

Лекции по курсу

Томография и обратная задача рассеяния

Введение в рентгеновскую и эмиссионную
томографии

Лектор
проф. Р. Г. Новиков

Набирал
А. Д. Агальцов

Москва, осень 2013

Содержание

1 Лекция 1.	3
1.1 Томография и обратная задача рассеяния.	3
1.2 Рентгеновская томография.	3
1.3 Основное дифференциальное уравнение рентгеновской томографии.	4
1.4 Прямая и обратная задачи «рассеяния».	5
2 Лекция 2.	6
2.1 Связь лучевого преобразования и преобразования Фурье.	6
2.2 Формула Радона.	8
2.3 Преобразование Радона в более общих случаях.	9
3 Лекция 3.	11
3.1 Теорема Кормака–Хелгасона.	11
3.2 Формулы Кормака.	12
4 Лекция 4.	14
4.1 Описание образа лучевого преобразования.	14
4.2 Описание образа в многомерном случае.	17
5 Лекция 5.	18
5.1 Эмиссионная томография. Однофотонная эмиссионная томография (SPECT).	18
5.2 Общие математические результаты для P_W	19
5.3 Основное дифференциальное уравнение SPECT.	20
6 Лекция 6.	21
6.1 Точная формула обращения для преобразования P_{W_a}	21
6.2 Комплексное многообразие Σ	22

1 Лекция 1.

1.1 Томография и обратная задача рассеяния.

Томография известна прежде всего как область исследований, связанная с задачей восстановления структуры объекта по данным зондирования. Известны различные виды томографии:

1. *рентгеновская томография* характеризуется использованием рентгеновских фотонов в качестве зондирующего инструмента;
- 2а. *электронная томография* использует электроны в качестве зондирующего инструмента;
- 2б. *нейтронная томография* использует нейтроны,
3. *акустическая томография* использует в качестве зондирующего инструмента звуковые и ультразвуковые волны.

Томографии, использующие волны в качестве зондирующего инструмента называют *обратными задачами рассеяния*. Приведённые виды томографии возникают в многочисленных приложениях:

1. медицинские приложения (флюорография, рентгенография различных органов),
2. технический контроль (контроль багажа в аэропортах),
3. геофизика (практически все представления о внутренней структуре Земли получены с помощью методов томографии),
4. ядерная физика.

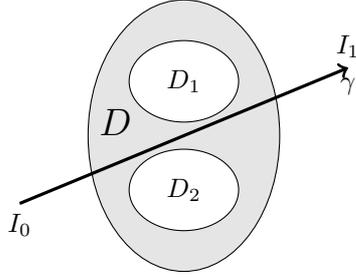
1.2 Рентгеновская томография.

Слово *томография* происходит от греческого *τομή* (срез, сечение, слой). В томографии восстановление структуры объекта происходит, как правило, послойно. На математическом уровне в рентгеновской томографии речь идёт о восстановлении *коэффициента $a(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, поглощения рентгеновских фотонов*.

Пример 1.1. Рассмотрим модель среза человеческого тела на уровне лёгких. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ выпуклый компакт (срез тела), $D_1 \subseteq D$, $D_2 \subseteq D$ — выпуклые непересекающиеся компакты (срезы лёгких). Известно, что коэффициент поглощения рентгеновских фотонов в лёгких и в воздухе немного выше нуля и можно приближенно считать его равным нулю. В части среза тела, не содержащей лёгкие, можно считать коэффициент поглощения рентгеновских фотонов примерно равным единице, что соответствует примерному значению коэффициента поглощения в воде.

Таким образом, считаем, что

$$a(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ 0, & x \in D_1 \cup D_2, \\ 1, & x \in D \setminus (D_1 \cup D_2). \end{cases}$$



Пусть γ — произвольная ориентированная прямая, вдоль которой происходит распространение рентгеновских фотонов. Обозначим через I_0 интенсивность излучения до прохождения через тело (начальную интенсивность), а через I_1 — интенсивность излучения после прохождения пучка фотонов через тело.

Нам известно значение $\frac{I_1}{I_0}$ для достаточно большого набора ориентированных прямых γ . Требуется найти коэффициент поглощения рентгеновских фотонов $a(x)$.

Одна из основных формул рентгеновской томографии, сводящая задачу о восстановлении коэффициента $a(x)$ к математической:

$$\frac{I_1}{I_0} = \exp \left(- \int_{\gamma} a(x) dx \right). \quad (1)$$

Математические основы рентгеновской томографии были заложены в работах [Radon, 1917], [John, 1937], [Cormack, 1963], Гельфандом и соавторами (в 1960-х и далее), [Helgason, 1965]. В 1979 году Cormack и Hounsfield получили Нобелевскую премию по физиологии и медицине за синтез идей, приведших к созданию первого рентгеновского томографа.

1.3 Основное дифференциальное уравнение рентгеновской томографии.

Дифференциальное уравнение

$$\theta \nabla_x \psi + a(x) \psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \theta \in S^{d-1}, \quad (2)$$

называется *основным дифференциальным уравнением рентгеновской томографии*. Параметр θ называется *спектральным параметром*. Мы будем считать, что функция $a(x)$ достаточно регулярна и локализована (быстро убывает на бесконечности), уточняя, что под этим имеется в виду, при формулировке теорем. Пока что мы будем считать, что функция $a(x)$ известна.

Покажем, как выводится уравнение (2). Интенсивность излучения рентгеновских фотонов в точке $x \in \mathbb{R}^d$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$ в направлении $\theta \in S^{d-1}$ задаётся формулой

$$I(x, t, \theta) = \psi(x) \delta(x\theta - ct), \quad (3)$$

где c — скорость света, δ — дельта-функция Дирака. Коэффициент поглощения рентгеновских фотонов $a(x)$ определяется формулой

$$-a(x)\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \varepsilon\theta) - \psi(x)}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Справа стоит производная по направлению θ от функции $\psi(x)$. Считая функцию $\psi(x)$ достаточно гладкой, можно переписать это определение коэффициента поглощения в виде уравнения (2).

Рассмотрим специальное решение $\psi^+(x, \theta)$ уравнения (2), характеризующееся предельным условием

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \psi^+(x + s\theta, \theta) = 1. \quad (5)$$

Это условие в терминологии теории рассеяния называется *условием излучения*. Такое решение всегда существует и единственно, если коэффициент $a(x)$ достаточно регулярен и локализован. Определим функцию

$$S(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow +\infty} \psi^+(x + s\theta, \theta), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \theta \in S^{d-1}, \quad (6)$$

называемую *спектральными данными* (или *данными рассеяния* в терминологии теории рассеяния).

Упражнение 1.1. Показать, что справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} S(x + \tau\theta, \theta) &= S(x, \theta), \\ S(x, \theta) &= S(\pi_\theta x, \theta), \end{aligned}$$

где π_θ — ортогональный проектор на плоскость $X_\theta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x\theta = 0\}$.

Функция $S(x, \theta)$ определена на прямом произведении $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$, но в силу упражнения 1.1 её естественно рассматривать на тотальном пространстве касательного расслоения над единичной сферой

$$TS^{d-1} = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \mid x\theta = 0\}. \quad (7)$$

Точки $\gamma = (x, \theta) \in TS^{d-1}$ мы будем интерпретировать как ориентированные прямые

$$\gamma = (x, \theta) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y = x + s\theta, s \in \mathbb{R}\}, \quad \theta \text{ задаёт ориентацию.}$$

Таким образом, мы будем интерпретировать TS^{d-1} как множество всех ориентированных прямых в \mathbb{R}^d .

1.4 Прямая и обратная задачи «рассеяния».

Прямая задача для дифференциального уравнения (2) состоит в нахождении по заданному коэффициенту поглощения $a(x)$ функций $\psi^+(x, \theta)$, а затем спектральных данных $S(x, \theta)$:

$$a \mapsto \psi^+ \mapsto S.$$

Обратная задача для дифференциального уравнения (2) заключается в нахождении по заданным спектральным данным $S(x, \theta)$ коэффициента поглощения $a(x)$:

$$S \mapsto a.$$

Решение прямой задачи даётся следующими формулами. Функция ψ^+ находится по формуле

$$\psi^+(x, \theta) = \exp(-Da(x, -\theta)), \quad (8)$$

где $Da(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} a(x + s\theta) ds$ — преобразование, известное в англоязычной литературе как *divergent beam transform*. Спектральные данные находятся по формуле

$$S(x, \theta) = \exp(-Pa(x, \theta)), \quad (9)$$

$$Pa(x, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} a(x + s\theta) ds = \int_{y \in \gamma=(x, \theta)} a dy. \quad (10)$$

Преобразование P называется *преобразованием Радона в роль прямых* или *лучевым преобразованием*.

Формула для спектральных данных S следует из определения (6) и из формулы (8) для функции ψ^+ . Чтобы получить формулу (8), будем искать решение ψ^+ уравнения (2) в виде $\psi^+(x, \theta) = \exp(\varphi^+(x, \theta))$. Тогда для функции φ^+ мы получим задачу

$$\theta \nabla_x \varphi^+ + a(x) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi^+(x + s\theta, \theta) = 0.$$

Решение этой задачи даётся формулой $\varphi^+(x, \theta) = Da(x, \theta)$.

2 Лекция 2.

2.1 Связь лучевого преобразования и преобразования Фурье.

Лучевое преобразование функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, определяется как

$$Pf(x, \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(x + s\theta) ds, \quad (x, \theta) \in TS^{d-1}. \quad (11)$$

Обозначим $P_\theta f(x) \stackrel{\text{def}}{=} Pf(x, \theta)$, $\theta \in S^{d-1}$, $x \in X_\theta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x\theta = 0\}$. Преобразование Фурье функции f задаётся формулой

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

определим также преобразование Фурье лучевого преобразования $P_\theta f$ формулой

$$(P_\theta f)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} \int_{X_\theta} e^{i\xi x} P_\theta f(x) dx, \quad \xi \in X_\theta, \theta \in S^{d-1}.$$

Предложение 2.1 (проекционная теорема). *Справедлива формула*

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) = (Pf)^\wedge(\xi), \quad \xi \in X_\theta, \theta \in S^{d-1}. \quad (12)$$

Доказательство. Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$\int_{X_\theta} e^{i\xi x} Pf(x) dx = \int_{X_\theta} e^{i\xi x} \int_{\mathbb{R}} f(x + s\theta) ds dx \stackrel{\xi\theta=0}{=} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi y} f(y) dy.$$

□

Проекционная теорема позволяет восстановить по лучевому преобразованию Pf функцию f по схеме

$$Pf \mapsto \hat{f} \mapsto f.$$

Заметим также, что для того, чтобы восстановить значение функции f в точке $x \in \mathbb{R}^d$ нам достаточно уметь восстанавливать значения функции, заданной в \mathbb{R}^2 . В самом деле, для того, чтобы восстановить значение функции f в точке $x \in \mathbb{R}^d$, нам достаточно провести через точку x двумерную плоскость $\Xi \simeq \mathbb{R}^2$ и применить к функции $f|_\Xi$ схему восстановления. Так мы найдём значение функции f в точке x . Поэтому далее мы будем подробнее рассматривать случай $d = 2$.

Упражнение 2.1. Имеет место изоморфизм $TS^1 \simeq \mathbb{R} \times S^1$, изоморфизм задаётся формулами

$$(s, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1 \mapsto (s\theta^\perp, \theta) \in TS^1, \\ (x, \theta) \in TS^1 \mapsto (x\theta^\perp, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1,$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1$, $\theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1)$ — вектор, получаемый поворотом вектора θ на прямой угол против часовой стрелки. Этот изоморфизм удобен для выбора координат на TS^1 .

Формулу из предложения 2.1 с учётом упражнения 2.1 удобно переписать в случае $d = 2$ в виде

$$\hat{f}(r\theta^\perp) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{irs} q_\theta(s) ds, \quad (13)$$

где $q_\theta(s) \stackrel{def}{=} Pf(s\theta^\perp, \theta)$, $s \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^1$.

2.2 Формула Радона.

Теорема 2.1 (Радон, 1917). *Справедлива следующая формула:*

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} \theta^\perp \nabla \tilde{q}_\theta(x\theta^\perp) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$\tilde{q}_\theta(s) = (Hq_\theta)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{q_\theta(t)}{s-t} dt,$$

$$q_\theta(s) = Pf(s\theta^\perp, \theta), \quad s \in \mathbb{R}, \theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1, \theta^\perp = (-\theta_2, \theta_1).$$

Функция $\tilde{q}_\theta(s)$ называется *фильтрованной проекцией*.

Замечание 2.1.1. Здесь п.в. обозначает интеграл в смысле главного значения:

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{s-t} dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{+\infty} \right] \left(\frac{u(t) dt}{s-t} \right) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-t+i\varepsilon} + \frac{1}{s-t-i\varepsilon} \right) u(t) dt.$$

Для численного вычисления интегралов в смысле главного значения может быть использована следующая формула, получаемая с использованием теоремы о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ips} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{s-t} dt = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn} p \int_{\mathbb{R}} e^{-ipt} u(t) dt.$$

Замечание 2.1.2. Формула Радона сейчас является базовой в приложениях. На ней основан алгоритм *обратной проекции с фильтрацией* (англ. *filtered backprojection algorithm*).

Доказательство. Имеет место следующая цепочка равенств, использующая выражение для обратного преобразования Фурье в полярных координатах:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{S^1} \int_0^{+\infty} e^{-ir\theta^\perp x} \hat{f}(r\theta^\perp) r dr d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} e^{-ir\theta^\perp x} \hat{f}(r\theta^\perp) r \operatorname{sgn} r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ir(s-\theta^\perp x)} q_\theta(s) ds r \operatorname{sgn} r dr d\theta. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая равенство

$$\int_{\mathbb{R}} e^{irs} (-i) \operatorname{sgn} r dr = \frac{1}{s+i0} + \frac{1}{s-i0},$$

проверяемое применением преобразования Фурье к обеим частям и вычислением интеграла справа с помощью теоремы о вычетах, мы получаем формулу из формулировки теоремы. \square

Итак, из формулы Радона следует, что знание Pf на TS^1 позволяет однозначно определить f на \mathbb{R}^2 .

Упражнение 2.2. Рассмотрим лучевое преобразование P в трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^3$ — выпуклый компакт. Обозначим через

$$\Omega(D) = \{\gamma \in TS^2 \mid \gamma \cap D = \emptyset\}$$

множество всех ориентированных прямых в \mathbb{R}^3 , не пересекающих D . Можно ли однозначно определить f на $\mathbb{R}^3 \setminus D$, зная $Pf|_{\Omega(D)}$?

2.3 Преобразование Радона в более общих случаях.

Мы рассмотрим некоторые обобщения лучевого преобразования и приведём без доказательства результаты, аналогичные проекционной теореме и формуле Радона.

Пусть Σ — неориентированная n -плоскость в \mathbb{R}^d . Преобразование

$$R_{d,n}f(\Sigma) = \int_{y \in \Sigma} f dy \quad (14)$$

называется *преобразованием Радона вдоль плоскостей размерности n* . Областью определения преобразования $R_{d,n}$ выступает множество всех неориентированных плоскостей размерности n в \mathbb{R}^d , обозначаемое $M_{d,n}$.

Преобразования $R_{d,d-1}$, $d \geq 2$, были впервые рассмотрены в работе [Radon, 1917]. В рентгеновской томографии помимо P (или $R_{3,1}$, если не учитывать ориентацию прямых) особое значение имеет преобразование $R_{3,2}$:

$$R_{3,2}f(s, \theta) = \int_{y\theta=s} f(y) dy, \quad (s, \theta) \in \mathbb{R} \times S^2.$$

В силу неориентированности плоскостей выполняется свойство чётности:

$$R_{3,2}f(s, \theta) = R_{3,2}f(-s, -\theta).$$

Предложение 2.2 (аналог проекционной теоремы для $R_{3,2}$). *Справедлива следующая формула*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s} R_{3,2}f(s, \theta) ds = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\sigma\theta x} f(x) dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \theta \in S^2.$$

Теорема 2.2 (аналог т. 2.1, Радон, 1917). *Справедлива формула*

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta_x \int_{S^1} R_{3,2}f(x\theta, \theta) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Приведённые предложение и теорема доказываются аналогично предложению 2.1 и теореме 2.1.

На работу [Radon, 1917] повлияли результаты [Minkovski, 1904] и [Funk, 1913]. Минковский занимался геометрическими задачами и интересовался особыми метриками на S^2 . В его работе [Minkovski, 1904] было введено преобразование

$$MFf(\omega) = \int_{\theta \in S^1, \theta\omega=0} f(\theta) d\theta, \quad \omega \in S^2,$$

в котором интегрирование ведётся по большим кругам на сфере. Для этого преобразования Функом в работе [Funk, 1913] была найдена формула обращения, превосходящая формулу Радона. Сейчас преобразование MF известно как *преобразование Минковского–Функа*. Приложения к рентгеновской томографии были осмыслены только лишь после 1960-х годов Кормаком и другими.

Упражнение 2.3. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 произвольную двумерную плоскость Σ . Пусть T — множество всех прямых $T \subseteq TS^2$, параллельных Σ . Тогда $Pf|_T$ однозначно определяет $R_{3,2}f$ на Σ .

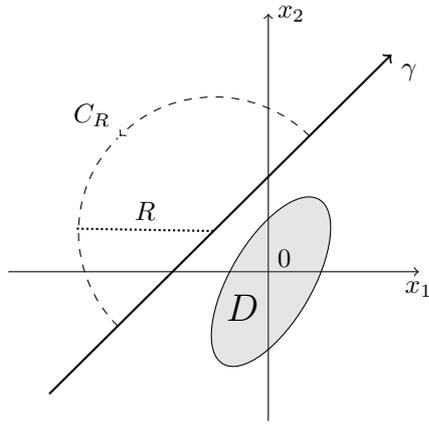
Пусть теперь $D \subseteq \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт. Как и прежде,

$$\Omega(D) = \{\gamma \in TS^1 \mid \gamma \cap D = \emptyset\}.$$

Пусть Pf задано только на множестве $\Omega(D)$. Возникает вопрос, определяет ли такая информация функцию f на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus D$ однозначно? Следующий пример показывает, что в общем случае ответ отрицательный.

Пример 2.1. Рассмотрим семейство функций $f(x) = \operatorname{Re} \frac{1}{(x_1 + ix_2)^n}$, где $n = 2, 3, \dots$. Пусть выпуклый компакт $D \subseteq \mathbb{R}^2$ содержит точку 0 . В таком случае, имеет место равенство $Pf|_{\Omega(D)} \equiv 0$. Достаточно показать это равенство для функции $f(x) = \frac{1}{(x_1 + ix_2)^n}$. Для вычисления интеграла

$$Pf(s\theta^\perp, \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(t\theta + s\theta^\perp) dt = \int_{\gamma=(s\theta^\perp, \theta)} z^{-n}(\theta_1 + i\theta_2)^{-1} dz$$



воспользуемся стандартным приёмом из комплексного анализа, представляя

$$\int_{\gamma} z^{-n} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{z \in \gamma, |z| \leq R} z^{-n} dz.$$

Далее следует рассмотреть интеграл по объединению отрезка $\{z \in \gamma \mid |z| \leq R\}$ и примыкающей к его концам полуокружности C_R . По теореме о вычетах интеграл будет равен нулю, а интеграл по полуокружности C_R будет стремиться к нулю при $R \rightarrow +\infty$, откуда будет следовать, что и интеграл по отрезку будет стремиться к нулю при $R \rightarrow +\infty$.

Оказывается, что причиной появления такого примера является недостаточно быстрое убывание функции f на бесконечности. Имеет место следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 2.3 (Cormack, 1963). Пусть $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт. Тогда $Pf|_{\Omega(D)}$ однозначно определяет f на $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

3 Лекция 3.

3.1 Теорема Кормака–Хелгасона.

Мы продолжаем изучение преобразования P (или $R_{d,1}$), а также преобразования $R_{3,2}$. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^d$ — выпуклый компакт,

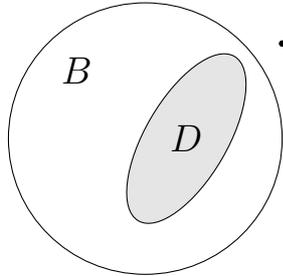
$$\Omega_{d,n}(D) = \{\Sigma \in M_{d,n} \mid \Sigma \cap D = \emptyset\}$$

множество всех n -мерных неориентированных плоскостей в \mathbb{R}^d , не пересекающих D . Нас интересует вопрос о возможности однозначного восстановления $f|_{\mathbb{R}^d \setminus D}$, если известно $R_{d,n}f|_{\Omega_{d,n}(D)}$. Мы привели пример, показывающий, что в случае преобразования $R_{2,1}$ эта задача в общем случае неразрешима.

Пример 3.1. Привести аналогичный пример в случае $R_{3,2}$. (Указание: отталкиваться от построенного примера для преобразования $R_{2,1}$.)

Теорема 3.1 (Cormack (1963–1964), $d = 2$; Helgason (1965), $d \geq 2$). Пусть $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Тогда $R_{d,d-1}f|_{\Omega_{d,d-1}(D)}$ однозначно определяет $f|_{\mathbb{R}^d \setminus D}$.

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $d = 2$. В случае $d \geq 3$ доказательство проводится аналогично, но возникают дополнительные технические трудности.



• x Так как D — выпуклый компакт, то для любой точки $x \in \mathbb{R}^d \setminus D$ найдётся такой замкнутый круг B , что $D \subseteq B$, $x \notin B$. Поэтому перенося, если требуется, начало координат в центр этого круга, достаточно провести доказательство теоремы в случае, когда множество D есть круг с центром в нуле:

$$D = B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq \rho\}.$$

Используя полярные координаты, представим координаты x_1 и x_2 в виде $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$ и разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье по переменной φ при каждом фиксированном r :

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_l(r) e^{il\varphi}. \quad (15)$$

Пусть теперь $\theta = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\theta^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$. Разложим в ряд Фурье по переменной $(\varphi + \frac{\pi}{2})$ при каждом фиксированном s лучевое преобразование $P(s\theta^\perp, \theta)$:

$$P(s\theta^\perp, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} q_l(s) e^{il(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (16)$$

Если мы покажем, что значение коэффициентов $f_l(r)$ при $r \geq \rho$ однозначно определяются значениями коэффициентов $q_l(s)$ при $s \geq \rho$, то теорема будет доказана. Но доказательство этого факта следует из следующей теоремы. \square

3.2 Формулы Кормака.

Теорема 3.2 (формулы Кормака (1963–1964)). Пусть $f \in S(\mathbb{R}^2)$. Тогда справедливы следующие формулы:

$$q_l(s) = 2 \int_s^{+\infty} T_{|l|} \left(\frac{s}{r} \right) \left(1 - \frac{s^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} f_l(r) dr, \quad s > 0, \quad (17)$$

$$f_l(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} (s^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} T_{|l|} \left(\frac{s}{r} \right) q'_l(s) ds, \quad r > 0. \quad (18)$$

Здесь T_m — полиномы Чебышёва первого рода, которые можно определить двумя различными способами:

1. рекуррентно:

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{l+1}(x) + T_{l-1}(x) = 2xT_l(x), \quad l = 1, 2, \dots,$$

2. явной формулой:

$$T_l(x) = \begin{cases} \cos(l \arccos x), & |x| \leq 1, \\ \cosh(l \operatorname{arccosh} x), & |x| \geq 1, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 3.2.1. Формулы Кормака были обобщены на случай преобразования $R_{d,d-1}$ в работе [Deans,1979].

Замечание 3.2.2. Формулы Кормака дают альтернативный способ обращения преобразования Радона. Кормак был прикладным физиком и не знал о работе Радона. Затем работы Радона и Кормака удалось согласовать.

Доказательство. Формулы Кормака достаточно доказать для случая, когда $f(x) = f_l(r)e^{il\varphi}$, $l \in \mathbb{Z}$. Для простоты рассмотрим случай $l = 0$, при $l \neq 0$ доказательство аналогичное. Имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} Pf(s\theta^\perp, \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_0((t^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}) dt = 2 \int_0^{+\infty} f_0((t^2 + s^2)^{\frac{1}{2}}) dt = \\ &= 2 \int_s^{+\infty} (r^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} r f_0(r) dr = 2 \int_s^{+\infty} \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} f_0(r) dr, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Формула (17) получена. Чтобы получить формулу (18), нужно рассмотреть формулу (17) как интегральное уравнение на функцию $f_0(r)$. Это интегральное уравнение типа Абеля. Чтобы решить его, проведём следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_r^{+\infty} \frac{sq_0(s)}{(s^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} ds &= 2 \int_r^{+\infty} \int_s^{+\infty} \frac{1}{(s^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{tf_0(t)}{(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} dt ds = \\ &= 2 \int_r^{+\infty} tf_0(t) \int_r^t \frac{s ds}{((s^2 - r^2)(t^2 - s^2))^{\frac{1}{2}}} dt = \pi \int_r^{+\infty} tf_0(t) dt, \quad (19) \end{aligned}$$

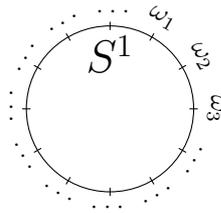
где мы вычислили с помощью замены $s' = \frac{r^2 + t^2 - 2s^2}{r^2 + t^2}$ интеграл

$$\int_r^t \frac{s ds}{((s^2 - r^2)(t^2 - s^2))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - (s')^2)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя формулу (19) и выражая $f_0(r)$, получим

$$f_0(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{sq_0(s)}{(s^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} ds \stackrel{t=s^2-r^2}{=} -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{q'_0(s)}{(s^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Формулы Кормака выведены. Для более подробного вывода см. [F. Natterer, «The mathematics of computerized tomography», 1986] (имеется русский перевод издательства М: Мир, 1990) или [Cormack, 1963–1964 // Journal of applied physics, v. 34, n. 9, pp. 2722–2727]. \square



Упражнение 3.1. Построить вещественную функцию $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$ такую, что $P_\theta f(s) = 0$ для $\theta \in \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, где $\omega_1, \dots, \omega_N$ — N различных равномерно распределённых на окружности S^1 направлений. (Указание: искать функцию f в виде $f(x) = f_N(r)e^{-iN\varphi} + f_N(r)e^{iN\varphi} = 2f_N(r)\cos(N\varphi)$.)

Упражнение 3.2. Пусть $f \in C_0(\mathbb{R}^2)$. Доказать, что знание $P_{\theta(\psi)}f(s)$ на множестве $\{\psi \in [0, \varepsilon], s \in \mathbb{R}\}$, где $\varepsilon > 0$, $\theta(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)$, однозначно определяет функцию $f|_{\mathbb{R}^2}$. (Указание: применить проекционную теорему 2.1; использовать, что преобразование Фурье от функции с компактным носителем является вещественно аналитической функцией (раскладывается в ряд Тейлора в окрестности каждой точки области определения); использовать, что если вещественно аналитическая на \mathbb{R}^2 функция u обнуляется на некотором непустом открытом множестве, то $u \equiv 0$ в \mathbb{R}^2 .)

4 Лекция 4.

4.1 Описание образа лучевого преобразования.

Мы рассматриваем лучевое преобразование как отображение $P: S(\mathbb{R}^2) \rightarrow S(TS^1)$, где в силу изоморфизма $TS^1 \simeq \mathbb{R} \times S^1$ под $S(TS^1)$ мы понимаем $S(\mathbb{R} \times S^1)$ (см. упр. 2.1). Нас интересует описание образа $\text{Im } P$ этого преобразования.

Теорема 4.1 (Гельфанд, Граев (1960); Helgason (1965)). (A) Пусть $f \in S(\mathbb{R}^2)$, $q(s, \theta) = Pf(s\theta^\perp, \theta)$. Тогда

(a) $q \in S(TS^1)$,

(b) $q(-s, -\theta) = q(s, \theta)$,

(c) $P_m(\theta) = \int_{\mathbb{R}} s^m q(s, \theta) ds$ — однородный полином степени m , где $m = 0, 1, \dots$, то есть

$$P_m(\theta) = \sum_{\substack{j_1 + j_2 = m \\ j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0}} c_{j_1 j_2} \theta_1^{j_1} \theta_2^{j_2}, \quad \mathbb{N}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(B) Если q удовлетворяет (a), (b), (c), то $q = Pf$ для некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. (А) Пункт (b) очевиден, пункт (a) легко проверяется технически. Проверим пункт (c):

$$\int_{\mathbb{R}} s^m q(s, \theta) ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s^m f(s\theta^\perp + t\theta) dt ds = \int_{\mathbb{R}^2} (\theta^\perp x)^m f(x) dx.$$

(В) Приведём схему доказательства, предложенную Хелгасоном. Эта же схема доказательства годится и при доказательстве аналога этой теоремы в случае преобразования $R_{d,d-1}$, $d \geq 3$. Определим функцию $\hat{f}(\xi^\perp)$ формулой

$$\hat{f}(\xi^\perp) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \hat{q}\left(|\xi|, \frac{\xi}{|\xi|}\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \xi^\perp = (-\xi_2, \xi_1), \quad (20)$$

где $\hat{q}(\sigma, \theta)$ — преобразование Фурье функции q :

$$\hat{q}(\sigma, \theta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma s} q(s, \theta) ds. \quad (21)$$

Пока что $\hat{f}(\xi^\perp)$ — просто обозначение (мы не подразумеваем, что это преобразование Фурье функции f). Из свойства чётности (b) и из формул (20) и (21) следует, что функция \hat{f} удовлетворяет свойству

$$\overline{\hat{f}(\xi^\perp)} = \hat{f}(-\xi^\perp),$$

которому удовлетворяет преобразование Фурье вещественных функций. Теперь перепишем формулу (20) в виде

$$\hat{f}(\sigma\theta^\perp) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \hat{q}(\sigma, \theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \theta \in S^1. \quad (22)$$

Если мы покажем, что $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^2)$, то \hat{f} будет равняться преобразованию Фурье некоторой функции $f \in S(\mathbb{R}^2)$, для которой в силу проекционной теоремы будет верно $q = Pf$. Поэтому для завершения доказательства теоремы надо показать, что $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^2)$. Это доказательство техническое, проведём лишь основную схему.

Пользуясь представлением для производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sin \varphi}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\cos \varphi}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

где (σ, φ) — полярные координаты на плоскости, и формулой (22), получим, что $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^2 \setminus B_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, где B_ε — круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в нуле.

Осталось показать, что $\hat{f} \in C^\infty(B_\varepsilon)$. Это показывается с использованием свойства (c). Покажем, например, как из свойства (c) при $m = 0$ следует непрерывность f в круге B_ε . Существует предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \hat{q}(\sigma, \theta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} q(s, \theta) ds,$$

который в силу условия (с) является однородной функцией степени нуль по θ , то есть от θ не зависит. Поэтому из формулы (20) видно, что предел $\hat{f}(\xi^\perp)$ при $|\xi| \rightarrow +0$ существует и равен $f(0)$. Показывать непрерывную дифференцируемость произвольного порядка в нуле не будем. \square

Замечание 4.1.1. Как было замечено при доказательстве теоремы 4.1, аналогичная теорема верна и в случае преобразования $R_{d,d-1}$, $d \geq 3$. Более точно, функция g представима в виде $g = R_{d,d-1}f$, где $f \in S(\mathbb{R}^d)$, тогда и только тогда, когда $g \in S(\mathbb{R} \times S^{d-1})$, $g(-s, -\theta) = g(s, \theta)$ и функция $P_m(\theta) = \int_{\mathbb{R}} s^m q(s, \theta) ds$ является однородным полиномом степени m :

$$P_m(\theta) = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_d = m \\ j_1, \dots, j_d \in \mathbb{N}_0}} c_{j_1 \dots j_d} \theta_1^{j_1} \dots \theta_d^{j_d}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

При доказательстве пункта (В) теоремы 4.1 мы пользовались свойством (с) для доказательства гладкости в нуле преобразования Фурье функции f . Как известно, гладкость функции непосредственно связана со скоростью убывания преобразования Фурье этой функции и наоборот. Оказывается, что от свойства (с) в пункте (В) теоремы 4.1 можно отказаться, но тогда функция f перестанет убывать быстрее любой наперёд заданной степени на бесконечности.

Теорема 4.2 (Solmon (1986)). Пусть g удовлетворяет (1), (2). Тогда $g = R_{d,d-1}f$, где $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ и

$$\frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}} = O\left(\frac{1}{|x|^{d+|j|}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Замечание 4.2.1 (Новиков (2002)). Более точно, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место следующая формула:

$$f(x) = (R_{d,d-1}g)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} |x|^{-d-j} C_j \left(\frac{x}{|x|}\right) + O(|x|^{-d-k}), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

$$C_j \left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{(j+d-1)!}{j!(-2\pi i)^d} \int_{S^{d-1}} \left(\theta \frac{x}{|x|} + i0\right)^{-d-j} g_j(\theta) d\theta, \quad g_j(\theta) = \int_{\mathbb{R}} g(s, \theta) s^j ds,$$

где $\theta \in S^{d-1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, причём если $g_j(\theta)$ — однородный полином степени j , то $C_j \equiv 0$ на S^{d-1} .

Упражнение 4.1. Найти необходимые и достаточные условия на функции вида

$$q(s, \theta) = \begin{cases} q_l(s) \cos\left(l\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right), \\ q_l(s) \cos\left(l\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right), \end{cases} \quad \theta = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

для того, чтобы функция q принадлежала образу $P(S(\mathbb{R}^2))$.

4.2 Описание образа в многомерном случае.

Рассмотрим преобразование $P: S(\mathbb{R}^d) \rightarrow S(TS^{d-1})$ в случае $d \geq 3$. Заметим, что $\dim \mathbb{R}^d = d$, а

$$\dim TS^{d-1} = 2(d-1) \begin{cases} = d, & d = 2, \\ > d, & d = 3, 4, \dots \end{cases}$$

В случае $d \geq 3$ преобразование P сопоставляет функции, зависящей от d аргументов функцию, зависящую от большего числа аргументов. Поэтому эта последняя функция должна удовлетворять некоторым достаточно ограничительным условиям. Найдём эти условия. Для простоты мы будем рассматривать случай $d = 3$. В этом случае $\dim TS^2 = 4$.

Введём на многообразии всех неориентированных прямых $M_{3,1}$ локальные координаты, покрывая $M_{3,1}$ тремя координатными картами $M_{3,1} \setminus V_j$, $j = 1, 2, 3$, где

$$V_j = \{l = (x, \pm\theta) \in M_{3,1} \mid \theta_j = 0\}, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in S^2.$$

На карте $M_{3,1} \setminus V_3$ определим локальные координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ следующим образом:

$$l = \langle (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \rangle = \{(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Аналогично вводятся локальные координаты в картах $M_{3,1} \setminus V_j$, $j = 1, 2$. Теперь введём обозначение

$$Pf(l) = \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2} g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2).$$

Тогда $g(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_1 x_3 + \beta_1, \alpha_2 x_3 + \beta_2, x_3) dx_3$.

Теорема 4.3 (F. John (1938)). (A) Пусть $g \in P(S(\mathbb{R}^3))$. Тогда $g \in S(M_{3,1})$ и g удовлетворяет уравнению

$$\square g \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1} \right) g = 0. \quad (23)$$

(B) Пусть $g \in S(M_{3,1})$ и g удовлетворяет уравнению (23). Тогда $g \in P(S(\mathbb{R}^3))$.

Доказательство. (A) Свойство $g \in S(M_{3,1})$ проверяется технически. Чтобы доказать, что g удовлетворяет (23), подставим выражение для g в это уравнение. Получим:

$$\square g = \int_{\mathbb{R}} (x_3 f_{x_1 x_2} - x_3 f_{x_2 x_1}) = 0.$$

Пункт (B) доказывать не будем. □

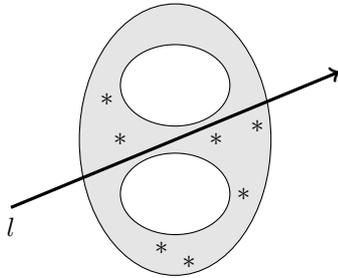
5 Лекция 5.

5.1 Эмиссионная томография. Однофотонная эмиссионная томография (СПЕКТ).

Однофотонная эмиссионная томография (англ. *Single-Photon Emission Computed Tomography*) — самая классическая из эмиссионных томографий. Этот вид томографии возникает в следующей медицинской задаче.

Задача 5.1. Человек принимает медикамент (или ему вводится медикамент, например, внутривенно) и требуется определить распределение медикамента в теле через некоторое время. Это чисто медицинская задача определения распределения медикамента в теле человека через некоторое время после его приёма. Способ решения этой задачи — химико-физический. В формуле медикамента некоторые атомы заменяются их радиоактивными изотопами. Так эта задача сводится к следующей.

Задача 5.2. Требуется определить распределение радиоактивных изотопов в теле по радиации, замеренной вокруг тела в течение некоторого времени Δt . Радиация измеряется в γ -фотонах, частоты которых чуть выше, чем у рентгеновских фотонов. Радиация измеряется вдоль фиксированных ориентированных прямых l . В конце каждой такой ориентированной прямой стоит детектор, измеряющий количество достигших его фотонов за время Δt . Таким образом, данные измерений целочисленны.



Обозначим через $\mathbb{P}(l)$ — случайную величину, равную количеству γ -фотонов, достигших детектора в конце прямой l за время Δt . Реализация случайной величины $\mathbb{P}(l)$ — замеряемая радиация. Известно, что $\mathbb{P}(l)$ — пуассоновская случайная величина с математическим ожиданием

$$M\mathbb{P}(l) = C_1 \Delta t \int_{y \in l = (x, \theta) \in TS^{d-1}} W_a(y, \theta) f(y) dy,$$

где C_1 — константа, зависящая от аппаратуры, $f(y)$ — плотность распределения радиоактивных изотопов в теле, которую требуется найти, $W(y, \theta)$ — вес, имеющий вид

$$W_a(y, \theta) = \exp \left(- \int_0^{+\infty} a(y + s\theta) ds \right), \quad y \in \mathbb{R}^d, \theta \in S^{d-1},$$

и a — коэффициент поглощения γ -фотонов. Имеются формулы пересчёта коэффициента поглощения γ -фотонов через коэффициент поглощения рентгеновских фотонов. Коэффициент поглощения рентгеновских фотонов мы уже умеем восстанавливать, поэтому в этой задаче можно считать коэффициент a известным. Так мы приходим к следующей математической задаче.

Задача 5.3. Обозначим

$$P_{W_a} f(l) = \int_{y \in l = (x, \theta)} W_a(y, \theta) f(y) dy.$$

Требуется найти $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, по заданному $P_{W_a} f$ на $T \subseteq TS^{d-1}$ и по заданному коэффициенту a . Основным интерес представляют случаи $d = 2, 3$. При этом в случае $d = 3$ задачу можно свести к двумерной, рассматривая её в двумерных плоскостях.

5.2 Общие математические результаты для P_W .

Рассмотрим более общую задачу. Будем рассматривать преобразование P_W в случае, когда W — произвольная функция со свойствами $W \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$, $W \geq C > 0$. Имеют место следующие результаты:

1. $\ker P_W = 0$ в $C_0(\mathbb{R}^2)$, если W вещественно аналитична по переменным $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$. Этот результат получен в работе [Boman, Quinto (1987)].
2. Имеется пример, когда $\ker P_W \neq 0$ в $C_0(\mathbb{R}^2)$, но при этом $W \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times S^1)$. Этот результат получен в работе [Boman (1993)].
3. Известна приближённая формула

$$f_{\text{appr}}(x) = \frac{1}{4\pi w_0(x)} \int_{S^1} h'(x\theta^\perp, \theta) d\theta, \quad h' = \frac{d}{ds} h(s, \theta),$$

$$h(s, \theta) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{P_W f(t, \theta)}{s-t} dt, \quad (s, \theta) \in TS^1 \simeq \mathbb{R} \times S^1,$$

$$w_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} W(x, \theta) d\theta.$$

Эта формула была получена в случае

$$W_a(y, \theta) = \exp \left(- \int_0^{+\infty} a(y + s\theta) ds \right)$$

в работе [Chang (1978) // IEEE Transactions on Nuclear Science]. В случае $a \equiv 0$ эта формула сводится к точной формуле обращения Радона. Формула Чанга часто применяется в СПЕКТ в качестве начального приближения. Дальше, как правило, используют итерационные уточнения.

Теорема 5.1 (Новиков (2011) // УМН). Пусть W — комплекснозначная функция, $W \in C(\mathbb{R}^2 \times S^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2 \times S^1)$, $w_0(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}^2$. При этих условиях $f_{\text{appr}} \equiv f$ для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда $W(x, \theta) - w_0(x) \equiv w_0(x) - W(x, -\theta)$.

Доказательство. Доказательство необходимости приведём в виде схемы из трёх упражнений. Пусть выполнено соотношение $W(x, \theta) - w_0(x) \equiv w_0(x) - W(x, -\theta)$.

Упражнение 5.1. Имеет место формула

$$f_{\text{appr}}(x) = \frac{1}{4\pi w_0(x)} \int_{S^1} g'(x\theta^\perp, \theta) d\theta, \quad g' = \frac{d}{ds} g(s, \theta),$$

$$q(s, \theta) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{2}(P_W f(t, \theta) + P_W f(t, -\theta))}{s - t} dt.$$

Упражнение 5.2. Имеет место равенство

$$\frac{1}{2}(P_W f(t, \theta) + P_W f(t, -\theta)) = P_{W_{\text{sym}}}(x, \theta),$$

$$W_{\text{sym}}(x, \theta) = \frac{1}{2}(W(x, \theta) + W(x, -\theta)) \equiv w_0(x).$$

Упражнение 5.3. Пусть $W \equiv w_0(x)$. Тогда $f_{\text{appr}} \equiv f$.

Достаточность теоремы доказывать не будем, доказательство достаточности можно найти в работе [Новиков (2011) // УМН]. \square

5.3 Основное дифференциальное уравнение СПЕКТ.

Следующее уравнение является *основным уравнением однофотонной эмиссионной томографии*:

$$\theta \nabla_x \psi + a(x)\psi = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \theta \in S^{d-1}, \quad (24)$$

для простоты мы считаем функции a и f достаточно регулярными и с компактным носителем. Известно, что для любого $\theta \in S^1$ существует и единственно ограниченное решение $\psi^+(x, \theta)$ уравнения (24), удовлетворяющее условию излучения $\psi^+(x+s\theta, \theta) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow -\infty$, $x \in \mathbb{R}^d$. Функция $\psi^+(x, \theta)$ описывает излучение в точке x в направлении θ . Существует предел

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi^+(x + s\theta, \theta) = S(x, \theta), \quad (x, \theta) \in TS^{d-1},$$

причём функция $S(x, \theta)$ называется *спектральными данными* или *данными рассеяния* в терминологии теории рассеяния.

Прямая задача для уравнения (24) заключается в нахождении по коэффициенту поглощения a и по плотности f функции ψ^+ , а затем спектральных данных S :

$$a, f \mapsto \psi^+ \mapsto S. \quad (25)$$

Обратная задача для уравнения (24) заключается в нахождении плотности f по коэффициенту поглощения a и по спектральным данным S :

$$a, S \mapsto f. \quad (26)$$

Упражнение 5.4. Показать, что решение прямой задачи (25) даётся явными формулами:

$$\begin{aligned}\psi^+(x, \theta) &= e^{-Da(x, -\theta)} \int_{-\infty}^0 e^{-Da(x+t\theta, -\theta)} f(x+t\theta) dt, \\ Da(x, \theta) &= \int_0^\infty a(x+s\theta) ds, \\ S(x, \theta) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-Da(x+\tau\theta, -\theta)} f(x+\tau\theta) d\tau \equiv P_{W_a} f.\end{aligned}$$

6 Лекция 6.

6.1 Точная формула обращения для преобразования P_{W_a} .

Теперь обратимся к решению обратной задачи (26). Мы рассмотрим случай $d = 2$. Требуется восстановить по a и $S = P_{W_a} f$ функцию f . Решение этой задачи даётся следующей теоремой.

Теорема 6.1 (Новиков (2002)). *Справедлива следующая формула:*

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^1} \theta^\perp \nabla_x K(x, \theta) d\theta, \quad K(x, \theta) = e^{-Da(x, -\theta)} \tilde{q}_\theta(x\theta^\perp), \\ \tilde{q}_\theta(s) &= e^{A_\theta(s)} \cos(B_\theta(s)) H(e^{A_\theta} \cos(B_\theta) q_\theta)(s) + e^{A_\theta(s)} \sin(B_\theta(s)) H(e^{A_\theta} \sin(B_\theta) q_\theta), \\ A_\theta(s) &= \frac{1}{2} Pa(s\theta^\perp, \theta), \quad B_\theta(s) = HA_\theta(s), \quad q_\theta(s) = P_{W_a}(s\theta^\perp, \theta), \\ Hu(s) &= \frac{1}{\pi} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{s-t} dt, \quad Da(x, \theta) = \int_0^{+\infty} a(x+s\theta) ds.\end{aligned}$$

Замечание 6.1.1. В случае $a \equiv 0$ эта формула сводится к формуле обращения Радона.

Доказательство. Для простоты мы будем считать, что $a \equiv 0$, в общем случае схема доказательства аналогична. Мы рассматриваем уравнение

$$\theta \nabla_x \psi = f. \quad (27)$$

Будем считать, что $x \in \mathbb{R}^2$, а спектральный параметр θ принадлежит более широкому множеству, чем S^1 :

$$\theta \in \Sigma = \left\{ \theta \in \mathbb{C}^2 \mid \theta^2 \stackrel{def}{=} \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1 \right\}.$$

Введём на одномерном комплексном многообразии Σ координату $\lambda = \theta_1 + i\theta_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если $\theta \in \Sigma$, то $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$;
2. если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ и $\theta_1 = \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda})$, $\theta_2 = \frac{1}{2i}(\lambda - \frac{1}{\lambda})$, то $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Sigma$;
3. если $\lambda \in T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$, то $\theta(\lambda) \in S^1$.

6.2 Комплексное многообразие Σ .

Предложение 6.1. 1. Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$ существует и единственно решение $\psi(x, \theta(\lambda))$ уравнения (27) такое, что $\psi(x, \theta(\lambda)) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

2. Решение $\psi(x, \theta(\lambda))$ обладает следующими свойствами:

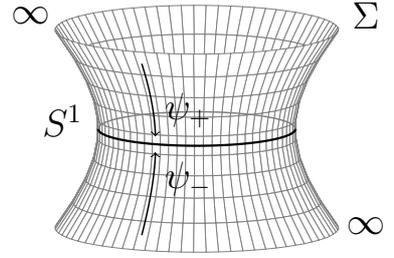
(a) $\psi(x, \theta(\lambda)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и при $\lambda \rightarrow 0$;

(b) $\frac{\partial \psi(x, \theta(\lambda))}{\partial \lambda} = 0$ если $\lambda \notin T$ (голоморфность);

(c) если обозначить $\psi_{\pm}(x, \theta(\lambda)) \stackrel{def}{=} \psi(x, \theta(\lambda(1 \pm 0)))$, $\lambda \in T$, то справедлива формула

$$\psi_+ - \psi_- = -i\tilde{q}_{\theta(\lambda)}(\theta^{\perp}(\lambda)x) = -iHq_{\theta(\lambda)}(\theta^{\perp}(\lambda)x), \quad (28)$$

где $q_{\theta}(s) = Pf(s\theta^{\perp}, \theta)$.



С помощью предложения 6.1 легко получить формулу обращения. Сначала по функции q мы получаем разность $(\psi_+ - \psi_-)(x, \theta(\lambda))$, заданную при $x \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in T$ по явной формуле (28). С помощью следующего упражнения получим функцию $\psi(x, \theta(\lambda))$, заданную при $x \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$.

Упражнение 6.1. Доказать формулу

$$\psi(x, \theta(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{(\psi_+ - \psi_-)(x, \theta(\zeta))}{\zeta - \lambda} d\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \frac{\tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta^{\perp}(\zeta)x)}{\zeta - \lambda} d\zeta, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0).$$

Далее, из уравнения (27) получим $f = \theta \nabla_x \psi$ или подробнее

$$f(x) = \theta^{\perp}(\lambda) \nabla_x \psi(x, \theta(\lambda)) = \theta^{\perp}(\lambda) \nabla_x \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \frac{\tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta^{\perp}(\zeta)x)}{\zeta - \lambda} d\zeta \right),$$

при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$. Теперь возьмём в этом выражении предел при $\lambda \rightarrow \infty$ и получим, что требовалось:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_T \tilde{q}_{\theta(\zeta)}(\theta^{\perp}(\zeta)x) d\zeta = \int_{S^1} \theta^{\perp} \nabla_x \tilde{q}_{\theta}(\theta^{\perp}x) d\theta.$$

Таким образом, схема обращения следующая:

$$q \xrightarrow{(c)} \psi_+ - \psi_- \xrightarrow{(a),(b),(c)} \psi(x, \theta(\lambda)) \xrightarrow{(27)} f.$$

Осталось доказать предложение 6.1.

Доказательство предложения 6.1. 1. Начнём с доказательства единственности. Предположим, что ψ_1 и ψ_2 — два решения с указанными свойствами: $\theta(\lambda)\nabla_x\psi_j = f$, $\psi_j \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$. Определим $u = \psi_1 - \psi_2$. Тогда u удовлетворяет уравнению $\theta(\lambda)\nabla_x u = 0$, $u \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \left(\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0. \quad (29)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1, & a = \operatorname{Re} \left(i \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right), \\ x_2 = ay_1 + by_2, & b = \operatorname{Im} \left(i \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right). \end{cases}$$

Тогда уравнение (29) перепишется в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) u = 0, \quad u \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Это значит, что функция u целая и ограниченная. По теореме Лиувилля $u \equiv 0$. Поэтому $\psi_1 \equiv \psi_2$.

Теперь докажем существование указанного в формулировке предложения решения. Существование доказывается предъявлением явной формулы для решения через функцию Грина:

$$\begin{aligned} \psi(x, \theta(\lambda)) &= \int_{\mathbb{R}^2} G(x - y, \theta(\lambda)) f(y) dy, \\ G(x, \theta(\lambda)) &= \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\xi x} d\xi}{\theta_1(\lambda)\xi_1 + \theta_2(\lambda)\xi_2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $G(x, \theta)$ — функция Грина для оператора $\theta\nabla_x$:

$$(\theta\nabla_x)G(x, \theta) = \delta(x),$$

(после подстановки в эту формулу выражения для G слева получается $(2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x)$). Функция G вычисляется явно и равна

$$G(x, \theta(\lambda)) = \frac{\operatorname{sgn}(1 - |\lambda|)}{2\pi i \theta^\perp(\lambda)x}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0).$$

2. Докажем теперь вторую часть предложения (6.1). Пункты (а) и (b) следуют из явного вида решения $\psi(x, \theta(\lambda))$ через функцию Грина. Получим теперь (с). Определим

$$G_{\pm}(x, \theta(\lambda)) \stackrel{\text{def}}{=} G(x, \theta(\lambda(1 \pm 0))) = \pm \frac{1}{2\pi i \theta^{\perp}(\lambda)(x \mp i0) \operatorname{sgn}(\theta x)}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} G_+ - G_- &= p.v. \frac{1}{\pi i \theta^{\perp} x}, \\ \psi_+ - \psi_- &= \int_{\mathbb{R}^2} (G_+ - G_-)(x - y, \theta(\lambda)) f(y) dy = \\ &= \frac{1}{\pi i} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{d(\theta^{\perp} y)}{\theta^{\perp} x - \theta^{\perp} y} \int_{\mathbb{R}} f(y) d(\theta y) = \frac{1}{i} Hq_{\theta(\lambda)}(\theta^{\perp}(\lambda)x). \end{aligned}$$

Предложение доказано. \square

Перед тем как завершить доказательство теоремы, заметим, что приведённая схема доказательства является наилучшей известной в случае, когда $a \neq 0$. В случае же, когда $a \equiv 0$ логичнее воспользоваться доказательством теоремы Радона. В случае $a \neq 0$ для уравнения

$$\theta \nabla_x \psi + a(x)\psi = f(x), \quad \theta \in \Sigma, \quad (30)$$

справедлив аналог предложения 6.1.

Предложение 6.2. 1. Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$ существует и единственно решение ψ уравнения (30) такое, что $\psi(x, \theta(\lambda)) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

2. Это решение ψ удовлетворяет следующим свойствам:

- (a) $\psi(x, \theta(\lambda)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ и при $\lambda \rightarrow \infty$;
- (b) $\frac{\partial \psi(x, \theta(\lambda))}{\partial \lambda} = 0$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup 0)$;
- (c) определим $\psi_{\pm}(x, \theta(\lambda)) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, \theta(\lambda(1 \pm 0)))$, $\lambda \in T$. Тогда $\psi_+ - \psi_- = iK(x, \theta(\lambda))$, где K — ядро из формулы обращения в формулировке теоремы 6.1.

С учётом этого предложения теорема 6.1 в случае произвольного $a \neq 0$ доказывается по той же схеме, что и в случае $a \equiv 0$:

$$q \mapsto K \xrightarrow{(a),(b),(c)} \psi(x, \theta(\lambda)) \xrightarrow{(30)} f.$$

Детали доказательства можно найти в статье [Novikov (2002) // Arkiv för Mat.]. \square

Упражнение 6.2. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^3$ — выпуклый компакт. Обозначим, как и прежде,

$$\Omega(D) = \{l \in TS^{d-1} \mid l \cap D = \emptyset\},$$

в этом упражнении $d = 3$. Определяют ли однозначно функции $(P_{W_a} f)|_{\Omega(D)}$ и $a|_{\mathbb{R}^3 \setminus D}$ функцию $f|_{\mathbb{R}^3 \setminus D}$ в общем случае?

Открытый вопрос. Пусть $a, f \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт. Определяют ли однозначно функции $(P_{W_a} f)|_{\Omega(D)}$ и $a|_{\mathbb{R}^2 \setminus D}$ функцию $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus D}$ в общем случае? При $a \equiv 0$ ответ на этот вопрос сводится к теореме Кормака.