Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 13

Издание выходит с 2006 года

М. Е. Чанга

Метод тригонометрических сумм

МИАН

Москва
2009

УДК 511
ББК (В)22.13
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ**/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2009. Вып. 13: Метод тригонометрических сумм / Чанга М. Е. – 48 с.

ISBN 5-98419-032-X

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит курс лекций “Метод тригонометрических сумм” М. Е. Чанги, прочитанный в весеннем семестре 2006 года в Научно-образовательном центре МИАН.

ISBN 5-98419-032-X

Оглавление

Обозначения

Запись $d \mid n$ при натуральном d и целом n означает, что d делит n, то есть существует целое q такое, что $n = dq$;

(n, m) обозначает наибольший общий делитель чисел n и m;

$p, p_1, p_2, \ldots$ обозначают простые числа;

$s = \sigma + it$ обозначает комплексную переменную;

$\operatorname{Re} s$ обозначает вещественную часть комплексного числа s;

$\operatorname{Im} s$ обозначает мнимую часть s;

Запись $A \ll B$ при положительном B означает, что $A = O(B)$, то есть существует положительное c такое, что $|A| \leqslant cB$;

Запись $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$;

$c, c_1, c_2, \ldots$ обозначают положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

ε обозначает произвольно малое положительное число;

$[x]$ обозначает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x;

$\{x\}$ обозначает дробную долю числа x, то есть $x - [x]$;

$\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого числа, т.е. $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$;

$\ln s$ обозначает главную ветвь логарифма.

Через $\mu(A)$ обозначаем лебегову меру множества A;

$\varphi(n)$ – функция Эйлера, т.е. количество взаимно простых с n чисел, не превосходящих n;

$\mu(n)$ – функция Мебиуса, которая определяется следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \cdots p_k; \\ 0, & \text{если } p^2 \mid n. \end{cases}$$

$\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x.

Материал прошлого семестра, на который здесь приходится неоднократно ссылаться, опубликован в выпуске 2 “лекционных курсов НОЦ” под названием “Метод комплексного интегрирования”.

§ 1. Дробные доли вещественных функций. Критерий Г. Вейля

Многие задачи аналитической теории чисел сводятся к изучению распределения дробных долей некоторых функций, которое, в свою очередь, зависит от оценок модуля так называемых тригонометрических сумм. Мы докажем утверждения, выявляющие связь распределения дробных долей с тригонометрическими суммами.

Теорема 1. *Пусть r – натуральное число, α и β – вещественные*, $0 < \Delta < \frac{1}{8}$, $\Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta$. *Тогда существует периодическая функция $g(x)$ с периодом 1 и с условиями*:

1) $g(x) = 1$ *при* $\alpha + \frac{\Delta}{2} \leqslant x \leqslant \beta - \frac{\Delta}{2}$,
2) $0 < g(x) < 1$ *при* $\alpha - \frac{\Delta}{2} < x < \alpha + \frac{\Delta}{2}$ *и* $\beta - \frac{\Delta}{2} < x < \beta + \frac{\Delta}{2}$,
3) $g(x) = 0$ *при* $\beta + \frac{\Delta}{2} \leqslant x \leqslant 1 + \alpha - \frac{\Delta}{2}$,
4) $g(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$g(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} a_m e^{2\pi i m x},$$

где

$$|a_m| \leqslant \min\left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|}\left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$$

Доказательство. Рассмотрим периодическую функцию $g_0(x)$ с периодом 1, заданную следующими равенствами:

$$g_0(x) = 1 \text{ при } \alpha < x < \beta,$$
$$g_0(\alpha) = g_0(\beta) = \frac{1}{2},$$
$$g_0(x) = 0 \text{ при } \beta < x < 1 + \alpha.$$

Возьмем теперь $\delta = \frac{\Delta}{2r}$ и последовательно определим функции $g_1(x), \ldots, g_r(x)$ равенствами

$$g_k(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} g_{k-1}(x+u)\,du.$$

Легко видеть, что функция $g_r(x)$ является периодической с периодом 1 и удовлетворяет условиям 1)–3) из формулировки теоремы. Таким образом, остается проверить выполнение условия 4).

Разложим функцию $g_0(x)$ в ряд Фурье

$$g_0(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} a_{m,0} e^{2\pi i m x},$$

где

$$a_{m,0} = \int_0^1 g_0(x) e^{-2\pi i m x}\, dx = \frac{e^{-2\pi i m\alpha} - e^{-2\pi i m\beta}}{2\pi i m}.$$

При $k = 1, \ldots, r$ имеем

$$g_k(x) = a_{0,k} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} a_{m,k} e^{2\pi i m x},$$

где

$$\begin{aligned}
a_{0,k} &= \int_0^1 g_k(x)\, dx = \int_0^1 dx\, \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g_{k-1}(x+u)\, du \\
&= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} du \int_0^1 g_{k-1}(x+u)\, dx = a_{0,k-1}, \\
a_{m,k} &= \int_0^1 g_k(x) e^{-2\pi i m x}\, dx = \int_0^1 e^{-2\pi i m x} dx\, \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g_{k-1}(x+u)\, du \\
&= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} e^{2\pi i m u}\, du \int_0^1 g_{k-1}(x+u) e^{-2\pi i m (x+u)}\, dx \\
&= \frac{a_{m,k-1}}{2\delta} \cdot \frac{e^{2\pi i m\delta} - e^{-2\pi i m\delta}}{2\pi i m}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
a_{0,k} &= \beta - \alpha, \\
a_{m,k} &= \frac{e^{-2\pi i m\alpha} - e^{-2\pi i m\beta}}{2\pi i m} \left(\frac{e^{2\pi i m\delta} - e^{-2\pi i m\delta}}{4\pi i m\delta} \right)^k \\
&= e^{-\pi i m(\alpha+\beta)} \frac{\sin \pi m(\beta-\alpha)}{\pi m} \left(\frac{\sin 2\pi m\delta}{2\pi m\delta} \right)^k.
\end{aligned}$$

Этим доказательство завершается.

Функции $g(x)$ были введены И. М. Виноградовым и носят название “стаканчиков” Виноградова.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ – вещественная функция, r – натуральное число, $0 < \Delta < \frac{1}{8}$. Пусть при любых допустимых значениях α и β имеет место соотношение*

$$\sum_{x=1}^{P} g(f(x)) = (\beta - \alpha)P + O(R),$$

где $g(x)$ – “стаканчик” Виноградова, отвечающий параметрам α, β, Δ, r. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{x=1}^{P} \{f(x)\} = \frac{1}{2}P + O(R + \Delta P).$$

Доказательство. Обозначим через $D(\alpha, \beta)$ количество $x = 1, \ldots, P$ с условием $\alpha \leqslant \{f(x)\} < \beta$. Тогда при $2\Delta < \beta - \alpha < 1 - 2\Delta$ имеем

$$\sum_{x=1}^{P} g_1(f(x)) \leqslant D(\alpha, \beta) \leqslant \sum_{x=1}^{P} g_2(f(x)),$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – “стаканчики” Виноградова, отвечающие параметрам $\alpha + \frac{\Delta}{2}$, $\beta - \frac{\Delta}{2}$, Δ, r и $\alpha - \frac{\Delta}{2}$, $\beta + \frac{\Delta}{2}$, Δ, r, соответственно. Из условия теоремы немедленно получаем, что

$$D(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)P + O(R + \Delta P).$$

Это соотношение распространяется на случай произвольных α и β, $0 < \beta - \alpha \leqslant 1$ с помощью равенства

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}) + D(\alpha + \frac{1}{2}, \beta)$$

при $1 - 2\Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1$ и равенства

$$D(\alpha, \beta) = D(\alpha, \alpha + 1 - 2\Delta) - D(\beta, \alpha + 1 - 2\Delta)$$

при $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\Delta$.

Будем считать, что $R < 0.1P$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Возьмем $n = [PR^{-1}]$. Имеем при $k = 1, \ldots, n$

$$D\left(0, \frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}P + R_k,$$

где $R_k \ll R + \Delta P$. Отсюда находим при $k = 1, \ldots, n$

$$D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = \frac{P}{n} + R_k - R_{k-1}.$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{x=1}^{P} \{f(x)\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right).$$

Пользуясь полученными соотношениями для $D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, находим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) &= \frac{P}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k(R_k - R_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2}P + O\left(\frac{P}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (kR_k - (k-1)R_{k-1}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R_{k-1} \\
&= \frac{1}{2}P + O(R + \Delta P), \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{P}{n} + O(R + \Delta P)\right) \\
&= \frac{1}{2}P + O(R + \Delta P).
\end{aligned}$$

Этим доказательство завершается.

Пусть $f(x)$ – вещественная функция. Обозначим через $D_P(\alpha, \beta)$ количество $x = 1, \ldots, P$ с условием $\alpha \leqslant \{f(x)\} < \beta$. Последовательность дробных долей функции $f(x)$ называется *равномерно распределенной*, если при любых $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ справедливо равенство

$$\lim_{P \to +\infty} \frac{1}{P} D_P(\alpha, \beta) = \beta - \alpha.$$

Рассмотрим общий критерий равномерного распределения, связывающий вопросы распределения дробных долей с оценками тригонометрических сумм.

Теорема 3 (критерий Г. Вейля). *Необходимым и достаточным условием равномерности распределения дробных долей функции $f(x)$ является выполнение равенства*

$$\lim_{P\to+\infty}\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}=0$$

при любом целом $m\neq 0$.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть $0<\gamma<1$, $0<\varepsilon<\min\left(\frac{\gamma}{2},\frac{1-\gamma}{2},\frac{1}{8}\right)$, $r=1$. Имеют место неравенства

$$\sum_{x=1}^{P}g_1(f(x))\leqslant D_P(0,\gamma)\leqslant\sum_{x=1}^{P}g_2(f(x)),$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – "стаканчики" Виноградова, отвечающие параметрам $\frac{\varepsilon}{2}$, $\gamma-\frac{\varepsilon}{2}$, ε, 1 и $\frac{-\varepsilon}{2}$, $\gamma+\frac{\varepsilon}{2}$, ε, 1, соответственно. Пользуясь разложением функции $g_1(f(x))$ в ряд Фурье, получим

$$\sum_{x=1}^{P}g_1(f(x))=(\gamma-\varepsilon)P+\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{+\infty}a_m\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}.$$

Для коэффициента a_m теорема 1 дает оценку

$$|a_m|\leqslant\min\left(\frac{1}{|m|},\frac{1}{|m|^2\varepsilon}\right).$$

Возьмем $N=[\varepsilon^{-2}]$. Поскольку при любом целом $m\neq 0$

$$\lim_{P\to+\infty}\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}=0,$$

найдется $P_0(\varepsilon)$ такое, что при $P>P_0(\varepsilon)$ и $0<|m|\leqslant N$ имеет место оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}\right|\leqslant\frac{\varepsilon P}{\ln N}.$$

Для $|m|>N$ оценим тригонометрическую сумму тривиально, т.е. числом ее слагаемых P. Таким образом, получим при $P>P_0(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{x=1}^{P}g_1(f(x))-\gamma P\right|\leqslant\varepsilon P+2\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\frac{\varepsilon P}{\ln N}+2\sum_{m>N}\frac{1}{m^2\varepsilon}P\leqslant 6\varepsilon P.$$

Аналогично получаем, что

$$\left|\sum_{x=1}^{P} g_2(f(x)) - \gamma P\right| \leqslant 6\varepsilon P,$$

откуда

$$|D_P(0,\gamma) - \gamma P| \leqslant 6\varepsilon P$$

при $P > P_0(\varepsilon)$. В силу произвольности ε это означает, что

$$\lim_{P\to+\infty} \frac{1}{P} D_P(0,\gamma) = \gamma,$$

то есть дробные доли $f(x)$ распределены равномерно.

Необходимость. Зададим $m \neq 0$ и произвольное $q \in \mathbb{N}$. Пусть M_k обозначает множество тех $x = 1, \ldots, P$, для которых $\frac{k}{q} \leqslant \{f(x)\} < \frac{k+1}{q}$. Имеем

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{x\in M_k} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Вычислим внутреннюю сумму. При $x \in M_k$ справедливо представление

$$\{f(x)\} = \frac{k}{q} + \frac{\theta_x}{q},$$

где $0 \leqslant \theta_x < 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{x\in M_k} e^{2\pi i m f(x)} &= \sum_{x\in M_k} e^{2\pi i \frac{mk}{q}} \left(1 + O\left(\frac{|m|}{q}\right)\right) \\ &= D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) e^{2\pi i \frac{mk}{q}} + O\left(D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) \frac{|m|}{q}\right).\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = \sum_{k=0}^{q-1} D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) e^{2\pi i \frac{mk}{q}} + O\left(\frac{|m|}{q} P\right).$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем q столь большим, что остаточный член будет по модулю меньше εP. Поскольку дробные доли $f(x)$ распределены равномерно, можно выбрать $P_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $P > P_0(\varepsilon)$ и $k = 0, \ldots, q-1$ выполнялось неравенство

$$\left| D_P\left(\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right) - \frac{1}{q}P \right| \leqslant \frac{\varepsilon P}{q}.$$

Таким образом, имеем

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} - \frac{1}{q}P \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{mk}{q}} \right| \leqslant 2\varepsilon P,$$

причем полная линейная тригонометрическая сумма в левой части равна нулю, так как $0 < |m| < q$ и, следовательно, $q \nmid m$. В силу произвольности ε получаем, что

$$\lim_{P \to +\infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0,$$

чем доказательство завершается.

Задачи к § 1

1. Доказать, что сумма

$$\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax}{q}}$$

равна q при a, делящемся на q, и равна нулю в противном случае.

2. Доказать, что при $(a, q) = 1$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = \mu(q).$$

3. Доказать, что

$$\left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \alpha x} \right| \leqslant \min\left(N, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right),$$

где $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$ – расстояние от α до ближайшего целого числа.

4. Доказать, что при $(a,q)=1$ модуль суммы Гаусса

$$\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}$$

равен $\sqrt{q}$ при нечетном q, $\sqrt{2q}$ при q, делящемся на четыре, и равен нулю при q вида $4n+2$.

5. Получить оценку для неполной суммы Гаусса $(N<q)$

$$\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}} \ll \sqrt{q}\ln q$$

при $(a,q)=1$.

6. Доказать, что последовательность дробных долей функции $\alpha x+\beta$ равномерно распределена в том и только в том случае, когда α иррационально.

§ 2. Формула замены тригонометрической суммы более короткой

В ряде случаев тригонометрическую сумму удается с хорошей точностью приблизить другой тригонометрической суммой, имеющей меньшее по сравнению с исходной суммой число слагаемых, то есть "более короткой". Таким образом, уже тривиальная оценка второй суммы дает нетривиальную оценку для первой. Докажем вначале теорему о приближении тригонометрической суммы суммой интегралов специального вида.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a,b]$ следующим условиям:*

1) *$f''(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны;*
2) *$f''(x) > 0$;*
3) *существуют $H > 0$, $U \geqslant b-a$ такие, что*

$$\varphi(x) \ll H, \qquad \varphi'(x) \ll HU^{-1}.$$

Тогда при любом $\Delta \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \\ = \sum_{\alpha-\Delta\leqslant n\leqslant\beta+\Delta} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i (f(x)-nx)}\,dx + O(H\ln(\beta-\alpha+2)),$$

где $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$, постоянная в знаке O зависит только от Δ.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае $\varphi(x) = 1$. Действительно, совершая преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра), получим

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} = \varphi(b) \sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} - \int_a^b \varphi'(u) \sum_{a<x\leqslant u} e^{2\pi i f(x)}\,du.$$

Обозначая $\gamma = f'(u)$, имеем

$$\sum_{a<x\leqslant u} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{\alpha-\Delta\leqslant n\leqslant\gamma+\Delta} \int_a^u e^{2\pi i (f(x)-nx)}\,dx + O(\ln(\beta-\alpha+2)).$$

При $n > \gamma + \Delta$, интегрируя по частям, найдем

$$\int_a^u e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_a^u \frac{de^{2\pi i(f(x)-nx)}}{f'(x)-n} \ll \frac{1}{n-\gamma},$$

так как функция в знаменателе отрицательна и монотонно возрастает. Таким образом,

$$\sum_{a<x\leqslant u} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{\alpha-\Delta\leqslant n\leqslant\beta+\Delta}\int_a^u e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx + O(\ln(\beta-\alpha+2)).$$

Подставляя полученное равенство в первую формулу, находим

$$\begin{aligned}\sum_{a<x\leqslant b}\varphi(x)e^{2\pi i f(x)} &= \\ &= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant n\leqslant\beta+\Delta}\biggl(\varphi(b)\int_a^b e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx \\ &\quad - \int_a^b \varphi'(u)\Bigl(\int_a^u e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx\Bigr)\,du\biggr) + O(H\ln(\beta-\alpha+2)) \\ &= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant n\leqslant\beta+\Delta}\int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx + O(H\ln(\beta-\alpha+2)).\end{aligned}$$

Далее, достаточно доказать теорему в случае $0 < \alpha - \Delta \leqslant 1$. Действительно, выберем целое k так, чтобы $0 < \alpha - \Delta + k \leqslant 1$ и пусть $f_1(x) = f(x) + kx$. Тогда $\alpha_1 = \alpha + k \in (\Delta, 1+\Delta]$ и

$$\begin{aligned}\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} &= \sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f_1(x)} \\ &= \sum_{\alpha_1-\Delta\leqslant n\leqslant\beta_1+\Delta}\int_a^b e^{2\pi i(f_1(x)-nx)}\,dx + O(\ln(\beta-\alpha+2)) \\ &= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant n-k\leqslant\beta+\Delta}\int_a^b e^{2\pi i(f(x)-(n-k)x)}\,dx + O(\ln(\beta-\alpha+2)).\end{aligned}$$

Итак, считаем $\varphi(x) = 1$ и $\alpha - \Delta \in (0,1]$. Применяя формулу суммирования Эйлера (теорема 9 прошлого семестра), получим

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx - 2\pi i\int_a^b \rho(x)f'(x)e^{2\pi i f(x)}\,dx + O(1),$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Первый интеграл есть $O(1)$, так как

$$\int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{de^{2\pi i f(x)}}{f'(x)} \ll \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\Delta}.$$

Здесь мы пользовались тем, что $f'(x)$ положительна и монотонно возрастает. При нецелых x функция $\rho(x)$ представляется своим рядом Фурье

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi m x}{m}.$$

Поскольку значения $\rho(x)$ в целых точках не влияют на величину интеграла, имеем

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} = -2i\int_a^b \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi m x}{m} f'(x) e^{2\pi i f(x)}\,dx + O(1).$$

Докажем возможность почленного интегрирования ряда в правой части последней формулы. Поскольку функция $f'(x)e^{2\pi i f(x)}$ ограничена на отрезке $[a, b]$, достаточно показать, что

$$\int_a^b \left|\sum_{m>N}\frac{\sin 2\pi m x}{m}\right| dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

С одной стороны, совершая преобразование Абеля и пользуясь оценкой линейной тригонометрической суммы (задача 3 к § 1), получим

$$\sum_{N<m\leqslant M}\frac{\sin 2\pi m x}{m} = \operatorname{Im}\sum_{N<m\leqslant M}\frac{e^{2\pi i m x}}{m}$$
$$= \frac{1}{M}\operatorname{Im}\sum_{N<m\leqslant M} e^{2\pi i m x} + \int_N^M \operatorname{Im}\sum_{N<m\leqslant u} e^{2\pi i m x}\frac{du}{u^2} \ll \frac{1}{N\|x\|}$$

при любом M. С другой стороны, имеем

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{\sin(2\pi m x)}{m} = 2\pi\int_0^x \sum_{m=1}^{N}\cos(2\pi m u)\,du.$$

Но для подынтегрального выражения находим следующее представление

$$\sum_{m=1}^{N} \cos 2\pi mu = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i mu}$$
$$= \operatorname{Re} \frac{e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})u} - e^{\pi i u}}{2i \sin \pi u} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin \pi(2N+1)u}{2 \sin \pi u},$$

откуда при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ получим

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\sin 2\pi mx}{m} = -\pi x + \int_0^x \frac{\sin \pi(2N+1)u}{u}\, du$$
$$+ \pi \int_0^x \sin \pi(2N+1)u \left(\frac{1}{\sin \pi u} - \frac{1}{\pi u}\right) du$$
$$= -\pi x + \int_0^{\pi(2N+1)x} \frac{\sin u}{u}\, du$$
$$+ \int_0^{\pi x} \sin(2N+1)u \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u}\right) du.$$

Поскольку второй интеграл в правой части максимален при верхнем пределе, равном π, имеем при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ оценку

$$\left|\sum_{m=1}^{N} \frac{\sin 2\pi mx}{m}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u}\right) du \ll 1.$$

Эта же оценка справедлива при всех x в силу нечетности и периодичности синуса. Таким образом, собирая вместе полученные оценки, находим

$$\left|\sum_{N<m\leqslant M} \frac{\sin 2\pi mx}{m}\right| \ll \min\left(1, \frac{1}{N\|x\|}\right)$$

при любом M. Устремив M к бесконечности, получаем

$$\int_a^b \left|\sum_{m>N} \frac{\sin 2\pi mx}{m}\right| dx \ll \int_a^b \min\left(1, \frac{1}{N\|x\|}\right) dx \ll \frac{1}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

что и доказывает возможность почленного интегрирования соответствующего ряда. Проводя последнюю оценку, мы разбили отрезок $[a,b]$ на два множества – $\frac{1}{\sqrt{N}}$-окрестности целых точек и дополнение к ним.

Итак, имеем следующее равенство

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} + O(1) = -2i\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\int_a^b \sin(2\pi m x) f'(x) e^{2\pi i f(x)}\,dx$$
$$= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\biggl(\int_a^b f'(x)e^{2\pi i (f(x)-mx)}\,dx - \int_a^b f'(x)e^{2\pi i (f(x)+mx)}\,dx\biggr).$$

Возьмем второй интеграл по частям

$$\int_a^b f'(x)e^{2\pi i (f(x)+mx)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x)+m}\,de^{2\pi i (f(x)+mx)} \ll \frac{\beta}{\beta+m}.$$

Здесь мы пользовались тем, что дробь под интегралом положительна и монотонно возрастает. Находим

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\beta}{m(\beta+m)} \ll \beta\sum_{m\leqslant\beta}\frac{1}{m\beta} + \beta\sum_{m>\beta}\frac{1}{m^2} \ll \ln(\beta+2).$$

Первый интеграл возьмем по частям при $m>\beta+\Delta$. Имеем

$$\int_a^b f'(x)e^{2\pi i (f(x)-mx)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(x)}{f'(x)-m}\,de^{2\pi i (f(x)-mx)} \ll \frac{\beta}{m-\beta}.$$

Здесь мы пользовались тем, что дробь под интегралом отрицательна и монотонно убывает. Находим

$$\sum_{m>\beta+\Delta}\frac{\beta}{m(m-\beta)} \ll \beta\sum_{m>2\beta}\frac{1}{m^2} + \beta\sum_{\beta+\Delta<m\leqslant 2\beta}\frac{1}{\beta(m-\beta)}$$
$$\ll \ln(\beta+2).$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} + O(\ln(\beta+2)) =$$
$$= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant m\leqslant\beta+\Delta} \frac{1}{m}\int_a^b f'(x)e^{2\pi i(f(x)-mx)}\,dx$$
$$= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant m\leqslant\beta+\Delta} \frac{1}{2\pi i m}\int_a^b e^{-2\pi i mx}\,de^{2\pi i f(x)}$$
$$= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant m\leqslant\beta+\Delta} \left(\int_a^b e^{2\pi i(f(x)-mx)}\,dx + O\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$
$$= \sum_{\alpha-\Delta\leqslant m\leqslant\beta+\Delta} \int_a^b e^{2\pi i(f(x)-mx)}\,dx + O(\ln(\beta+2)),$$

что и завершает доказательство.

Важным частным случаем доказанной теоремы является утверждение о приближении тригонометрической суммы интегралом.

Следствие (ван дер Корпут). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и, кроме того,*

$$|f'(x)| \leqslant \delta < 1$$

при $x \in [a,b]$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i f(x)}\,dx + O(H).$$

Доказательство. Возьмем в теореме 4 $\Delta = \frac{1-\delta}{2}$. Тогда $\beta + \Delta \leqslant \frac{1+\delta}{2} < 1$ и $\alpha - \Delta \geqslant -\frac{1+\delta}{2} > -1$, то есть в правой части останется единственное слагаемое с $n = 0$, если только $\alpha - \Delta \leqslant 0 \leqslant \beta + \Delta$. В противном случае формула также будет справедлива, поскольку

$$\int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i f(x)}\,dx = O(H),$$

что получается интегрированием по частям. Этим доказательство завершается.

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы этого параграфа.

Теорема 5. *Пусть вещественные функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют на отрезке* $[a,b]$ *следующим условиям*:

1) $f^{(4)}(x)$ *и* $\varphi''(x)$ *непрерывны*;

2) *существуют* $H, A > 0$ *и* $U \geqslant b-a$ *такие, что*

$$f^{(2)}(x) \asymp A^{-1}, \qquad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \qquad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$
$$\varphi(x) \ll H, \qquad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \qquad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда, определяя числа x_n *из уравнения* $f'(x_n) = n$, *будем иметь*

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)e^{2\pi i f(x)} =$$
$$= e^{\frac{\pi i}{4}} \sum_{f'(a)\leqslant n\leqslant f'(b)} c(n)\frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}}e^{2\pi i(f(x_n)-nx_n)} + R,$$

где

$$c(n) = \begin{cases} 1, & f'(a) < n < f'(b), \\ \frac{1}{2}, & n = f'(a) \text{ или } n = f'(b), \end{cases}$$
$$R \ll HAU^{-1} + H\ln(f'(b) - f'(a) + 2) + HT(a) + HT(b),$$
$$T(c) = \begin{cases} 0, & f'(c) \in \mathbb{Z}, \\ \min(\|f'(c)\|^{-1}, \sqrt{A}), & f'(c) \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $f'(a)$ и $f'(b)$ не являются целыми числами. Возьмем в теореме 4 $\Delta = 1/2$. Имеем

$$\sum_{a<x\leqslant b} \varphi(x)e^{2\pi i f(x)} = \sum_{f'(a)-0.5\leqslant n\leqslant f'(b)+0.5} \int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx$$
$$+ O(H\ln(f'(b)-f'(a)+2)).$$

При $[f'(a)] + 1 \leqslant n \leqslant [f'(b)]$ применим к интегралам в правой части теорему об асимптотическом значении тригонометрических интегралов (теорема 20 прошлого семестра). Находим

$$\int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx = e^{\frac{\pi i}{4}}\frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}}e^{2\pi i(f(x_n)-nx_n)}$$
$$+ O(HAU^{-1}) + O\big(H\min\big(|f'(a)-n|^{-1}, \sqrt{A}\,\big)\big)$$
$$+ O\big(H\min\big(|f'(b)-n|^{-1}, \sqrt{A}\,\big)\big),$$

где x_n определяется из уравнения $f'(x_n) = n$. Суммируя последние соотношения по n, получим

$$\sum_{[f'(a)]<n\leqslant[f'(b)]} \int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx =$$
$$= e^{\frac{\pi i}{4}} \sum_{f'(a)\leqslant n\leqslant f'(b)} \frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} e^{2\pi i(f(x_n)-nx_n)}$$
$$+ O(HT(a) + HT(b)) + O(H\ln(f'(b) - f'(a) + 2)).$$

Если же $n = [f'(a)]$ или $n = [f'(b)] + 1$, то точка x_n лежит вне отрезка $[a, b]$. В этом случае, интегрируя по частям, имеем

$$\int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx = \frac{\varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}}{2\pi i(f'(x)-n)}\bigg|_a^b$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi'(x)(f'(x)-n) - \varphi(x)f''(x)}{(f'(x)-n)^2} e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx$$
$$\ll H\|f'(c)\|^{-1} + HAU^{-1},$$

где $c = a$ при $n = [f'(a)]$ и $c = b$ при $n = [f'(b)] + 1$. С другой стороны,

$$\int_a^b \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx = \int_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx + O(H\sqrt{A})$$
$$= \frac{\varphi(x)e^{2\pi i(f(x)-nx)}}{2\pi i(f'(x)-n)}\bigg|_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}}$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{a+\sqrt{A}}^{b-\sqrt{A}} \frac{\varphi'(x)(f'(x)-n) - \varphi(x)f''(x)}{(f'(x)-n)^2} e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx$$
$$+ O(H\sqrt{A}) \ll H\sqrt{A} + HAU^{-1},$$

ибо $f'(a+\sqrt{A}) - [f'(a)] \geqslant f'(a+\sqrt{A}) - f'(a) = f''(\xi)\sqrt{A} \asymp \frac{1}{\sqrt{A}}$. Собирая вместе полученные оценки, доказываем искомую формулу.

Пусть теперь $f'(a)$ и(или) $f'(b)$ являются целыми числами. В этом случае доказательство проводится аналогично, но учитывается, что согласно доказательству теоремы об асимптотическом значении тригонометрических интегралов (теорема 20 прошлого семестра) при $n = f'(a)$ и(или) $n = f'(b)$ имеет место формула

$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i(f(c)-nc)} + O(HAU^{-1} + HT(d)),$$

где $c = a$, $d = b$ при $n = f'(a)$ и $c = b$, $d = a$ при $n = f'(b)$. Этим доказательство завершается.

Задачи к § 2

1. Доказать, что при фиксированном $\sigma_0 > 0$ и при $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $2\pi \leqslant |t| \leqslant \pi x$ имеет место следующее представление для дзета-функции Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}).$$

2. (Приближенное функциональное уравнение Харди–Литтлвуда) Доказать, что при фиксированных $h, \sigma_0 > 0$ и при $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $x, y > h$, $2\pi xy = |t|$ справедлива формула

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + e^{-2\pi i\theta(t)} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{n \leqslant y} \frac{1}{n^{1-s}}$$
$$+ O(t^{\frac{1}{2}-\sigma} y^{\sigma-1} \ln t + x^{-\sigma} \ln t),$$

где $\theta(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{8}$.

3. Пользуясь приближенным функциональным уравнением Харди–Литтлвуда, получить оценку

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll t^{\frac{1}{4}}.$$

§ 3. Метод Г. Вейля. Оценка $\zeta(s)$ на критической прямой

Г. Вейлем был разработан метод оценки полиномиальных тригонометрических сумм, состоящий в последовательном понижении степени многочлена за счет линейной замены переменной суммирования.

Теорема 6 (неравенство Г. Вейля). *Пусть* $k \geqslant 2$, $K = 2^{k-1}$,

$$f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x,$$

где $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\Big|^K \leqslant 2^{2K}P^{K-1} + 2^K P^{K-k}\sum_{r_1=1}^{P-1}\dots\sum_{r_{k-1}=1}^{P-1}\min(P, \|\alpha k! r_1\dots r_{k-1}\|^{-1}).$$

Доказательство. Имеем

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\Big|^2 = \sum_{x=1}^{P}\sum_{y=1}^{P} e^{2\pi i (f(x)-f(y))} = \sum_{x=1}^{P}\sum_{r_1=x-P}^{x-1} e^{2\pi i (f(x)-f(x-r_1))} = \sum_{r_1=1-P}^{P-1}\sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i (r_1\alpha k x^{k-1}+\dots)} \leqslant \sum_{r_1=1-P}^{P-1}\Big|\sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i (r_1\alpha k x^{k-1}+\dots)}\Big|,$$

где сделана линейная замена переменной суммирования $y = x - r_1$, причем $X_1 = \max(1, r_1+1)$, $X_2 = \min(P, r_1+P)$. Если $k=2$, то в правой части стоит линейная тригонометрическая сумма. Оценивая ее (см. задачу 3 к § 1), получим

$$\Big|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\Big|^2 \leqslant P + 2\sum_{r_1=1}^{P-1}\min(P, \|\alpha r_1\|^{-1}),$$

что доказывает искомое неравенство в случае $k=2$.

Пусть теперь $k \geqslant 3$. Тогда в правой части стоит полиномиальная сумма, но многочлен уже имеет степень $k-1$ и старший коэффициент $r_1\alpha k$. Предположим справедливость оценки Г. Вейля для этой суммы и докажем ее для исходной суммы. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}\right|^K &\leqslant \left(\sum_{r_1=1-P}^{P-1}\left|\sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i(r_1\alpha k x^{k-1}+\cdots)}\right|\right)^{\frac{K}{2}} \\ &\leqslant \left(\sum_{r_1=1-P}^{P-1} 1\right)^{\frac{K}{2}-1}\cdot\sum_{r_1=1-P}^{P-1}\left|\sum_{x=X_1}^{X_2} e^{2\pi i(r_1\alpha k x^{k-1}+\cdots)}\right|^{\frac{K}{2}} \\ &\leqslant (2P)^{\frac{K}{2}-1}\Biggl(P^{\frac{K}{2}}+\sum_{r_1=1-P}^{P-1}\Biggl(2^K P^{\frac{K}{2}-1}+2^{\frac{K}{2}}P^{\frac{K}{2}-k+1} \\ &\qquad\times\sum_{r_2=1}^{P-1}\ldots\sum_{r_{k-1}=1}^{P-1}\min\bigl(P,\|r_1\alpha k(k-1)!r_2\ldots r_{k-1}\|^{-1}\bigr)\Biggr)\Biggr).\end{aligned}$$

Доказательство завершается раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых.

Некоторые тригонометрические суммы, такие как дзетовая сумма, могут быть приближены полиномиальными. Таким образом, метод Г. Вейля дает оценки и для этих сумм.

Теорема 7 (Г. Вейль). *Справедлива оценка*

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{6}}\ln^{\frac{3}{2}} t.$$

Доказательство. Согласно приближенному функциональному уравнению Харди–Литтлвуда (задача 2 к § 2), имеем

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \left|\sum_{n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}\right| + t^{-\frac{1}{4}}\ln t,$$

где мы положили $x = y = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$. Разобьем сумму по n на две: по $n \leqslant 10t^{\frac{1}{3}}$ и по $10t^{\frac{1}{3}} < n \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$. Первую сумму оценим тривиально, то есть суммой модулей слагаемых. Находим

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \left|\sum_{10t^{\frac{1}{3}}<n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}\right| + t^{\frac{1}{6}}.$$

Теперь разобьем сумму по n на $\ll \ln t$ сумм по $N < n \leqslant N_1$, где $N_1 \leqslant 2N$ и $10t^{\frac{1}{3}} \leqslant N \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, и выберем среди них наибольшую по модулю. Имеем

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll \ln t \left|\sum_{N<n\leqslant N_1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}}\right| + t^{\frac{1}{6}} \ll \frac{\ln t}{\sqrt{N}} \left|\sum_{N<n\leqslant N_2} n^{-it}\right| + t^{\frac{1}{6}}.$$

Здесь мы совершили преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра), причем $N_2 \leqslant N_1$ таково, что сумма в правой части имеет наибольший модуль. Не ограничивая общности, можно считать, что $N_2 - N > N^{\frac{5}{6}}$.

Положим $\mu = \left[Nt^{-\frac{1}{3}}\right] \geqslant 10$ и разобьем сумму по n на l сумм, длины которых не превосходят μ, причем $l \asymp \frac{N}{\mu} \asymp t^{\frac{1}{3}}$. Имеем

$$\left|\sum_{N<n\leqslant N_2} n^{-it}\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{l-1}\left|\sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it\ln(N+\nu\mu+r)}\right|,$$

где $\mu_1 \leqslant \mu$. Применим к внутренней сумме преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра) следующим образом

$$\begin{aligned}\left|\sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it\ln(N+\nu\mu+r)}\right| &= \left|\sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it\ln(1+\frac{r}{N+\nu\mu})}\right| \\ &= \left|\sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it(\frac{r}{N+\nu\mu}-\frac{r^2}{2(N+\nu\mu)^2})}\times\right. \\ &\qquad \left.\times\, e^{-it(\ln(1+\frac{r}{N+\nu\mu})-\frac{r}{N+\nu\mu}+\frac{r^2}{2(N+\nu\mu)^2})}\right| \\ &\ll \left|\sum_{r=1}^{\mu_2} e^{-it(\frac{r}{N+\nu\mu}-\frac{r^2}{2(N+\nu\mu)^2})}\right|,\end{aligned}$$

где $\mu_2 \leqslant \mu_1$ таково, что модуль суммы в правой части наибольший. Здесь мы пользовались тем, что производная соответствующей функции при $0 \leqslant r \leqslant \mu$ есть $\ll \frac{tr^2}{N^3} \ll \frac{1}{\mu}$. Теперь применим к сумме в правой части неравенство Вейля при $k=2$. Имеем

$$\sum_{r=1}^{\mu_1} e^{-it(\frac{r}{N+\nu\mu}-\frac{r^2}{2(N+\nu\mu)^2})} \ll \sqrt{\mu + \sum_{r=1}^{\mu} \min\left(\mu, \left\|\frac{tr}{2\pi(N+\nu\mu)^2}\right\|^{-1}\right)}.$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{6}} + \frac{\ln t}{\sqrt{N}} l\sqrt{\mu} + \frac{\ln t}{\sqrt{N}} \sum_{\nu=0}^{l-1} \sqrt{\sum_{r=1}^{\mu} \min\left(\mu, \left\| \frac{tr}{2\pi(N+\nu\mu)^2} \right\|^{-1}\right)}.$$

Применяя к последней сумме неравенство Коши и пользуясь условиями на параметры l, μ и N, получим

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{6}} \ln t + \frac{t^{\frac{1}{6}} \ln t}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{r=1}^{\mu} \sum_{\nu=0}^{l-1} \min\left(\mu, \left\| \frac{tr}{2\pi(N+\nu\mu)^2} \right\|^{-1}\right)}.$$

Оценим внутреннюю сумму. Выражение под знаком расстояния до ближайшего целого положительно и монотонно убывает с ростом ν. Имеем

$$\frac{tr}{2\pi(N+\nu\mu)^2} - \frac{tr}{2\pi(N+(\nu+1)\mu)^2} = \frac{tr\mu(2N+(2\nu+1)\mu)}{2\pi(N+\nu\mu)^2(N+(\nu+1)\mu)^2} \asymp \frac{tr\mu}{N^3} \asymp \frac{r}{\mu^2}.$$

Таким образом, значения этих дробей попадают на промежуток длины $\ll \frac{rl}{\mu^2}$. Разобьем его на $\ll \frac{rl}{\mu^2}$ промежутков длины $\frac{1}{2}$, имеющих своими концами целые либо полуцелые числа (легко видеть, что $\frac{rl}{\mu^2} \gg 1$). На каждом из этих промежутков соответствующая часть суммы оценится как

$$\mu + \sum_{k \leqslant \frac{\mu^2}{r}} \frac{\mu^2}{rk} \ll \mu + \frac{\mu^2}{r} \ln t \ll \frac{\mu^2}{r} \ln t,$$

причем первое слагаемое добавлено на случай, если какое-либо значение дроби окажется близким к целому числу. Здесь мы существенно использовали вышеприведенную оценку разности последовательных дробей. Находим

$$\sum_{\nu=0}^{l-1} \min\left(\mu, \left\| \frac{tr}{2\pi(N+\nu\mu)^2} \right\|^{-1}\right) \ll \frac{rl}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{r} \ln t \ll t^{\frac{1}{3}} \ln t,$$

$$\sum_{r=1}^{\mu} \sum_{\nu=0}^{l-1} \min\left(\mu, \left\| \frac{tr}{2\pi(N+\nu\mu)^2} \right\|^{-1}\right) \ll \mu t^{\frac{1}{3}} \ln t \ll N \ln t.$$

Доказательство завершается подстановкой полученной оценки в неравенство для $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.

Задачи к § 3

1. Пусть $k \geqslant 2$, $K = 2^{k-1}$, $f(x) = \alpha x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \ldots + \alpha_1 x$, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$. В случае, когда для α справедливо рациональное приближение

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$$

с $(a,q) = 1$, $|\theta| < 1$, доказать следующую оценку

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)} \ll \left(Pq^{-\frac{1}{K}} + P^{1-\frac{1}{K}} + P^{1-\frac{k}{K}}q^{\frac{1}{K}}\right)(Pq)^{\varepsilon},$$

где ε – произвольно малое фиксированное положительное число.

2. (Теорема Дирихле) Доказать, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{N}$ существуют $a \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ такие, что $(a,q) = 1$, $q \leqslant \tau$ и

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau},$$

где $|\theta| < 1$.

3. Доказать, что дробные доли многочлена $\alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_1 x$ распределены равномерно в том и только в том случае, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ иррационален.

§ 4. Метод ван дер Корпута. Проблема Гаусса

Весьма общий метод оценки тригонометрических сумм с функцией, имеющей непрерывную k-ую производную, был предложен ван дер Корпутом. Основой метода является следующая теорема.

Теорема 8 (ван дер Корпут). *Пусть* $k \geqslant 2$, $K = 2^{k-1}$, $f(x) \in \mathbb{C}^k[a,b]$, $b - a \geqslant 1$. *Если выполнены неравенства*

$$0 < \lambda_k \leqslant f^{(k)}(x) \leqslant h\lambda_k,$$

то справедлива оценка

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} \ll h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}},$$

причем постоянная в знаке Виноградова абсолютна.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $k = 2$. Если $\lambda_2 \geqslant 1$, то утверждение теоремы тривиально. Если же $0 < \lambda_2 < 1$, то применим теорему 4, полагая $\Delta = \frac{1}{2}$. Имеем

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} = \sum_{f'(a)-\frac{1}{2}\leqslant n\leqslant f'(b)+\frac{1}{2}} \int_a^b e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx \\ + O\left(\ln(f'(b) - f'(a) + 2)\right).$$

Рассмотрим интеграл в правой части последнего равенства. Вторая производная функции, стоящей в экспоненте, больше λ_2. Следовательно, ее первая производная на отрезке $[a,b]$ обращается в нуль не более одного раза. Разобьем отрезок $[a,b]$ на множества M_1, M_2, M_3 (некоторые из них могут быть и пустыми) следующим образом: в M_1 войдут те значения x, для которых $f'(x) - n < -\sqrt{\lambda_2}$; в M_3 – те значения x, для которых $f'(x) - n > \sqrt{\lambda_2}$; в M_2 войдут те значения x, для которых $|f'(x) - n| \leqslant \sqrt{\lambda_2}$. Легко видеть, что

$$\left|\int_{M_2} e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx\right| \leqslant \mu(M_2) \leqslant 2\lambda_2^{-\frac{1}{2}},$$

ибо по формуле конечных приращений Лагранжа

$$2\sqrt{\lambda_2} \geqslant f''(\xi)\mu(M_2) > \lambda_2\mu(M_2).$$

Интегралы по множествам M_1 и M_3 легко оцениваются интегрированием по частям

$$\left|\int_{M_3} e^{2\pi i(f(x)-nx)}\,dx\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{M_3} \frac{de^{2\pi i(f(x)-nx)}}{f'(x)-n}\right| \leqslant \lambda_2^{-\frac{1}{2}},$$

где мы существенно пользуемся монотонностью функции $f'(x)-n$. Собирая вместе полученные оценки, находим

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} \ll (f'(b)-f'(a)+2)\lambda_2^{-\frac{1}{2}} + \ln(f'(b)-f'(a)+2).$$

Остается лишь заметить, что второе слагаемое в правой части всегда меньше первого, и согласно формуле конечных приращений Лагранжа $f'(b)-f'(a) = f''(\xi)(b-a) \leqslant h\lambda_2(b-a)$.

Покажем теперь, что при достаточно большой, но не зависящей от k, постоянной A в знаке Виноградова в формулировке теоремы можно сделать индукционный переход от $k-1$ к k. При этом можно считать $0 < \lambda_k < 1$, так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Положим при $r > 0$ $g(x) = f(x+r) - f(x)$. Тогда

$$g^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x+r) - f^{(k-1)}(x) = rf^{(k)}(\xi),$$

где $x \leqslant \xi \leqslant x+r$. Отсюда следует, что при $a \leqslant x \leqslant b-r$

$$r\lambda_k \leqslant g^{(k-1)}(x) \leqslant hr\lambda_k.$$

Согласно предположению индукции, имеем

$$\sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)} \leqslant A\big(h^{\frac{4}{K}}(b-a)(r\lambda_k)^{\frac{1}{K-2}} + (b-a)^{1-\frac{4}{K}}(r\lambda_k)^{-\frac{1}{K-2}}\big).$$

Пусть q – некоторое натуральное число, не превосходящее $b-a$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{r=1}^{q-1}\left|\sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2A\left(h^{\frac{4}{K}}(b-a)q^{1+\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{\frac{1}{K-2}} + (b-a)^{1-\frac{4}{K}}q^{1-\frac{1}{K-2}}\lambda_k^{-\frac{1}{K-2}}\right),$$

ибо в силу формулы конечных приращений Лагранжа

$$r^{1-\frac{1}{K-2}} - (r-1)^{1-\frac{1}{K-2}} \geqslant \left(1 - \frac{1}{K-2}\right) r^{-\frac{1}{K-2}}.$$

Обозначим $e(n) = e^{2\pi i f(n)}$ при $a < n \leqslant b$ и $e(n) = 0$ в противном случае. Пусть $q \leqslant b - a$. Имеем

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n) = \frac{1}{q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m=1}^{q} e(n+m).$$

Применяя неравенство Коши, найдем

$$\begin{aligned}\left| \sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} \right|^2 &\leqslant \frac{1}{q^2} \Bigg(\sum_{a-q<n\leqslant b-1} 1 \Bigg) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{m=1}^{q} e(n+m) \right|^2 \\ &\leqslant \frac{2(b-a)}{q^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{m=1}^{q} e(n+m) \right|^2.\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\left| \sum_{m=1}^{q} e(n+m) \right|^2 = \sum_{m=1}^{q} |e(n+m)|^2 \\ + 2\,\mathrm{Re} \sum_{1\leqslant m_1<m_2\leqslant q} \overline{e(n+m_1)} e(n+m_2).\end{aligned}$$

Имеем следующие равенства

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m=1}^{q} |e(n+m)|^2 = \sum_{m=1}^{q} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |e(n+m)|^2 \leqslant 2q(b-a),$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{1\leqslant m_1<m_2\leqslant q} \overline{e(n+m_1)} e(n+m_2) \\ &\quad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{m=1}^{q-r} \overline{e(n+m)} e(n+m+r) \\ &\quad = \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{e(n)} e(n+r) = \sum_{r=1}^{q-1} (q-r) \sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)}.\end{aligned}$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\Bigl|\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}\Bigr|^2 \leqslant \frac{4(b-a)}{q}\Biggl((b-a)+\sum_{r=1}^{q-1}\Bigl|\sum_{a<n\leqslant b-r} e^{2\pi i g(n)}\Bigr|\Biggr).$$

Подставим сюда полученную выше оценку для второго слагаемого в правой части. Имеем

$$\Bigl|\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}\Bigr| \leqslant \frac{2(b-a)}{\sqrt{q}} + 4\sqrt{A}\bigl(h^{\frac{2}{K}}(b-a)(q\lambda_k)^{\frac{1}{2K-4}} + (b-a)^{1-\frac{2}{K}}(q\lambda_k)^{-\frac{1}{2K-4}}\bigr).$$

Выберем $q = \bigl[\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}}\bigr]+1$. Условие $q\leqslant b-a$ можно считать выполненным, так как при $2\lambda_k^{-\frac{1}{K-1}} > (b-a)^{\frac{4}{K}}$ утверждение теоремы тривиально. При таком выборе q получим оценку

$$\Bigl|\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)}\Bigr| \leqslant 2(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + 8\sqrt{A}h^{\frac{2}{K}}(b-a)\lambda_k^{\frac{1}{2K-2}} + 4\sqrt{A}(b-a)^{1-\frac{2}{K}}\lambda_k^{-\frac{1}{2K-2}}.$$

Взяв A достаточно большим, но не зависящим от k, добьемся того, что $2+8\sqrt{A}<A$, и обоснуем индукционный переход от $k-1$ к k. Этим доказательство завершается.

Метод ван дер Корпута широко применяется при оценке тригонометрических сумм. Одной из задач, в которой метод ван дер Корпута дает существенное продвижение, является проблема Гаусса о числе целых точек в круге. Введем обозначение

$$K(R) = \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}\\ n^2+m^2\leqslant R}} 1.$$

Величина $K(R)$ есть количество точек с целыми координатами, лежащими в круге радиуса $\sqrt{R}$. Асимптотическое значение $K(R)$ при $R\to+\infty$ есть площадь круга πR, а задача получения возможно лучшей оценки остатка известна как проблема Гаусса.

Теорема 9. *Справедлива следующая асимптотическая формула*

$$K(R) = \pi R + O\bigl(R^{\frac{1}{3}-\frac{5}{1506}}\ln R\bigr).$$

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию $0 < x \leqslant \sqrt{R/2}$, $0 < y \leqslant \sqrt{R-x^2}$. Весь круг $x^2+y^2 \leqslant R$ состоит из восьми подобных трапеций. Учитывая пересечения этих областей по квадратам со стороной $\sqrt{R/2}$ и целые точки, лежащие на осях координат, имеем

$$\begin{aligned} K(R) &= 1 + 4[\sqrt{R}] + 8 \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} \bigl[\sqrt{R-x^2}\,\bigr] - 4\bigl(\bigl[\sqrt{R/2}\,\bigr]\bigr)^2 \\ &= 8 \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} \sqrt{R-x^2} - 2R + 4\sqrt{2R}\bigl\{\sqrt{R/2}\,\bigr\} + 4\sqrt{R} \\ &\quad - 8 \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} \bigl\{\sqrt{R-x^2}\,\bigr\} + O(1). \end{aligned}$$

Вычислим первую сумму в правой части, пользуясь формулой суммирования Эйлера (теорема 9 прошлого семестра).

$$\begin{aligned} \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} \sqrt{R-x^2} &= \int_0^{\sqrt{R/2}} \sqrt{R-x^2}\,dx + \left(\frac{1}{2} - \bigl\{\sqrt{R/2}\,\bigr\}\right)\sqrt{\frac{R}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{R} + \sigma\bigl(\sqrt{R/2}\,\bigr) + \int_0^{\sqrt{R/2}} \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{R-x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi R}{8} + \frac{R}{4} + \frac{\sqrt{R}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{R}}{2} - \left\{\sqrt{\frac{R}{2}}\right\}\sqrt{\frac{R}{2}} + O(1). \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что первый интеграл равен площади рассматриваемой криволинейной трапеции, функция $\sqrt{R-x^2}$ выпукла, а $|\sigma(x)| \leqslant \frac{1}{8}$. Подставляя полученное равенство в формулу для $K(R)$, находим

$$K(R) = \pi R + 2\sqrt{2R} - 8 \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} \bigl\{\sqrt{R-x^2}\,\bigr\} + O(1).$$

Оценивая сумму дробных долей тривиально, получим результат Гаусса

$$K(R) = \pi R + O\bigl(\sqrt{R}\,\bigr).$$

Вычислим сумму

$$\sigma = \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} \bigl\{\sqrt{R-x^2}\,\bigr\}.$$

Для этого возьмем $r = [\ln R] \geqslant 1$, $0 < \Delta < \frac{1}{8}$, $\Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta$. Согласно теореме 2 нам достаточно вычислить сумму

$$\sigma_0 = \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} g\big(\sqrt{R - x^2}\,\big),$$

где $g(x)$ – функция теоремы 1, отвечающая параметрам r, Δ, α, β. Согласно теореме 1 функция $g(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$g(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$

причем для коэффициентов c_m справедлива оценка

$$|c_m| \leqslant \min\left(\frac{1}{\pi|m|}, \frac{1}{\pi|m|}\left(\frac{r}{\pi|m|\Delta}\right)^r\right).$$

Отсюда находим соотношение

$$\sigma_0 = (\beta - \alpha)\left[\sqrt{\frac{R}{2}}\right] + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} c_m \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} e^{2\pi i m \sqrt{R - x^2}}.$$

При $|m| > \Delta^{-1} \ln R$ оценим внутреннюю сумму тривиально

$$\sum_{|m| > \Delta^{-1} \ln R} c_m \sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} e^{2\pi i m \sqrt{R - x^2}} \ll \sqrt{R} \sum_{m > \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{\pi m \Delta}\right)^r$$
$$\ll \sqrt{R}\pi^{-r} \ll 1.$$

Таким образом, имеем

$$\sigma_0 = (\beta - \alpha)\sqrt{\frac{R}{2}} + O\bigg(\sum_{m \leqslant \Delta^{-1} \ln R} \frac{1}{m}\bigg|\sum_{x \leqslant \sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m \sqrt{R - x^2}}\bigg| + 1\bigg).$$

Заменим внутреннюю сумму более короткой. Применим к ней теорему 5, полагая $a = 0$, $b = \sqrt{\frac{R}{2}}$, $f(x) = -m\sqrt{R - x^2}$, $H = 1$, $U = \sqrt{R/2}$, $A = \sqrt{R}/m$. Нетрудно проверить, что условия теоремы 5 выполнены. Имеем

$$f'(x) = \frac{mx}{\sqrt{R - x^2}}, \quad x_n = \frac{n\sqrt{R}}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad f''(x) = \frac{mR}{(R - x^2)^{3/2}}.$$

Отсюда находим следующее равенство

$$\sum_{x\leqslant\sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m\sqrt{R-x^2}} = e^{\frac{\pi i}{4}} m R^{\frac14} \sum_{n\leqslant m} \frac{e^{-2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}}}{(n^2+m^2)^{3/4}} + O\big(R^{\frac14} m^{-\frac12} + \ln(m+2)\big).$$

Оценивая сумму в правой части тривиально, получим

$$\sigma_0 = (\beta-\alpha)\sqrt{\frac{R}{2}} + O\big(R^{\frac14}\Delta^{-\frac12}\sqrt{\ln R}+1\big),$$

что согласно теореме 2 дает для суммы σ соотношение

$$\sigma = \frac12\sqrt{\frac{R}{2}} + O\big(\Delta\sqrt{R} + R^{\frac14}\Delta^{-\frac12}\sqrt{\ln R}+1\big).$$

Выбирая $\Delta = R^{-\frac16}\ln^{\frac13} R$, получаем результат В. Серпинского

$$K(R) = \pi R + O\big((R\ln R)^{\frac13}\big).$$

Мы же оценим сумму в правой части нетривиально, используя теорему ван дер Корпута. Совершая преобразование Абеля (теорема 5 прошлого семестра), находим

$$\sum_{n\leqslant m} \frac{e^{-2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}}}{(n^2+m^2)^{3/4}} \ll m^{-\frac32} \sum_{n\leqslant x} e^{-2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}},$$

где x – некоторое число, не превосходящее m. Для оценки суммы в правой части применим теорему ван дер Корпута, полагая $k = 6$, $f(n) = -\sqrt{R(n^2+m^2)}$. Имеем

$$f^{(6)}(n) = 360\sqrt{R}(n^2+m^2)^{-\frac{11}{2}} m^2 \left(n^4 - \frac32 n^2m^2 + \frac18 m^4\right).$$

На промежутке $[0,x]$ может лежать нуль $f^{(6)}(n)$ равный

$$n_0 = \frac{\sqrt{3-\sqrt7}}{2} m.$$

Пусть $m \geqslant 10$. Разобьем отрезок $[0,x]$ на $\ll \ln m$ промежутков $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{-1}, E_{-2}, \dots$, где

$$\begin{aligned} E_0 &= [n_0-1, n_0+1],\\ E_\nu &= [n_0+2^{\nu-1}, n_0+2^\nu], \quad \nu = 1,2,\dots,\\ E_{-\nu} &= [n_0-2^\nu, n_0-2^{\nu-1}], \quad \nu = 1,2,\dots, \end{aligned}$$

При $\nu \geqslant 1$ длина $E_{\pm\nu}$ равна $2^{\nu-1}$, а при $n \in E_{\pm\nu}$

$$\left|f^{(6)}(n)\right| \asymp \sqrt{R}m^{-6}2^{\nu}.$$

Применим теорему 8, полагая $\lambda_6 = \sqrt{R}\,m^{-6}2^{\nu}$. Если $f^{(6)}(n)$ отрицательна, следует рассмотреть комплексно сопряженную сумму. При $\nu \geqslant 1$ находим

$$\sum_{n\in E_{\pm\nu}} e^{-2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}} \ll 2^{\nu}\big(\sqrt{R}\,m^{-6}2^{\nu}\big)^{\frac{1}{62}} + 2^{\frac{15}{16}\nu}\big(\sqrt{R}\,m^{-6}2^{\nu}\big)^{-\frac{1}{62}},$$

$$\sum_{n\leqslant x} e^{-2\pi i\sqrt{R(n^2+m^2)}} \ll m\Big(\big(\sqrt{R}\,m^{-5}\big)^{\frac{1}{62}} + m^{\frac{15}{16}}\big(\sqrt{R}\,m^{-5}\big)^{-\frac{1}{62}} + 1.$$

Имеем окончательно

$$\begin{aligned}\sum_{m\leqslant\Delta^{-1}\ln R}\frac{1}{m}\Bigg|\sum_{x\leqslant\sqrt{R/2}} e^{-2\pi i m\sqrt{R-x^2}}\Bigg| &\\ \ll R^{\frac14} + R^{\frac{8}{31}}\sum_{m\leqslant\Delta^{-1}\ln R} m^{-\frac{18}{31}} + R^{\frac{15}{62}}\sum_{m\leqslant\Delta^{-1}\ln R} m^{-\frac{239}{496}} &\\ \ll R^{\frac14} + R^{\frac{8}{31}}\Delta^{-\frac{13}{31}}\ln R + R^{\frac{15}{62}}\Delta^{-\frac{257}{496}}\ln R.&\end{aligned}$$

Выбирая $\Delta = R^{-\frac16-\frac{5}{1506}}$ и пользуясь теоремой 2, получим

$$\sigma = \frac12\sqrt{\frac{R}{2}} + O\big(R^{\frac13-\frac{5}{1506}}\ln R\big),$$

что и завершает доказательство.

Задачи к § 4

1. Доказать оценку

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll t^{\frac{1}{6}-\frac{1}{492}}\ln t.$$

2. Доказать, что

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = x\ln x + (2C-1)x + O\big(x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{246}}\ln^2 x\big),$$

где C – постоянная Эйлера,

а) пользуясь теоремой 2 аналогично доказательству теоремы 9;

б) пользуясь формулой Вороного (теорема 21 прошлого семестра).

§ 5. Суммы с простыми числами. Проблема Гольдбаха

Линейные тригонометрические суммы с простыми числами впервые были рассмотрены Виноградовым в 1937 году. Для их оценки им был предложен так называемый метод сглаживания, то есть сведения к суммам по подряд идущим натуральным числам.

Теорема 10. *Пусть* $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, *где* $q \leqslant N$, $(a,q) = 1$, $|\theta| \leqslant 1$. *Тогда имеет место оценка*

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p} \ll N \ln^2 N \Big(\sqrt{\frac{q}{N} + \frac{1}{q}} + N^{-\frac{1}{6}} \Big).$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant N} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n},$$

где $\Lambda(n)$ – функция Мангольдта (см. задачу 1 к § 4 прошлого семестра). Имеет место тождество

$$S = \sum_{d \leqslant \sqrt{N}} \mu(d) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d}} \ln l e^{2\pi i \alpha d l} - \sum_{d \leqslant \sqrt{N}} \mu(d) \sum_{n \leqslant \sqrt{N}} \Lambda(n) \sum_{r \leqslant \frac{N}{nd}} e^{2\pi i \alpha n d r} = W_1 - W_2.$$

Действительно,

$$W_1 = \sum_{d \leqslant \sqrt{N}} \mu(d) \sum_{l \leqslant \frac{N}{d}} \sum_{n | l} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha d l} = \sum_{k \leqslant N} e^{2\pi i \alpha k} \sum_{\substack{nd | k \\ d \leqslant \sqrt{N}}} \mu(d) \Lambda(n),$$

$$W_2 = \sum_{k \leqslant N} e^{2\pi i \alpha k} \sum_{\substack{nd | k \\ n, d \leqslant \sqrt{N}}} \mu(d) \Lambda(n).$$

Здесь мы пользовались тем, что $\sum_{d|n}\Lambda(d)=\ln n$. Далее находим

$$\begin{aligned}W_1-W_2&=\sum_{k\leqslant N}e^{2\pi i\alpha k}\sum_{\substack{nd|k\\ d\leqslant\sqrt{N},n>\sqrt{N}}}\mu(d)\Lambda(n)\\&=\sum_{\sqrt{N}<k\leqslant N}e^{2\pi i\alpha k}\sum_{\substack{n|k\\ n>\sqrt{N}}}\Lambda(n)\sum_{d|\frac{k}{n}}\mu(d).\end{aligned}$$

Согласно теореме 2 прошлого семестра внутренняя сумма отлична от нуля лишь при $n=k$, что и доказывает требуемое тождество.

Оценим W_1. Разобьем внутреннюю сумму на $\ll\ln N$ сумм с пределами, различающимися не более чем вдвое, и вынесем монотонный множитель $\ln l$ за знак суммы с помощью преобразования Абеля. Имеем

$$W_1\ll\ln^2 N\sum_{d\leqslant\sqrt{N}}\left|\sum_{X<l\leqslant X_1}e^{2\pi i\alpha dl}\right|,$$

где $X\leqslant\frac{N}{d}$. Теперь под знаком модуля стоит линейная тригонометрическая сумма, для оценки которой воспользуемся задачей 3 к § 1.

$$W_1\ll\ln^2 N\sum_{d\leqslant\sqrt{N}}\min\left(\frac{N}{d},\frac{1}{\|\alpha d\|}\right).$$

В сумме по d выделим слагаемые с $d\leqslant\frac{q}{2}$, а оставшуюся часть разобьем на $\ll\frac{\sqrt{N}}{q}+1$ сумм длины q. При $\alpha\leqslant\frac{q}{2}$ произведение ad пробегает некоторые ненулевые и различные вычеты по модулю q, а $|\theta d|\leqslant\frac{q}{2}$. Поэтому в каждом случае справедлива оценка

$$\sum_{d\leqslant\frac{q}{2}}\frac{1}{\|\alpha d\|}\ll\sum_{n\leqslant\frac{q}{4}}\frac{q}{n-\frac{1}{2}}\ll q\ln q\ll q\ln N.$$

Если же $d=qt+r$ при фиксированном $t\in\mathbb{N}$ и r, меняющемся в пределах от $-\frac{q}{2}$ до $\frac{q}{2}$, то

$$\|\alpha d\|=\left\|\frac{ar+b}{q}+\frac{3\theta'}{2q}\right\|,$$

где $|\theta'| \leqslant 1$, а $b \in \mathbb{Z}$ не зависит от r. Поскольку $ar + b$ пробегает все вычеты по модулю q, находим

$$\sum_{|r| \leqslant \frac{q}{2}} \min\left(\frac{N}{qt+r}, \frac{1}{\|\alpha(qt+r)\|}\right) \ll \frac{N}{qt} + \sum_{n \leqslant q} \frac{q}{n} \ll \frac{N}{qt} + q \ln N.$$

Окончательно имеем

$$W_1 \ll \left(\frac{\sqrt{N}}{q} + 1\right) q \ln^3 N + \sum_{t \leqslant \frac{\sqrt{N}}{q}} \frac{N}{qt} \ln^2 N$$
$$\ll N \ln^3 N \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + N^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Для оценки W_2 разобьем ее на суммы W_3 по $d \leqslant N^{\frac{1}{3}}$ и W_4 по $N^{\frac{1}{3}} < d \leqslant \sqrt{N}$. Оценим W_3. Имеем

$$W_3 = \sum_{k \leqslant N^{5/6}} a(k) \sum_{r \leqslant \frac{N}{k}} e^{2\pi i \alpha k r} \ll \ln^2 N \sum_{k \leqslant N^{5/6}} \left| \sum_{X < r \leqslant X_1} e^{2\pi i \alpha k r} \right|,$$

где $X \leqslant \frac{N}{k}$, а

$$a(k) = \sum_{\substack{nd=k \\ d \leqslant N^{1/3}, n \leqslant \sqrt{N}}} \mu(d)\Lambda(n) \ll \sum_{n|k} \Lambda(n) = \ln k.$$

Действуя также, как при оценке W_1, получим

$$W_3 \ll N \ln^3 N \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + N^{-\frac{1}{6}}\right).$$

Оценим W_4. Разобьем сумму по d на $\ll \ln N$ сумм с пределами, различающимися не более чем вдвое. Имеем

$$W_4 \ll \ln N \left| \sum_{X < d \leqslant X_1} \mu(d) \sum_{n \leqslant \sqrt{N}} \Lambda(n) \sum_{r \leqslant \frac{N}{nd}} e^{2\pi i \alpha n d r} \right|$$
$$\ll \ln N \sum_{X < d \leqslant X_1} \left| \sum_{k \leqslant \frac{N}{d}} a(k) e^{2\pi i \alpha k d} \right|,$$

где $N^{1/3} \leqslant X \leqslant \sqrt{N}$, а

$$a(k) = \sum_{\substack{nr=k \\ n \leqslant \sqrt{N}}} \Lambda(n) \ll \sum_{n|k} \Lambda(n) = \ln k.$$

Применяя неравенство Коши, находим

$$W_4^2 \ll X\ln^2 N \sum_{X<d\leqslant X_1} \Bigl|\sum_{k\leqslant \frac{N}{d}} a(k)e^{2\pi i\alpha kd}\Bigr|^2$$
$$= X\ln^2 N \sum_{k_1,k_2\leqslant \frac{N}{X}} a(k_1)a(k_2)\sum_{X<d\leqslant X_2} e^{2\pi i\alpha(k_1-k_2)d},$$

где $X_2 = \min\bigl(X_1, \frac{N}{k_1}, \frac{N}{k_2}\bigr)$. Пользуясь оценкой $a(k)$ и задачей 3 к §1, получим

$$W_4^2 \ll X\ln^4 N\Biggl(N + \sum_{k_2\leqslant \frac{N}{X}}\sum_{k_3=1}^{k_2-1}\min\Bigl(X, \frac{1}{\|\alpha k_3\|}\Bigr)\Biggr)$$
$$\ll X\ln^4 N\Biggl(N + \sum_{k_2\leqslant \frac{N}{X}}\Bigl(\frac{k_2}{q}+1\Bigr)(X+q\ln N)\Biggr)$$
$$\ll X\ln^5 N\Bigl(N + \frac{Nq}{X} + \frac{N^2}{X^2} + \frac{N^2}{qX}\Bigr).$$

Раскрывая скобки, извлекая квадратный корень и учитывая, что $N^{1/3} \leqslant X \leqslant \sqrt{N}$, находим

$$W_4 \ll N\ln^3 N\Bigl(\sqrt{\frac{q}{N}+\frac{1}{q}} + N^{-\frac{1}{6}}\Bigr).$$

Поскольку $1 \leqslant q \leqslant N$, такая же оценка справедлива для суммы S.

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\sum_{p\leqslant N}\ln p\, e^{2\pi i\alpha p} = S + O\Biggl(\sum_{\substack{p^k\leqslant N\\ k\geqslant 2}}\ln p + \sum_{n\leqslant\sqrt{N}}\Lambda(n)\Biggr),$$

но $\sum_{n\leqslant\sqrt{N}}\Lambda(n) = \psi(\sqrt{N}) \ll \sqrt{N}$, а

$$\sum_{\substack{p^k\leqslant N\\ k\geqslant 2}}\ln p = \sum_{p\leqslant\sqrt{N}}\ln p\sum_{2\leqslant k\leqslant\frac{\ln N}{\ln p}} 1 \leqslant \sum_{p\leqslant\sqrt{N}}\ln p\left[\frac{\ln N}{\ln p}\right]$$
$$\leqslant \pi\bigl(\sqrt{N}\,\bigr)\ln N \ll \sqrt{N}.$$

Здесь мы пользуемся результатом задачи 2 к § 4 прошлого семестра. Таким образом,

$$\sum_{p\leqslant N}\ln p\, e^{2\pi i\alpha p} \ll N\ln^3 N\left(\sqrt{\frac{q}{N}+\frac{1}{q}}+N^{-\frac{1}{6}}\right),$$

и доказательство завершается применением преобразования Абеля.

Оценка линейной тригонометрической суммы с простыми числами дала ключ к решению тернарной проблемы Гольдбаха, то есть задачи о представимости любого достаточно большого нечетного числа суммой трех простых чисел. Метод решения этой и многих других так называемых аддитивных задач восходит к Харди и Литтлвуду и носит название кругового метода.

Теорема 11 (Виноградов). *Для числа решений $J(N)$ уравнения $p_1+p_2+p_3=N$ справедлива асимптотическая формула*

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2\ln^3 N}+O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right),$$

где

$$\sigma(N)=\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

В частности, если N нечетно, то $\sigma(N)>1$ и любое достаточно большое нечетное число представимо суммой трех простых чисел.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}J(N)=\sum_{p_1+p_2+p_3=N}1&=\sum_{p_1,p_2,p_3\leqslant N}\int_0^1 e^{2\pi i\alpha(p_1+p_2+p_3-N)}d\alpha\\ &=\int_0^1 S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}.$$

Пусть A и B – некоторые положительные числа, $L = \ln N$, $\tau = NL^{-A}$, $Q = L^B$. В силу периодичности подынтегральной функции с периодом 1 найдем

$$J(N) = \int_{\frac{1}{\tau}}^{1+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha.$$

Согласно задаче 2 к §3 каждое α из промежутка $\left[\frac{1}{\tau}, 1+\frac{1}{\tau}\right]$ представляется в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + z,$$

где $1 \leqslant q \leqslant \tau$, $(a,q) = 1$ и $|z| \leqslant \frac{1}{q\tau}$. Разобьем отрезок интегрирования на два множества: E_1, в которое войдут те α, для которых $q \leqslant Q$, и E_2 – дополнение к E_1. Легко видеть, что отрезки, составляющие множество E_1, не пересекаются. Действительно, расстояние между их центрами есть

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \geqslant \frac{1}{qq'},$$

ибо $(a,q) = (a',q') = 1$, а сумма их полудлин равна

$$\frac{1}{q\tau} + \frac{1}{q'\tau} \leqslant \frac{2Q}{qq'\tau} < \frac{1}{qq'}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_1(N) &= \int_{E_1} S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha \\ &= \sum_{q\leqslant Q}\ \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^3\left(\frac{a}{q}+z\right) e^{-2\pi i(\frac{a}{q}+z)N}\,dz. \end{aligned}$$

Для оценки интеграла по множеству E_2 заметим, что $Q < q \leqslant \tau$ при $\alpha \in E_2$, и воспользуемся оценкой теоремы 10 для $S(\alpha)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_2(N) &= \int_{E_2} S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha \leqslant \max_{\alpha\in E_2}|S(\alpha)| \int_{\alpha\in E_2} |S(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\ll NL^2\left(\sqrt{\frac{\tau}{N}+\frac{1}{Q}} + N^{-\frac{1}{6}}\right)\int_0^1 |S(\alpha)|^2\,d\alpha \\ &\ll N^2L^{-\frac{A}{2}+1} + N^2L^{-\frac{B}{2}+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$J(N) = J_1(N) + O\big(N^2 L^{-\frac{A}{2}+1} + N^2 L^{-\frac{B}{2}+1}\big).$$

Теперь найдем асимптотическую формулу для $S\big(\frac{a}{q}+z\big)$. Разбивая суммирование по простым на прогрессии по модулю q, находим

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q}+z\right) &= \sum_{\sqrt{N}<p\leqslant N} e^{2\pi i\frac{a}{q}p} e^{2\pi i z p} + O(\sqrt{N}) \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i\frac{al}{q}} T(l) + O(\sqrt{N}), \end{aligned}$$

где

$$T(l) = \sum_{\substack{p\equiv l \pmod q \\ \sqrt{N}<p\leqslant N}} e^{2\pi i z p} = \sum_{\sqrt{N}<n\leqslant N} \big(\pi(n;q,l) - \pi(n-1;q,l)\big) e^{2\pi i z n}.$$

Примем без доказательства так называемую *теорему Зигеля–Вальфиша* о распределении простых чисел в арифметической прогрессии: при $q \leqslant \ln^c x$, $(l,q)=1$ имеет место формула

$$\pi(x;q,l) = \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\equiv l \pmod q}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\big(x e^{-c_1\sqrt{\ln x}}\big).$$

Совершая с $T(l)$ преобразование Абеля и пользуясь теоремой Зигеля–Вальфиша, находим

$$\begin{aligned} T(l) &= \frac{1}{\varphi(q)} \int_{\sqrt{N}}^{N} \frac{du}{\ln u} \cdot e^{2\pi i z N} - \int_{\sqrt{N}}^{N} \left(\frac{1}{\varphi(q)} \int_{\sqrt{N}}^{x} \frac{du}{\ln u} \right) de^{2\pi i z x} \\ &\quad + O\left(N e^{-c_1\sqrt{L}}\right) + O\left(N^2 |z| e^{-c_1\sqrt{L}}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\sqrt{N}<n\leqslant N} \int_{n-1}^{n} \frac{du}{\ln u} \cdot e^{2\pi i z n} \\ &\quad + O\left(N e^{-c_1\sqrt{L}} + \frac{N^2}{\tau} e^{-c_1\sqrt{L}}\right). \end{aligned}$$

Здесь после отделения остаточного члена мы совершили обратное преобразование Абеля и учли, что $|z| \leqslant \frac{1}{q\tau}$. Далее, так как

$$\int_{n-1}^{n} \frac{du}{\ln u} = \frac{1}{\ln u} + O\left(\frac{1}{n\ln^2 u}\right),$$

а $\tau = NL^{-A}$, то

$$T(l) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n} + O\big(Ne^{-c_2\sqrt{L}}\big).$$

Подставляя это выражение в равенство для $S\big(\frac{a}{q}+z\big)$ и пользуясь результатом задачи 2 к § 1, получим

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n} + O\big(Ne^{-c_2\sqrt{L}}\big).$$

Возводя последнее неравенство в куб, найдем

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \left(\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\right)^3 + O\big(N^3e^{-c_2\sqrt{L}}\big),$$

откуда сразу получаем, что

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} S^3\left(\frac{a}{q}+z\right) e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}\,dz =$$
$$= \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} \int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left(\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\right)^3 e^{-2\pi izN}\,dz$$
$$+ O\left(\frac{N^2L^A}{q} e^{-c_2\sqrt{L}}\right).$$

Распространим интеграл в правой части на весь отрезок $\big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$. Обозначая

$$\varkappa(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\right)^3 e^{-2\pi izN}\,dz,$$

имеем

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \left(\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\right)^3 e^{-2\pi izN}\,dz =$$
$$= \varkappa(N) + O\left(\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} \left|\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\right|^3 dz\right).$$

Совершая преобразование Абеля и пользуясь результатом задачи 3 к § 1, находим при $0 < z \leqslant \frac{1}{2}$

$$\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n} \ll \frac{1}{\ln N}\Bigl|\sum_{2<n\leqslant N} e^{2\pi izn}\Bigr| + \int_2^N \Bigl|\sum_{2<n\leqslant u} e^{2\pi izn}\Bigr| \frac{du}{u\ln^2 u} \ll \frac{1}{z},$$

откуда сразу получаем, что

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}} \Bigl(\sum_{2<n\leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\Bigr)^3 e^{-2\pi izN}\,dz = \varkappa(N) + O(q^2\tau^2) = \varkappa(N) + O(N^2L^{2B-2A}).$$

Итак, имеем

$$J_1(N) = \varkappa(N)\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} + O(N^2L^{2B-2A}).$$

Здесь мы пользуемся оценкой $\varphi(q)$ из задачи 3 к § 1 прошлого семестра. Теперь распространим суммирование по q до бесконечности. Обозначая

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i\frac{aN}{q}},$$

получаем

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} = \sigma(N) + O\Bigl(\sum_{q>Q}\frac{1}{\varphi^2(q)}\Bigr) = \sigma(N) + O\Bigl(\int_Q^{+\infty}\frac{(\ln\ln u)^2}{u^2}\,du\Bigr).$$

Собирая вместе все полученные оценки, имеем окончательно

$$J(N) = \sigma(N)\varkappa(N) + O\bigl(\varkappa(N)L^{-B+1} + N^2L^{2B-2A} + N^2L^{-\frac{B}{2}+1} + N^2L^{-\frac{A}{2}+1}\bigr).$$

Вычислим $\varkappa(N)$. Имеем

$$\left|\sum_{2<n\leqslant N}\frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}-\sum_{2<n\leqslant N}\frac{e^{2\pi izn}}{\ln N}\right|\leqslant\sum_{2<n\leqslant N}\left(\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln N}\right)\leqslant\int_2^N\left(\frac{1}{\ln u}-\frac{1}{\ln N}\right)du\ll\frac{N}{\ln^2 N}.$$

Таким образом,

$$\left|\varkappa(N)-\int_{-\frac12}^{\frac12}\left(\sum_{2<n\leqslant N}\frac{e^{2\pi izn}}{\ln N}\right)^3e^{-2\pi izN}\,dz\right|\ll\frac{N}{\ln^2 N}\int_{-\frac12}^{\frac12}\left(\left|\sum_{2<n\leqslant N}\frac{e^{2\pi izn}}{\ln n}\right|^2+\left|\sum_{2<n\leqslant N}\frac{e^{2\pi izn}}{\ln N}\right|^2\right)dz.$$

Отсюда находим

$$\varkappa(N)=\frac{1}{\ln^3 N}\int_{-\frac12}^{\frac12}\left(\sum_{2<n\leqslant N}e^{2\pi izn}\right)^3e^{-2\pi izN}\,dz+O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right).$$

Интеграл в правой части последнего равенства есть не что иное, как число решений уравнения $n_1+n_2+n_3=N$ при $3\leqslant n_1,n_2,n_3\leqslant N$. Имеем

$$\int_{-\frac12}^{\frac12}\left(\sum_{2<n\leqslant N}e^{2\pi izn}\right)^3e^{-2\pi izN}\,dz=\sum_{n_3=3}^{N-6}(N-n_3-5)=\frac{N^2}{2}+O(N).$$

Отсюда

$$\varkappa(N)=\frac{N^2}{2\ln^3 N}+O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right).$$

Собирая вместе все полученные оценки и выбирая $A=12$ и $B=10$, получим окончательно

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2\ln^3 N}+O\left(\frac{N^2}{\ln^4 N}\right).$$

Осталось вычислить $\sigma(N)$. Докажем мультипликативность функции

$$T(q)=\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{aN}{q}}.$$

Пусть $(q_1, q_2) = 1$; имеем

$$\begin{aligned} T(q_1q_2) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q_1q_2)=1}}^{q_1q_2} e^{-2\pi i \frac{aN}{q_1q_2}} \\ &= \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i \frac{(a_1q_2+a_2q_1)N}{q_1q_2}} = T(q_1)T(q_2). \end{aligned}$$

Поскольку функции $\mu(q)$ и $\varphi(q)$ мультипликативны, мы имеем абсолютно сходящийся ряд мультипликативных функций. Согласно тождеству Эйлера (теорема 4 прошлого семестра), находим

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} T(q) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^3} T(p)\right).$$

В случае $p \mid N$ имеем $T(p) = p - 1$, а в случае $p \nmid N$ – $T(p) = -1$, поэтому

$$\sigma(N) = \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Таким образом, при N – четном $\sigma(N) = 0$, а при нечетном N

$$\sigma(N) > \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \geqslant \frac{2}{\zeta(2)} = \frac{12}{\pi^2} > 1.$$

Этим доказательство завершается.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 13

Чанга Марис Евгеньевич

Метод тригонометрических сумм

Сдано в набор 20.02.2009. Подписано в печать 20.04.2009.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 3. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/noc/ e-mail: pavlov@mi.ras.ru