Седловые связки

Дуков Андрей Валерьевич

МИАН

19 ноября 2024 г.

Базовый набор связок

Пусть поле $v_0 \in Vect^r(\mathcal{M})$ содержит набор связок SC_i, $i = 1, \ldots, n$ гиперболических сёдел. Этот набор будем называть *базовым*. К каждой сепаратрисной связке SC_i проведём C^r-гладкую трансверсаль Γ_i, не пересекающую другие связки базового набора.

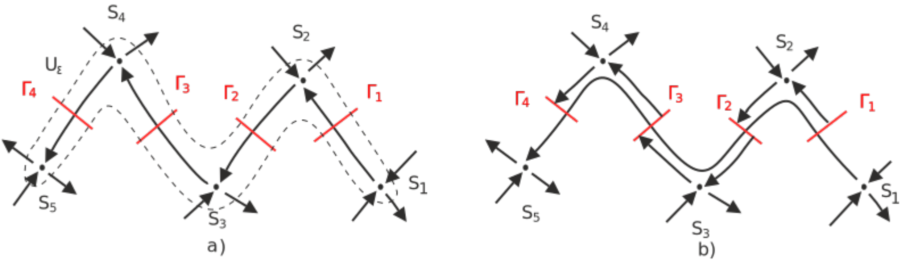

Рис.: **a) Базовые связки и их окрестность U_ε. b) Внутренняя связка.**

Определение

Сепаратрисную связку поля v, близкого к полю v_0, будем называть *внутренней* для базового набора седловых связок SC_i, $i = 1, \ldots, n$, поля v_0, если она целиком содержится в окрестности U_ε. Остальные связки поля v будем называть *внешними*.

Рис.: **Примеры внешних связок.**

Полицикл

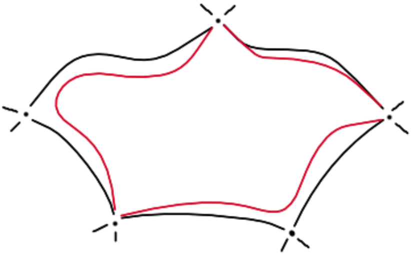

Рис.: **Может ли при возмущении данного (чёрного) полицикла в типичном семействе родиться нарисованный (красный) дочерний полицикл?**

Поля со связками как банаховы подмногообразия

Предложение

Пусть векторное поле $v_0 \in Vect^r(\mathcal{M})$, $r \geq 1$, *имеет седловые связки* $SC_1, \ldots, SC_n$. *Тогда множество всех близких к* v_0 *полей* $v \in Vect^r(\mathcal{M})$ *с близкими к связкам* $SC_1, \ldots, SC_n$ *седловыми связками образуют* C^r*-гладкое банахово подмногообразие* $\mathcal{X}_{SC_1 \ldots SC_n}$ *коразмерности* n.

Определение

Мы будем говорить, что C^1-гладкое семейство V *типично по отношению к набору седловых связок*, если оно трансверсально пересекает соответствующее этому набору банахово подмногообразие.

Теорема

Пусть $ISC_1, \ldots, ISC_l$ *— внутренние седловые связки, никакие две из которых не пересекают одну и ту же трансверсаль. Тогда любое* C^1*-гладкое многообразие* V*, типичное по отношению к базовым связкам, типично и по отношению к набору связок* $ISC_1, \ldots, ISC_l$.

Пример типичного по отношению к набору связок семейства

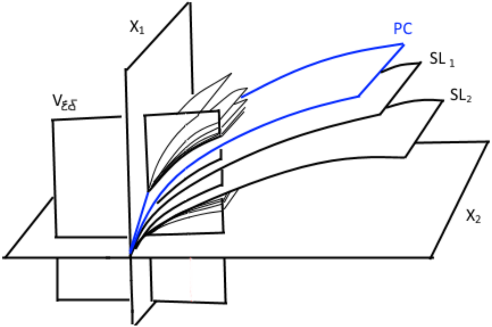

Рис.: **Двупараметрическое семейство, трансверсально пересекающее банахово подмногообразие коразмерности два, которое соответствует полям с полициклом «сердце», пересекает трансверсально и близкие банаховы подмногообразия меньшей коразмерности.**

Бифуркационные множества
Пусть $V = \{v_\delta\}_\delta$ — C^r-гладкое, $r \geq 1$, конечно-параметрическое семейство векторных полей с базой параметров $B = (\mathbb{R}^k, 0)$ в пространстве $Vect^r(\mathcal{M})$, трансверсально пересекающее банахово подмногообразие $\mathcal{X}_{SC_1 \ldots SC_n}$.

Определение

Бифуркационным множеством набора связок $ISC_1, \ldots, ISC_l$ будем называть множество всех таких значений параметра $\delta \in B$, что поле v_δ имеет набор связок $ISC_1, \ldots, ISC_l$.

Теорема (О гладкой структуре)

Пусть $ISC_1, \ldots, ISC_l$ — внутренние сепаратрисные связки, никакие две из которых не пересекают одну и ту же трансверсаль. Тогда бифуркационное множество $X_{ISC_1 \ldots ISC_l}$ является C^r-гладким многообразием коразмерности l.

Рождение дочерних полициклов

Теорема

Пусть C^3-гладкое конечно-параметрическое семейство V типично по отношению к связкам гиперболического полицикла γ векторного поля $v_0 \in Vect^3(\mathcal{M})$. Тогда в семействе V рождается любой дочерний полицикл, никакая связка которого не проходит хотя бы два раза вблизи связки исходного полицикла γ.

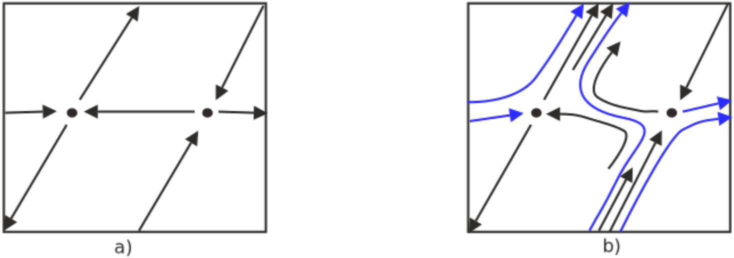

Рис.: **Пример дочернего полицикла на торе, к которому теорема 8 не применима.**

Монодромный полицикл

Рассмотрим произвольный монодромный гиперболический полицикл γ поля $v_0 \in Vect^r(\mathbb{S}^2)$, $r \geq 1$, образованный n различными сёдлами и n сепаратрисными связками.

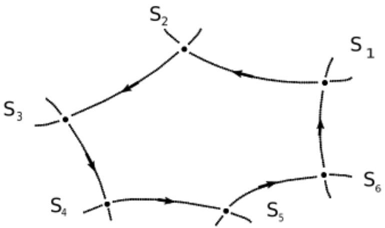

Рис.: **Пример монодромного гиперболического полицикла.**

Определение

Характеристическим числом седла называется модуль отношения его собственных значений, где отрицательное стоит в числителе.

Нижняя оценка на цикличность

Теорема

Пусть сёдла монодромного полицикла γ можно занумеровать таким образом (не обязательно в порядке обхода), что характеристические числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ его сёдел для любого $i = 1, \dots, n-1$ удовлетворяют неравенствам:

$$(\lambda_1 \dots \lambda_i - 1)(\lambda_1 \dots \lambda_{i+1} - 1) < 0. \tag{1}$$

Тогда при разрушении полицикла γ в типичном C^r-гладком n-параметрическом семействе V рождается как минимум n предельных циклов.

Стратегия доказательства:

1. от любого гиперболического полицикла из k вершин можно отщепить одно седло так, чтобы родился гиперболический полицикл из $k-1$ сёдел;
2. при отщеплении нужного седла рождается предельный цикл.

Повторяя процедуру n раз, получаем как минимум n предельных циклов.
Эту теорему в разное время формулировали и пытались доказать Рейн [R], Муртада [M], Хан, Ву и Би [HWB]. Каждое из их доказательств имеет свои недочёты.

M.Irwin, On the stable manifold theorem, Bull. London Math. Soc., 1970, v. 2, part 2, No. 5, p. 196-198.

M.Han, Y.Wu, P.Bi, Bifurcation of limit cycles near polycycles with n vertices, Chaos, Solitons and Fractals 22 (2004) 383-394.

AL Kelley, The stable, center-stable, center, center-unstable, and unstable-manifolds; The institute of advanced study, Princeton, and the university o California, 1966

A.Mourtada, Polycycles hyperboliques génériques à 3 ou 4 sommets, Thése de Doctorat. Université de Bourgogne, 1990.

J.W.Reyn, Generation of limit cycles from separatrix polygons in the phase plane, In: Martini, R. (eds) Geometrical Approaches to Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol 810. Springer, Berlin, Heidelberg, 1980. https://doi.org/10.1007/BFb0089983.

- В.Ш.Ройтенберг, Нелокальные двухпараметрические бифуркации на поверхностях, Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, Ярославский государственный технический университет, Ярославль, 2000г.
- J.Sotomayor, Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 43 (1974), p. 5-46.