Однозначно разрешимые уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

В. И. Богачев

Даны $A = (a^{ij})_{i,j \le d}$ — отображение из $\mathbb{R}^d$ в пространство положительно определенных симметричных матриц и $b = (b^i)_{i \le d}$ — отображение из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, a^{ij} и b^i измеримы по Борелю,

$$L_{A,b} f = \sum_{i,j \le d} a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f + \sum_{i \le d} b^i \partial_{x_i} f.$$

Стационарное уравнение

$$L^*_{A,b}\sigma = 0 \tag{1}$$

имеет вероятностное решение σ, если σ — борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$, по которой a^{ij} и b^i локально интегрируемы и

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{A,b} f \, d\sigma = 0, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

В смысле обобщенных функций:

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\sigma) - \partial_{x_i}(b^i\sigma) = 0.$$

Для борелевской вероятностной меры ν на $\mathbb{R}^d$ семейство мер $\mu = (\mu_t)_{t\geq 0}$ называется вероятностным решением задачи Коши

$$\partial_t \mu_t = L^*_{A,b}\mu_t, \quad \mu_0 = \nu, \tag{2}$$

если почти все меры $\mu_t \geq 0$ вероятностные, функция $t \mapsto \mu_t(B)$ измерима по Борелю для всякого борелевского множества B в $\mathbb{R}^d$, a^{ij} и b^i локально интегрируемы по мере $\mu_t(dx)\,dt$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\nu = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L_{A,b} f\,d\mu_s\,ds \tag{3}$$

при $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$. Аналогично на $[0, T]$.

Вероятностные решения (1) и (2) есть при широких условиях, типичные условия с функцией Ляпунова: если матрица A непрерывна и невырождена, снос b локально ограничен и существует функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$ и $L_{A,b}V \leq -1$ вне компакта, то существует вероятностное решение эллиптического уравнения (1). Для существования вероятностного решения задачи Коши достаточно оценки $L_{A,b}V \leq C + CV$.
Может случиться, что (1) не имеет вероятностных решений, а (2) имеет. Простейший пример на прямой: $A = 1$, $b = 0$.

Однако даже для $A = 1$ и $b \in C^\infty(\mathbb{R})$ неизвестно, всегда ли при наличии вероятностного решения стационарного уравнения есть вероятностное решение (2).

Пусть $A = 1$ и $b \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда решение уравнения (2) (если существует) задается дважды дифференцируемой в смысле Соболева по x и один раз дифференцируемой в смысле Соболева по t плотностью $\varrho(x, t)$, $t > 0$, удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова для плотностей

$$\partial_t \varrho = \partial_x^2 \varrho - \partial_x(b\varrho).$$

Предположим, что существует вероятностное стационарное решение с плотностью $\varrho_0 = e^{-W}$. Тогда функция W дважды непрерывно дифференцируема и

$$b(x) = -W'(x) + \beta e^{W(x)},$$

Предположим также, что $\beta \neq 0$ и для $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$ выполнены условия

$$\lim_{|x|\to\infty} W(x) = +\infty, \qquad \lim_{|x|\to\infty} W'(x)e^{-W(x)} = 0.$$

Эти условия означают, что плотность решения и ее производная стремятся к нулю на бесконечности.

Теорема 1. При указанных условиях для всякой вероятностной меры ν на прямой задача Коши

$$\partial_t \varrho = \partial_x^2 \varrho - \partial_x (b \varrho)$$

с начальным условием ν имеет единственное вероятностное решение.

Начиная с $d = 2$, вероятностные решения (1) и (2) могут быть неединственными. При этом для каждого вероятностного решения σ уравнения (1) существует так называемая каноническая сильно непрерывная полугруппа субмарковских сжимающих операторов $\{T_t^\sigma\}$ на $L^1(\sigma)$, генератор которой продолжает $L_{A,b}$ с областью $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Когда матрица A локально липшицева и невырождена, а поле b локально ограничено, эта полугруппа может быть получена как предел решений начально-краевых задач для $L_{A,b}$ с нулевыми граничными условиями на шарах B_k радиуса k при $k \to \infty$.

Оператор T в $L^1(\sigma)$ — марковский, если $0 \leq T_t f \leq 1$ при $0 \leq f \leq 1$ (субмарковость) и $T_t 1 = 1$. Мера σ инвариантна относительно T, если

$$\int_{\mathbb{R}^d} Tf\, d\sigma = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\sigma$$

для всех ограниченных борелевских функций f. Пусть для всякой вероятностной меры ν на $\mathbb{R}^d$ задача Коши (2) имеет единственное вероятностное решение, причем для дираковских начальных условий $\nu = \delta_u$ решение $\mu_{u,t}$ является борелевским по u, t. Это условие выполнено в рассмотренной в теореме 1 ситуации и выполнено автоматически, если все меры μ_t вероятностные.

Теорема 2. На $L^1(\sigma)$ существует сильно непрерывная марковская операторная полугруппа $\{T_t\}_{t\geq 0}$, задаваемая формулой

$$T_t f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mu_{u,t}(dx)$$

на ограниченных борелевских функциях, причем мера σ инвариантна относительно нее. Если A и b непрерывны, то генератор полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$ продолжает $L_{A,b}$ с области $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Открытые вопросы:
1. Пусть эллиптическое уравнение (1) на прямой с $A = 1$ и гладким b имеет вероятностное решение. Верно ли, что для всякого дираковского начального распределения задача Коши (2) имеет вероятностное решение? Верно ли, что хотя бы для какого-то дираковского начального распределения есть вероятностное решение?
2. Пусть $A = I$, $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — гладкое и $(\mu_t)_{t\geq 0}$ — вероятностное решение уравнения (2). Верно ли, что все меры μ_t (а не лишь почти все) являются вероятностными? Есть контрпример, когда b зависит еще и от времени.

3. Пусть $A = I$, $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — гладкое и для каждой дираковской меры $\nu = \delta_a$ есть единственное вероятностное решение (2) и $\varrho(a, x, t)$ — его плотность, гладкая по (x, t), $t > 0$. Непрерывна ли функция $\varrho(a, x, t)$ по a?