Введение в обратную задачу рассеяния для уравнения Шредингера

Р. Г. Новиков

1 Лекция 1

Перечислим для начала некоторые исходные физические постановки обратных задач рассеяния для уравнения Шредингера.

1. Определение потенциала взаимодействия между двумя (между N) квантово-механическими частицами по результатам их взаимного (группового) рассеяния.

2. Определение характеристик некоторого макроскопического объекта по результатам рассеяния на нём элементарных частиц фиксированного вида (нейтронов, электронов, ...). Также известна, как томография с использованием элементарных частиц.

На математическом же уровне эти задачи включают в себя следующие вопросы.

1. Исследование некоторых нелинейных аналогов преобразования Фурье.

2. Применение к исследованию некоторых нелинейных дифференциальных уравнений (например, KdV).

Рассмотрим уравнение Шредингера при фиксированной положительной энергии

$$-\triangle\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ E > 0, \tag{1.1}$$

где $v = \bar{v}$ — вещественный потенциал, достаточно регулярная функция на $\mathbb{R}^d$ с достаточно быстрым убыванием на бесконечности (например, v может быть из класса Шварца $S(\mathbb{R}^d)$), $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$.

С точки зрения физики это уравнение можно интерпретировать по-разному в зависимости от постановки.

1. Уравнение Шредингера для двух взаимодействующих частиц при энергии E (после отделения движения центра масс этих двух частиц при некоторой замене переменных, зависящей от масс частиц и постоянной Планка). В этом случае естественно предположить, что потенциал зависит только от расстояния между частицами ($v(x) = v(|x|)$).

2. Уравнение Шредингера для элементарной частицы, взаимодействующей с некоторым макроскопическим (классическим) объектом. Здесь, вообще говоря, $v(x)$ зависит не только от $|x|$.

Прямая задача рассеяния. Пусть нам известен потенциал v. Наша задача — найти решения ψ уравнения (1.1), описывающие физическое рассеяние. При $v \equiv 0$ можно выделить базисные решения с фиксированным импульсом k

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{R}^d,\ |k|^2 = E.$$

Договоримся обозначать скалярное произведение $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ через xy. Таким образом, $k^2 = E$.

При $v \not\equiv 0$ решениями, обобщающими e^{ikx} и описывающими рассеяние, являются решения $\psi^+(x,k)$ уравнения (1.1), где $k, x \in \mathbb{R}^d$ и

$k^2 = E$, со следующей асимптотикой на бесконечности $|x| \to \infty$:

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + c(d,|k|)\frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} f\left(k, |k|\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\right). \tag{1.2}$$

Здесь c — константа, зависящая от размерности и энергии (ее специально не включают в априорно неизвестный коэффициент f для удобства выкладок)

$$c(d,|k|) = -\pi i(-2\pi i)^{(d-1)/2}|k|^{(d-3)/2}, \quad \text{где } \sqrt{-2\pi i} = \sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}.$$

Решения $\psi^+(x,k)$ однозначно фиксируются таким (1.2) поведением на бесконечности при достаточных условиях регулярности и локализации на потенциал v, то есть $\psi^+(x,k)$ однозначно определяется потенциалом v.

Определение 1. Функция f, определенная на

$$M_E = \{(k,l) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,\ k^2 = l^2 = E\}, \quad E > 0$$

и возникающая в (1.2), называется амплитудой рассеяния для уравнения Шредингера (1.1) при фиксированной энергии E.

На математическом уровне прямая и обратная задачи рассеяния для (1.1) сводятся к исследованию отображений

$$v \text{ на } \mathbb{R}^d \longleftrightarrow f \text{ на } M_E \text{ при фиксированной энергии } E,$$
$$\text{либо } v \text{ на } \mathbb{R}^d \longleftrightarrow f \text{ на } \bigcup_{E \in A \subset \mathbb{R}_+} M_E.$$

Сформулируем некоторые важные результаты из теории прямой задачи рассеяния для уравнения Шредингера.

Теорема 1.1. *Если $v = \bar{v}$, $(1+|x|)^{d+\varepsilon}v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то для любого $k \in \mathbb{R}^d$, $|k|^2 = E$, существует единственное решение $\psi^+(\,\cdot\,, k)$ уравнения (1.1) с асимптотикой (1.2).*

Теорема 1.2. *В условиях теоремы 1.1 функция ψ^+ является решением интегрального уравнения Липмана-Швингера:*

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G^+(x-y,k)v(y)\psi^+(y,k)dy, \quad \textit{где} \tag{1.3}$$

$$G^+(x,k) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi x}d\xi}{\xi^2 - k^2 - i\cdot 0}, \quad k \in \mathbb{R}^d,$$

$-i\cdot 0$ обозначает $-i\delta$ и $\delta > 0$, $\delta \to 0$.

При этом, любое решение ψ^+ уравнения (1.3) из $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $k^2 = E$, является решением уравнения Шредингера (1.1). *Интегральное уравнение (1.3) при фиксированном $k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ однозначно разрешимо в L^∞.*

Замечание 1. *При некоторых d интеграл из формулы для функции Грина G^+ выражается в элементарных функциях.*

$$d = 1: \; G^+(x,k) = \frac{e^{i|k||x|}}{2|k|i}, \quad d = 3: \; G^+(x,k) = -\frac{e^{i|k||x|}}{4\pi|x|}.$$

Предложение 1. *В условиях теоремы 1.1 справедлива следующая формула для амплитуды рассеяния:*

$$f(k,l) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx}v(x)\psi^+(x,k)dx, \tag{1.4}$$

$$(k,l) \in M_E \; \textit{либо} \; (k,l) \in \bigcup_{E \in A \subset \mathbb{R}_+} M_E.$$

Это утверждение берется из формулы (1.3) теоремы 1.2, если рассмотреть её при $|x| \to \infty$ и разложить правую часть в ряд.

Доказательства приведенных результатов не помещаются в мини-курс, их можно найти в [1] и [2]. Упомянем лишь некоторые вспомогательные утверждения, которые представляют и отдельный интерес.

Лемма 1. *Рассмотрим уравнение Гельмгольца* $-\triangle\psi = E\psi$, $x \in \mathbb{R}^d$, $E > 0$. *Пусть*

$$\psi(x) = \frac{e^{i|k||x|}}{|x|^{(d-1)/2}} u\left(\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\right), \quad |x| \to \infty,$$

где u *— гладкая функция* $\mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$. *Тогда* $\psi \equiv 0$.

Задача. Доказать лемму в размерности $d = 1$.

Теорема 1.3 (Като)**.** *В условиях теоремы 1.1 оператор Шредингера* $(-\triangle + v(x))$ *не имеет положительного дискретного спектра в* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

2 Лекция 2

Начнём с того, что увяжем определение амплитуды рассеяния с тем, что изучается в курсе квантовой механики мехмата при размерности $d = 1$. А именно, аналог (1.2) выглядит следующим образом. При $k > 0$

$$\begin{aligned} \psi^+(x,k) &= e^{ikx} + s_{21}(k)e^{-ikx} + o(1), && x \to -\infty, \\ \psi^+(x,k) &= s_{22}(k)e^{ikx} + o(1), && x \to +\infty, \end{aligned}$$

при $k < 0$

$$\begin{aligned} \psi^+(x,k) &= e^{-i|k|x} + s_{12}(|k|)e^{i|k|x} + o(1), && x \to +\infty, \\ \psi^+(x,k) &= s_{11}(|k|)e^{-i|k|x} + o(1), && x \to -\infty. \end{aligned}$$

Матрица

$$S(k) = \begin{pmatrix} s_{11}(k) & s_{21}(k) \\ s_{12}(k) & s_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k > 0,$$

называется матрицей рассеяния. Элемент $s_{21}(k)$ называют коэффициентом отражения налево, $s_{22}(k)$ — коэффициентом прохождения направо. Элементы матрицы S просто выражаются через амплитуду рассеяния, например при $k > 0$

$$s_{21}(k) = -\frac{\pi i}{|k|} f(k, -k),$$
$$s_{22}(k) = 1 - \frac{\pi i}{|k|} f(k, k).$$

У коэффициентов матрицы рассеяния есть физический смысл. Например, если волна двигается слева направо (x возрастает), то $|s_{21}(k)|^2$ — вероятность того, что она отразится налево, а $|s_{22}(k)|^2$ — вероятность прохождения барьера. Из этих соображений $|s_{21}|^2+|s_{22}|^2 = 1$, аналогично получается $|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = 1$. Вообще из сохранения числа частиц следует унитарность матрицы рассеяния $S^* = S^{-1}$.

Если переписать амплитуду рассеяния в терминах угла падения и угла отражения $f(k, l) = f(\theta, \omega, E)$, то при фиксированной энергии $|f(\theta, \omega, E)|^2$ описывает относительную плотность вероятности рассеяния в направлении $\omega \neq \theta$ при направлении падения θ.

При $d = 1$ интегральное уравнение (1.3) выглядит как

$$\psi^+(x, k) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{e^{i|k||x-y|}}{2|k|i} v(y)\psi^+(y, k)dy.$$

Пример 1. Если потенциал $v(x)$ представляет собой сумму δ-функций Дирака, то приведенное интегральное уравнение решается в явном виде. Возьмем $v(x) = q\delta(x)$ при $d = 1$, тогда

$$\psi^+(x, k) = e^{ikx} + \frac{q}{2|k|i} e^{i|k||x|}\psi^+(0, k).$$

Подставив сюда $x = 0$, получим $\psi^+(0,k) = \frac{2|k|i}{2|k|i-q}$.

Задача. Проверить, что при $v(x) = q\delta(x)$, $d = 1$ верно

$$s_{21}(k) = \frac{q}{2|k|i - q}, \quad s_{22}(k) = 1 + \frac{q}{2|k|i - q}.$$

Продолжим изложение основных результатов теории прямой и обратной задач рассеяния для уравнения Шредингера. В дальнейшем, если не оговорено обратного, будем считать выполненными следующие стандартные условия на потенциал:

$$v = \bar{v},\ v \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ |v(x)| \leqslant \frac{q}{(1+|x|)^{d+\varepsilon}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ q > 0,\ \varepsilon > 0. \tag{2.1}$$

Сформулируем сначала теоремы, а после этого дадим некоторые пояснения насчет доказательств.

Теорема 2.1 (формулы Борна)**.** *При условиях* (2.1) *при фиксированном* $\varepsilon > 0$ *справедливы*

$$f(k,l) = \hat{v}(k-l) + O(q^2), \quad q \to 0, \tag{2.2}$$

$$f(k,l) = \hat{v}(k-l) + O(E^{-\frac{1}{2}}), \quad E \to +\infty, \tag{2.3}$$

$$\text{где } (k,l) \in M_E \text{ либо } (k,l) \in \bigcup_{E \in A \subset \mathbb{R}_+} M_E,$$

а $\hat{v}(p)$ *— преобразование Фурье*

$$\hat{v}(p) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ipx} v(x)dx, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

Следствие 1. *При условиях (2.1) в размерности $d \geqslant 2$ амплитуда рассеяния f на $\bigcup\limits_{E>E_{fix}} M_E$ однозначно определяет v посредством*

$$\hat{v}(p) = \lim_{E \to +\infty} f(k_E(p), l_E(p)), \quad \forall p \in \mathbb{R}^d, \quad \textit{где}$$

$$k_E(p) = \frac{p}{2} + \theta\sqrt{E - \frac{p^2}{4}}, \quad l_E(p) = -\frac{p}{2} + \theta\sqrt{E - \frac{p^2}{4}},$$
$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d: \ |\theta| = 1, \ p\theta = 0.$$

Таким образом, для нахождения $\hat{v}(p_0)$ необходимо подобрать $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, перпендикулярное p_0.

Замечание 2. *По тем же соображениям при $d = 1$ приведенные выше формулы верны, но только для $p = 0$.*

Замечание 3. *При условиях (2.1) или даже при $v \in S(\mathbb{R}^1)$ (функции Шварца) в размерности $d = 1$ амплитуда рассеяния f на*

$$\bigcup_{E>E_{fix}} M_E$$

не определяет v однозначно.

Пример 2. Рассмотрим при $d = 1$ односолитонный потенциал, заданный формулой

$$v(x) = -\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa(x - x_0))}.$$

При сдвиге $x \mapsto x + T$ матрица рассеяния и амплитуда рассеяния не меняются.

Приведем идею доказательства теоремы 2.1. Напомним сначала результаты из предыдущей лекции

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} G^+(x-y,k)v(y)\psi^+(y,k)dy, \tag{1.3}$$

$$f(k,l) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ilx}v(x)\psi^+(x,k)dx. \tag{1.4}$$

Рассмотрим Борновское приближение при малом потенциале (2.2). Из интегрального уравнения Липмана-Швингера (1.3) следует, что при $q \to 0$ выполняется $\psi^+(x,k) = e^{ikx} + O(q)$ в равномерной норме при фиксированной энергии. Подставив $\psi^+(x,k)$ в (1.4), получим как раз (2.2).

Для (2.3) потребуется вспомогательная теорема. Введём операторы $G^+(E) : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$G^+(E)u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} G^+(x-y,k)u(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ k \in \mathbb{R}^d,\ k^2 = E$$

и $\langle x \rangle$ — оператор умножения на $(1 + |x|)$.

Теорема 2.2. *При $d \geqslant 1$ для любого фиксированного $s > \frac{1}{2}$ выполняется*

$$\|\langle x \rangle^{-s} G^+(E) \langle x \rangle^{-s}\| = O(E^{-\frac{1}{2}}), \quad E \to +\infty$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства операторов $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Для $d = 1$ это явно следует из формулы на G^+ из теоремы 1.2; при $d \geqslant 2$ доказательство довольно сложное, его можно найти в [3].

Возьмем $s = (d+\varepsilon)/2$. Обозначим

$$\varphi^+(x,k) = \langle x \rangle^{-s}\psi^+(x,k), \quad \psi_0^+(x,k) = \langle x \rangle^{-s} e^{ikx},$$
$$A^+(E) = \langle x \rangle^{-s} G^+(E) \langle x \rangle^{-s}.$$

Тогда (1.3) перепишется в виде

$$\varphi^+(x,k) = \varphi_0^+(x,k) + A^+(E)\left(\langle x\rangle^{2s} v(x)\varphi^+(x,k)\right) = \varphi_0^+(x,k) + O(E^{-\frac{1}{2}}).$$

Используя (1.4), получим искомый результат (2.3) (проверьте!).

3 Лекция 3

Рассмотрим подробнее решение обратной задачи в приближении Борна. Если $k, l \in M_E$, то $k - l \in B_{2\sqrt{E}}$, где $B_r = \{p \in \mathbb{R}^d, |p| \leqslant r\}$. Обратно, при $d \geqslant 2$ для любого $p \in B_{2\sqrt{E}}$ найдутся такие $k, l \in M_E$, что $p = k - l$. Поэтому в Борновском приближении (теорема 2.1) f на M_E сводится к $\hat{v}$ на $B_{2\sqrt{E}}$. Рассмотрим

$$v_{app}(x,E) = \int\limits_{B_{2\sqrt{E}}} e^{-ipx}\hat{v}(p)dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

По сделанным замечаниям v_{app} полностью определяется амплитудой рассеяния f на M_E при $d \geqslant 2$. Кроме того, $\|v - v_{app}\| = \varepsilon(E) \to 0$ достаточно быстро при $E \to \infty$ для достаточно регулярных v с достаточной скоростью убывания на бесконечности. Например, если $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ и $v \in S(\mathbb{R}^d)$, то $\varepsilon(E) = O\left(\frac{1}{E^\infty}\right)$. У этой формулы есть нелинейные обобщения, см. [4] и [5].

Как уже было сказано, результаты выше соответствуют $d \geqslant 2$. Посмотрим теперь, что происходит при $d = 1$. Амплитуда f на M_E сводится к $\hat{v}$ на 3 точках $\{-2\sqrt{E}, 0, 2\sqrt{E}\}$. Доопределим каждый элемент матрицы рассеяния $S(k)$ на $\mathbb{R}$ в соответствии с равенством $s_{ij}(-k) = \overline{s_{ij}(k)}$. Соотношения между s_{ij} и f влекут за собой

$$s_{21}(k) \approx \frac{\pi}{ik}\hat{v}(2k), \quad s_{22}(k) \approx 1 + \frac{\pi}{ik}\hat{v}(0), \quad k \in \mathbb{R},$$

то есть в Борновском приближении

$$v(x) \approx \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-2ikx} 2iks_{21}(k)dk.$$

Сформулируем теперь результат при $d = 1$, верный в общем случае, а не только в Борновском приближении. Рассмотрим непрерывную функцию $\chi_c(k)$, зависящую от энергии и произвольного $c > 0$ следующим образом:

$$\chi_c(k) = \begin{cases} 0, & k \leqslant c, \\ (k-c), & c < k < c+1, \\ 1, & k \geqslant c+1. \end{cases}$$

Введем также обозначение

$$W^{n,1}(\mathbb{R}) = \{v : \frac{d^m}{dx^m} v \in L^1(\mathbb{R}),\ m = 0, \ldots, n\}, \quad n \geqslant 0.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $c > 0$, $v = \bar{v}$, $v \in W^{n,1}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-2ikx} \chi_c(|k|) 2iks_{21}(k)dk + w(x), \tag{3.1}$$

где $w(x)$ *— некоторая функция уже из* $W^{n+1,1}$.

Другими словами, если потенциал принадлежит $W^{n,1}$, то явная линейная формула (3.1) даёт приближение для него с точностью до какой-то функции, на единицу более гладкой.

Идея доказательства основывается на более детальном рассмотрении Борновского приближения

$$\frac{i}{\pi} ks_{21}(k) = \hat{v}(2k) + (\text{остаток, убывающий более быстро})$$

при $k \to \infty$. Если подставить его в доказываемую формулу (3.1), то убывающий более быстро остаток даст $w(x)$. Детали можно найти в [6].

Следствие 2. *Коэффициент отражения s_{21} при высоких энергиях однозначно определяет (1) кусочно-постоянные v, (2) линейные комбинации δ-функций Дирака. При желании можно найти и другие классы однозначно восстанавливаемых потенциалов.*

Дадим теперь сжатое введение в точные методы решения обратной задачи при $d = 1$ из теории Гельфанда, Левитана, Марченко и других. Пусть выполняются стандартные в этой теории предположения $v = \bar{v}$, $(1+|x|)v(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Как уже упоминалось, матрицы рассеяния недостаточно для однозначного восстановления потенциала. Для однозначности к данным необходимо добавить еще некоторые характеристики дискретного спектра оператора Шредингера.

Справедлива теорема о том, что при указанных условиях на потенциал весь дискретный спектр в $L^2(\mathbb{R})$ является отрицательным и состоит из конечного числа $0 \leqslant N < \infty$ собственных значений $E_1 < \cdots < E_N < 0$, каждое собственное значение является простым (одномерное пространство собственных функций). Будет удобно записывать собственные значения как $E_j = (i\varkappa_j)^2$, $\varkappa_j > 0$. Для каждого рассмотрим собственную функцию $\psi_j(x)$, однозначно фиксированную асимптотикой при $x \to -\infty$

$$\varphi_j(x) = e^{\varkappa_j x}(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$
$$\varphi_j(x) = b_j e^{-\varkappa_j x}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Здесь b_j — некоторые константы. Для удобства обозначим

$$\psi_j(x) = \varphi_j(x)/b_j, \quad \beta_j = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_j(x)\varphi_j(x)dx.$$

Теорема 3.2 (выписка из теории Гельфанда, Левитана, Марченко и других). *Каждый из наборов*

$$\big(s_{12}(k),\ k\in\mathbb{R},\quad \varkappa_j,\quad \frac{\beta_j}{b_j},\quad j=1,\dots,N\big), \tag{3.2}$$

$$\big(s_{21}(k),\ k\in\mathbb{R},\quad \varkappa_j,\quad \beta_j b_j,\quad j=1,\dots,N\big) \tag{3.3}$$

однозначно определяет v *на* $\mathbb{R}$.

Замечание 4. *При отсутствии дискретного спектра* ($N=0$) *потенциал* v *полностью определяется матрицей рассеяния.*

Приведем схему восстановления потенциала для первого набора. Сначала по данным рассеяния построим функцию

$$F_1(x)=\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\beta_j}e^{-\varkappa_j x}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1}s_{12}(k)e^{ikx}dk.$$

Затем рассмотрим интегральное уравнение на $A_1(x,y)$:

$$A_1(x,y)+F_1(x+y)+\int\limits_x^\infty A_1(x,z)F_1(z+y)dz=0, \tag{3.4}$$

где $A_1\equiv 0$ при $x>y$. В этом уравнении x — параметр. В условиях теоремы для любого x из (3.4) однозначно находится $A_1(x;\ \cdot\ )\in L^2(\mathbb{R})$ либо $L^1(\mathbb{R})$. Наконец, потенциал определяется как

$$v(x)=-2\frac{d}{dx}A_1(x,x+0).$$

Аналогичные формулы имеются и для второго набора.

Пример 3. Если $s_{12} \equiv 0$, то $F_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\beta_j} e^{-\varkappa_j x}$ и (3.4) превращается в уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, которое можно решить в явном виде. Так мы получим N-солитонный потенциал.

Перечислим результаты, используемые для вывода результатов теоремы 3.2.

Утверждение 1. *Для любого фиксированного* $x \in \mathbb{R}$ *функции* $\psi(x, \cdot\,)$, $\varphi(x, \cdot\,)$ *являются непрерывными и голоморфными в верхней полуплоскости* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, *а также*

$$\left|\psi(x,k) - e^{ikx}\right| < c_v(1 + \max(-x, 0)) \frac{e^{-\operatorname{Im} kx}}{1 + |k|} \int\limits_x^{\infty} (1 + |y|)|v(y)|dy.$$

Для $\left|\varphi(x,k) - e^{-ikx}\right|$ *имеется аналогичная оценка.*

Функции ψ и φ для нашего убывающего случая по сути являются прототипами функций Бейкера-Ахиезера для периодических потенциалов.

Благодаря голоморфности и указанной оценке $\psi(x,k)$ допускает представление в виде

$$\psi(x,k) = e^{ikx} + \int\limits_x^{\infty} A_1(x,y) e^{iky} dy,$$

то есть $\psi(x,k) = (I + \hat{A}_1)e^{ikx}$, где I — тождественный оператор, $\hat{A}_1$ — интегральный оператор, определенный с помощью $A_1(x,y)$. Таким образом, если мы найдем A_1, то мы найдем и ψ, то есть и решение уравнение Шредингера, по которому найдем потенциал. При этом A_1 — это та же функция, что и в (3.4)

Утверждение 2. *Справедливо тождество*

$$\varphi(x,k)s_{11}(k)=\psi(x,-k)+s_{12}(k)\psi(x,k), \quad k\in\mathbb{R}.$$

Кроме того, функция $a(k)=(s_{11}(k))^{-1}$ *является голоморфной в* $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\geqslant 0\}$*, имеет простые нули в точках дискретного спектра* $i\varkappa_j$ *и никаких других нулей, а также*

$$i\frac{d}{dk}a(k)\bigg|_{k=i\varkappa_j}=\beta_j,$$
$$a(k)\to 1, \quad k\to\infty.$$

Подробное доказательство теоремы 3.2 и связанных с ней результатов может быть найдено в [1], [16] Похожая схема есть, по крайней мере, и при $d=2$ при фиксированной энергии, см. например [4], [13].

4 Лекция 4

Далее речь пойдет преимущественно о нелинейных интегрируемых уравнениях. Начнем с уравнения Кортевега — де Фриза (KdV):

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)=6v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}v(x,t).$$

Мы интересуемся решениями этого уравнения при $v(\,\cdot\,,t)\in S(\mathbb{R})$. Будем искать решение задачи Коши.

На всякий случай напомним ключевой для всей теории солитонов результат

Теорема 4.1 (Gardner, Green, Kruskal, Miura, 1967)**.** *Если* $v(x,t)$ *— решение уравнения KdV, соответствующее начальным данным с данными рассеяния*

$$v(x,0)\longrightarrow\big(s_{12}(k),\ k\in\mathbb{R}, \quad \varkappa_j, \quad \frac{b_j}{\beta_j}, \quad j=1,\dots,N\big),$$

($N < \infty$ — размер дискретного спектра), то для $v(x,t)$ данные рассеяния

$$v(x,t) \longrightarrow \left(s_{12}(k,t), \quad \varkappa_j(t), \quad \left(\frac{b_j}{\beta_j}(t)\right)\right)$$

будут выражаться формулами

$$s_{12}(k,t) = e^{8ik^3t}s_{12}(k,0), \quad \varkappa_j(t) = \varkappa_j(0), \quad \left(\frac{b_j}{\beta_j}(t)\right) = e^{8\varkappa_j^3 t}\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)(0).$$

Таким образом, в этой работе была предложена следующая схема решения задачи Коши для KdV:

$$v(x,0) \xrightarrow{\text{П.З.Р.}} \{S\}(0) \xrightarrow{\text{явная линейная динамика}} \{S\}(t) \xrightarrow{\text{О.З.Р.}} v(x,t),$$

где $\{S\} = (s_{12}, \varkappa_j, b_j/\beta_j)$. В качестве метода решения О.З.Р. в работе 1968 предлагалось использовать уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко (3.4). Таким образом, решение задачи Коши уравнения Кдф можно найти в три этапа. Прямая и обратная задачи решаются с помощью линейных интегральных уравнений. Тем самым доказано, что нелинейное уравнение в частных производных допускает полную линеаризацию в быстроубывающем случае.

Но доказать существование и единственность $v(x,t)$ из $v(x,0)$ можно и классическими методами теории дифференциальных уравнений. Уникальность метода этой работы заключается в том, что в нем получается еще и асимптотика на бесконечности $t \to \pm\infty$:

$$v(x,t) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{2\varkappa_j^2}{\operatorname{ch}^2(\varkappa_j x - 4\varkappa_j^3 t - \varphi^{\pm})} + o(1),$$

то есть $v(x,t)$ приближается суммой N солитонов. Случаи $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ различаются лишь φ_j^+ и φ_j^-. Доказательство формулы довольно длинное, его основные идеи можно найти в [7].

Мы рассмотрели случай $1+1$, то есть $x \in \mathbb{R}^1$, $t \in \mathbb{R}^1$. Перейдем к $2+1$: $d=2$, $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^d$. Пусть для удобства $z = x_1 + ix_2$. Рассмотрим

$$\partial_t v(x,t) = 4\,\mathrm{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw) - E\partial_z w), \tag{4.1}$$

где $v=\bar{v}$, $E \in \mathbb{R}$, $\partial_{\bar{z}} w = -3\partial_z v$. Это уравнение называется уравнением Веселова-С. П. Новикова, впервые в явном виде появилось в их работе [8], где оно исследовалось в классе периодических и квазипериодических коэффициентов. Чтобы связать его с задачей рассеяния, мы будем рассматривать его в классе убывающих коэффициентов: v достаточно регулярно с достаточным убыванием на бесконечности, $w \to 0$ при $|x| \to \infty$, $w(x)$ регулярна на $\mathbb{R}^d$.

Уравнение Кортевега — де Фриза допускает представление в виде пары Лакса $\partial_t L = [L, A]$, где L — одномерный оператор Шредингера. Уравнение же Веселова–Новикова допускает представление Манакова

$$\frac{\partial}{\partial t}(L-E) = [L-E, A] + B(L-E), \tag{4.2}$$

где E — энергия, $L = -\triangle + v$ — все тот же оператор Шредингера, A и B — дополнительные операторы. Идея о том, что именно такое представление является правильным обобщением представления Лакса на случай $d=2$, появилась в статье Манакова [9].

Отталкиваясь от (4.2), удалось обобщить схему Гарднера, Грина, Краскала, Миуры и на случай уравнения Веселова–Новикова. Некоторые результаты этого обобщения мы сейчас обсудим.

Начнем с буквального аналога теоремы 4.1. Пусть v удовлетворяет уравнению (4.1). Рассмотрим двумерное уравнение Шредингера $L\psi = E\psi$ при фиксированной энергии $E > 0$ с потенциалом v. Тогда динамика амплитуды рассеяния $f(k,l)$ при $k, l \in M_E$ выглядит следующим образом:

$$f(k,l,t) = f(k,l,0)\exp(2it(k_1^3 - 3k_1k_2^2 - l_1^3 + 3l_1l_2^2)), \tag{4.3}$$

где $k = (k_1, k_2)$, $l = (l_1, l_2)$. В явном виде эта формула появилась в [10]).

Начать изучение уравнения Веселова–Новикова наиболее естественным представляется с перечисления его солитоно-подобных решений. Пусть $v(x,t) = V(x - ct)$, $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, а V — достаточно регулярная на $\mathbb{R}^2$ функция с достаточным убыванием на бесконечности. Потенциал v, допускающий представление в таком виде, называется *локализованным солитоном.*

Теорема 4.2. *Если v является решением уравнения Веселова - Новикова при фиксированной энергии $E > 0$ и является локализованным солитоном, то $f|_{M_E} \equiv 0$.*

Замечание 5. *Это аналог широко известного факта для $d = 1$: если v является решением KdV и является солитоном, то $s_{12} \equiv 0$ и $s_{21} \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.*

Несмотря на всю простоту утверждения, оно впервые появилось в 2011 году в [11]. Его доказательство основано на следующих наблюдениях. Рассмотрим потенциалы уравнения Шредингера, сдвинутые на y: $v_y(x) = v(x - y)$. Для каждого из них имеется своя амплитуда $f_y(k,l)$.

Задача. Проверить, что $f_y(k,l) = f(k,l)e^{iy(k-l)}$.

С другой стороны, если $v(x,t) = V(x - ct)$, до должна выполняться динамика (4.3). Но для $y = ct$ выполняется и приведенная выше. Отсюда для $f(k,l)$ остается единственная возможность быть равной нулю.

Следствие 3. *Если профиль солитона экспоненциально ограничен, то есть $|V(x)| < \beta e^{-\alpha|x|}$, то соответствующий солитон $v \equiv 0$. Другими словами, для уравнения (4.1) не бывает экспоненциально-локализованных солитонов.*

Теорема 4.3. *Если* $|v(x)| < \beta e^{-\alpha|x|}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *(но* v *не обязательно мал), и* $f|_{M_E} = 0$, *то* $v \equiv 0$.

Она появилась в работе [12]. Доказательство, грубо говоря, основано на том эффекте, что $f|_{M_E}$ в Борновском приближении для малого потенциала сводится к $\hat{v}$ на диске $B_{2\sqrt{E}}$. То есть у нас имеется гладкая экспоненциально убывающая функция, у которой преобразование Фурье зануляется на диске. Следовательно, она тождественно равна нулю.

Теорема 4.4 (Гриневич, Захаров, 1986)**.** *Существует явная формула для солитонов* $v(x,t) = V(x - ct)$ *уравнения Веселова–Новикова при* $E > 0$, *где профиль* V *является рациональной гладкой на* $\mathbb{R}^2$ *функцией с асимптотикой* $V(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ *при* $|x| \to \infty$.

Явную формулу, упомянутую в этом результате, можно найти, например, в [13]. Возникает вопрос, можно ли построить такие локализованные регулярные солитоны хотя бы с такой же асимптотикой на бесконечности при $E = 0$ либо при $E < 0$. Это открытые проблемы. Известно лишь, что при $E \in \mathbb{R} \setminus 0$ уравнение Веселова–Новикова не имеет солитонов с локализацией быстрее, чем $O\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$. Это результат из [14].

В двумерном случае для решения обратной задачи рассеяния кроме $f|_{M_E}$ необходима еще некоторая функция $b(k)$, $k \in \mathbb{C}^2$, $k_1^2 + k_2^2 = E$, которую мы здесь не определяем. Эта функция $b(k)$ играет роль дискретного спектра. Если она несингулярна, то задача Коши для уравнения Веселова–Новикова (4.1) допускает полное исследование. Например, становятся известными асимптотики $v(x,t)$ при $t \to \infty$, см. [15].

В заключение, я очень благодарен Борису Василевскому, составившему конспект этих лекций.

Список литературы

[1] Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния. II — Современные проблемы математики* — 3, стр. 93-180, ВИНИТИ, Москва (1974)

[2] Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера* — изд. МГУ, 1983

[3] A. Jensen, *Higher energy resolvent estimates for generalized many-body Schrodinger operators* — Publ. RIMS Kyoto Univ. 25 (1989), 155-167

[4] R. Novikov, *Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2* — Physics Letters A, 238 (1998), 73-78

[5] R. Novikov, *The $\bar{\partial}$-approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions* — International Mathematics Research Papers, 2005:6, 287-349

[6] R. Novikov, *Inverse scattering up to smooth functions for the Schrodinger equation in dimension 1* — Bulletin des sciences mathematiques, 120 (1996), 473-491

[7] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи* — Москва "Наука", 1980

[8] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения* — доклады АН СССР, 279:1(1984), 20-24

[9] С. В. Манаков, *Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения* — УМН, 31:5(191) (1976), 245–246

[10] Р. Г. Новиков, *Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии* — ТМФ, 66:2 (1986), 234–240

[11] R. G. Novikov, *Absence of exponentially localized solitons for the Novikov–Veselov equation at positive energy* — Physics Letters A, 375 (2011), 1233-1235

[12] P. G. Grinevich, R. G. Novikov, *Transparent potentials at fixed energy in dimension two. Fixed-energy dispersion relations for the fast decaying potentials* — Communications in mathematical physics, 174 (1995), 409-446

[13] П. Г. Гриневич, *Преобразование рассеяния для двумерного операторе Шредингера с убывающим на бесконечности потенциалом при фиксированной ненулевой энергии* — УМН, 55:6 (2000), 3-70

[14] А. В. Казейкина, Функциональный анализ и приложения, принято к публикации в 2012.

[15] A. V. Kazeykina, *A large time asymptotics for the solution of the Cauchy problem for the Novikov-Veselov equation at negative energy with non-singular scattering data* — Inverse Problems, 28:5 (2012) 055017

[16] P. Deift, E. Trubowitz, *Inverse scattering on the line* — Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979), 121-251