# Положительность длинных случайных последовательностей

Владислав Высоцкий

*ПОМИ РАН,*
*Лаборатория им. Чебышева (СПбГУ),*
*Arizona State University*

9 октября 2013 г.

# 1. Задача

Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ - *центрированные* случ. величины, какова

$$p_n^{(\xi)} := \mathbb{P}\{\min_{1\le k\le n} \xi_k \ge 0\}?$$

Точные вычисления возможны лишь в исключительных случаях, большинство результатов асимптотические.
До недавних пор результатов было очень мало.

- $\xi_k$ - *н.о.р.*, тогда $p_n^{(\xi)} = \rho^n$, где $0 < \rho < 1$.

# 1. Задача

Если $\xi_1, \xi_2, \dots$ - *центрированные* случ. величины, какова

$$p_n^{(\xi)} := \mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le n} \xi_k \ge 0\Big\}?$$

Точные вычисления возможны лишь в исключительных случаях, большинство результатов асимптотические.
До недавних пор результатов было очень мало.

• $\xi_k$ - *н.о.р.*, тогда $p_n^{(\xi)} = \rho^n$, где $0 < \rho < 1$.
Обобщение: $\xi_k$ - *стационарные*.

• $\xi_k$ - *ассоциированы*, то $p_n^{(\xi)} = \rho^{n+o(1)}$, где $0 \le \rho \le 1$ по субаддитивности. Частный случай: положит. коррелированные гауссовские с.в. (Slepian '62)

• $\xi_k$ образуют *цепь Маркова*. Если есть квазистационарное распределение $\mu$ на $[0,\infty)$, то есть $\mathbb{P}_\mu(\xi_1 \ge y | \xi_1 \ge 0) = \mu[y,\infty)$ для любого $y \ge 0$, то тогда $p_n^{(\xi)} = \rho^n$, где $\rho = \mathbb{P}_\mu(\xi_1 \ge 0)$.

• $\xi_k$ является *MA-1*: $\xi_k = X_k - \alpha X_{k-1}$, где $X_k$ - н.о.р. Если распределение $X_k$ симметрично и непрерывно, то $p_n^{(\xi)} \sim c\rho^n$ при $\alpha \ne -1$ и $p_n^{(\xi)} = 1/(n+1)!$ при $\alpha = -1$ (Majumdar, Dhar '01)

Пусть теперь $\xi_k$ не является (асимптотически) стационарной. Обозначим $S_n$ - случайное блуждание.

**Теорема (Спарре-Андерсен, '49)**

*Если* $\mathbb{E}S_1 = 0, \mathbb{E}S_1^2 < \infty$, *то* $p_n^{(S)} \sim cn^{-1/2}$.

В этом докладе речь пойдет о положительности интегрированных и итерированных случайных блужданий.

Общая парадигма из физики: во многих ситуациях $p_n^{(S)} = n^{-\theta+o(1)}$, где $\theta > 0$ - показатель положительности (persistence exponent).

## Более общий вопрос: задача об одностороннем выходе

Если $U(t)$ - случайный процесс с $U(0) = 0$, как себя ведет

$$p_T^{(U)} := \mathbb{P}\Big\{\inf_{0 \le s \le T} U(s) \ge -1\Big\}?$$

Результаты известны для процессов Леви - т.е. процессов с однор. независ. приращениями (Рогозин '71), дробного броуновского движения (Молчан '99), интегрированных устойчивых процессов (Simon '07, '08), многократно интегрированных процессов Леви с экспоненциальными моментами (Aurzada, Dereich '12).

## Более общий вопрос: задача об одностороннем выходе

Если $U(t)$ - случайный процесс с $U(0) = 0$, как себя ведет

$$p_T^{(U)} := \mathbb{P}\Big\{\inf_{0 \le s \le T} U(s) \ge -1\Big\}?$$

Результаты известны для процессов Леви - т.е. процессов с однор. независ. приращениями (Рогозин '71), дробного броуновского движения (Молчан '99), интегрированных устойчивых процессов (Simon '07, '08), многократно интегрированных процессов Леви с экспоненциальными моментами (Aurzada, Dereich '12).

*Интерес к интегрир. процессам:* связь с ур-ем Бюргерса со случ. начальными данными (Синай '92, Bertoin '98, Simon '07) и случ. полиномами без вещественных нулей (Dembo at al. '02).

Заметим, что если процесс самоподобен с индексом $H$, то

$$\mathbb{P}\Big\{\inf_{0 \le s \le T} U(s) \ge -1\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\inf_{0 \le s \le 1} U(s) \ge -T^{-H}\Big\},$$

- вероятность *односторонних малых уклонений* (Li, Shao '04).

## 2. Интегрированные блуждания

$S_n$ - *центрированное* случ. блуждание, $A_n := \sum_{k=1}^n S_k$ - интегрир. блуждание.
*Мотивация:* системы слипающихся частиц (V. '08), уравнение Бюргерса (Синай '92), случайные полимеры с лапласовским взаимодействием (Caravenna, Deuschel '08).

# 2. Интегрированные блуждания

$S_n$ - *центрированное* случ. блуждание, $A_n := \sum_{k=1}^{n} S_k$ - интегрир. блуждание.

*Мотивация:* системы слипающихся частиц (V. '08), уравнение Бюргерса (Синай '92), случайные полимеры с лапласовским взаимодействием (Caravenna, Deuschel '08).

**Предварительные результаты**

1. Синай ('92): $p_n^{(A)} \asymp n^{-1/4}$, где $S_n$ - простое блуждание.
2. Isozaki, Watanabe ('94) [McKean('63), Синай ('92)]: $p_T^{(U)} \sim cT^{-1/4}$, где $U(t) := \int_0^t W(s)ds$, а $W$ - броуновское движение.

Поэтому было естественно предположить, что $p_n^{(A)} \asymp n^{-1/4}$ для любого $S_n$ с $\mathbb{E}S_1 = 0, \mathbb{E}S_1^2 < \infty$.

## Методы и результаты

1. Сильная аппроксимация (Aurzada, Dereich '12):

Если $\mathbb{E}e^{a|S_1|} < \infty$, то $n^{-1/4} \log^{-4} n \preceq p_n^{(A)} \preceq n^{-1/4} \log^{4} n$.

## Методы и результаты

1. Сильная аппроксимация (Aurzada, Dereich '12):
Если $\mathbb{E}e^{a|S_1|} < \infty$, то $n^{-1/4}\log^{-4} n \preceq p_n^{(A)} \preceq n^{-1/4}\log^4 n$.
2. Теория потенциала и сильн. аппрокс. (Denisov, Wachtel '13):
Если $\mathbb{E}S_1^{2+\delta} < \infty$, то $p_n^{(A)} \sim cn^{-1/4}$.

## Методы и результаты

1. Сильная аппроксимация (Aurzada, Dereich '12):
Если $\mathbb{E}e^{a|S_1|} < \infty$, то $n^{-1/4}\log^{-4} n \preceq p_n^{(A)} \preceq n^{-1/4}\log^4 n$.
2. Теория потенциала и сильн. аппрокс. (Denisov, Wachtel '13):
Если $\mathbb{E}S_1^{2+\delta} < \infty$, то $p_n^{(A)} \sim cn^{-1/4}$.
3. Разложение в точке максимума (Dembo, Ding, Gao '12): Если $\mathbb{E}S_1^2 < \infty$, то $p_n^{(A)} \asymp n^{-1/4}$. Если $S_1$ в области нормального притяжения $\alpha$-устойчивого закона с $1 < \alpha < 2$ и $X_1^+$ ограничено, то $p_n^{(A)} \asymp n^{\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}}$.

## Методы и результаты

1. Сильная аппроксимация (Aurzada, Dereich '12):
Если $\mathbb{E}e^{a|S_1|} < \infty$, то $n^{-1/4}\log^{-4} n \preceq p_n^{(A)} \preceq n^{-1/4}\log^4 n$.
2. Теория потенциала и сильн. аппрокс. (Denisov, Wachtel '13):
Если $\mathbb{E}S_1^{2+\delta} < \infty$, то $p_n^{(A)} \sim cn^{-1/4}$.
3. Разложение в точке максимума (Dembo, Ding, Gao '12): Если $\mathbb{E}S_1^2 < \infty$, то $p_n^{(A)} \asymp n^{-1/4}$. Если $S_1$ в области нормального притяжения $\alpha$-устойчивого закона с $1 < \alpha < 2$ и $X_1^+$ ограничено, то $p_n^{(A)} \asymp n^{\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}}$.
4. Техника моментов восстановления (Синай '92, В. '10, '12):

**Теорема**: Пусть $S_1$ в области норм. притяжения $\alpha$-уст. закона с $1 < \alpha \leq 2$, а $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(\mathbb{P}\{S_n > 0\} - \frac{1}{\alpha})$ сходится. Если $S_n$ экспоненцильно справа или непрерывно справа, то
$p_n^{(A)} \sim cn^{\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}}$.

*Экспоненциальность справа:* $\mathbb{P}(S_1 > t) = ce^{-at}$ при $t > 0$.
*Непрерывность справа:* $\mathbb{P}\big(S_1 \in \{\dots, -1, 0, 1\}\big) = 1$.

# 3. Итерированные блуждания

Пусть $X(t), S(t)$ - центрированные *независимые* процессы Леви. Задача положительности итерированного блуждания $X(|S(n)|)$ рассмотрена у Baumgarten ('11+).
*Мотивация:* двусторонние малые уклонения итерированных процессов $X(|S(t)|)$ (Aurzada, Lifshits '09).

$$\mathbb{P}\Big\{\inf_{0\le t\le T} X(|S(t)|) \ge -1\Big\} \ge \mathbb{P}\Big\{\inf_{0\le s\le \sup\limits_{0\le t\le T}|S(t)|} X(s) \ge -1\Big\}.$$

Спарре-Андерсен и $\mathbb{E}X^2(1), \mathbb{E}S^2(1) < \infty$ влекут ПЧ $\asymp T^{-1/4}$.

# 3. Итерированные блуждания

Пусть $X(t), S(t)$ - центрированные *независимые* процессы Леви. Задача положительности итерированного блуждания $X(|S(n)|)$ рассмотрена у Baumgarten ('11+).
*Мотивация:* двусторонние малые уклонения итерированных процессов $X(|S(t)|)$ (Aurzada, Lifshits '09).

$$\mathbb{P}\Big\{\inf_{0\le t\le T} X(|S(t)|) \ge -1\Big\} \ge \mathbb{P}\Big\{\inf_{0\le s\le \sup\limits_{0\le t\le T}|S(t)|} X(s) \ge -1\Big\}.$$

Спарре-Андерсен и $\mathbb{E}X^2(1), \mathbb{E}S^2(1) < \infty$ влекут ПЧ $\asymp T^{-1/4}$.
Но $\neq$ если у траекторий $S(t)$ есть скачки!

$$\mathbb{P}\Big\{\inf_{0\le t\le T} X(|S(t)|) \ge -1\Big\} \le \mathbb{P}\Big\{\min_{0\le k\le T} X(|S(k)|) \ge -1\Big\}.$$

$$p_n^{iter} := \mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le n} X(|S(k)|) \ge 0\Big\}$$

**Теорема (В. '12+)**

*Если* $\mathbb{E}X(1) = \mathbb{E}S_1 = 0$ *и* $\mathbb{E}X^2(1), \mathbb{E}S_1^2 < \infty$, *то* $p_n^{iter} \asymp n^{-1/4}$.

$\mathcal{T}_k$ - $k$-ый лестничный момент для $S_n$ (момент $k$-го максимума)
$\mathcal{H}_k = S_{\mathcal{T}_k}$ - значение $k$-го максимума
$\nu(n)$ - число лестничных высот на $[1, n]$.

### Теорема (В. '12+)

*Если* $\mathbb{E}X(1) = \mathbb{E}S_1 = 0$ *и* $\mathbb{E}X^2(1), \mathbb{E}S_1^2 < \infty$, *то* $p_n^{iter} \asymp n^{-1/4}$.

$\mathcal{T}_k$ - $k$-ый лестничный момент для $S_n$ (момент $k$-го максимума)
$\mathcal{H}_k = S_{\mathcal{T}_k}$ - значение $k$-го максимума
$\nu(n)$ - число лестничных высот на $[1, n]$.
Тогда $\mathcal{Z}_k := X(\mathcal{H}_k)$ - случ. блуждание с $\mathbb{E}\mathcal{Z}_k = 0, \mathbb{E}\mathcal{Z}_k^2 < \infty$.

$$\mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le n} X(|S_k|) \ge 0\Big\} \quad \le \quad \mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le \nu(n)} \mathcal{Z}_k \ge 0\Big\}$$

$$\text{“}\sim\text{”} \quad \mathbb{E}\frac{c}{\nu(n)^{1/2}} = cn^{-1/4}\mathbb{E}\Big(\frac{\nu(n)}{n^{1/2}}\Big)^{-1/2}$$

## Теорема (В. '12+)

*Если* $\mathbb{E}X(1) = \mathbb{E}S_1 = 0$ *и* $\mathbb{E}X^2(1), \mathbb{E}S_1^2 < \infty$, *то* $p_n^{iter} \asymp n^{-1/4}$.

$\mathcal{T}_k$ - $k$-ый лестничный момент для $S_n$ (момент $k$-го максимума)
$\mathcal{H}_k = S_{\mathcal{T}_k}$ - значение $k$-го максимума
$\nu(n)$ - число лестничных высот на $[1, n]$.
Тогда $\mathcal{Z}_k := X(\mathcal{H}_k)$ - случ. блуждание с $\mathbb{E}\mathcal{Z}_k = 0, \mathbb{E}\mathcal{Z}_k^2 < \infty$.

$$\mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le n} X(|S_k|) \ge 0\Big\} \quad \le \quad \mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le \nu(n)} \mathcal{Z}_k \ge 0\Big\}$$

$$\text{“}\sim\text{”} \quad \mathbb{E}\frac{c}{\nu(n)^{1/2}} = cn^{-1/4}\mathbb{E}\Big(\frac{\nu(n)}{n^{1/2}}\Big)^{-1/2}$$

## Подход к доказательству

Положим $\zeta := \min\{k \ge 1 : \mathcal{Z}_k < 0\}$, тогда

$$\mathbb{P}\Big\{\min_{1\le k\le \nu(n)} \mathcal{Z}_k \ge 0\Big\} = \mathbb{P}\{\mathcal{T}_\zeta > n\}.$$

$(\mathcal{T}_k, \mathcal{Z}_k)$ - блуждание в $\mathbb{R}^2$. Основной инструмент - двумерная т-ма Спарре-Андерсена (Синай '92), получающаяся из одномерной добавлением второй координаты.