Теоремы конечности для обобщенных якобианов с нетривиальным кручением

В.П. Платонов, В.С. Жгун, Г.В. Федоров

Пусть $\mathfrak{m}$ — некоторый набор эффективных дивизоров $\{S_1, \ldots, S_\ell\}$ кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ с непересекающимися носителями

$$S_i = \sum_j m_{\mathfrak{Q}_{ij}} \mathfrak{Q}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, \ell, \tag{1}$$

где $\mathfrak{Q}_{ij}$ — простые идеалы кольца $k[\widetilde{\mathcal{C}_0}]$, лежащие над простыми идеалами $\mathfrak{Q}_i = \pi^{*-1}(\mathfrak{Q}_{ij})$ кольца $k[\mathcal{C}_0]$. Для каждого i носитель S_i совпадает с множеством $\pi^*(\mathfrak{Q}_i)$, а кратности $m_{\mathfrak{Q}_{ij}}$ соответствуют индексам ветвления при разложении идеала

$$\pi^*(\mathfrak{Q}_i) k[\widetilde{\mathcal{C}_0}] = \prod_j \mathfrak{Q}_{ij}^{m_{\mathfrak{Q}_{ij}}}$$

в конечном расширении колец $k[\widetilde{\mathcal{C}_0}] \supset k[\mathcal{C}_0]$.

Степенью $\mathfrak{m}$ назовем сумму степеней дивизоров S_j. Носителем $\mathfrak{m}$ назовем объединение носителей S_j, рассматриваемых как дивизоры над $\overline{k}$.

Определение

Будем говорить, что рациональная функция $\alpha \in k(\widetilde{\mathcal{C}})$ обладает модулем $\mathfrak{m}$, если для каждого i существует ненулевая константа $c_{S_i} \in k$ (зависящая от α), такая, что для всех j выполнены сравнения

$$\nu_{\mathfrak{Q}_{ij}}(\alpha - c_{S_i}) \geqslant m_{\mathfrak{Q}ij}. \tag{2}$$

Теорема

Пусть k — поле характеристики нуль. Пусть $D \in \mathrm{Div}^0(\widetilde{\mathcal{C}})(\mathrm{k})$ — дивизор, представляющий класс $[D]$ конечного порядка N в J. Фиксируем любое целое $M \geq N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Множество модулей $\mathfrak{m}$ над полем k таких, что класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный M, бесконечно.*
2. *Множество модулей $\mathfrak{m}$ над полем k таких, что все входящие в $\mathfrak{m}$ простые дивизоры имеют кратность строго больше 1, а класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный M, конечно.*
3. *Множество модулей $\mathfrak{m}$, состоящих из одного эффективного дивизора $S \in \mathrm{Div}(\widetilde{\mathcal{C}})(\mathrm{k})$, и таких, что $J_{\mathfrak{m}}$ содержит нетривиальную унипотентную компоненту, а класс дивизора D имеет в группе $J_{\mathfrak{m}}$ конечный порядок, ограниченный числом M, конечно.*

Теорема

Пусть $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}^0(\widetilde{\mathcal{C}})(\mathrm{k})$ *— два дивизора, имеющие порядки* N_i *в* J*, и степени* $K_i = \deg^+(D_i)$*. Тогда число модулей* $\mathfrak{m}$*, для которых каждый дивизор* D_i *имеет конечный порядок* $M_i = l_i N_i$ *в группе* $J_{\mathfrak{m}}$*, конечно при условии, что* $M_1 K_1$ *и* $M_2 K_2$ *взаимно просты.*

Теорема

Пусть $\widetilde{\mathcal{C}}$ *— гладкая проективная кривая над полем алгебраических чисел* k *степени* n *над* $\mathbb{Q}$*. Пусть* $\pi : \widetilde{\mathcal{C}} \to Y$ *—* k*-морфизм простой степени* p *на некоторую гладкую проективную кривую* Y*. Зафиксируем* $D \in \mathrm{Div}^0(\widetilde{\mathcal{C}})(\mathrm{k})$ *— дивизор конечного порядка* N *в* $J(\widetilde{\mathcal{C}})$*, такой что* D *не является схемным прообразом дивизора на* Y*. Рассмотрим модуль* $\mathfrak{m} = \{S_1, \ldots, S_\ell\}$*, определенный над* k*, и такой, что носитель каждого* S_j *полностью содержится в некотором слое* $\pi^{-1}(y_j)$ *для* $y_j \in Y(\overline{k})$*. Тогда для любой константы* d *число модулей* $\mathfrak{m}$*, со степенью ограниченной* d *и таких, что* D *является классом конечного порядка в* $J_{\mathfrak{m}}(\widetilde{\mathcal{C}})$*, конечно.*

Следствие

Пусть $\widetilde{\mathcal{C}}$ *— гиперэллиптическая кривая над полем алгебраических чисел* k*. Рассмотрим модуль* $\mathfrak{m} = \{S_1, \ldots, S_\ell\}$*, определенный над* k *и такой, что носитель каждого* S_j *инвариантен относительно гиперэллиптической инволюции* $\imath$ *и состоит из двух точек, определенных над* $\overline{k}$*. Зафиксируем* $D \in \mathrm{Div}^0(\widetilde{\mathcal{C}})(\mathrm{k})$ *— дивизор, представляющий класс конечного порядка* N *в* J *такой, что* $D \neq \imath D$*. Тогда для любой константы* d *число модулей* $\mathfrak{m}$*, со степенью, ограниченной* d*, и таких, что* D *является классом конечного порядка в* $J_\mathfrak{m}$*, конечно.*

Напомним определение непрерывных дробей в функциональных полях. Пусть $P \in \mathcal{C}$ — не является точкой ветвления. Рассмотрим формальный степенной ряд $\beta = \sum\limits_{i=s}^{\infty} d_i v^i$, где $d_i \in \mathbb{K}$.

Назовем $[\beta] := \sum\limits_{i=s}^{0} d_i v^i$ *целой частью*, а $\{\beta\} := \beta - [\beta]$ — *дробной частью*. Пусть $a_0 = [\beta]$, $\beta_0 = \beta$. Определяем элементы a_i, β_i:

$$\beta_i = \frac{1}{\beta_{i-1} - a_{i-1}}, \quad a_i = [\beta_i].$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{3}$$

Теорема

Пусть k — поле алгебраических чисел, $\mathcal{L} = k(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле и b — некоторая положительная постоянная. Пусть $M = M(b)$ — множество многочленов $d \in k[x]$ со старшим коэффициентом 1 вида $d = \omega^2 f$, $\omega \in k[x]$, $\deg \omega \leqslant b$, таких, что элементы поля $\mathcal{L}$ с дискриминантом $d \in M$ обладают квазипериодическим разложением в непрерывную дробь, построенную в поле $k((1/x))$. Тогда множество M конечно.

Пример

Рассмотрим $k = \mathbb{Q}(a)$ *и*

$$f(x) = x^4 - a^2x^2 - \frac{a^4}{4}, \quad \omega(x) = x(x-a),$$

где $a \in \mathbb{Q}^*$ *— параметр. Тогда для любой квадратичной иррациональности* $\alpha \in k(x)(\sqrt{f})$ *с дискриминантом* $d = \omega^2 f$ *непрерывная дробь, построенная в поле* $k((1/x))$*, квазипериодическая. Пусть* α*, например, является корнем уравнения*

$$\omega^2(x)Z^2 - f(x) = 0.$$

Тогда α *имеет квазипериодическое разложение в непрерывную дробь в поле* $k((1/x))$*:*

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{\omega(x)} = \Bigg[1, -\frac{1}{2} + \frac{x}{a};$$

$$\overline{-2 - \frac{4x}{a}, \frac{1}{2} - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} - \frac{2x^4}{a^4}, -2 - \frac{4x}{a}, \frac{x}{a}, -\frac{4x}{a}}^{-1/4}\Bigg].$$

Пример

Рассмотрим $k = \mathbb{Q}(b)$ *и*

$$f(x) = x^4 + b, \quad \omega(x) = x^2,$$

где $b \in \mathbb{Q}^*$ *— параметр. Тогда для любой квадратичной иррациональности* $\alpha \in k(x)(\sqrt{f})$ *с дискриминантом* $d = \omega^2 f$ *непрерывная дробь, построенная в поле* $k((1/x))$, *квазипериодическая. Например, для элемента* $\alpha = \sqrt{f(x)}/x^2$ *его непрерывная дробь в поле* $k((1/x))$ *равна:*

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{x^2} = \left[1, \ \frac{1}{2} + \frac{2x^4}{b}; \ \overline{-4 - \frac{8x^4}{b}, \ 1 + \frac{2x^4}{b}}\right].$$

Длина квазипериода совпадает с длиной периода и равна 2. Степень фундаментальной единицы равна 2.

- В. П. Платонов, В. С. Жгун, Г. В. Федоров О конечности множества обобщенных якобианов с нетривиальным кручением над полями алгебраических чисел, Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления vol 513, 66–70, 2023
- Ж. П. Серр, Алгебраические группы и поля классов, Мир, 1968
- С. Ленг, Алгебраические числа, М. Мир, 1966
- J. P. Serre, Local fields, New York, Springer Science and Business Media, 2013