Tomographie et analyse complexe
Roman Novikov

1. Tomographie à rayon X et transformation de Radon classique. Résultats classiques.

Exposé 1.

Considérons l'équation de transport

$$\theta\nabla_x\psi + a(x)\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{1}$$

θ - un paramètre spectral et, au début, on peut supposer que

$$a \ \text{ est une fonction lisse réelle à support compact.} \tag{2}$$

C'est une équation de base de la tomographie à rayon X.

Sens physique de cette équation:

On considère la propagation des rayons X dans la direction du vecteur $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ dans un milieu avec le coefficient d'atténuation $a(x)$ des ces rayons dans le point $x \in \mathbb{R}^d$. Supposons que l'intensité de ces rayons est de la form $I(x, t, \theta) = \psi(x)\delta(x\theta - ct)$, où c - vitesse de lumière, t - temps. Par définition du coefficient d'atténuation

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi(x+\varepsilon\theta) - \psi(x)}{\varepsilon} = -a(x)\psi(x). \tag{3}$$

Ce signifie que l'équation (1) est valable.

Données spectrales pour l'équation (1):

Pour chaque $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ il existe une solution unique bornée $\psi^+(x,\theta)$ de l'équation (1) telle que

$$\lim_{s\to -\infty} \psi^+(x+s\theta, \theta) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

La fonction S définie par la formule

$$S(x,\theta) = \lim_{s\to +\infty} \psi^+(x+s\theta,\theta), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{5}$$

est considérée comme les données spectrales pour l'èquation (1).

Exercice 1.

Démontrer les formules suivantes:

$$S(x+\tau\theta,\theta) = S(x,\theta), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{6a}$$
$$S(x,\theta) = S(\pi_\theta x,\theta), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{6b}$$

où

$$\pi_\theta \ \text{ est le projecteur orthogonal sur } \ X_\theta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x\theta = 0\}. \tag{7}$$

En vue de (6)-(7) c'est très naturel de considerer $S(x,\theta)$ sur

$$T\mathbb{S}^{d-1} = \{(x,\theta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1} \mid x\theta = 0\}, \tag{8}$$

parce que $S\big|_{T\mathbb{S}^{d-1}}$ détermine uniquement S sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$. De plus, nous interprétons $T\mathbb{S}^{d-1}$ comme l'ensemble de tous les rayons dans $\mathbb{R}^d$. Comme un rayon l nous comprenons une droite avec une orientation fixée. Si $l = (x,\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}$, alors $l = \{y \in \mathbb{R}^d \big|\ y = s\theta + x,\ s \in \mathbb{R}\}$ (modulo orientation) et θ donne l'orientation.

Problème direct et problème inverse pour l'équation (1):

Problème direct: trouver ψ^+ et S à partir de a

$$a \to \psi^+ \to S.$$

Problème inverse: reconstruire a à partir de S

$$S \to a.$$

Interpretation physique du problème inverse:
reconstitution la structure d'un objet à l'aide de radiographie.

Résolution du problème direct:

$$\psi^+(x,\theta) = \exp[-Da(x,-\theta)], \tag{9}$$

$$Da(x,\theta) = \int_0^{+\infty} a(x+s\theta)ds, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{10}$$

$$S(x,\theta) = \exp[-Pa(x,\theta)], \quad Pa(x,\theta) = \int_{\mathbb{R}} a(x+s\theta)ds, \quad (x,\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}. \tag{11}$$

Démonstration.
On cherche ψ^+ comme

$$\psi^+(x,\theta) = \exp[\varphi^+(x,\theta)], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{12}$$

où

$$\begin{aligned} &\theta\nabla_x\varphi^+ + a(x) = 0, \\ &\lim_{s\to-\infty} \varphi^+(x+s\theta,\theta) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

On peut voir que

$$(13) \Rightarrow \varphi^+ = -Da(x,-\theta), \tag{14}$$

$$(12),(13) \Rightarrow (1),(4). \tag{15}$$

En utilisant (12), (14), (15) on obtient (9). En utilisant (9), (10), (5) on obtient (11).

Définition.
P définie par la formule

$$Pf(x,\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+s\theta)ds, \quad (x,\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}, \tag{16}$$

est dite la transformation de rayon X de f (où nous interprétons $T\mathbb{S}^{d-1}$ comme l'ensemble de tous les rayons dans $\mathbb{R}^d$).

On peut voir que $Pf(l)$ ne dépend pas de l'orientation de $l \in T\mathbb{S}^d$. Alors, c'est très naturel de considérer Pf sur $M_{d,1}$ (l'ensemble de toutes les droites (non-orientées) dans $\mathbb{R}^d$).

De plus, la transformation P, oú Pf est considérée sur $M_{d,1}$, est dite la transformation de Radon de f le long des droites.

Exposé 2.

Problème inverse:

En vue de (1.11) pour resoudre le problème inverse pour l'équation (1.1) il faut donner des méthodes d'inversion pour la transformation P de (1.16).

On peut supposer au début que

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}). \tag{1}$$

Nous alons utiliser les notations suivantes

$$P_\theta f(x) = Pf(x, \theta), \quad x \in X_\theta, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{2}$$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

$$(P_\theta f)\hat{}\,(\xi) = (2\pi)^{-(d-1)/2} \int\limits_{X_\theta} e^{i\xi x} P_\theta f(x) dx, \quad \xi \in X_\theta, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{4}$$

Proposition 1.

On a la formule suivante

$$(P_\theta f)\hat{}\,(\xi) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in X_\theta, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{5}$$

Démonstration. On a

$$\int\limits_{X_\theta} e^{i\xi x} P_\theta f(x) dx = \int\limits_{X_\theta} e^{i\xi x} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x + s\theta) ds dx \overset{\xi\theta = 0}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi y} f(y) dy. \tag{6}$$

Les formulles (3), (4), (6) impliquent (5).

Théorème 1 (J.Radon 1917). En dimension $d = 2$ on a la formule suivante (de l'inversion de la transformation P):

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \theta^\perp \nabla_x \tilde{q}_\theta(x\theta^\perp) d\theta, \tag{7a}$$

$$\tilde{q}_\theta(s) = (Hq_\theta)(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} p.v. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{q_\theta(t)}{s - t} dt, \tag{7b}$$

$$q_\theta(s) = Pf(s\theta^\perp, \theta), \tag{7c}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, $s \in \mathbb{R}$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$ pour $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$, $d\theta$ est la mesure standard sur $\mathbb{S}^1$.

Notons que $T\mathbb{S}^{d-1} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ pour $d = 2$.

Démonstration du Théorème 1. La formule de l'inversion de la transformation de Fourier peut être écrite dans la forme pour $d = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-ir\theta^\perp x} \hat{f}(r\theta^\perp) r dr d\theta. \tag{8}$$

En utilisant le changement de variables $s \to -s$, $\theta \to -\theta$, la formule (8) peut être réécrite dans la form

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ir\theta^\perp x} \hat{f}(r\theta^\perp)(-r) dr d\theta. \tag{9}$$

En additionnant les formules (8) et (9) on obtient

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ir\theta^\perp x} \hat{f}(r\theta^\perp)(sgn\, r) r dr d\theta. \tag{10}$$

Les formules (5), (7c) impliquent que

$$(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{irs} q_\theta(s) ds = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(r\theta^\perp). \tag{11}$$

Des formules (10), (11) il résulte que

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ir(s-\theta^\perp x)} q_\theta(s) ds (sgn\, r) r dr d\theta = \\ \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \theta^\perp \nabla_x \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ir(s-\theta^\perp x)} q_\theta(s) ds (-i\ sgn\, r) dr d\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

En utilisant la formule

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{irs}(-i\ sgn\, r) dr = \frac{1}{s+i0} + \frac{1}{s-i0}, \tag{13}$$

nous transformons (12) à la forme

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \theta^\perp \nabla_x \left(p.v. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{q_\theta(s)}{x\theta^\perp - s} ds \right) d\theta. \tag{14}$$

Théorème 1 est démontré.

En dimension $d = 2$ les formules (7) ou même (5) donnent une méthode de reconstruir f sur $\mathbb{R}^2$ par la transformée Pf sur $M_{2,1}$. De plus, en dimension $d \geq 3$ pour reconstruir f sur $\mathbb{R}^d$ par la transformée Pf sur $M_{d,1}$ on a la méthode suivante basée sur les méthodes de reconstitution en dimension $d = 2$. Pour reconstruir f dans un point $x' \in \mathbb{R}^d$ nous considérons dans $\mathbb{R}^2$ un plan bidimensionnel Y qui contient x'. Nous considérons dans $M_{d,1}$ le sous-ensemble $M_{2,1}(Y)$ qui est l'ensemble de toutes les droites dans Y. Nous considérons Pf sur $M_{2,1}(Y)$ et reconstruisons $f(x')$ par $Pf\big|_{M_{2,1}(Y)}$ en utilisant les méthodes de reconstitution en dimension $d = 2$.

Remarque 1. Formules (5), (7) restent valables sous des conditions beaucoup plus faibles que (1). Par example, ils restent valables sous les conditions que (en dimension $d = 2$)

$$\begin{aligned} &f \in C^n(\mathbb{R}^2), \\ &f = O(|x|^{-\sigma}), \quad |x| \to \infty, \end{aligned} \tag{15}$$

où $n = 2$, $\sigma > 2$ (et même pour $n = 0$, $\sigma > 1$).

Exposé 3.
Soit D un compact convexe dans $\mathbb{R}^2$. Soit

$$\Omega(D) = \{l \in T\mathbb{S}^1 \mid l \cap D = \emptyset\}. \tag{1}$$

Question: est-ce que $Pf\big|_{\Omega(D)}$ détermine uniquement $f\big|_{\mathbb{R}^2\backslash D}$?
En supposant que $0 \in D$, considérons

$$f(x) = (x_1 + ix_2)^{-n}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad n = 2, 3, 4... \tag{2}$$

On a

$$Pf(s\theta^\perp, \theta) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t\theta + s\theta^\perp)dt = \int\limits_{l} z^{-n}(\theta_1 + i\theta_2)^{-1}dz, \tag{3}$$

où $s \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$ pour $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$,

$$l = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (t\theta_1 + s\theta_1^\perp) + i(t\theta_2 + s\theta_2^\perp), \quad t \in \mathbb{R}\} \ \text{ (et orientee par } \theta) \ \text{ et } \ s \neq 0. \tag{4}$$

En passant par l'analyse complexe on a

$$\int\limits_{l} z^{-n}(\theta_1 + i\theta_2)^{-1}dz = (\theta_1 + i\theta_2)^{-1}\int\limits_{l} z^{-n}dz = 0. \tag{5}$$

Les formules (2), (3), (5) impliquent que

$$Pf\big|_{\Omega(D)} \equiv 0, \quad P\ Re\, f\big|_{\Omega(D)} \equiv 0, \quad P\ Im\, f\big|_{\Omega(D)} \equiv 0. \tag{6}$$

La réponse sur la quéstion susmentionnée est donc négative en général (voir Section II. 3 of [Na]).

Théorème 1 A. (Cormack 1963, 1964).
Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, D compact convexe dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $Pf\big|_{\Omega(D)}$ détermine uniquement f sur $\mathbb{R}^2\backslash D$.

Démonstration. La propriété que D est un compact convexe implique que pour chaque $x \notin D$ il existe un disque fermé B tel que $D \subseteq B$ mais $x \notin B$. Par conséquence, pour démontrer que $Pf\big|_{\Omega(D)}$ détermine $f(x)$ pour $x \notin D$, on se ramène donc au cas

$$D = B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \rho\}. \tag{7}$$

Considérons les séries de Fourier

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_l(r)e^{il\varphi}, \quad x = r(\cos\varphi, \sin\varphi), \tag{8}$$

$$Pf(s\theta^\perp, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} q_l(s)e^{il(\varphi+\pi/2)}, \quad \theta = (\cos\varphi, \sin\varphi). \tag{9}$$

Au cas (7) le Théorème A est un corollaire du Théorème B.

Théorème 1 B. (Cormack 1963, 1964).
On a

$$q_l(s) = 2\int\limits_s^{+\infty} T_{|l|}(s/r)\big(1-\frac{s^2}{r^2}\big)^{-1/2} f_l(r)dr, \quad s>0, \tag{10}$$

$$f_l(r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty} (s^2-r^2)^{-1/2} T_{|l|}(s/r) q_l'(s)ds, \quad r>0, \tag{11}$$

où T_m- polynômes de Tchebyshev,

$$T_0(x)=1, \;\; T_1(x)=x, \;\; T_{l+1}(x)+T_{l-1}(x)=2xT_l(x), \;\; l=1,2,... \tag{12}$$

De plus

$$T_l(x) = \cos(l \;\arccos x), \quad |x|\le 1, \tag{12a}$$
$$T_l(x) = cosh(l \; arccosh\, x), \quad |x|\ge 1. \tag{12b}$$

Remarque 1. La formule (11) "impose" la décroissance rapide de $q_l'(s)$ pour grand l. D'où f dans la classe de Schwartz, en général.

Pour obtenir (10) on calcule (9) pour f présentée par (8).

Pour obtenir (11) on considère (10) comme une équation intégrale (éq. d'Abel généralisée) pour f_l.

De plus, il suffit de démontrer (10), (11) pour

$$f(x) = f_l(r)e^{il\varphi}, \quad l\in\mathbb{Z}. \tag{13}$$

Dans cet exposé on va donner cette démonstration pour $l=0$. On a

$$\begin{gathered} Pf(s\theta^\perp,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0((t^2+s^2)^{1/2})dt = 2\int\limits_0^{+\infty} f_0((t^2+s^2)^{1/2})dt = \\ 2\int\limits_s^{+\infty}(r^2-s^2)^{-1/2} r f_0(r)dr = 2\int\limits_s^{+\infty}\big(1-\frac{s^2}{r^2}\big)^{-1/2} f_0(r)dr, \quad s>0. \end{gathered} \tag{14}$$

Alors, (14) $\Rightarrow$ (10) pour $f(x)=f_0(r)$. En considérant (10) pour $l=0$ comme une équation pour f_0, on a

$$\begin{gathered} \int\limits_r^{+\infty} \frac{sg_0(s)}{(s^2-r^2)^{1/2}}ds = 2\int\limits_r^{+\infty}\int\limits_s^{+\infty} \frac{s}{(s^2-r^2)^{1/2}}\frac{tf_0(t)}{(t^2-s^2)^{1/2}}dtds = \\ 2\int\limits_r^{+\infty}\Big(\int\limits_r^{t}\frac{sds}{((s^2-r^2)(t^2-s^2))^{1/2}}\Big)tf_0(t)dt = \pi\int\limits_r^{+\infty} tf_0(t)dt, \end{gathered} \tag{15}$$

où on utilise que

$$\int\limits_r^t \frac{sds}{((s^2-r^2)(t^2-s^2))^{1/2}} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}(1-(s')^2)^{-1/2}ds' = \frac{\pi}{2}, \quad s' = \frac{r^2+t^2-2s^2}{r^2-t^2}. \tag{16}$$

A partir de (15) on obtient

$$f_0(r) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^{+\infty}\frac{sg_0(s)ds}{(s^2-r^2)^{1/2}} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_r^{+\infty}\frac{g_0'(s)ds}{(s^2-r^2)^{1/2}}. \tag{17}$$

Ca nous donne (11) pour $l=0$.

Pour la démonstration des formules (10), (11) pour l général voir par exemple Section II.2 de [F.Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography, Wiley, New York (1986)].

Théorème 2.
Soit D un compact convexe dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Soit

$$\Omega(D) = \{l \in T\mathbb{S}^{d-1} \mid l \cap D = \emptyset\}.$$

Soit

$$f \in C^n(\mathbb{R}^d \backslash D, \mathbb{R}), \quad f(x) = O(|x|^{-\sigma}), \quad |x| \to \infty,$$

où $n=2$, $\sigma > 2$ (où même $n=0$, $\sigma > 1$). Alors, $Pf\big|_{\Omega(D)}$ détermine uniquement $f\big|_{\mathbb{R}^d \backslash D}$.

Exercice. Démontrer ce théorème en utilisant les résultats de l'exposé 2 (et, particulièrement, Remarque 1 de l'exposé 2).

Exposé 4.

On considère

$$P: \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathcal{S}(T\mathbb{S}^1, \mathbb{R}).$$

On a déjà montré que $Ker\, P = 0$. Dans cet exposé nous allons étudier $Im\, P$.

Théorème 1. (Gel'fand, Graev 1960, Helgason 1965).

(A) Si $q(s,\theta) = Pf(s\theta^\perp, \theta)$, où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ alors

$$q \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}), \tag{1}$$

$$q(-s, -\theta) = q(s, \theta), \tag{2}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} s^m q(s,\theta) ds = p_m(\theta) \ \text{ polynome homogene de } \ \theta \ \text{ de degre } \ m, \quad m \in \mathbb{N} \cup 0, \tag{3}$$

où $s \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$ pour $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$.

(B) Si q possède les propriétés (1), (2), (3), alors il existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $q = Pf$.

Preuve de la propriété (3):

$$\int\limits_{\mathbb{R}} s^m q(s,\theta) ds = \int\limits_{\mathbb{R}^2} s^m f(s\theta^\perp + t\theta) dt \ ds = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\theta^\perp x)^m f(x) dx. \tag{4}$$

Preuve de (B):

Soit

$$\hat{f}(\xi^\perp) = (2\pi)^{-1/2} \hat{q}(|\xi|, \xi/|\xi|), \tag{5}$$

où $\xi^\perp = (-\xi_2, \xi_1)$ pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\hat{q}(\sigma, \theta) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s} q(s,\theta) ds, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \ \theta \in \mathbb{S}^1. \tag{6}$$

Les formules (2), (5), (6) impliquent que

$$\overline{\hat{f}(\xi^\perp)} = \hat{f}(-\xi^\perp), \tag{7}$$

$$\hat{f}(\sigma\theta^\perp) = (2\pi)^{-1/2} \hat{q}(\sigma, \theta), \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \theta \in \mathbb{S}^1 \tag{8}$$

(où pour $\sigma \geq 0$ (8) coincide avec (5)).

Il suffit de démontrer que

$$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}). \tag{9}$$

Parce que:

$$\begin{aligned} &(7), (9) \Rightarrow f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ &f(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\hat{f}(\sigma\theta^{\perp}) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s} Pf(s\theta^{\perp},\theta)ds,\ \sigma\in\mathbb{R},\ \theta\in\mathbb{S}^1, \tag{11}$$

(Proposition 1 de l'exposé 2),

$$(6),(8),(11) \Rightarrow q(s,\theta) = Pf(s\theta^{\perp},\theta). \tag{12}$$

Preuve de (9):
Pour $\hat{f}$ définie par (5), (6), on a

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{is\sigma} q(s,-\theta^{\perp})ds, \quad \sigma = |\xi|,\ \theta = \xi/|\xi|. \tag{13}$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{\sin\varphi}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial}{\partial\xi_2} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\cos\varphi}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{14}$$

où σ, φ - coordonnées polaires:

$$\xi_1 = \sigma\cos\varphi,\quad \xi_2 = \sigma\sin\varphi. \tag{15}$$

$$(1),(13),(14) \Rightarrow \hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{B}_{\varepsilon},\mathbb{C})\ \forall\varepsilon>0, \tag{16}$$

$$\mathcal{B}_{\varepsilon} = \{x\in\mathbb{R}^2:\ \ |x|\le\varepsilon\},\quad \varepsilon>0. \tag{17}$$

Il reste de démontrer que

$$\hat{f}\in C^{\infty}(\mathcal{B}_{\delta},\mathbb{C})\ \forall\delta>0 \tag{18}$$

(ou par les autres mots que $\hat{f}(\xi)$ est infinement lisse dans chaque voisinage de 0).

Pour obtenir (18) les propriétés (3) sont nécessaires. Si, par exemple, (3), $m=0$, n'est pas valable alors $\hat{f}$ n'est pas même continue en 0, parce que

$$\lim_{\sigma\to0}\hat{f}(\sigma\theta) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}} q(s,-\theta^{\perp})ds \tag{19}$$

dépend de θ.

Pour la démonstration que (1), (3), (13) impliquent (18) voir, par exemple, Section II.4 de [Na] parce que cette démonstration est assez technique.

Considérons maintenant

$$P:\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{S}(T\mathbb{S}^{d-1}),\quad d\ge3. \tag{20}$$

Ainsi que pour $d=2$, on a déjà montré que $Ker\,P=0$ et nous allons étudier $Im\,P$. On peut voir que

$$dim\,T\mathbb{S}^{d-1} = 2d-2 > dim\,\mathbb{R}^d \ \text{ pour }\ d\ge3 \tag{21a}$$

tandis que

$$dim\, T\mathbb{S}^{d-1} = dim\, \mathbb{R}^d \quad \text{pour} \quad d = 2. \tag{21b}$$

C'est pourquoi le problème de la description d'image $Im\, P$ est essentiellement différente pour $d \geq 3$ d'une part et pour $d = 2$ d'autre part.

En effet $P(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ est un sous-espace des fonctions de d variables dans $\mathcal{S}(T\mathbb{S}^{d-1})$, $d \geq 3$.

Considérons le problème pour $d = 3$. Considérons

$$\begin{aligned} &M_{3,1}\backslash V_j, \\ &M_{3,1} - \;\; \text{ensemble de toutes les droites non} - \text{orientees dans } \; \mathbb{R}^3, \\ &V_j = \{l = (x, \pm\theta) \in M_{3,1} \mid \theta_j = 0\},\; j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{22}$$

Sur $M_{3,1}\backslash V_3$, par exemple, on peut utiliser les coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$M_{3,1}\backslash V_3 \ni \;\; l = \text{"}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\text{"} = \{(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}. \tag{23}$$

On peut voir que

$$Pf(l) = g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \times \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \tag{24}$$

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3) dx_3. \tag{25}$$

Théorème 2 (A) Si $q \in P(\mathcal{S}(\mathbb{R}^3))$, alors $q \in \mathcal{S}(M_{3,1})$ et

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\beta_1}\right) g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 0, \tag{26}$$

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \frac{q(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}} \tag{27}$$

sur $M_{3,1}\backslash V_3$ (et l'équation analogue sur $M_{3,1}\backslash V_j$, $j = 1, 2$).

(B) Si $q \in \mathcal{S}(M_{3,1})$ et g définie par (27) satisfait (26) (ou bien l'équation analogue sur $M_{3,1}\backslash V_j$, $j = 1, 2$) alors $q \in P(\mathcal{S}(\mathbb{R}^3))$.

Théorème démontré par F.John 1938, Duke Math.J. 1938 vol.4 pp.300-322).

Preuve A: On a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\beta_1}\right) g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \overset{(24),(25),(27)}{=} \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\beta_1}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3) dx_3 = \\ &\int\limits_{\mathbb{R}} [x_3 f''_{x_1 x_2}(\cdots) - x_3 f''_{x_2 x_1}(\cdots)] dx_3 = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Pour preuve B cf John ou Gel'fand, Gindikin, Graev J.Soviet Math. 18 (1980) pp 39-167.

Exposé 5.

Quelques résultats d'analyse complexe.
Notations:

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right). \tag{2}$$

Théorème 1A (Green).

Soit D un ouvert connexe borné dans $\mathbb{R}^2$ avec le bord ∂D lisse. Soient $u, v \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R})$ (l'espace de fonctions continûment dérivable sur $\bar{D}$ à valeurs réelles), où $\bar{D} = D \cup \partial D$. Alors

$$\int\limits_{\partial D} (u dx_1 + v dx_2) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 \tag{3}$$

(et où l'orientation de ∂D est accordée avec l'orientation de D).

Ce théorème est un cas particulier de la formule de Stokes (voir, par example, [W.Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 1976])

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega, \tag{4}$$

où M est une variété avec bord, $dim\, M = n$, ω est une forme différentielle d'ordre $n-1$. Théorème 1A peut être reécrit dans la forme suivante

Théorème 1B.

Soit Ω un ouvert connexe borné dans $\mathbb{C}$ avec le bord $\partial\Omega$ lisse. Soient $g \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$ (l'espace de fonctions continûment dérivable sur $\bar{\Omega}$ à valeurs complexes). Alors,

$$\int\limits_{\partial\Omega} g d\zeta = 2i \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} dRe\,\zeta\, dIm\,\zeta \tag{5}$$

(et où l'orientation de $\partial\Omega$ est accordée avec l'orientation de Ω). Ensuite le résultat suivant est valable:

Théorème 2 (formule de Cauchy-Pompeiu (1912)).

Soit D un ouvert connexe borné dans $\mathbb{C}$ avec le bord ∂D lisse. Soit $f \in C^1(\bar{D}, \mathbb{C})$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{\partial f / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z} dRe\,\zeta dIm\,\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{pour } z \in D \\ 0 & \text{pour } z \in \mathbb{C} \backslash \bar{D} \end{cases} \tag{6}$$

(et où l'orientation de ∂D est accordée avec l'orientation de D).

Preuve du Théorème 2.

Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\bar{D}$ la formule (6) est une conséquence immédiate de la formule (5), où $g = f(\zeta)/(\zeta - z)$.

Pour obtenir (6) pour $z \in D$, considérons (5) pour $g = f(\zeta)/(\zeta - z)$, $\Omega = D_{z,\varepsilon} = D\backslash B_{z,\varepsilon}$, $\partial\Omega = \partial D_{z,\varepsilon}$ où $B_{z,\varepsilon} \subset D$, $B_{z,\varepsilon} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \ |\zeta - z| \le \varepsilon\}$. Nous avons

$$\int\limits_{\partial D_{z,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int\limits_{\partial B_{z,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \overset{(5)}{=}$$
$$2i \iint\limits_{D_{z,\varepsilon}} \frac{\partial f/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - z} dRe\,\zeta\, dIm\,\zeta \overset{\text{def}}{=} 2i \iint\limits_{D} \frac{\partial f/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - z} dRe\,\zeta\ dIm\,\zeta - 2i \iint\limits_{B_{z,\varepsilon}} \frac{\partial f/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - z} dRe\,\zeta dIm\,\zeta, \tag{7}$$

où nous avons utilisé aussi que $\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} = 0$ pour $\zeta \in D_{z,\varepsilon}$.

De plus $\zeta = z + \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, donne une paramétrization de $\partial B_{z,\varepsilon}$ et, par conséquence,

$$\begin{gathered} \int\limits_{\partial B_{z,\varepsilon}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = \\ \int\limits_{0}^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\varphi}) i d\varphi \to 2\pi i\ f(z) \ \ \text{pour } \varepsilon \to 0. \end{gathered} \tag{8}$$

De plus

$$\begin{gathered} |\iint\limits_{B_{z,\varepsilon}} \frac{\partial f/\partial\bar{\zeta}}{\zeta - z} dRe\,\zeta dIm\,\zeta| \le \int\limits_{0}^{\varepsilon} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{|\partial f/\partial\bar{\zeta}|}{r} r dr d\theta \le \\ 2\pi M \varepsilon, \ \ |\partial f/\partial\bar{\zeta}| < M. \end{gathered} \tag{9}$$

Les formules (7), (8), (9) pour $\varepsilon \to 0 \implies$ (6) pour $z \in D$.

Théorème 2 est démontré.

En utilisant (6) on peut obtenir aussi, par example, que

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{z} = \delta(z), \tag{10}$$

où δ est la fonction de Dirac.

Définition 1.

Une fonction f est dite holomorphe dans D si $f \in C(D, \mathbb{C})$ et $\partial f(\zeta)/\partial\bar{\zeta} \equiv 0$ pour $\zeta \in D$, où D est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

Théorème 2 et Définition 1 impliquent que si $f \in C(\bar{D}, \mathbb{C})$ et f holomorphe dans D, où D est un ouvert connexe borné dans $\mathbb{C}$ avec le bord ∂D lisse, $\bar{D} = D \cup \partial D$, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{pour } \ z \in D \\ 0 & \text{pour } \ z \in \mathbb{C}\backslash\bar{D} \end{cases} \tag{11}$$

(formule de Cauchy (1831)).

Théorème 3 (Liouville).
Si f est holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, alors $f \equiv const.$

Preuve du Théorème 3.
La formule (11) $\Longrightarrow$

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_r} f(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2}\Big) d\zeta, \tag{12}$$

où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $D_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : \ |\zeta| < r\}$, $|z_1| < r$, $|z_2| < r$. En utilisant (12) on obtient

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| \frac{|z_1 - z_2| r d\varphi}{|re^{i\varphi} - z_1||re^{i\varphi} - z_2|} \to 0 \ \text{ pour } \ r \to \infty. \tag{13}$$

Alors $f(z_1) = f(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $f \equiv const.$

Théorème 4 (formule de Sohotsky (1873), Plemelj).
Soient D^+ un ouvert simplement connexe borné dans $\mathbb{C}$ avec le bord $\partial D^+ = \Gamma$ lisse et $D^- = \mathbb{C} \backslash (D^+ \cup \Gamma)$. Soient $f \in C^1(\Gamma)$ et

$$f^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^{\pm}. \tag{14}$$

Alors

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^+}} f^+(z) - \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^-}} f^-(z) = f(z_0), \quad z_0 \in \Gamma, \tag{15}$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^+}} f^+(z) + \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^-}} f^-(z) = \frac{1}{\pi i} v.p. \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}, \ z_0 \in \Gamma, \tag{16}$$

où

$$v.p. \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma \backslash B_{z_0, \varepsilon}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}, \ z_0 \in \Gamma,$$

$$B_{z_0, \varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Schéma de démonstration du Théorème 4.
Il suffit démontrer que

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^+}} f^+(z) = \frac{1}{2} f(z_0) + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}, \tag{17a}$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D^-}} f^-(z) = -\frac{1}{2} f(z_0) + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} d\zeta, \ z_0 \in \Gamma. \tag{17b}$$

Nous avons

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int\limits_{\Gamma\backslash B_{z_0,\varepsilon}} + \int\limits_{\Gamma\cap B_{z_0,\varepsilon}}\Bigg)\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\backslash B_{z_0,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}v.p.\int\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0},\ z\to z_0,\ \varepsilon\to 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\cap B_{z_0,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \approx \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\cap B_{z_0,\varepsilon}}\frac{f(z_0)}{\zeta - z}d\zeta = \\ &\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_{z_0,\varepsilon}\cap D^-}\frac{f(z_0)}{\zeta - z}d\zeta \ \text{ si }\ \varepsilon\ \text{ est suffisamment petit et }\ z\in D^+,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_{z_0,\varepsilon}\cap D^-}\frac{f(z_0)}{\zeta - z}d\zeta \longrightarrow \frac{1}{2}f(z_0)\ \text{ pour }\ z\to z_0,\ \varepsilon\to 0. \tag{21}$$

En utilisant (14), (18)-(21) on obtient (17a). Démonstration de (17b) est similaire. Pour une démonstration plus complete de (17) voir, par exemple, Lemma 7.2.1 de [Ablowitz, Fokas, Introduction and Applications of Complex Variables, Cambridge Univ. Press (1997)].

Problème de Riemann-Hilbert additif.

Soient D^+ un ouvert simplement connexe borné dans $\mathbb{C}$ avec le bord $\partial D^+ = \Gamma$ lisse et $D^- = \mathbb{C}\backslash(D^+\cup\Gamma)$. Soit $f\in C^1(\Gamma)$. Considérons le problème de la détermination des fonctions f^+ et f^- t.q.:
(1) f^+ est holomorphe dans D^+,
(2) f^- est holomorphe dans D^-, $f^-(z)\to 0$, $z\to\infty$,
(3) $f^+(\zeta) - f^-(\zeta) = f(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, où $f^\pm(\zeta)$ sont les limites sur Γ de $f^\pm$ de $D^\pm$.

Ce problème est dit le problème de Riemann-Hilbert additif. La formule (14) donne la solution de ce problème.

Exposé 6.

Considérons l'équation

$$\theta\nabla_x\psi(x,\theta) + a(x)\psi(x,\theta) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{1}$$

θ- un paramètre spectral et, au début, on peut supposer que

$$a, f \;\; \text{sont des fonctions lisses a support compact.} \tag{2}$$

C'est une équation de base de la tomographie d'émission de simples photons.

Données spectrales pour l'équation (1):

Pour chaque $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ il existe une solution unique bornée $\psi^+(x,\theta)$ de l'équation (1) telle que

$$\lim_{s\to-\infty} \psi^+(x+s\theta,\theta) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

La fonction S définie par la formule

$$S(x,\theta) = \lim_{s\to+\infty} \psi^+(x+s\theta,\theta), \quad (x,\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1} \tag{4}$$

est considérée comme les données spectrales pour l'équation (1).

Problème direct et problème inverse pour l'équation (1):

Problème direct: trouver ψ^+ et S à partir de a et f

$$a, f \to \psi^+ \to S.$$

Problème inverse: trouver f à partir de S en supposant a connu

$$S, a \to f.$$

Interprétation physique et médicale:

Les problèmes posés viennent de la tomographie d'émission (utilisée en médicine nucléaire). Dans ce cadre: f est la densité des émetteurs de photons (la densité des isotopes radioactifs), a est le coefficient d'atténuation de photons,

$\psi^+(x,\theta)$ - intensité espérée de radiation en x dans la direction θ.

$S(\gamma)$, $\gamma = (x\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}$, - intensité espérée de l'émission le long de γ dans la direction θ au voisinage de "∞".

En médicine nucléaire le problème initial est de déterminer la distribution d'un médicament dans un corps humain, où quelques atoms de ce médicament ont été remplacés en avance par leur isotopes radioactifs. Au niveau physique il s'agit de déterminer la distribution f de ces isotopes à partir de la radioactivité mesurée au voisinage du corps, c'est-à-dire (dans certaine approximation) à partir de S. De plus, on peut supposer que le coefficient a est déjà déterminé dans le cadre de la tomographie à rayons X.

Résolution du problème direct: On a

$$\psi^+(x,\theta) = \exp(-Da(x,-\theta)) \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(-Da(x+t\theta,-\theta))f(x+t\theta)dt,$$
$$Da(x,\theta) = \int\limits_{0}^{+\infty} a(x+s\theta)ds, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{5}$$

Pour obtenir (5) nous utilisons que le facteur $\varphi^+(x,\theta) = \exp(-Da(x,-\theta))$ de cette formule vérifie l'éq. $\theta\partial_x\varphi + a(x)\varphi = 0$. Ensuite, par la formule donnant ψ^+ on vérifie aisèment que ψ^+ vérifie bien l'éq. (1) avec (3). On a

$$S(x,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-Da(x+\tau\theta,\theta))f(x+\tau\theta)d\tau, \quad (x,\theta) \in T\mathbb{S}^{d-1}. \tag{6}$$

Pour obtenir (6) nous utilisons, en particulier, que

$$\lim_{s\to+\infty} \varphi^+(x+s\theta,\theta) = \exp(-Pa(x,\theta)),$$
$$Pa(x,\theta) = Da(x,\theta) + Da(x,-\theta).$$

On peut reécrire (6) comme

$$S = P_a f, \tag{7}$$

où P_a est une transformation de rayons X généralisée.

Définition. La transformation P_a de (6), (7) est dite la transformation d'un rayonnement attenuée ou bien la transformation de Radon attenuée.

Si $a \equiv 0$ alors P_a se réduit à la transformation P de rayons X de l'exposé 1.

Résolution du problème inverse.

Pour $a \not\equiv 0$ aucune relation simple entre $P_a f$ et la transformation de Fourier $\hat{f}$ n'est pas connue, en générale (c'est-à-dire aucune généralisation de la Proposition 1 de l'exposé 2 n'est pas connue, en générale). Néanmoins nous avons le résultat suivant (qui généralise la Théorème 1 de l'exposé 2):

Théorème 1 (R.Novikov 2001). En dimension $d = 2$ on a la formule suivante (de l'inversion de la transformation P_a):

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \theta^\perp \nabla_x K(x,\theta) d\theta, \tag{8a}$$

$$K(x,\theta) = \exp[-Da(x,-\theta)]\tilde{q}_\theta(x\theta^\perp), \tag{8b}$$

$$\tilde{q}_\theta(s) = \exp(A_\theta(s))\cos(B_\theta(s))H(\exp(A_\theta)\cos(B_\theta)q_\theta)(s) +$$
$$\exp(A_\theta(s))\sin(B_\theta(s))H(\exp(A_\theta)\sin(B_\theta)q_\theta)(s), \tag{8c}$$

$$A_\theta(s) = \frac{1}{2} Pa(s\theta^\perp, \theta), \quad B_\theta(s) = HA_\theta(s), \quad q_\theta(s) = P_a f(s\theta^\perp, \theta), \tag{8d}$$

$$Hu(s) = \frac{1}{\pi} p.v. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{s-t} dt,$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, $s \in \mathbb{R}$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$ pour $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1$, $d\theta$ est la mesure standard sur $\mathbb{S}^1$.

En dimension $d \geq 2$ les formules (8) donnent une méthode de reconstruction de f sur Y, où Y - un plan bidimensionnel dans $\mathbb{R}^d$ par $P_a f\big|_{T\mathbb{S}^1(Y)}$, où $T\mathbb{S}^1(Y)$ est l'ensemble de toutes les droits orientées dans Y, sous la condition que $a\big|_Y$ est connue.

Théorème 1 a été obtenu par la méthode du problème de Riemann-Hilbert d'analyse complexe.

Exposé 7.

Démonstration du Théorème 1 de l'exposé 6 par la méthode du problème de Riemann-Hilbert pour $a \equiv 0$ (c'est-à-dire pour le cas de la transformation de Radon classique):

Considérons l'éq.

$$\theta\nabla_x\psi(x,\theta) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \Sigma, \tag{1}$$

$$\Sigma = \{\theta \in \mathbb{C}^2 \ : \ \theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\}. \tag{2}$$

(C'est-à-dire considérons l'éq. (1) de l'exposé 5 pour $a \equiv 0$, $d = 2$ et $\theta \in \Sigma$.)

Considérons sur Σ la coordonnée

$$\lambda = \theta_1 + i\theta_2, \quad \theta \in \Sigma. \tag{3}$$

$$\text{Si} \ \ \theta \in \Sigma \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}. \tag{4}$$

$$\text{Si} \ \ \theta \in \mathbb{S}^1 \subset \Sigma \Rightarrow \lambda \in T = \{\lambda' \in \mathbb{C} : \ |\lambda'| = 1\}. \tag{5}$$

La formule (3) $\Rightarrow$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda}), \quad \theta_2 = -\frac{i}{2}(\lambda - \frac{1}{\lambda}). \tag{6}$$

$$\text{Si} \ \ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Rightarrow \theta \in \Sigma. \tag{7}$$

$$\text{Si} \ \ \lambda \in T \Rightarrow \theta \in \mathbb{S}^1. \tag{8}$$

Proposition 1. (I) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(T \cup \{0\})$ il existe une unique solution $\psi(\cdot,\theta(\lambda))$ de l'éq. (1) telle que

$$\psi(x,\theta(\lambda)) \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{9}$$

(II) ψ possède les propriétés suivantes:

$$\psi(x,\theta(\lambda)) \to 0 \ \text{ si } \ \lambda \to \infty, \tag{10a}$$

$$\psi(x,\theta(\lambda)) \to 0 \ \text{ si } \ \lambda \to 0, \tag{10b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\psi(x,\theta(\lambda)) = 0 \ \text{ si } \ \lambda \notin T, \tag{11}$$

$$\psi(x,\theta(\lambda(1 \pm 0))) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mp}(x,\theta(\lambda)), \quad \lambda \in T, \tag{12a}$$

$$\psi_+ - \psi_- = -i\tilde{q}_{\theta(\lambda)}(\theta(\lambda)^{\perp}x) = -i(Hq_{\theta(\lambda)})(\theta(\lambda)^{\perp}x), \quad q_\theta(s) = Pf(s\theta^{\perp},\theta). \tag{12b}$$

A partir de la Proposition 1, nous obtenons l'inversion de la transformation de Radon classique par le schéma suivant:

$$q \stackrel{(12b)}{\to} \psi_+ - \psi_- \stackrel{(10),(11),(12)}{\to} \psi(x,\theta(\lambda)) \stackrel{(1)}{\to} f. \tag{13}$$

Dans ce schéma le problème de la détermination d'une fonction ψ avec les propriétés (10), (11) à partir de son saut $\psi_+ - \psi_-$ sur T à x fixé est un problème de Riemann-Hilbert additif. En utilisant la formule de Cauchy

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \lambda}d\zeta, \quad \lambda \in D, \tag{14}$$

nous obtenons que

$$\psi(x,\theta(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{(\psi_+ - \psi_-)(x,\theta(\zeta))}{\zeta-\lambda}d\zeta \overset{(12b)}{=}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{\tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta(\zeta)^\perp x)}{\zeta-\lambda}d\zeta, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup 0). \tag{15}$$

Les formules (1), (15) $\Rightarrow$

$$f(x) = \theta(\lambda)\nabla_x \frac{-1}{2\pi}\int\limits_T \frac{\tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta(\zeta)^\perp x)}{\zeta-\lambda}d\zeta, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup 0). \tag{16}$$

Et en particulier,

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\theta(\lambda)\nabla_x \frac{-1}{2\pi}\int\limits_T \frac{\tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta(\zeta)^\perp x)}{\zeta-\lambda}d\zeta =$$
$$\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\big)\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta(\zeta)^\perp x)d\zeta = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1}\theta^\perp\nabla_x\tilde{q}_\theta(\theta^\perp x)d\theta, \quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{17}$$

et où on a utilisé que

$$d\zeta = i\zeta d\theta, \quad \zeta=\theta_1+i\theta_2, \quad Im\, f = 0. \tag{18}$$

Preuve de la Proposition 1:

Unicité:

$$\theta(\lambda)\nabla_x\psi_j = f, \quad \psi_j\to 0, \quad |x|\to\infty, \quad j=1,2, \tag{19}$$
$$\Rightarrow$$
$$\theta(\lambda)\nabla_x u(x,\theta(\lambda)) \overset{(6)}{=} \frac{1}{2}(\lambda+\lambda^{-1})\big(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\big(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\big)\frac{\partial}{\partial x_2}\big)u(x,\theta(\lambda)) = 0, \tag{20a}$$
$$u(x,\theta(\lambda))\to 0, \quad |x|\to\infty, \tag{20b}$$

où $u=\psi_1-\psi_2$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup\{0\})$. De plus $(\lambda+\lambda^{-1})\neq 0$ car $\lambda\notin T$ et, par conséquent,

$$\big(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\big(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\big)\frac{\partial}{\partial x_2}\big)u(x,\theta(\lambda)) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup 0). \tag{21}$$

Considérons y_1, y_2 t.q.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = ay_1 + by_2, \end{cases} \tag{22}$$

où

$$a = Re\,\big(i\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\big),\quad b = Im\,\big(i\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\big),\quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash T. \tag{23}$$

$(21), (20b), (22), (23) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\big)u(x(y),\theta(\lambda))=0,\\ &u(x(y),\theta(\lambda))\to 0,\quad |y|\to\infty.\end{aligned} \tag{24}$$

Alors $u\equiv 0$ par théorème de Liouville.

Existence:

$$\psi(x,\theta(\lambda)) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G(x-y,\theta(\lambda))f(y)dy, \tag{25a}$$

$$G(x,\theta(\lambda)) = \frac{1}{(2\pi)^2 i}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{i\xi x}d\xi}{\theta_1(\lambda)\xi_1+\theta_2(\lambda)\xi_2},\quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup\{0\}). \tag{25b}$$

Utilisant

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi x}d\xi = \delta(x), \tag{26}$$

on a que G est une fonction de Green pour l'opérateur $\theta(\lambda)\nabla_x$ et que ψ vérifie (1). Ici on peut calculer G explicitement

$$G(x,\theta(\lambda)) = \frac{sgn\,(1-|\lambda|)}{2\pi i\theta^{\perp}(\lambda)x},\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad \lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup\{0\}). \tag{27}$$

En particulier, $(25), (27) \Rightarrow (1), (9), (10), (11)$ assez directement. Pour obtenir (12) nous utilisons les formules

$$G_{\pm}(x,\theta(\lambda)) \stackrel{\text{def}}{=} G(x,\theta(\lambda(\mp 0))) = \frac{\pm 1}{2\pi i(\theta^{\perp}(\lambda)x \mp i0 sgn\,(\theta x))}, \tag{28}$$

$$G_{+}(x,\theta(\lambda)) - G_{-}(x,\theta(\lambda)) = p.v.\frac{1}{\pi i\theta^{\perp}(\lambda)x}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&\psi_+ - \psi_- = \int\limits_{\mathbb{R}^2}(G_+ - G_-)(x-y,\theta(\lambda))f(y)dy =\\ &\frac{1}{\pi i}p.v.\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{d(\theta^{\perp}(\lambda)y)}{\theta^{\perp}(\lambda)x-\theta^{\perp}(\lambda)y}\big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)d(\theta(\lambda)y)\big) = \frac{1}{i}(Hq_{\theta(\lambda)})(\theta^{\perp}(\lambda)x).\end{aligned} \tag{30}$$

Exposé 8

Schéma de démonstration du Théorème 1 pour le cas général.
Considérons l'équation

$$\begin{aligned} &\theta\nabla_x\psi(x,\theta)+a(x)\psi(x,\theta)=f(x), \quad x\in\mathbb{R}^2,\ \theta\in\Sigma, \\ &\Sigma=\{\theta\in\mathbb{C}^2:\quad \theta^2=\theta_1^2+\theta_2^2=1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Considérons sur Σ la coordonnée λ (voir les formules (3)-(8) de l'exposé 7).

Proposition 1.

(I) Pour chaque $\lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup\{0\})$ il existe une unique solution $\psi(\cdot,\theta(\lambda))$ de l'équation (1) telle que

$$\psi(x,\theta(\lambda))\to 0,\quad |x|\to\infty. \tag{2}$$

(II) Cette ψ a les propriétés suivantes:

$$\psi(x,\theta(\lambda))\to 0,\quad \text{si}\quad \lambda\to\infty, \tag{3a}$$

$$\psi(x,\theta(\lambda))\to 0,\quad \text{si}\quad \lambda\to 0, \tag{3b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\psi(x,\theta(\lambda))=0,\quad \text{si}\quad \lambda\notin T, \tag{4}$$

$$\psi(x,\theta(\lambda(1\pm 0)))\overset{\text{def}}{=}\psi_\mp(x,\theta(\lambda)),\quad \lambda\in T, \tag{5a}$$

$$\psi_+-\psi_-=-iK(x,\theta(\lambda)), \tag{5b}$$

où K est définie par les formules (6.8b), (6.8c), (6.8d), c'est-à dire par les formules (8b), (8c), (8d) de l'exposé 6.

A partir de la Propoition 1, nous obtenons l'inversion de la transformation de Radon atténuée par le schéma suivant:

$$q\overset{(5b),(6.8b),(6.8c),(6.8d)}{\longrightarrow}\psi_+-\psi_-\overset{(3),(4),(5)}{\longrightarrow}\psi(x,\theta(\lambda))\overset{(1)}{\longrightarrow}f. \tag{6}$$

Dans ce schéma le problème de la détermination d'une fonction ψ avec les propriétés (3), (4) à partir de son saut $\psi_+-\psi_-$ sur T à x fixé est un problème de Riemann-Hilbert additif. En ulilisant la formule de Cauchy

$$\psi(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-\lambda}d\zeta,\quad \lambda\in D, \tag{7}$$

nous obtenons que

$$\begin{aligned} &\psi(x,\theta(\lambda))=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{(\psi_+-\psi_-)(x,\theta(\zeta))}{\zeta-\lambda}d\zeta,\overset{(5b)}{=} \\ &-\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\frac{K(x,\theta(\zeta))}{\zeta-\lambda}d\zeta,\quad x\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\in\mathbb{C}\backslash(T\cup\{0\}). \end{aligned} \tag{8}$$

Les formules $(1),(8) \Longrightarrow$

$$f(x) = (\theta(\lambda)\nabla_x + a(x))\frac{-1}{2\pi}\int\limits_T \frac{K(x,\theta(\zeta))}{\zeta-\lambda}d\zeta, \quad x \in \mathbb{R}^2, \ \lambda \in \mathbb{C}\backslash(T \cup \{0\}). \tag{9}$$

Et en particulier,

$$\begin{aligned}
&f(x) = \lim_{\lambda\to\infty}(\theta(\lambda)\nabla_x + a(x))\frac{-1}{2\pi}\int\limits_T \frac{K(x,\theta(\zeta))}{\zeta-\lambda}d\zeta = \\
&\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\frac{1}{2\pi}\int\limits_T K(x,\theta(\zeta))d\zeta = \\
&\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1} \theta^{\perp}\nabla_x K(x,\theta)d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

et où on a utilisé que

$$d\zeta = i\zeta d\theta, \quad \zeta = \theta_1 + i\theta_2, \quad Im\, f = 0. \tag{11}$$

La Proposition 1 et la formule (10) impliquent le Théorème 1 de l'exposé 6 pour le cas général.

Preuve de la Proposition 1:
Unicité:

$$(\theta\nabla_x + a(x))\psi_j = f, \quad \psi_j \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad j = 1,2, \tag{12}$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\theta\nabla_x + a(x))u = 0, \quad u \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{13}$$

où $u = \psi_1 - \psi_2$, $\theta \in \Sigma\backslash\mathbb{S}^1$.

On peut présenter u dans la forme

$$\begin{aligned}
&u = \varphi v, \quad \text{où} \\
&\varphi = \exp\Big(-\int\limits_{\mathbb{R}^2} G(x-y,\theta)a(y)dy\Big), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \Sigma\backslash\mathbb{S}^1,
\end{aligned} \tag{14}$$

où G est définie par les formules (25b), (27) de l'exposé 7. En utilisant que

$$\theta\nabla_x G(x,\theta) = \delta(x), \quad G(x,\theta) = O(|x|^{-1}), \quad |x| \to \infty, \tag{15}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \Sigma\backslash\mathbb{S}^1$, on obtient

$$\theta\nabla_x\varphi + a(x)\varphi = 0, \quad \varphi \to 1, \quad |x| \to \infty. \tag{16}$$

$$(13), (14), (16) \implies$$
$$(\theta\nabla_x\varphi + a(x)\varphi)v + \varphi\theta\nabla_x v = \varphi\theta\nabla_x v = 0, \tag{17}$$
$$\theta\nabla_x v = 0, \quad v \to 0, \quad |x| \to \infty, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \Sigma\backslash\mathbb{S}^1. \tag{18}$$

$$(18) \Longrightarrow \quad v \equiv 0 \ \ (\text{voir la preuve de l'unicité de l'exposé 7}) \quad \Longrightarrow \ u \equiv 0.$$

Existence:

$$\psi(x,\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} R(x,y,\theta)f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \theta \in \Sigma\backslash\mathbb{S}^1, \tag{19}$$

où

$$R(x,y,\theta) = \exp(-G_\theta a(x))G(x-y,\theta)\exp(G_\theta a(y)), \tag{20}$$
$$G_\theta a(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G(x-y,\theta)a(y)dy, \tag{21}$$

où $G(x,\theta)$ est définie par les formules (25b), (27) de l'exposé 7.

En particulier, (19)-(21) et les formules (25b), (26), (27) de l'exposé 7 $\Longrightarrow$ (1), (2), (3), (4) assez directement. Pour la démonstration de (5), voir [R.Novikov, Ark.Mat., 40 (2002), 145-167].

Exposé 9.

Considérons l'équation

$$div(\sigma(x)\, grad\, u) = 0, \quad x \in D, \tag{1}$$

où $\sigma(x)$ est une fonction suffisamment régulière dans D, $\sigma(x) \geq \sigma_{min} > 0$, D est un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$, simplement connexe avec le bord lisse.

C'est une équation de base de la tomographie d'impédance électrique pour le cas stationnaire. Dans ce cadre u- potentiel électrique, $\sigma(x)$- conductivité, $I = -\sigma(x)\, grad\, \varphi$ -courant. Dans le cadre de la tomographie d'impédance électrique la structure d'un objet est décrite au term de la conductivité σ et D est un objet avec la structure à déterminer au term de σ.

Si au bord ∂D on applique un potentiel électrique φ stationnaire, alors le potentiel u dans l'intérieur du D satisfait (1) avec la condition de Dirichlet au bord $u\big|_{\partial D} = \varphi$. Ensuite considérons

$$I = \sigma(x) \frac{\partial}{\partial \nu} u\big|_{\partial D},$$

où ν désigne la normale extérieure. Au niveau physique I est le courant transverse au ∂D produit par le potentiel électrique initial φ.

Considérons l'application Λ_σ qui envoie les potentiels électriques initials φ appliquées au bord ∂D aux courants I transverses au ∂D, ou par les autres mots

$$\Lambda_\sigma \varphi = \sigma(x) \frac{\partial}{\partial \nu} u\big|_{\partial D} \tag{2}$$

pour chaque potentiel initial φ, ou par les autres mots telle que

$$\Lambda_\sigma \big(u\big|_{\partial D}\big) = \sigma(x) \frac{\partial}{\partial \nu} u\big|_{\partial D} \tag{3}$$

pour chaque solution u de (1), où u est suffisamment régulière dans $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Dans le cadre de la tomographie d'impédance électrique on considère Λ_σ comme des données tomographiques (où on obtient Λ_σ à partir de la détection du courant I à travers du ∂D pour différents potentiels φ initials au bord ∂D).

Un problème de base de la tomographie d'impédance électrique est de déterminer σ à partir de Λ_σ.

Au niveau mathématique on considère Λ_σ comme données spectrales pour (1).

Problème direct et problème inverse pour l'équation (1):

Problème direct: $\sigma \to \Lambda_\sigma$.
(Ce problème direct se réduit au problème de Dirichlet.)

Problème inverse (problème de Calderon):

$$\Lambda_\sigma \to \sigma.$$

Pour étudier le problème inverse de Calderon nous allons d'abord réduire (1) à l'équation suivante:

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = 0, \quad x \in D. \tag{4}$$

Et nous allons alors réduire Λ_σ à l'application Φ_v telle que

$$\Phi_v\big(\psi\big|_{\partial D}\big) = \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\big|_{\partial D} \tag{5}$$

pour chaque solution ψ de (4), où ψ est suffisamment régulière dans $\bar{D} = D \cup \partial D$. Et nous allons réduire le problème inverse de Calderon au problème inverse

$$\Phi_v \to v. \tag{6}$$

Plus précisément, on a le résultat suivant. Si u satisfait (1) alors $\psi = \sigma^{1/2}u$ satisfait (4), où

$$v(x) = \frac{\Delta(\sigma(x))^{1/2}}{(\sigma(x))^{1/2}}. \tag{7}$$

Et de plus la formule suivante est valable

$$\Phi_v = \sigma^{-1/2}\big(\Lambda_\sigma\sigma^{-1/2} + \frac{\partial\sigma^{1/2}}{\partial\nu}\big), \tag{8}$$

où v est donnée par (7), $\sigma^{-1/2}$, $\frac{\partial\sigma^{1/2}}{\partial\nu}$ sont considérés comme des opérateurs de multiplication dans l'espace de fonctions sur ∂D. On obtient ce résultat par un calcul direct.

Ce résultat implique que le problème inverse de Calderon se réduit au problème (6), au moins sous la condition que $\sigma\big|_{\partial D}$ et $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\big|_{\partial D}$ sont connus.

En principe, dans la literature il y a des formules pour la détermination de $\sigma\big|_{\partial D}$ et $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\big|_{\partial D}$ à partir de Λ_σ, mais d'autre part on peut supposer tout simplement que σ est connu a priori au voisinage de ∂D, parce que un voisinage du bord ∂D est accessible aux détections diffŕentes et directes.

Notons que Φ_v peut être consideréé comme un opérateur intégral avec le noyau de Schwartz $\Phi_v(x,y)$, $x,y \in \partial D$. De plus

$$\Phi_v(x,y) = \frac{\partial^2 G_v(x,y)}{\partial\nu_y\partial\nu_x}, \quad x \in \partial D,\ y \in \partial D, \tag{9}$$

où G_v est une fonction de Green pour (4) avec la condition de Dirichlet, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(\Delta_x - v)G_v(x,y) = \delta(x-y), \quad x,y \in D,\\ &G_v(x,y) = 0, \quad x \in \partial D, \quad y \in D. \end{aligned} \tag{10}$$

Notons que $\Phi_v(x,y)$ est une distribution (au voisinage de $x = y$). Notons aussi que $G_v(x,y)$ satisfait l'équation intégrale:

$$G_v(x,y) = G_0(x,y) + \int\limits_D G_0(x,z)v(z)G_v(z,y)dz, \quad x,y \in \partial D, \tag{11}$$

où $G_0(x,y)$ satisfait (10) pour $v \equiv 0$.

Le problème (6) est connu comme le problème inverse de Gel'fand pour l'équation de Schrödinger à énergie 0. Dans notre cours on va appeler ce problème comme le problème inverse de Gel'fand-Calderon.

Théorème 1a (R.Novikov 1987,1988, $d \geq 3$, Bukhgeim 2008, $d = 2$).

Supposons que $v \in L^\infty(D)$. Alors, Φ_v détermine uniquement v en dimension $d \geq 2$ (et 0 n'est pas valeur propre pour le problème de Dirichlet pour opérateur $-\Delta + v$ dans D).

Théorème 1b (Sylvester, Uhlmann 1987, R.Novikov 1988, $d \geq 3$, Nachman 1995, $d = 2$).

Supposons que $\sigma \in C^2(D)$. Alors, Λ_σ détermine uniquement σ en dimension $d \geq 2$.

Pour présenter des méthodes de résolution du problème inverse de Gel'fand-Calderon on va considérer plusieures fonctions importantes (fonctions de Faddeev):

$$\begin{aligned} &G(x,k),\ \psi(x,k), \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \Sigma, \\ &\Sigma = \{k \in \mathbb{C}^d : \quad k^2 = 0\}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &h(k,l), \quad \text{où} \quad (k,l) \in \Theta, \\ &\Theta = \{k \in \Sigma,\ l \in \Sigma : \quad Im\, k = Im\, l\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ici $\psi = \psi_v$, $h = h_v$ (ψ et h dépendent de v).

La fonction G est définie par la formule

$$G(x,k) = e^{ikx} g(x,k), \quad g(x,k) = -(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x} d\xi}{\xi^2 + 2k\xi}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ k \in \Sigma, \tag{14}$$

où $\xi^2 + 2k\xi = \xi^2 + 2Re\, k\xi + iIm\, k\xi$. On peut vérifier que

$$\begin{aligned} &(\Delta + 2ik\nabla) g(x,k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x), \\ &\Delta G(x,k) = (\Delta e^{ikx}) g(x,k) + 2\nabla e^{ikx} \nabla g(x,k) + e^{ikx} \Delta g(x,k) = \\ &e^{ikx} (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x). \end{aligned} \tag{15}$$

En effet, $G(x,k)$ est bien connue pour $k = 0$, par exemple:

$$\begin{aligned} &G(x,0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \quad \text{pour} \quad d = 3, \\ &G(x,0) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| \quad \text{pour} \quad d = 2. \end{aligned} \tag{16}$$

De plus $G(x,k)$ possède en particulier les propriétés suivantes:

$$g(x,k) = O\big(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\big), \quad |x| \to +\infty, \ k \in \Sigma \ (k \neq 0 \ \text{ pour } \ d = 2), \tag{17}$$

$$\|M^{-s} g(k) M^{-s}\| = O(|k|^{-1}), \quad k \in \Sigma, \ |k| \to \infty \tag{18}$$

pour chaque $s > 1/2$, où $|k| = \big((Re\, k)^2 + (Im\, k)^2\big)^{1/2}$, $g(k)$ désigne l'opérateur intégral avec le noyau de Schwartz $g(x-y,k)$, M désigne l'opérateur de multiplication par la fonction $(1+|x|)$, $\|A\|$ désigne la norm d'un opérateur A dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

La fonction ψ est définie comme la solution de l'équation intégrale linéaire

$$\psi(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(x-y,k) v(y) \psi(y,k) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ k \in \Sigma, \tag{19}$$

où $v(x) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^d \backslash D$ et où k est un paramètre. En utilisant que $v(x) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^d \backslash D$ on peut voir que (19) se réduit à l'équation pour $\psi(x,k)$ où $x \in D$. De plus c'est naturel de chercher ψ comme $\psi = e^{ikx}\mu(x,k)$. Dans ce cas (19) se réduit à l'équation suivante pour μ

$$\mu(x,k) = 1 + \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x-y,k) v(y) \mu(y,k) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ k \in \Sigma. \tag{20}$$

En utilisant (15), (19) on peut vérifier que

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = 0. \tag{21}$$

La fonction h est définie par la formule

$$\begin{aligned} h(k,l) &= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} \psi(x,k) v(x) dx = \\ &(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(k-l)x} \mu(x,k) v(x) dx, \quad (k,l) \in \Theta. \end{aligned} \tag{22}$$

Exposé 10.

Proposition 1. Supposons que $v \in L^\infty(D)$. Alors,

$$\hat{v}(p) = \lim_{(k,l)\in\Theta,\ k-l=p,\ |Im\,k|=|Im\,l|\to\infty} h(k,l), \quad p\in\mathbb{R}^d \tag{1}$$

$$\hat{v}(p) = h(k,l) + O(\rho^{-1}),\ \rho\to+\infty, \quad p\in\mathbb{R}^d,\ |p|<2\rho,\ (k,l)\in\Theta,\ |Im\,k|=|Im\,l|=\rho,\ k-l=p \tag{2}$$

en dimension $d \geq 3$, où

$$\hat{v}(p) = (2\pi)^{-d} \int_D e^{ipx} v(x)dx, \quad p\in\mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Remarque 1.
En ce qui concerne (1), (2), on peut vérifier que sous la condition que $d \geq 3$

$$\begin{aligned} &\forall\ p\in\mathbb{R}^d \ \text{ ils existent }\ (k(\rho), l(\rho)) \in \Theta \ \text{ tels que} \\ &|Im\,k(\rho)| = |Im\,l(\rho)| = \rho, \quad p = k(\rho) - l(\rho) \ \text{ pour }\ \rho \geq |p|/2. \end{aligned} \tag{4}$$

Démonstration de la Proposition 1.

Nous allons utiliser la propriété (9.15), l'équation (9.17), la formule (9.19) et Remarque 1. La formule (9.19) implique que

$$h(k,l) = \hat{v}(k-l) + (2\pi)^{-d} \int_D e^{i(k-l)x} (\mu(x,k)-1) v(x)dx. \tag{5}$$

En utilisant (4), (5), pour obtenir (1), (2) il suffit de démontrer que

$$\|(\mu(\cdot,k)-1)v\|_{L^1(D)} = O(|k|^{-1}), \quad k\in\Sigma,\ |k|\to\infty. \tag{6}$$

En utilisant la présentation

$$(\mu(x,k)-1)v(x) = (1+|x|)^{-s}(\mu(x,k)-1)(1+|x|)^s v(x) \tag{7}$$

et en utilisant l'inégalité

$$\|u_1 u_2\|_{L^1(D)} \leq \|u_1\|_{L^2(D)} \|u_2\|_{L^2(D)}, \tag{8}$$

pour obtenir (6) il suffit de démontrer que

$$\|(1+|\cdot|)^{-s}(\mu(\cdot,k)-1)\|_{L^2(D)} = O(|k|^{-1}), \quad k\in\Sigma,\ |k|\to\infty, \tag{9}$$

pour certain $s > 1/2$.

Pour obtenir (9) nous allons utiliser la propriété (9.15) et l'équation (9.17). On peut reécrire (9.17) pour $\mu_{-s} = (1+|x|)^{-s}\mu(x,k)$ où $x \in D$, $s > 1/2$:

$$\mu_{-s}(\cdot,k) = m^{-s} + Q_{k,s}\mu_{-s}(\cdot,k), \quad k \in \Sigma, \tag{10}$$

où m^{-s} désigne $(1+|x|)^{-s}$, $Q_{k,s}$ désigne l'opérateur intégral avec le noyau de Schwartz

$$Q_{k,s}(x,y) = m^{-s}(x)g(x-y,k)m^{-s}(y)\big(m^{2s}(y)v(y)\big), \quad x,y \in D. \tag{11}$$

En utilisant la propriété (9.15), on obtient

$$\|Q_{k,s}\| = O(|k|^{-s}), \quad k \in \Sigma,\ |k| \to \infty \tag{12}$$

pour chaque $s > 1/2$, où $\|A\|$ désigne la norme d'un opérateur dans $L^2(D)$. En utilisant (10), (12) on obtient

$$\begin{aligned} &\mu_{-s}(\cdot,k) = (I - Q_{k,s})^{-1}m^{-s} = \big(I + \sum_{n=1}^{+\infty}(Q_{k,s})^n\big)m^{-s} = \\ &m^{-s} + O(|k|^{-1}), \quad k \in \Sigma,\ |k| \to +\infty. \end{aligned} \tag{13}$$

La formule (13) implique (9). Alors, la Proposition 1 est démontrée.

En revenant au problème inverse de Gel'fand-Calderon considérons les opérateurs frontières Φ_v et Φ_0 ainsi que leurs noyaus de Schwartz $\Phi_v(x,y)$, $\Phi_0(x,y)$, $x,y \in \partial D$. En considérant le problème de Gel'fand, on va supposer aussi pour la simplicité que

$$\begin{aligned} &0 \ \text{ n'est pas un valeur propre pour le problème de Dirichlet} \\ &\text{pour opérateur } \ -\Delta + v(x) \ \text{ dans } D. \end{aligned} \tag{14}$$

Théorème 1 (R.Novikov, 1987).

Supposons que $v \in L^\infty(D)$ et que (14) est valable. Alors pour ψ de (9.16) l'équation suivante est valable

$$\psi(x,k)\big|_{\partial D} = e^{ikx} + \int\limits_{y \in \partial D} A(x,y,k)\big(\psi(y,k)\big|_{\partial D}\big)dy, \tag{15}$$

$$A(x,y,k) = \int\limits_{z \in \partial D} G(x-z,k)(\Phi_v - \Phi_0)(z,y)dz, \quad x,y \in \partial D,\ k \in \Sigma, \tag{16}$$

et pour h définie par (9.19) la formule suivante est valable

$$h(k,l) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D} e^{-ilx}(\Phi_v - \Phi_0)(x,y)\psi(y,k)dxdy, \quad (k,l) \in \Theta. \tag{17}$$

Remarque 2.

La Proposition 1 et le Théorème 1 donnent la méthode suivante de la reconstitution de v à partir de Φ_v pour le problème inverse de Gel'fand-Calderon:

$$\Phi_v \overset{(15),(16)}{\longrightarrow} \psi\big|_{\partial D} \overset{(17)}{\longrightarrow} h \overset{(1),(2)}{\longrightarrow} \hat{v}. \tag{18}$$

Démonstration du Théorème 1.

Dans cette démonstration nous allons utiliser, en particulier, la formule de Green

$$\int\limits_D (g\Delta f - f\Delta g)dx = \int\limits_{\partial D} \big(g\frac{\partial}{\partial\nu}f - f\frac{\partial}{\partial\nu}g\big)dx, \tag{19}$$

où f et g sont des fonctions suffisamment régulières dans $\bar{D} = D\cup\partial D$, ν désigne la normale extérieure sur ∂D.

En utilisant (7.19), (19) démontrons d'abord la formule (17). On a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_D e^{-ilx}\psi(x,k)v(x)dx \overset{(9.18)}{=} \int\limits_D e^{-ilx}\Delta\psi(x,k)dx \overset{(19)}{=} \\
&\int\limits_D (\Delta e^{-ilx})\psi(x,k)dx + \int\limits_{\partial D} \big(e^{-ilx}\frac{\partial}{\partial\nu}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-ilx}\big)dx = \\
&\int\limits_{\partial D} \big(e^{-ilx}\frac{\partial}{\partial\nu}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-ilx}\big)dx, \quad (k,l)\in\Theta.
\end{aligned} \tag{20}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial D} \big(e^{-ilx}\frac{\partial}{\partial\nu}\psi(x,k) - \psi(x,k)\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-ilx}\big)dx = \\
&\int\limits_{\partial D} e^{-ilx}(\Phi - \Phi_0)\big(\psi\big|_{\partial D}\big)dx + \int\limits_{\partial D} \big(e^{-ilx}\Phi_0)\big(\psi\big|_{\partial D}\big) - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-ilx}\big)dx,
\end{aligned} \tag{21}$$

où

$$\int\limits_{\partial D} \big(e^{-ilx}\Phi_0\big(\psi\big|_{\partial D}\big) - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-ilx}\big)dx \overset{(19)}{=} 0, \quad (k,l)\in\Theta. \tag{22}$$

Pour obtenir (22) nous utilisons aussi que par la définition de Φ_0 il existe une fonction $\varphi(x,k)$ telle que

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,k) = \psi(x,k), \quad x\in\partial D, \\
&-\Delta\varphi(x,k) = 0, \quad x\in D, \\
&\Phi_0\big(\psi\big|_{\partial D}\big) = \frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(x,k)\big|_{\partial D}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Les formules (20), (21), (22) impliquent (17). En utilisant (9.16), (19) démontrons maintenant (15), (16). On a

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_D G(x-y,k)v(y)\psi(y,k)dy \overset{(9.18)}{=} \\
&\int\limits_D G(x-y,k)\Delta\psi(y,k)dy \overset{(19)}{=} \int\limits_D \psi(y,k)\Delta_y G(x-y,k)dy + \\
&\int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)\frac{\partial}{\partial\nu}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}_y G(x-y,k)\big)dy = \\
&\int\limits_D \psi(y,k)\delta(x-y)dy + \int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)\frac{\partial}{\partial\nu}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}_y G(x-y,k)\big)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned} \tag{24}
$$

En utilisant (9.16), (24) pour $x \in \mathbb{R}^d \backslash D$ nous avons

$$
\begin{aligned}
&\psi(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)\frac{\partial}{\partial\nu}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}_y G(x-y,k)\big)dy = \\
&e^{ikx} + \int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)\Phi_v\big(\psi\big|_{\partial D}\big) - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}_y G(x-y,k)\big)dy = \\
&e^{ikx} + \int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)(\Phi_v - \Phi_0)\big(\psi\big|_{\partial D}\big)\big)dy + \\
&\int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)\Phi_0\big(\psi\big|_{\partial D}\big) - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}_y G(x-y,k)\big)dy,
\end{aligned} \tag{25}
$$

où

$$
\int\limits_{\partial D} \big(G(x-y,k)\Phi_0\big(\psi\big|_{\partial D}\big) - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}_y G(x-y,k)\big)dy \overset{(19),(23)}{=} 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{26}
$$

Pour obtenir (26) nous utilisons aussi que

$$
\Delta_y G(x-y,k) = 0, \quad k \in \Sigma, \quad x \in \mathbb{R}^d \backslash D. \tag{27}
$$

Les formules (25),(26) impliquent (15), (16).

Théorème 1 est démontré.

Exposé 11.

Les fonctions $G(x,k)$, $\psi(x,k)$ sont bien définies par les mêmes formules que dans l'exposé 9 pas seulement pour $k \in \Sigma$ mais aussi pour $k \in \mathbb{C}^d \backslash \mathbb{R}^d$ et la fonction $h(k,l)$ est bien définie par les mêmes formules que dans l'exposé 9 pas seulement pour $(k,l) \in \Theta$ mais aussi pour $(k,l) \in \Omega = \{(k,l): \ k \in \mathbb{C}^d, \ l \in \mathbb{C}^d, \ k^2 = l^2, \ Im\, k = Im\, l\}$ (et même pour $(k,l) \in \{(k,l): \ k \in \mathbb{C}^d, \ l \in \mathbb{C}^d, \ Im\, k = Im\, l\}$).

Au niveau historique ces fonctions de Faddeev G, ψ, h ont été obtenues comme une extension au domaine complexe des fonctions $G^+(x,k)$, $\psi^+(x,k)$, $k \in \mathbb{R}^d$ et $f(k,l)$, $(k,l) \in \mathcal{M} = \{(k,l): \ k \in \mathbb{R}^d, \ l \in \mathbb{R}^d, \ k^2 = l^2\}$ de la théorie classique de diffusion pour l'équation de Schrödinger

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ E > 0, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} &v(x) \ \text{ est une fonction réelle, régulière} \\ &\text{et qui tends vers } \ 0 \ \text{ suffisamment vite à l'infini.} \end{aligned} \tag{2}$$

Dans ce cadre $\psi^+(x,k)$ à k fixé, $k \in \mathbb{R}^d$, $k^2 = E$, est la solution bornée de l'équation (1) avec le développement asymptotique

$$\begin{aligned} &\psi^+(x,k) = e^{ikx} + c(d,|k|)\frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} f(k,|k|\frac{x}{|x|}) + o\big(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\big), \ |x| \to \infty, \\ &c(d,|k|) = -\pi i(-2\pi i)^{(d-1)/2}|k|^{(d-3)/2}. \end{aligned} \tag{3}$$

La solution $\psi^+(x,k)$ décrit la diffusion de l'onde plane e^{ikx} sur le potentiel v. Le deuxième term de (3) décrit l'onde diffusée sphérique, où le coefficient f dans ce term est dit l'amplitude de diffusion. L'amplitude de diffusion $f(k,l)$, $(k,l) \in \mathcal{M}$ est considérée comme des données spectrales pour (1).

De plus ψ^+ satisfait l'équation intégrale de Lippman-Schwinger

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G^+(x-y,k)v(y)\psi^+(y,k)dy, \tag{4}$$

$$G^+(x,k) = -\big(\frac{1}{2\pi}\big)^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x}d\xi}{\xi^2 - k^2 - i0}, \quad k \in \mathbb{R}^d, \tag{5a}$$

$$G^+(x,k) = e^{ikx}g^+(x,k), \quad g^+(x,k) = -(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x}d\xi}{\xi^2 + 2(k + i0\frac{k}{|k|})\xi}, \quad k \in \mathbb{R}^d, \tag{5b}$$

où

$$(\Delta + k^2)G^+(x,k) = \delta(x),$$

$$G^+(x,k) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i|k||x|}}{|x|}, \quad d = 3,$$

et pour l'amplitude de diffusion f la formule suivante est valable

$$f(k,l) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx} v(x)\psi^+(x,k)dx, \quad (k,l) \in \mathcal{M}. \tag{6}$$

L'équation (19) pour ψ de l'exposé 9 est similaire à l'équation (4) pour ψ^+. La formule (22) pour h de l'exposé 9 est similaire à la formule (6) pour f.

On a les formules

$$\begin{aligned} G^+(x,k) &= G(x, k + i0\frac{k}{|k|}), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{R}^d, \\ \psi^+(x,k) &= \psi(x, k + i0\frac{k}{|k|}), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{R}^d, \\ f(k,l) &= h(k + i0\frac{k}{|k|}, l + i0\frac{k}{|k|}), \quad (k,l) \in \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{7}$$

Selon (6), les fonctions G^+, ψ^+, f définies sur des variétés réelles sont des limites des fonctions G, ψ, h définies au domaine complexe (par rapport à k, l). Il faut préciser que G, ψ, h ne sont pas holomorphes, en générale, au domaine complexe. Les équations suivantes sont valables (Beals, Coifman 1985, Henkin, R.Novikov 1987):

$$\frac{\partial G(x,k)}{\partial \bar{k}_j} = -(\frac{1}{2\pi})^{d-1} \int\limits_{\xi \in \mathbb{R}^d} \xi_j e^{i\xi x} \delta(\xi^2 + 2k\xi) d\xi, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \psi(x,k)}{\partial \bar{k}_j} = -2\pi \int\limits_{\xi \in \mathbb{R}^d} \xi_j H(k, -\xi)\psi(x, k+\xi)\delta(\xi^2 + 2k\xi) d\xi, \tag{9}$$

$$\frac{\partial H(k,p)}{\partial \bar{k}_j} = -2\pi \int\limits_{\xi \in \mathbb{R}^d} \xi_j H(k, -\xi) H(k+\xi, p+\xi)\delta(\xi^2 + 2k\xi) d\xi, \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned} H(k,p) &= h(k, l-p), \\ h(k,l) &= H(k, k-l), \end{aligned} \tag{11}$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{C}^d$, $l \in \mathbb{C}^d$, $Im\, l = Im\, k$, $\delta(\xi^2 + 2k\xi) = \delta(\xi^2 + 2Re\, k\xi)\delta(2Im\, k\xi)$, où δ est la fonction de Dirac.

La Proposition 1 de l'exposé 10 est un analogue du résultat suivant pour l'amplitude de diffusion f:

Théorème 1 (Formule de Born).

Sous la condition (2) la formule suivante est valable:

$$f(k,l) = \hat{v}(k-l) + O(E^{-1/2}), \quad E \to +\infty, \; k, l \in \mathbb{R}^d, \; k^2 = l^2 = E, \tag{12}$$

où

$$\hat{v}(p) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ipx} v(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

Théorème 1 implique, en particulière, que

$$\hat{v}(p) = \lim_{\substack{(k,l)\in\mathcal{M},\ k-l=p,\\ k^2=l^2=E\to+\infty}} f(k,l) \tag{14}$$

$\forall\, p \in \mathbb{R}^d$ en dimension $d \geq 2$. Les formules (12), (14) donnent une méthode de reconstruction du potentiel v à partir de l'amplitude de diffusion f pour l'équation de Schrödinger aux grandes énergies E.

Remarque.

En ce qui concerne (14), on peut vérifier que en dimension $d \geq 2$ $\forall\, p \in \mathbb{R}^d$ $\exists\, (k(E), l(E)) \in \mathcal{M}$ tels que $k^2(E) = l^2(E) = E$, $k(E) - l(E) = p$ pour $\sqrt{E} > |p|/2$.

La démonstration du Théorème 1 de cette exposé et la démonstration de la Proposition 1 de l'exposé 10 sont similaires.