Расширения пространства непрерывных функций и их применение к исследованию задачи Дирихле

Гущин А.К.

Математический институт им. В.А. Стеклова

20 ноября 2024 года

За почти два века, которые прошли с постановки К. Гауссом задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1828 г.), изучению свойств решения в этом определении, которое сейчас принято называть классическим, и в более общих постановках посвящены работы многих известных математиков. Ими получено большое количество интересных и важных, ставших уже классическими результатов.
Тем не менее, целью данного сообщения является убедить слушателя в том, что в этой “основной” проблеме математической физики далеко не все известно, в этой области имеется много интересных и важных задач и ей следует уделить серьезное внимание.

Мы ограничимся изложением результатов в простейшей ситуации: в случае ограниченной области $Q \subset \mathbf{R}_n$ и линейного эллиптического уравнения второго порядка без младших членов. Условия на коэффициенты уравнения, правую часть, область и заданную на её границе функцию зависят от рассматриваемого определения решения и будут обсуждены далее. Большинство результатов справедливы и в случае общего уравнения, но рамки доклада вынуждают ограничиться только теми из них, которые тесно связаны с основной нитью изложения.
Более полный обзор работ в этом направлении можно найти, например, в статье **А.К. Гущин, Тр. МИАН, 2015, 289, 145-162**.

О. Гёльдер, П. Дирихле, К. Нейман, А. Ляпунов,
А. Пуанкаре, А. Корн, С. Заремба, В.А. Стеклов.
Г. Жиро, Ю.П. Шаудер, О. Перрон, Н. Винер,
М.В. Келдыш, О.А. Олейник.
П. Дирихле, Д. Гильберт, А. Лебег.
С.Л. Соболев.

Классическое решение.

Определение. Функция u является классическим решением задачи Дирихле для уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -f(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

если $u \in C^2(Q)$, для всех $x \in Q$ она удовлетворяет (1), $u \in C(\overline{Q})$ и для всех $x \in \partial Q$

$$u(x) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $(a_{ij}(x))$ – равномерно положительно определенная матрица с непрерывными элементами; f и u_0 – заданные функции.

Достаточные условия разрешимости.

$u_0 \in C(\partial Q), f \in C^\alpha(\overline{Q}), a_{ij} \in C^\alpha(\overline{Q}), \alpha > 0,$
граница ∂Q удовлетворяет критерию Винера.

Обобщенные решения.

Здесь нам будет удобно рассматривать уравнение в дивергентном виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = -f(x), \qquad (1')$$

$a_{ij} \in L_\infty(Q)$; уравнение понимается как равенство обобщенных функций.

Определение. u является **обобщенным решением** задачи Дирихле, если

$$u \in W_2^1(Q) \text{ и выполняется равенство} (1'),$$

$$\text{след } u \text{ на } \partial Q \text{ совпадает с функцией } u_0. \qquad (2')$$

Необходимые условия. Они же являются и достаточными.

$u_0 \in W_2^{1/2}(\partial Q), f \in W_2^{-1}(Q), a_{ij} \in L_\infty(Q).$

Любая область. Теорема об изоморфизме.

Решение из $W^1_{2,\text{loc}}(Q)$.

Естественное и удобное для исследования понятие обобщенного решения имеет один недостаток. Оно не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе функция является следом функции из $W^1_2(Q)$. Это вызвано жестким требованием на выполнение граничного условия. Поэтому естественно расширить определение обобщенного решения. Уравнение $(1')$ имеет смысл, если $u \in W^1_{2,\text{loc}}(Q)$. Основная трудность - это определение принятия решением граничного условия. Естественным обобщением пространств $C(\partial Q)$ и $W^{1/2}_2(\partial Q)$ является пространство $L_2(\partial Q)$ (или $L_p(\partial Q), p > 1$).

Для определения граничного условия с $u_0 \in L_p(\partial Q)$ естественно обратиться к классическим работам по граничному поведению аналитических и гармонических функций: **Riesz F.; Littlewood J., Paley R.; Привалов И.И.**
Как и в теореме Рисса граничное значение на ∂Q можно понимать как предел в L_p по "параллельным границе" поверхностям. Среди многочисленных работ этого направления мы остановимся на результатах его основателя **В.П. Михайлова, 1976.**

При некоторых условиях на данные задачи им доказана однозначная разрешимость. Более того, для общего уравнения второго порядка теорема о разрешимости имеет такой же вид, как и для задачи в $W_2^1(Q)$: набор собственных значений с учетом кратности совпадает, совпадают и соответствующие им собственные подпространства.
Основной вопрос этот подход решает. Но в такой постановке сразу в определении **необходима гладкость границы** (взаимно однозначное соответствие между точкой границы и точкой "параллельной границе" поверхности устанавливается с помощью нормали).

Пространство s-мерно непрерывных функций.

Следующим этапом в изучении этого вопроса явилось введение пространства $(n-1)$-мерно непрерывных функций, являющихся естественным обобщением непрерывных функций. Рассмотрим множество неотрицательных (борелевских) мер в $\mathbf{R}_n$ с носителями в $\overline{Q}$; обозначим этот конус через $\mathcal{M}_0$. Для единичных мер $\mu \in \mathcal{M}_0$ и $\nu \in \mathcal{M}_0$ будем называть соединяющей их неотрицательную меру ϕ в $\mathbf{R}_{2n}$, проекция который на первый сомножитель равна μ, а на второй равна ν.

Эквивалентное определение непрерывности.

Функция ν непрерывна в $\bar{Q}$ $\quad\Longleftrightarrow$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall \mu \in \mathcal{M}_0,\ \forall \nu \in \mathcal{M}_0 \text{ и для } \forall\ \phi,$$

для которой

$$\int\limits_{\mathbf{R}_{2n}}\int |x-y| d\phi(x,y) < \delta,$$

справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbf{R}_{2n}}\int |\nu(x)-\nu(y)|^p d\phi(x,y) < \varepsilon^p,$$

Отметим еще, что если в рассмотренном определении взять класс неотрицательных мер $\mathcal{M}_n$, для которых

$$\exists C = C(\mu)\ \forall B_r(x^0) \quad \mu(B_r(x^0)) \leqslant r^n,$$

то получим определение пространства $L_p(Q)$; здесь и всюду далее $B_r(x^0) = \{y \in \mathbf{R}_n : |y - x^0| \leqslant r\}$.

Нас будет интересовать шкала пространств, соединяющих $C(\overline{Q})$ и $L_p(Q)$. Уменьшение класса мер расширяет полученное пространство функций.

Пространство s-мерно непрерывных функций $\mathrm{C}_{\mathrm{s,p}}(\overline{\mathrm{Q}})$ было введено в работе **А.К. Гущин, Матем. сб., 1988, 137(179):1(9)**.
Сейчас мы будем рассматривать эквивалентное определение этого понятия, содержащееся в статье **А. К. Гущин, Матем. сб., 2020, том 211, 11**.

Обозначим символом $\mathcal{M}_s$, где $0 \leqslant s \leqslant n$, – множество борелевских неотрицательных мер с носителями в $\bar{Q}$, удовлетворяющих оценке

$$\exists C > 0 \ \forall r > 0 \ \forall x^0 \in \mathbf{R}_n \quad \mu(B_{x^0}(r)) \leqslant Cr^s; \tag{3}$$

Точную нижнюю грань постоянных C, с которыми выполнено неравенство (3), будем называть нормой меры μ в $\mathcal{M}_s$ и обозначать $\|\mu\|_s$. Это норма в пространстве зарядов. Для $\mu \in \mathcal{M}_0 \quad \|\mu\| = \mu(\bar{Q})$, а для $\mathcal{M}_n$ норма меры определяется нормой в L_∞ производной.

Определение.

Функция $\nu : \overline{Q} \longrightarrow \mathbf{R}$ называется *s-мерно непрерывной со значениями в* L_p и обозначается $\nu \in C_{s,p}(\overline{Q})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любых μ и ν из $\mathcal{M}_s$ и для любой соединяющей их меры ϕ, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\overline{Q}\times\overline{Q}} \int |x - y| d\phi(x, y) < \delta, \tag{4}$$

справедлива оценка

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int\limits_{\overline{Q}\times\overline{Q}} \int |\nu(x) - \nu(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon^p. \tag{5}$$

Естественно рассматривать функцию из $C_{s,p}(\bar{Q})$ как отображение, ставящее в соответствие каждой мере μ из класса $\mathcal{M}_s$ элемент пространства $L_p(\mu)$. Соотношение (4) можно интерпретировать как близость мер, а (5) — как близость значений (следов) функции $u(x)$ на мерах μ и ν (вдоль соединяющей их меры ϕ).

На пространстве $C_{s,p}(\bar{Q})$ вводится норма

$$\|u\|^p_{C_s(\bar{Q})} = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_s} \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} |u|^p \, d\mu(x). \tag{6}$$

Всюду далее мы будем считать, что выполнено следующее условие:
$\exists c > 0 \exists r_0 > 0 \forall r \in (0, r_0) \forall x^0 \in Q \ \ \mathrm{mes}_n(Q \bigcap B_{x^0}(r)) \geqslant cr^n.$

$C_{s,p}(\bar{Q})$ с такой нормой является пространством Банаха. Пространство непрерывных функций $C(\bar{Q}) = C_{0,p}(\bar{Q})$ плотно в нем. Шкала пространств $C_{s,p}(\bar{Q})$ обладает свойством монотонного возрастания по параметру s с соответствующей оценкой норм. Для функции из пространства $C_{s,p}(\bar{Q})$ естественно определяется понятие следа на произвольном замкнутом подмножестве положительной s-меры Хаусдорфа. Множества всех следов функции из $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ на гладкой поверхности Γ совпадает с пространством $L_p(\Gamma)$.

Отметим, что введенное понятие не является интуитивно очевидным. В частности, из непрерывности функции внутри области и существования её “предела в L_p” на границе не следует принадлежность её пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q})$.

Теорема 1. Функция $v \in C_{s,p}(\bar{Q}) \iff$ построенное по ней семейство

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_s} \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} \left[\frac{1}{\rho^n} \int_{Q \cap B_x(\rho)} |v(x) - v(x+h)|^p \, dh \right] d\mu(x) \to 0$$

при $\rho \to 0$.

Отметим еще одно свойство рассматриваемых пространств. Следует ли из принадлежности функции пространству $C_{s,p}(\bar{Q})$, $0 < s < n$, ее принадлежность $L_q(Q)$ с $q > p$? Можно привести пример, показывающий, что для гладкой внутри круга $\{|x| < 1\}$ функции, норма которой в $L_p(\{|x| = r\}) \to 0$ при $r \to 1$, это свойство не выполняется. Тем не менее, для s-мерно непрерывных функций оно верно.

Теорема 2.

А.К. Гущин, Матем. сборник, 2020.

При $p' \leqslant p\frac{s'}{s}$, $s' > s$ справедливо вложение

$$C_{s,p}(\overline{Q}) \subset C_{s',p'}(\overline{Q}).$$

При $p \leqslant r\frac{n-1}{n-r}, r < n$ справедливо вложение

$$W^1_r(Q) \subset C_{n-1,p}(\overline{Q}).$$

Показатели суммируемости в этих неравенствах точные.

Задача Дирихле в $C_{n-1,p}(\overline{Q})$.

Рассмотрим сначала **однородное уравнение**

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \quad x \in Q. \qquad (1_0)$$

При этом будем предполагать, что коэффициенты уравнения непрерывны по Дини на границе. Будем также считать, что граница области принадлежит классу C^1 и нормаль к ней непрерывна по Дини.

Определение. Функция $u \in W^1_{2,loc}(Q) \cap C_{n-1,p}(\overline{Q}\,)$

называется *решением задачи Дирихле* (1_0), (2) из $C_{n-1,p}(\overline{Q}\,)$, если она удовлетворяет уравнению в смысле обобщенных функций и ее след на границе равен заданной функции u_0.

Обозначим через $\mathcal{S}(x^0)$ интеграл площадей Лузина функции $v(x) = |u(x)|^{p/2}$:

$$\mathcal{S}(x^0) = \mathcal{S}(x^0; a) = \left[\int\limits_{\Gamma(x^0;a)} y_n^{2-n} |\nabla v(y)|^2 dy \right]^{1/2},$$

а $\mathbf{M}(x^0) = \mathbf{M}(x^0; u, a) = \sup\{|u(y)| : y \in \Gamma(x^0; a)\}$, $x^0 \in \partial Q$ — некасательная максимальная функция решения u.

Здесь $\Gamma(x^0) = \Gamma(x^0; a)$ – лежащий в области Q открытый усеченный конус фиксированной высоты h_0 с вершиной в $x^0 \in \partial Q$, ось которого направлена по внутренней нормали $\nu(x^0)$; в местной системе координат (начало координат находится в точке x^0, а ось y_n направлена по нормали $\nu(x_0)$) этот конус описывается неравенствами $0 < y_n < h_0, |y'| < a y_n$. Высоту $h_0 = h_0(a, Q)$ (она одинакова для всех $x^0 \in \partial Q$) выберем достаточно малой; в частности, будем считать, что границы конуса и области пересекаются только по вершине x^0.

Теорема 3.

А.К. Гущин, Матем. сб., 2018, том 209, номер 6.

Для любой $u_0 \in L_p(\partial Q)$ существует решение из $C_{n1,\ p}(\overline{Q})$ задачи Дирихле (1_0), (2). Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS \leqslant \text{const}\, \|u\|^p_{C^0_{n-1,p}(\overline{Q})} \leqslant \text{const} \int\limits_{\partial Q} \mathbf{M}^p(x) dS \leqslant$$

$$\text{const} \int\limits_{\partial Q} \mathcal{S}^2(x) dS + \text{const} \int\limits_{Q} |u|^p dx \leqslant \text{const} \int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \qquad (7)$$

где постоянные не зависят от u_0.

Кратко остановимся на неоднородном уравнении (1).
Рассмотрим случай $p = 2$. Будем предполагать, что правая часть $f = g - (\nabla G)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_Q r^3(x)\ln^{3/2}(r(x))|g(x)|^2 dx < \infty,$$

$$\int\limits_Q r(x)\ln^{3/2}(r(x))|G(x)|^2 dx < \infty. \tag{8}$$

где $r(x)$ – расстояние от точки x до границы ∂Q. Граничная функция $u_0 \in L_2(Q)$.

Теорема 4.

А.К. Гущин, В.П. Михайлов, Матем. сб., 1991.

Для любого $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и $f = g - (\nabla G)$, удовлетворяющей (8), существует решение u задачи Дирихле для уравнения (1) с граничным значением u_0. Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\int_Q r(x)|\nabla u|^2 dx \leqslant$$

$$\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int_D r^3(x)\ln^{3/2}(r(x))|g(x)|^2 dx +$$

$$\int_D r(x)\ln^{3/2}(r(x))|G(x)|^2 dx.$$

Более трудным является случай $p \neq 2$. Сложность заключается в том, что без дополнительных условий на коэффициенты уравнения нельзя утверждать принадлежность решения пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(Q)$. В случае $p > 2$ такое решение может не существовать, а для $p \in (1, 2)$ не справедливо утверждение о единственности. Не помогает и условие гладкости коэффициентов на границе.

Подробнее по этому поводу см. **А. К. Гущин, Матем. сб., 2015, том 206, номер 10.**

Многие из приведенных результатов распространяются и на уравнения с младшими членами, см. **Dumanyan V.Zh., J. Contemp. Math. Anal., 2015, 50:4; Думанян В.Ж., Матем. сб., 2011, 202:7; Думанян В.Ж., ТМФ, 2014, 180:2.**

Условия разрешимости.

Граничная функция $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Коэффициенты уравнения a_{ij} измеримы и ограничены в Q и непрерывны по Дини на границе. (Отказаться от него нельзя). Правая часть f удовлетворяет условию (8). Нормаль к границе непрерывна по Дини. По-видимому, это условие может быть существенно ослаблено. Но для этого нужны новые идеи; скорее всего, необходим аналог метода Пуанкаре - Перрона.

Свойство внутренней непрерывности решения.

Обсудим следующий вопрос. Насколько соответствует задаче выбор класса мер? Можно ли его расширить? Немного можно! Теорема 2 остается справедливой, если потребовать, чтобы рассматриваемые меры были мерами Карлесона (в (3) $x^0 \in \partial Q$). Это расширение сразу дает свойство внутренней непрерывности решения. Но больше расширить класс конечных мер нельзя.

Теорема 6.

А.К. Гущин, ТМФ, 2013.

Оценка

$$\int\limits_{\overline{Q}} |u(x)|^p \, d\mu(x) \leqslant \text{const} \int\limits_{\partial Q} |u_0(x)|^p \, dS$$

справедлива для всех $u_0 \in L_p(\partial Q)$ тогда и только тогда, когда мера μ является мерой Карлесона.
Для аналитических функции с граничным значением u_0 эта теорема была доказана в работе **L. Carleson, 1962.**
Для гармонических функций этот результат был установлен в работе **L. Hormander, 1967.**

Обобщение свойства непрерывности по Гельдеру.

Следующее направление исследований было порождено изящными работами Э. Де Джорджи и Дж. Нэша о внутренней гёльдеровой непрерывности решений уравнения (1_0), **De Giorgi E., 1957**; **Nash J., 1958**.

Какими промежуточными свойствами между принадлежностью $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и $C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(Q)$ обладает решение уравнения (1_0)?

Есть ли среди них те, которые не вытекают из крайних?

Оказывается есть! Причем в близких к оценке (5) (с $p = 2$) терминах - в терминах ограниченности интеграла

$$\int\int_{D} |v(x) - v(y)|^2 d\phi;$$

по неотрицательной, не обязательно конечной мере Бореля ϕ на множестве $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}_{2n} : \ |x - y| \neq 0\}$ с носителем в $D \cap \bar{Q}' \times \bar{Q}'$; Q' компактно принадлежит Q", а Q" компактно принадлежит $Q \quad \delta_0 = \frac{1}{4}\,\mathrm{dist}(Q', Q")$.
Отметим, что для любого $\sigma > 0$ ϕ-мера компакта $D_\sigma = \{(x, y) \in \bar{Q}' \times \bar{Q}' : |x - y| \geqslant \sigma\}$ конечна; ϕ_σ — сужение меры ϕ на D_σ; будем считать, что $0 < \sigma \leqslant \delta_0 < 1$.

Определение.

Неотрицательная борелевская мера Φ_σ в $D \times \mathbf{R}_1$ является *допустимым разложением меры* ϕ_σ, если ее носитель лежит в объединении множеств $\{(x, y, t) \in \mathbf{R}_{2n+1} : \sigma \leqslant |x - y| \leqslant t \leqslant \delta_0\}$ и $\{(x, y, t) \in \mathbf{R}_{2n+1} : |x - y| > \delta_0,\ t = \delta_0\}$, а проекция на пространство первых $2n$ переменных совпадает с разлагаемой мерой ϕ_σ.

Определение. $\phi \in \mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^{\alpha,+}(Q')$, если

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}} = \|\phi\|_{\mathcal{M}^{\alpha,+}(Q')} =$$

$$\lim_{\sigma\to+0} \inf_{\Phi_\sigma} \sup_{z\in\mathbf{R}_n} \iiint\limits_{\{(x,y,t)\in D\times\mathbf{R}_1:|x+y-z|\leqslant 2t\}} \left(\frac{|x-y|}{t}\right)^{2\alpha} \frac{d\Phi_\sigma}{t^{n-2}} < \infty;$$

здесь точная нижняя грань берется по всем допустимым разложениям Φ_σ меры ϕ_σ.

Теорема 7.

А.К. Гущин, Сиб. матем. журнал, 2005, 46:5.

Существуют такие постоянные $\alpha_0 \in (0,1)$, $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, зависящие только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ, что для любого решения u уравнения (1_0) и любой меры $\phi \in \mathcal{M}^{\alpha_0,+}(Q')$ справедлива оценка

$$\frac{1}{\|\phi\|_{\mathcal{M}^{\alpha,+}(Q')}} \iint\limits_{D} |u(x) - u(y)|^2 \, d\phi \leqslant$$

$$C_1 \int\limits_{Q''} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \frac{C_2}{\delta_0^{n+2}} \iint\limits_{Q'' \times Q''} |u(y) - u(x)|^2 \, dx dy$$

Пусть α – произвольное положительное число, $\alpha < 1$.
Определение. Функция $v \in L_2(Q')$ принадлежит пространству $\mathcal{G}^\alpha(\bar{Q}')$, если ее норма

$$\|v\|_{\mathcal{G}^\alpha(\bar{Q}')} =$$

$$\|v\|_{L_2(Q')} + \sup_{\phi \in \mathcal{M}^{\alpha,+}} \left[\frac{1}{\|\phi\|_{\mathcal{M}^{\alpha,+}}} \int\int_D |v(x) - v(y)|^2 d\phi \right]^{1/2} < \infty$$

конечна.
Решение u уравнения (1_0) принадлежит введенному классу при $\alpha = \alpha_0$.

Пусть мера ϕ удовлетворяет условию

$$\int\int_{D} |x-y|^{2\alpha} d\phi < \infty.$$

Тогда, взяв разложение с носителем на $\{t = \delta_0\}$, немедленно получаем, что $\phi \in \mathcal{M}^{\alpha,+}$ и

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}^{\alpha,+}} \leqslant \delta_0^{2-n-2\alpha} \int\int_{D} |x-y|^{2\alpha} d\phi.$$

Следовательно,

$$\int\int_{D} |v(x)-v(y)|^2 d\phi \leqslant \delta_0^{2-n-2\alpha} (\|v\|_{\mathcal{G}^{\alpha}(\bar{Q}')})^2 \int\int_{D} |x-y|^{2\alpha} d\phi.$$

Откуда немедленно получаем гельдерову непрерывность с показателем α функций из $\mathcal{G}^{\alpha}(\bar{Q}')$.

Если взять меру ϕ с носителем на множестве $\{(x, y) : |x - y| = h_0 = \mathrm{const}\}$ и ее разложение с носителем на $\{|x - y| = t\}$, то получим вложение введенного пространства в $W_2^1(Q')$.
Для “промежуточных” значений параметра t получаем другие свойства функций из пространства $\mathcal{G}^\alpha(\overline{Q'})$. Среди них есть и те, которые не следуют из $C^\alpha(\overline{Q'})$ и $W_2^1(Q')$.