ПРОДВИЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В.П. Бурский
Московский Физико -Технический Институт ,
ГУ Институт Прикладной Математики и Механики (Донецк)
E-mail: bvp30@mail.ru

Математический Институт им. В.А. Стеклова РАН –
19 сентября 2024
Общеинститутский семинар

1. История вопроса

Ж. Адамар (1902) – корректность граничной задачи

Дж. фон Нейман (1929) – идея понимать граничную задачу как задание расширения дифференциального оператора

Дж. фон Нейман, М. Стоун, К. Фридрихс – самосопряженные расширения симметрического оператора

Дж. Калкин (1939) и М.Г. Крейн (1944-1947) – это же применительно к уравнениям в частных производных

2. Общая теория граничных задач

М.Й. Вишик (1952) – основание теории

З.Я Шапиро (1053), Я.Б. Лопатинский (1953) -эллиптическая теория

Л. Хермандер (1955), А.А. Дезин (1956-2008) – развитие общей теории.

Ф. Йон, С.Л. Соболев, Ш. Агмон, А.В. Бицадзе, Р.А. Александрян, Г. Гудмунсдоттир, М.М. Лаврентьев, Т.И. Зеленяк, Б.Й. Пташник, В.П. Михайлов, И.В. Волович и В.Ж. Сакбаев, Н.Е. Товмасян, М.В. Фокин, А.П. Солдатов и др. – некоторые аспекты теории.

М.Й.Вишик,Г.Грубб,А.Н.Кочубей,М.Л.Горбачук,Ф.С.Рофе-Бекетов, М.М.Маламуд, А.А.Шкаликов, др. – самосопряженные расширения

АНОНС.

I. Общая теория. **Теорема 1.** Пусть $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ -общий дифференциальный оператор в области Ω. В условиях Вишика максимальный оператор L раскладывается в прямую сумму

$$L = L_0 \oplus L_C \qquad (L)$$

своей внутренней части L_0 и граничной части L_C.

II. Вычисления. Предложены условия разрешимости общей граничной задачи для уравнения с постоянными комплексными коэффициентами без типа в ограниченной области с гладкой границей. В частности, для уравнения вида

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = (a^1, \nabla)(a^2, \nabla)\, u = f \in L_2(\Omega), \quad (8)$$

(ниже $(\tilde{a}^1, a^1) = 0,\ (\tilde{a}^2, a^2) = 0$) справедлива следующая

Теорема 8. Если $u \in W_2^2(\Omega)-$ решение задачи Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения (8) в области Ω, то для следа $\alpha = u'_{\nu^*}|_{\partial\Omega}$ (конормальная производная) выполнены следующие соотношения (11),(12), где по заданным последовательностям $\mu_N^1, \mu_N^2, N \in \mathbb{N} \cup 0$, которые строятся по f, ищется функция $\alpha(s)$:

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(s)(x, \tilde{a}^1)^N ds = \mu_N^1 \qquad \left(= \int_\Omega f(x)(x, \tilde{a}^1)^N\, dx\right), \qquad (11)$$

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(s)(x, \tilde{a}^2)^N ds = \mu_N^2 \qquad \left(= \int_\Omega f(x)(x, \tilde{a}^2)^N\, dx\right), \qquad (12)$$

Это некоторая новая проблема моментов. Классическая тригонометрическая проблема моментов здесь получится, если положить $\Omega-$ единичный круг, а $L=\Delta$, тогда $\tilde{a}^1=(1,i),\ \tilde{a}^2=(1,-i)$. Здесь задача нахождения $u_\nu|_{\partial\Omega}$ по данной f в задаче $\Delta u=f, u|_{\partial\Omega}=0$ превращается в задачу нахождения функции на окружности по данным коэффициентам Фурье (т.е. в теорию рядов Фурье).
Вопрос о единственности решения задачи Дирихле для уравнения (8) превращается в вопрос об индетерминированности проблемы моментов (11),(12), $\mu^1_N=\mu^2_N=0,\ \alpha\not\equiv 0$.
Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны:

$$u_{xy}=0,\ u|_{\partial\Omega}=0. \tag{13}$$

Из теоремы 8 этот вопрос эквивалентен вопросу о существовании нетривиальной функции $\alpha(s)$ такой, что

$$\int_{\partial\Omega}\alpha(s)x^N ds=0,\ \int_{\partial\Omega}\alpha(s)y^N ds=0. \tag{14}$$

Задача (13) и проблема (14) были изучены в эллипсе, а также в области с биквадратной границей.

Теорема 9. Задача (13) (и проблема (14)) имеет нетривиальное решение в $W_2^2(\Omega)$ над эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \tag{15}$$

В этом случае имеется счетное число линейно независимых полиномиальных решений.

Теорема 10. (совместно с Жедановым А.С.) Задача (13) (и проблема (14)) имеет нетривиальное решение в $W_2^2(\Omega)$ над областью Ω с биквадратной границей

$$\partial\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | ax^2y^2 + bx^2y + cxy^2 + dxy + ex + fy + g = 0\}$$

тогда и только тогда, когда

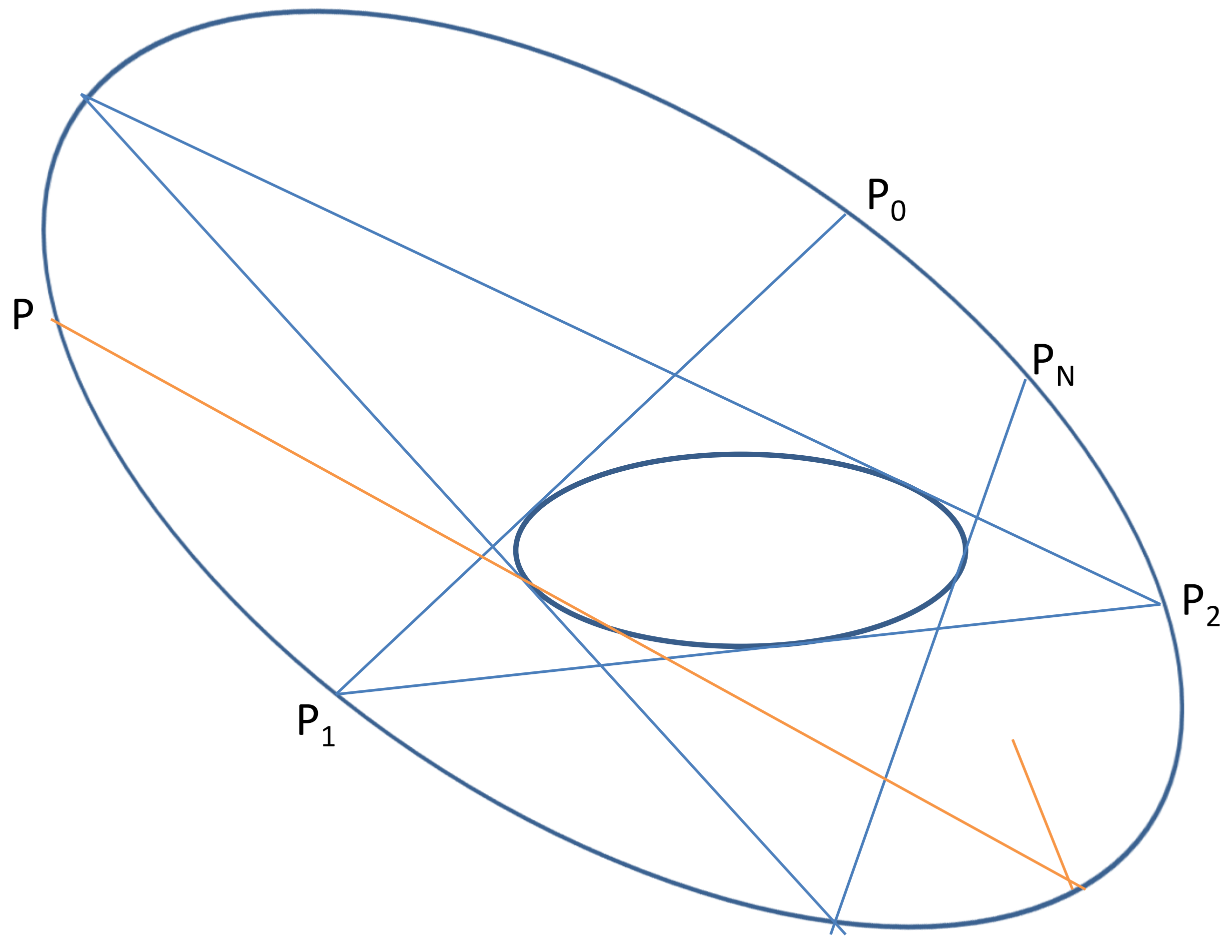
$$\frac{\theta}{K'} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \tag{16}$$

где числа θ и K' вычисляются в уравнениях с эллиптическими функциями в пяти различных конфигурациях биквадратной кривой. Тогда имеется счетное число линейно независимых решений.

III. Приложения.

Теорема 11. (совместно с Жедановым А.С.) Классическая проблема Понселе разрешима **тогда и только тогда, когда** задача (13) (и проблема (14)) имеет нетривиальное решение. При этом p — период Понселе.

Poncelet's porism

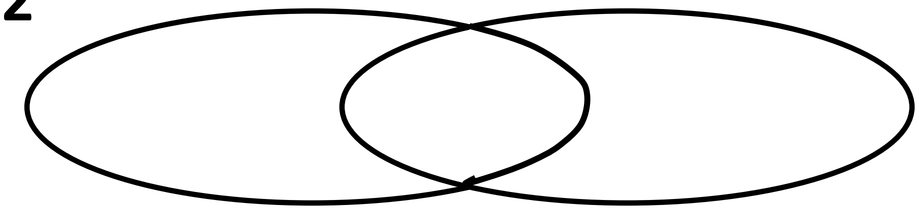


Точка P_0 периодическая с периодом N, если $P_N = P_0$. Большая теорема Понселе:

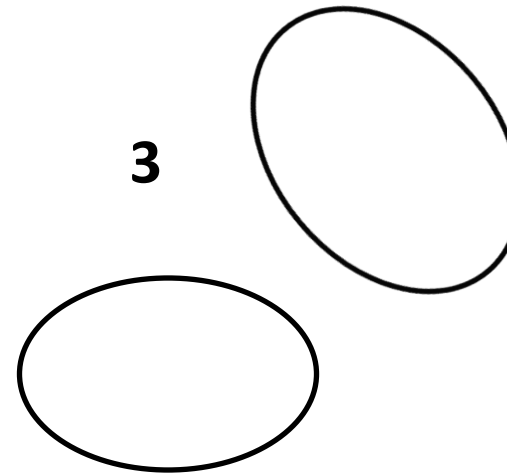
Если на внешнем еллипсе имеется хотя бы одна периодическая точка P_0, то и любая точка P этого еллипса является периодической с тем же периодом N.

Другие проективно разные случаи расположения коник

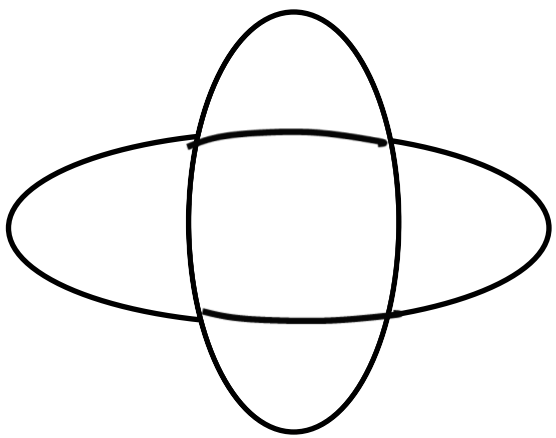
2



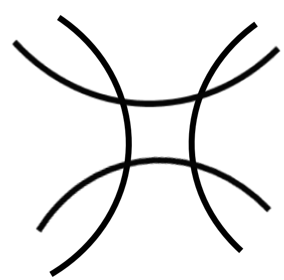
3



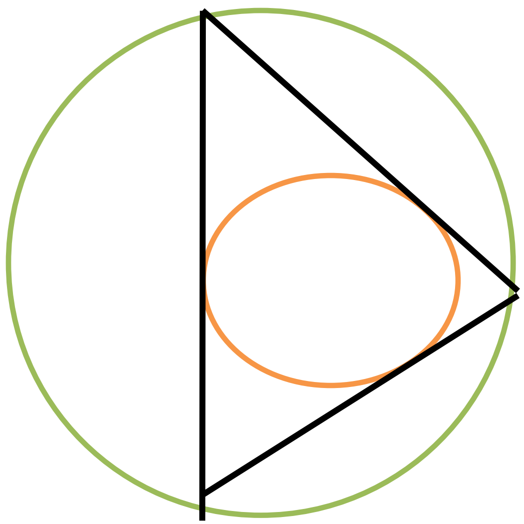
4

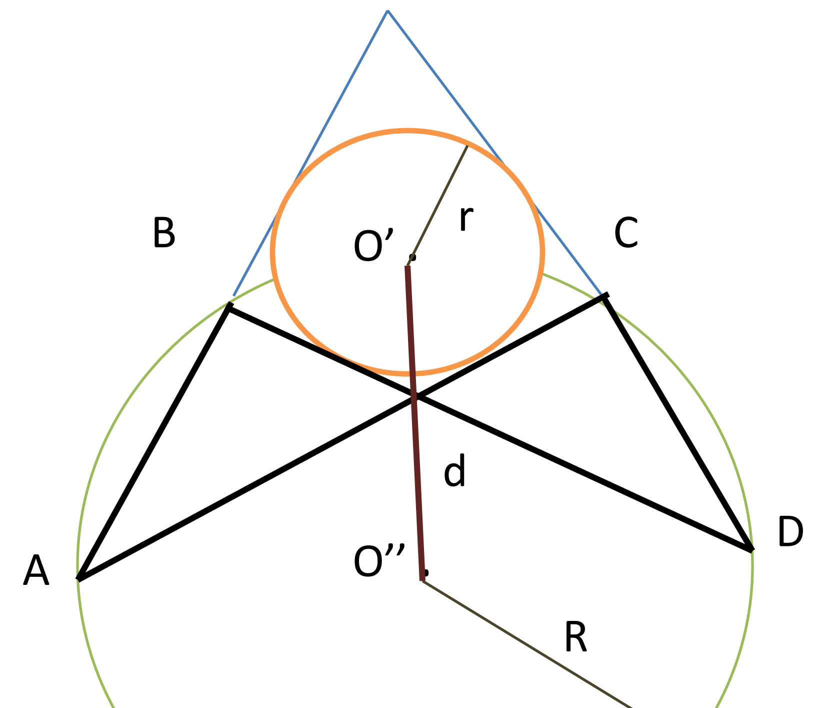


5



Понселе поризм в форме двух окружностей (бицентрические многоугольники)





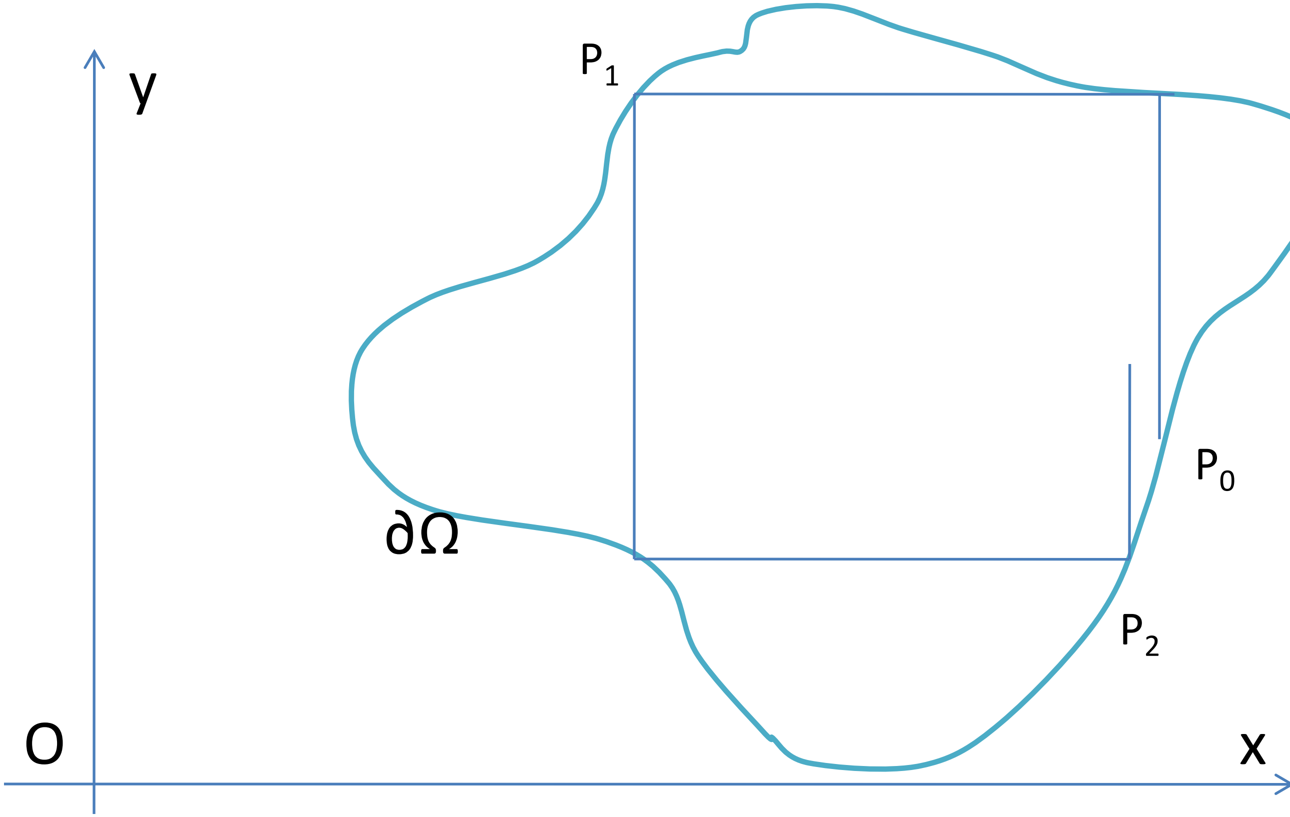
n-угольник называется бицентрическим, если у него есть вписанная и описанная окружности. Тогда числа R,r,d,n связаны между собой соотношениями (Richelot, 1830; …;Kerawala, 1947)

$$\lambda = 1 + \frac{2c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)},\quad \omega = \cosh^{-1}\lambda,\quad k^2 = 1 - e^{-2\omega}.\ \mathrm{sc}\left(\frac{K(k)}{n}, k\right) = \frac{c\sqrt{b^2 - a^2} + b\sqrt{c^2 - a^2}}{a(b + c)},$$

где $a = \dfrac{1}{R+d}, b = \dfrac{1}{R-d}, c = \dfrac{1}{r}$ sc (α)=sn (α) /cn (α), K(k)- эллиптический интеграл I-го рода.

Отображение Фрица Джона (Йона) для граничной задачи в Ω

$$u_{xy} = 0, \; u\big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (1)$$



Область Ω – выпуклая для характеристик
$X = C_1$, $Y = C_2$

Точка P_0 -- периодическая с периодом N, если $P_N = P_0$. Теоремы Джона :

1. *Если граница ∂Ω области Ω аналитична, то осуществляется одна из двух возможностей: 1) у каждой точки P_0 её орбита $\{P_k, k \in Z\}$ плотна на ∂Ω,*
   2) любая точка $P \in \partial\Omega$ периодична с одним и тем же периодом N.
2. *Если на границе ∂Ω области Ω множество периодических точек пусто, конечно или счетно, то задача Дирихле (1) имеет только тривиальные решение.*

Уравнение

$$P^2 - RQ^2 = L \tag{17}$$

–уравнение Пелля-Абеля, где по заданному вещественному полиному $R(t)$ одной переменной t четного порядка и заданному $L \in \mathbb{R}$ ищутся полиномы $P(t)$ и $Q(t)$, что выполнено уравнение (17).

Теорема 12. (Р.Абель, Ж.Лиувилль, В.В. Голубев, др.)
1). Для полинома $R(t), \deg R = 2m$ найдется полином $\rho(t)$ такой, что интеграл $\int \frac{\rho}{\sqrt{R}} dt$ вычисляется в элементарных функциях (степени, экспоненты, логарифмы, тригонометрические функции) **тогда и только тогда, когда** разрешимо уравнение (17).
2). В этом случае $\exists A \in \mathbb{R}, \int \frac{\rho}{\sqrt{R}} dt = A \ln \frac{P+\sqrt{R}Q}{P-\sqrt{R}Q}$, $\deg \rho = m-1$ и $\rho/A = 2P'/Q$, а полиномы P и Q удовлетворяют уравнению (17) с $L=1$

Теорема 13. (совместно с Жедановым А.С.) Для заданного полинома $R(t)$ 4-го порядка можно построить биквадратную кривую из теоремы 10 так, что разрешимость уравнения (17) будет **равносильна** нетривиальной разрешимости проблемы моментов (14) или задачи Дирихле (13) и равносильна разрешимости соответствующей проблемы Понселе с четным периодом.

Хорошо известно, что условием фредгольмовости общей дифференциальной граничной задачи для линейного правильно эллиптического уравнения является условие Я.Б. Лопатинского. Автором было предложено условие фредгольмовости общей дифференциальной граничной задачи для неправильно эллиптического уравнения

$$\mathcal{L}\, u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = h. \qquad (18)$$

Это условие записывается в виде двух условий Лопатинского для двух граничных задач с правильно эллиптическими уравнениями, которые построены по исходной задаче. А именно, справедлива следующая

Теорема 14. 1). Задача $Lu = f,\ B_j u = 0,\ j = 1, ..., k$ фредгольмова тогда и только тогда, когда обе задачи
$\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}\, u = f,\ B_j u = 0,\ B_i^+ \mathcal{L} u = 0$ и
$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^+ v = g,\ B_i^+ v = 0,\ B_j \mathcal{L}^+ v = 0$
– фредгольмовы. Здесь $j = 1, ..., \kappa\ , i = 1, ..., m - \kappa$

ОСНОВНОЙ ТЕКСТ.

I. Общая теория.

Пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

–дифференциальная операция общего вида, $D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$, a_α– комплекснозначные функции, $\mathbb{R}^n \supset \Omega$– произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Операция $\mathcal{L}$ порождает формально-сопряженную операцию

$$\mathcal{L}^+ \cdot = \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha (a_\alpha^*(x) \ \cdot), \quad \text{ниже } H := L_2(\Omega)$$

где $a_\alpha^*(x)$– комплексно-сопряженная функция.

Минимальный оператор L_0 определен как замыкание оператора $\mathcal{L}$, первоначально заданного на $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика

$$\|u\|_L^2 = \|u\|_H^2 + \|\mathcal{L}u\|_H^2.$$

Минимальный оператор L_0^+ аналогично порожден нормой

$$\|u\|^2_{L^+} = \|u\|^2_H + \|\mathcal{L}^+ u\|^2_H$$

.

Максимальные операторы L и L^+ определены как

$$L = (L_0^+)^*, \quad L^+ = (L_0)^*$$

с помощью сопряжения * в гильбертовом пространстве H. Области определения

$$D(L_0),\ D(L),\ D(L_0^+),\ D(L^+)$$

этих операторов являются гильбертовыми пространствами с соответственными нормами

$$\|u\|^2_L \text{ и } \|u\|^2_{L^+}.$$

Введем для оператора L граничное пространство $C(L)$ как фактор-пространство

$$C(L) = D(L)/D(L_0)$$

и отображение Γ как фактор-отображение

$$\Gamma : D(L) \to C(L).$$

Рассмотрим следующие **условия Вишика**:

оператор $L_0 : D(L_0) \to H$ **имеет непрерывный левый обратный** (1)

оператор $L_0^+ : D(L_0^+) \to H$ **имеет непрерывный левый обратный** (2)

Условие (1) очевидным образом эквивалентно неравенству

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \; \|\varphi\|_H \leq C\|\mathcal{L}\varphi\|_{\mathcal{H}}. \tag{3}$$

Условия Вишика (1),(2) в ограниченной области доказаны для следующих классов дифференциальных операторов:

i) скалярные операторы с постоянными коэффициентами,

ii) скалярные операторы главного типа с постоянной старшей частью: $L = P_0(D) + \sum_{j=1}^N C_j(x)P^j(D)$, (P)

$C_j \in C^\infty(\Omega), ord(P^j) < ord(P_0)$.

iii) скалярные операторы постоянной силы: $D(P_0^j) \subset D(P_0^0)$

iv) матричные операторы с постоянными комплексными коэффициентами со свойством Панеяха-Фугледе,

v) матричные операторы, равномерно эллиптические по Дуглису-Ниренбергу в области с гладкой границей.

Мы имеем короткие точные последовательности

$$0 \to \ker L \to D(L) \xrightarrow{L} H \to 0, \qquad 0 \to D(L_0) \xrightarrow{L_0} \operatorname{Im} L_0 \to 0$$

последовательности ортогонального разложения и факторизации

$$H = \operatorname{Im} L_0 \oplus \ker L^+, \qquad 0 \to D(L_0) \to D(L) \xrightarrow{\Gamma} C(L) \to 0$$

При условиях (1),(2) получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \operatorname{Im} L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\operatorname{Im}} & & \\
0 & \to & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & H & \to & 0 \\
 & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\operatorname{Im}} & & \\
0 & \to & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & \ker L^+ & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \qquad (D)$$

где $i_C(u + \ker L_0) = u + D(L_0)$, $L_C(u + D(L_0)) = Lu + \operatorname{Im}(L_0)$.

Теорема 1. *В условиях (1),(2) максимальный оператор L раскладывается в прямую сумму*

$$L = L_0 \oplus L_C \qquad (L)$$

своей внутренней части L_0 и граничной части L_C.

Однородной граничной задачей называется задача нахождения решения соотношений

$$Lu = f, \quad \Gamma u \in B, \tag{4}$$

где B — некоторое линейное подпространство в граничном пространстве $C(L) = D(L)/D(L_0)$, определяющее граничную задачу. Задача (4) называется **корректной**, если оператор

$$L_B = L|_{D(L_B)}, \qquad \text{где} \;\; D(L_B) = \Gamma^{-1}B$$

является **разрешимым расширением** оператора L_0, т.е. если оператор

$$L_B : D(L_B) \to H$$

имеет непрерывный двусторонний обратный L_B^{-1} и называется **вполне корректной**, если оператор L_B^{-1} — компактен в H.

Теорема 2 (М.Й. Вишик). *1). У оператора L_0 существует разрешимое расширение (и для оператора L существует корректная граничная задача (4)) тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и (2) вместе.*

2). Имеет место разложение в прямую сумму

$$D(L) = D(L_0) \oplus \ker L \oplus W, \text{ где } L\,W = \ker L^+. \quad (V)$$

3. Следы L_2-решения на границе области. Построим для общего оператора $L = L(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ формулу Грина для гладких u и v:

$$\int\limits_{\Omega} (Lu\,\overline{v} - u\,\overline{L^+ v})\;dx = \sum_{q=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-q-1)} u\;\overline{\partial_\nu^q v}\;ds, \qquad (5)$$

где L^+ — формально сопряженный оператор, $L_{(j)}\,u$— линейное дифференциальное выражение порядка j, $j = 0, ..., m-1$. Выражения $L_{(j)}\,u$ получаются для гладких функций u и v при перебрасывании производных от $(Lu, v)_H$ к $(u, L^+ v)_H$. Пусть $D(\tilde{L})$ означает замыкание $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $D(L)$.

Теорема 3. Для любой функции $u \in D(\tilde{L})$ существуют обобщенные функции $L_{(j)}\,u \in H^{-j-1/2}(\partial\Omega)$ такие, что формула Грина (5) выполнена для любой функции $v \in H^m(\Omega)$.

Теорема 4. Элемент $u \in D(\tilde{L})$ принадлежит пространству $D(L_0)$ тогда и только тогда, когда его все L-следы тривиальны: $L_k\,u = 0,\ k = 0, 1, ..., m-1.$

Поэтому общую линейную дифференциальную граничную задачу следует записывать через L-следы:

Теорема 5. При условиях $D(\tilde{L}) = D(L)$, $D(\tilde{L}^{+}) = D(L^{+})$ общая линейная дифференциальная граничная задача $\Gamma u \in B$ для уравнения $Lu = f$ в $L_2(\Omega)$ записывается в виде

$$B_i^0 L_{(0)} u + B_i^1 L_{(1)} u + \ldots + B_i^{m-1} L_{(m-1)} u = 0, \quad i = 1, \ldots, l \quad (6)$$

где $B_i^k : H^{-k-1/2}(\partial\Omega) \to H^{-i-1/2}(\partial\Omega)-$ данные операторы.

Условия $D(\tilde{L}) = D(L)$, $D(\tilde{L}^{+}) = D(L^{+})$ в ограниченной области доказаны для следующих классов операторов:

i) скалярные операторы с постоянными коэффициентами в области с условием T Хермандера,

ii) для скалярного линейного равномерно эллиптического оператора в любой области с условием конуса,

iii) для гипоэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в любой области,

iv) для любого скалярного дифференциального оператора вещественного главного типа в любой области, компактно вложенной в исходную область.

II. Вычисления. Рассмотрим ортогональное разложение

$$H = \operatorname{Im} L_0 \oplus \ker L^+, \quad f = f_0 + f_C.$$

Применяя теорию оснащенных пространств к тройке $D(L_0) \subset H \subset D'(L_0)$, получена следующая

Теорема 6. При условиях (1),(2)

1) оператор $\mathcal{M} = \mathcal{L}^+\mathcal{L} : D(L_0) \to D'(L_0)$ – линейный изоморфизм, поэтому функцию f_C можно получить так:

$$f_C = f - L_0 \mathcal{M}^+ \mathcal{L}^+ f \in \ker L^+,$$

2) для каждого решения $u \in D(L)$ уравнения $Lu = f$ существует единственное решение u_C уравнения

$$L_C u_C = f_C, \text{ где } u = u_0 + u_C, \quad Lu_0 = f_0.$$

Объяснение. Общая граничная задача

$$Lu = f \in H, \; \Gamma u \in B$$

сводится к граничной задаче

$$Lu = f_C \in \ker L^+, \; \Gamma u \in B$$

а для оператора с постоянными коэффициентами – к задаче

$$Lu = Q(x)e^{i(x,\xi)}, \; \xi \in \Lambda^+, \; \Gamma u \in B,$$

где $Q \in C^n$, Λ^+ – многообразие нулей символа $\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha^* \xi^\alpha$

.

Используется аппроксимационная теорема (Мальгранж):

Теорема 7. Каждое решение $f \in H$ уравнения $L^+ f = 0$ в выпуклой области Ω может быть приближено

1) полиномиально-экспоненциальными решениями $Q(x)e^{i(x,\xi)}$, $\xi \in \Lambda^+ = \overline{\Lambda}$, $\Lambda-$ алгебраическое многообразие нулей символа $\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ в общем случае,

2) экспоненциальными решениями $Q(x)e^{i(x,\xi)}$, $\xi \in \Lambda^+$, если символ $\sum_{|\alpha|\leq l} a_\alpha \xi^\alpha$ исходного оператора разлагается в произведение различных неприводимых полиномов, то

3) полиомиальными решениями $Q(x)$, если каждый сомножитель символа равен нулю в нуле.

Подставим в формулу Грина (была формула(5))

$$\int\limits_\Omega (Lu\,\overline{v} - u\,\overline{L^+ v})\, dx = \sum_{q=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-q-1)} u\, \overline{\partial_\nu^q v}\, ds,$$

функции $v = e^{i(x,\xi)}$, $L^+ v = 0$, $Lu = f = e^{i(x,\eta)}$, получим

$$\int\limits_\Omega e^{i(x,\bar\eta-\bar\xi)} dx = \sum_{q=0}^{m-1} \int\limits_{\partial\Omega} L_{(m-q-1)} u\, (i\nu(x),\bar\xi)^q\, e^{i(x,\bar\xi)}\, ds_x \quad (7)$$

где $\xi \in \Lambda, \eta \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^n, \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha = 0\}$.

Если символ является однородным полиномом, то каждый сомножитель символа равен нулю в нуле и экспоненты в формуле (7) можно заменить однородными полиномами.
В частности, для уравнения (с произвольными комплексными коэффициентами) вида

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = (a^1, \nabla)(a^2, \nabla)\, u = f \in H, \tag{8}$$

из формулы Грина (7) на кривой $\partial\Omega$ получается пара условий, которым удовлетворяют следы решения $u \in W_2^2(\Omega)$:

$$\int_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} + \kappa u'_s\right](x, \tilde{a}^1)^N ds = \mu_N^1 = \int_\Omega f(x)(x, \tilde{a}^1)^N\, dx, \tag{9}$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} - \kappa u'_s\right](x, \tilde{a}^2)^N ds = \mu_N^2 = \int_\Omega f(x)(x, \tilde{a}^2)^N\, dx, \tag{10}$$

где s— натуральный параметр на $\partial\Omega$, $\kappa = \det(a^1, a^2)/2$, $(\tilde{a}^k, a^k) = 0$, μ_N^1, μ_N^2— заданные последовательности, u'_{ν_*}— производная по конормали, которая определяется из равенства:

$$\int\limits_\Omega (Lu\,\overline{v} - u\,\overline{L^+ v})\; dx = \int\limits_{\partial\Omega} (u'_{\nu_*}\,\overline{v} - u\,\overline{v'_{\nu_*}})\, ds,$$

Теорема 8. Если $u \in W_2^2(\Omega)$– решение задачи Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения (8) в области Ω, то для следа $\alpha = u'_{\nu^*}|_{\partial\Omega}$ выполнены

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(s)(x, \tilde{a}^1)^N ds = \mu_N^1, \tag{11}$$

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(s)(x, \tilde{a}^2)^N ds = \mu_N^2. \tag{12}$$

Это некоторая новая проблема моментов. Классическая тригонометрическая проблема моментов здесь получится, если положить Ω– единичный круг, а $L = \Delta$, тогда $a^1 = (1, i)$, $a^2 = (1, -i)$. Здесь задача нахождения $u_\nu|_{\partial\Omega}$ по данной f в задаче $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = 0$ превращается в задачу нахождения функции на окружности по данным коэффициентам Фурье.

Вопрос о единственности решения задачи Дирихле для уравнения (8) превращается в вопрос об индетерминированности проблемы моментов (11),(12), $\mu_N^1 = \mu_N^2 = 0$, $\alpha \not\equiv 0$.

Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны:

$$u_{xy} = 0, \;\; u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Этот вопрос эквивалентен вопросу о существовании нетривиальной функции $\alpha(s)$ такой, что

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(s) x^N ds = 0, \; \int_{\partial\Omega} \alpha(s) y^N ds = 0. \tag{14}$$

Задача (13) и проблема (14) были изучены в эллипсе, а также в области с биквадратной границей.

Теорема 9. Задача (13) (и проблема (14)) имеет нетривиальное решение в $L_2(\Omega)$ над эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Теорема 10. (совместно с Жедановым А.С.) Задача (13) (и проблема (14)) имеет нетривиальное решение в $L_2(\Omega)$ над областью Ω с биквадратной границей

$$\partial\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | ax^2y^2 + bx^2y + cxy^2 + dxy + ex + fy + g = 0\}$$

тогда и только тогда, когда $\frac{\theta}{K'} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, где числа θ и K' вычисляются в уравнениях с эллиптическими функциями в пяти различных конфигурациях биквадратной кривой.

III. Приложения.

Теорема 11. (совместно с Жедановым А.С.) Классическая проблема Понселе разрешима **тогда и только тогда, когда** задача (13) (и проблема (14)) имеет нетривиальное решение. При этом p – период Понселе.

Уравнение

$$P^2 - RQ^2 = L \tag{17}$$

–уравнение Пелля-Абеля, где по заданному вещественному полиному $R(t)$ одной переменной t четного порядка и заданному $L \in \mathbb{R}$ ищутся полиномы $P(t)$ и $Q(t)$, что выполнено уравнение (17).

Теорема 12. (Р.Абель, Ж.Лиувилль, В.В. Голубев, др.)
1). Для полинома $R(t), \deg R = 2m$ найдется полином $\rho(t)$ такой, что интеграл $\int \frac{\rho}{\sqrt{R}} dt$ вычисляется в элементарных функциях (степени, экспоненты, логарифмы, тригонометрические функции) **тогда и только тогда, когда** разрешимо уравнение (17).
2). В этом случае

$$\exists A \in \mathbb{R}, \int \frac{\rho}{\sqrt{R}} dt = A \ln \frac{P + \sqrt{R}Q}{P - \sqrt{R}Q},$$

$\deg \rho = m - 1$ и $\rho/A = 2P'/Q$, а полиномы P и Q удовлетворяют уравнению (17) с $L = 1$.

Теорема 13. (совместно с Жедановым А.С.) Для заданного полинома $R(t)$ 4-го порядка можно построить биквадратную кривую из теоремы 10 так, что разрешимость уравнения (17) будет **равносильна** нетривиальной разрешимости проблемы моментов (14) или задачи Дирихле (13) и равносильна разрешимости соответствующей проблемы Понселе с четным периодом.

Рассмотрим еще одну классическую задачу – задачу Чебышёва о нахождении полинома наименьшего уклонения на подмножестве вещественной оси. Пусть $I = [-1,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} (a_j, b_j)$ – система m замкнутых отрезков и нужно найти полином заданной степени n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля на множестве I, т.е. найти минимум функционала $\|t^n - P_{n-1}(t)\|_{C(I)}$. Общий полином $P_{n-1}(t)$ пробегает конечномерное линейное подпространство и задача может быть интерпретирована как задача о нахождении елемента из конечномерного подпространства банахового пространства, ближайшего к заданному. Но, поскольку пространство $C(I)$ –

нерефлексивно, такой элемент не обязан существовать. Методом, восходящим к П.Л.Чебышёву, удается, однако, доказать существование такого минимального многочлена (см. Н.И. Ахиезер-Лекции). Если на множестве I полином P_n — минимален, то, возможно, он остается минимальным и на некотором более широком замкнутом подмножестве $E \subset [-1, 1]$, называемом n-расширением множества I. Такое подмножество $E = [-1, 1] \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} (\alpha_j, \beta_j)$, которое нельзя расширить, т.е. у которого нет других расширений, называется n-правильным (Содин, Юдицкий). Если теперь выбрать полином R в виде

$$R = (t^2 - 1) \prod_{j=1}^{m-1} (t - \alpha_j)(t - \beta_j),$$

то оказывается, что разрешимость уравнения Пелля-Абеля (17) с неизвестными $P(t), Q(t)$, $L = \mathrm{const} > 0$ равносильна n-правильности множества E, при этом полином P дает решение экстремальной задачи, а число $\sqrt{L}$ – минимальное

уклонение (минимум нормы).
Интересно, что при этом множество E представляет собой непрерывный спектр (который является абсолютно непрерывным и двукратным) некоторой бесконечной в обе стороны якобиевой (трехдиагональной) самосопряженной вещественной периодической матрицы в l^2 тогда и только тогда, когда множество E – n-правильно или когда уравнение Пелля-Абеля (17) разрешимо. Заметим, что известная задача Чебышёва ставится для случая одного интервала $E = [-1, 1],\ R = (1 - t^2)$, а задача Ахиезера – для случая двух интервалов ($\deg R = 4$) и полинома четвертой степени $E = [-1, a] \cup [b, 1], a < b,\ R = (1 - t^2)(t - a)(t - b)$.
Отметим, что имеется несколько различных критериев разрешимости уравнение Пелля-Абеля с полиномом, отвечающем задаче Ахиезера, среди которых – известный "дикообраз" Золотарева.

Литература

1. М.Й. Вишик. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.– Тр. Моск. мат, о-ва, 1(1952), с.187-246.
2. Я.Б. Лопатинский. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.– Укр.матем.журнал, 1953. Т.5, №2, с.123-151.
3. Л. Хёрмандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.– М.: ИЛ, 1959.
4. А.А. Дезин. Общие вопросы теории граничных задач.– М.:Наука, 1980.
5. В.П. Бурский, Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев, Наукова думка, 2002.
6. V.P. Burskii, A.S. Zhedanov, On Dirichlet, Poncelet and Pell-Abel problems.– Communications on pure and applied analysis. Vol. 12, No. 4, July 2013. Pages : 1587 – 1633.

7. Л.М. Содин, П.М. Юдицкий, Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах вещественной оси.– Алгебра и анализ, т.4 (1992), вып.2, с.1-61.
8. В.А. Малышев, Уравнение Абеля.– Алгебра и анализ, т.13 (2001), вып. 6, стр. 1-55.