Схема Годунова 60 лет спустя

С.К. Годунов

(доклад подготовлен по совместным работам с Пешковым И.М., Киселевым С.П., Мали В.И. и Куликовым И.М.)

18 марта 2013 г., МИАН, г. Москва

Одномерные уравнения газовой динамики

Уравнение состояния: $\rho_0 E = \dfrac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma-1)}\left(\dfrac{\sigma(S)}{V}\right)^{\gamma-1}$

$$p = -E_V(V,S) \qquad p_V = -E_{VV}(V,S) \qquad \left[V(p,S)\right]_p = -\frac{1}{E_{VV}(V,S)} = -\frac{1}{a^2(V,S)}$$

I

$$\begin{array}{rcl|l}
\left[\rho_0 E(V,S) + \dfrac{\rho_0 u^2}{2}\right]_u = \rho_0 u & & \times & \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial m} = 0 \\
-\left[\rho_0 E(V,S) + \dfrac{\rho_0 u^2}{2}\right]_V = p & & \times & \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial m} = 0 \\
\left[\rho_0 E(V,S) + \dfrac{\rho_0 u^2}{2}\right]_S = T & & \times & \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\
\hline
 & & & \dfrac{\partial \rho_0\left(E + \dfrac{u^2}{2}\right)}{\partial t} + \dfrac{\partial p u}{\partial m} = 0
\end{array}$$

II

$$\boxed{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial m} = 0 \\
\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial m} = 0 \\
\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}}$$

$$u \pm \frac{p}{a}, S$$

римановы инварианты

Если предположить, что $a = \sqrt{E_{VV}(V,S)} = const$
то система **II** перепишется в виде:

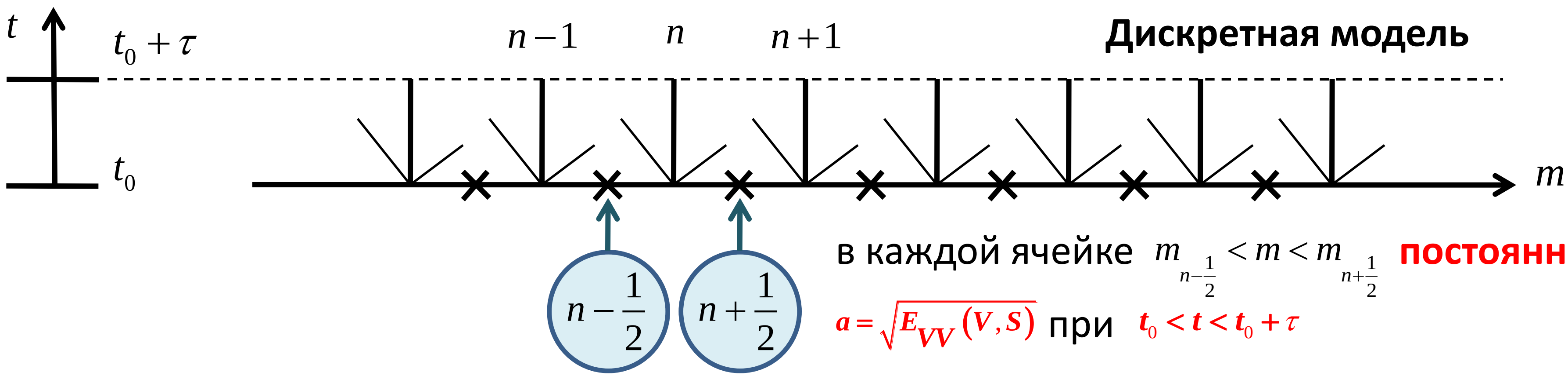
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{p}{a}\right) + a\frac{\partial}{\partial m}\left(u + \frac{p}{a}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{p}{a}\right) - a\frac{\partial}{\partial m}\left(u - \frac{p}{a}\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Эти соображения используются при конструировании **дискретной вычислительной модели**

Одномерные уравнения газовой динамики



Дискретная модель

в каждой ячейке $m_{n-\frac{1}{2}} < m < m_{n+\frac{1}{2}}$ **постоянно**

$a=\sqrt{E_{VV}(V,S)}$ при $t_0 < t < t_0+\tau$

при $t=t_0$ $\underbrace{V,S \quad p=-\rho_0 E_V(V,S)}$ внутри ячеек постоянны

Распады разрывов $p=P_n$ $u=U_n$ (на границах ячеек) находятся из уравнений

$$U_n+\frac{1}{a_{n-\frac{1}{2}}}P_n=u_{n-\frac{1}{2}}+\frac{1}{a_{n-\frac{1}{2}}}p_{n-\frac{1}{2}} \qquad U_n-\frac{1}{a_{n+\frac{1}{2}}}P_n=u_{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{a_{n+\frac{1}{2}}}p_{n+\frac{1}{2}}$$

и продолжаются кусочно-постоянными значениями u,p,V,S внутри ячеек при $t_0 < t < t_0+\tau$

При $t=t_0+\tau$ в ячейках находятся

$$u^{n+\frac{1}{2}}=u_{n+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{m_{n+1}-m_n}\left(P_{n+1}-P_n\right)$$

$$V^{n+\frac{1}{2}}=V_{n+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{m_{n+1}-m_n}\left(U_{n+1}-U_n\right)$$

$u^{n+\frac{1}{2}}$ $V^{n+\frac{1}{2}}$ могут быть **также** получены **усреднением** кусочно-постоянных значений внутри ячейки при $t=t_0+\tau$

$$\rho_0 E\left(V^{n+\frac{1}{2}},S_{n+\frac{1}{2}}\right)+\rho_0\frac{\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2}\le\rho_0 E\left(V_{n+\frac{1}{2}},S_{n+\frac{1}{2}}\right)+\rho_0\frac{\left(u_{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2}+\frac{\tau}{m_{n+1}-m_n}\left(P_{n+1}U_{n+1}-P_nU_N\right)$$

Если $E(V,S)$ выпукла по V

$E_S>0$ то $S^{n+\frac{1}{2}}\ge S_{n+\frac{1}{2}}$

$$\rho_0 E\left(V^{n+\frac{1}{2}},S^{n+\frac{1}{2}}\right)+\rho_0\frac{\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2}=\rho_0 E\left(V_{n+\frac{1}{2}},S_{n+\frac{1}{2}}\right)+\rho_0\frac{\left(u_{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2}+\frac{\tau}{m_{n+1}-m_n}\left(P_{n+1}U_{n+1}-P_nU_N\right)$$

Одномерные уравнения газовой динамики

Если $E(V,S)$ выпукла по V то $E_S > 0$ $\quad S^{n+\frac{1}{2}} \geq S_{n+\frac{1}{2}}$

$$\rho_0 E\left(V^{n+\frac{1}{2}}, S_{n+\frac{1}{2}}\right) + \rho_0 \frac{\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2} \leq \rho_0 E\left(V_{n+\frac{1}{2}}, S_{n+\frac{1}{2}}\right) + \rho_0 \frac{\left(u_{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2} + \frac{\tau}{m_{n+1} - m_n}\left(P_{n+1}U_{n+1} - P_n U_N\right)$$

$$\rho_0 E\left(V^{n+\frac{1}{2}}, S^{n+\frac{1}{2}}\right) + \rho_0 \frac{\left(u^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2} = \rho_0 E\left(V_{n+\frac{1}{2}}, S_{n+\frac{1}{2}}\right) + \rho_0 \frac{\left(u_{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{2} + \frac{\tau}{m_{n+1} - m_n}\left(P_{n+1}U_{n+1} - P_n U_N\right)$$

В нашей дискретной модели несмотря на **линеаризованные распады разрывов** справедлив **закон неубывания энтропии**

Изложенная конструкция почти **дословно** переносится на **двух-трехмерные** задачи и использовалась в упругой модели о которой речь пойдет ниже

В работе (*Годунов, Манузина, Назарьева, ЖВМиМФ, 2011*) экспериментально исследовалась слабая сходимость классической схемы Годунова при $h \to 0$ и получены порядки точности $h^{0.8}$ для u,V и $h^{0.5}$ для S .

В чем причина? (пока не выяснено)

В описанной **выше** модели – число точек, на которые размазывается ударная волна, **зависит от её амплитуды**, но не зависит от **шага сетки**.

Исследования должны быть продолжены.

Деформация и уравнение состояния упругой среды

Эйлеровы координаты:

$$x^i = x^i\big(\underbrace{\xi_1, \xi_2, \xi_3}, t\big)$$

лагранжевы координаты

$$\left\{\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right\} = \left\{C^i_j\right\} = C$$

Тензор дисторсии (несимметричный)

Обычно используемый тензор деформации (симметричный) CC^T

Мы будем использовать в качестве тензора деформации (симметричный) $\sqrt{CC^T}$

Уравнение состояния упругой среды $\rho_0 E$ – энергия деформации единицы объема

Для **изотропной среды** мы предлагаем выражать $\rho_0 E$ через **инварианты тензора деформации**

$$\rho_0 E = \rho_0 E\left\{\det\sqrt{CC^T}, tr\left[\sqrt{CC^T} - \frac{1}{3}tr\left(\sqrt{CC^T}\right)I_3\right]^2, \sigma(S)\right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \det\sqrt{CC^T} = \det C > 0 \\ S \text{ – энтропия} \end{array}\right)$$

Учет «доисторической» пластической деформации

C – дисторсия $\qquad \dfrac{\partial C_i^j}{\partial t} = \dfrac{\partial u^i}{\partial \xi^j}, \qquad \dfrac{dx^i}{dt} = u^i \qquad C_j^i\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Если среда в «доисторическое» время (t < 0) подвергалось деформациям (не обязательно упругим), то мы будем считать, что при t > 0 надо использовать «эффективную» дисторсию

$$D = CB, \qquad \boxed{D_j^i = c_k^i b_j^k,} \qquad D\Big|_{t=0} = B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix}$$

При этом, мы предполагаем, что $\rho_0 E$ зависит не от дисторсии C, а от «эффективной дисторсии»

$$D = CB$$

$$\rho_0 E = \rho_0 E \left\{ \det(CB), tr\left[\sqrt{CBB^T C^T} - \frac{1}{3} tr\left(\sqrt{CBB^T C^T} \right) I_3 \right]^2, \sigma(S) \right\}$$

Используемая нами **реализация этой формулы** приведена на следующем слайде

Уравнение состояния и его производные

$$\rho_0 E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma-1)}\left[\sigma(S)\det^{-(\gamma-1)}(CB)+(\gamma-1)\det(CB)\right]-\rho_0 c_1^2 tr\left[\sqrt{CBB^T C^T}-\frac{1}{3}tr\left(\sqrt{CBB^T C^T}\right)I_3\right]^2$$

Нам в дальнейшем понадобятся матрицы, составленные из производных от $\rho_0 E$

!!!

$$E_{C_i^j C_k^l} = b_\alpha^i E_{D_\alpha^j D_\beta^l} b_\beta^k \qquad E_{C_i^j} = E_{D_\beta^j} b_\beta^i$$

Их расчет нужно начинать с вычисления матриц $E_{D_i^j D_k^l}$ $E_{D_i^j}$,

оно проводится после перехода к ортогональному **базису**, в котором **собственные числа** матрицы $\sqrt{DD^T} = \sqrt{CBB^T C^T}$ равны k_1, k_2, k_3,

а **уравнение состояния** записывается в виде:

$$\rho_0 E = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma-1)}\left[\sigma(S)(k_1 k_2 k_3)^{-(\gamma-1)}+(\gamma-1)(k_1 k_2 k_3)\right]+\frac{2\rho_0 c_1^2}{3}\left[k_1^2+k_2^2+k_3^2-k_1 k_2-k_2 k_3-k_3 k_1\right]$$

После вычисления всех нужных производных в этом базисе они преобразуются к базису исходному. На этом завершается расчет производных $E_{D_i^j D_k^l}$ $E_{D_i^j}$,

После этого вычисляются $$E_{C_i^j C_k^l} = b_\alpha^i E_{D_\alpha^j D_\beta^l} b_\beta^k \qquad E_{C_i^j} = E_{D_\beta^j} b_\beta^i$$

Канонический вид уравнения состояния и неравенства

Вот как выглядит в **специальном базисе** матрица $\rho_0 E_{D_\alpha^j D_\beta^l}$, если $\sqrt{DD^T} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$

$$\rho_0 E_{D_\alpha^j D_\beta^l} = \rho_0 \begin{pmatrix}
E_{k_1k_1} & E_{k_1k_2} & E_{k_1k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_{k_1k_2} & E_{k_2k_2} & E_{k_2k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_{k_1k_3} & E_{k_2k_3} & E_{k_3k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E_{12}^{+} & E_{12}^{-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E_{12}^{-} & E_{12}^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{23}^{+} & E_{23}^{-} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{23}^{-} & E_{23}^{+} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{31}^{+} & E_{31}^{-} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{31}^{-} & E_{31}^{+}
\end{pmatrix}$$

$$E_{ij}^{-} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} - \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j}\right)$$

$$E_{ij}^{+} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} + \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j}\right)$$

Она **положительно определена**, если:

1) $\left\{E_{k_ik_j}\right\} > 0$ **2)** $\dfrac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_i} > 0$ **3)** $\dfrac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_i} > 0$

Моделируемые уравнения

Уравнения теории упругости записываются в следующем виде:

$$u^i \quad \times \quad \frac{\partial \rho_0 u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left[\rho_0 E_{C^i_j}\right] = 0$$

$$\rho_0 E_{C^j_i} \quad \times \quad \frac{\partial C^i_j}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0$$

$$T \quad \times \quad \frac{\partial \rho_0 S}{\partial t} = 0$$

следствие этих уравнений (закон сохранения энергии)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0 \frac{u^i u_j}{2} + \rho_0 E\right] - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left[u^i_i \rho_0 E_{C^i_j}\right] = 0}$$

Моделируемые уравнения

Уравнения :

$$\frac{\partial \rho_0 u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left[\rho_0 E_{C_j^i}\right] = 0$$

$$\frac{\partial C_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_0 S}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial b_j^i}{\partial t} = 0$$

Тензор напряжений: $\pi_j^i = \rho_0 E_{C_j^i}$

$$\frac{\partial C_j^i}{\partial t} = \frac{\partial C_j^i}{\partial \pi_l^k}\frac{\partial \pi_l^k}{\partial t}$$

$$\left(\rho_0 E_{C_j^i}\right)_{C_l^k}\frac{\partial C_l^k}{\partial t} = \frac{\partial \pi_j^i}{\partial C_l^k}\frac{\partial C_l^k}{\partial t} = \frac{\partial \pi_j^i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial C_l^k}{\partial t} = \left(\rho_0 E_{C_j^i C_l^k}\right)^{-1}\frac{\partial \pi_j^i}{\partial t} \qquad \left(\rho_0 E_{C_j^i C_l^k}\right)^{-1} = \Psi$$

Уравнение $\frac{\partial C_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0$ мы перепишем в виде $\Psi\frac{\partial \pi_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0$

Все наши расчеты используют уравнения упругости в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Psi & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi^2}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi^3}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} = 0$$

а также (на заключительном этапе расчете шага по *t*) сохранение энергии:

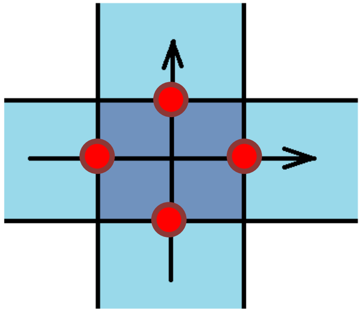
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0 \frac{u^i u_j}{2} + \rho_0 E\right] - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left[u_i^i \pi_j^i\right] = 0$$

Моделируемые уравнения (расщепление)

Исходная система уравнений

$$\begin{pmatrix} \rho_0 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \left[E_{C_i^k C_j^k}\right]^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^1}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^2}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^3}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[1]} \\ \pi^{[2]} \\ \pi^{[3]} \end{pmatrix} = 0$$

Для расчета «распадов разрывов» на границах ячеек (в точках) используются одномерные системы (**расщепление исходной системы**)



Структура ячеек лагранжевой сетки

$$\underline{k = 1, 2, 3} \qquad \begin{pmatrix} \rho_0 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \left[E_{C_i^k C_j^k}\right]^{-1} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[k]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^k}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[k]} \end{pmatrix} = 0$$

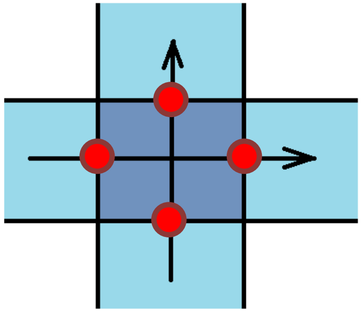
Векторные римановы инварианты

Одномерная система:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \Lambda_{[k]} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[k]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi^{[k]} \end{pmatrix} = 0 \qquad \Lambda_{[k]} = \left[E_{c_i^k c_j^k} \right]^{-1} \qquad \underline{k = 1, 2, 3} \text{ фиксировано}$$

Распад разрыва на границе между соседними ячейками

$$\left(\text{в ячейках} \quad \pi = \begin{pmatrix} \pi_1^{[k]} \\ \pi_2^{[k]} \\ \pi_3^{[k]} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \Lambda^{[k]} \text{ постоянны} \right)$$



Уравнения

$$\Lambda \frac{\partial \pi}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \qquad \Lambda = \Lambda_+ \qquad \text{в правой или верхней ячейке}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial \xi} = 0 \qquad \Lambda = \Lambda_- \qquad \text{в левой или нижней ячейке}$$

переписываются в каждой ячейке через римановы инварианты

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_+^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}} \pi + u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}} \pi + u \right) = 0 \\ \Lambda_+^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}} \pi - u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}} \pi - u \right) = 0 \end{aligned} \right\} \xi > 0 \qquad \left. \begin{aligned} \Lambda_-^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}} \pi + u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}} \pi + u \right) \\ \Lambda_-^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}} \pi - u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}} \pi - u \right) = 0 \end{aligned} \right\} \xi < 0.$$

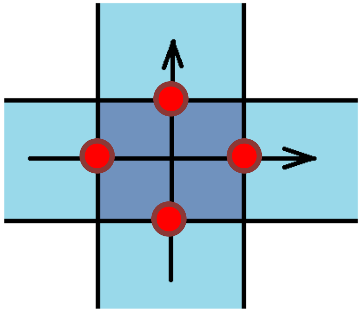
Векторные римановы инварианты

Уравнения для римановых инвариантов:

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_+^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}}\pi+u\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}}\pi+u\right)=0\\
&\Lambda_+^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}}\pi-u\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Lambda_+^{\frac{1}{2}}\pi-u\right)=0
\end{aligned}\right\}\xi>0
\qquad
\left.\begin{aligned}
&\Lambda_-^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}}\pi+u\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}}\pi+u\right)\\
&\Lambda_-^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}}\pi-u\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Lambda_-^{\frac{1}{2}}\pi-u\right)=0
\end{aligned}\right\}\xi<0.$$

На границе $\xi=0$ скорость U и напряжение Π вычисляются из системы:

$$\begin{cases}
\Lambda_{\frac{1}{2}}^{[k]}\Pi^{[k]}+U^{[k]}=\Lambda_{\frac{1}{2}}^{[k]}\pi^{[k]}+u^{[k]}\\
\Lambda_{\frac{1}{2}}^{[k]}\Pi^{[k]}-U^{[k]}=\Lambda_{\frac{1}{2}}^{[k]}\pi^{[k]}-u^{[k]}
\end{cases}$$



При допустимом шаге по времени (условие Куранта) пересчитываются эйлеровы координаты граничных точек 

$$x(t+\tau)=x(t)+\tau U$$

и вычисляются в центрах ячеек $C_j^i(t+\tau)=\dfrac{\Delta x^i}{\Delta\xi_j}$ и $u^i(t+\tau)=u^i(t)+\tau\dfrac{\Delta\Pi_i^j}{\Delta\xi^j}$

Энтропия в центрах ячеек $S(t+\tau)=S(t)$ (пока не меняется, изменение будет описано позже)

Контроль закона сохранения энергии

По каждой ячейке на шаге $t+\tau$ проверяется выполнение закона сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0 \frac{u^i u_j}{2} + \rho_0 E\right] - \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left[u_i^i \rho_0 E_{C_j^i}\right] = 0$$

и проводится его **коррекция** путем выбора энтропии $S(t+\tau)$

Эта коррекция также как и в случае одномерной газодинамической схемы **обеспечивает** неравенство

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$$

при условии **положительной определенности** матрицы $\left\{E_{C_j^i C_l^k}\right\}$

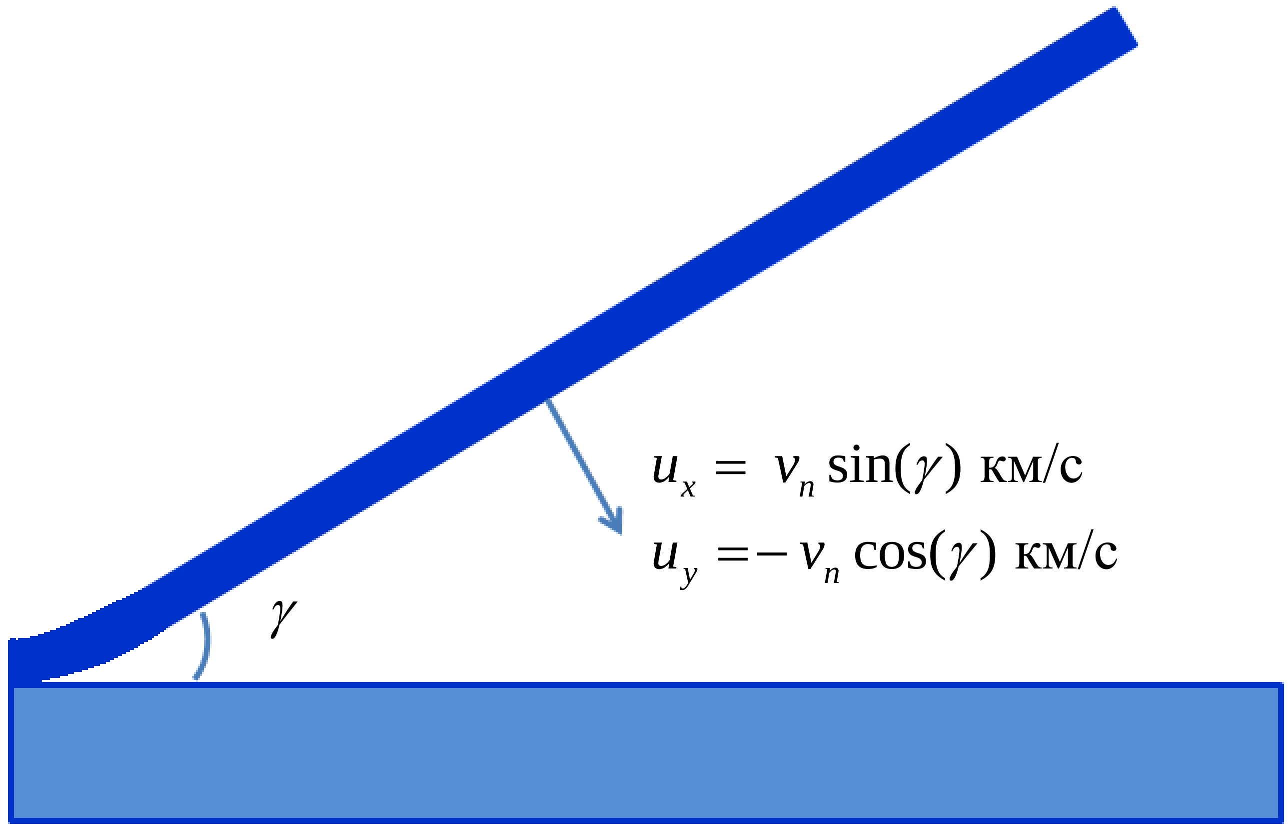
Для процесса релаксации мы можем, не меняя k_i, подобрать b_i,

$$k_1 k_2 k_3 = k_1 k_2 k_3 b_1 b_2 b_3 = k_1 k_2 k_3$$

аннулируя тем самым девиатор, что эквивалентно действию максвелловских релаксаций. Этот прием значительно ускоряет вычислительный процесс и является реализацией моделирования пластических деформаций по Прандтлю (1928 г.)

Постановка задачи о сварке взрывом

Метание верхней пластины осуществляется
в результате детонации накрывающего ее слоя ВВ



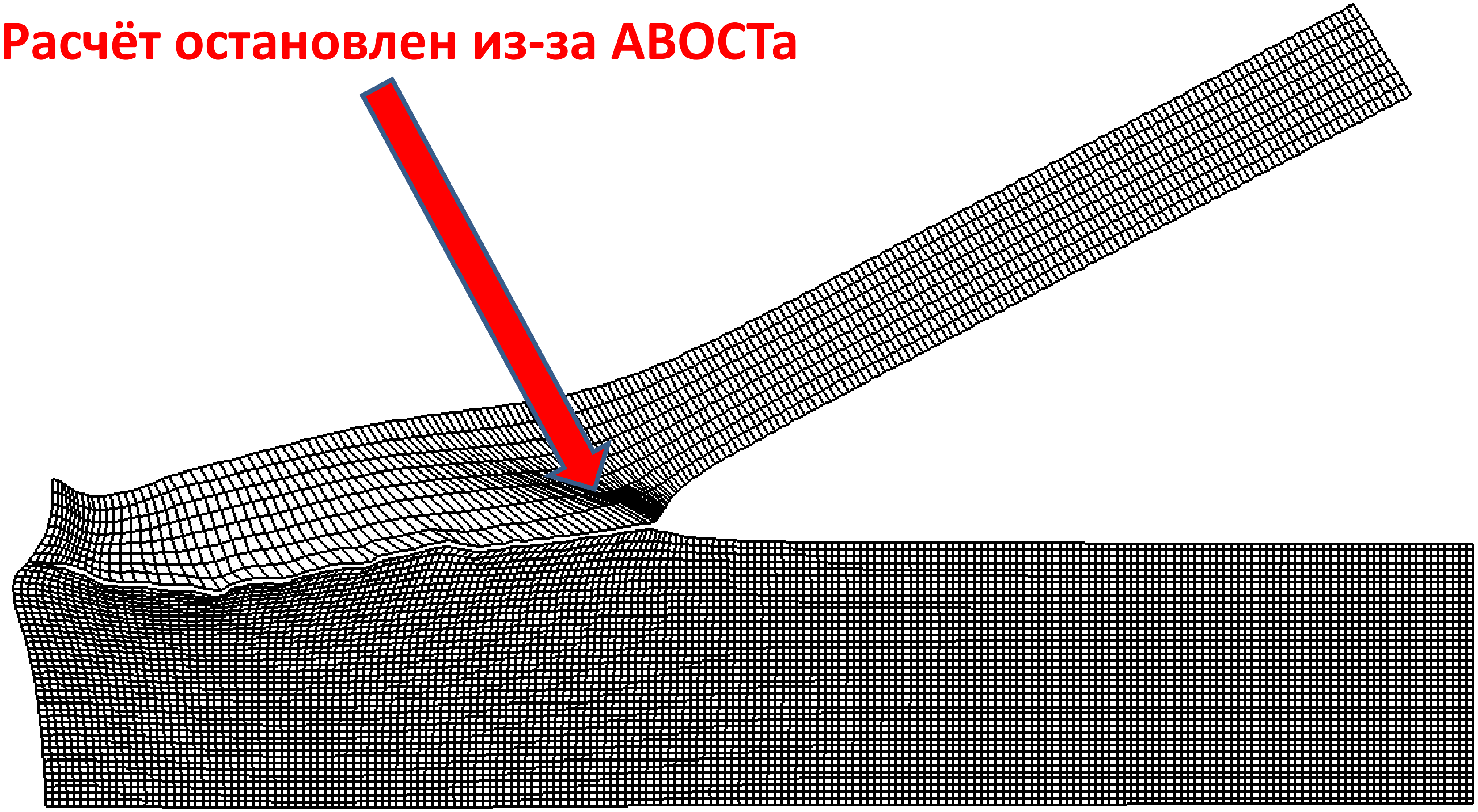
$$u_x = v_n \sin(\gamma) \text{ км/с}$$

$$u_y = -v_n \cos(\gamma) \text{ км/с}$$

На этой задаче мы будем демонстрировать результаты модельных расчётов

Результаты моделирования столкновения пластин в режиме «скольжения»

Расчёт остановлен из-за АВОСТа

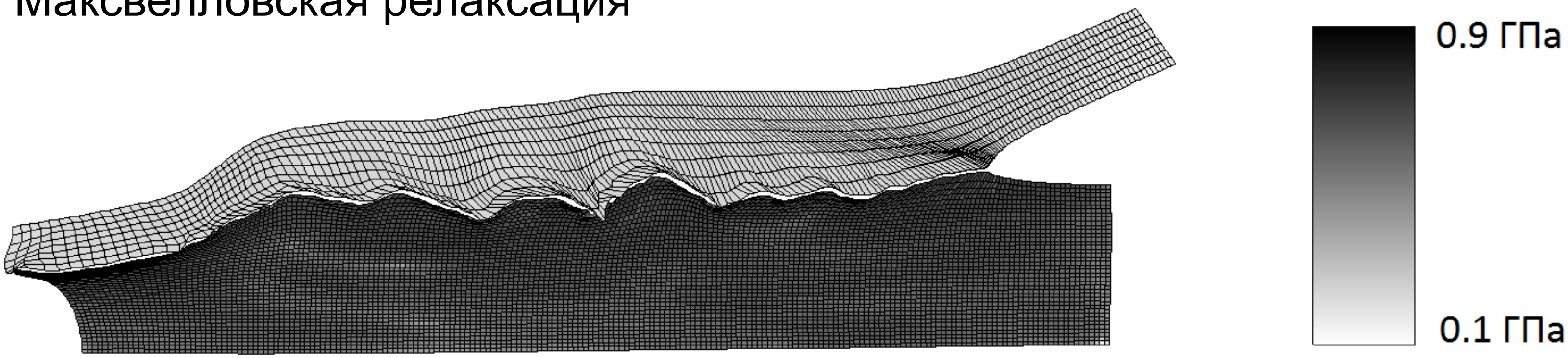


Проведение расчёта с ещё большим **мельчением** сетки позволило убедиться, что **опасная точка**, в которой отказывает расчётная модель, осталась **на том же месте**

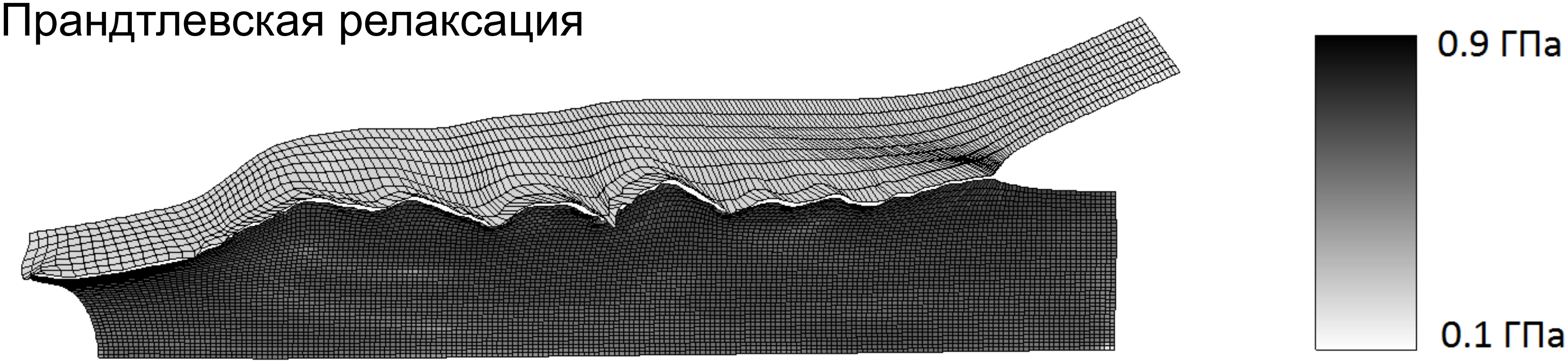
Мы сначала обсудим причину «АВОСТА» (граница области применимости уравнения состояния), а затем опишем продолжение расчета методом молекулярной динамики

Результаты некоторых аналогичных расчетов (другая геометрия)

Максвелловская релаксация



Прандтлевская релаксация

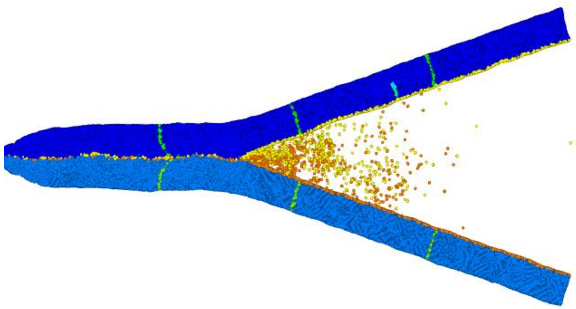


Имеет место полное совпадение результатов расчета!

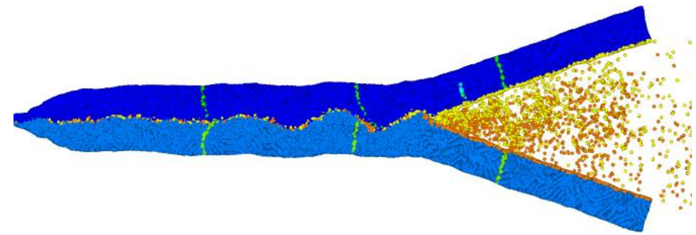
Модель молекулярной динамики
Волны при соударении алюминиевых пластин, ИТПМ СО РАН

В численном расчете длина волны $\lambda = 586\,\mathring{A}$, Расчет длины волны по формуле Кудинова $\lambda_K = 26\delta \sin^2(\gamma/2) = 624\,\mathring{A}$

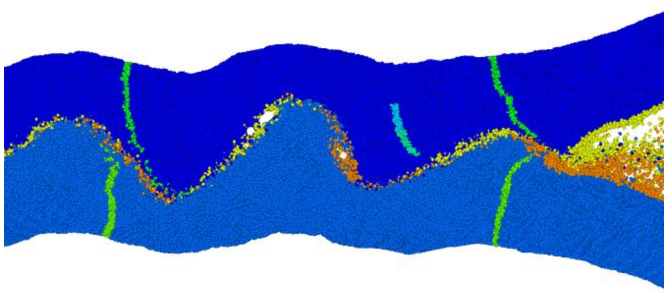
$t = 53$ ps



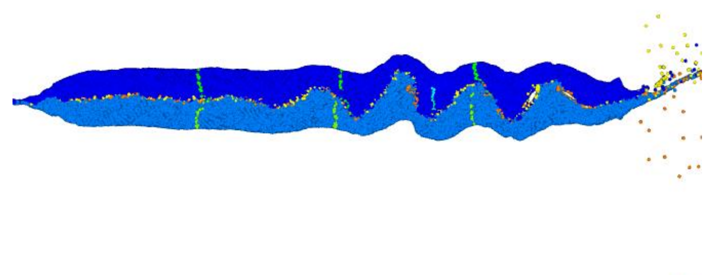
$t = 75$ ps



$t = 90$ ps

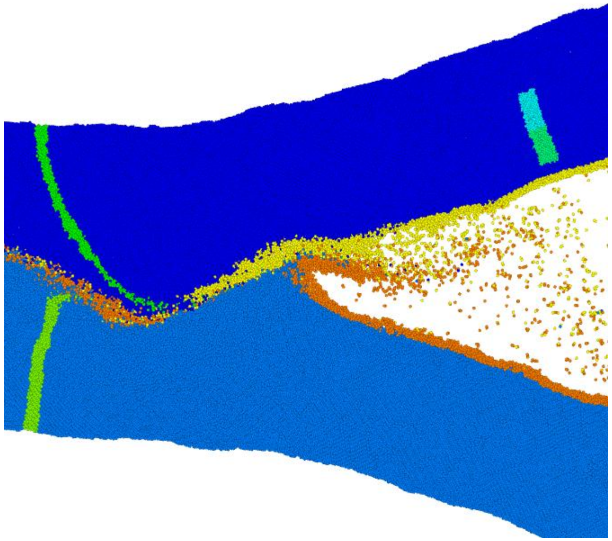


$t = 135$ ps

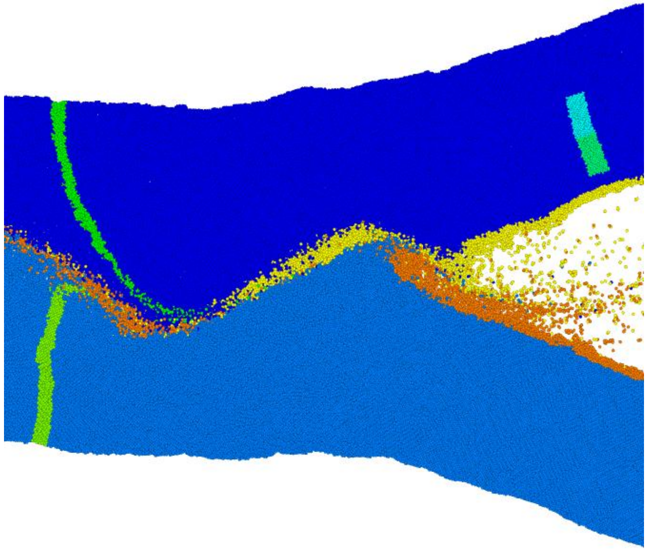


Модель молекулярной динамики ИТПМ СО РАН
Рентгеновский снимок во время процесса ИГиЛ СО РАН

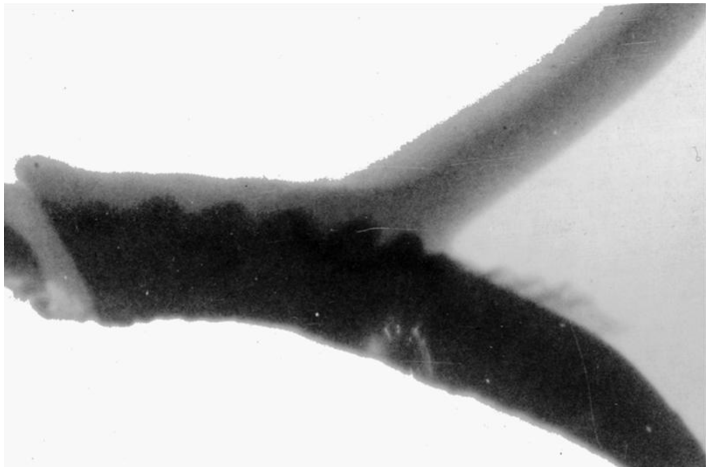
$t = 71{,}5\ \mathrm{ps}$



$t = 75\ \mathrm{ps}$

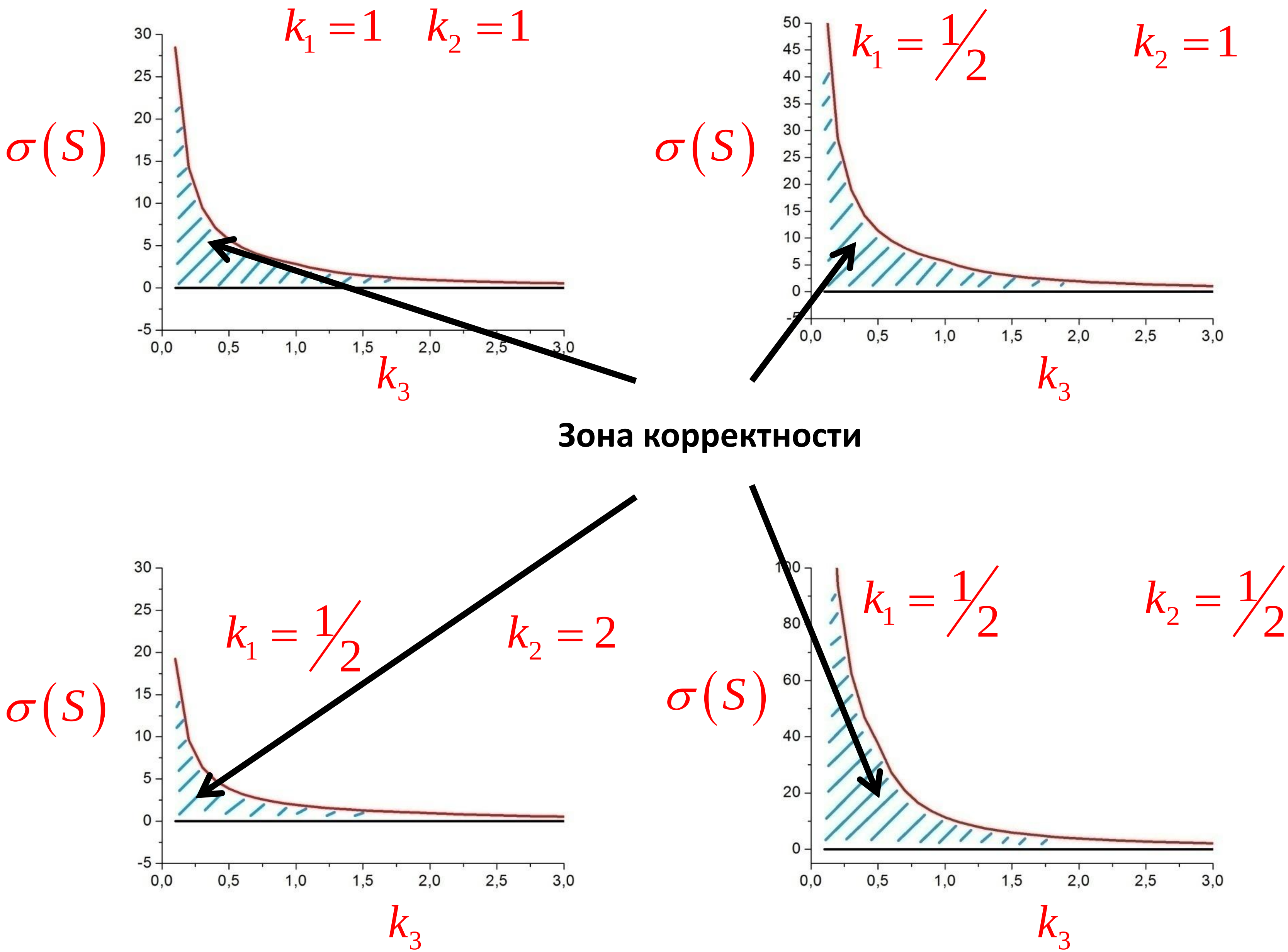


Киселев, Мали, ФГВ, 2012, Т. 48, №2

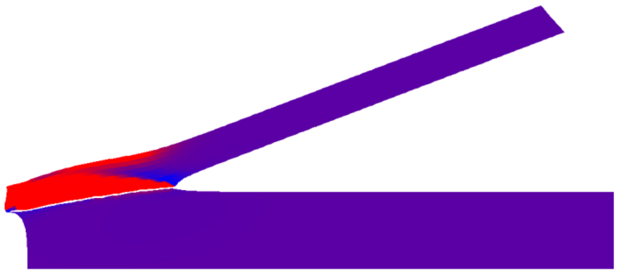


Рентгеновский снимок во время взрывного эксперимента (ИГиЛ СО РАН)

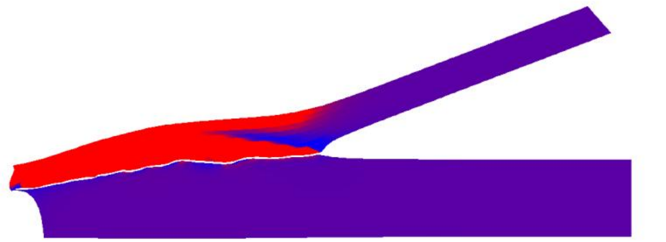
Условия корректности уравнения состояния



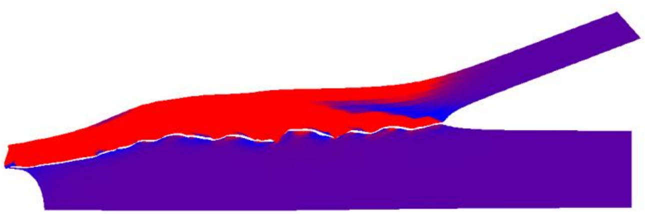
Расчет контроля применимости уравнения состояния



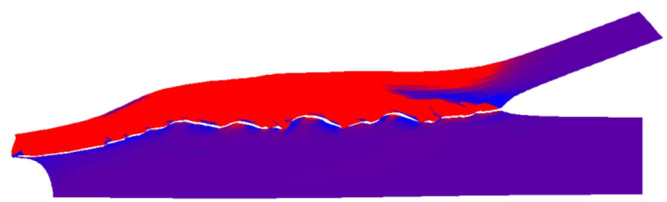
t = 0.05



t = 0.1

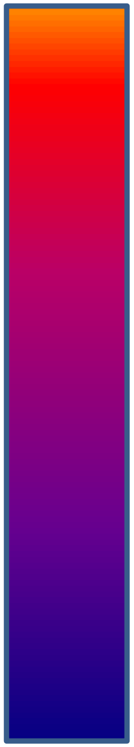


t = 0.15



t = 0.17

$$\min_i \left(\frac{1 + \dfrac{2c_1^2\gamma}{3c_0^2 k_i}}{k_1 k_2 k_3} \right)$$

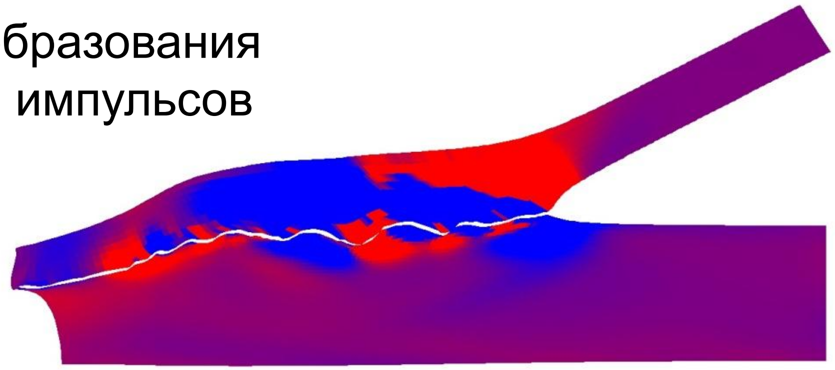


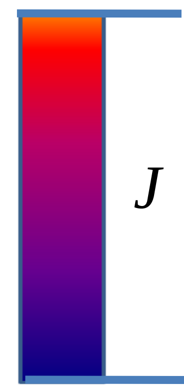
$$\max_i \left(\frac{1 - \dfrac{2c_1^2\gamma}{c_0^2 k_i}}{k_1 k_2 k_3} \right)$$

Моментная теория упругости

Введение релаксационного процесса ведёт к появлению остаточных деформаций, при этом $\boldsymbol{B}=\{\mathbf{b_{ij}}\}\neq \boldsymbol{I} \quad (\mathbf{b_{ij}}\neq\delta_{\mathbf{ij}})$

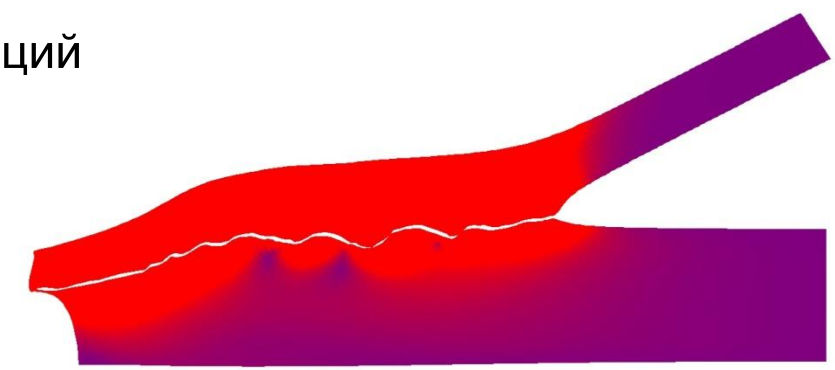
Область образования моментов импульсов





$$J=\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}-\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$$

Область остаточных деформаций (ярко красная область)



Спасибо за внимание!