АНОРМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА И АНАЛИЗА

А.В. Арутюнов

Тамбов – Колмогоровские чтения

7 октября 2013 года

Введение

На примере двух родственных проблем поясним, что такое анормальность. Начнем с теории экстремальных задач. Пусть X – векторное пространство. Рассмотрим задачу минимизации с ограничениями:

$$f_0(x) \to \min, \quad F(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $F : X \to Y = \mathbb{R}^k$ – заданное отображение, а минимум заданной функции $f_0 : X \to \mathbb{R}$ ищется на допустимом множестве

$$M = \{x \in X : F(x) = 0\}.$$

Для простоты предположим, что X – банахово пространство (можно даже считать, что $X = \mathbb{R}^n$), а f_0 и F дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, являющейся локальным решением задачи (1). Тогда в точке x_0 выполнен принцип Лагранжа (правило множителей Лагранжа). Для его формулировки введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \lambda^0 f_0(x) + \langle y^*, F(x) \rangle;$$

$$\lambda = (\lambda^0, y^*),\ \lambda^0 \in \mathbb{R}^1,\ y^* \in Y,$$

где $(k+1)$-мерный вектор $\lambda = (\lambda^0, y^*)$ и его компоненты называются множителями Лагранжа.

Введение

Пусть x_0 является точкой локального минимума задачи (1). Тогда существует такой множитель Лагранжа λ, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \ \lambda^0 \geq 0, \ |\lambda| = 1. \tag{2}$$

Принцип Лагранжа дает необходимые условия экстремума первого порядка и хорошо известен. Множество множителей Лагранжа, удовлетворяющих (2), обозначается через $\Lambda(x_0)$.

Введение

Рассмотрим два случая. Пусть, вначале, точка x_0 нормальна, т.е. $\operatorname{im} F'(x_0) = Y$. Итак, если точка минимума x_0 нормальна, то в силу (2) $\lambda^0 > 0$ и, следовательно, учитывая положительную однородность соотношений (2) по переменной λ, можно считать, что $\lambda^0 = 1$. При этом существует единственный множитель Лагранжа, имеющий вид $\lambda = (1, y^*)$. Кроме того, если точка минимума x_0 нормальна, то в ней выполняются классические необходимые условия второго порядка:

$$\exists\, \lambda \in \Lambda(x_0) : \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0 \ \ \forall\, h \in X : F'(x_0)h = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим второй случай: точка x_0 анормальна, т.е. $\operatorname{im} F'(x_0) \neq Y$. Тогда в ней принцип Лагранжа (2) выполняется при $\lambda^0 = 0$ и произвольном $y^* \neq 0$, принадлежащем ядру сопряженного оператора $\ker F'(x_0)^*$, которое является ненулевым в силу того, что $\operatorname{im} F'(x_0) \neq Y$. Таким образом в любой анормальной точке принцип Лагранжа автоматически выполняется независимо от минимизируемого функционала f_0 и является лишь перефразировкой определения анормальности. Поэтому принцип Лагранжа бесполезен при исследовании анормальной точки на экстремум. Что же касается классических необходимых условий второго порядка (3), то в анормальной точке минимума они могут нарушаться.

Введение

Вот простой двумерный пример этого:

$$X = \mathbb{R}^2, \ f_0(x) = -|x|^2 \to \min,$$

$$f_1(x) = x_1^2 - x_2^2 = 0, \ f_2(x) = x_1 x_2 = 0,$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. В этой задаче ограничениям удовлетворяет единственная точка $x_0 = 0$, естественно являющаяся точкой минимума. Однако, как легко видеть, в ней условия (3) не выполняются. Таким образом, в анормальной точке принцип Лагранжа неинформативен, а классические необходимые условия второго порядка применять нельзя, т.к. они могут нарушаться.

Итак возникает проблема: каковы содержательные необходимые условия минимума в задаче (1) без априорных предположений нормальности исследуемой точки?

Перейдем к близкой задаче. Пусть отображение $F : X \to Y$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x_0 \in X$ и $y_0 = F(x_0)$. Спрашивается, существует ли такая окрестность V точки y_0, что для всех $y \in V$ уравнение

$$F(x) = y \qquad (4)$$

имеет такое решение $x(y)$, что $x(y_0) = x_0$ и отображение $x(\cdot)$ непрерывно в точке y_0, или даже более того, непрерывно на всей окрестности V.

Если точка x_0 нормальна, то классическая теорема об обратной функции дает на этот вопрос положительный ответ, причем отображение $x(\cdot)$ можно выбрать непрерывно дифференцируемым. Если же точка x_0 анормальна, то это уже не так. Например скалярное уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 = y,$$

рассматриваемое в окрестности нуля, для $y < 0$ не имеет решений, а уравнение

$$x_1^2 - x_2^2 = y$$

имеет бесконечно много непрерывных решений, для которых $x(0) = 0$, но все они в нуле не дифференцируемы. Таким образом возникает проблема нахождения условий, более слабых, чем нормальность, которые гарантируют существование решения уравнения (4) с нужными свойствами.

Необходимые условия второго порядка

Рассмотрим экстремальную задачу с ограничениями типа равенств и неравенств

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le 0,\ i = \overline{1, l}, \quad f(x) = 0. \tag{5}$$

Для целых неотрицательных s ведем в рассмотрение множества (возможно некоторые из них пусты) $\Lambda_s(x_0)$, состоящие из тех множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(x_0)$, для которых существует такое (зависящее от λ) подпространство $\Pi \subseteq X$, что

$$\operatorname{codim} \Pi \le s; \quad \Pi \subseteq \ker F'(x_0);$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x]^2 \ge 0 \;\; \forall\, x \in \Pi, \quad f_0'(x_0) \in \Pi^{\perp}.$$

Здесь отображение $F = (f_1, \ldots, f_l, f)$ действует из X в $\mathbb{R}^m$ при $m = l + k$.

Введем в рассмотрение конус

$$\mathcal{K}(x_0) = \{h \in X : \langle f_i'(x_0), h\rangle \le 0 \ \forall i,\ f'(x_0)h = 0\},$$

называемый критическим.

Теорема 1 (необходимые условия второго порядка) *Пусть в задаче (5) точка x_0 является локальным минимумом. Тогда при $m = k + l$ множество $\Lambda_m = \Lambda_m(x_0)$ непусто и, более того,*

$$\max_{\lambda \in \Lambda_m} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \ge 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{K}(x_0). \tag{6}$$

Результаты этой теоремы были обобщены на задачу

$$f_0(x) \to \min, \qquad x \in C, \qquad F(x) \in D, \tag{7}$$

где $F : X \to Y = R^m$. Здесь C, D заданные замкнутые подмножества X, Y (но не обязательно выпуклые!). Эти результаты обобщены на другие типы задач, в том числе на широкий класс задач оптимального управления с концевыми, смешанными ограничениями, на задачи с импульсными управлениями, задачи с запаздывающим аргументом и т.д.

Теорема об обратной функции

Перейдем к теореме об обратной функции. Пусть снова дано отображение $F : X \to Y = \mathbb{R}^k$, и $F(x_0) = y_0$. Для всех y из окрестности точки y_0 будем рассматривать нелинейное уравнение

$$F(x) = y.$$

Спрашивается, когда это уравнение для всех y близких к y_0 имеет решение?

Если точка x_0 нормальна, то ответ дается классической теоремой об обратной функции. Приведем теорему об обратной функции справедливую без априорных предположений нормальности.

Теорема об обратной функции

Обозначим через $\mathcal{F}_2(x_0)$ конус, состоящий из таких $y \in Y$, $y \neq 0$, что $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)^* y = 0$ и в X существует подпространство

$$\Pi \subseteq \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0),$$

для которого

$$\operatorname{codim} \Pi \leq k; \ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle y, F(x_0)\rangle[\xi, \xi] \geq 0 \ \ \forall \xi \in \Pi.$$

Отметим, что конус $\mathcal{F}_2(x_0)$ может оказаться пустым. Он, например, заведомо пуст, если точка x_0 нормальна, т.к. в этом случае $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)^* y \neq 0 \ \forall y \neq 0$. Кроме того, после присоединения к этому конусу нуля он становится замкнутым, но вовсе не обязан стать выпуклым.

Определение 1. *Отображение* $F : X \to Y$ *называется 2-нормальным в точке* x_0*, если конус* $\operatorname{conv}\mathcal{F}_2(x_0)$ *является острым, т. е. не содержит ненулевых подпространств (случай* $\mathcal{F}_2(x_0) = \varnothing$ *не исключается, т.к. пустой конус острый по определению).*

Положим

$$Y_1 = \operatorname{im}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0);\;\; Y_2 = \left(\operatorname{im}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\right)^{\perp}.$$

Через $P_1 : Y \to Y_1$, $P_2 : Y \to Y_2$ обозначим операторы проектирования Y на подпространства Y_1 и Y_2 соответственно.

Определение 2. *Будем говорить, что отображение* $F : X \to Y$ *в точке* x_0 *удовлетворяет условию разрешимости, если существуют положительные константы* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, *что* $\forall\, y : |y - y_0| < \varkappa_1$

$$\exists\, x = x(y) : \ F(x(y)) = y;$$

$$\|x(y) - x_0\| \le \varkappa_2 \Big(|P_1(F(x_0) - y)| + |P_2(F(x_0) - y)|^{\frac{1}{2}} \Big).$$

Теорема 2 (теорема об обратной функции). *Предположим, что отображение F 2-нормально в точке x_0. Тогда для того, чтобы F в точке x_0 удовлетворяло условию разрешимости, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists\, h \in X \;:\; \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h = 0; \quad \left\langle y, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[h,h] \right\rangle < 0 \;\; \forall\, y \in \mathcal{F}_2(x_0).$$

Доказательство теоремы основано на необходимых условиях экстремума, приведенных выше.
Если точка x_0 нормальна, то приведенная теорема превращается в классическую теорему об обратной функции.

Теорема об обратной функции

Приведенный результат обобщен на теорему о неявной функции, теорему об обратной функции на конусе, на нелинейные системы, содержащие неравенства, и т.д.
Он применен к исследованию управляемости для вырожденных динамических систем.
С помощью полученных теорем об обратной и неявной функциях получены новые теоремы о существовании точки бифуркации для нелинейных систем, построены теория чувствительности для экстремальных задач без априорных предположений нормальности.

Литература

- Арутюнов А.В. Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения. Известия РАН, серия математическая. 1996. Т. 60, N 1, с. 37 - 62.
- Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. Москва: Изд-во "Факториал 1997. - 256 с.
- A.V. Arutyunov, Optimality conditions: Abnormal and Degenerate Problems. Mathematics and Its Application. Kluwer Academic Publisher, 2000.
- Арутюнов А.В. Необходимые условия экстремума и теорема об обратной функции без априорных предположений нормальности. Труды МИРАН, 2002, т. 236, с.33-44.

Литература

- Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математический анализ. 1989. – 27. – С.147-235.
- А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия минимума в анормальных задачах с геометрическими ограничениями. ЖВМиМФ, 2007, т.47, N 3, с. 364-375.
- А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия экстремума в анормальной задаче с ограничениями типа равенств. ЖВМиМФ, 2006, т.46, N 8, с.1363- 1368.
- A. Arutyunov, D.Karamzin, F. Pereira. Necessary Optimality Conditions for Problems with Equality and Inequality Constraints: The Abnormal Case . Journal of Optimization Theory and Appl. 2009, vol. 140, N 1, pp. 391-408.