) \supset {A_0}^L_H = T = \mathrm{LKer}(\mu).$$

Видим, что любые две точки в A_0 имеют одно и то же логическое ядро. Кроме того, можно заметить, что если T – ультрафильтр в $\Phi(X)$, то T будет X-типом для H, если и только если, множество $A_0 = T^L_H$ непусто.

Определение 1.9. Определим эквивалентность $\rho = \rho^X_H$ на множестве $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, полагая $\mu\rho\nu$, если и только если $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$.

Рассмотрим фактормножество $\mathrm{Hom}(W(X), H)/\rho = \overline{\mathrm{Hom}}(W(X), H)$. Имеется биекция $\overline{\mathrm{Hom}}(W(X), H) \to S^X(H)$.

Заметим, что любой класс эквивалентности ρ является элементарным множеством, заданным типом $\mathrm{LKer}(\mu) = T$, где μ принадлежит этому классу эквивалентности. Согласно [5] каждое элементарное множество инвариантно относительно действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(H)$. Следовательно, если μ и ν сопряжены некоторым автоморфизмом $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$, то $\mu\rho\nu$. Вспомним, что действие группы $\mathrm{Aut}(H)$ в $\mathrm{Hom}(W, H)$ определяется сдвигами $\mu \to \mu\sigma$. При определенных условиях обратное также верно. В этих случаях классы эквивалентности ρ суть в точности орбиты действия группы $\mathrm{Aut}(H)$.

Следующая теорема основная в статье.

Теорема 1.10. *Алгебры H_1 и H_2 являются LG-эквивалентными, если и только если они изотипны.*

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 – некоторые LG-эквивалентные алгебры. Это означает, что для всякого конечного X и всякого множества T формул из $\Phi(X)$ данное T будет H_1-замкнутым, если и только если T является H_2-замкнутым.

Возьмем теперь какой-нибудь ультрафильтр T в $\Phi(X)$, и пусть T будет X-типом над H_1. Этот T является H_1-замкнутым и, следовательно, H_2-замкнутым. Здесь $T^L_{H_2}$ непусто и, значит, T есть X-тип над H_2. Переход от H_2 к H_1 осуществляется подобным же образом. Следовательно, H_1 и H_2 изотипны.

Пусть, далее, H_1 и H_2 изотипны. Это означает, в частности, что если $T = \mathrm{LKer}(\mu)$ для $\mu\colon W(X) \to H_1$, то также $T = \mathrm{LKer}(\nu)$ для некоторого $\nu\colon W(X) \to H_2$. То же самое верно и при переходе от H_2 к H_1. Таким образом, T одновременно H_1- и H_2-замкнуто.

Пусть теперь T – какой-нибудь H_1-замкнутый фильтр в $\Phi(X)$. Мы хотим проверить, что T является H_2-замкнутым. Возьмем $A = T^L_{H_1}$. Тогда

$$T = A^L_{H_1} = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{LKer}(\mu).$$

Это значит, что $u \in T$ равносильно $A \subset \mathrm{Val}^X_{H_1}(u)$.

Покажем, что пересечение H-замкнутых фильтров также H-замкнуто. Как мы знаем, любой H_1-замкнутый фильтр вида $\mathrm{LKer}(\mu)$ является H_2-замкнутым. Таким образом, $T = \bigcap_{\mu\in A} \mathrm{LKer}(\mu)$ является H_2-замкнутым фильтром. Подобным же образом H_2-замкнутость множества T влечет его H_1-замкнутость. Это верно для любого X. Значит, H_1 и H_2 являются LG-эквивалентными.

Остается проверить, что пересечение $T = \bigcap_\alpha T_\alpha$ по всем H-замкнутым T_α, $\alpha \in I$, где I – некоторое множество индексов, также H-замкнуто.

Возьмем $T_\alpha = (A_\alpha)^L_H$ и проверим, что $\bigcap_\alpha (A_\alpha)^L_H = (\bigcup_\alpha A_\alpha)^L_H$. Пусть $u \in \bigcap_\alpha T_\alpha = T$. Включения $u \in T_\alpha$ и $A_\alpha \subset \mathrm{Val}^X_H(u)$ всегда выполнены. Следовательно, $\bigcup_\alpha A_\alpha \subset \mathrm{Val}^X_H(u)$ и, значит, $u \in (\bigcup_\alpha A_\alpha)^L_H$.

Пусть $u \in (\bigcup_\alpha A_\alpha)^L_H$. Тогда $\bigcup_\alpha A_\alpha \subset \mathrm{Val}^X_H(u)$. Включения $A_\alpha \subset \mathrm{Val}^X_H(u)$ и $u \in (A_\alpha)^L_H = T_\alpha$ всегда выполнены. Следовательно, $u \in T$.

Из данной теоремы следует, что если алгебры H_1 и H_2 являются LG-эквивалентными, то они элементарно эквивалентны (см. [3]). Кроме того, если H_1 и H_2 изотипны, то категории элементарных множеств $LK_\Theta(H_1)$ и $LK_\Theta(H_2)$ (см. [3]) изоморфны (также см. параграф 5).

Замечание 1.11. Наше определение типа соответствует понятию полного типа в теории моделей. Полный тип – это H-замкнутый ультрафильтр, заданный одной точкой. Однако, произвольное H-замкнутое множество задается множеством точек. В этом случае также существуют связи с общей теорией типов в теории моделей. В частности, H-замыкание произвольного типа всегда будет пересечением полных типов.

1.6. Инфинитарная логика. Сделаем несколько замечаний, касающихся связей с инфинитарной логикой. Начнем с квазитождеств. Возьмем некоторое двуместное отношение T на $W = W(X)$. Рассмотрим формулу (квазитождество)

$$\Big(\bigwedge_{(w,w')\in T} (w \equiv w')\Big) \to (w_0 \equiv w'_0). \tag{$\star$}$$

Если T бесконечно, эта формула будет инфинитарным квазитождеством.

Пусть, далее, H – какая-то алгебра в Θ; рассмотрим T''_H. В [12] доказано, что $(w_0, w'_0) \in T''_H$, если и только если квазитождество ($\star$) выполнено в H.

Исходя теперь из $T \subset \Phi(X)$ рассмотрим формулу

$$\Big(\bigwedge_{u\in T} u\Big) \to v, \tag{$\star\star$}$$

где $v \in \Phi(X)$. Формула ($\star\star$) инфинитарна, если множество T бесконечно. Будем писать для краткости $T \to v$. Эта формула выполняется в H, если и только если $v \in T^{LL}_H$ (см. [6]). Обозначим через $\mathrm{Im(Th)}(H)$ множество всех формул вида $T \to v$, выполненных в H. Оно является импликативной теорией алгебры H. Можно показать, что алгебры H_1 и H_2 являются LG-*эквивалентными* (*изотипными*) тогда и только тогда, когда их импликативные теории совпадают, т.е. $\mathrm{Im(Th)}(H_1) = \mathrm{Im(Th)}(H_2)$ (см. [3]). Присутствие здесь инфинитарных формул обусловлено задачами универсальной алгебраической геометрии. Эти формулы, конечно, хорошо известны и в теории моделей. В частности, они участвуют в теории абстрактных элементарных классов (AEC-классов) моделей (см. [13]).

1.7. Соответствие Галуа и морфизмы в $\mathbf{Hal}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{\Theta}}$. Установим соотношение между соответствием Галуа и морфизмами в категории Hal^0_Θ. Пусть даны какие-то $s\colon W(X)\to W(Y)$ и $s_*\colon \Phi(X)\to\Phi(Y)$. Для любого $u\in\Phi(X)$ имеем

$$\mathrm{Val}^Y_H(s_*u)=s_*\mathrm{Val}^X_H(u).$$

Здесь $\mu\in s_*\mathrm{Val}^X_H(u)$, если $\mu s\in\mathrm{Val}^X_H(u)$.

Для $T\subset\Phi(X)$ обозначим через s_*T подмножество в $\Phi(Y)$, состоящее из s_*u, $u\in T$. Имеем

$$(s_*T)^L_H=s_*T^L_H$$

(см. [5]).

Таким образом, если $A=T^L_H$ – элементарное множество в $\mathrm{Hom}(W(X),H)$, то s_*A – элементарное множество в $\mathrm{Hom}(W(Y),H)$. Как обычно, $\mu\in s_*A$, если $\mu s\in A$.

Свяжем теперь X- и Y-типы над H для данных $s\colon W(X)\to W(Y)$ и $s_*\colon\Phi(X)\to\Phi(Y)$. Для каждой точки $\nu\colon W(X)\to H$ обозначим через $\mathrm{LKer}^X(\nu)$ ее логическое ядро, помня, что это ядро вычислено в $\Phi(X)$. Проверим, что

$$s_*\mathrm{LKer}^X(\mu s)\subset\mathrm{LKer}^Y(\mu)$$

для $\mu\colon W(Y)\to H$.

Пусть $u\in\Phi(X)$, и пусть $u\in\mathrm{LKer}^X(\mu s)$. Это дает $\mu s\in\mathrm{Val}^X_H(u)$. Таким образом, $\mu\in s_*\mathrm{Val}^X_H(u)=\mathrm{Val}^Y_H(s_*u)$, т.е. $s_*u\in\mathrm{LKer}^Y(\mu)$. Включение проверено.

Применим снова L-переход. Имеем

$$(\mathrm{LKer}^Y(\mu))^L_H=B\subset(s_*\mathrm{LKer}^X(\mu s))^L_H=s_*(\mathrm{LKer}^X(\mu s))^L_H=s_*A.$$

Здесь B – замыкание точки μ, A – замыкание точки μs, а также $B\subset\mathrm{Hom}(W(Y),H)$, $A\subset\mathrm{Hom}(W(X),H)$, $s_*A\subset\mathrm{Hom}(W(Y),H)$ и $B\subset s_*A$; B и A – минимальные элементарные множества (т.е. не содержащие других элементарных множеств), тогда как множество s_*A не обязательно минимально.

1.8. Отношения $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\tau}$. Наряду с отношением ρ рассмотрим отношения ρ_0 и τ на данном множестве $\mathrm{Hom}(W(X),H)$. Отношение ρ_0 задается разложением множества $\mathrm{Hom}(W(X),H)$ на орбиты группы $\mathrm{Aut}(H)$. Включение $\rho_0\subset\rho$ выполнено всегда, но нас интересует ситуация $\rho_0=\rho$.

Пусть $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, и пусть

$$(\mu(x_1),\dots,\mu(x_n))=\bar a=(a_1,\dots,a_n),\qquad(\nu(x_1),\dots,\nu(x_n))=\bar b=(b_1,\dots,b_n)$$

для точек μ и ν. Обозначим через A и B подалгебры в H, порожденные всеми $a_1,\dots,a_n$ и всеми $b_1,\dots,b_n$ соответственно. Положим $\mu\tau\nu$, если и только если соответствия $a_i\to b_i$ задают изоморфизм $\eta\colon A\to B$. Имеем $\rho_0\subset\tau$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 20. *Условие $\mu\tau\nu$ выполняется тогда и только тогда, когда $At\mathrm{Ker}(\mu)=At\mathrm{Ker}(\nu)$ в $\Phi(X)$, или, что то же самое, $\mathrm{Ker}(\mu)=\mathrm{Ker}(\nu)$ в $W(X)$.*

Доказательство. Пусть выполнено $\mu\tau\nu$ и задан соответствующий изоморфизм $\eta\colon A\to B$. Возьмем $w\equiv w'\in At\mathrm{Ker}(\mu)$. Имеем $w^\mu=w'^\mu$ в A и $w^{\mu\eta}=w'^{\mu\eta}$ в B. Равенство $w^\nu=w'^\nu$ выполнено в B и, значит, $w\equiv w'\in At\mathrm{Ker}(\nu)$. Подобным же образом, если $w\not\equiv w'\in At\mathrm{Ker}(\mu)$, то $w\not\equiv w'\in At\mathrm{Ker}(\nu)$, так что $At\mathrm{Ker}(\mu)\subset At\mathrm{Ker}(\nu)$. Обратное включение доказывается аналогично.

Проверим обратное утверждение. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\alpha\colon W(X)\to A,\qquad\beta\colon W(X)\to B,$$

где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $\alpha(x_i) = a_i = \mu(x_i)$, $\beta(x_i) = b_i = \nu(x_i)$. Пусть $w(x_1, \dots, x_n) = w'(x_1, \dots, x_n)$ лежат в ядре $\mathrm{Ker}(\alpha)$. Тогда $w \equiv w' \in At\mathrm{Ker}(\mu) = At\mathrm{Ker}(\nu)$. Следовательно, $w \equiv w' \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Точнее, $w \equiv w' \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ равносильно $w \equiv w' \in \mathrm{Ker}(\beta)$, т.е. $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$. Получаем изоморфизм $A \to B$, индуцированный отображением $a_i \to b_i$.

Ясно, что $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$ влечет $At\mathrm{Ker}(\mu) = At\mathrm{Ker}(\nu)$; это означает, что $\rho \subset \tau$. Получаем $\rho_0 \subset \rho \subset \tau$, и если $\tau = \rho_0$ для данных X и H, то $\rho = \rho_0$.

Покажем, что всякий класс эквивалентности τ является элементарным множеством. Пусть T – произвольная конгруэнция алгебры $W = W(X)$. Рассмотрим множество формул в $\Phi(X)$, заданное равенством $T' = T'_1 \cup T'_2$, где $T'_1 = \{w \equiv w' \mid (w, w') \in T\}$ и $T'_2 = \{w \not\equiv w' \mid (w, w') \notin T\}$. Легко понять, что точка $\mu\colon W(X) \to H$ удовлетворяет множеству формул T', т.е. $\mu \in (T')^L_H$, если и только если $\mathrm{Ker}(\mu) = T$. Значит, класс эквивалентности τ, содержащий точку μ, является элементарным множеством, определенным множеством формул T' с $\mathrm{Ker}(\mu) = T$. (Мы всегда будем использовать это замечание, имея дело с отношением τ.)

Заметим, что основной проблемой в этой статье будет нахождение условий на алгебру H, представляющих изоморфизм $\eta\colon A \to B$, реализующийся некоторым автоморфизмом алгебры H. В этом случае имеем $\tau = \rho_0$.

1.9. Изотипность точек. Наряду с понятием изотипных алгебр введем понятие изотипных точек над алгебрами. Скажем, что две X-точки $\mu, \nu\colon W(X) \to H$ *изотипны*, если $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$ (это значит, что выполнено $\mu\rho\nu$).

Это понятие ведет к определению *логической изотипности также для элементов* алгебры H. Скажем, что элементы a_1 и a_2 алгебры H *изотипны*, если соответствующие точки $\mu, \nu \in \mathrm{Hom}(W(x), H)$ с $\mu(x) = a_1$ и $\nu(x) = a_2$ изотипны.

В действительности, понятие изотипных элементов алгебры H имеет следующий смысл. Будем исходить из формулы или множества формул T. Пусть элементы a_1 и a_2 из H с соответствующими точками $\mu, \nu \in \mathrm{Hom}(W(x), H)$ изотипны. Тогда точки μ и ν изотипны, и пусть T принадлежит $\mathrm{LKer}(\mu)$. Тогда T тоже принадлежит $\mathrm{LKer}(\nu)$. Итак, обе точки удовлетворяют T, и пусть формулы из T описывают некоторое алгебраическое свойство элементов из H. Изотипность элементов a_1 и a_2 означает, что оба этих элемента удовлетворяют данному алгебраическому свойству. Например, если g и g' изотипны и g имеет конечный порядок n, то g' имеет тот же самый порядок. Здесь T состоит из формулы $x^n \equiv 1$.

В качестве другого примера рассмотрим энгелевские элементы и ниль-элементы групп. Напомним, что элемент $g \in H$ называется *n-энгелевским* элементом, если найдется такое $n = n(g)$, что $[a, g, \dots, g] = 1$ для всякого $a \in H$. Здесь $[a, g, \dots, g]$ обозначает составной коммутатор, в котором g повторено n раз. Таким образом, точка μ с $\mu(x) = a$, $\mu(y) = g$ удовлетворяет формуле $\forall x([x, y, \dots, y] = 1)$ тогда и только тогда, когда g является n-энгелевским элементом. Эта формула есть T.

Далее считаем $\mu, \nu\colon W(x, y) \to H$, $\mu(x) = a$, $\mu(y) = g$, $\nu(x) = a'$, $\nu(y) = g'$. Пусть μ и ν изотипны (т.е. g и g' изотипны), и пусть эдемент g является n-энгелевским. Тогда g' также будет энгелевским. Эти наблюдения показывают, что если H – нётерова группа, а g принадлежит ее нильпотентному радикалу, то g' тоже принадлежит ему (см. [14] и [15]). Аналогичный факт имеет место для разрешимых радикалов нётеровой группы для соответствующего T и изотипных g и g' (см. [16]).

Перейдем к ниль-элементам. Элемент g группы G называется ниль-элементом, если для всякого $a \in G$ найдется такое $n = n(a, g)$, что $[a, g, \dots, g] = 1$, где g взято n раз. Свойство быть ниль-элементом не выразимо формулой первого порядка, поскольку определение использует квантор вида $\exists n$ по натуральным n.

Можно улучшить это положение следующим образом. Фиксируем в группе G два элемента g и g' и рассмотрим все возможные пары (a, g) и (a', g'), где a и a' взаимно однозначно соотнесены. Предположим, что соответствующие $\mu, \nu\colon W(x, y) \to H$ изотипны. Допустим теперь, что g – ниль-элемент. Тогда пара (a, g) удовлетворяет равенству $[x, y, \dots, y] = 1$. Изотипность точек μ, ν влечет, что пара (a', g') удовлетворяет этому же самому равенству. Это верно для любых подходящих a и a', значит, g' – тоже ниль-элемент.

Пусть теперь G – разрешимая группа (или, более общим образом, радикальная группа; см. [17]), а g и g' – ее изотипные элементы. Тогда если один из них принадлежит некоторому локально нильпотентному радикалу, то и второй тоже принадлежит ему. Это следует из предыдущих замечаний, а также из [17]. Также можно рассматривать различные другие радикалы в других группах. На этом пути возникает множество естественных проблем.

2. Логическая нётеровость

2.1. Определения и проблемы. Пусть H – некоторая алгебра из многообразия Θ. Рассмотрим три условия нётеровости для H.

1. Алгебра H называется *логически нётеровой*, если для всякого конечного множества формул X произвольное элементарное множество $A \subset \mathrm{Hom}(W(X), H)$ является конечно определимым. Это означает, что если $A = T^L_H$, то найдется такое конечное множество T_0 (не обязательно подмножество в T), что $A = (T_0)^L_H$.

2. Алгебра H называется *строго логически нётеровой*, если для всякого конечного X и произвольного элементарного множества $A = T^L_H \subset \mathrm{Hom}(W(X), H)$ найдется такое конечное множество $T_0 \subset T$, что $A = (T_0)^L_H$.

3. Алгебра H называется *слабо логически нётеровой*, если для всякого $T \to v$, выполненного в H, найдется такое конечное подмножество $T_0 \subset T$ (возможно, зависящее от v), что $T_0 \to v$ выполнено в H.

Для каждого из этих условий нётеровости изотипность алгебр H_1 и H_2 равносильна их элементарной эквивалентности.

Очевидно, всякая конечная алгебра логически нётерова в любом смысле. В теории моделей приводятся примеры бесконечных логически нётеровых алгебр (см. предложение 2.4).

Нам будет полезно следующее замечание. Все элементарные множества в данном множестве $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ образуют подрешетку решетки всех подмножеств. Двойственно, имеем подрешетку всех H-замкнутых фильтров в $\Phi(X)$. Строгая нётеровость алгебры H равносильна условию нётеровости соответствующей решетки фильтров и, что то же самое, условию артиновости решетки элементарных множеств для конечного X.

Принципиальная проблема, относящаяся к теории моделей, состоит в следующем.

Проблема 2.1. Развить общий подход построения логически нётеровых алгебр H в различных многообразиях Θ.

Здесь Θ может быть многообразием групп, многообразием абелевых групп, многообразием коммутативных ассоциативных алгебр. Например, имеется проблема описания логической нётеровых абелевых групп.

Сделаем несколько замечаний об алгебрах H с конечным множеством типов $S^X(H)$ для любого X. Из определений следует, что если множество $S^X(H)$ конечно, то имеется и конечное число различных H-замкнутых фильтров в $\Phi(X)$. Также имеется конечное число элементарных множеств в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Это дает артиновость и нётеровость соответствующих решеток и строгую нётеровость алгебры H. Понятно, что если имеется конечное число $\mathrm{Aut}(H)$-орбит в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, то и множество $S^X(H)$ конечно.

2.2. Автоморфная финитарность алгебр. В этом пункте мы рассматриваем проблему 2.1.

Определение 2.2. Алгебра H называется *автоморфно* ($\mathrm{Aut}(H)$)-*финитарной*, если при любом конечном X существует лишь конечное число $\mathrm{Aut}(H)$-орбит в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$.

Если H является $\mathrm{Aut}(H)$-финитарным, то существует лишь конечное число типов на H и, значит, лишь конечное число элементарных классов. Поэтому алгебра H строго логически нётерова. Таким образом, возникает вопрос, будет ли алгебра H автоморфно финитарной.

Поставим эту проблему в частном случае групп.

Проблема 2.3. Развить общие методы построения бесконечных автоморфно финитарных групп.

Рассмотрим один пример.

Предложение 2.4. *Пусть H – бесконечная абелева группа, удовлетворяющая тождеству $x^p \equiv 1$ с простым p. Такая группа $\mathrm{Aut}(H)$-финитарна.*

Замечание 2.5. Это предложение не неожиданно с точки зрения хорошо известного теоретико-модельного результата, который доказал Рыль-Нарджевский (см. [18], [2]).

Доказательство. Работаем с многообразием Θ всех абелевых групп, удовлетворяющих тождеству $x^p \equiv 1$, где p простое. Фиксируем $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, и пусть $W = W(X)$ – свободная в Θ группа над X. Эта группа конечна. Пусть T – подгруппа группы W.

Возьмем формулу (в аддитивной записи) $u = (\bigwedge_{u_i \in T}(u_i \equiv 0)) \wedge (\bigwedge_{v_i \notin T}(v_i \not\equiv 0))$. Обозначим $\mathrm{Val}_H^X(u) = V$. Очевидно, точка $\mu\colon W \to H$ принадлежит $V \subset \mathrm{Hom}(W(X), H)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(\mu) = T$.

Пусть теперь μ и ν – две точки в V, а A и B – их образы в H. Тогда $A = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, $B = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$. Поскольку $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Ker}(\nu)$, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] & & B \\ & W(X) \arrow[ul, "\mu"] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь σ – изоморфизм, $\sigma(a_i) = b_i$ и $\mu\sigma = \nu$. Подгруппы A и B имеют дополнения в H, т.е. $A \oplus A' = B \oplus B' = H$. Поскольку H бесконечна, A' и B' бесконечны и изоморфны. Это означает, что изоморфизм $\sigma\colon A \to B$ расширяется до автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$. Следовательно, μ и ν сопряжены посредством этого автоморфизма. Кроме того, последовательности $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ тоже сопряжены посредством автоморфизма σ. Это означает, что множество V принадлежит $\mathrm{Aut}(H)$-орбите, заданной каждой из точек μ и ν. С другой стороны, так как V – элементарное множество, точечная орбита содержится в V. Следовательно, V равно орбите, содержащей точку μ.

Всякая орбита, заданная точкой $\mu\colon W \to H$, имеет такой вид. В самом деле, возьмем $T = \mathrm{Ker}(\mu)$, и пусть формула u построена посредством T.

Тогда $V = \mathrm{Val}_H^X(u)$ будет $\mathrm{Aut}(H)$-орбитой, заданной точкой μ.

Поскольку существует лишь конечное множество различных T и u, имеем конечное множество орбит. Более того, все они суть одноопределенные (определяемые одной формулой) элементарные множества. Группа H является бесконечной строго логически нётеревой группой.

Заметим, что в этом доказательстве используется представление точки $\mu \in H^{(n)}$ как точки-гомоморфизма $\mu\colon W \to H$.

Схожая ситуация имеет место для бесконечномерных векторных пространств над произвольным конечным полем. Если это поле бесконечно, то описание орбит остается тем же самым, но число орбит становится бесконечным. Различные другие примеры бесконечных автоморфно финитарных групп и строго логически нётеровых групп были предложены мне А. Ольшанским (алгебраический подход) и Б. Зильбером (теоретико-модельный подход). Группы в их конструкциях далеко не абелевы (см. также параграф 4.3).

В этой связи возникает проблема о существовании бесконечных нётеровых групп, которые также логически нётеровы. Нётеровы полициклические группы и их конечные расширения не подходят. Бесконечные циклические группы также не являются логически нётеровыми.

Закончим этот параграф одним полезным замечанием.

Предположим, что H_1 и H_2 изотипны и H_1 строго логически нётерова. Тогда H_2 тоже строго логически нётерова.

В самом деле, пусть H_1 и H_2 изотипны и H_1 строго логически нётерова. Тогда для $T \subset \Phi(X)$ и некоторой конечной части $T_0 \subset T$ имеем $T^{LL}_{H_2} = T^{LL}_{H_1} = {T_0}^{LL}_{H_1} = {T_0}^{LL}_{H_2}$ и, значит, $T^{LL}_{H_2} = {T_0}^{LL}_{H_2}$. Следовательно, H_2 строго логически нётерова.

3. Изотипность и изоморфизм

3.1. Отделимые алгебры. Другой общей проблемой является изучение отношений между свойством изотипности и изоморфизмом алгебр. Прежде всего заметим, что существуют неизоморфные изотипные алгебры. Даже в случае полей существуют примеры такого рода (мы приведем примеры изотипных, но не изоморфных алгебр в п. 3.2).

Определение 3.1. Алгебра $H \in \Theta$ называется *отделимой в* Θ, если каждая алгебра $H' \in \Theta$, изотипная с H, изоморфна H.

Замечание 3.2. Иногда стоит изменить определение 3.1 и рассматривать только конечно порожденные H'.

Проблема 3.3. Для каких Θ всякая свободная в Θ алгебра $W = W(X)$ с конечным X отделима?

Другими словами, когда всякая свободная в Θ алгебра $W = W(X)$ с конечным X может быть различима в Θ средствами логики типов (т.е. LG-логики)?

Эта проблема поставлена для произвольного многообразия Θ, но здесь более всего мы интересуемся многообразием групп $\Theta = Grp$ и многообразием $\Theta = \mathrm{Com} - K$ коммутативных и ассоциативных алгебр над полем P.

З. Села (не опубликовано) показал, что свободные некоммутативные группы $F(X)$ и $F(Y)$ изотипны, если и только если они изоморфны.

3.2. Примеры неизоморфных изотипных алгебр.

Предложение 3.4. *Пусть алгебры H_1 и H_2 – бесконечномерные векторные пространства над полем P. Тогда они изотипны.*

Доказательство. Используемый нами метод приложим также к другим случаям. Исходим из многообразия Θ векторных пространств над P. Возьмем $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, и пусть $W = W(X)$ – соответствующий свободный объект, т.е. произвольное линейное пространство размерности n. Рассмотрим точки $\mu\colon W \to H_1$ и $\nu\colon W(X) \to H_2$. Последовательность $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i = \mu(x_i)$, соответствует точке μ. Аналогично, имеем $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ для ν. Обозначим $A = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ и $B = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$. Точки μ и ν назовем *изоморфными*, если найдется такой изоморфизм $\alpha\colon A \to B$, что $\alpha(a_i) = b_i$. Пишем $\alpha\mu = \nu$. Имеем также $\mu = \alpha^{-1}\nu$. Если $H_1 = H_2$, то изоморфизм точек μ и ν означает, что μ и ν удовлетворяют отношению τ.

Наряду со свободной алгеброй $W = W(X)$ рассмотрим алгебру формул $\Phi = \Phi(X)$. Формулу $u \in \Phi$ назовем *правильной*, если для любых изоморфных μ и ν включение $\mu \in \mathrm{Val}_{H_1}(u)$, т.е. $u \in \mathrm{LKer}(\mu)$, выполнено тогда и только тогда, когда $u \in \mathrm{LKer}(\nu)$, т.е. $\nu \in \mathrm{Val}_{H_2}(u)$.

Мы намерены проверить, что в нашем случае любая формула u правильна. Легко видеть, что: для произвольного Θ все равенства $w \equiv w'$ правильны; если формула u правильна, то ее отрицание $\neg u$ правильно; если обе формулы u_1 и u_2 правильны, то $u_1 \vee u_2$ и $u_1 \wedge u_2$ тоже правильны.

Между тем, импликация “если формула u правильна, то такова и формула $\exists x_i u$ при всяком x_i”, видимо, не справедлива для произвольного Θ. Здесь возникает задача найти пример, когда условие правильности не выполняется. Проверим, что в рассматриваемом случае данная импликация справедлива.

Без ограничения общности положим $x_i = x_1$. Итак, пусть μ и ν изоморфны, $\nu = \alpha\mu$, $\mu \in \mathrm{Val}_{H_1}(\exists x_1 u) = \exists x_1 \mathrm{Val}_{H_1}(u)$. Существует такой $\mu_1 \in \mathrm{Val}_{H_1}(u)$, что $\mu(y) = \mu_1(y)$ при всяком $y \neq x_1$, $y \in X$.

Возьмем $a = \mu_1(x_1)$. Для μ_1 имеем последовательность $(a, a_2, \dots, a_n)$. Напомним, что $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $b_i = \alpha'(a_i)$, для μ и ν соответственно. Возьмем $A_1 = \langle a, a_2, \dots, a_n\rangle = \langle a, \langle a_2, \dots, a_n\rangle\rangle$. Мы хотим исследовать изоморфизм $\alpha_1 \colon A_1 \to B_1$ с $B_1 = \langle b, \langle b_2, \dots, b_n\rangle\rangle$, где $b_1 = \alpha_1(a)$, $b_i = \alpha_1(a_i) = \alpha(a_i)$, $i = 2, \dots, n$. Изоморфизм $\alpha \colon A \to B$ индуцирует изоморфизм $\alpha' \colon \langle a_2, \dots, a_n\rangle \to \langle b_2, \dots, b_n\rangle$. Предположим вначале, что $a \in \langle a_2, \dots, a_n\rangle$. В этом случае имеем изоморфизм $\alpha_1 \colon A_1 \to B_1$, удовлетворяющий $\alpha_1(a) = \alpha'(a) = b$. Пусть $a \notin \langle a_2, \dots, a_n\rangle$. Тогда A_1 – векторное пространство размерности на единицу большей, чем размерности пространства $\langle a_2, \dots, a_n\rangle$. Возьмем произвольный элемент $b \in H_2$, не лежащий в $\langle b_2, \dots, b_n\rangle$. Имеем векторное пространство $B_1 = \langle b, \langle b_2, \dots, b_n\rangle\rangle$ той же самой размерности, что и A_1. Допустив $\alpha_1(a) = b$, определим изоморфизм $\alpha_1 \colon A_1 \to B_1$, расширяющий изоморфизм α'.

Далее, возьмем точку $\nu_1 \colon W \to H_2$, заданную правилом $\nu_1(x_i) = \alpha_1\mu_1(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Здесь μ_1 и ν_1 изоморфны. Поскольку $\mu_1 \in \mathrm{Val}_{H_1}(u)$, имеем $\nu_1 \in \mathrm{Val}_{H_1}(u)$ в силу правильности формулы u. Точки ν и ν_1 совпадают на переменных $x_2, \dots, x_n$ по построению. Значит, $\nu \in \mathrm{Val}_{H_2}(\exists x_1 u) = \exists x_1 \mathrm{Val}_{H_2}(u)$. Аналогично, если $\nu \in \exists x_1 \mathrm{Val}_{H_2}(u)$, то $\mu = \alpha^{-1}\nu \in \mathrm{Val}_{H_1}(\exists x_1 u)$.

Покажем, что если $u \in \Phi(Y)$ правильна, то и формула $s_* u \in \Phi(X)$, где $s \colon W(Y) \to W(X)$ и $s_* \colon \Phi(Y) \to \Phi(X)$ (определение отображения s_* см. в параграфе 5), тоже правильна. Пусть μ и ν изоморфны, α – соответствующий изоморфизм и $\mu \in \mathrm{Val}_{H_1}(s_* u) = s_* \mathrm{Val}_{H_1}(u)$. Здесь $\mu s \in \mathrm{Val}_{H_1}(u)$. Применим изоморфизм α с $\nu = \alpha\mu$. Этот даст изоморфизм $(\alpha\mu)s = \nu s = \alpha(\mu s)$, и νs и μs изоморфны.

Предположим, что формула u правильна. Тогда $\nu s \in \mathrm{Val}_{H_2}(u)$ и $\nu \in s_* \mathrm{Val}_{H_2}(u) = \mathrm{Val}_{H_2}(s_* u)$. Формула $s_* u$ тоже правильна. Используя определение алгебры $\Phi(X)$ и тот факт, что все равенства правильны, можно заключить, что все $u \in \Phi(X)$ правильны. Если μ и ν изоморфны, то $\mu \in \mathrm{Val}_{H_1}(u)$ равносильно $\nu \in \mathrm{Val}_{H_2}(u)$ для всякой $u \in \Phi(X)$.

Пусть теперь μ и ν изоморфны. Поскольку u правильна, $u \in \mathrm{LKer}(\mu)$ равносильно $u \in \mathrm{LKer}(\nu)$. Таким образом, $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$. Если размерность алгебр H_1 и H_2 бесконечна, для любой точки μ можно построить точку ν, изоморфную ей. Значит, для всякой точки $\mu \in \mathrm{Hom}(W(X), H_1)$ найдется такая точка $\nu \in \mathrm{Hom}(W(X), H_2)$, что $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$.

Обратное также верно. Это означает, что H_1 и H_2 изотипны. Ясно, что они не обязательно изоморфны.

Метод, использованный нами в доказательстве вышеприведенного предложения, можно использовать также в случае, когда H_1 и H_2 – бесконечные абелевы группы конечной экспоненты p. С другой стороны, что можно сказать, когда H_1 и H_2 – свободные абелевы группы бесконечного ранга, или свободные некоммутативные группы бесконечного ранга? Используя рассмотрения, подобные сделанным в предложении 3.4 можно, в частности, изучать локально циклические группы без кручения, чтобы понять, будут ли они изотипными. Также это должно дать примеры изотипных, но не изоморфных алгебр.

Замечание 3.5. Доказательство предложения 3.4 следует уже из того, что векторные пространства свободны. Мы привели подробное доказательство, имея в виду применимость к другим ситуациям.

4. Логически совершенные алгебры

4.1. Вложения алгебр. Напомним, что на множестве (на аффинном пространстве) $\mathrm{Hom}(W(X),H)$ была определена эквивалентность ρ. Если μ и ν – две точки $W(X)\to H$, то $\mu\rho\nu$ равносильно $\mathrm{LKer}(\mu)=\mathrm{LKer}(\nu)$ (см. п. 1.5). Эти логические ядра вычисляются в алгебре формул $\Phi(X)$. Группа $\mathrm{Aut}(H)$ действует на множестве $\mathrm{Hom}(W(X),H)$ по правилу $\mu\to\mu\sigma$, $\sigma\in\mathrm{Aut}(H)$. Здесь каждое элементарное множество в $\mathrm{Hom}(W(X),H)$ инвариантно относительно действия группы $\mathrm{Aut}(H)$. Отсюда вытекает, что отношение $\mu\rho(\mu\sigma)$ всегда имеет место.

Определение 4.1. Алгебра $H\in\Theta$ называется *логически совершенной*, если для всякого X отношение $\mu\rho\nu$ выполнено тогда и только тогда, когда точки μ и ν сопряжены некоторым автоморфизмом данной алгебры H.

Это условие означает, что для всякого X любой класс эквивалентности отношения ρ является орбитой действия группы $\mathrm{Aut}(H)$. Поэтому для логически совершенных групп всякая орбита является элементарным множеством.

Сформулируем следующую проблему.

Проблема 4.2. Найти условия, при которых данную алгебру $H\in\Theta$ можно вложить в некоторую логически совершенную $H'\in\Theta$.

Эта проблема тесно связана со следующими хорошо известными результатами в теории моделей (см. [2]).

1. *Для любых конечного множества X, алгебры $H\in\Theta$ и точек $\mu,\nu\colon W(X)\to H$ условие* $\mathrm{LKer}(\mu)=\mathrm{LKer}(\nu)$ *равносильно следующему условию: для некоторого элементарного вложения $H\to G\in\Theta$ найдется такой автоморфизм $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$, что $\mu\sigma=\nu$.*

2. *Существует настолько большая алгебра $H\in\Theta$, что для всяких множеств X и точек $\mu,\nu\colon W(X)\to H$ условие* $\mathrm{LKer}(\mu)=\mathrm{LKer}(\nu)$ *равносильно $\mu\sigma=\nu$ для некоторого $\sigma\in\mathrm{Aut}(H)$.*

Обе эти теоремы являются теоремами существования и основываются на теореме компактности. Поэтому они в высокой степени неконструктивны. Мы интересуемся несколько другой задачей. Мы рассматриваем специальные многообразия Θ и задаемся вопросом, как осуществить переход от H к H' посредством построений в Θ (см., например, проблему 4.2, где Θ – это многообразие групп).

Итак, мы хотим понять, как выглядят логически совершенные алгебры. Первый вопрос здесь следующий.

Проблема 4.3. Для каких алгебр $H\in\Theta$ всякая $\mathrm{Aut}(H)$-орбита в $\mathrm{Hom}(W(X),H)$ будет элементарным множеством для любого конечного X?

Выше было отмечено, что если алгебра H логически совершенна, то $\mathrm{Aut}(H)$-орбиты суть элементарные множества. На самом деле обратное утверждение также верно (предложение 4.4). Этот факт объясняет важность проблемы 4.3.

Предложение 4.4. *Алгебра H логически совершенна тогда и только тогда, когда всякая* $\mathrm{Aut}(H)$*-орбита в* $\mathrm{Hom}(W(X),H)$ *является элеметарным множеством для любого конечного X.*

Доказательство. Фиксируем конечное X и выберем произвольную точку $\mu : W(X)\to H$. Пусть A будет $\mathrm{Aut}(H)$-орбитой, заданной точкой μ, $\mu\in A$. Предположим, что множество A элементарно. Тогда $A^{LL}_H=A$. Имеем $A^L_H\subset\{\mu\}^L_H=\mathrm{LKer}(\mu)$. Тогда $\{\mu\}^{LL}_H=\mathrm{LKer}(\mu)^L_H\subset A^{LL}_H=A$. Точка μ принадлежит элементарному множеству $\{\mu\}^{LL}_H$ и, таким образом, вся орбита A лежит в $\{\mu\}^{LL}_H$. Получаем равенство $\{\mu\}^{LL}_H=A$. Имеем также

$$\{\mu\}^{LLL}_H=A^L_H=\{\mu\}^L_H=\mathrm{LKer}(\mu).$$

Итак, для всякой орбиты A имеет место $A_H^L = \mathrm{LKer}(\mu)$, где μ – некоторая точка из A. Мы использовали то, что все орбиты A суть элементарные множества. Различные типы соответствуют различным орбитам над H, и такие соответствия исчерпывают все типы, относящиеся к H.

Пусть теперь $\mu\rho\nu$, и пусть A – какая-то $\mathrm{Aut}(H)$-орбита над μ, а B – какая-то $\mathrm{Aut}(H)$-орбита над ν. Имеем $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$, т.е. $A_H^L = B_H^L$, и, таким образом, $A = B$, поскольку множества A и B элементарны. Итак, точки μ и ν принадлежат общей орбите. Это дает $\mu\rho_0\nu$. Значит, $\rho = \rho_0$, так что алгебра H логически совершенна.

Определим понятие строго логически совершенных алгебр.

Определение 4.5. Алгебру $H \in \Theta$ назовем *строго логически совершенной*, если для всяких множества X и точек $\mu\colon W(X) \to H$ и $\nu\colon W(X) \to H$ условие $\mathrm{LKer}^0(\mu) = \mathrm{LKer}^0(\nu)$ влечет $\mu = \nu\sigma$ для некоторого $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$.

Это понятие действительно строже, чем понятие логической совершенности в использованном выше смысле. Можно, как это было сделано прежде, доказать, что алгебра H строго логически совершенна, если для всякого конечного X любая $\mathrm{Aut}(H)$-орбита в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ является элементарным множеством, задаваемым некоторым множеством формул $T \subset \Phi^0(X)$. В этом случае скажем, что любая орбита есть строго элементарное множество.

4.2. Метод HNN-расширений. В этом пункте опишем случай $\Theta = Grp$. Мы используем здесь метод HNN-расширений (см. [19]).

Пусть a_i, b_i, $i \in I$, – два множества элементов в группе H, и пусть A и B – подгруппы в H, порожденные всеми a_i и b_i соответственно. Рассмотрим систему равенств $ta_it^{-1} = b_i$, $i \in I$. Доказано (теорема 1 из [19]), что такая система имеет решение для некоторого t, принадлежащего некоторой содержащей H группе G тогда и только тогда, когда переход $a_i \to b_i$ задает изоморфизм между подгруппами A и B.

Эта теорема имеет многочисленные приложения. В частности, она влечет, что для любой группы без кручения H найдется группа без кручения G, содержащая H и такая, что есть только один нетривиальный класс сопряженных элементов в G. Это означает следующее. Пусть G – такая группа и $W = W(x)$ – свободная циклическая группа. Рассмотрим аффинное пространство $\mathrm{Hom}(W, G)$ и какое-нибудь элементарное множество A, заданное одним "уравнением" $x \neq 1$. Как обычно, оно инвариантно относительно действия группы $\mathrm{Aut}(G)$. С другой стороны, любые два элемента μ и ν в данном элементарном множестве сопряжены некоторым элементом в $\mathrm{Aut}(G)$. Значит, A – единственная нетривиальная орбита группы $\mathrm{Aut}(G)$. Мы хотели бы построить такую группу G, в которой нечто подобное имело бы место в аффинном пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), G)$ для каждого конечного X. А именно, мы хотели бы построить по данной группе H такую группу G, что для любого X в аффинном пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), G)$ было бы лишь конечное число $\mathrm{Aut}(G)$-орбит, причем каждая орбита была бы элементарным множеством.

Начнем с ситуации, когда H – множество без операций.

Будем использовать схему из доказательства предложения 2.4. Дана эквивалентность τ на множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, рассмотрим формулы $x_i \equiv x_j$, если $x_i\tau x_j$, и $x_i \not\equiv x_j$ иначе. Пусть $u = u_\tau$ – конъюнкция всех таких равенств и неравенств. Перейдем к $V = \mathrm{Val}_H^X(u)$. Точка $\mu\colon X \to H$ принадлежит множеству V, если и только если $\mathrm{Ker}(\mu) = \tau$. Если A – образ точки μ, то получаем биекцию $X/\tau \to A$. Если μ и ν – две точки в V, то $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Ker}(\nu) = \tau$, что дает следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\sigma"] & & B \\
& X \arrow[ul, "\mu"] \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}
$$

Здесь σ – биекция, а B – образ точки ν. Множества A и B конечны, тогда как множество H рассматривается как бесконечное. Имеем $A \cup A' = H = B \cup B'$, где A' и B' имеют одну и ту же мощность. Это ведет к расширению биекции σ до перестановки $\sigma \in S_H$. Согласно диаграмме $\nu = \mu\sigma$ и $\sigma(a_i) = b_i$, где $a_i = \mu(x_i)$ и $b_i = \nu(x_i)$. Значит, всякое $V_\tau\tau = \mathrm{Val}_H^X(u_\tau)$ является орбитой группы перестановок S_H и все орбиты таковы. Таким образом, мы получили конечное число конечно определенных орбит.

4.3. Теорема вложения. В доказательстве теоремы вложения будем использовать следующую теорему 2 из [19].

Пусть $\eta_i \colon A_i \to B_i$, $i \in I$, – изоморфизмы подгрупп группы H. Существует группа $G = \langle H, F\rangle$, где F свободно порождается элементами t_i, так что $\eta_i(a) = t_i a t_i^{-1}$ для каждого $a \in A_i$.

Нашей ближайшей целью является следующая теорема.

Теорема 4.6. *Каждую группу можно вложить в логически совершенную группу.*

Эта теорема кажется частным случаем аналогичного теоретико-модельного результата. Мы предоставляем здесь независимое теоретико-групповое доказательство, использующее HNN-теорию.

Доказательство. Пусть $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ – две последовательности элементов в H, и пусть A и B – подгруппы, порожденные элементами $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ соответственно. Согласно теореме 1 из [19] существует группа $G = G_{(\overline{a},\overline{b})}$, содержащая H и такая, что некоторый автоморфизм группы G переводит $\overline{a}$ в $\overline{b}$ тогда и только тогда, когда он определяет изоморфизм $\eta \colon A \to B$. Имея это в виду, рассмотрим эквивалентность τ, определенную в $H^{(n)}$, где n фиксировано. Определим $\overline{a}\tau\overline{b}$, если найдется изоморфизм $\eta = \eta_{(\overline{a},\overline{b})} \colon A \to B$, расширяющий соответствие $a_i \to b_i$. Если $\overline{a}\tau\overline{b}$ верно, имеем такую группу $G = G_{(\overline{a},\overline{b})}$ с элементом $t = t_{(\overline{a},\overline{b})}$, что t задает внутренний автоморфизм группы G, переводящий $\overline{a}$ в $\overline{b}$. Группу G можно представить как $G = \langle H, t\rangle$. Эквивалентность τ автоматически продолжается на пространство $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Далее, рассмотрим отношения τ_n для каждого натурального n. Отношения τ_n определены на всех последовательностях $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ длины n. Любой такой последовательности соответствует подгруппа A в H, порожденная элементами $a_1, \dots, a_n$; пишем $A = A(\overline{a})$. Как и выше, $\overline{a}\tau_n\overline{b}$, если переходы $a_i \to b_i$ задают изоморфизм $\eta_{(\overline{a},\overline{b})} \colon A(\overline{a}) \to B(\overline{b})$. Рассмотрим элементы $t_{(\overline{a},\overline{b})}$, свободно порождающие группу F_n. Согласно [19] имеем $G_n = \langle H, F_n\rangle$, так что всякий элемент $t_{(\overline{a},\overline{b})}$ задает некоторый внутренний автоморфизм группы G_n, который подобно $\eta_{(\overline{a},\overline{b})}$ переводит a_i в b_i.

На следующем шаге варьируем n и рассматриваем отношения τ_n для разных n. Возьмем различные $t_{(\overline{a},\overline{b})}$, удовлетворяющие $\overline{a}\tau_n\overline{b}$ для всех n. Рассмотрим порожденную этими $t_{(\overline{a},\overline{b})}$ свободную группу F. Тогда мы имеем группу $G = \langle H, F\rangle$. Если $\overline{a}\tau_n\overline{b}$, то $t_{(\overline{a},\overline{b})}$ индуцирует изоморфизм $\eta_{(\overline{a},\overline{b})} \colon A(\overline{a}) \to B(\overline{b})$. Все это выполняется в силу теоремы 2 из [19].

Обозначит группу $G = \langle H, F\rangle$ через H'. Итерируя переход $H \to H'$, получим возрастающую последовательность групп $H, H', H'', \dots$. Обозначим через H^0 объединение всех этих групп. Рассмотрим последовательности $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in H^0$. Для всякого n, если $\overline{a}(\tau_n)\overline{b}$, то существует такой элемент $t \in H^0$, что внутренний автоморфизм $\widehat{t}$ преобразует $\overline{a}$ в $\overline{b}$.

Покажем теперь, что для всякого $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ в $\mathrm{Hom}(W(X), H^0)$ равенство $\tau = \tau_n = \rho_0$ выполнено и любой класс эквивалентности τ является $\mathrm{Aut}(H^0)$-орбитой.

Рассмотрим $\mathrm{Hom}(W(X), H^0)$. Возьмем две точки $\mu, \nu : W(X) \to H^0$. Условие $\mu\tau\nu$ означает, что $\mu\tau_n\nu$ для некоторого n, и если $(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) = \overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $(\nu(x_1), \dots, \nu(x_n)) = \overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$, то $\overline{a}\tau_n\overline{b}$. Мы имеем внутренний автоморфизм $\sigma = \widehat{t}$, преобразующий $\overline{a}$ в $\overline{b}$ и одновременно μ в ν. Итак, $\mu\tau\nu$ влечет $\mu\sigma=\nu$ для некоторого $\sigma\in\mathrm{Aut}(H^0)$, $\tau\subset\rho_0$. Кроме того, $\rho_0\subset\tau$, откуда $\tau=\rho_0$. Имеем также $\tau=\rho$. Наконец, $\rho=\rho_0$ и группа H^0 логически совершенна.

Замечание 4.7. Все $\mathrm{Aut}\,H^0$-орбиты в $\mathrm{Hom}(W(X),H^0)$ суть элементарные множества при всяком конечном X. Однако число орбит бесконечно и равно числу различных ядер $\mathrm{Ker}(\alpha)$ для точек $\alpha\colon W(X)\to H^0$. Эта группа не столь хороша для обобщений примера группы с единственным нетривиальным класс сопряженности (см. [19], [20]).

С другой стороны, в предложении 2.4 мы построили группу H с конечным числом $\mathrm{Aut}\,H$-орбит, каждая из которых является элементарным множеством. Группа H является логически совершенной группой.

Напомним, что группа G называется *однородной*, если всякий изоморфизм $\eta\colon A\to B$ ее конечно порожденных подгрупп осуществляется некоторым внутренним автоморфизмом группы G. Такие группы были построены Холлом, Кегелем, Нейманном (см. [21]–[23]). Легко видеть, что всякая группа такого рода логически совершенна, ибо здесь имеют место равенства $\tau=\rho_0$ и $\rho=\rho_0$. Свойство однородности рассматривается в теории моделей по отношению к произвольным алгебраическим системам. В этом случае автоморфизм системы не предполагается внутренним. Понятие логически совершенной алгебры близко к понятию однородной алгебры.

Легко видеть, что алгебра H однородна тогда и только тогда, когда при всяком X имеет место $\tau=\rho_0$.

Мы сохраняем термин "совершенность", имея в виду, что в группах совершенность реализуется, как правило, посредством внутренних автоморфизмов (подобно тому, как это было в теореме 4.6).

Замечание 4.8. Если в многообразии Θ все алгебры $W(X)$ конечны, а $H\in\Theta$ однородна, то H автоморфно финитарна (ср. предложение 2.4).

В общем, логически совершенная алгебра не обязательно однородна: может случится, что $\rho=\rho_0$, но $\tau\neq\rho$. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.9 (Г. И. Житомирский). *Алгебра H в Θ однородна, если и только если H строго логически совершенна.*

Доказательство. Мы используем понятие правильной формулы (см. предложение 3.4). Напомним это понятие применительно к алгебре Φ^0. Формула $u\in\Phi^0$ называется *правильной*, если для всяких изоморфных точек μ и ν включение $\mu\in\mathrm{Val}_{H_1}(u)$, т.е. $u\in\mathrm{LKer}^0(\mu)$, выполнено тогда и только тогда, когда $u\in\mathrm{LKer}^0(\nu)$, т.е. $\nu\in\mathrm{Val}_{H_2}(u)$.

Если любая формула $u\in\Phi^0(X)$ правильна, то $\mathrm{LKer}^0(\mu)=\mathrm{LKer}^0(\nu)$, как только μ и ν изоморфны.

Пусть теперь H строго логически совершенна. Используя индукцию по мощности множества X, докажем, что любая формула $u\in\Phi^0(X)$ правильна. Пусть $X=\{x\}$. Тогда всякая булева формула над равенствами правильна. Формула $\exists xu$ имеет своими значениями 0 и 1. Поэтому для одноэлементного X правильность имеет место. Пусть $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, и пусть для любого X мощности $|X|<n$ требуемое свойство доказано. Прежде всего заметим, что свойство правильности сохраняется при булевых операциях. Пусть формула $u\in\Phi^0(X)$ правильна. Покажем, что $\exists x_n u$ правильна. Пусть даны точки $\mu,\nu\colon W(X)\to H$, и пусть μ_0,ν_0 – их ограничения на $X_0=\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$. Пусть A, B – образы в H точек μ,ν соответственно, а A_0, B_0 – соответствующие образы их ограничений μ_0, ν_0. Пусть α – некоторый изоморфизм $A\to B$. Обозначим через α_0 изоморфизм $A_0\to B_0$, индуцированный α. Возьмем $\alpha\mu=\nu$ и $\alpha_0\mu_0=\nu_0$. Поскольку всякая формула в $\Phi^0(X_0)$ правильна, имеем $\mathrm{LKer}^0(\mu_0)=\mathrm{LKer}^0(\nu_0)$ для изоморфных μ_0, ν_0. Теперь, поскольку H строго логически совершенно, имеем такой автоморфизм $\sigma\in\mathrm{Aut}\,H$, что $\mu_0\sigma=\nu_0$. Возьмем $\mu\sigma$ и ν. Их ограничения на X_0 совпадают.

Пусть теперь $\mu \in \mathrm{Val}_H^X(\exists x_n u) = \exists x_n \mathrm{Val}_H^X(u)$. Тогда найдется такая точка $\mu' \in \mathrm{Val}_H^X(u)$, что μ и μ' совпадают на X_0. Тогда $\mu\sigma$ и $\mu'\sigma$ совпадают на X_0. Однако $\mu\sigma$ и ν совпадают на X_0. Тогда $\mu'\sigma = \nu'$ и ν совпадают на X_0. Кроме того, наряду с μ' точка $\mu'\sigma = \nu'$ принадлежит множеству $\mathrm{Val}_H^X(u)$. Поэтому $\nu \in \mathrm{Val}_H^X(\exists x_n u)$. Значит, $\mu \in \mathrm{Val}_H^X(\exists x_n u)$ влечет $\nu \in \mathrm{Val}_H^X(\exists x_n u)$. Подобным же образом можно убедиться, что $\nu \in \mathrm{Val}_H^X(\exists x_n u)$ влечет $\mu \in \mathrm{Val}_H^X(\exists x_n u)$. Таким образом, формула $\exists x_n u$ также правильна. Следовательно, все формулы из $\Phi^0(X)$ правильны. Итак, если μ и ν изоморфны, то $\mathrm{LKer}^0(\mu) = \mathrm{LKer}^0(\nu)$. Воспользовавшись еще раз условием строгой логической совершенности, получим $\mu\sigma = \nu$ для некоторого $\sigma \in \mathrm{Aut}\, H$, расширяющего $\alpha\colon A \to B$. Следовательно, алгебра A однородна.

Докажем импликацию в другую сторону. Пусть H однородна. Тогда $\mu\tau\nu$ означает, что $\mu\sigma = \nu$ для некоторого $\sigma \in \mathrm{Aut}\, H$. Поэтому класс эквивалентности τ будет некоторой орбитой. Однако, каждый класс эквивалентности τ задается каким-то множеством $T \subset \Phi^0(X)$. Следовательно, алгебра H строго логически совершенна.

Замечание 4.10. Теорему 4.9 можно вывести из критерия $\tau = \rho_0$. Тем не менее, мы представили здесь исходное доказательство.

Замечание 4.11. Из доказательства теоремы 4.6 можно усмотреть, что всякая группа вкладывается в однородную группу. Этот факт можно также вывести из метода HNN-расширений.

Теперь приведем пример логически совершенной, но не однородной группы. Этот пример также принадлежит Житомирскому.

Предложение 4.12. *Бесконечная циклическая группа $\mathbb{Z}$ логически совершенна.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечную циклическую группу, представленную как аддитивная группа целых чисел $\mathbb{Z}$. Эта группа является также $\mathbb{Z}$-модулем. Каждая подгруппа группы $\mathbb{Z}$ является ее подмодулем. Возьмем в качестве Θ многообразие всех абелевых групп либо многообразие всех $\mathbb{Z}$-модулей. Ясно, что группа $\mathbb{Z}$ не однородна. Проверим, что $\mathbb{Z}$ логически совершенна.

Возьмем какое-нибудь множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Выберем переменную y и положим $Y = \{y, X\}$. Зададим отображение $s\colon Y \to X$ правилом $s(x_i) = x_i$, $s(y) = 0$. Таким образом, имеем морфизмы $s\colon W(Y) \to W(X)$ и $s_*\colon \Phi(Y) \to \Phi(X)$. Для каждой формулы $v \in \Phi(Y)$ найдется формула $u = s_* v$, $u \in \Phi(X)$, не обязательна принадлежащая $\Phi^0(X)$.

Пусть $\mu\colon W(X) \to \mathbb{Z}$ – некоторая точка. Имеем $\mu \in \mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^X(u) = s_*\mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^Y(v)$, если и только если $\mu s \in \mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^Y(v)$.

Возьмем две точки $\mu, \nu\colon W(X) \to \mathbb{Z}$, и пусть $\mathrm{LKer}(\mu) = \mathrm{LKer}(\nu)$. Покажем, что μ и ν сопряжены посредством некоторого автоморфизма группы $\mathbb{Z}$. Эта группа помимо тождественного автоморфизма имеет только автоморфизм, переводящий данный элемент в обратный ему. Проверим, что либо $\mu = \nu$, либо $\mu = -\nu$.

Пусть $\mu(x_i) = a_i$, $\nu(x_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Если все a_i равны нулю, то $\mu = \nu$. Поэтому можно предполагать, что $a_1 \neq 0$.

Для точки μ мы намереваемся построить специальную проверяющую формулу $v \in \Phi(Y)$, удовлетворяющую $\mu \in \mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^X(u)$, $u = s_* v$. Отсюда будет следовать $\nu \in \mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^X(u)$. Вначале определим $v_0 \in \Phi(Y)$. Затем v строится как $v = \exists y v_0$.

Пусть v_0 – формула

$$(x_1 \equiv |a_1| y) \wedge (x_2 \equiv \mathrm{sgn}(a_2 a_1)|a_2| y) \wedge \dots \wedge (x_n \equiv \mathrm{sgn}(a_n a_1)|a_n| y).$$

Здесь $|a|$ обозначает абсолютное значение a, тогда как $\mathrm{sgn}(a)$ есть знак a.

Зададим точку $\gamma\colon W(Y) \to \mathbb{Z}$ следующим образом: $\gamma(x_i) = \mu(x_i) = a_i$ и $\gamma(y) = \mathrm{sgn}(a_1)1$. Точка γ удовлетворяет v_0. Поскольку μs и γ совпадают на X, точка μs удовлетворяет формуле

$\exists y v_0 \equiv v$. Другими словами, $\mu \in \mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^{X}(u)$, где $u = s_* v$. Имеем также $\nu s \in \mathrm{Val}_{\mathbb{Z}}^{Y}(v)$. Отсюда вытекает, что для некоторых значений c переменной y и значений b_i переменных x_i верно

$$b_1 = |a_1|c, \quad \ldots, \quad b_n = \mathrm{sgn}(a_n a_1)|a_n|c.$$

Это показывает, что $b_i = a_i c$, если $a_1 > 0$, и $b_i = -a_i c$, если $a_1 < 0$. Меняя местами μ и ν, получаем такое d, что $a_i = b_i d$, если $b_1 > 0$, и $a_i = -b_i d$, если $b_1 < 0$. Отсюда приходим к равенству $c = 1$ или $c = -1$. В первом случае имеем $\mu = \nu$, а во втором – $\mu = -\nu$. Доказательство предложения закончено.

Группа $\mathbb{Z}$ не является строго логически совершенной, так как $\mathbb{Z}$ не однородна. Было бы интересно привести другие примеры, работая с другими многообразиями Θ.

Замечание 4.13. Соображения, аналогичные используемым в предложении 4.12, позволяют доказать, что свободная абелева группа конечного ранга логически совершенна.

Сделаем еще одно замечание. Возьмем $\mu\colon W(X) \to H$ и рассмотрим его замыкание $A = \{\mu\}_H^{LL} = (\mathrm{LKer}(\mu))_H^{L}$. Это A является минимальным элементарным множеством, а всякое элементарное множество в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ является объединением таких попарно непересекающихся A. Если H логически совершенна, то эти минимальные множества совпадают с орбитами группы $\mathrm{Aut}(H)$ (это свойство решетки элементарных множеств в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$). Понятно, что минимальные элементарные множества находятся во взаимно однозначном соответствии с типами.

Теперь приведем два примера строго логически совершенных абелевых групп.

4.4. Пример. Исследуем один конкретный пример. Пусть группа H является дискретным прямым произведением все простых циклических групп различных простых порядков. Покажем, что для данной H все $\mathrm{Aut}(H)$-орбиты в $\mathrm{Hom}(W, H)$ будут элементарными множествами.

Исходя из переменной $x \in W = W(X)$ выпишем формулу $u = u(x)$ вида $x \neq 1 \wedge x^m = 1 \wedge u_0$, где u_0 – конъюнкция всех $x^{m_i} \neq 1$ по всем делителям m_i числа m.

Только элементы g порядка m удовлетворяют формуле $u = u(x)$. Есть лишь конечное число таких элементов, а именно $(p_1 - 1), \ldots, (p_k - 1)$, если $m = p_1 \cdots p_k$.

Возьмем конечное X и рассмотрим $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Пусть $(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n)) = \overline{g} = (g^1, \ldots, g^n)$ для некоторой точки $\mu\colon W(X) \to H$. Представим каждый элемент g^i как $g^i = g_1^i \cdots g_{k_i}^i$. Множители упорядочены по возрастанию их простых порядков. Порядок элемента g^i есть некоторое число m^i.

Далее работаем с множеством формул $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ порядков $m_1, \ldots, m_n$; пусть u – их конъюнкция. Перейдем к элементарному множеству $\mathrm{Val}_H^X(u) = A$. Все точки $\mu\colon W(X) \to H$ вышеописанного вида включаются в данное множество.

Предложение 4.14. *Всякое $A = \mathrm{Val}_H^X(u)$ является орбитой группы $\mathrm{Aut}(H)$ и всякая ее орбита имеют такой вид.*

Доказательство. Пусть $\mu\colon W(X) \to H$ – какая-нибудь точка в A. Для всякого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$ выполнено включение $\mu\sigma \in A$. Нужно проверить, верно ли $\nu = \mu\sigma$ для любой точки $\nu\colon W(X) \to H$ из A и некоторого автоморфизма σ.

По определению имеем $\mu\sigma(x) = \mu(x) \circ \sigma = g \circ \sigma$ для всякого $x \in X$. Пусть $g = g_1 \cdots g_k$, где порядок элемента g_i есть p_i. Пусть, кроме того, $\nu(x) = g' = g_1' \cdots g_k'$, где порядок элемента g_i' также есть p_i, и элементы g_i и g_i' является образующими циклической группы порядка p_i. Следовательно, переход $g_i \to g_i'$ задает автоморфизм этих циклических подгрупп. Это верно для каждого $x \in X$, значит, мы получаем автоморфизм σ, переводящий g в g'. Имеем также $\mu\sigma = \nu$.

Докажем теперь, что всякая орбита является некоторым множеством A такого вида. Возьмем произвольные $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и точку $\mu\colon W(X) \to H$. Этой точке соответствует последовательность $\overline{g} = (g^1, \dots, g^n)$. Множество A, содержащее точку μ, соответствует самой μ, и это верно для всякого A. Применяя к $\overline{g}$ произвольные автоморфизмы $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$, получим всю орбиту A.

Существует бесконечно много различных орбит и, значит, бесконечно много элементарных множеств и типов. Интересно то, что всякая орбита конечно определена. Легко понять, что группа H не удовлетворяет никакому из условий нётеровости; значит, если некая группа H' изотипна с H, то H и H' изоморфны. На самом деле, для этого результата достаточно уже элементарной эквивалентности H и H'. Докажем этот факт и сделаем затем несколько замечаний, касающихся нётеровости.

Пусть H – группа из предложения 4.14, а H' – группа, изотипная с H. Тогда они элементарно эквивалентны и, значит, удовлетворяют одним и тем же тождествам. Поэтому H' абелева. Формула $\exists x(x^p \equiv 1)$ в H показывает, что также и в H' существуют элементы порядка p. Формула

$$x_1^p \equiv x_2^p \equiv 1 \to x_1 \equiv x_2^{m_1} \vee \dots \vee x_1 \equiv x_2^{m_k},$$

где $m_i < p$, влечет, что H' содержит лишь одну циклическую подгруппу порядка p. Формула $x^{p^n} \equiv 1 \to x^p \equiv 1$ означает, что все p-элементы имеют порядок p.

Все это верно в H'. Следовательно, H' является прямым произведением всех циклических подгрупп всех простых порядков, что дает искомый изоморфизм.

Покажем, что H не является логически нётеровой. Возьмем бесконечное подмножество M множества простых, имеющее бесконечное дополнение M'. Рассмотрим формулу $\neg(x^p \equiv 1 \to x \equiv 1)$ по всем $p \in M$. Это множество не сводится к конечному, ибо M' бесконечно.

4.5. Аддитивная группа рациональных чисел. Будем работать теперь с аддитивной группой H рациональных чисел.

Прежде всего покажем, что эта группа однородна. Фиксируем множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $W(X)$ – свободная абелева группа над X. Возьмем точки $\mu, \nu\colon W(X) \to H$. Пусть A и B – образы точек μ ν соответственно, и пусть $\alpha\colon A \to B$ – некоторый изоморфизм. Группы A и B циклические и, таким образом, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Предположим, что $\alpha(a) = b$. Пусть последовательность $a_1, \dots, a_n$, где $a_i = m_i a \in A$, соответствует точке μ. Поэтому имеем $(b_1, \dots, b_n)$ для ν. Здесь $\alpha(a_i) = b_i = m_i b$, где все m_i целые. Возьмем $s = b/a$, $sa = b$. Умножение элемента $h \in H$ на s является автоморфизмом группы H. Этот автоморфизм продолжает исходный изоморфизм α.

Далее, если A – орбита точки μ, то эта орбита определяется множеством T формул, заданных ядром точки μ.

Ту же самую орбиту можно описать, используя иной подход. Пусть x – некоторая вспомогательная переменная; рассмотрим формулу

$$u = u(m_1, \dots, m_n) = \exists x(x^{m_1} = x_1 \wedge \ldots \wedge x^{m_n} = x_n).$$

Если ограничиться значением этой формулы на исходном множестве X, получится искомая орбита.

Далее в определении 4.15 и теореме 4.16 возможное использование вспомогательной переменной x принято во внимание.

Определение 4.15. Алгебра H называется *логически локально нётеровой*, если для каждого конечного множества X замыкание конечного множества точек $\mu_i\colon W(X) \to H$ конечно определено.

Теорема 4.16. *Локально циклическая группа H логически локально нётерова.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что для всякой точки $\mu\colon W(X) \to H$ имеет место $\mathrm{LKer}(\mu) = \{u\}_H^{LL}$ с некоторой формулой u вида $u = u(m_1, \dots, m_n)$. Кроме того, $\{\mu\}_H^{LL}$ является конечно определимым замыканием точки μ.

Пусть $u = u(m_1, \dots, m_n)$. Тогда $\mathrm{Val}_H^X(u) = \{u\}_H^L$ и $(\mathrm{Val}_H^X(u))_H^L = \{u\}_H^{LL}$. Пусть теперь $\mu \in A_0 = \mathrm{Val}_H^X(u)$. Тогда $\{\mu\}_H^L \supset {A_0}_H^L = \{u\}_H^{LL}$ и $\mathrm{LKer}(\mu) \supset \{u\}_H^{LL}$. По определению оператора L имеем ${A_0}_H^L = \bigcap_{\nu \in A_0} \mathrm{LKer}(\nu)$. Из предыдущих рассмотрений следует, что μ и ν изотипны. Значит, ${A_0}_H^L = \mathrm{LKer}(\mu) = \{u\}_H^{LL}$. Имеем также $(\mathrm{LKer}(\mu))_H^L = A_0$ для произвольной точки $\mu \in A_0$.

Нам нужно еще одно замечание, касающееся решетки всех элементарных множеств в данном $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Пусть A и B – два такие множества, $A_H^L = T_1$, $B_H^L = T_2$. Пусть T_1^0 – некоторое подмножество множества T_1, удовлетворяющее $(T_1^0)_H^{LL} = T_1$. Возьмем подмножество T_2^0 множества T_2, удовлетворяющее $(T_2^0)_H^{LL} = T_2$. Обозначим через $T_1^0 \vee T_0^2$ множество всех $u \vee v$, $u \in T_1^0$, $v \in T_2^0$. Проверим, что $(T_1^0 \vee T_0^2)_H^L = A \cup B$. В самом деле,

$$(T_1^0 \vee T_0^2)_H^L = \bigcap_{u \vee v} \mathrm{Val}_H^X(u \vee v) = \bigcap_{u \vee v} (\mathrm{Val}_H^X(u) \cup \mathrm{Val}_H^X(v))$$
$$= \Bigg(\bigcap_{u \in T_1^0} \mathrm{Val}_H^X(u) \Bigg) \cup \Bigg(\bigcap_{v \in T_2^0} \mathrm{Val}_H^X(v) \Bigg) = A \cup B.$$

Применим это к группе H. Пусть $u_1 = u(m_1, \dots, m_n)$, $u_2 = u(m'_1, \dots, m'_n)$, $A = \mathrm{Val}_H^X(u_1)$, $B = \mathrm{Val}_H^X(u_2)$. Тогда $A \cup B = \mathrm{Val}_H^X(u_1 \vee u_2)$. Это показывает, что объединение в любом конечном числе множеств вида A является элементарным конечно определенным множеством.

Далее, пусть A_0 – конечное множество точек $\mu\colon W(X) \to H$. Всякая точка $\mu \in A_0$ принадлежит некоторому $\mathrm{Val}_H^X(u)$, $u = u(m_1, \dots, m_n)$. Значит, A_0 содержится в конечном объединении множеств вида $\mathrm{Val}_H^X(u)$.

Пусть A_0 – подмножество некоторого $A = (\mathrm{LKer}(\mu))_H^L$. Тогда ${A_0^L}_H = \bigcap_{\nu \in A_0} \mathrm{LKer}(\nu) = \mathrm{LKer}(\mu)$ для некоторой точки $\mu \in A_0$. Замыканием будет ${A_0^{LL}}_H = A$.

Возьмем теперь конечное множество точек $A_0 = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, $\mu_i \in \mathrm{LKer}(\mu_i)_H^L$, и покажем, что его замыкание конечно определено. Имеем ${A_0}_H^L = \bigcap_{\mu_i \in A_0} \mathrm{LKer}(\mu_i)$.

Из сделанных замечаний об элементарных множествах вытекает, что

$${A_0^{LL}}_H = \bigcup_{\mu_i} \mathrm{LKer}(\mu_i)_H^L = \bigcup_{\mu_i} A_i, \qquad A_i = \mathrm{LKer}(\mu_i)_H^L.$$

Для группы H рациональных чисел все A_i конечно определены. Поэтому $\bigcup_{\mu_i} A_i$ тоже конечно определено. Следовательно, замыкание ${A_0^{LL}}_H$ конечно определено.

Теперь можно сравнить логически локальную нётеровость с другими условиями нётеровости. Мы не будем изучать этот вопрос здесь. Заметим лишь, что всякая логически нётерова алгебра H является логически локально нётеровой. Однако, то, что всякая конечно порожденная подгруппа группы H логически нётерова, еще не означает, что H логически локально нётерова.

5. Некоторые факты из алгебраической логики. Appendix

5.1. Введение. Для всякого многообразия алгебр Θ мы различаем обычную чистую логику в Θ и алгебраическую логику в Θ. Формулы алгебраической логики суть формулы чистой логики, сжатые по семантическому отношения в данном Θ. Полиадические алгебры Халмоша и цилиндрические алгебры Тарского суть основные общие структуры алгебраической логики. Существенным характеристическим свойством этих структур является то, что они допускают бесконечное множество переменных. Обозначим это множество через X^0 (см. [11], [24]).

В нашем случае мы вынуждены рассматривать систему всех конечных подмножеств X множества X^0 вместо столь большого X^0. Обозначим эту систему через Γ. Тогда мы переходим к многосортной алгебре с системой сортов Γ. Мы приходим, в частности, к многосортным алгебрам Халмоша и к категориям Халмоша.

5.2. Категория – алгебра $\mathbf{Hal}_{\Theta}(\boldsymbol{H})$. Начнем с одного важного примера, а именно с категории Халмоша $\mathrm{Hal}_{\Theta}(H)$. Здесь H – некоторая алгебра в Θ. Объектами этой категории служат расширенные булевы алгебры $\mathrm{Bool}(W(X),H)$. Определим морфизмы $s_*\colon \mathrm{Bool}(W(X),H) \to \mathrm{Bool}(W(Y),H)$. Обозначим через Θ^0 категорию свободных в Θ алгебр $W = W(X)$, $X \in \Gamma$. Имеем также категорию $K^0_{\Theta}(H)$ всех аффинных пространств над H. Ее морфизмами служат отображения $\widetilde{s}\colon \mathrm{Hom}(W(Y),H) \to \mathrm{Hom}(W(X),H)$, где $s\colon W(X) \to W(Y)$ – морфизм в Θ^0 и $\widetilde{s}(\nu) = \nu s\colon W(Y) \to H$ для $\nu\colon W(X) \to H$. Для каждого $A \subset \mathrm{Hom}(W(X),H)$ положим $s_*A = \widetilde{s}^{-1}A$. Это описывает морфизм в $\mathrm{Hal}_{\Theta}(H)$. Всякий s_* является также гомоморфизмом булевой алгебры и согласован с кванторами и равенствами (см. п. 5.4).

Переходя к общим определениям, уточним понятие расширенных булевых алгебр.

Напомним, что в алгебраической логике (AL) кванторы трактуются как операции на булевых алгебрах. Пусть B – булева алгебра. Ее *экзистенциальный квантор* (или *квантор существования*) – это отображение $\exists\colon B \to B$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\exists 0 = 0$;
2) $\exists a > a$;
3) $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$;
4) пусть $s\colon W(X) \to W(Y)$, $s'\colon W(Y) \to W(Z)$, и пусть $s \in \Phi(X)$; тогда $s'_*(s_*(u)) = (s's)_*(u)$.

Унивесальный квантор (или *квантор всеобщности*) определяется двойственно:

1) $\forall 1 = 1$;
2) $\forall a < a$;
3) $\forall(a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b$.

Здесь 0 и 1 суть нуль и единица алгебры B, а a, b – произвольные элементы B. Кванторы $\exists$ и $\forall$ согласованы обычным образом: $\overline{\exists a} = \forall \overline{a}$, $\overline{\forall a} = \exists \overline{a}$.

Пусть Θ и $W = W(X) \in \Theta$ фиксированы и B – булева алгебра. Назовем B *расширенной булевой алгеброй* в Θ над $W(X)$, если выполнены следующие условия:

1) существуют определенные выше кванторы $\exists x$ для всех $x \in X$ в B, удовлетворяющие дополнительно условию $\exists x \exists y = \exists y \exists x$ для всех $x, y \in X$;
2) любой формуле $w \equiv w'$, $w, w' \in W$ соответствует константа в B, обозначаемая тоже через $w \equiv w'$; здесь:
   2.1) $w \equiv w$ является единицей алгебры B;
   2.2) для всякой n-местной операции $\omega \in \Omega$, где Ω – сигнатура многообразия Θ, выполнено
$$w_1 \equiv w'_1 \wedge \dots \wedge w_n \equiv w'_n < w_1 \dots w_n \omega \equiv w'_1 \dots w'_n \omega.$$

Можно рассматривать многообразие таких алгебр при любых заданных Θ и $W = W(X)$.

5.3. Категории Халмоша. Общее определение.

Определение 5.1. Категория Υ называется *категорией Халмоша*, если выполнены следующие условия:

1) все ее объекты имеют вид $\Upsilon(X)$ и являются расширенными булевыми алгебрами в Θ над $W(X)$;
2) морфизмы имеют вид $s_*\colon \Upsilon(X) \to \Upsilon(Y)$, где $s\colon W(X) \to W(Y)$ – морфизмы в Θ^0, s_* – гомоморфизмы булевых алгебр, а переход $s \to s_*$ задается ковариантным функтором $\Theta^0 \to \Upsilon$;

3) имеют место тождества, контролирующие взаимодейтсвие морфизмов с кванторами и равенствами; согласованность с кванторами следующая:
   3.1) $s_{1*}\exists xa = s_{2*}\exists xa$, $a \in \Upsilon(X)$, если $s_1 y = s_2 y$ для любого $y \in X$, $y \neq x$;
   3.2) $s_*\exists xa = \exists(sx)(s_*a)$, если $sx = y \in Y$ и $y = sx$ не лежит в носителе sx', $x' \in X$, $x' \neq x$;
4) следующие условия описывают согласованность с равенствами:
   4.1) $s_*(w \equiv w') = (sw \equiv sw')$ для $s\colon W(X) \to W(Y)$, $w, w' \in W(X)$;
   4.2) $s^x_w a \wedge (w \equiv w') < s^x_{w'} a$ для произвольного $a \in \Upsilon(X), x \in X$, где $w, w' \in W(X)$, а $s^x_w\colon W(X) \to W(X)$ задано правилом $s^x_w(x) = w$, $s^x_w(y) = y$, $y \in X$, $y \neq x$.

Категория $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ служит примером категории Халмоша. Другой важный пример – категория формул Hal^0_Θ алгебры формул $\mathrm{Hal}^0_\Theta(X) = \Phi(X)$. Эта категория играет в логической геометрии ту же роль, что категория Θ^0 играет в AG.

5.4. Алгебры Халмоша. Мы работаем с многосортными алгебрами Халмоша, ассоциированными с категориями Халмоша. Опишем вначале сигнатуру L_X. Для всякого X положим $L_X = \{\vee, \wedge, ^-, \exists x, x \in X, M_X\}$. Здесь M_X – множество всех равенств над алгеброй $W = W(X)$. Добавим все $s\colon W(X) \to W(Y)$ ко всем L_X, трактуя их как символы унарных операций. Обозначим эту новую сигнатуру через L_Θ.

Далее, рассмотрим алгебры $\Upsilon = (\Upsilon_X, X \in \Gamma)$. Всякая Υ_X – это алгебра в сигнатуре L_X, причем всякому символу $s\colon W(X) \to W(Y)$ соответствует унарная операция (отображение) $s_*\colon \Upsilon_X \to \Upsilon_Y$.

Определение 5.2. Назовем алгебру Υ в сигнатуре L_Θ *алгеброй Халмоша*, если выполнены следующие условия:
1) всякая Υ_X является расширенной булевой алгеброй в сигнатуре L_X;
2) всякое отображение $s_*\colon \Upsilon_X \to \Upsilon_Y$ является гомоморфизмом булевых алгебр;
3) тождества, контролирующие взаимодействие операций s_* с кванторами и равенствами, те же, что в определении категорий Халмоша.

Теперь ясно, что каждую категорию Халмоша Υ можно рассматривать как алгебру Халмоша и наоборот. В частности, это относится к $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$. Напомним также, что гомоморфизмы многосортных алгебр действуют покомпонентно.

5.5. Категории и алгебры формул. Обозначим через $M = (M_X, X \in \Gamma)$ многосортное множество с компонентами M_X.

Возьмем абсолютно свободную алгебру $\Upsilon^0 = (\Upsilon^0_X, X \in \Gamma)$ над M в сигнатуре L_Θ. Элементы каждой Υ^0_X суть формулы логики первого порядка (FOL), которые индуктивно построены из равенств, с использованием сигнатуры L_Θ. Итак, Υ^0 – многосортная алгебра чистых FOL формул над равенствами.

Обозначим через Hal_Θ многообразие Γ-сортных алгебр Халмоша в сигнатуре L_Θ. Обозначим через Hal^0_Θ свободную алгебру этого мнообразия над многосортным множеством равенств $M = (M_X, X \in \Gamma)$.

То же самое M задает гомоморфизм $\pi = (\pi_X, X \in \Gamma)\colon \Upsilon^0 \to \mathrm{Hal}^0_\Theta$. Если $u \in \Upsilon^0_X$, то образ $u^{\pi_X} = \overline{u}$ в $\mathrm{Hal}^0_\Theta(X)$ рассматривается как сжатая формула.

Полагая $\mathrm{Hal}^0_\Theta(X) = \Phi(X) = (\Upsilon^0_X)^{\pi_X}$, получаем искомую алгебру сжатых формул, (систематически) используемую нами во всей статье. Это расширенная булева алгебра с дополнительными операцями вида s_*.

Напомним, что алгебра Халмоша формул Hal^0_Θ является также категорией Халмоша. Имеем ковариантный функтор $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}^0_\Theta$.

5.6. Значение формулы. Значение $\mathrm{Val}_H^X(w \equiv w')$ соответствует каждому равенству $w \equiv w'$, $w, w' \in W(X)$. Это задает отображение $\mathrm{Val}_H \colon M \to \mathrm{Hal}_\Theta(H)$, расширяемое по индукции единственным образом с атомных формул до гомоморфизмов

$$\mathrm{Val}_H^0 \colon \Upsilon^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(H), \qquad \mathrm{Val}_H \colon \mathrm{Hal}_\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(H).$$

Для всякого $X \in \Gamma$ имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon_X^0 \arrow[rr, "\mathrm{Val}_H^{0X}"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & & \mathrm{Bool}(W(X), H) \\
& \Phi(X) \arrow[ur, "\mathrm{Val}_H^X"'] &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, для всякой формулы $u \in \Upsilon_X^0$ и соответствующего $\overline{u} \in \Phi(X)$ имеются значения $\mathrm{Val}_H^{0X}(u) = \mathrm{Val}_H^X(\overline{u})$.

Сделаем одно замечание о ядре гомоморфизма Val_H. Имеет место

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Val}_H) = \mathrm{Th}(H) = (\mathrm{Th}^X(H), X \in \Gamma).$$

Здесь $Th(H) = (\mathrm{Th}^X(H), X \in \Gamma)$ есть *элементарная теория* алгебры H, т.е. множество таких формул $u \in \mathrm{Th}^X(H)$, что $\mathrm{Val}_H^X(u) = \mathrm{Hom}(W(X), H)$. Понятно также, что образ $\mathrm{Im}\,\mathrm{Val}_H$ является подалгеброй в $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$, состоящей из одноопределенных множеств.

5.7. Основная теорема.

Теорема 5.3 [5]. *Многообразие* Hal_Θ *порождено всеми алгебрами* $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$, $H \in \Theta$.

Это означает, что тождества всех $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ задают многообразие алгебр Халмоша Hal_Θ.

Если Θ_1 – подалгебра в Θ, то многообразие Hal_{Θ_1} в Hal_Θ, порожденное всеми $\mathrm{Hal}_{\Theta_1}(H)$, $H \in \Theta_1$, соответствует подалгебре Θ_1. Следовательно, если H_1 и H_2 – алгебры из Θ_1, то они изотипны в Θ_1 тогда и только тогда, когда они изотипны в Θ.

Сделаем также следующее общее наблюдение. Ясно, что найдется канонический гомоморфизм многосортных алгебр

$$\pi_H \colon \Upsilon^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(H),$$

где $\pi_H = (\pi_H^X, X \in \Gamma)$ и π_H^X – гомоморфизмы $\pi_H^X \colon \Upsilon_X^0 \to \mathrm{Bool}(W(X), H))$. Этот гомоморфизм единственен, поскольку он переводит равенства в соответствующие равенства. Значит, ядро $\mathrm{Ker}(\pi_H)$ является также конгруэнцией тождеств алгебры $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$. Рассмотрим $\widetilde{\pi} = \bigcap_H \mathrm{Ker}(\pi_H)$. Это конгруэнция всех тождеств многообразия, порожденного всеми $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$.

Теперь видно, что теорема 5.3 означает, что найдется равенство

$$\mathrm{Hal}_\Theta^0 = \Upsilon^0/\widetilde{\pi}, \qquad \Phi(X) = \Upsilon_X^0/\widetilde{\pi}_X,$$

где $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\pi}_X, X \in \Gamma^0)$ и $\widetilde{\pi}_X = \mathrm{Ker}(\pi_X)$. Конгруэнция $\widetilde{\pi}$ соответствует конгруэнции Линденбаума–Тарского.

В самом деле, пара формул (u_1, u_2) принадлежит конгруэнции $\widetilde{\pi}_X$ тогда и только тогда, когда $u_1^{\pi_H^X} = u_2^{\pi_H^X}$ выполнено для любой алгебры $H \in \Theta$. Это означает также, что если v – формула $(u_1 \to u_2) \wedge (u_2 \to u_2)$, то $v^{\pi_H^X} = 1 = \mathrm{Hom}(W(X), H)$. Это справедливо для всякого $X \in \Gamma^0$ и любой $H \in \Theta$, что дает искомое соответствие.

Мы привели необходимые сведения из алгебраической логики. Условия из п. 1.2 теперь реализованы.

5.8. Категория элементарных множеств. Рассмотрим вначале категорию $\mathrm{Set}_\Theta(H)$ аффинных множеств над некоторой алгеброй H. Ее объекты имеют вид (X, A), где A – произвольное подмножество аффинного пространства $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, а морфизмы имеют вид

$$[s]\colon (X, A) \to (Y, B),$$

где $s\colon W(Y) \to W(X)$ – морфизм в Θ^0; соответствующее $\widetilde{s}\colon \mathrm{Hom}(W(X), H) \to \mathrm{Hom}(W(Y), H)$ должно быть согласовано с A и B следующим условием: если $\nu \in A \subset \mathrm{Hom}(W(X), H)$, то $\widetilde{s}(\nu) \in B \subset \mathrm{Hom}(W(Y), H)$. Тогда мы рассматриваем индуцированное отображение $[s]\colon A \to B$ как морфизм $(X, A) \to (Y, B)$.

Определим теперь категорию алгебраических множеств $K_\Theta(H)$ и категорию элементарных множеств $LK_\Theta(H)$. Обе эти категории – полные подкатегории в $\mathrm{Set}_\Theta(H)$ и понимаются как важные инварианты алгебры H. Назовем их AG- и LG-инвариантами алгебры H.

Объекты категории $K_\Theta(H)$ имеют вид (X, A), где A – алгебраическое множество в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Если взять для A элементарные множества, получится категория $LK_\Theta(H)$ элементарных множеств. Категория $K_\Theta(H)$ является полной подкатегорией в $LK_\Theta(H)$.

Как было упомянуто, если алгебры H_1 и H_2 изотипны, то категории $LK_\Theta(H_1)$ и $LK_\Theta(H_2)$ изоморфны.

5.9. Теория моделей и многосортная алгебраическая логика. Вспомним некоторые известные факты.

Начнем со следующего важного наблюдения. Наряду с алгеброй формул $\Phi = \Phi(X)$ рассмотрим алгебру чистых формул Υ^0_X. Здесь формулы отождествляются с их записями. Сложность, возникающая в многосортном случае, состоит в следующем. В записи таких формул присутствуют не только переменные из множества (сорта) X. Это не позволяет использовать в категории Υ^0 некоторые стандартные понятия теории моделей.

Следующие замечания показывают путь преодоления этого затруднения. Пусть X – подмножество в Y, и пусть $s\colon X \to Y$ – тождественное отображение. Оно соответствует вложению $s_*\colon \Phi(X) \to \Phi(Y)$. Далее, пусть $u_1 \in \Phi(X_1)$ и $u_2 \in \Phi(X_2)$ – две формулы. Подмножества X_1, X_2 множества Y вложены посредством $s^1\colon X_1 \to Y$ и $s^2\colon X_2 \to Y$. Формулы $u_1 \in \Phi(X_1)$ и $u_2 \in \Phi(X_2)$ назовем *эквивалентными*, если для некоторого $Y \in \Gamma$ имеет место $s^1_*(u_1) = s^2_*(u_2)$. Формулу $u \in \Phi(X)$ назовем *элементарной*, если она принадлежит $\Phi^0(X)$. Доказано (см. [5]), что всякая формула в некотором $\Phi(X)$ эквивалентна некоторой элементарной формуле.

Для элементарных формул стандартные понятия теории моделей определяются естественным образом. В действительности, в теории моделей все формулы элементарны. Теорема из [5] позволяет рассматривать соответствующие стандартные понятия, используя эквивалентности формул.

В теории моделей переменная может быть либо связанной каким-то квантором, либо свободной. Это приводит к понятию замкнутой формулы. В многосортном случае также можно рассматривать замкнутые формулы.

Формула $u \in \Phi(X)$ называется *замкнутой* или *предложением*, если для всех $H \in \Theta$ значение $\mathrm{Val}^H_X(u)$ равно либо 0, либо 1 в $\mathrm{Bool}(W(X), H)$ (т.е. либо всему пространству $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, либо его пустому подмножеству). В односортном случае это определение совпадает с обычным.

Множество T замкнутых формул в Υ^0 или в Hal^0_Θ называется *теорией*. Теория называется *выполнимой*, если она имеет модель. Теория T называется *полной*, если для всякой замкнутой формулы u либо u принадлежит T, либо $\neg u$ принадлежит T. Теория $\mathrm{Th}(H)$ алгебры H всегда полна. Теория T называется *категоричной в данной мощности* α, если любые две ее модели мощности α изоморфны.

Настоящая статья принадлежит к целому ряду статей об универсальной алгебраической геометрии (см. [4], [6]–[9], [15], [25] и др.). Как мы упомянули, в построениях рассматриваемой теории возникают различные вопросы, близкие к алгебре и теории моделей. Они кажутся новыми, хотя иные из них могут выглядеть простыми для специалистов в области теории моделей.

Следующие замечания касаются чистой логики и алгебраической логики в теории моделей. Теория моделей представляет собой комбинацию синтаксиса и семантики. Синтаксис (языки) играет в ней существенную роль, сравнимую с ролью семантики (моделей). Можно говорить о синтаксической структуре, относящейся к языкам, и о теориях в языках. Все это применимо к конкретным математическим задачам (см. [26]).

Алгебраическая логика это не вполне синтаксис. Она работает в теории моделей. Полезно использовать гомоморфизмы $\mathrm{Val}_H^X\colon \Phi(X) \to \mathrm{Bool}(W(X), H)$, соотносящие формулу и ее значение. Элементарную теорию можно представить как ядро такого гомоморфизма. Применительно к типам можно говорить о логическом ядре точки (т.е. гомоморфизма). Это ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$ автоматически оказывается ультрафильтром в алгебре формул $\Phi = \Phi(X)$. Существует множество иных причин применять алгебраическую логику в теории моделей.

Еще раз перечислим открытые вопросы.

Проблема 5.4. Рассмотреть бесконечные логически нётеровы алгебры в различных многообразиях Θ.

Проблема 5.5. Рассмотреть отделимые алгебры в различных многообразиях

Проблема 5.6. Для каких многообразий Θ алгебры, свободные в Θ, будут логически отделимыми?

Проблема 5.7. Построить автоморфно финитарные алгебры H в различных многообразиях Θ. Другими словами, получить такие алгебры H в Θ, что для любого конечного X в пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ существует лишь конечное число $\mathrm{Aut}(H)$-орбит.

Проблема 5.8. Общая проблема: типы и изотипность в многосортных алгебрах. Рассмотреть эту проблему для многообразия представлений групп.

Отметим, что в [3] была поставлена проблема 1.23, касающаяся неизоморфных изотипных абелевых групп. Теперь мы видим, что эта проблема легко решается (предложение 3.4). На самом деле, для абелевых групп актуальна следующая проблема.

Проблема 5.9. Найти условия, при которых две абелевы группы элементарно эквивалентны, но не изотипны.

Наконец,

Проблема 5.10. Какие нётеровы группы не являются логически нётеровыми?

Во всех этих случаях мы подразумеваем специфические Θ и $H \in \Theta$. Например, Θ могут состоять из модулей, векторных пространств, линейных алгебр, алгебр Ли, ассоциативных алгебр (конечной или бесконечной размерности) и т.д. Конкретное всегда иллюстрирует общее.

Автору приятно выразить благодарность Цлилю Села отметившему, что логическое ядро точки является типом, и Алексею Мясникову, обратившему внимание автора на тот факт, что логико-геометрическая эквивалентность алгебр есть не что иное, как изотипность алгебр. Автор признателен также своим коллегам Ю. Ершову, Е. Кацову, В. Ремесленникову, Э. Рипсу, А. Ольшанскому, Г. Житомирскому, Б. Зильберу и др. за постоянную поддержку.

Настоящая статья была написана в Юрмале, Латвия, где у автора были совершенные рабочие условия благодаря молодым друзьям Анне Ефименко и Диме Ковалю, а также Алле и Игорю Думанам. Рукопись была напечатана и подготовлена Е. и Т. Плоткиными. Автор выражает глубокую благодарность Д. И. Савельеву за перевод статьи на русский язык.

Список литературы

[1] W. Hodges, *Model Theory*, Encyclopedia Math. Appl., **42**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[2] D. Marker, *Model Theory. An Introduction*, Grad. Texts in Math., **217**, Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] B. Plotkin, G. Zhitomirski, "Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras", *Алгебра и анализ*, **19**:5 (2007), 214–245; *St. Petersburg Math. J.*, **19**:5 (2008), 829–852.

[4] B. Plotkin, *Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry*, 2002, arXiv: math.GM/0204245.

[5] Б. Плоткин, "Алгебраическая геометрия в логике первого порядка", *Алгебра и геометрия*, Современная математика и ее приложения, **22**, Институт кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2004, 16–62; *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **137**:5 (2006), 5049–5097; arXiv: math.GM/0312485.

[6] B. Plotkin, "Some results and problems related to universal algebraic geometry", *Internat. J. Algebra Comput.*, **17**:5-6 (2007), 1133–1164.

[7] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, "Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory", *J. Algebra*, **219**:1 (1999), 16–79.

[8] A. Kvaschuk, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, "Algebraic geometry over groups. III. Elements of model theory", *J. Algebra*, **288**:1 (2005), 78–98.

[9] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, "Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations", *J. Algebra*, **234**:1 (2000), 225–276.

[10] B. Plotkin, *Algebraic Logic*, *Varieties of Algebras and Algebraic Varieties*, arXiv: math.GM/0312420.

[11] P. R. Halmos, *Algebraic Logic*, Chelsea Publ., New York, 1962.

[12] Б. И. Плоткин, "Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре", *Алгебра и анализ*, **9**:4 (1997), 224–248; *St. Petersburg Math. J.*, **9**:4 (1998), 859–879.

[13] R. Grossberg, "Classification theory for abstract elementary classes", *Logic and Algebra*, Contemp. Math., **302**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 165–204.

[14] R. Baer, "Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen", *Math. Ann.*, **133**:3 (1957), 256–270.

[15] Б. И. Плоткин, "Радикал и нильэлементы в группах", *Изв. вузов. Матем.*, 1958, № 1, 130–135.

[16] B. I. Plotkin, "Notes on Engel groups and Engel elements in groups. Some generalizations", *Изв. УрГУ*, 2005, № 36, 153–166; arXiv: math.GR/0406100.

[17] Б. И. Плоткин, "Радикальные группы", *Матем. сб.*, **37**:3 (1955), 507–526.

[18] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, Stud. Logic Found. Math., **73**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1973.

[19] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, "Embedding theorems for groups", *J. London Math. Soc*, **24**:4 (1949), 247–254.

[20] А. Г. Курош, *Теория групп*, Nauka, Moscow, 1967.

[21] P. Hall, "Some constructions for locally finite groups", *J. London Math. Soc.*, **34**:3 (1959), 305–319.

[22] O. H. Kegel, "Regular limits of infinite symmetric groups", *Ischia Group Theory* 2008, World Sci., Hackensack, NJ, 2009, 120–130.

[23] B. H. Neumann, "An essay on free products of groups with amalgamation", *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **246** (1954), 503–554.

[24] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras. I*, Stud. Logic Found. Math., **64**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1985; *Cylindric Algebras. II*, Stud. Logic Found. Math., **115**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1985.

[25] B. I. Plotkin, "Algebras with the Same (Algebraic) Geometry", *Математическая логика и алгебра*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Петра Сергеевича Новикова, Тр. МИАН, **242**, Наука, М., 2003, 176–207; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **242** (2003), 165–196; arXiv: math.GM/0210194.

[26] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Современная алгебра, Наука, М., 1970.

Вложение решеток в производные решетки

М. В. Семёнова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

Настоящая работа является расширенной версией доклада автора на Международной конференции “Мальцевские чтения”, посвященной 100-летию со дня рождния академика А. И. Мальцева, которая прошла в г. Новосибирске 24–28 августа 2009 г. Речь здесь пойдет о недавних результатах, связанных с описанием классов решеток, вложимых в различные производные решетки, а также о некоторых нерешенных проблемах в этой области. В рамках статьи было бы довольно сложно дать обзор всего спектра проблем и результатов, касающихся рассматриваемых вопросов. Поэтому ограничимся упоминанием недавних результатов, полученных автором лично либо в соавторстве, а также результатов других авторов, тесно примыкающих к нашим.

1. Введение

Проблема вложения алгебраических систем в другие алгебраические системы, обладающие теми или иными свойствами, является классической в алгебре и теории моделей. Исследования в этой области были начаты А. И. Мальцевым в 30-е годы прошлого столетия в его пионерских работах [1], [2]. В этих работах Анатолий Иванович, в частности, показал, что класс полугрупп, вложимых в группы, является квазимногообразием (другими словами, может быть задан некоторым множеством квазитождеств в классе всех полугрупп). Кроме этого, он указал конкретный бесконечный базис квазитождеств для этого квазимногообразия, а также показал, что оно не может быть определено никаким конечным множеством квазитождеств (т.е. не является конечно базируемым).

В своей более поздней работе 1966 г. [3] Анатолий Иванович показал, что этот результат о вложимости полугрупп в группы является частью более общей картины. А именно, из характеризационной теоремы для квазимногообразий, доказанной в [3] (см. также [4]), вытекает, что если некоторый класс алгебраических систем (далее – просто систем) $\mathscr{K}$ замкнут относительно фильтрованных произведений, то класс систем, вложимых в системы из $\mathscr{K}$, является квазимногообразием. Для более точной формулировки этих результатов дадим необходимые определения.

Всюду далее, когда мы говорим о классе алгебраических систем, мы подразумеваем абстрактный (т.е. замкнутый относительно изоморфных копий) класс систем произвольной фиксированной сигнатуры. Класс алгебраических систем называется *многообразием*, если он определяется в классе всех систем того же типа тождествами, т.е. предложениями вида

$$\forall \overline{x} \quad A_0(\overline{x}) \& \cdots \& A_n(\overline{x}),$$

где $A_0(\overline{x}), \dots, A_n(\overline{x})$ – атомарные формулы.

Класс систем называется *квазимногообразием*, если он определяется в классе всех систем того же типа квазитождествами, т.е. предложениями вида

$$\forall \overline{x} \quad A_0(\overline{x}) \& \cdots \& A_n(\overline{x}) \to A(\overline{x}),$$

где $A_0(\overline{x}), \dots, A_n(\overline{x}),\ A(\overline{x})$ – атомарные формулы.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3669.2010.1) и программы поддержки молодых ученых (грант № МД-2587.2010.1).

Далее, для произвольного класса $\mathscr{K}$ пусть $\mathbf{V}(\mathscr{K})$ обозначает наименьшее многообразие, содержащее $\mathscr{K}$ (другими словами, многообразие, порожденное $\mathscr{K}$), а $\mathbf{Q}(\mathscr{K})$ – квазимногообразие, порожденное $\mathscr{K}$. Кроме того, пусть $\mathbf{P}(\mathscr{K})$ обозначает класс систем, изоморфных декартовым произведениям систем из $\mathscr{K}$; $\mathbf{P}_r(\mathscr{K})$ – класс систем, изоморфных фильтрованным произведениям систем из $\mathscr{K}$; $\mathbf{P}_u(\mathscr{K})$ – класс систем, изоморфных ультрапроизведениям систем из $\mathscr{K}$; $\mathbf{S}(\mathscr{K})$ – класс систем, изоморфных подсистемам систем из $\mathscr{K}$ (другими словами, класс систем, изоморфно вложимых или просто вложимых в системы из $\mathscr{K}$); $\mathbf{H}(\mathscr{K})$ – класс гомоморфных образов систем из $\mathscr{K}$, а $\mathscr{K}_{\mathrm{fin}}$ обозначает класс конечных систем из $\mathscr{K}$. В терминах операторов над классами упомянутая выше характеризационная теорема Мальцева выглядит следующим образом.

Теорема 1.1 (Мальцев [3]). *Для произвольного класса систем $\mathscr{K}$ имеют место равенства $\mathbf{Q}(\mathscr{K}) = \mathbf{SP}_r(\mathscr{K}) = \mathbf{SPP}_u(\mathscr{K})$.*

Для многообразий характеризационная теорема была доказана Биркгофом в 1935 г.

Теорема 1.2 (Биркгоф [5]). *Для произвольного класса систем $\mathscr{K}$ имеют место равенства $\mathbf{V}(\mathscr{K}) = \mathbf{HSP}(\mathscr{K})$.*

Удобные термины для формулировки различных проблем вложения в классе решеток дают понятия пространства замыкания и решетки замыканий.

Пространством замыкания называется пара (X, φ), где X – множество с определенным на нем оператором замыкания φ, который удовлетворяет следующим условиям:
(1) $A \subseteq \varphi(A) \subseteq X$ для любого $A \subseteq X$;
(2) $\varphi^2(A) = \varphi(A)$ для любого $A \subseteq X$;
(3) $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ для любых $A \subseteq B \subseteq X$.

Если $\varphi(A) = A$, то множество $A \subseteq X$ называется *замкнутым.* Множество

$$\mathrm{Cl}(X, \varphi) = \{A \subseteq X \mid A = \varphi(A)\}$$

всех замкнутых подмножеств в (X, φ) образует полную решетку относительно включения, в которой для любого семейства $A_i \in \mathrm{Cl}(X, \varphi)$, $i \in I$,

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i, \qquad \bigvee_{i\in I} A_i = \varphi\Bigl(\bigcup_{i\in I} A_i\Bigr).$$

Решетку $\mathrm{Cl}(X, \varphi)$ мы называем также *решеткой замыканий.*

Пусть A – алгебраическая система. Для любого $B \subseteq A$ пусть $\mathrm{Sub}(B)$ обозначает подсистему в A, порожденную множеством B. Тогда (A, Sub) является пространством замыкания, для которого решетка замыканий совпадает с *решеткой подсистем* $\mathrm{Sub}(A)$. Другим примером решеток замыканий являются *решетки квазимногообразий.* Пусть $\mathscr{Q}$ – квазимногообразие. Напомним, что для любого подкласса $\mathscr{A}$ в $\mathscr{Q}$ наименьшее квазимногообразие, содержащее $\mathscr{A}$, мы обозначаем через $\mathbf{Q}(\mathscr{A})$. Тогда решетка подквазимногообразий в $\mathscr{Q}$ является решеткой замыканий для $(\mathscr{Q}, \mathbf{Q})$.

Конечно, два приведенных примера не исчерпывают весь список решеток замыканий, которые служат объектом широкого круга исследований во многих областях универсальной алгебры, теории моделей, теории решеток (см. [6], [7]), связанных с изучением свойств решеток замкнутых подмножеств как конкретных пространств замыканий, так и абстрактных пространств замыканий в целом. В этих исследованиях естественным образом возникают следующие проблемы.

- Для заданного класса $\mathscr{C}$ пространств замыкания описать класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Cl}(\mathscr{C})$ решеток, вложимых в решетки замыканий пространств из $\mathscr{C}$.

- Является ли класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Cl}(\mathscr{C})$ аксиоматизируемым на языке первого порядка?

• Является ли класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Cl}(\mathscr{C})$ (квази)многообразием?

• Описать класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Cl}(\mathscr{C})_{\mathrm{fin}}$ конечных решеток, вложимых в решетки замыкания пространств из $\mathscr{C}$.

К настоящему времени наиболее изучены два типа пространств замыкания: комбинаторные геометрии (Корте, Ловас, Шрадер [8]) и выпуклые геометрии (Адаричева, Горбунов, Туманов [9]).

2. Выпуклые геометрии

Пространство замыкания (X, φ) называется *выпуклой геометрией*, если оно обладает следующим свойством антизамены:

$$a \in \varphi(Y \cup \{b\}), \quad a \notin \varphi(Y) \qquad \text{влечет} \qquad b \notin \varphi(Y \cup \{a\})$$

для любых $a \neq b$ из X и любого $Y \subseteq X$. Свойство антизамены является обобщением естественного понятия выпуклости в афинных пространствах (см. рис. 1).

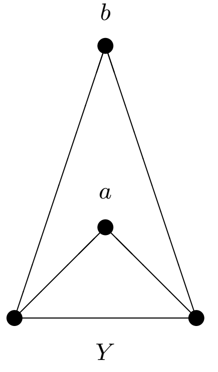

Рис. 1. Иллюстрация свойства антизамены

Решетка замыкания любой конечной выпуклой геометрии *полудистрибутивна вверх*, т.е. удовлетворяет квазитождеству

$$\forall\, x, y, z \quad x \vee y = x \vee z \to x \vee y = x \vee (y \wedge z).$$

Пусть $\mathrm{SD}^{\vee}$ обозначает класс полудистрибутивных вверх решеток. Очевидно, свойство полудистрибутивности вверх устойчиво при переходе к подрешеткам, поэтому любая подрешетка решетки замыканий конечной выпуклой геометрии полудистрибутивна вверх. Оказывается, что класс конечных выпуклых геометрий универсален для класса конечных полудистрибутивных вверх решеток в следующем смысле.

Теорема 2.1 (Адаричева, Горбунов, Туманов [9]). *Конечная решетка полудистрибутивна вверх тогда и только тогда, когда она вложима в решетку замыканий некоторой конечной выпуклой геометрии. Другими словами,* $\mathrm{SD}^{\vee}_{\mathrm{fin}} = \mathbf{S}\,\mathbf{Cl}(\mathscr{C})$, *где* $\mathscr{C}$ *обозначает класс конечных выпуклых геометрий.*

В связи с этим результатом была поставлена

Проблема 1 (Адаричева, Горбунов, Туманов [9]). Существует ли класс $\mathscr{U}$ конечных выпуклых геометрий конкретного вида, универсальный для класса всех конечных полудистрибутивных вверх решеток (другими словами, класс $\mathscr{U}$, для которого справедливо равенство $\mathbf{SCl}(\mathscr{U}) = \mathrm{SD}^{\vee}_{\mathrm{fin}}$)?

Далее мы рассмотрим проблему 1 в контексте некоторых конкретных пространств замыкания.

2.1. Выпуклые геометрии в векторных пространствах. Для произвольного тела $\mathbb{D}$ и натурального $n > 0$ пусть $\mathbb{D}^n_{\mathbb{D}}$ обозначает n-мерное векторное пространство над $\mathbb{D}$. Если $\mathbb{D}$ – линейно упорядоченное тело, а $\langle V_{\mathbb{D}}, +, -, \mathbb{D}\rangle$ – векторное пространство над $\mathbb{D}$, то множество $U \subseteq V_{\mathbb{D}}$ называется *выпуклым*, если $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ для любых $x, y \in U$ и любого $\lambda \in [0,1] \subseteq \mathbb{D}$. Для $X \subseteq V_{\mathbb{D}}$ пусть $\mathrm{Co}(X)$ обозначает наименьшее выпуклое подмножество в $V_{\mathbb{D}}$, содержащее X (или выпуклую оболочку множества X). Соответствующую решетку замкнутых (выпуклых в данном контексте) подмножеств мы обозначаем через $\mathrm{Co}(V_{\mathbb{D}})$.

Если $X \subseteq V_{\mathbb{D}}$, то полагаем

$$\mathrm{Co}_X(V_{\mathbb{D}}) = \{X \cap Y \mid Y \in \mathrm{Co}(V_{\mathbb{D}})\}$$

и любое множество $U \in \mathrm{Co}_X(V_{\mathbb{D}})$ называем *относительно выпуклым* в $V_{\mathbb{D}}$. Нетрудно видеть, что для любого $X \subseteq V_{\mathbb{D}}$ пространство замыкания (X, Co_X) является выпуклой геометрией, а $\mathrm{Co}_X(V_{\mathbb{D}})$ – ее решеткой замкнутых (выпуклых) подмножеств.

В связи с проблемой 1 ее авторы поставили также следующий вопрос.

Проблема 2 (Адаричева, Горбунов, Туманов [9]). *Является ли класс конечных решеток относительно выпуклых подмножеств векторных пространств универсальным для класса* $\mathrm{SD}^{\vee}_{\mathrm{fin}}$?

Частично (положительный) ответ на этот вопрос дают теоремы 2.2 и 2.3, но по сути проблема 2 до сих пор остается открытой.

Теорема 2.2 (Верунг, Семенова [10]). *Пусть $\mathbb{D}$ – линейно упорядоченное тело. Для любой решетки L существует вектороное пространство $V_{\mathbb{D}}$ над $\mathbb{D}$, такое что L вложима в* $\mathrm{Co}(V_{\mathbb{D}})$.

Для формулировки следующей теоремы дадим необходимые определения. Решеточный гомоморфизм $h\colon K \to L$ *ограничен снизу*, если для любого $a \in L$ множество $\{x \in K \mid h(x) \geqslant a\}$ либо пусто, либо содержит наименьший элемент. Решетка L называется *ограниченной снизу*, если для любой конечно порожденной решетки K любой гомоморфизм $h\colon K \to L$ ограничен снизу. Понятие ограниченного (снизу) гомоморфизма служит обобщением понятия $(\wedge)$-полного гомоморфизма и впервые появилось в работе Маккензи [11] в связи с изучением немодулярных многообразий решеток. Это понятие нашло естественные приложения и в теории свободных решеток, где был получен ряд замечательных результатов (см. монографию Фриза, Ежека, Нейшна [12]).

Пусть LB обозначает класс ограниченных снизу решеток. Отметим, что класс LB_{fin} конечных ограниченных снизу решеток образует собственный подкласс в классе конечных полудистрибутивных вверх решеток и порождает многообразие всех решеток. Для класса LB_{fin} ответ на вопрос, поставленный в проблеме 2, положителен.

Теорема 2.3 (Верунг, Семенова [10]). *Пусть $\mathbb{D}$ – линейно упорядоченное тело. Любая конечная ограниченная снизу решетка L вложима в решетку $\mathrm{Co}_X(\mathbb{D}^n_{\mathbb{D}})$ для подходящих натурального $n > 0$ и конечного $X \subseteq \mathbb{D}^n_{\mathbb{D}}$.*

2.2. Выпуклые геометрии в упорядоченных множествах. Пусть $\langle P, \leqslant\rangle$ – частично упорядоченное множество. Подмножество $X \subseteq P$ называется *выпуклым*, если $x \leqslant z \leqslant y$ влечет $z \in X$ для любых $x, y \in X$ и любого $z \in P$. Для $X \subseteq P$ пусть $\mathrm{Co}(X)$ обозначает выпуклую оболочку множества X. Соответствующую решетку замкнутых (выпуклых) подмножеств мы обозначаем, как и для векторных пространств, через $\mathrm{Co}(P)$.

И вновь нетрудно видеть, что для любого частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant\rangle$ пространство замыкания (P, Co) является выпуклой геометрией. Для произвольного класса $\mathscr{K}$

упорядоченных множеств пусть $\mathbf{Co}(\mathscr{K})$ обозначает соответствующий класс решеток выпуклых подмножеств. Пусть также $\mathscr{P}$ обозначает класс всех частично упорядоченных множеств.

В связи с постановкой проблемы 1 авторы работы [9] сочли интересным также выяснить, не будет ли класс конечных выпуклых геометрий вида (P, Co) искомым универсальным классом для $\mathrm{SD}^{\vee}_{\mathrm{fin}}$. Поскольку квазимногообразие $\mathrm{SD}^{\vee}$ порождается своими конечными решетками (см. [9, теорема 4.1.7]), отрицательный ответ на поставленный вопрос дает следующая

Теорема 2.4 (Верунг, Семенова [13]). *Класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P})$ является конечно базируемым многообразием, поэтому $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P}) \subset \mathrm{SD}^{\vee}$.*

Отметим, что согласно характеризационной теореме 1.1 Мальцева класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P})$ является квазимногообразием. Отметим также, что в работе [13] был найден конкретный конечный базис тождеств для многообразия $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P})$.

В связи с теоремой 2.4 естественной представляется проблема описания решеток, принадлежащих классу $\mathbf{Co}(\mathscr{K})$ для различных конкретных классов упорядоченных множеств $\mathscr{K}$. Для произвольного натурального числа n и для произвольного класса упорядоченных множеств $\mathscr{K}$ пусть $\mathscr{K}_n$ обозначает класс упорядоченных множеств из $\mathscr{K}$ высоты, не превосходящей n. Используя характеризационную теорему Мальцева, вновь нетрудно проверить, что класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P}_n)$ является квазимногообразием для любого натурального n. Теорема 2.5 дает более детальную информацию об этом классе.

Теорема 2.5 (Верунг, Семенова [14]). (1) *Класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P}_n)$ является конечно базируемым многообразием для любого натурального n.*

(2) *Многообразие $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P}_n)$ локально конечно тогда и только тогда, когда $n < 3$.*

Отметим, что в работе [14] был найден конкретный конечный базис тождеств для многообразия $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{P}_n)$ для любого натурального n.

Пусть $\mathscr{L}\mathscr{O}$ обозначает класс линейно упорядоченных множеств (цепей). Вновь согласно характеризационной теореме Мальцева класс $\mathbf{SP}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$ является квазимногообразием. Теорема 2.6 позволяет полностью описать решетку подквазимногообразий в $\mathbf{SP}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$.

Теорема 2.6 (Верунг, Семенова [15]). (1) *Класс $\mathbf{SP}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$ является конечно базируемым локально конечным многообразием.*

(2) *Любое подквазимногообразие в $\mathbf{SP}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$ является многообразием.*

Решетка под(квази)многообразий в $\mathbf{SP}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$. изображена на рис. 2; здесь $\mathrm{Co}(\mathbf{n})$ для всякого натурального $n > 0$ обозначает решетку выпуклых подмножеств n-элементной цепи, а $\mathscr{B}_n$ обозначает интервал, изоморфный решетке подмножеств n-элементного множества. Конкретный конечный базис тождеств для многообразия $\mathbf{SP}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$ был найден в работе [15].

Лесом мы называем частично упорядоченное множество, в котором нижний конус, порожденный любым элементом, является цепью. Это условие равносильно также следующему: любые два несравнимых элемента не имеют верхней границы. *Деревом* мы называем лес, который является связным. Пусть $\mathscr{F}$ обозначает класс частично упорядоченных множеств, являющихся лесами, а $\mathscr{T}$ обозначает класс деревьев. И вновь характеризационная теорема Мальцева показывает, что класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{F})$ является квазимногообразием.

Теорема 2.7 (Замойска-Дженио, Семенова [16]). (1) *Классы $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{F})$ и $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{T})$ совпадают и образуют конечно базируемое многообразие.*

(2) *Класс $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{F}_n)$ является конечно базируемым многообразием для любого натурального n.*

В связи с тем, что многообразие $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{L}\mathscr{O})$ локально конечно согласно теореме 2.6, (1) и, очевидно, имеет место включение $\mathscr{L}\mathscr{O} \subset \mathscr{T}$, интерес представляет следующая проблема.

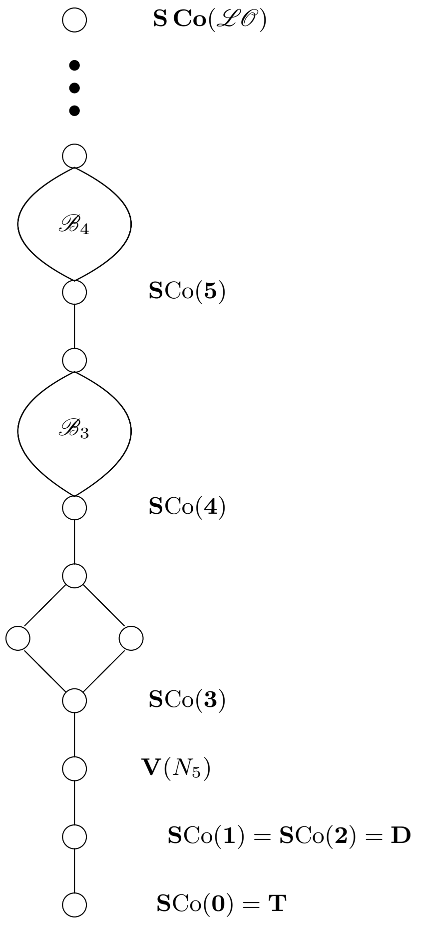

Рис. 2. Решетка под(квази)многообразий в $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{LO})$

Проблема 3 (Замойска-Дженио, Семенова [16]). Является ли многообразие $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{T})$ локально конечным?

В теореме 2.8 и следствии 2.9 пусть $\mathscr{K}$ обозначает один из классов $\mathscr{P}$, $\mathscr{LO}$, $\mathscr{T}$ или $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{F}_n$ для натурального n.

Теорема 2.8 (Верунг, Семенова [13]; Замойска-Дженио, Семенова [16]). *Многообразие* $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{K})$ *порождается своими конечными решетками.*

Таким образом, согласно теореме Маккинси (см. [17]) справедливо

Следствие 2.9. *Эквациональная теория* $\mathbf{S}\,\mathbf{Co}(\mathscr{K})$ *разрешима.*

Согласно характеризационной теореме Мальцева класс $\mathbf{SP}(\mathrm{Co}(P))$ является квазимногообразием для любого конечного частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant\rangle$. Из результатов работы [15] вытекает, что если $\langle P, \leqslant\rangle$ – конечная цепь, то класс $\mathbf{SP}(\mathrm{Co}(P))$ является многообразием (см. рис. 2). Однако нам не известно, справедливо ли это утверждение в общем случае.

Проблема 4 (Верунг, Семенова [15]). Пусть $\langle P, \leqslant\rangle$ – конечное частично упорядоченное множество. Является ли класс $\mathbf{SP}(\mathrm{Co}(P))$ многообразием?

Методы, развитые в работах [13]–[16], позволяют не только дать синтаксическую характеризацию классов решеток, вложимых в решетки выпуклых подмножеств упорядоченных множеств, принадлежащих различным классам, но также и охарактеризовать решетки, изоморфные таким решеткам. Ранее решетки, принадлежащие классу $\mathbf{Co}(\mathscr{P})$, были описаны в работе Биркгофа и Беннет [18]. Из описания этого класса, в частности, вытекает следующая

Теорема 2.10 (Биркгоф, Беннет [18]). *Класс решеток $\mathbf{Co}(\mathscr{P})$ аксиоматизируем на языке первого порядка в классе всех непрерывных вверх решеток. Однако $\mathbf{Co}(\mathscr{P})$ не является конечно аксиоматизируемым в этом классе.*

Тем не менее для решеток, изоморфных решеткам выпуклых подмножеств деревьев, справедлива

Теорема 2.11 (Замойска-Дженио, Семенова [19]). *Классы $\mathbf{Co}(\mathscr{F})$, $\mathbf{Co}(\mathscr{F}_n)$, $n<\omega$, и $\mathbf{Co}(\mathscr{LO})$ конечно аксиоматизируемы в классе всех непрерывных вверх решеток.*

С упорядоченными множествами связан еще один класс выпуклых геометрий. Для частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant\rangle$ и для любого множества X такого, что

$$\{(a,a) \mid a \in P\} \subseteq X \subseteq \leqslant \subseteq P^2,$$

пусть X^{tr} обозначает транзитивное замыкание множества X; т.е. если $(a,b),(b,c) \in X$, то $(a,c) \in X$ для всех $a,b,c \in P$ и, таким образом, $\langle P, X^{\mathrm{tr}}\rangle$ является частично упорядоченным множеством. Нетрудно видеть, что пространство замыкания (P^2, X^{tr}) является выпуклой геометрией. Соответствующую решетку замкнутых подмножеств (которая называется также *решеткой подпорядков*) мы обозначаем через $\mathrm{O}(P,\leqslant)$. Кроме того, для произвольного класса $\mathscr{K}$ упорядоченных множеств пусть $\mathbf{O}(\mathscr{K})$ обозначает соответствующий класс решеток подпорядков.

Следующая теорема, доказанная Бредихиным и Шайном в [20] (другое доказательство в этого результата содержится в [21]), показывает, что класс решеток подпорядков универсален для класса всех решеток.

Теорема 2.12 (Бредихин, Шайн [20]). *Любая решетка вложима в некоторую решетку подпорядков.*

Что касается класса конечных решеток подпорядков, то согласно следующей теореме этот класс универсален для класса конечных ограниченных снизу решеток и поэтому не может служить кандидатом на роль класса, универсального для $\mathrm{SD}^{\vee}_{\mathrm{fin}}$ (см. проблему 1).

Теорема 2.13 (Сивак [22]). *Решетка вложима в некоторую конечную решетку подпорядков тогда и только тогда, когда она конечна и ограничена снизу.*

Теорема 2.13 была передоказана в работе [21] и является следствием более общего результата, представленного в теореме 2.14.

Теорема 2.14 (Семенова [21]). *Класс $\mathbf{SO}(\mathscr{P}_n)$ является конечно базируемым многообразием для любого натурального n.*

В работе [21] был найден конкретный конечный базис тождеств для многообразия $\mathbf{SO}(\mathscr{P}_n)$. Из доказательства теоремы 2.14 среди прочего вытекает такое

Следствие 2.15. *Решетка $\mathrm{O}(P,\leqslant)$ ограничена снизу тогда и только тогда, когда множество $\langle P,\leqslant\rangle$ имеет конечную высоту.*

Согласно [12, теорема 2.84] многообразие всех решеток порождается конечными ограниченными снизу решетками. Поэтому в силу теоремы 2.13 справедливо такое

Следствие 2.16. *Эквациональная теория класса конечных решеток подпорядков совпадает с эквациональной теорией класса всех решеток.*

Из характеризационной теоремы Мальцева следует, что класс $\mathbf{SP}(\mathrm{O}(P,\leqslant))$ является квазимногообразием для любого конечного частично упорядоченного множества $\langle P,\leqslant\rangle$. Однако нам не известно решение следующей проблемы.

Проблема 5 (Семенова [21]). Пусть $\langle P,\leqslant\rangle$ – конечное частично упорядоченное множество. Является ли класс $\mathbf{SP}(\mathrm{O}(P,\leqslant))$ многообразием?

2.3. Выпуклые геометрии в теории квазимногообразий. Последний пример выпуклых геометрий, который будет нами рассмотрен, дают так называемые алгебраические подмножества полных решеток. Итак, пусть L – полная решетка. Подмножество в L называется *алгебраическим*, если оно замкнуто в L относительно произвольных пересечений и объединений по непустым направленным вверх подмножествам. Замкнутость относительно произвольных пересечений означает, в частности, что каждое алгебраическое подмножество в L содержит наибольший элемент решетки L и поэтому непусто. Для любого множества $X \subseteq L$ пусть $\mathrm{Sp}(X)$ обозначает наименьшее алгебраическое подмножество в L, содержащее X.

Полная решетка L называется *непрерывной вверх*, если в L имеет место равенство

$$a \wedge \bigvee D = \bigvee_{d\in D} a \wedge d$$

для любого направленного вверх множества $D \subseteq L$ и любого $a \in L$. Двойственным образом определяются *непрерывные вниз* решетки. Если решетка L непрерывна вверх, то решетка $\mathrm{Sp}(L)$ является непрерывной вниз и полудистрибутивной вверх (см., например, [9, теорема 4.1.1]). Кроме того, в этом случае для произвольных $A, B \in \mathrm{Sp}(L)$ выполняется равенство

$$A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что пространство замыкания (L, Sp) является выпуклой геометрией для любой непрерывной вверх решетки L. Соответствующую решетку замкнутых подмножеств (которая называется также *решеткой алгебраических подмножеств*) мы обозначаем через $\mathrm{Sp}(L)$. Кроме того, для произвольного подкласса $\mathscr{L}$ класса $\mathscr{U}\mathscr{C}$ всех полных непрерывных вверх решеток пусть $\mathbf{Sp}(\mathscr{L})$ обозначает соответствующий класс решеток алгебраических подмножеств.

Хорошо известно, что любая алгебраическая решетка непрерывна вверх. Кроме того, согласно работе Горбунова и Туманова [23] (см. также [9, теорема 5.6.7]) для любой алгебраической решетки L решека $\mathrm{Sp}(L)$ является коалгебраической и изоморфна решетке подквазимногообразий некоторого квазимногообразия чисто предикатной сигнатуры. Пусть $\mathscr{A}$ обозначает класс алгебраических решеток. В работе [23] была сформулирована следующая проблема.

Проблема 6 (Горбунов, Туманов [23]). Охарактеризовать решетки, принадлежащие классу $\mathbf{S}\,\mathbf{Sp}(\mathscr{A})$. В частности, выяснить, верно ли, что $\mathbf{S}\,\mathbf{Sp}(\mathscr{A}) = \mathbf{S}\,\mathbf{Sp}(\mathscr{U}\mathscr{C})$.

Хотя проблема 6 остается нерешенной, следует упомянуть один результат, к ней относящийся. Решетка L называется *непрерывной по Скотту* (см. [24]), если $a = \bigvee\{x \in L \mid x \ll a\}$ для любого $a \in L$. Здесь запись $x \ll a$ означает, что для произвольного направленного вверх множества $D \subseteq L$, если $a \leqslant \bigvee D$, то $x \leqslant d$ для некоторого $d \in D$. Хорошо известно (см., например, [24]), что любая алгебраическая решетка непрерывна по Скотту, а любая непрерывная по Скотту решетка непрерывна вверх. Пусть $\mathscr{S}\mathscr{C}$ обозначает класс непрерывных по Скотту решеток.

Теорема 2.17 (Семенова [25]). *Имеет место равенство* $\mathbf{S}\,\mathbf{Sp}(\mathscr{A}) = \mathbf{S}\,\mathbf{Sp}(\mathscr{S}\mathscr{C})$.

Близкие вопросы изучались в работе Верунга [26]. В частности, в этой работе было получено описание решеток, вложимых в непрерывные вниз полудистрибутивные вверх полные решетки. Отметим также, что для произвольной конечной решетки L решетка $\mathrm{Sp}(L)$ изоморфна решетке нижних подполурешеток полурешетки, полученной из L удалением наибольшего элемента. Несмотря на то, что решетки подполурешеток являются решетками замыканий выпуклых геометрий, нам будет более удобно рассмотреть их в контексте параграфа 4.

3. Комбинаторные геометрии

Пространство замыкания (X, φ) называется *комбинаторной геометрией*, если оно обладает следующим свойством замены:

$$a \in \varphi(Y \cup \{b\}) \qquad \text{влечет} \qquad b \in \varphi(Y \cup \{a\})$$

для любых $a, b \in X$ и любого $Y \subseteq X$. Понятие комбинаторной геометрии служит обобщением понятия линейной зависимости векторов в векторных пространствах и является в некотором смысле антиподом понятия выпуклой геометрии. Таким образом, естественно ожидать, что и решетки замыканий комбинаторных геометрий будут отличаться по своим свойствам от решеток замыканий выпуклых геометрий. И это действительно так: решетки замыканий комбинаторных геометрий часто являются модулярными. Как было упомянуто выше, типичным примером решеток замыканий комбинаторных геометрий служат решетки подпространств векторных пространств.

Пусть $V_{\mathbb{D}}$ – векторное пространство над телом $\mathbb{D}$, и пусть $\mathrm{Sub}(V_{\mathbb{D}})$ обозначает решетку подпространств в $V_{\mathbb{D}}$. Очевидно, $\mathrm{Sub}(V_{\mathbb{D}})$ является решеткой замыканий комбинаторной геометрии $(V_{\mathbb{D}}, \mathrm{Sub})$, где Sub обозначает оператор взятия линейной оболочки множества векторов. В общем случае решетка подпространств $\mathrm{Sub}(V_{\mathbb{D}})$ является подпрямо неразложимой решеткой с относительными дополнениями и, кроме того, арговой, т.е. удовлетворяет аргову тождеству

$$\forall\, x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 \qquad \bigwedge_{i<3} (x_i \vee y_i) \leqslant (x_0 \wedge (x_1 \vee c)) \vee (y_0 \wedge (y_1 \vee c)),$$

где

$$c_i = (x_j \vee x_k) \wedge (y_j \vee y_k), \quad \{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}, \qquad c = (c_0 \vee c_1) \wedge c_2.$$

Отметим, что любая аргова решетка модулярна. Пусть $\mathbf{Sub}(\mathscr{V})$ обозначает класс решеток, изоморфных решеткам подпространств векторных пространств.

Если размерность пространства $V_{\mathbb{D}}$ конечна, то решетка $\mathrm{Sub}(V_{\mathbb{D}})$ простая и имеет конечную высоту (см., например, книгу Биркгофа [6]). Согласно следующей координатизационной теореме фон Ноймана–Йонссона справедливо и частичное обращение последнего утверждения.

Теорема 3.1 (фон Нойман [27]; Йонссон [28]). *Пусть L – простая аргова решетка с дополнениями конечной высоты $n \geqslant 3$. Тогда $L \cong \mathrm{Sub}(\mathbb{D}^n_{\mathbb{D}})$ для некоторого тела $\mathbb{D}$.*

Известной нерешенной проблемой является следующая

Проблема 7 (Дилуорс [6]). Является ли класс решеток, вложимых в модулярные решетки с относительными дополнениями, многообразием?

Согласно характеризационной теореме Мальцева класс решеток, о котором идет речь в проблеме 7, является квазимногообразием. Следующий результат Йонссона связывает проблему 7 с решетками подпространств, характеризуя решетки, вложимые в арговы решетки с (относительными) дополнениями.

Теорема 3.2 (Йонссон [28]). *Для модулярной решетки L с относительными дополнениями равносильны следующие условия*:

(1) $L \in \mathbf{S}(\mathrm{Cl}(X, \varphi))$ *для некоторой проективной геометрии* (X, φ);
(2) $L \in \mathbf{S}(\mathrm{Sub}(A))$ *для некоторой абелевой группы* A;
(3) $L \in \mathbf{SP}(\mathbf{Sub}(\mathscr{V}))$.
(4) L *аргова*.

3.1. ∃-многообразия. Всюду далее до конца параграфа 3 нам будет удобно рассматривать решетки в сигнатуре $\{\vee, \wedge, 0\}$, где 0 будет интерпретироваться как наименьший элемент решетки. Кроме того, если Λ – коммутативное кольцо с единицей, то Λ-алгебры будут рассматриваться нами в сигнатуре $\{\Lambda, +, -, \cdot, 0\}$. При этом кольца будут рассматриваться нами как $\mathbb{Z}$-алгебры. Рассмотрим следующие предложения:

$$\begin{aligned} \varphi_l: &\quad \forall\, xy \;\; \exists\, z \quad [x \wedge y \wedge z = 0] \,\&\, [(x \wedge y) \vee z = x]; \\ \varphi_a: &\quad \forall\, x \;\; \exists\, y \quad [xyx = x]. \end{aligned}$$

Решетка L называется *решеткой с относительными дополнениями*, если $L \models \varphi_l$. Пусть $\mathscr{M}$ обозначает класс модулярных решеток с относительными дополнениями. Хорошо известно, что модулярная решетка с наибольшим элементом имеет дополнения тогда и только тогда, когда она имеет относительные дополнения (см., например, [6]).

Λ-алгебра R называется *регулярной*, если $R \models \varphi_a$. Далее $\mathscr{R}_\Lambda$ обозначает класс регулярных Λ-алгебр, а $\mathscr{R}$ – класс регулярных колец. Хорошо известно, что в регулярных кольцах любой конечно порожденный односторонний идеал порождается идемпотентом (см., например, Скорняков [29]). Таким образом, если рассматривать регулярные кольца как $\mathbb{Z}$-алгебры, то конечно порожденные односторонние идеалы колец – это в точности подалгебры. Пусть $\mathbb{L}(R)$ обозначает решетку конечно порожденных (правых) идеалов регулярного кольца R. Решетка $\mathbb{L}(R)$ является модулярной решеткой с относительными дополнениями. Если же кольцо R артиново, то $\mathbb{L}(R)$ является модулярной решеткой с дополнениями конечной высоты.

Для произвольного кольца R и $n > 0$ через $R^{n\times n}$ мы обозначаем кольцо матриц порядка $n \times n$ над R. Если кольцо R коммутативно и содержит единицу, то кольцо $R^{n\times n}$ можно рассматривать как R-алгебру. Хорошо известно, что если кольцо R регулярно, то и кольцо матриц $R^{n\times n}$ регулярно. Кроме того, кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(V_\mathbb{D})$ векторного пространства $V_\mathbb{D}$ над телом $\mathbb{D}$ всегда регулярно и $\mathrm{Sub}(V_\mathbb{D}) \cong \mathbb{L}(\mathrm{End}(V_\mathbb{D}))$.

Пусть далее $\mathscr{K} = \mathscr{M}$ либо $\mathscr{K} = \mathscr{R}_\Lambda$ для некоторого коммутативного кольца Λ с единицей. Определим оператор $\mathbf{S}_\exists$, полагая для $\mathscr{K}' \subseteq \mathscr{K}$

$$\mathbf{S}_\exists(\mathscr{K}') = \mathbf{S}(\mathscr{K}') \cap \mathscr{K}.$$

Класс $\mathscr{K}' \subseteq \mathscr{K}$ называется *∃-многообразием*, если $\mathscr{K}' = \mathbf{X}(\mathscr{K}')$ для любого $\mathbf{X} \in \{\mathbf{H}, \mathbf{S}_\exists, \mathbf{P}\}$.

Теорема 3.3 (Херрман, Семенова [30]). *Для любого класса $\mathscr{K}' \subseteq \mathscr{K}$ выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mathbf{V}_\exists(\mathscr{K}) = \mathbf{HS}_\exists\mathbf{P}(\mathscr{K})$ *есть наименьшее ∃-многообразие, содержащее* $\mathscr{K}$;
(2) *класс подпрямо неразложимых алгебр из* $\mathbf{V}_\exists(\mathscr{K})$ *содержится в классе* $\mathbf{HS}_\exists\mathbf{P}_u(\mathscr{K})$;
(3) *любое ∃-многообразие порождается своими конечно порожденными подпрямо неразложимыми алгебрами.*

Из теоремы 3.3 вытекает, что в ∃-многообразиях существуют свободные алгебры. Кроме того, в силу замкнутости относительно гомоморфных образов ∃-многообрзия аксиоматизируются позитивными предложениями. С другой стороны, они, очевидно, аксиоматизируются хорновыми предложениями. Не известно решение следующей проблемы.

Проблема 8 (Херрман, Семенова [30]). Может ли каждое ∃-многообразие быть аксиоматизировано позитивными хорновыми предложениями (иными словами, тождествами)?

3.2. Регулярные кольца. Согласно теореме 3.3, (3) всякое ∃-многообразие Λ-алгебр порождается своими конечно порожденными подпрямо неразложимыми алгебрами. Теорема 3.4 и следствие 3.5 конкретизируют это утверждение.

Теорема 3.4 (Херрман, Семенова [30]). *∃-многообразие регулярных Λ-алгебр $\mathscr{R}_\Lambda$ порождается алгебрами вида $\mathbb{F}^{n\times n}$, где $n > 1$ и $\mathbb{F}$ – факторполе кольца Λ.*

Следствие 3.5. *Любое $\exists$-многообразие регулярных Λ-алгебр порождается своими простыми артиновыми алгебрами.*

Следствие 3.6. *Свободные регулярные Λ-алгебры резидуально артиновы.*

Отметим что утверждение следствия 3.6 было доказано для алгебр с единицей в работе Гудерла, Менала и Монкаси [31]. Для произвольного простого числа p пусть $\mathbb{F}_p$ обозначает поле из p элементов. Теорема 3.4 в случае регулярных колец выглядит так.

Следствие 3.7 (Херрман, Семенова [30]). *Имеем:*

(1) $\mathscr{R} = \mathbf{V}_{\exists}(\mathbb{F}_p^{n\times n} \mid m < n < \omega,\ p$ *простое*$)$ *для произвольного натурального* m;
(2) *свободные регулярные кольца резидуально конечны;*
(3) *эквациональная теория класса* $\mathscr{R}$ *с операцией квазиобращения разрешима.*

3.3. Модулярные решетки с дополнениями. Согласно теореме 3.3, (3) всякое $\exists$-многообразие модулярных решеток с относительными дополнениями порождается своими конечно порожденными подпрямо неразложимыми решетками. Теорема 3.4 и следствие 3.5 позволяют утверждать большее.

Теорема 3.8 (Херрман, Семенова [30]). *Любое $\exists$-многообразие модулярных решеток с относительными дополнениями порождается своими простыми решетками конечной высоты.*

Следствие 3.9 (Херрман, Семенова [30]). *Имеем:*

(1) *для произвольного натурального m многообразие арговых решеток с относительными дополнениями порождается решетками* $\mathbb{L}(\mathbb{F}_p^{n\times n})$, *где $n > m$ и p простое;*
(2) *свободные арговы решетки с относительными дополнениями резидуально конечны;*
(3) *эквациональная теория класса арговых (модулярных) решеток с операцией относительного дополнения разрешима.*

Хорошо известно (см. [6], [7]), что решетка L и ее решетка идеалов $\mathrm{Id}(L)$ порождают одно и то же многообразие, т.е. $\mathbf{V}(L) = \mathbf{V}(\mathrm{Id}(L))$. Возвращаясь к открытой проблеме 7, отметим такое следствие теоремы 3.3.

Следствие 3.10 (Херрман, Семенова [30]). *Если решетка L вложима в некоторую модулярную решетку с относительными дополнениями, то то же самое верно и для ее решетки идеалов* $\mathrm{Id}(L)$.

4. Другие пространства замыкания

Напомним, что для произвольной алгебры A решетка подалгебр $\mathrm{Sub}(A)$ алгебры A есть решетка замыканий пространства замыкания (A, Sub). Для произвольного класса алгебр $\mathscr{K}$ пусть $\mathbf{Sub}(\mathscr{K})$ обозначает класс решеток подалгебр алгебр из $\mathscr{K}$.

4.1. Решетки под(полу)групп. Классический результат Уитмена 1946 г. утверждает, что класс решеток подгрупп универсален для класса всех решеток.

Теорема 4.1 (Уитмен [32]). *Любая решетка вложима в решетку подгрупп некоторой группы.*

Что касается конечной версии теоремы 4.1, то вопрос о том, вложима ли любая конечная решетка в решетку подгрупп некоторой конечной группы, долго оставался открытым. Он был положительно решен в известной работе Пудлака и Тумы 1980 г. [33].

Теорема 4.2 (Пудлак, Тума [33]). *Любая конечная решетка вложима в решетку подгрупп некоторой конечной группы.*

В работе [34] Тума получил следующее уточнение теоремы Уитмена.

Теорема 4.3 (Тума [34]). *Решетка является алгебраической тогда и только тогда, когда она изоморфна интервалу в решетке подгрупп некоторой группы.*

Другое доказательство теоремы 4.3 можно найти в работе Репницкого [35]. Заметим, что утверждение о том, что любая конечная решетка изоморфна интервалу в решетке подгрупп некоторой конечной группы, согласно работе Палфи и Пудлака [36] эквивалентно тому, что любая конечная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой конечной алгебры конечной сигнатуры. Вопрос об истинности последнего утверждения является известной открытой проблемой. Отметим также, что недавно Репницкий и Тума доказали в [37], что любая алгебраическая решетка с не более чем счетным числом компактных элементов вложима как интервал в решетку подгрупп некоторой локально конечной группы.

Из теоремы 4.1, в частности, следует, что и класс решеток подполугрупп универсален, т.е. любая решетка вложима также в решетку подполугрупп некоторой полугруппы. Репницкий доказал более сильные утверждения. Пусть $\mathscr{SL}$ обозначает класс всех полурешеток (т.е. класс всех коммутативных идемпотентных полугрупп), пусть $\mathscr{S}'$ обозначает класс всех коммутативных полугрупп без идемпотентов с сокращением и однозначным извлечением корня, пусть $\mathscr{CN}_2$ обозначает класс всех коммутативных 2-нильполугрупп, т.е. полугрупп с нулем, удовлетворяющих тождеству

$$\forall x \quad x^2 = 0.$$

Теорема 4.4 (Репницкий [38]). *Пусть $\mathscr{S} \in \{\mathscr{SL}, \mathscr{S}', \mathscr{CN}_2\}$. Для любой решетки L существует полугруппа $S \in \mathscr{S}$ такая, что L вложима в $\mathrm{Sub}(S)$.*

При доказательстве этой теоремы в [38] Репницкий существенным образом использовал теорему Бредихина–Шайна об универсальности решеток подпорядков (теорема 2.12). Более точно, он показал, что любая решетка подпорядков вложима в решетку подполугрупп для подходящей полугруппы, принадлежащей соответствующему классу. В связи с этим Шевриным и Овсянниковым был поставлен вопрос (см. [39, вопрос VIII.7]) о существовании доказательства теоремы 4.4, которое не использовало бы решетки подпорядков. Такое доказательство было найдено в работах автора [40]–[42]. Это доказательство использует технику раскрашенных деревьев, развитую в работах Верунга и автора [10], [13]–[15], а также в работе автора [21].

4.2. Свободные полугруппы. Универсальность класса конечных решеток подполугрупп для класса конечных ограниченных снизу решеток вытекает из следующего результата Репницкого, который дополняет теорему 2.13.

Теорема 4.5 (Репницкий [43]). *Для конечной решетки L равносильны следующие условия:*

1. *L вложима в решетку подполугрупп (конечно порожденной) свободной (коммутативной) полугруппы;*
2. *L вложима в решетку подполугрупп (конечно порожденной) свободной (коммутативной) 2-нильполугруппы;*
3. *L вложима в решетку подполугрупп (конечно порожденной) свободной полурешетки;*
4. *L вложима в решетку подполугрупп конечной нильпотентной полугруппы;*
5. *L ограничена снизу.*

Пусть $\mathscr{S}_F$ обозначает класс всех свободных полугрупп; $\mathscr{S}_{FC}$ – класс всех свободных коммутативных полугрупп; $\mathscr{S}_{FN2}$ – класс всех свободных 2-нильполугрупп; $\mathscr{S}_{FCN2}$ – класс всех свободных коммутативных 2-нильполугрупп; $\mathscr{S}_{FSL}$ – класс всех свободных полурешеток. На языке операторов теорема 4.5 выглядит следующим образом.

Следствие 4.6 (Репницкий [43]). *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbf{SSub}(\mathscr{S}_F)_{\mathrm{fin}} = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FC})_{\mathrm{fin}} = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FN2})_{\mathrm{fin}} = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FCN2})_{\mathrm{fin}} = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FSL})_{\mathrm{fin}} = LB_{\mathrm{fin}}.$$

Из этого результата, в частности, вытекает аналог следствия 2.16 для различных классов конечных полугрупп.

Следствие 4.7. *Эквациональная теория класса решеток подполугрупп конечно порожденных свободных коммутативных 2-нильполугрупп, конечно порожденных свободных полурешеток, а также конечных нильпотентных полугрупп совпадает с эквациональной теорией класса всех решеток.*

В связи с результатом, установленным в следствии 4.6, в монографии Шеврина и Овсянникова была поставлена проблема (см. [39, проблема 28.14.1]) о совпадении классов произвольных решеток, вложимых в решетки подполугрупп свободных полугрупп, принадлежащих одному из упомянутых выше классов. Положительное решение этой проблемы вытекает из следующей теоремы, которая обобщает теорему 4.5.

Теорема 4.8 (Семенова [44]). *Для решетки L и для бесконечного кардинала κ равносильны следующие условия*:

(1) *L вложима в решетку подполугрупп свободной полугруппы ранга κ;*
(2) *L вложима в решетку подполугрупп свободной коммутативной полугруппы ранга κ;*
(3) *L вложима в решетку подполугрупп свободной 2-нильполугруппы ранга κ;*
(4) *L вложима в решетку подполугрупп свободной коммутативной 2-нильполугруппы ранга κ;*
(5) *L вложима в решетку подполугрупп свободной полурешетки ранга κ;*
(5) *$L \in \mathbf{SP}_\kappa(LB_{\mathrm{fin}})$.*

На языке операторов теорема 4.8 выглядит следующим образом.

Следствие 4.9 (Семенова [44]). *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbf{SSub}(\mathscr{S}_F) = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FC}) = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FN2}) = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FCN2}) = \mathbf{SSub}(\mathscr{S}_{FSL}) = \mathbf{SP}(LB_{\mathrm{fin}}),$$

и этот класс не аксиоматизируем на языке первого порядка.

Теорема 4.8 описывает решетки, вложимые в решетки подполугрупп свободных полугрупп бесконечного ранга. Что можно сказать о свободных полугруппах конечного ранга? Поскольку любая конечно порожденная полурешетка и любая конечно порожденная коммутативная 2-нильполугруппа конечны, класс решеток, вложимых в них подполугрупп, совпадает с классом всех конечных ограниченных снизу решеток в силу следствия 4.6. Для свободных полугрупп справедлив такой результат.

Следствие 4.10 (Семенова [44]). *Для решетки L и для натурального $n > 1$ равносильны следующие условия*:

(1) *L вложима в решетку подполугрупп свободной полугруппы ранга n;*
(2) *L вложима в решетку подполугрупп свободной полугруппы счетного ранга;*
(3) *$L \in \mathbf{SP}_\omega(LB_{\mathrm{fin}})$.*

Однако ничего не известно для свободных коммутативных полугрупп и свободных 2-нильполугрупп конечного ранга. Для натурального $n > 1$ пусть $FC(n)$ обозначает свободную коммутативную полугруппу ранга n, а $FN(n)$ – свободную 2-нильполугруппу ранга n.

Проблема 9 (Семенова [44]). Пусть $m, n > 1$ – различные натуральные числа.
(1) Описать классы решеток, вложимых в решетку $\mathrm{Sub}(FC(n))$ и в решетку $\mathrm{Sub}(FN(n))$.

Совпадают ли эти классы? Являются ли они аксиоматизируемыми? Являются ли они (квази)многообразиями?

(2) Совпадают ли классы решеток, вложимых в решетки $\mathrm{Sub}(FC(m))$ и $\mathrm{Sub}(FC(n))$?

(3) Совпадают ли классы решеток, вложимых в решетки $\mathrm{Sub}(FN(m))$ и $\mathrm{Sub}(FN(n))$?

4.3. Нильпотентные полугруппы. Пусть $m > 0$. Полугруппа с нулем называется *m-нильпотентной*, если она удовлетворяет тождеству

$$\forall\, x_0, \dots, x_{m-1} \qquad x_0 \cdots x_{m-1} = 0.$$

В проблеме 28.14.2 из монографии Шеврина и Овсянникова [39] ставился вопрос об описании класса решеток, вложимых в решетки подполугрупп (конечных) m-нильпотентных полугрупп. Следующий результат дает синтаксическое описание этого класса решеток, одновременно уточняя теорему 2.14.

Теорема 4.11 (Семенова [42]). *Для решетки L и для натурального m равносильны следующие условия:*

(1) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой (коммутативной) $(m+1)$-нильпотентной полугруппы;*

(2) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой (коммутативной) $(m+1)$-нильпотентной 2-нильполугруппы;*

(3) *L вложима в решетку подпорядков некоторого частично упорядоченного множества высоты, не превосходящей m.*

В частности, справедливы такие утверждения.

Следствие 4.12 (Семенова [42]). *Для всякого положительного натурального m класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп m-нильпотентных полугрупп, содержится в классе ограниченных снизу решеток и образует конечно базируемое многообразие.*

Следствие 4.13 (Семенова [42]). *Для конечной решетки L и для натурального m равносильны следующие условия:*

(1) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой (коммутативной) $(m+1)$-нильпотентной полугруппы;*

(2) *L вложима в решетку подполугрупп некоторой конечной (коммутативной) $(m+1)$-нильпотентной полугруппы;*

(3) *L вложима в решетку подпорядков некоторого частично упорядоченного множества высоты, не превосходящей m;*

(4) *L вложима в решетку подпорядков некоторого конечного частично упорядоченного множества высоты, не превосходящей m.*

Таким образом, класс решеток, вложимых в решетки подполугрупп конечных m-нильпотентных полугрупп, аксиоматизируется конечным числом тождеств в классе всех конечных решеток и поэтому образует псевдомногообразие.

4.4. Полурешетки. В связи с тем, что класс решеток, вложимых в решетки подполурешеток конечных полурешеток, совпадает с классом конечных ограниченных снизу решеток согласно следствию 4.6, естественным является вопрос о том, нельзя ли сузить класс конечных полурешеток, налагая на полурешетки те или иные требования так, чтобы класс решеток их подполурешуток оставался универсальным для класса конечных ограниченных снизу решеток. Следующий результат показывает, что требование на полурешетку быть деревом, является слишком сильным для этой цели.

Теорема 4.14 (Семенова [45]). *Для конечной решетки L равносильны следующие условия:*

(1) *L вложима в решетку подполурешеток некоторой полурешетки, чья диаграмма Хассе является деревом;*

(2) *L вложима в решетку подполурешеток некоторой конечной полурешетки, чья диаграмма Хассе является деревом.*

Более того, класс решеток, вложимых в решетки подполурешеток конечных деревьев, аксиоматизируется тождествами в классе всех конечных решеток и поэтому образует псевдомногообразие.

Автор благодарит программный комитет Международной конференции “Мальцевские чтения 2009” за предоставленную возможность выступить с докладом на конференции.

Список литературы

[1] А. Мальцев, “О включении ассоциативных систем в группы”, *Матем. сб.*, **6**:2 (1939), 331–336.

[2] А. Мальцев, “О включении ассоциативных систем в группы. II”, *Матем. сб.*, **8(50)**:2 (1940), 251–264.

[3] А. И. Мальцев, “Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем”, *Алгебра и логика*, **5**:3 (1966), 3–9.

[4] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Современная алгебра, Наука, М., 1970; A. I. Mal'cev, *Algebraic Systems*, Grundlehren Math. Wiss., **192**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[5] G. Birkhoff, “On the structure of abstract algebras”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **31** (1935), 433–454.

[6] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967; Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Наука, М., 1984.

[7] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[8] B. Korte, L. Lovász, R. Schrader, *Greedoids*, Algorithms Combin., **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[9] В. А. Горбунов, *Алгебраическая теория квазимногообразий*, Сибирская школа алгебры и логики, Научная книга, Новосибирск, 1999; V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Siberian School Algebra Logic, Consultants Bureau, New York, NY, 1998.

[10] Ф. Верунг, М. В. Семёнова, “Подрешетки решеток выпуклых подмножеств векторных пространств”, *Алгебра и логика*, **43**:3 (2004), 261–290.

[11] R. N. McKenzie, “Equational bases and nonmodular lattice varieties”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **174** (1972), 1–43.

[12] R. Freese, J. Ježek, J. B. Nation, *Free Lattices*, Math. Surveys Monogr., **42**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[13] M. Semenova, F. Wehrung, “Sublattices of lattices of order-convex sets, I. The main representation theorem”, *J. Algebra*, **277**:2 (2004), 825–860.

[14] M. Semenova, F. Wehrung, “Sublattices of lattices of order-convex sets, II. Posets of finite length”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **13**:5 (2003), 543–564.

[15] M. Semenova, F. Wehrung, “Sublattices of lattices of order-convex sets, III. The case of totally ordered sets”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **14**:3 (2004), 357–387.

[16] M. V. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, “On lattices embeddable into lattices of order-convex sets. Case of trees”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **17**:8 (2007), 1667–1712.

[17] J. C. C. McKinsey, “The decision problem for some classes of sentences without quantifiers”, *J. Symbolic Logic*, **8**:3 (1943), 61–76.

[18] G. Birkhoff, M. K. Bennett, “The convexity lattice of a poset”, *Order*, **2**:3 (1985), 223–242.

[19] M. Semenova, A. Zamojska-Dzienio, “Lattices of order-convex sets of forests”, *Order*, **27**:3 (2010), 383–404.

[20] D. Bredihin, B. Schein, “Representation of ordered semigroups and lattices by binary relations”, *Colloq. Math.*, **39**:1 (1978), 1–12.

[21] М. В. Семенова, “О решётках, вложимых в решётки подпорядков”, *Алгебра и логика*, **44**:4 (2005), 483–511.

[22] B. Sivák, “Representation of finite lattices by orders on finite sets”, *Math. Slovaca*, **28**:2 (1978), 203–215.

[23] В. А. Горбунов, В. И. Туманов, “Об одном классе решеток квазимногообразий”, *Алгебра и логика*, **19**:1 (1980), 59–80.

[24] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, Encyclopedia Math. Appl., **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[25] M. Semenova, “On lattices embeddable into lattices of algebraic subsets”, *Algebra Universalis*, **61**:3-4 (2009), 399–405.

[26] F. Wehrung, “Sublattices of complete lattices with continuity conditions”, *Algebra Universalis*, **53**:2-3 (2005), 149–173.

[27] J. von Neumann, *Continuous Geometries*, Princeton Math. Ser., **25**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.

[28] B. Jónsson, “Representations of complemented modular lattices”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 64–94.

[29] Л. А. Скорняков, *Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1961; L. A. Skornyakov, *Complemented Modular Lattices and Regular Rings*, Oliver & Boyd, Edinburgh–London, 1964.

[30] C. Herrmann, M. Semenova, “Existence varieties of regular rings and complemented modular lattices”, *J. Algebra*, **314**:1 (2007), 235–251.

[31] K. R. Goodearl, P. Menal, J. Moncasi, “Free and residually Artinian regular rings”, *J. Algebra*, **156**:2 (1993), 407–432.

[32] Ph. M. Whitman, “Lattices, equivalence relations, and subgroups”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 507–522.

[33] P. Pudlák, J. Tůma, “Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice”, *Algebra Universalis*, **10**:1 (1980), 74–95.

[34] J. Tůma, “Intervals in subgroup lattices of infinite groups”, *J. Algebra*, **125**:2 (1989), 367–399.

[35] V. B. Repnitskiĭ, “A new proof of Tůma’s theorem on intervals in subgroup lattices”, *Contributions to General Algebra*, 16, Heyn, Klagenfurt, 2005, 213–230.

[36] P. P. Pálfy, P. Pudlák, “Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups”, *Algebra Universalis*, **11**:1 (1980), 22–27.

[37] V. B. Repnitskiĭ, J. Tůma, *On Intervals in Subgroup Lattices of Locally Finite Groups*, Manuscript, 2006.

[38] В. Б. Репницкий, “О представлении решеток решетками подполугрупп”, *Изв. вузов. Матем.*, 1996, № 1, 60–70.

[39] L. N. Shevrin, A. Ja. Ovsyannikov, *Semigroups and their Subsemigroup Lattices*, Math. Appl., **379**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[40] М. В. Семёнова, “О решётках, вложимых в решётки подполугрупп. I. Полурешётки”, *Алгебра и логика*, **45**:2 (2006), 215–230.

[41] М. В. Семёнова, “О решётках, вложимых в решётки подполугрупп. II. Полугруппы с сокращением”, *Алгебра и логика*, **45**:4 (2006), 436–446.

[42] М. В. Семёнова, “О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. III. Нильпотентные полугруппы”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:1 (2007), 192–204.

[43] V. B. Repnitskiĭ, “On finite lattices embeddable in subsemigroup lattices”, *Semigroup Forum*, **46**:1 (1993), 388–397.

[44] M. V. Semenova, “On lattices embeddable into subsemigroup lattices. IV. Free semigroups”, *Semigroup Forum*, **74**:2 (2007), 191–205.

[45] М. В. Семёнова, “О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. V. Деревья”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:4 (2007), 894–913.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 15

Конференция «Мальцевские чтения»

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 22.09.2011. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mathnet.ru/spm/ e-mail: pupyrev@mi.ras.ru